

MODELO PARTÍCULA MALLA PARA UN PLASMA-HAZ ELECTRÓNICO

HERLING GONZÁLEZ ÁLVAREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

2005

MODELO PARTÍCULA MALLA PARA UN PLASMA-HAZ ELECTRÓNICO

HERLING GONZÁLEZ ALVAREZ

Tesis de Grado para optar al título de
MAESTRÍA EN FÍSICA

Director:

Dr. VALERI DOUGAR JABON

Laboratorio Física y Tecnología del Plasma

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2005

*...a ti, pues haz sabido recordar el camino para ir en pos de mayores sueños e
...ideales.*

Tabla de Contenido

	Pag
RESUMEN	1
ABSTRACT	1
INTRODUCCIÓN	3
1. Ondas en un Plasma No Magnetizado	4
1.1. Neutralidad Eléctrica del Plasma	4
1.2. Oscilaciones Electrónicas del Plasma	6
1.3. Ondas en un Plasma Electrónico	10
1.4. Simulación de un Plasma-Haz Electrónico	12
2. Plasma en Aproximación Electrostática	13
2.1. Modelo Computacional	14
3. Modelo Partícula Malla	16
3.1. Modelo Partícula-Partícula PP	16
3.2. Modelo Partícula-Malla PM	18
3.3. Características Claves de un Plasma Acolisional	20
4. Esquema Numérico Partícula Malla	21
4.1. Código Electrostático	21
4.2. Asignación de Carga a la Malla	22
4.2.1. Pesado ó Interpolación de Orden Cero NGP	22
4.2.2. Pesado ó Interpolación de Primer Orden CIC	22
4.2.3. Esquema de Interpolación CIC en 2D	23
4.3. Integración de las Ecuaciones de Campo	25
4.3.1. Método Espectral para Solucionar las Ecuaciones Electrostáticas (Auto Campos)	25
4.4. Calculo de Fuerza (Interpolación)	27

4.5. Integración de las Ecuaciones de Movimiento	28
4.5.1. Convergencia	29
4.5.2. Precisión	29
4.5.3. Estabilidad	30
4.5.4. Eficiencia	31
5. Simulación de un Haz-Plasma Electrónico	32
5.1. Parámetros De Entrada	32
5.1.1. Parámetros Físicos	32
5.1.2. Parámetros Computacionales	33
5.1.3. Condiciones Iniciales y Condiciones de Frontera	33
5.1.4. Visualización en espacio de fase del Haz-Plasma	36
6. Discusión de Resultados	44
6.1. Conclusiones	46

Lista de Figuras

Figura	Pag
1.1. Mecanismo de oscilación del plasma, los iones como un background positivo junto con los electrones conservan la neutralidad del plasma.	7
1.2. oscilaciones del plasma propagándose en un medio finito debido a la generación de campos localizados.	10
1.3. Relación de dispersión para ondas electrónicas de plasma.	11
2.1. Modelo Electrostático de periodo L	15
4.1. Asignación de carga sobre la malla, y calculo de los campos.	21
4.2. NGP (Nearest Grid Point), los asteriscos denotan la localización de las partículas, los centros de la celda de la malla están representados por puntos. La carga de las partículas son asignadas a los nodos de la malla, en una sola dimensión	22
4.3. CIC (Cloud in Cell) Como en la anterior figura el asterisco denota la posición de la partícula. Una porción de área w que representa la densidad de carga de la partícula se asigna a los nodos g y $g + 1$	23
4.4. Malla, asignamiento de carga a la malla y partícula de tamaño finito (cuadro sombreado)	23
4.5. Poderación de una partícula cargada sobre la malla.	24
4.6. Malla unidimensional uniformemente espaciada, con planos localizados en los nodos $X_j = j\Delta x$. La densidad de carga ρ , el potencial ϕ , y el campo E_x son obtenidos de los X_j	26
4.7. Esquema de <i>Leap-frog</i> . El método muestra el esquema <i>centrado en el tiempo</i> para la fuerza \mathbf{F} mientras que avanza \mathbf{v} , y de \mathbf{v} mientras avanza \mathbf{x}	28
5.1. Espacio de fase para y y x en $t = 0$ pasos de tiempo	36

5.2.	Espacio de fase para y y x en $t = 40$ pasos de tiempo	37
5.3.	Espacio de fase para y y x en $t = 80$ pasos de tiempo	38
5.4.	Espacio de fase para y y x en $t = 120$ pasos de tiempo	39
5.5.	Espacio de fase para y y x en $t = 160$ pasos de tiempo	40
5.6.	Espacio de fase para y y x en $t = 200$ pasos de tiempo	41
5.7.	Espacio de fase para y y x en $t = 240$ pasos de tiempo	42
5.8.	Espacio de fase para y y x en $t = 280$ pasos de tiempo	43
6.1.	Secuencia temporal de la distribución de velocidades para el sistema Haz-Plasma, para $t = 0, 100, 1000,$ y 23400 pasos de tiempo (de izquierda a derecha). En el eje de las abscisas se estima la velocidad y el eje de ordenadas la función de distribución del sistema.	45

Lista de Tablas

Tabla	Pag
1.1. Longitudes características para diferentes plasmas (Z_i).	5
5.1. Parametros usados en la simulación para un haz-plasma electrónico . .	34

Resumen

En este trabajo se simula la dinámica de un plasma frío acolisional en aproximación Electroestática cuya discretización toma los iones como un fondo neutralizante de carga para electrones móviles. En la mayoría de los tratamientos básicos de la física del plasma, el movimiento de las partículas cargadas en campos electromagnéticos se considera de manera incompleta, pues los efectos de los campos internos producidos por el desplazamiento colectivo de los electrones en el plasma no surge de forma explícita en las ecuaciones de movimiento. El campo eléctrico está gobernado simultáneamente por dos sistemas de ecuaciones: 1) las ecuaciones electrostáticas que se originan en los campos eléctricos de la distribución de cargas y 2) de la ecuación general que determina las posiciones y movimientos de las cargas en presencia de los auto-campos. La discretización utiliza el método Partícula Malla (PIC Particle-In-Cell), cuyas etapas se pueden resumir así: asignación inicial de carga en la malla con un método de interpolación de primer orden (CIC Cloud-In-Cell); solución de la ecuación de Poisson con un esquema espectral de Fourier; solución de las ecuaciones de movimiento e interpolación de fuerza con el mismo esquema de interpolación asignado a las cargas. El experimento computacional está enfocado hacia la simulación de ondas electrostáticas en un plasma de tipo Langmuir y de esta manera observar sus inestabilidades. También se analiza la estabilidad del método Partícula-Malla para diferentes parámetros como: tamaño del paso de malla, paso temporal, longitud del plasma, número de partículas de tamaño-finito (partículas en la simulación) por longitud de Debye.

Abstract

A dynamic of a collision less cold plasma in the electrostatic approximation is simulated. The ions are treated as a immobile background for electrons which neutralize the electron component charge. In the typical plasma physics treatment the charge particle movement in to electromagnetic field has been considerate uncompleted, since the internal field effects by collectives displacement from electrons in to the plasma is not explicit for system equations, because 1) the electrostatic equations from electric field by all charge particles, 2) the general equation that determinate positions and velocities from charge particles by self-field. The discretization method of Particle-In-Cell is used. This is an introduction to numerical Particle-Mesh techniques, which are commonly

used to model collision less cold plasma . The simulation consists of an initial assignation of charge in a computational mesh by using the Cloud-In-Cell interpolation, the Poisson equation solution through the Fast Fourier Transform technique and the movement equation solution. The computational experiment is focused on the simulation of electrostatic waves in a langmuir plasma and on instabilities and It has been interesting that velocity distribution functions of electron-beams are investigated computationally. The Particle-In-Cell method stability for different parameters (cell width, time step, plasma dimension, finite-size particles number in the Debye sphere) is also analyzed.

Introducción

El desarrollo y simulación de Fuentes Iónicas basadas en el fenómeno de resonancia ciclotrónica electrónica (RCE), ha venido estudiándose durante los últimos años en el grupo de Física y Tecnología del Plasma de la UIS, y han sido mayores sus resultados hasta el momento que permiten determinar posibles mejoras y optimizaciones en estas fuentes desde el punto de vista tecnológico [1, 2, 3]. No obstante el estudio del plasma desde el efecto de resonancia ciclotrónica no es el único que allí se presenta, es decir dominan otras consideraciones que aún no han sido tenidas en cuenta[4], como la propagación de las perturbaciones e inestabilidades plásmicas.

En la mayoría de los tratamientos básicos de la física del plasma, el movimiento de las partículas cargadas en campos electromagnéticos se considera de manera incompleta, pues los efectos de los campos internos producidos por el desplazamiento colectivo de los electrones en el plasma no surge de forma explícita en las ecuaciones de movimiento. En otras palabras, el campo está gobernado simultáneamente por dos sistemas de ecuaciones: 1) las ecuaciones electrostáticas que se originan en los campos eléctricos de la distribución de cargas y 2) la ecuación general que determina las posiciones y los movimientos de las cargas en presencia de los auto-campos.

El asunto central es el estudio de los parámetros del plasma mediante un modelo numérico para describir un plasma diferentes del RCE y que esta relacionado con fenómenos de propagaciones de perturbaciones electrostáticas en plasmas de tipo Langmuir.

Capítulo 1

Ondas en un Plasma No Magnetizado

1.1. Neutralidad Eléctrica del Plasma

Sí los electrones en un plasma se desplazan respecto de un fondo uniforme de iones (background), aparece un campo eléctrico que actúa como agente restaurador de la neutralidad eléctrica del plasma. Este campo obliga a los electrones retornar y mantenerse en su posición de equilibrio. Debido a que hay una inercia, los electrones oscilan con una frecuencia característica conocida como *frecuencia del plasma* ω_p . Estas oscilaciones son tan rápidas que los iones masivos no alcanzan responder al campo oscilante, permaneciendo fijos y despreciándose su movimiento.

Para poder entender de cual manera se mantiene la neutralidad eléctrica, consideremos la sección longitudinal de una columna de plasma. Dentro de esta columna se puede describir: $n_e = \sum Z_i n_i$, donde n_e y n_i son la densidad de los electrones y los iones respectivamente, Z_i el estado de carga de una especie iónica. Suponemos que todos los electrones están desplazados de un plano normal a una distancia X . Entonces el potencial eléctrico ϕ en la región $X > x > 0$ está dado por

$$\varepsilon_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -n_e q_e; \quad (1.1)$$

donde q_e es la carga del electrón y ε_0 la constante dieléctrica, del de tal manera que si integramos dos veces tenemos,

$$\varepsilon_0 q_e \phi = -n_e x^2 q_e^2 / 2. \quad (1.2)$$

Claramente, $|q_e \phi| \sim k_B T_e$, muestra que el movimiento de los electrones es afectado por

$n_e (m^{-3})$	$T(K)$	$n_e^{-1/3}(m)$	$\lambda_D(m)$
10^6	10^2	10^{-2}	0,7
10^{10}	10^4	5×10^{-4}	7×10^{-2}
10^{14}	10^6	2×10^{-5}	7×10^{-3}
10^{20}	10^8	2×10^{-7}	7×10^{-5}
10^{30}	10^8	10^{10}	7×10^{-10}

Cuadro 1.1: Longitudes características para diferentes plasmas (Z_i).

el potencial eléctrico, de tal manera que son llevados retornar a su posición original dentro del plasma. Si tomanos λ_D como un valor de x para el cual $|q_e\phi| = k_B T_e/2$, tenemos que

$$\lambda_D \equiv \text{longitud de Debye} = \left[\frac{k_B T_e \epsilon_0}{n_e q_e^2} \right]^{1/2}. \quad (1.3)$$

Es decir, un plasma es un tipo de gas ionizado cuyas dimensiones son mayores respecto de la longitud de Debye. Algunos valores son mostrados en la tabla 1.1, cual ilustra que la longitud de Debye es típicamente mayor que la distancia media entre partículas. Debido a que cada partícula en un plasma interactúa simultáneamente con muchas otras partículas, no hay una teoría exacta del estado del plasma [5]. El plasma puede comportarse como un fluido[6], y guardar una características clave de acuerdo al número de electrones en la esfera de Debye:

$$N_D = n_e \lambda_D^3. \quad (1.4)$$

El estado de un plasma totalmente ionizado con iones unicargados se describe por la relación:

$$p = k_B T (n_e + n_i) [1 - 1/(12\pi N_D)]. \quad (1.5)$$

Consecuentemente para $N_D \gg 1$, el plasma sería un gas perfecto, con presión $p = k_B (n_e T_e + n_i T_i)$. Evidentemente cuando $N_D \sim 1$, la aproximación del plasma como un gas ideal se rompe [7].

Por ultimo, el potencial eléctrico efectivo ϕ_r alrededor de una carga q_e en un plasma es apantallado coulombianamente, con la longitud característica de apantallamiento λ_D , que se determina de la ecuación

$$\phi_r = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}. \quad (1.6)$$

La ecuación (1.3) es conocida como la longitud de Debye electrónica.

1.2. Oscilaciones Electrónicas del Plasma

Cuando los electrones son todos desplazados de sus posiciones de equilibrio respecto a los iones, como es supuesto en las ecuaciones (1.1) y (1.2), hay una fuerza restauradora sobre cada electrón, resultando en la ecuación de movimiento para los electrones:

$$\epsilon_0 m_e \ddot{x} = -q_e^2 n_e x. \quad (1.7)$$

Esta es la ecuación para un oscilador armónico, cual muestra que la fuerza restauradora electrostática da origen a las oscilaciones del plasma con una frecuencia

$$\omega_{pe}^2 = n_e q_e^2 / \epsilon_0 m_e \quad (1.8)$$

independiente de la longitud de onda. Estas oscilaciones fueron primero identificadas por Tonks y Langmuir en 1929 [6]. La anterior derivación supone que el movimiento térmico de los electrones es despreciable. Esto es solo cuando la longitud de onda de la oscilación del plasma es mayor comparada con λ_D . Cuando la longitud de onda se aproxima a λ_D , la velocidad térmica de los electrones comienza ser comparable con la velocidad de fase de la onda, y las oscilaciones son amortiguadas por el mecanismo de amortiguamiento de Landau. La descripción teórica de este fenómeno fue dada por Landau en 1946 [8].

El modelo de plasma cuasineutral propuesto por Irving Langmuir hace más de 75 años aun es vigente, no obstante un reporte de este año por Fernsler, Slinker y Joyce (2005) han determinado que este tipo de aproximación puede tener otro tipo de consideraciones que mejorarían este planteamiento[9]. Asumir estas consideraciones se escapan de los objetivos de esta tesis, de tal manera que continuaremos con este modelo que es usado muy extensamente.

Un esquema de las oscilaciones electrónicas se ve la figura 1.1; los rectángulos oscuros representan el fondo de iones como fluido fijo y los rectángulos claros respectivamente a los electrones como otro fluido, pero oscilante. La separación espacial de cargas en forma periódica genera un campo \mathbf{E} también periódico, cual tiende a restaurar a los electrones a su posición de equilibrio.

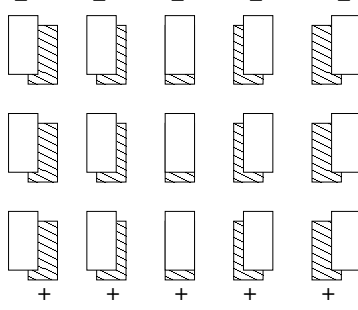


Figura 1.1: Mecanismo de oscilación del plasma, los iones como un background positivo junto con los electrones conservan la neutralidad del plasma.

Derivaremos una expresión para la frecuencia del plasma ω_p teniendo en cuenta las siguientes asunciones: 1) no hay campo magnético; 2) no hay movimientos térmicos ($K_B T = 0$); 3) los iones están fijos en un espacio de distribución uniforme; 4) el plasma es infinito en extensión; y 5) el movimiento electrónico se da en la dirección x . Como consecuencia de esto, tenemos

$$\nabla = \hat{\mathbf{x}}\partial/\partial x \quad \mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi. \quad (1.9)$$

Las ecuaciones de movimiento y de continuidad de los electrones serian

$$mn_e \left[\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e \right] = -q_e n_e \mathbf{E} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (1.11)$$

La única ecuación de Maxwell que usaremos es la ecuación de Poisson $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$. En este caso como las oscilaciones son de alta frecuencia la inercia electrónica es importante, y la desviación de la neutralidad es el principal efecto en este caso particular. Consecuentemente, escribiremos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial \mathbf{E} / \partial \mathbf{x} = 4\pi q_e (n_i - n_e) \quad (1.12)$$

Las ecuaciones (1.10)-(1.12) pueden ser solucionadas a través de procedimientos de *linealización*, es decir que para oscilaciones de amplitud pequeña, los términos que contienen potencias mayores pueden ser despreciados. Primero separaremos las variables independientes en dos parte: una parte de “equilibrio” con subíndice 0, y otra de “perturbación” con subíndice 1:

$$n_e = n_0 + n_1 \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 \quad (1.13)$$

Las cantidades en equilibrio representan el estado del plasma en ausencia de las oscilaciones. Puesto que hemos asumido un plasma uniformemente neutro en reposo antes que los electrones sean desplazados, tenemos que

$$\begin{aligned}\nabla n_0 &= \mathbf{v}_0 = \mathbf{E}_0 = 0 \\ \frac{\partial n_0}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} = 0\end{aligned}\tag{1.14}$$

La ecuación (1.10) ahora sería

$$m \left[\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 \right] = -q_e n_e \mathbf{E}\tag{1.15}$$

El termino $(\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1$ es cuadrático en amplitud, luego se puede despreciar. La *teoría de linealización* es valida tanto como $|v_1|$ sea suficientemente pequeño, por lo tanto los términos cuadráticos son despreciados. De igual forma, la ecuación (1.11) sería

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot (n_0 \mathbf{v}_1 + n_1 \mathbf{v}_1) &= 0 \\ \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla n_0 &= 0\end{aligned}\tag{1.16}$$

En la ecuación de Poisson (1.12), notamos que $n_{i0} = n_{e0}$ esta en equilibrio y que $n_{i1} = 0$ por asunción de iones fijos, de manera tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -4\pi q_e n_1\tag{1.17}$$

En este caso los parámetros que caracterizan el movimiento de los electrones se cambia por la ley sinusoidal:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= v_1 e^{i(kx - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} \\ n_1 &= n_1 e^{i(kx - \omega t)} \\ \mathbf{E}_1 &= E e^{i(kx - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{1.18}$$

La derivada temporal $\partial/\partial t$ puede ser remplazada por $-i\omega$, y el gradiente ∇ por $-k\hat{\mathbf{x}}$. Las ecuaciones (1.15)-(1.17) ahora serían

$$-im\omega v_1 = -q_e E_1 \quad (1.19)$$

$$-i\omega n_1 = -n_0 i k v_1 \quad (1.20)$$

$$i k E_1 = -4\pi q_e n_1 \quad (1.21)$$

Eliminando n_1 y E_1 , tenemos para la primera ecuación (1.19)

$$-im\omega v_1 = -q_e \frac{-4\pi q_e - n_0 i k v_1}{i k} \frac{-4\pi q_e - n_0 i k v_1}{-i\omega} = -i \frac{4\pi n_0 q_e^2}{\omega} v_1 \quad (1.22)$$

Sí, v_1 no tiende a cero, tenemos que

$$\omega^2 = 4\pi n_0 q_e^2 / m \quad (1.23)$$

donde la *frecuencia del plasma* es

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_0 q_e^2}{m}} \quad (1.24)$$

Como podemos observar, esta frecuencia depende únicamente de la densidad del plasma, y es un parametro fundamental. Debido a la pequñes de m la frecuencia del plasma es usualmente alta. Por ejemplo para una densidad de $n = 10^{12} cm^{-3}$, tenemos

$$f_p \approx 10^4 (10^{12})^{1/2} = 10^{10} [s^{-1}] = 10 GHz$$

esta frecuencia pertenece al rango de las microondas. Podemos compararlo con otro parametro fundamental para plasmas sumergidos en campos magnéticos, la frecuencia ciclotrónica electrónica ω_{ec} dada por la formula numérica

$$f_{ec} \simeq 2,8 GHz / kG$$

Es decir, que para un campo $B \approx 3,5 KG$ y una densidad de $n \approx 10^{12} cm^{-3}$, la frecuencia ciclotrónica es aproximadamente igual a la frecuencia del plasma con electrones.

La ecuación (1.24) nos dice que la oscilación del plasma ocurre en todo su espacio, y que solo depende de la densidad n , y de forma particular ω no depende de k , por eso su velocidad de grupo dw/dk es nula, pues la perturbaciones no se propagan[10], quiere decir que desde cierto punto de vista las partículas oscilan independientemente.

No obstante si el plasma no es frío ($d\omega/dk \neq 0$) para este caso un grupo de partículas cargadas ó densidad de carga no solo oscilaría, sino que también se propagaría en una única dirección, debido a la energía térmica que genera aportes contiguos de cargas

en capas adyacentes, dando origen a un campo por cambio local de la densidad. Y de tal manera generarse una onda que transporta información. Para un sistema finito, las oscilaciones pueden propagarse ó darse como un proceso ondulatorio. En la figura (1.2) se observa las regiones tanto negativas como positivas cuyos planos oscilan en una sección cilíndrica, debido a la generación de campos eléctricos localizados, originados por distribución adyacentes de densidades de carga.

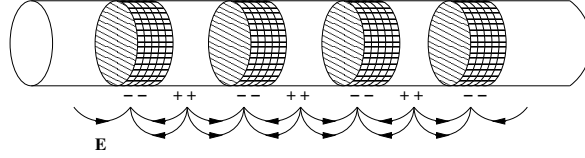


Figura 1.2: oscilaciones del plasma propagándose en un medio finito debido a la generación de campos localizados.

1.3. Ondas en un Plasma Electrónico

Un flujo de electrones dentro las capas adyacentes con su respectiva velocidad térmica podrían llevar información sobre lo que sucede en la región de oscilación. La oscilación de plasma se convierte entonces en onda del plasma. Para tratar este efecto adicionaremos una compresión isotérmica $-\nabla P_e$ en la ecuación de movimiento (1.10).

Haciendo uso de la ecuación de estado que relaciona la presión p con la densidad n , $P = C\rho^\gamma$, donde C es una constante y γ el cociente calor específico C_p/C_v . El termino ∇P estaría dado por

$$\frac{\nabla P}{P} = \gamma \frac{\nabla n}{n}$$

Para una compresión isotérmica, tenemos

$$\nabla P = \nabla(nKT) = KT\nabla n$$

Para N grados de libertad $\gamma = (2+N)/N$. Hay que notar que la valides de la ecuación de estado requiere que el flujo de calor sea despreciable. Para nuestro caso unidimensional, tenemos que ∇P :

$$\nabla P_e = 3K_B T_e \nabla n_e = 3K_B T_e \nabla(n_0 + n_1) = 3K_B T_e \frac{\partial n_1}{\partial x} \hat{x}$$

y la ecuación linealizada de movimiento sería

$$mn_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -q_e n_0 E_1 - 3K_B T_e \frac{\partial n_1}{\partial x} \quad (1.25)$$

Con las ecuaciones (1.18) y (1.25) tenemos

$$-im\omega n_0 v_1 = -q_e n_0 E_1 - 3K_B T_e ik n_1. \quad (1.26)$$

Los valores E_1 y n_1 se han mantenido por las ecuaciones (1.21) y (1.20), de tal manera que

$$im\omega n_0 v_1 = \left[q_e n_0 \left(\frac{-4\pi q_e}{ik} \right) + 3K_B T_e ik \right] \frac{n_0 ik}{i\omega} v_1 \quad (1.27)$$

$$\omega^2 v_1 = \left(\frac{4\pi n_0 q_e^2}{m} + \frac{3K_B T_e}{m} k^2 \right) v_1$$

$$\omega^2 = \omega_P^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{th}^2 \quad (1.28)$$

donde $v_{th} \equiv 2K_B T_e/m$ es la velocidad térmica de los electrones. La frecuencia ahora depende de k , y la velocidad de grupo es finita:

$$2\omega d\omega = \frac{3}{2} v_{th}^2 2k dk$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \frac{k}{\omega} v_{th}^2 = \frac{3}{2} \frac{v_{th}^2}{v_\phi} \quad (1.29)$$

El valor de v_{th} puede ser estimado desde la función gráfica de la ecuación (1.28), ver figura 1.3.

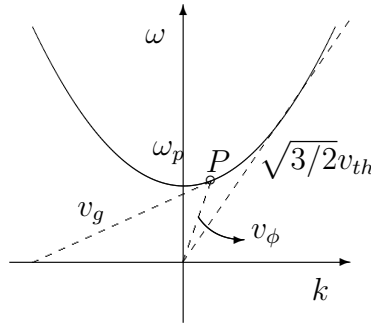


Figura 1.3: Relación de dispersión para ondas electrónicas de plasma.

En la figura 1.3 se presenta el diagrama de *dispersión* $\omega(k)$. La pendiente de una línea trazada desde el punto P sobre la curva hasta el origen, da la velocidad de fase

$v_\phi = \omega/k$. La pendiente de la recta tangente en P da la velocidad de grupo $v_g = d\omega/dk$ y esta es siempre menor que $(3/2)^{1/2}v_{th}$.

Hay que notar que para un k mayor (λ menor, de una onda que se propaga), la información viaja esencialmente con la velocidad térmica. Para una k menor (λ mayor), la información viaja mas lentamente que v_{th} aunque v_ϕ sea mayor. Esto es porque el gradiente de densidad es menor para un λ mayor, y los movimientos térmicos llevan muy poco momento dentro de las capas adyacentes.

La existencia de las oscilaciones del plasma han sido conocidas desde los días de Langmuir en los 1920. No fue sino hasta 1949 que Bohm y Gross trabajaron en detallar la teoría de como las ondas podrían excitarse y propagarse [11, 12]. Un manera sencilla de excitar las ondas del plasma sería aplicando un potencial oscilatorio a una frecuencia del orden de los GHz . También se puede usar un haz de electrones para excitar el plasma. Sí los electrones en el haz tienen una velocidad térmica ligeramente mayor que la energía térmica de un plasma, estos pasan por un punto cercano de la frecuencia f_p , y podrían generar un campo eléctrico en la misma frecuencia de excitación y oscilación del plasma. Una vez que la oscilación del plasma aparece, los electrones se agrupan periódicamente, y las oscilaciones crecen por un mecanismo de retroalimentación (feedback).

1.4. Simulación de un Plasma-Haz Electrónico

Nuestra propuesta es representar un sistema físico donde el plasma es tomado acolisional y las oscilaciones ocurren sobre escalas mayores que la longitud de Debye, así como también escalas temporales menores que el tiempo de colisión. Un experimento de inestabilidad *Plasma-Haz* modela un haz de electrones dentro de un plasma, cual conduce a ondas inestables dentro del mismo. Inicialmente hay dos grupos de electrones, una población mayor que permanece casi en reposo (el Plasma) y una pequeña población en movimiento con velocidad térmica no nula (el Haz). Mas específicamente un haz de baja densidad es inyectado dentro un plasma cuasi estacionario de alta densidad. La interacción haz-plasma causa que las partículas se agrupen formando potenciales barrera, cuales aumentan por si mismas, tendiendo atrapar las partículas formando vórtices en el espacio de fase. Los iones son modelados como un background neutralizante fijo, para mantener la neutralidad del plasma.

Capítulo 2

Plasma en Aproximación Electroestática

A diferencia de los plasmas magnetohidrodinámicos (MHD), la aproximación electrostática puede manejar tanto altas frecuencias (tales como frecuencia del plasma ω_p) como pequeñas escalas espaciales del orden de la longitud de Debye, y de esta manera dar origen a la separación de cargas[13]. Este esquema es necesario para poder llevar a cabo la simulación respectiva del plasma con estas características. En esta aproximación las ecuaciones de Maxwell serían:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times E = 0. \quad (2.3)$$

En este contexto es conveniente introducir el potencial electrostático ϕ tal que

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad \text{donde,} \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla\phi = 0 \quad (2.5)$$

también se requiere que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla\phi = -\nabla^2\phi = \rho/\epsilon_0 \quad (2.6)$$

De tal manera las ecuaciones de Maxwell han sido reducidas a la ecuación de Poisson (2.6).

Puesto que la escala espacial de interés es del orden de la longitud de Debye y las órbitas individuales de los electrones son importantes, el plasma electrostático apropiado para simular, se presentaría a través de los métodos partícula-malla (PM).

El conjunto completo de ecuaciones para el plasma electrostático sería el que consiste de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (2.7)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (2.8)$$

$$\rho = \sum_i q_i/V \quad (2.9)$$

y las ecuaciones de movimiento para cada electrón i

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = q_i \mathbf{E}, \quad \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i \quad (2.10)$$

$$(2.11)$$

Como ya habíamos mencionado, las velocidades de los iones resultan menores que las de los electrones por un factor $\frac{m_i}{m_e}$, por lo que los iones son tratados como estacionarios para oscilaciones de alta frecuencia, como fondo fijo de densidad de carga ρ_0 . La densidad de carga total ρ estaría dada por:

$$\rho = \sum_i q_i/V + \rho_0 \quad (2.12)$$

2.1. Modelo Computacional

La simulación de un plasma con partículas cargadas se inició en la década de los 50's con Jhon Dawson en Princeton y Oscar Buneman en Cambridge [14]. Ellos extendieron las técnicas de simulación de haces de electrones en un tubo al vacío, llevándolas a simular un tipo de plasma. La principal diferencia entre estos dos modelos está en la longitud característica sobre la cual domina el efecto de interacción entre partículas (interacción electrón, átomo neutro, átomo ionizado), que para el primer caso es del orden de las dimensiones del dispositivo electrónico¹ y para el segundo caso (plasma) la longitud característica está dada por la longitud de Debye $\lambda_D \equiv (v_{term}/\omega_p) \propto (T/n)^{1/2}$ que comparado con las dimensiones del plasma, es muy pequeña ($L \gg \lambda_D$).

El número de partículas en un cubo de Debye $N_D \equiv n\lambda_D^3$ puede variar desde $N_D \approx 10^2$ para un plasma de vapor alcalino, hasta $N_D \approx 10^6$ para un plasma de fusión. El

¹válvula electrónica

objetivo computacional es tener muchas partículas dentro de la longitud característica (o volumen característico) y simular un plasma eléctricamente neutro.

El punto está entonces en las siguientes consideraciones:

- Estamos interesados en el comportamiento colectivo del plasma a longitudes de onda (de perturbación) mayores que la longitud de Debye $\lambda > \lambda_D$.
- Podemos obtener información útil en una o dos dimensiones, es decir $N_D = n\lambda_d$ ó $N_D = (n\lambda_d)^{1/2}$.
- Se puede usar en la simulación un valor crítico de N_D que conserve el comportamiento del plasma [14].

Como punto de partida, estableceremos simulaciones con un número de partículas de computador N_D adoptando un modelo electrostático bi-dimensional periódico, donde las partículas se mueven bajo la acción de sus campos propios y los campos externos.

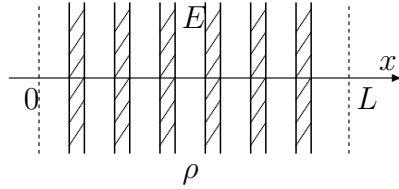


Figura 2.1: Modelo Electrostático de periodo L

El ciclo computacional del método PM se resume de forma general en los siguientes pasos:

- Cálculo de ρ desde las posiciones iniciales de las partículas.
- Cálculo del auto-campo E .
- Cálculo de la fuerza sobre la partícula.
- Cálculo de nuevas posiciones y velocidades desde las ecuaciones de movimiento.

En el próximo capítulo detallaremos este esquema.

Capítulo 3

Modelo Partícula Malla

La técnica numérica Partícula Malla (PM), es comúnmente usada para modelar plasmas, sistemas de n -cuerpos y fluidos tanto compresibles como incompresible.

Las técnicas de simulación de partículas intentan modelar sistemas de muchos cuerpos solucionando las ecuaciones de movimiento de un conjunto de partículas o pseudo-partículas cuales son usadas para representar el sistema. El método PM utiliza una malla que hace eficiente el computo de las fuerzas actuantes. Los códigos de simulación puede manejar dos tipos de variantes: 1) esquema Partícula-Malla puro, 2) Partícula-Malla combinado con Partícula-Partícula conocido como P3M que es usado para modelar sistemas gravitacionales de n -cuerpos [13].

La técnica PM fue originalmente creada en Los Alamos (1955) para la aplicación de fluidos compresible [15]. Rediseñada en 1965 por Buneman y Hockney para aplicaciones del plasma. También ha sido aplicado para simular propiedades de dispositivos de estados solido, y en plasmas magnetohidrodinámicos (MHD).

Desde luego los códigos de partículas tienen sus limitaciones. Por ejemplo en la mayoría de los sistemas plásmicos, se tienen muchas partículas que durante la simulación pueden consumir recursos computacionales. Como resultado de la acción de fuerzas sobre cada partícula los modelo numéricos se hacen ruidoso o introducen errores de computo. No obstante hay criterios que garantizan un equilibrio entre eficiencia, precisión y bajo ruido.

3.1. Modelo Partícula-Partícula PP

Asumamos que en el tiempo t tenemos N_p partículas en nuestro sistema localizadas en $\mathbf{x}_i(t)$ con velocidades $\mathbf{v}_i(t)$, donde $1 \leq i \leq N_p$. La fuerza sobre cada partícula i está dada por

$$\mathbf{F}_i = q_i \sum_{j \neq i}^{N_p} q_j \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \quad (3.1)$$

donde q_i es la carga de la partícula i . Las ecuaciones de movimiento para partículas i , con masa m_i son

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} &= \mathbf{v}_i \\ \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= \frac{\mathbf{F}_i}{m} \end{aligned} \quad (3.2)$$

El algoritmo de este modelo para un sistema electrostático sería:

1. Inicialización de posiciones y velocidades para partículas.
2. Calculo de la fuerza sobre cada partícula usando la ecuación (3.1).
3. Integración de las ecuaciones de movimiento (3.2) para cada partícula a través de Δt .

Este método partícula-partícula tiene sus limitaciones. El número de operaciones aritméticas requeridas para evaluar la fuerza es del orden de N_p^2 . Para una simulación 3D la interacción entre 2 partículas requiere aproximadamente 10 operaciones de punto flotante. Un código con N_t pasos de tiempo requiere calcular fuerzas con un orden de $10 \times N_t \times N_p^2/2$ operaciones de punto flotante. Por ejemplo haciendo uso de procesadores con arquitectura *i686* (AMD, INTEL) y frecuencia de reloj de $1,8GHz$ ó $0,6$ -nanosegundos por operación de punto flotante trabajando con 10^6 partículas y 1000 pasos de tiempo, tomaría 32 días haciendo calculos.

De tal manera que el método partícula-partícula permitiría modelar un sistema con interacciones menores de 10^5 partículas. Para cualquier otro sistema se hace necesario reducir la escala de operaciones en la evaluación de fuerzas por debajo del orden de $N_p^2/2$. Esto puede ser hecho de dos maneras, usando técnicas partícula-malla, ó usando *códigos-árbol* (jerárquicos). Las técnicas PM son más eficientes cuando las partículas tienen una distribución de densidad relativamente uniforme. Los *códigos-árbol* favorecen a sistemas con mayor contraste de densidad.

3.2. Modelo Partícula-Malla PM

En la aproximación de partícula malla reemplazamos la ecuación de fuerzas (3.1) con una evaluación basada en una representación continua de densidad de carga y campo eléctrico. La ecuación de Poisson (3.3) relaciona la densidad de carga $\rho(\mathbf{x})$ con un potencial eléctrico ϕ . El campo eléctrico permite determinar la fuerza de sobre cada partícula i .

$$\nabla^2 \phi = -\rho(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \phi \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F}_i = q_i \mathbf{E}(\mathbf{x}_i) \quad (3.5)$$

Y usando una aproximación de diferencias finitas sobre la malla resolvemos las ecuaciones (3.3)-(3.5). Los pasos de este proceso serían:

1. Calcular ρ en cada punto ó nodo de la malla usando información sobre la posición de las partículas (interpolación). En este paso el calculo es del orden N_p .
2. Resolver la ecuación de Poisson. Si usamos la Transformada de Fourier Rápida (FFT) los calculos serían $N_g \ln N_g$, donde N_g son los puntos ó nodos de la malla. Orden para N_g de 32, 64, 128, ó 512 factor 2^n .
3. Evaluar \mathbf{E} en cada punto de la malla usando la ecuación $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \phi$. Esta operación es N_g .
4. Uso del mismo esquema de interpolación junto con la ecuación (3.3) para evaluar la fuerza en cada partícula. Aquí los calculos son del orden de N_p .

Combinando estos pasos podemos ver que el numero de operaciones de punto flotante por paso de tiempo son:

$$N_p + N_g \ln N_g + N_g.$$

Obviamente cuando introducimos la malla hemos asumido la uniformidad del espacio con un tamaño de celda Δx . Consideremos el campo producido por una única carga localizada en este espacio. Cuando asignamos esta carga a la malla debemos decidir que puntos de la malla en la vecindad debe ser asignado su valor, una manera sería por medio de una ponderación lineal. Una vez que la partícula haya adquirido un tamaño

finito en los puntos ó nodos de la malla. El campo de fuerza generado por esta partícula de “tamaño-finito”, se determinaría por simple diferenciación entre posiciones de los nodos.

Ahora, para que tipos de sistemas físicos son apropiados los códigos partícula-malla?. Supongamos que la naturaleza del sistema es tal que las fuerzas sobre cualquier partícula está dominada por contribuciones desde sus próximos vecinos. Sistemas de este tipo son llamados con frecuencia “colisionales” ó “correlacionados”. En estos casos al evaluar la fuerza sería de manera imprecisa a menos que se tome Δx menor que la distancia para algún acercamiento entre partículas. Asumamos que la distancia de proximidad (d_{prox}) es el del orden de (1/10) parte del promedio entre partículas. Entonces esto requeriría

$$\Delta x < d_{prox} = \frac{L}{10 N_p^{1/3}},$$

donde $L = [N_g(\Delta x)^3]^{1/3}$ es la dimensión característica del sistema. Reescribiendo tenemos

$$\Delta x < \frac{\Delta x}{10} \left(\frac{N_g}{N_p} \right)^{1/3}$$

$$\left(\frac{N_g}{N_p} \right)^{1/3} > 10$$

$$N_g > 10^3 N_p$$

Es decir, que para una partícula necesitaríamos mas de 10^3 puntos o nodos sobre la malla para calcular las fuerzas actuantes sobre ella. Claramente el método partícula-malla sería costoso al tratar de seguir las trayectorias individuales de las partículas en un sistema “colisional”.

Ahora consideremos el caso opuesto, cuando la contribución de proximidad es muy pequeña para fuerzas sobre partículas cuales son dominadas por la suma de sus interacciones entre partículas. Este tipo de sistemas es llamado “acolisional” ó “no correlacionado”. Es extraño pensar que las fuerzas de corto alcance no sean tenidas en cuenta, pero es un hecho para las partículas en el plasma, pues dominan los efectos colectivos debidos a la longitud característica de apantallamientos entre ellas.

De esta manera el método partícula malla es el apropiado para sistemas acolisionales y no para sistemas colisionales.

3.3. Características Claves de un Plasma Acolisional

La fuerza de interacción de largo alcance (r^{-2}) en principio y en la practica soportan modos de longitud de onda mayores que los movimientos coherentes colectivos de las partículas.

La frecuencia característica asociada con los modos colectivos es la frecuencia del plasma ω_{pe} . El rango de las longitudes de onda de estos modos coherentes están acotados por la longitud limite de Debye λ_D . Debido a que los movimientos térmicos amortiguan fuertemente estos modos (amortiguamiento de Landau) con longitudes $\lambda < \lambda_D$, podemos decir que los modos colectivos existen para longitudes $\lambda > \lambda_D$.

Es decir que la interacción entre partículas se considera individual a escalas menores que la longitud de Debye. Y para partículas que se encuentran separadas a escalas mayores de Debye la interacción se hace de manera colectiva.

De tal manera que nuestro objeto estudio son los sistema acolisionales donde la longitud $\lambda > \lambda_D$ son de coherencia colectiva.

Para filtrar las fuerzas de corto alcance dadas para longitudes sub- λ_D , y considerar un plasma neutro y acolisional se debe mantener la proporcionalidad *frecuencia y densidad del plasma*: $\omega \propto (\text{densidad})^{1/2}$ junto con la *longitud de Debye*. Esto se consigue guardando como criterio para el movimiento de las partículas que el desplazamiento (medido en λ_D) de cualquiera de ellas con su respectiva velocidad térmica permitan integrarse en $1/2\pi$ del ciclo de oscilación del plasma.

$$\lambda_D \equiv \frac{v_{term}}{\omega_p} \propto \left(\frac{\text{temperatura}}{\text{densidad}} \right)^{1/2}$$

Lo anterior debe coincidir también con un número mayor de partículas en la esfera de Debye ($N_D \equiv n\lambda_D^3$) y cuyo criterio acolisional se obtiene de la siguiente relación:

$$\frac{\omega_p}{2\pi\nu_c} \approx N_D \gg 1$$

donde ν_c es la frecuencia ó tasa de colisión [14], es decir que una buena opciones serian tomar un numero N_D de 10, 20 ó 50 partículas y que en nuestro caso hemos asumido para la simulación $\lambda = 2\Delta x$ como la longitud que soporta el tamaño de la malla necesario. De manera mas general tendríamos $N_D > 1$ y $\Delta x \sim \lambda_D$ como criterios únicos en el tamaño de la malla y cantidad de partículas en una esfera de Debye.

Capítulo 4

Esquema Numérico Partícula Malla

El modelo de la figura 2.1 consiste de partículas cargadas moviéndose debido a las fuerzas aplicadas por sus propios campos. La descripción física se origina desde dos puntos, 1) de los campos producidos por la partículas, 2) del movimiento producido por las fuerzas (ó campos). Los campos son calculados desde la ecuaciones de Maxwell con la información de las posiciones y velocidades de todas las partículas; y las velocidades y posiciones desde las ecuaciones de Newton. Una vez calculados los campos desde las posiciones iniciales de carga se desplazan las partículas (distancias pequeñas) y se recalculan los campos debido a las nuevas posiciones y velocidades; este procedimiento se repite para muchos pasos de tiempo.

4.1. Código Electrostático

A continuación se esquematiza el ciclo del método PM, con la asignación de cargas sobre la malla y calculo de los campos.

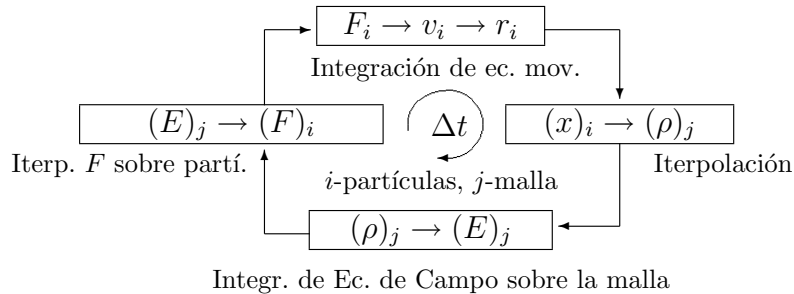


Figura 4.1: Asignación de carga sobre la malla, y calculo de los campos.

4.2. Asignación de Carga a la Malla

Es necesario calcular la densidad de carga sobre una malla discreta de puntos (nodos) desde la posiciones de las partículas. Estos calculos son llamados “*pesado*”, cuales implican alguna forma densidad de carga interpolada cerca de un nodo próximo a una partícula. Como mostraremos despues, es necesario usar el mismo esquema de interpolación (ó *pesado*) para calcular las fuerzas y evitar la aceleración misma de las partículas.

4.2.1. Pesado ó Interpolación de Orden Cero NGP

Simplemente contando el numero de partículas dentro de una distancia $\pm\Delta x/2$, donde Δx es el ancho de la celda en la malla alrededor de un j -esimo nodo ver figura 4.2. Y de acuerdo a la cantidad de partículas, se asigna un valor de densidad de carga al nodo. Hay dos efectos que aparecen aquí. 1) La partícula adquiere una forma *rectangular* de ancho Δx . Esto nos lleva a pensar que hay una colección de *partículas de tamaño-finito*. 2) Cuando las partículas saltan de una celda a otra podrían producir una densidad y un campo eléctrico ruidosos tanto en el espacio como en el tiempo.

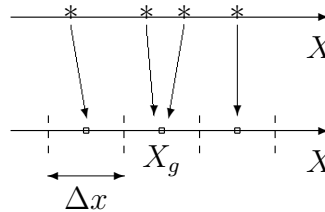


Figura 4.2: NGP (Nearest Grid Point), los asteriscos denotan la localización de las partículas, los centros de la celda de la malla están representados por puntos. La carga de las partículas son asignadas a los nodos de la malla, en una sola dimensión

Este ruido puede ser en muchas ocasiones intolerable para otros tipos de plasma. Así que veremos un mejor esquema de pesado.

4.2.2. Pesado ó Interpolación de Primer Orden CIC

La ponderación ó pesado de *primer-orden* “suaviza” la densidad y las fluctuaciones del campo permitiendo reducir el ruido en comparación con el esquema *orden-cero*.

Puede ser costoso computacionalmente pues toma dos puntos de la malla por partícula (en 2D tomaría cuatro puntos por partícula, y en 3D ocho puntos) no obstante mejora

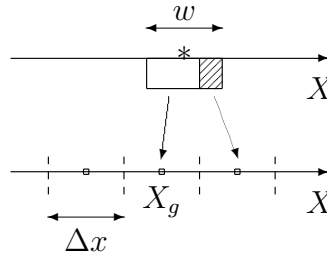


Figura 4.3: CIC (Cloud in Cell) Como en la anterior figura el asterisco denota la posición de la partícula. Una porción de área w que representa la densidad de carga de la partícula se asigna a los nodos g y $g + 1$.

la asignación de carga sobre la malla para este tipo de interpolación. En este caso las partículas de *tamaño-finito* semejan una nube que permite fluir libremente entre sí. Esto método fue llamado por Birdsall (1969) como *cloud-in-cell* ó CIC Si tomamos una nube de densidad uniforme y de ancho Δx como se muestra en la figura 4.3, la asignación sobre la malla se hace evidente.

4.2.3. Esquema de Interpolación CIC en 2D

Una vez introducido la malla las partículas no son vistas como objetos puntuales, por el contrario se representan como partículas de *tamaño-finito*. Si la densidad de carga $\rho(x)$, está dada por partículas puntuales, entonces los valores del campo son equivalentes a calcular la suma en la ecuación (3.1) y no hemos ganado nada en lo absoluto. Sin embargo, si las partículas tienen tamaño finito podemos dividir el espacio por una malla uniforme a través de una representación continua de densidad de carga sobre cualquier nodo próximo a una partícula, ver figura 4.4.

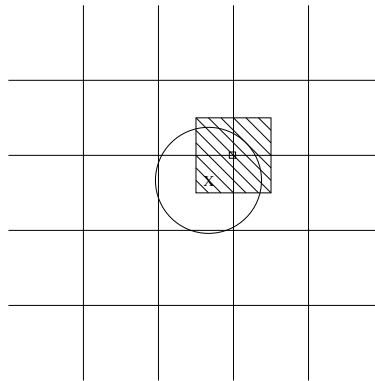


Figura 4.4: Malla, asignamiento de carga a la malla y partícula de tamaño finito (cuadro sombreado)

A continuación se representa el esquema aplicado para interpolar la densidad de carga sobre la malla en dos dimensiones:

Una partícula con carga eléctrica q es localizada en (x, y) en una celda de área $\Delta x \cdot \Delta y$ definida por los nodos (i, j) , $(i, j + 1)$, $(i + 1, j)$, $(i + 1, j + 1)$. Calculamos los valores de pesos $W1, W2, W3, W4$ ver figura 4.5, próximos a los nodos de acuerdo con

$$\begin{aligned}
 W1 &= q[dx \cdot dy] \\
 W2 &= q[dx \cdot (\Delta y - dy)] \\
 W3 &= q[(\Delta x - dx) \cdot (\Delta y - dy)] \\
 W4 &= q[(\Delta x - dx) \cdot dy].
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

La densidad de carga ρ sobre cada nodo está representado por la ponderación de un área W opuesta a el, es decir que un valor de área menor le corresponde un valor alejado del nodo para una partícula localizada en (x, y) .

$$\begin{aligned}
 \rho_{i,j} &= W3/(\Delta x \cdot \Delta y) \\
 \rho_{i+1,j} &= W2/(\Delta x \cdot \Delta y) \\
 \rho_{i+1,j+1} &= W1/(\Delta x \cdot \Delta y) \\
 \rho_{i,j+1} &= W4/(\Delta x \cdot \Delta y)
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

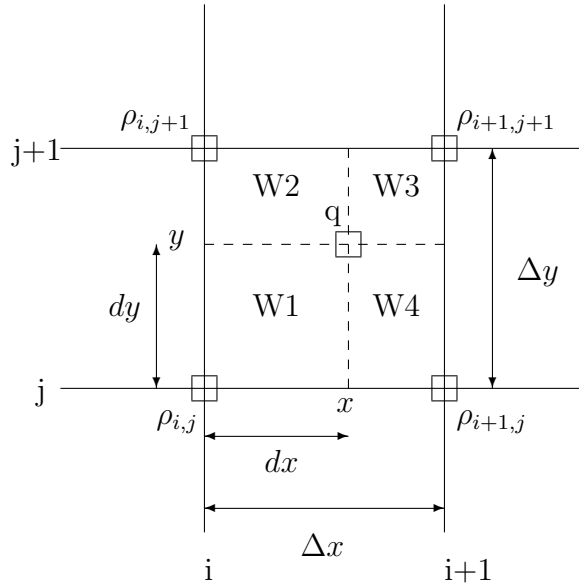


Figura 4.5: Poderación de una partícula cargada sobre la malla.

El adimensionamiento del poderación ó interpolación se asume cuando es dividido por el área total de la celda $\Delta x \cdot \Delta y$, del tal manera que la suma de las sub-áreas son igual a la unidad, $\sum_{i=1}^4 W_i = 1$.

4.3. Integración de las Ecuaciones de Campo

4.3.1. Método Espectral para Solucionar las Ecuaciones Electroestáticas (Auto Campos)

Asignando los valores de densidad de carga a los nodos o puntos de la red, obtenemos el campo eléctrico en forma general. Teniendo en cuenta para el caso electrostático ($\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$ de tal manera que $\mathbf{E} = -\nabla \phi$) en una dimensión (x). Las ecuaciones diferenciales a solucionar son:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad \text{o} \quad E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{o} \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.4)$$

cuales se combinan para obtener *la ecuación de Poisson*.

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (4.5)$$

Una aproximación es hacer que las ecuaciones (4.3) y (4.5) se expresen como diferencias finitas para buscar su solución. Usando la malla mostrada en la figura (4.6), tenemos que para el caso unidimensional

$$E_j = \frac{\phi_{j-1} - \phi_{j+1}}{2\Delta x} \quad (4.6)$$

$$\frac{\phi_{j-1} - 2\phi_j + \phi_{j+1}}{(\Delta x)^2} = -\frac{\rho_j}{\epsilon_0}. \quad (4.7)$$

Usando los ρ_j conocidos de los x_j , obtenemos los ϕ_j desconocidos y consecutivamente los respectivos E_j , para j que corren desde 0 hasta $L/\Delta x$, donde L es la longitud del sistema de nodos contiguos. Con el uso de condiciones de frontera conocidas en $x = 0$, L junto con los ρ_j se puede obtener tanto ecuaciones como valores desconocidos (ϕ).

Un poderoso enfoque para *sistemas periódicos* es usar series discretas de Fourier para todos los valores en la red. Este esquema también provee información espectral espacial de ρ , ϕ , y E de utilidad en relación con los resultados de la teoría de plasma, y el cual permite hacer control sobre el espectro de las cantidades de campo [14].

La clave para dar solución con este esquema es la asunción de que el problema puede ser atacado conociendo los valores de la transformada de Fourier de $\rho(\mathbf{x})$ y $\phi(\mathbf{x})$, es decir $\rho(\mathbf{k})$ y $\phi(\mathbf{k})$, donde \mathbf{k} es el vector de onda en el núcleo de la transformación de

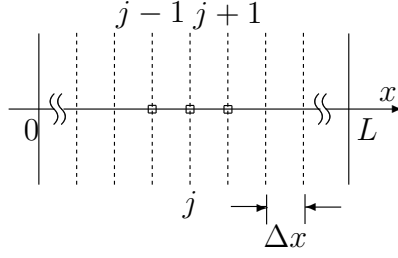


Figura 4.6: Malla unidimensional uniformemente espaciada, con planos localizados en los nodos $X_j = j\Delta x$. La densidad de carga ρ , el potencial ϕ , y el campo E_x son obtenidos de los X_j .

Fourier, $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$. Esta asunción nos permite obtener $\phi(\mathbf{k})$ de $\rho(\mathbf{k})$ en la ecuación diferencial de Poisson directamente, haciendo el reemplazo de (en una dimensión por ejemplo), $\partial^2/\partial x^2$ por $-k^2$, esto es:

$$\phi(k) = \frac{\rho(k)}{\epsilon_0 k^2} \quad (4.8)$$

El siguiente paso es tomar la transformada inversa de Fourier de $\phi(k)$, obteniendo $\phi(x)$ para calcular $E(x)$ a través de (4.3).

Si tenemos una serie de Fourier finita de cada $\rho(x)$ en cada nodo X_j de NG nodos ($NG = L/\Delta x$, donde L la longitud total del sistema). La serie estaría representada por la densidad de carga en cada nodo así: $\rho(X_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, NG - 1$ para un total de NG nodos. Si definimos la función $G(X_j)$ (puede ser el campo; el potencial ó la densidad de carga) de tipo periódico, $G(X_j) = G(X_j + L)$, entonces la transformada de Fourier discreta sería (sobre la suma de los $X_j = j\Delta x$).

$$G(k) = \Delta x \sum_{j=0}^{NG-1} G(X_j) e^{-ikX_j} \quad (4.9)$$

Y la transformada inversa sería (sobre la suma de los $k = n \frac{2\pi}{L}$).

$$G(X_j) = \frac{1}{L} \sum_{n=-NG/2}^{NG/2-1} G(k) e^{-ikX_j} \quad (4.10)$$

Cual genera NG valores distintos de $G(X_j)$. La ventaja es que se hace de manera rápida. Usando el esquema anterior de las series para $\rho(X_j)$, $\phi(X_j)$, y $E(X_j)$ junto con las ecuaciones de diferencias finitas (4.6) y (4.7), obtenemos

$$E(k) = -iK\phi(k) \quad (4.11)$$

donde

$$K = k \left[\frac{\sin(k\Delta x)}{k\Delta x} \right] = k \text{ dif}(k\delta x) \quad (4.12)$$

donde $\text{dif}(\theta) \equiv \frac{\sin \theta}{\theta}$ es la función *sinc* usada en *teoría de difracción*. Y

$$\phi(k) = \frac{\rho(k)}{\varepsilon_0 K^2} \quad (4.13)$$

donde

$$K^2 = k^2 \left[\frac{\sin \frac{k\Delta x}{2}}{\frac{k\Delta x}{2}} \right]^2 = k^2 \text{ dif}^2 \left(\frac{k\Delta x}{2} \right). \quad (4.14)$$

Y así conseguir que NG valores de $\rho(X_j)$ sean transformados en NG valores de $\rho(k)$, para de esta manera obtener NG valores de $E(X_j)$. A continuación se muestra la secuencia necesaria para solucionar la ecuación de poisson usando transformada rápida de Fourier (FFT) y su respectiva inversa (IFFT):

$$\rho(x) \xrightarrow{\text{FFT}} \rho(k) \xrightarrow{K^2} \phi(k) \xrightarrow{\text{IFFT}} \phi(x) \xrightarrow{\nabla\phi} E(x).$$

4.4. Calculo de Fuerza (Interpolación)

Para asegurar la conservación del momento, el mismo esquema de interpolación (esquema de asignación de carga a la malla) se utiliza para calcular la fuerza sobre la posición de cada partícula. Si hemos usado el esquema NGP, entonces la fuerza sobre cada partícula es simplemente la fuerza evaluada en cada punto de la malla próximo a la posición de la partícula. Para el esquema CIC tendríamos la siguiente formula

$$F_i = q_i \left[\frac{(x_i - x_{g-1})}{\Delta x} E_g + \frac{(x_g - x_i)}{\Delta x} E_{g-1} \right]$$

para $x_{g-1} \leq x_i \leq x_g$, donde g representa la posición del nodo o punto de la malla.

4.5. Integración de las Ecuaciones de Movimiento

Queremos usar un método rápido que mantenga una precisión aceptable. Nuestra elección debe tener en cuenta la capacidad de almacenamiento del computador, conservando la cantidad de partículas. para seguir la trayectorias de cada partícula a través de los campos (calculo de trayectorias), debemos escoger la velocidad y posición de previos pasos de tiempo y usar un método de integración con un orden mayor de precisión. Usar metodos de alto orden de precisión (por ejemplo Runge-Kutta) podrían aumentar el numero de operaciones por partícula, por ello debemos siempre usar metodos rápidos con mínimo almacenamiento.

Un método integración comúnmente usado es el de *leap-frog*. Las dos ecuaciones diferenciales de primer orden (3.2) son integradas por separado para cada partícula, en un conjunto de ecuaciones de *diferencias finitas*.

$$\frac{\mathbf{v}_i^{n+1/2} - \mathbf{v}_i^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F}_i^n}{m_i} \quad (4.15)$$

$$\frac{\mathbf{x}_i^{n+1} - \mathbf{x}_i^n}{\Delta t} = \mathbf{v}_i^{n+1/2} \quad (4.16)$$

El esquema de leap-frog es un método de segundo orden de precisión para pasos de tiempo constantes Δt . Los super-índices indican los niveles-paso de tiempo. En la figura 4.7 se observa el desfase ($\Delta t/2$) que hay entre la posición y la velocidad, este esquema también es llamado *centrado en el tiempo*.

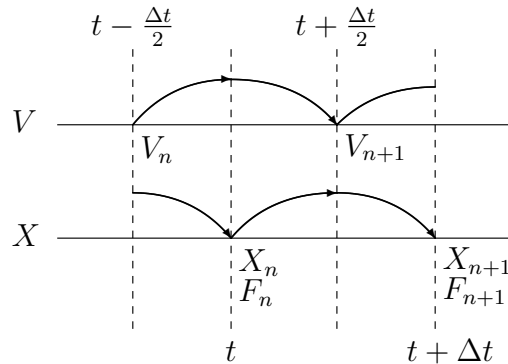


Figura 4.7: Esquema de *Leap-frog*. El método muestra el esquema *centrado en el tiempo* para la fuerza \mathbf{F} mientras que avanza \mathbf{v} , y de \mathbf{v} mientras avanza \mathbf{x} .

Para un oscilador armónico (por ejemplo $\mathbf{F} \propto \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$) de frecuencia ω_0 , leapfrog no introduce errores en su amplitud para un criterio $\omega_0 \Delta t \leq 2$, de tal manera que al escoger

un Δt que satisfaga $\omega_0 \Delta t = 0,3$ da una razonable precisión para $10^3 \Delta t$ pasos de tiempo. Hay cuatro criterios para ser considerados cuando se debe escoger un algoritmo para integrar las ecuaciones de movimiento de las partículas.

4.5.1. Convergencia

Significa que la solución del método numérico converge a un valor exacto de la ecuación diferencial en limite cuando Δt y Δx tienden a cero. Para esquemas lineales los requerimientos de consistencia y estabilidad son condiciones suficientes y necesarias para la convergencia. Esto es necesario para que haya reversibilidad en tiempo. Y en este sentido el esquema de leap-frog cumple con este propósito (reversible en el tiempo) [13][14].

4.5.2. Precisión

Se entiende por precisión el error de truncamiento asociado con la aproximación de la derivadas con las diferencias finitas. Si combinamos las dos ecuaciones definiendo la aproximación de leap-frog dentro de una sola ecuación tenemos

$$\frac{x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{F(x^n)}{m} \quad (4.17)$$

cual podemos comparar con la expresión exacta

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{F}{m}$$

Usando la expansión de Taylor para x^{n+1} y x^{n-1} al rededor de x^n tenemos

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_n + \frac{1}{2!} \Delta t^2 \left. \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right|_n + \frac{1}{3!} \Delta t^3 \left. \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} \right|_n + O(\Delta t^4)$$

$$x^{n-1} = x^n - \Delta t \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_n + \frac{1}{2!} \Delta t^2 \left. \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right|_n - \frac{1}{3!} \Delta t^3 \left. \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} \right|_n + O(\Delta t^4).$$

Combinando estas dos, tenemos que

$$\frac{x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1}}{\Delta t^2} = \left. \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right|_n + O(\Delta t^4).$$

De esta manera el método de leapfrog es de segundo orden de precisión en el tiempo.

4.5.3. Estabilidad

Si los errores por redondeo (error debido a que el computador los representa con una determinada precisión) crecen en el tiempo, entonces el esquema es inestable. Consideremos la ecuación de leapfrog (4.17). Sea x^n una solución numérica en el tiempo t^n , y X^n como la solución exacta (sin error por redondeo) para la ecuación de diferencias. Denotaremos el error numérico en el tiempo t^n por

$$\varepsilon^n = x^n - X^n. \quad (4.18)$$

Usando la ecuación (4.18) para ser remplazado x dentro de la ecuación (4.17) para obtener una ecuación de evolución del error ε con el tiempo

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^{n+1} - 2\varepsilon^n + \varepsilon^{n-1}}{\Delta t^2} &= \frac{\Delta t^2}{m} [F(X^n + \varepsilon^n) - F(X^n)] \\ &\simeq \frac{\Delta t^2}{m} \left. \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X^n} \varepsilon^n. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si asumimos la solución de oscilador de la forma

$$\varepsilon^n = (\lambda)^n = (e^{i\omega\Delta t})^n$$

entonces por sustitución dentro la ecuación previa tenemos

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = -(\Omega\Delta t)^2\lambda \quad (4.20)$$

donde hemos asumido

$$\left. \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial X} \right|_{X^n} = -\Omega^2.$$

Esta tiene solución

$$\lambda_{\pm} = 1 - \frac{1}{2}\Omega^2\Delta t^2 \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\Omega^2\Delta t^2}} \right]$$

y la solución general sería

$$\varepsilon^n = a\lambda_+^n + b\lambda_-^n$$

El esquema es estable para $|\lambda_{\pm}| \leq 1$ esto es decir que para $\Omega\Delta t \leq 2$ podemos ver que $|\lambda_{\pm}| = 1$. Esto no solo significa que el esquema de leapfrog es estable para $\Omega\Delta t \leq 2$

sino que trae una ventaja adicional, no sufre disipación de la amplitud [14]. Hay otro requerimiento para que la integración de las ecuaciones movimiento sean estables, y este es que las partículas no se desplacen mas allá de una celda dentro de la malla durante un paso de tiempo.

4.5.4. Eficiencia

Esta es una consideración crítica puesto que cualquier esquema que se pueda escoger, podría integrar cada partícula en cada tiempo, y llevar un tiempo de cálculo mayor. Es generalmente cierto para esquemas de menor orden que se cumpla lo siguiente:

- Involucrar pocos niveles intermedios por paso de tiempo.
- Requerir poco almacenamiento entre valores.
- Requerir pocas operaciones de punto flotante por paso de tiempo.
- Tener un mayor rango de estabilidad.
- Requerir pasos de tiempo pequeños para guardar la misma precisión.

Comparado con esquemas de orden superior. El simple método de segundo orden de leapfrog guarda un mejor balance entre precisión, estabilidad y eficiencia.

Capítulo 5

Simulación de un Haz-Plasma Electrónico

El modelo consiste en inyectar un haz dentro un plasma estacionario, tomando el sistema bidimensional con fronteras periódicas. Cubriremos únicamente el aspecto de la evolución temporal del sistema en el espacio de fase tanto en x como en y . Experimentos de este tipo fueron realizados en 1958 por Boyd para obtener la amplificación de microondas ($\times 10^{-2}m$) usando un haz de electrones inyectado dentro de una sección longitudinal de un gas de descarga (plasma). El plasma al ser modulando con el haz produce longitudes de onda con frecuencia mayor ($\times 10^{-3}m$), generando interés debido a que el haz y plasma se entre-mezclan sin la necesidad de algún dispositivo más sofisticado. El modelo mantiene cierta fascinación, puesto que enfatiza el carácter no-lineal del sistema, debido a las inestabilidades de las ondas generadas.

El objeto de este proyecto es observar el desarrollo de la inestabilidad $\frac{n_{haz}}{n_{plasma}} = 1/10$, donde n_{haz} es la densidad para el haz, y n_{plasma} la densidad del plasma, con velocidades de deriva respectivas en unidades de energía de $v_{haz} = 0,6 eV$ y $v_{plasma} = 0,0 eV$.

5.1. Parámetros De Entrada

Los datos suministrados al código incluyen tanto parametros físicos como computacionales.

5.1.1. Parámetros Físicos

- ne Densidad del plasma [$1/cm^2$].
- Te Energía térmica del sistema [eV].

Estos parámetros iniciales estiman el valor de la frecuencia del plasma, la longitud de Debye y la velocidad de deriva de los electrones, a través de las siguiente expresiones

$$\omega_p = \sqrt{\frac{q_e^2 n_e}{m_e \epsilon_0}}, \quad \lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 K_B T_e}{q_e^2 n_e}}, \quad v_e = \sqrt{\frac{2 K_B T_e}{m_e}}$$

Para llevar estas variables a un esquema de fácil integración se adimensionan ó reducen la escalas de acuerdo a sus parametros fundamentales. Si denominamos la escala base para longitud respecto de la longitud λ_D , y la escala temporal de acuerdo a un periodo de oscilación del plasma ω_p junto con la masa y carga fundamental del electrón, la demás escalas se reducirían de la siguiente forma:

$$x' = x/\lambda_D, \quad t' = t \cdot \omega_p, \quad v' = v \cdot \omega_p / \lambda_D, \quad q' = q/q_e, \quad m' = m/m_e, \quad E' = E \cdot [m_e \cdot \lambda_D / (q_e \cdot \omega_p^2)]$$

donde los valores primados son las variables sin dimensiones que maneja el computador.

5.1.2. Parámetros Computacionales

- `Delta_time` Tamaño del paso de tiempo.
- `Delta_cell` Tamaño de la malla ($\Delta x = \Delta y$).
- `NGx` Número de nodos en la dirección x (potencia de 2).
- `NGy` Número de nodos en la dirección y (potencia de 2).
- `NsD` Número de partículas en la longitud cuadrada de Debye.
- `N` Número de partículas en simulación.

La longitud del sistema en las dos dimensiones es calculado a través de

$$L_x = (NGx - 1) * \Delta x;$$

5.1.3. Condiciones Iniciales y Condiciones de Frontera

Hay dos grupos de partículas cuales varían su velocidad (los electrones que hacen parte del haz, y los que hacen parte de plasma en reposo). Las partículas que están localizadas en un área rectangular cuyas condiciones de frontera son periódicas en ambas dimensiones. Estas condiciones pueden ser aplicadas tanto para el movimiento de las

ω_p	1,0[s]
λ_D	1,0[cm]
Δt	0,02 = $\omega/50$
$\Delta x, \Delta y$	0,1[cm]
Te Haz	0,6[eV]
Te Plasma	0,0[eV]
Qe	-1,0
Me	1,0
NGx	64 nodos
NGy	16 nodos
Lx	6,3[cm]
Ly	1,5[cm]
NsD	30
N	30720

Cuadro 5.1: Parametros usados en la simulación para un haz-plasma electrónico

partículas y como el de los campos (internos). No hay dependencia de campos ó potenciales externos que generen discontinuidades en la frontera.

Coordenadas iniciales: la coordenadas iniciales de las partículas son generadas aleatoriamente. En el área ó caja computacional tanto las partículas que hacen parte del haz como las de los alrededores (plasma) que están presentes. Generadas de manera aleatoria e independientemente. La dirección del haz se asume en una sola dimensión, con la opción de cambio para cualquier dirección.

Velocidades iniciales: Las velocidades de las partículas tienen dos componentes. Un flujo en una dirección para el haz y otro de manera aleatoria para el plasma. Tanto para las partículas del haz como para las de plasma tiene su componente generada a través de una distribución gaussiana dependiente de la temperatura efectiva. La temperatura inicial efectiva de las partículas del haz como las del plasma no necesariamente son las mismas.

Densidades: La densidad de partículas para el haz y para el plasma guardan una proporción de 1/10.

Para nuestro caso de estudio se tomaron los siguientes parametros de acuerdo a la tabla (5.1).

A continuación se presenta los resultados arrojados por la simulación. La visualización se hizo teniendo en cuenta para cada paso de tiempo el espacio de fase en las dos dimensiones. Cada paso de tiempo tiene un delta respectivo de simulación representativo de *nano*-segundos ($\times 10^{-9}$ seg).

5.1.4. Visualización en espacio de fase del Haz-Plasma

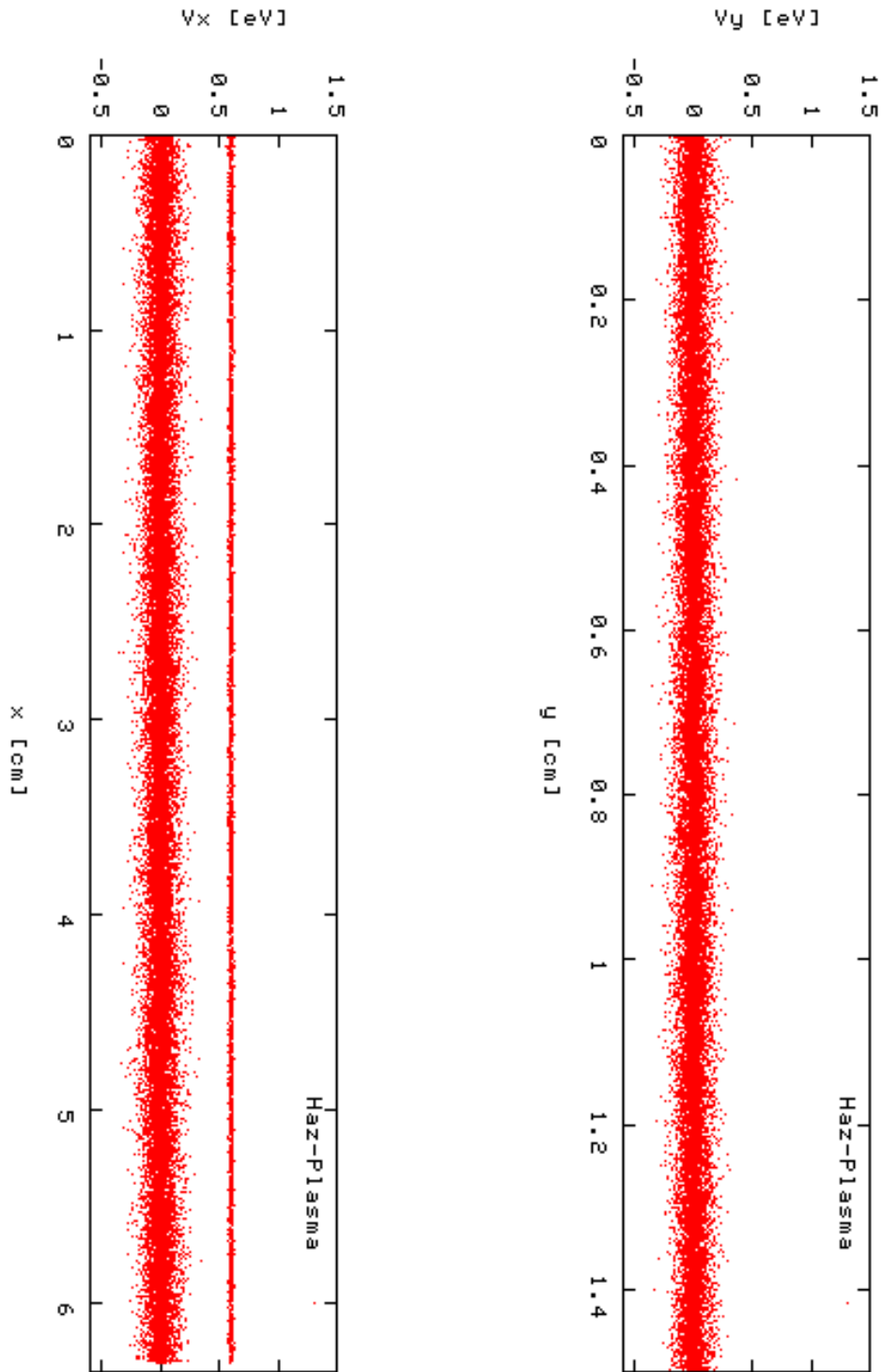


Figura 5.1: Espacio de fase para y y x en $t = 0$ pasos de tiempo

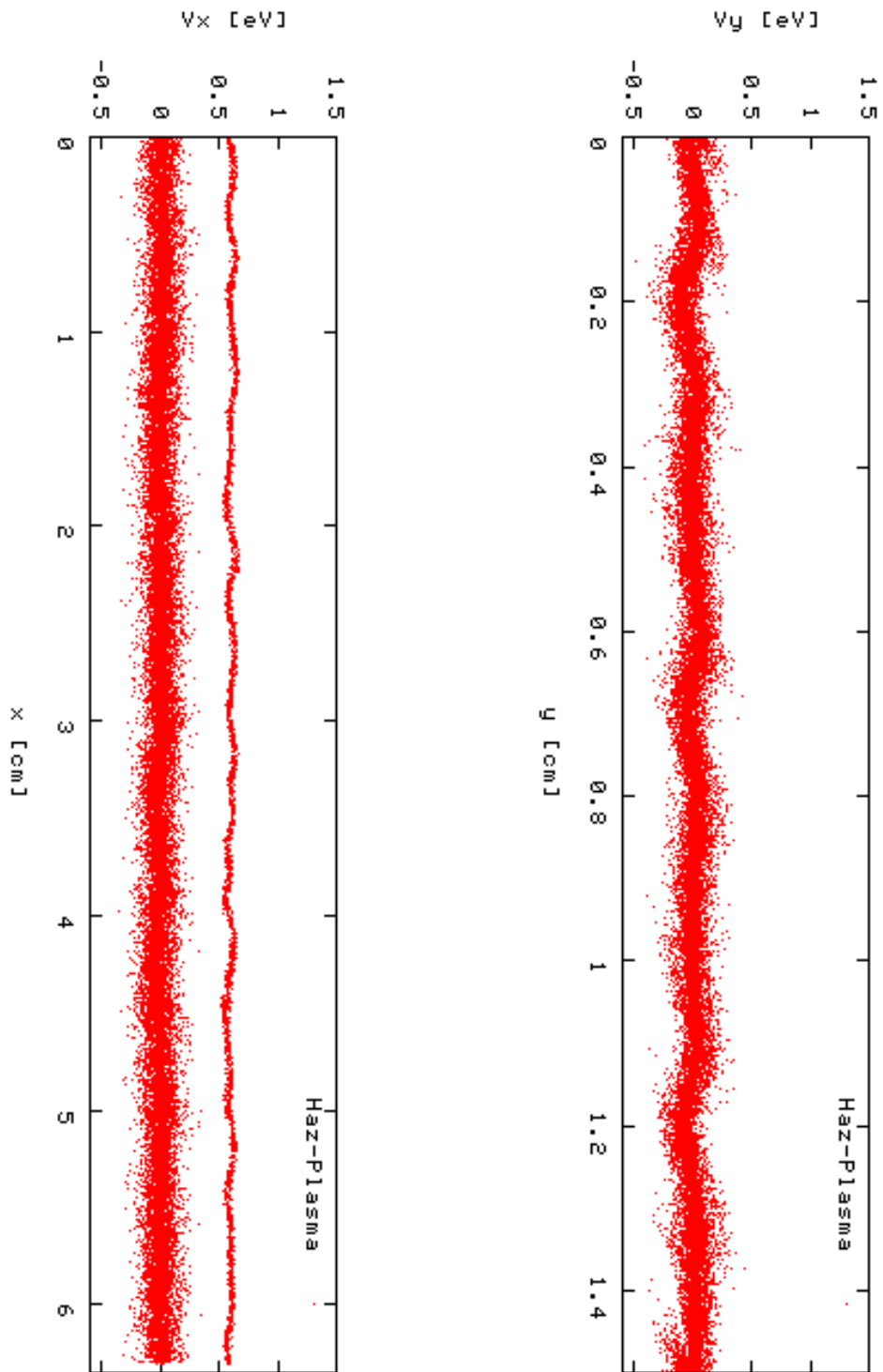


Figura 5.2: Espacio de fase para y y x en $t = 40$ pasos de tiempo

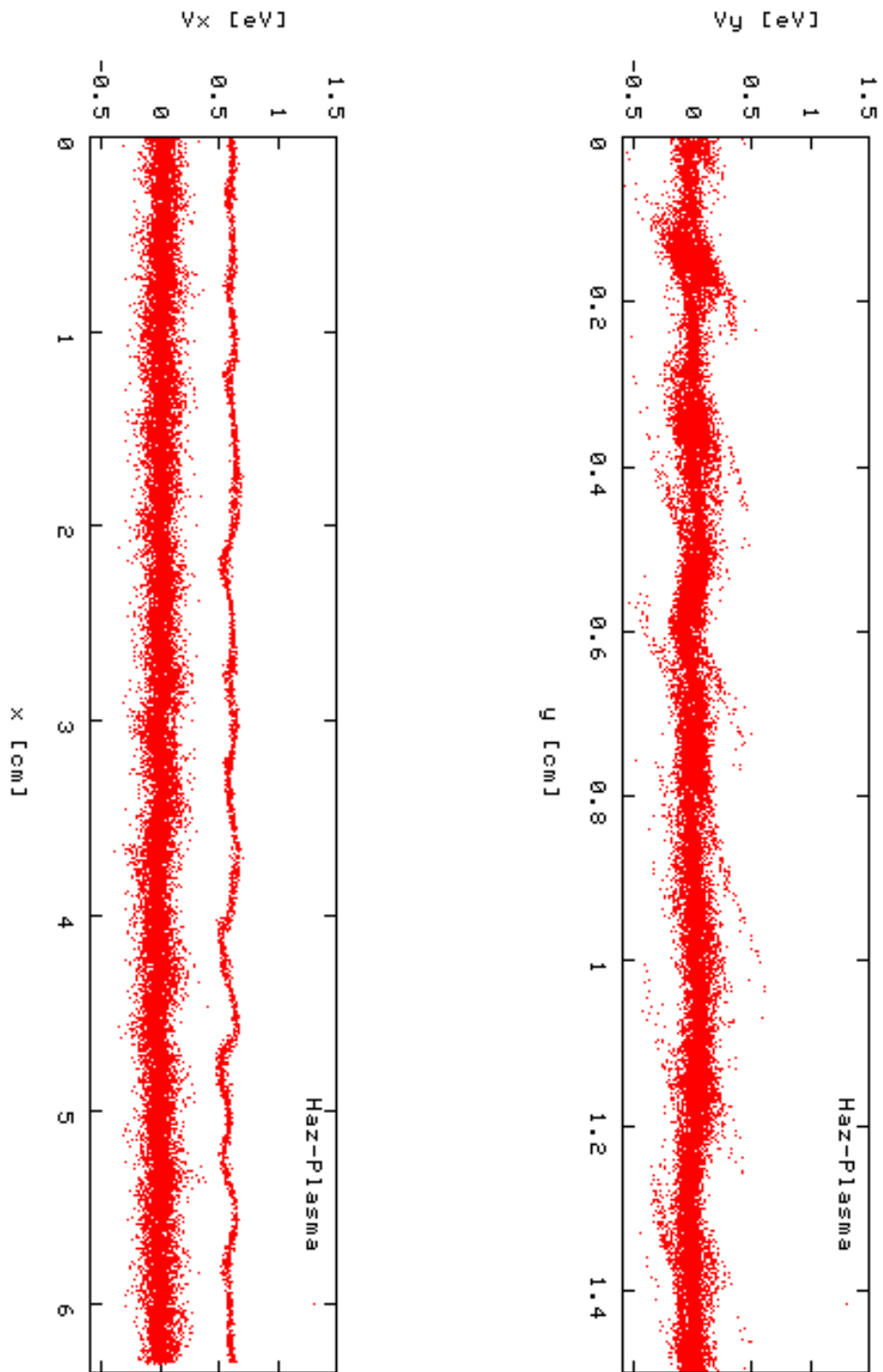


Figura 5.3: Espacio de fase para y y x en $t = 80$ pasos de tiempo

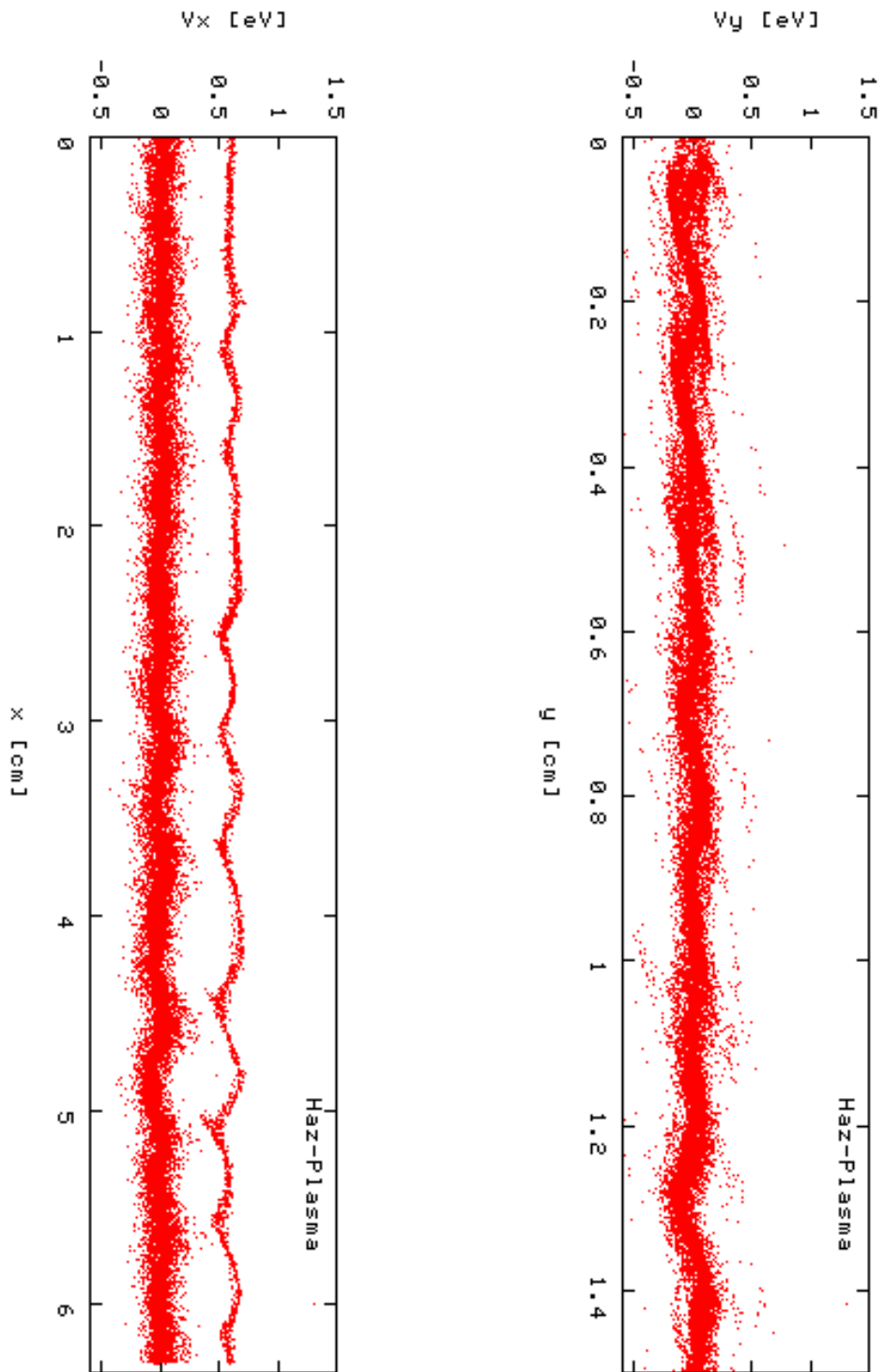


Figura 5.4: Espacio de fase para y y x en $t = 120$ pasos de tiempo

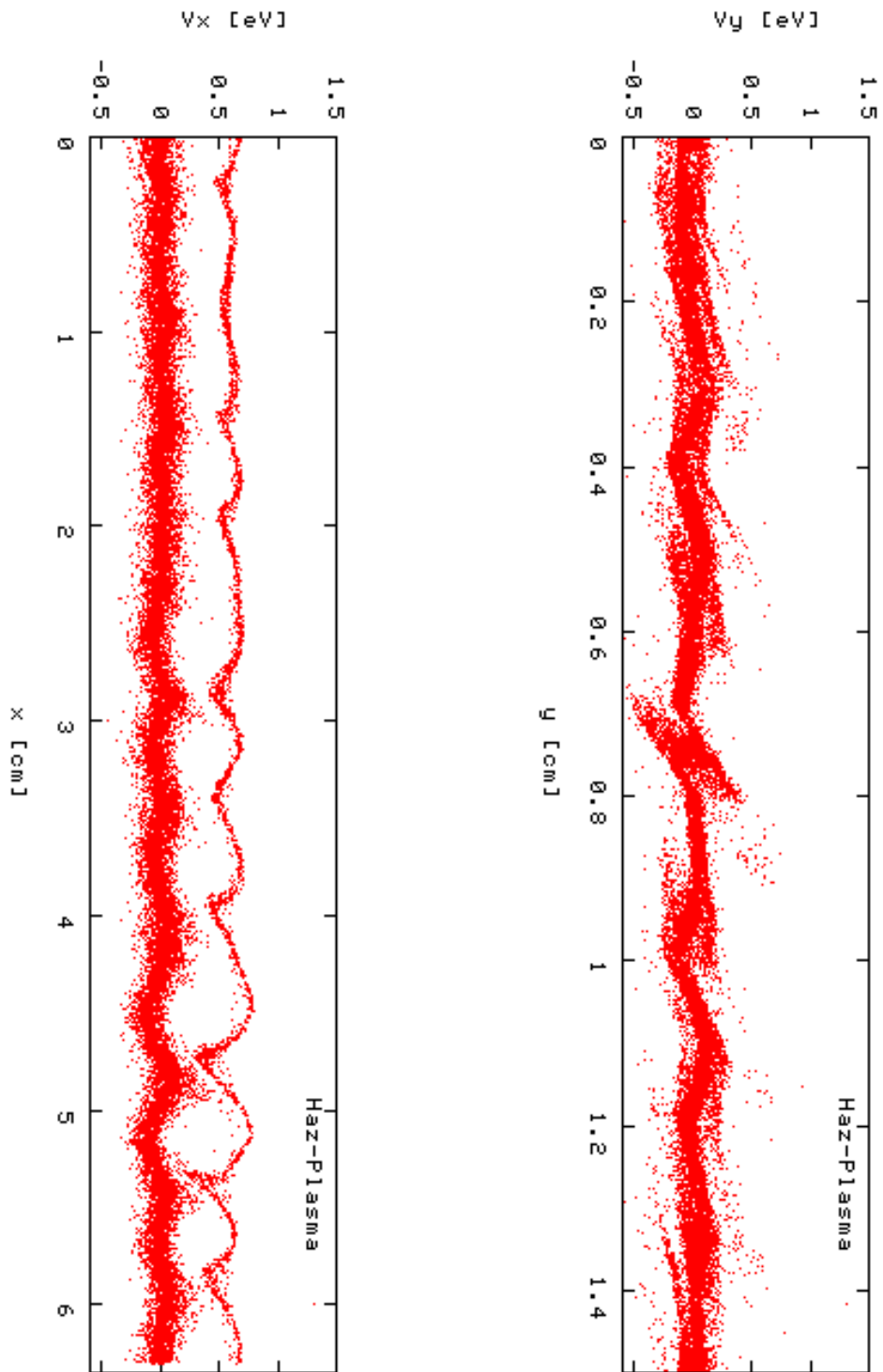


Figura 5.5: Espacio de fase para y y x en $t = 160$ pasos de tiempo

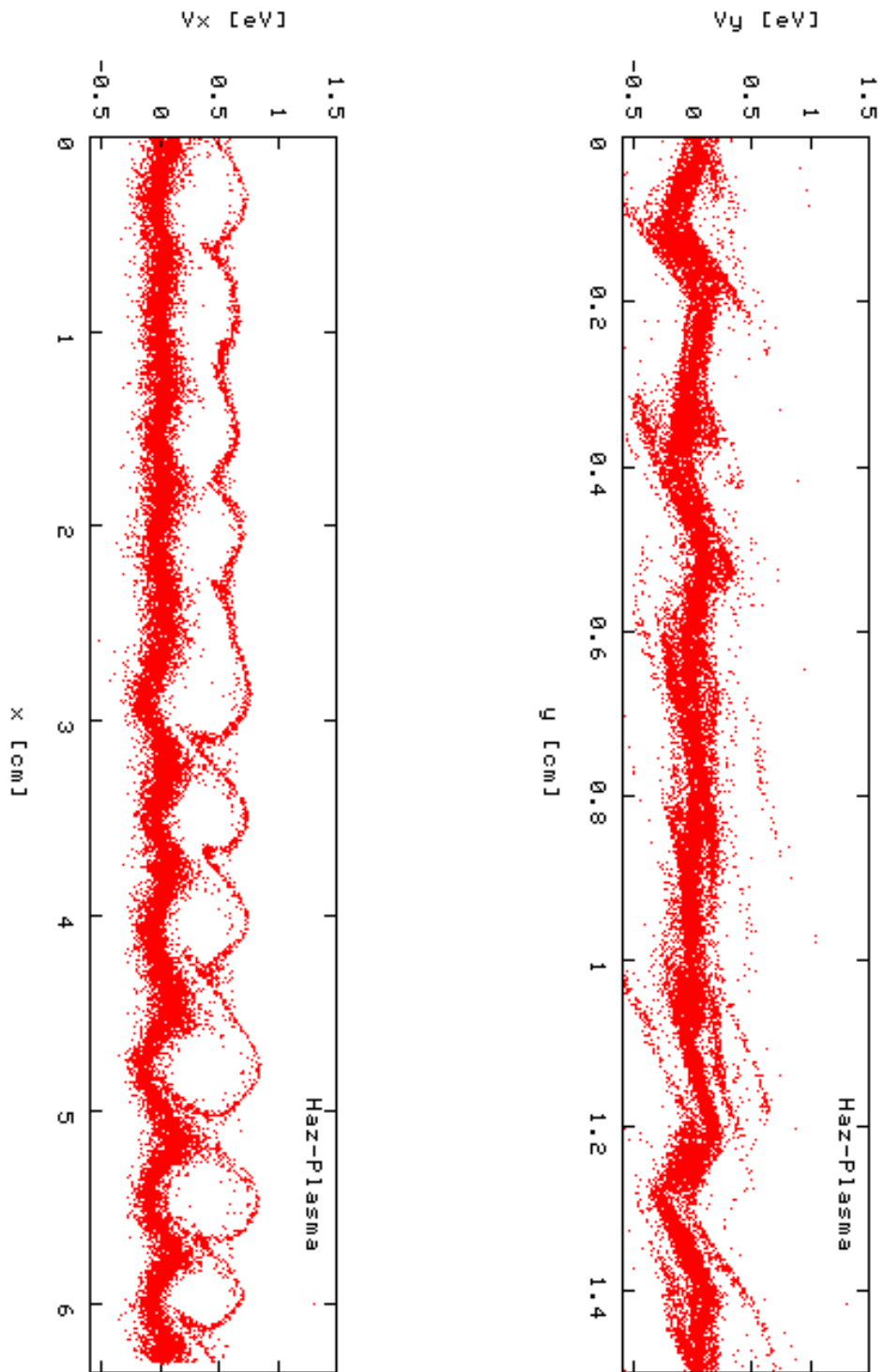


Figura 5.6: Espacio de fase para y y x en $t = 200$ pasos de tiempo

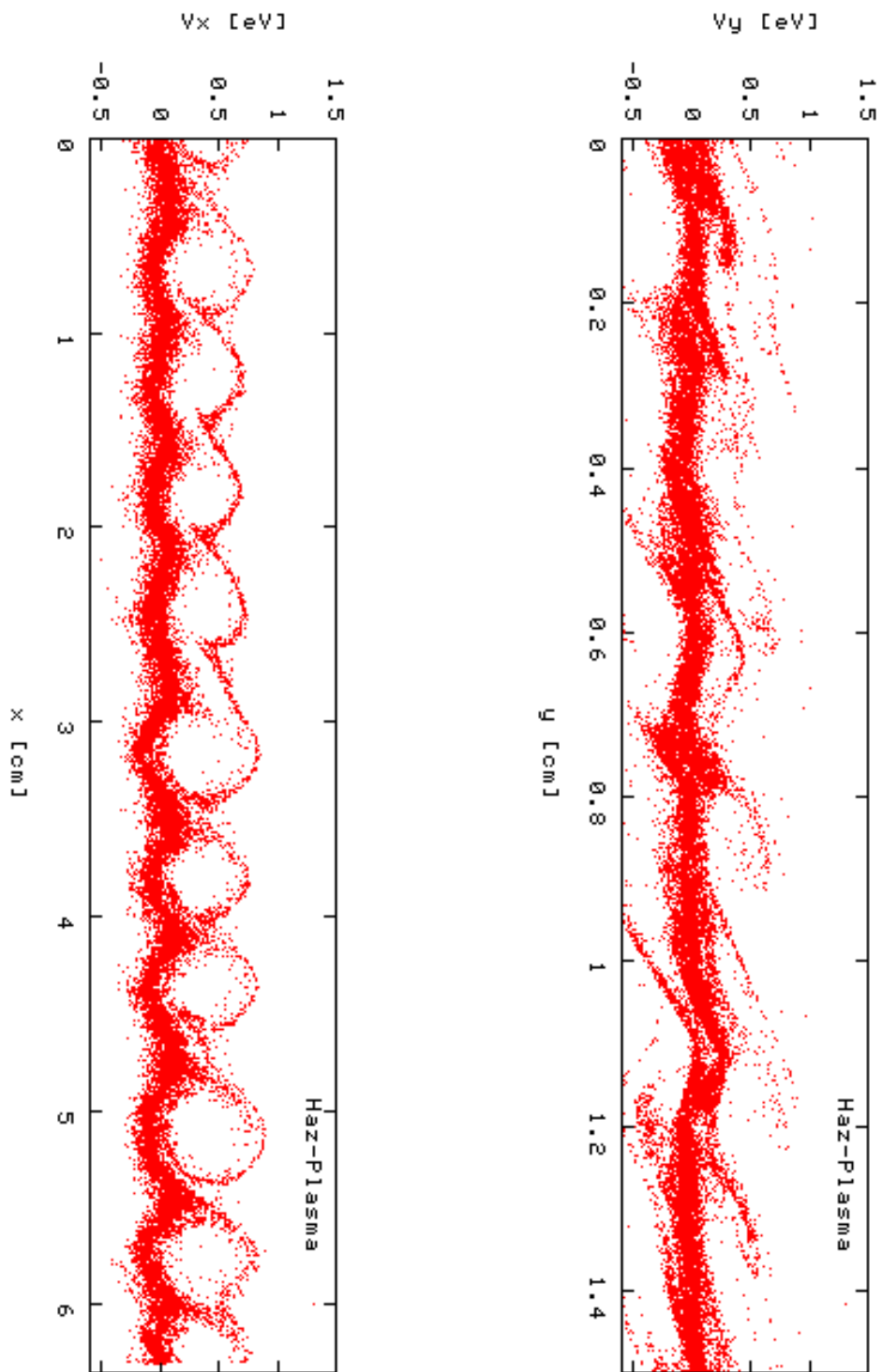


Figura 5.7: Espacio de fase para y y x en $t = 240$ pasos de tiempo

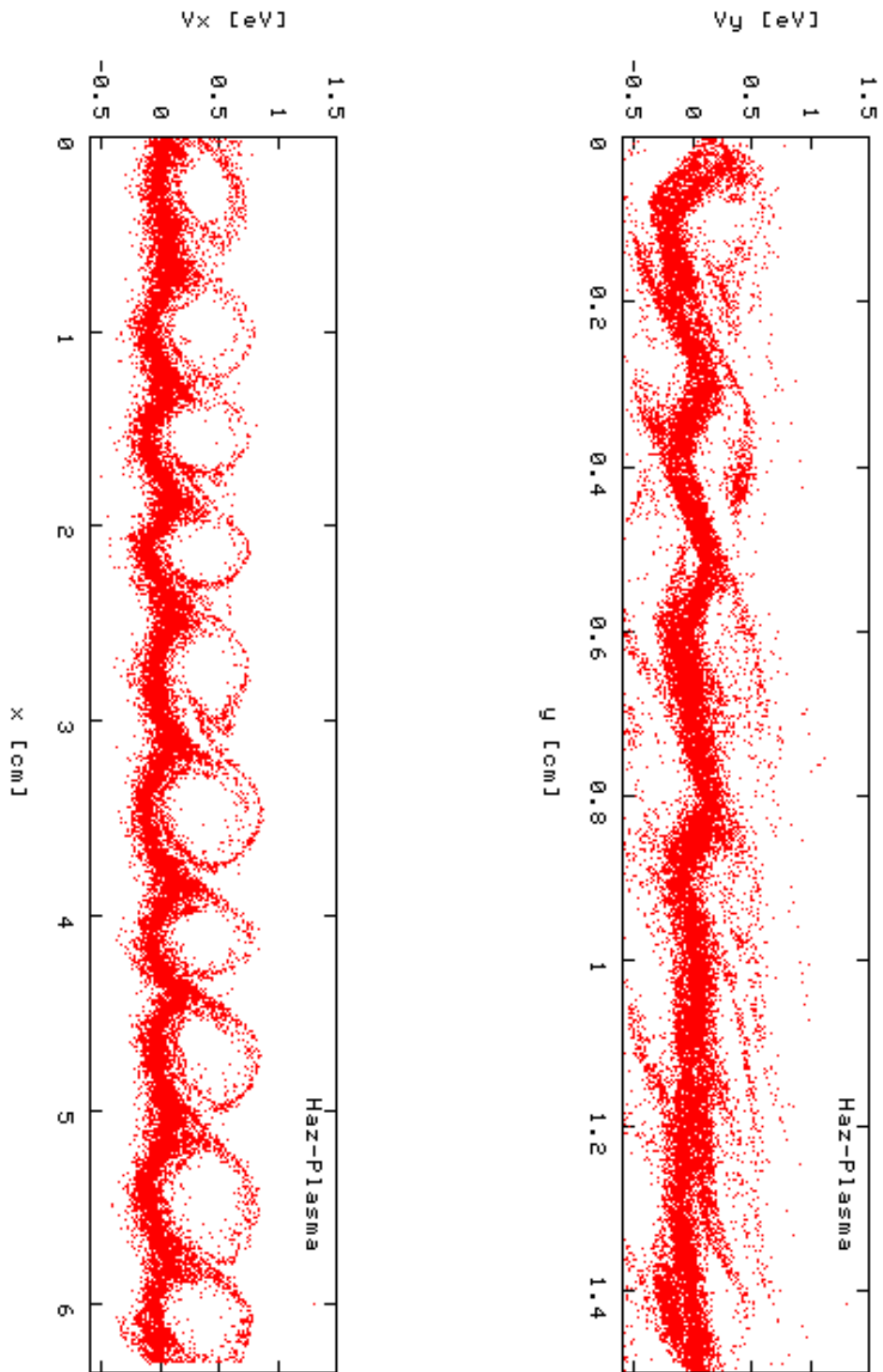


Figura 5.8: Espacio de fase para y y x en $t = 280$ pasos de tiempo

Capítulo 6

Discusión de Resultados

El comportamiento anterior se ajusta al problema de las inestabilidades generadas por dos flujos en oposición. Esto es de ayuda, porque bajo este esquema de referencia podemos asumir un cambio, por ejemplo cuando la densidad del haz n_{haz} es generalmente muy pequeño que la densidad del plasma n_{plasma} , tal que $\omega_{haz}^2 \ll \omega_{plasma}^2$ el modelo inestabilidad *haz-plasma* no se dá.

Al evolucionar la simulación, las oscilaciones generadas por el haz son atenuadas por si solas y la retroalimentación cesa despues de cierto tiempo, como si fueran amortiguadas las oscilaciones. Esto es debido a la existencia de una singularidad en la región donde $v \approx v_\phi$ (donde v_ϕ velocidad de fase de la onda)[5], los electrones viajan a la misma velocidad (ó cercana) a la velocidad de la onda. Tales electrones no oscilan de manera rápida con el campo; si v es igual que v_ϕ , se pude considerar a los electrones como un campo constante, que pueden estar sujetos por ejemplo a una aceleración constante, pero que obviamente no se mantiene indefinidamente. La situación es con frecuencia asociada con el surfeo sobre una ola, permitiendo descender sobre la ola misma, ajustándose a la misma velocidad en ella. Las partículas son atrapadas formando un remolino en el espacio de fase. Estos son efectos netamente no lineales que hacen parte de la teoría de linealización.

El amortiguamiento se debe a que los electrones cuando viajan sobre la onda, su energía potencial coincide en algún punto de la energía de la onda misma que les permita acelerar o desacelerar de acuerdo con la fase de ella. De manera tal que una partícula, es acelerada moviéndose a otras zona donde es desacelera y así ser “atrapada” en un potencial mínimo.

Consideremos ahora cuando las partículas se desplazan de manera relativamente rápida sobre la onda. En un tiempo próximo se moverán a una zona de aceleración siempre y cuando este en un potencial favorable. Por otro lado si las partículas están en un

potencial poco favorable se frenan por más rápido que ellas se desplacen, entregando energía a la onda.

Podemos aplicar el mismo argumento para partículas que se desplazan de manera lenta respecto de la onda: el efecto total es el opuesto, hay transferencia de energía de la onda a las partículas. De esta manera el efecto de amortiguamiento se da sin la necesidad de considerar al sistema como un plasma colisional.

Debido a que hay un flujo de electrones dentro del plasma con distribución de energía de tipo gaussiano, que difiere del sistema en reposo (plasma), da origen a una onda espontánea que depende del grado de inestabilidad total del sistema. Cuando en el sistema dejan de propagarse las ondas, se dice que el sistema (el plasma en su conjunto) ha alcanzado su estabilidad. Esto lo podemos observar a través de los perfiles de distribución Maxwell-Boltzman para el sistema Haz y Plasma durante la evolución de la simulación.

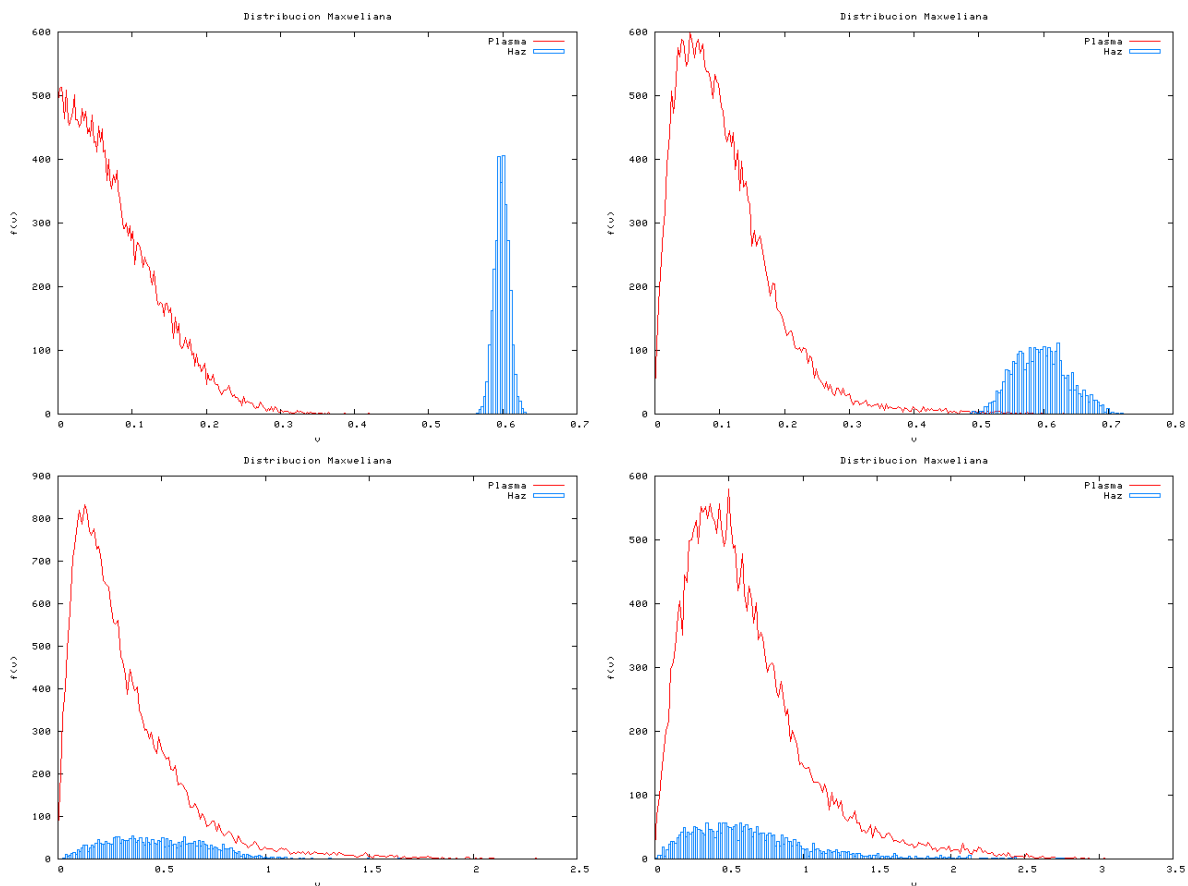


Figura 6.1: Secuencia temporal de la distribución de velocidades para el sistema Haz-Plasma, para $t = 0, 100, 1000,$ y 23400 pasos de tiempo (de izquierda a derecha). En el eje de las abscisas se estima la velocidad y el eje de ordenadas la función de distribución del sistema.

EL sistema inicialmente parte con una distribución que hace el sistema inestable, y evoluciona hasta alcanzar el equilibrio total del sistema, tal equilibrio se da para una velocidad media efectiva en unidades de energía 0,62899 eV .

6.1. Conclusiones

- Los aciertos y desaciertos del esquema partícula-malla para simular un plasma, dependen de la aproximación con que se pueda representar un contexto físico.
- El modelo PM, puede simular un plasma donde las partículas inmersas en campos electrostáticos reproducen efectos auto-consistentemente.
- El modelo PM reproduce los efectos no-lineales de un comportamiento colectivo, sin hacer uso de un sistema complejo de ecuaciones hidrodinámicas.
- Para reducir el ruido dado por el esquema de solución de las ecuaciones de campo, es conveniente aumentar el numero de nodos, para evitar los efectos no deseado de aliasing (ver ruido en el espacio de fase y en cada paso de tiempo) dados por la transformada de fourier discreta (aumentando la resolución del sistema).
- Una manera de evitar los efectos del aliasing, es aumentar el numero de partículas en la esfera de debye, y aumentar también el orden de interpolación en le pesado de asignación de carga sobre la malla y de la malla a los campos sobre las posiciones de las partículas.
- El uso de un esquema acolisional donde las partículas se mueve en $\lambda > \lambda_D$ para asegurar efectos colectivos, permite implícitamente mostrar otros efectos como el amortiguamiento de Landau donde las escalas menores de λ_D dominan y no son tenidas en cuenta.

Referencias

- [1] V.D. Dougar, F.A. Vivas and A.M. Umnov, *A 3D Simulation Model for Electron Cyclotron Plasma In A Double Cusp Magnetic trap* (1998)
- [2] V.D. Dougar, F.A. Vivas and A.M. Umnov, *Fundamentos Físicos e Implementación de un Nuevo Método para Ionización Múltiple de Iones Estables y Radioactivos*. Colciencias, 1102-05-219-99 (1999)
- [3] F.A. Vivas. *Código 3D de un Plasma ECR y Validación de un Nuevo sistema Magnético: Trampa cero B (Tesis)*(1999), Universidad Industrial de Santander, Escuela de Física.
- [4] R. Geller, *Electron Cyclotron Resonance Ion Source and ECR Plasma* (IOP, Bristol, 1996), p.2.
- [5] R. Dendy. *Plasma Physics, An Introductory Course* (Cambridge University Press. Oxfordshire, 1993)
- [6] L. Tonks, and I. Langmuir (1929). *Phys. Rev.*, **33**, 954.
- [7] N.A. Krall, A.W. Trivelpiece. *Principies of Plasma Physics* (McGraw-Hill. New York, 1973)
- [8] L.D. Landau (1946). *J. Phys. USSR*, **10**, 25.
- [9] R.F. Fernsler, S.P. Slinker and G. Joyce (2005). *Phys. Rev. E*, **71**, 026401.
- [10] F.F. Chen, *Introduction to Plasma Physics* (Plenum. New York, 1974), p.74.
- [11] D.Bohm, and E.P. Gross (1949). *Phys. Rev.*, **75**, 1851-1876.
- [12] D.Bohm, and E.P. Gross (1950). *Phys. Rev.*, **79**, 992-1001.
- [13] R.W. Hockney, J.W. Eastwood, *Computer Simulation Using Particles*, (Bristol, Philadelphia, 1988)

- [14] C.K. Birdsall, A.B. Langdon, *Plasma Physics Via Computer Simulation*, (Bristol, Philadelphia, 1991)
- [15] F.H. Harlow (1964), “The Particle-in-cell Computing Method in Fluid Dynamics”, *Methods Comput. Phys.*, **3**, 319.
- [16] T. Tajima. *Computational Plasma Physics: With Applications to Fusion and Astrophysics* (Addison-Wesley Publishing Company. 198)
- [17] Ferdinand F. Cap, *Handbook on Plasma Instabilities* (Academic Press. London, 1976)
- [18] T.H. Stix. *The Theory of Plasma Waves* (McGraw-Hill. Toronto, 1962)