

**IDENTIFICACIÓN Y CONTROL DE UN ROBOT MANIPULADOR PUMA MA2000
DE SEIS GRADOS DE LIBERTAD**

DIANA KATHERYN POVEDA RODRIGUEZ

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA**

2014

**IDENTIFICACIÓN Y CONTROL DE UN ROBOT MANIPULADOR PUMA MA200
DE SEIS GRADOS DE LIBERTAD**

DIANA KATHERYN POVEDA RODRIGUEZ

**Trabajo de grado para optar al título de
Ingeniero Electrónico**

Director

PhD. RODOLFO VILLAMIZAR MEJÍA

Coodirector

MSc. JOSE JORGE CARREÑO ZAGARRA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA**

2014

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	12
1. GENERALIDADES	14
1.1. OBJETIVOS.....	14
1.1.1 Objetivos Generales.....	14
1.1.2 Objetivos Específicos.....	14
1.1.3 Contenido del Informe.....	15
1.1 ROBOTS MANIPULADORES.....	16
1.2 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL SISTEMA	17
1.2.1 Tarjeta de potencia	19
2 MODELADO DINAMICO DEL ROBOT PUMA MA2000 POR MEDIO DE LA FORMULACION DE EULER-LAGRANGE	21
3 IDENTIFICACIÓN DEL MODELO NO LINEAL DEL BRAZO MANIPULADOR PUMA MA2000	30
3.1PROCEDIMIENTO PARA LA IDENTIFICACIÓN DEL MODELO NO LINEAL DEL BRAZO ROBOTICO PUMA MA2000.....	30
4. CONTROL ÓPTIMO	47
4.1 DISEÑO DE CONTROLADORES ÓPTIMOS CUADRÁTICOSPARA EL BRAZO MANIPULADOR PUMA MA2000.....	49
5. CONCLUSIONES	57
6. TRABAJOS FUTUROS.....	59
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	60
BIBLIOGRAFIA.....	63
ANEXOS.....	66

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Diagrama brazo manipulador de 6 grados de libertad.	17
Figura 2 Diagrama de bloques para el control óptimo del brazo robótico PUMA MA2000	18
Figura 3 Esquema de la tarjeta de potencia	20
Figura 4 Brazo manipulador PUMA MA2000	23
Figura 5. Diagrama de bloques del procedimiento de identificación.	31
Figura 6. Trayectoria de excitación 1	33
Figura 7. Trayectoria de excitación 2	33
Figura 8. Estimación de la dinámica del motor en cintura trayectoria 1	37
Figura 9. Estimación de la dinámica del motor en cintura trayectoria 2	37
Figura 10. Estimación parámetros del motor en hombro y codo trayectoria 1	41
Figura 11. Estimación parámetros del motor en hombro y codo trayectoria 2	41
Figura 12. Estimación parámetros del motor en hombro y codo trayectoria 3	42
Figura 13. Estimación de la dinámica no lineal del brazo de 2 grados de libertad con la trayectoria 1	43
Figura 14. Estimación de la dinámica no lineal del brazo de 2 grados de libertad con la trayectoria 2.....	44
Figura 15. Estimación de la dinámica no lineal del brazo de 2 grados de libertad con la trayectoria 2.....	44
Figura 16. Diagrama de bloques en Simulink del controlador óptimo cuadrático...52	
Figura 17..Controladores óptimo, P, PI para la cintura	54
Figura 18. Controladores óptimo, P, PI para el hombro	54
Figura 19.Controladores óptimo, P, PI para el codo.	55
Figura 20. Esquema del brazo manipulador de dos grados de libertad	74
Figura 21. Pasos para la identificación del sistema por medio del algoritmo indlgrey	80

Figura 22. Estructura general que representa la programación de las trayectorias de excitación y la comunicación con la tarjeta de adquisición de datos.....	82
Figura 23. Función que genera la trayectoria de excitación por medio de series de Fourier.	83
Figura 24. Respuesta ante la trayectoria de excitación 1 en Hombro.....	84
Figura 25. Respuesta ante la trayectoria de excitación 2 en hombro	85
Figura 26. Respuesta ante la trayectoria de excitación 3 en hombro	85
Figura 27. Respuesta ante la trayectoria de excitación 3 en codo.....	86
Figura 28. Respuesta ante la trayectoria de excitación 2 en codo.....	86
Figura 29. Respuesta ante la trayectoria de excitación 1 en codo.....	86

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Trayectorias de excitación	32
Tabla 2 Parámetros del brazo manipulador PUMA MA2000	35
Tabla 3. Parámetros del motor obtenidos para la cintura	38
Tabla 4. Parámetros del motor hombro y cintura.....	42
Tabla 5. Parámetros para hombro y codo.....	45
Tabla 6. Resultado Sintonización PID clásicos [20]	53
Tabla 7. Resultados de consideraciones de desempeño con control óptimo.	56
Tabla 8. Resultados de consideraciones de desempeño con control P.....	56
Tabla 9. Resultados de consideraciones de desempeño con control PI.....	56

LISTA DE ANEXOS

Anexo A. Desarrollo de las ecuaciones de Euler-Lagrange para un brazo robótico PUMA MA2000.	66
Anexo B. Modelado dinámico por medio de la metodología de Euler-Lagrange para un robot manipulador de dos grados de libertad.	74
Anexo C. Linealización del modelo no lineal del robot manipulador MA2000.	78
Anexo D. Generalidades del algoritmo Idnlgrey de MATLAB.	80
Anexo E. Interfaz Implementada LABVIEW.	82
Anexo F. Resultados experimentales en el proceso de identificación.	84

RESUMEN

TITULO: “IDENTIFICACIÓN Y CONTROL DE UN ROBOT MANIPULADOR PUMA MA2000 DE SEIS GRADOS DE LIBERTAD”¹

AUTOR: DIANA KATHERYN POVEDA RODRIGUEZ²

PALABRAS CLAVE:

Identificación Paramétrica, Control óptimo, Robot Manipulador.

DESCRIPCIÓN:

En el presente trabajo de grado se aborda la identificación del modelo no lineal del brazo manipulador PUMA MA2000, donde se emplean trayectorias conformadas por una suma finita de funciones armónicas de series de Fourier para la obtención del modelo experimental. El modelo matemático no lineal es obtenido empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange y los parámetros de este se estiman a partir de la medición experimental de la dinámica de las articulaciones cintura, hombro y codo del robot, y usando un método de ajuste de curvas. El proceso de identificación se centra en el uso de un modelado de caja gris, esto con el fin de utilizar el conocimiento a priori del sistema obtenido a través de la formulación de Euler- Lagrange y ayudar así al algoritmo de optimización implementado en la búsqueda de los parámetros del sistema.

Una vez obtenido el modelo no lineal del brazo manipulador PUMA MA2000, se linealiza con el fin de diseñar controladores óptimos de la dinámica del sistema. El desempeño de dichos controladores se compara con controladores PID previamente sintonizados para cada una de las articulaciones del brazo manipulador.

Con este diseño, se pretende mejorar la rapidez y precisión del robot con respecto a los controladores PID, además de obtener conclusiones significativas sobre el desempeño de controladores óptimos y la identificación paramétrica de sistemas robóticos.

¹ Trabajo de grado.

² Facultad de ingenierías Físico-mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones. Director. Rodolfo Villamizar Mejía, PhD. Codirector. Jose Jorge Carreño Zagarra, MSc.

KEYWORDS

TITLE: "IDENTIFICATION AND CONTROL OF ASIX DEGREES OF FREEDOM ROBOT MANIPULATOR"³

AUTHOR: DIANA KATHERYN POVEDA RODRIGUEZ⁴

KEYWORDS:

Parametric Identification, Optimal Control, Robot Manipulator.

ABSTRACT:

In this paper, a nonlinear model for a MA2000 PUMA manipulator arm is obtained, where trajectories formed by a finite sum of harmonic Fourier series are used to obtain experimental functions. The nonlinear mathematical model is obtained by using the Euler- Lagrange equations and parameters are estimated from the experimental measurement of dynamic of robot joints: waist, shoulder and elbow and by using a curve fitting method. The identification process focuses on the use of a gray box modeling; this in order to use a priori knowledge of the system obtained by the formulation of Euler-Lagrange and helps the optimization algorithm implemented in the search for system parameters.

After obtaining the model for a MA2000 PUMA, this is linearized in order to design optimal controllers. The performance of such controllers is compared with previously tuned PID controllers, for each one of the robot joints.

This design, is intended to improve the speed and accuracy of the robot with respect to PID controllers, in addition to obtaining meaningful conclusions on the performance of optimal drivers and parametric identification of robotic systems.

³Degree work.

⁴Physico-mechanical Engineering Faculty. School of Electrical Engineering. Advisor: Rodolfo Villamizar Mejía, PhD. Co-Advisor: Jose Jorge Carreño Zagarra, MSc(c.).

INTRODUCCIÓN

Los sistemas robóticos actuales encuentran en el uso de las técnicas avanzadas de control, la posibilidad de tener características de precisión y agilidad iguales o superiores a las que poseemos los seres humanos, al momento de realizar actividades repetitivas dentro de procesos industriales, con mayor grado de exactitud.

La robótica es importante para la industria, ya que dentro de diversos procesos industriales se hace uso de robots para realizar actividades repetitivas que requieren de alta precisión. Por otra parte los robots facilitan el desarrollo de actividades que representan alto riesgo para los operadores humanos, contribuyendo a la seguridad industrial, la disminución de costos y el aumento de la efectividad, calidad y productividad en las empresas.

Este documento describe el plan a seguir para obtener el modelo dinámico no lineal y los controladores óptimos del robot PUMA MA2000, de los grupos de investigación CEMOS y ERA de la Universidad industrial de Santander, al cual le fue rediseñada su estructura electrónica como una plataforma de investigación de estrategias de control y de comunicación.

Debido a la precisión y complejidad del modelo que presentan los manipuladores robóticos, para obtener buenos resultados en el desempeño de los controladores, es necesario que la identificación del sistema no lineal sea lo más acertada posible. Por ello, la definición de las trayectorias de excitación a ser utilizadas en la identificación, debe ser tal que representen toda la dinámica posible del robot. Un modelo no lineal plenamente identificado, obtenido a partir de un proceso de identificación por ajuste de curvas, ayuda a garantizar que el controlador diseñado, responda adecuadamente a los criterios de diseño establecidos.

Finalmente en este trabajo se presentan las ventajas en la operación y el desempeño que ofrecen las técnicas de control en espacio de estados (control óptimo para este caso), respecto a la sintonización de controladores PID clásicos.

1. GENERALIDADES

1.1. OBJETIVOS

1.1.1 Objetivos Generales

Controlar la dinámica de las articulaciones hombro, cintura y codo del robot PUMA MA2000, usando controladores óptimos diseñados a partir de la técnica LQR.

1.1.2 Objetivos Específicos

El cumplimiento del objetivo general del trabajo de grado comprende:

- Desarrollar el modelo dinámico no lineal del robot manipulador PUMA MA2000 mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange.
- Obtener los parámetros del modelo no lineal a partir de la medición experimental de la dinámica de las articulaciones cintura, hombro y codo del robot, y usando un método de ajuste de curvas.
- Sintonizar controladores óptimos para la dinámica de las articulaciones cintura, hombro y codo del robot manipulador MA2000 a partir de la técnica LQR.
- Medir el desempeño dinámico de las articulaciones cintura, hombro y codo del robot, usando controladores óptimos LQR, y comparados con respecto a controladores PID sintonizados empíricamente.

1.1.3 Contenido del Informe.

El presente documento se encuentra organizado de la siguiente forma:

El capítulo 1 se presenta algunas generalidades de la teoría de robots manipuladores y características del brazo manipulador PUMA MA2000. En el capítulo 2 se desarrollan las ecuaciones de movimiento de Euler –Lagrange para obtener el modelo dinámico no lineal de brazo manipulador. El capítulo 3 describe la teoría general de la identificación de sistemas, mostrando el método de identificación utilizado para el caso particular del robot manipulador MA2000, además de exponer el desarrollo del algoritmo escogido para la estimación del modelo. En el capítulo 4 se presenta la teoría de control óptimo, el cálculo de los controladores óptimos y el análisis al comparar el desempeño de los controladores óptimos cuadráticos obtenidos con los controladores clásicos sintonizados empíricamente.

CAPITULO 1 GENERALIDADES DEL SISTEMA

En el contexto actual, el conocimiento de la robótica presenta la idea de una estructura mecánica, capaz de adaptarse a un determinado número de acciones desarrolladas con elevada precisión y en situaciones de riesgo no aptas para maniobras humanas. La robótica tiene grandes aplicaciones en diferentes campos como la industria, agricultura, industria petrolera, seguridad, entre otras. Por tanto, dependiendo de la precisión necesaria para su ejecución, su modelado matemático debe ser fiable para que el diseño de los controladores responda adecuadamente a las condiciones reales del sistema.

Dentro del campo de la robótica, el área más explorada y con mayor proyección en la actualidad es el control de brazos robóticos o robots manipuladores, los que se caracterizan por ser sistemas dinámicos de múltiples entradas y múltiples salidas. En el presente capítulo se presentan las generalidades de los robots manipuladores y una descripción detallada del brazo robótico PUMA MA2000, con las adecuaciones necesarias para realizar el proceso de toma de datos que posteriormente serán utilizados para realizar la identificación del sistema.

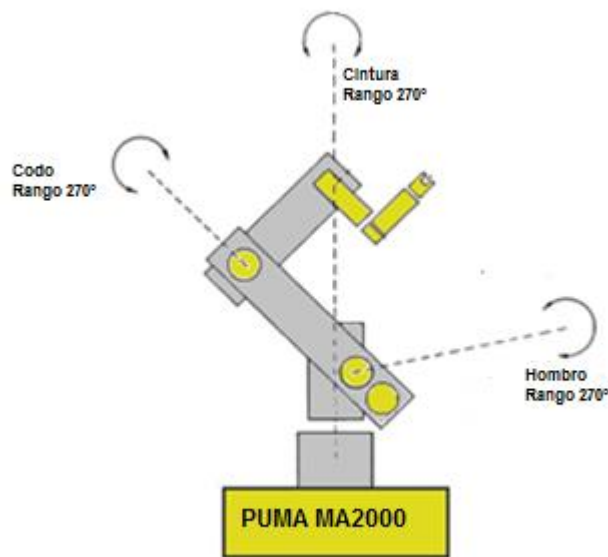
1.1 ROBOTS MANIPULADORES

Los robots manipuladores son sistemas mecánicos articulados que están formados por eslabones conectados entre sí, a través de articulaciones que a su vez pueden ser rotacionales o traslacionales. En el caso de estudio, el brazo manipulador está formado por una cadena cinemática abierta. Cada eslabón es controlado por un accionador que se coloca en cada unión, y el movimiento de las uniones produce el movimiento relativo en el grupo de eslabones [1].

El brazo manipulador MA2000 está basado en el robot PUMA de la serie 500. Consta de seis grados de libertad concedidos por los movimientos de guiñada,

alabeo y cabeceo del actuador y las rotaciones en cintura, hombro y codo; las tres articulaciones posicionan en el espacio a las tres últimas articulaciones que son las que orientan el efector como se puede observar en la Figura 1. La posición de cada una de las articulaciones es sensada por medio de un potenciómetro lineal [2].

Figura 1 Diagrama brazo manipulador de 6 grados de libertad.

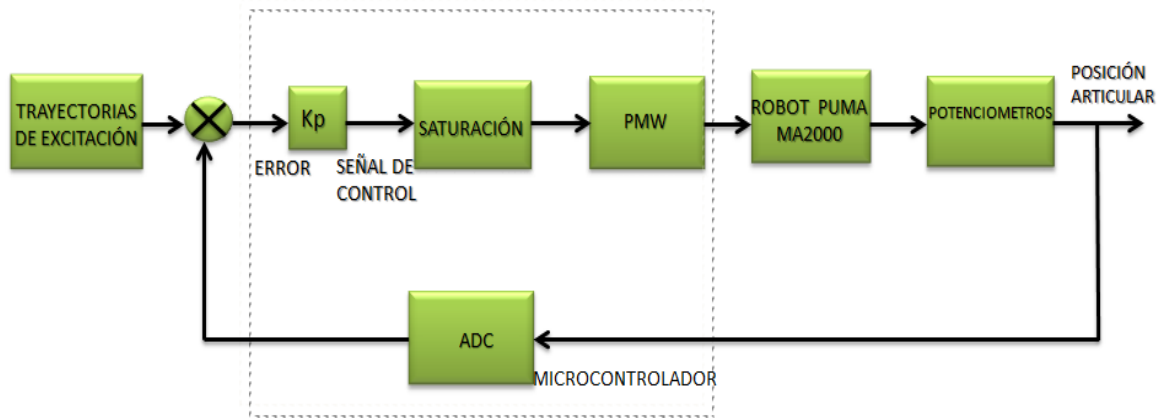


Fuente [2]

1.2 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL SISTEMA

En la Figura 2 se muestra el diagrama de bloques general que permite ilustrar las etapas que constituyen los principales módulos del sistema implementado al brazo robótico para realizar la identificación no lineal del sistema.

Figura 2. Diagrama de bloques para el control óptimo del brazo robótico PUMA MA2000



Fuente: Autor

Mientras las trayectorias de excitación son generadas por medio de la herramienta LABVIEW y capturadas por el microcontrolador, la lectura de las posiciones articulares de la cintura, hombro y codo del robot son obtenidas por medio de los potenciómetros lineales, cuyo voltaje resultante es capturado y digitalizado por el microcontrolador a través del módulo ADC. Posteriormente con base a la referencia especificada se obtiene la señal de error, la cual el algoritmo de control óptimo toma con el fin de proporcionar la señal de control que será aplicada a los motores de cada una de las articulaciones.

El brazo robótico cuenta con elementos mecánicos, sensores, actuadores y su respectivo sistema de control; donde tenemos que el sistema mecánico se encuentra constituido por el brazo articulado y sus articulaciones cintura, hombro y codo además del elemento terminal o efector [20].

Los sensores se encargan de registrar los datos del entorno, entregando la información de la cinemática y la dinámica del sistema mecánico. Los actuadores proporcionan el movimiento al brazo robótico. Y finalmente el sistema de control

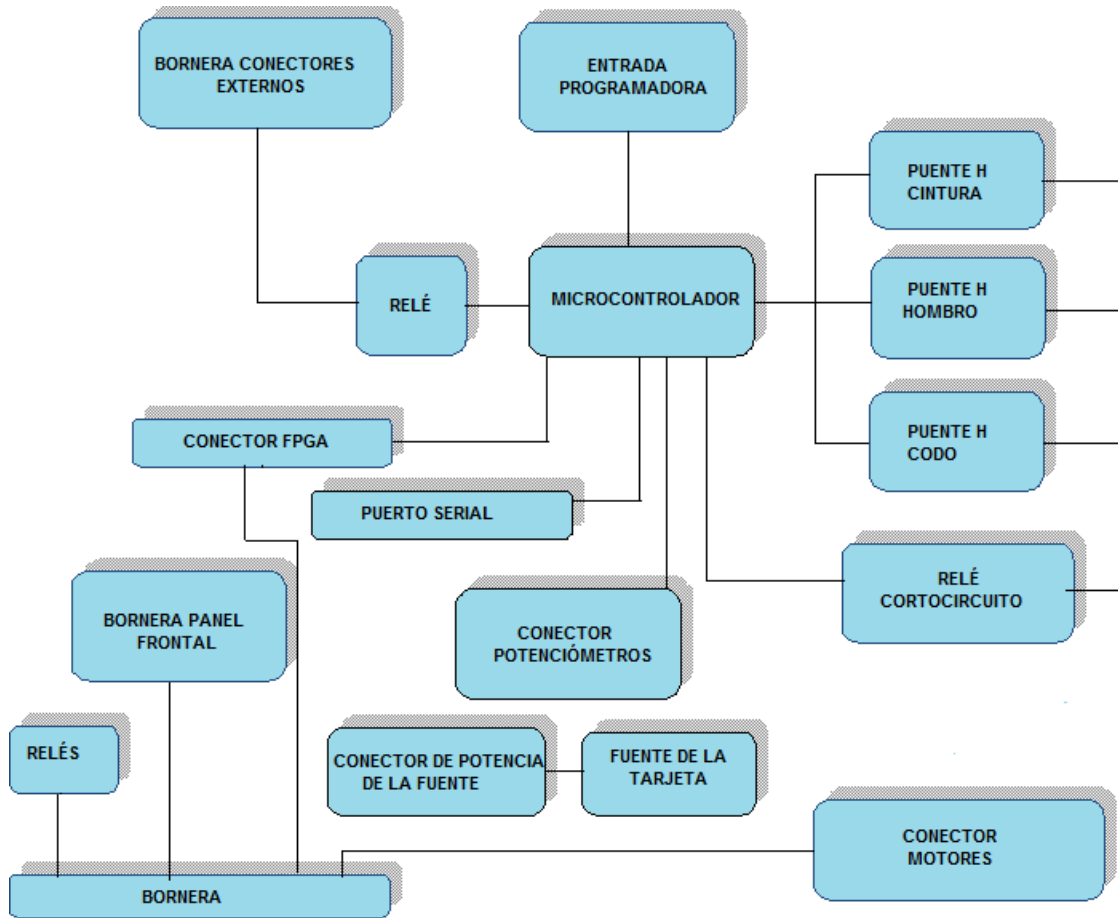
hace que el robot realice la tarea asignada, activando los actuadores y procesando las señales recibidas del entorno por medio de los sensores.

1.2.1 Tarjeta de potencia

Es necesario ampliar un poco más la descripción del sistema enfatizando en la tarjeta de potencia del brazo robótico, la cual está encargada de mover y controlar las articulaciones del robot, además de brindar un medio de comunicación entre los potenciómetros y el microcontrolador MCF51QE128RM. Esta tarjeta es compatible con los demás elementos del brazo robótico tales como: la fuente de alimentación, los sensores y los actuadores.

La tarjeta de potencia consta de elementos como: conectores a fuentes externas, interruptores, borneras, relés, interfaces de comunicación y puentes H, lo cual se evidencia en la Figura 3.

Figura 3. Esquema de la tarjeta de potencia



Fuente: [20]

2 MODELADO DINAMICO DEL ROBOT PUMA MA2000 POR MEDIO DE LA FORMULACION DE EULER-LAGRANGE

Los modelos de los sistemas dinámicos son una herramienta primordial en el control moderno, ya que para aprovechar al máximo la acción de control se debe contar con una representación fiable del modelo [3]. En esta sección se obtiene el modelo dinámico no lineal del brazo manipulador PUMA MA2000.

Para comenzar el análisis y tener una idea clara de los cálculos que se van a realizar, considere el brazo articulado de 6 eslabones mostrado en la Figura 1. Normalmente se enmarca el área de estudio en un marco de referencia cartesiano de tres dimensiones, en la base del robot o de la articulación que se escoja como referencia para iniciar el análisis. Para nuestro análisis en particular el marco de referencia escogido es la cintura.

El modelo dinámico del robot manipulador es una ecuación diferencial vectorial en las correspondientes posiciones articulares. Dicha ecuación diferencial generalmente es de segundo orden y se puede expresar como:

$$f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau) = 0 \quad (1)$$

donde τ denota el vector de fuerzas aplicadas en las articulaciones por medio de los motores de corriente continua.

La formulación de Euler Lagrange para representar la dinámica de robots manipuladores requiere un procedimiento que se explicará detalladamente a continuación [4]:

1. Obtener la energía cinética total del sistema:

$$K_T = K_1(q, \dot{q}) + K_2(q, \dot{q}) + \dots + K_i(q, \dot{q}) \quad (2)$$

Donde la ecuación de la energía cinética para una articulación está representada por:

$$K_i(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_i v^2 + \frac{1}{2} I_i \dot{q}^2 \quad (3)$$

2. Se obtiene la energía potencial total del sistema:

$$U_T(q) = U_1(q) + U_2(q) + \dots + U_i(q) \quad (4)$$

Donde la ecuación de energía potencial para una articulación está representada por:

$$U_i(q) = m_i g h_i \quad (5)$$

3. Se procede a realizar el cálculo del Lagrangiano, de la siguiente forma:

$$L(q, \dot{q}) = K_T(q, \dot{q}) - U(q) \quad (6)$$

4. Se obtiene la ecuación de disipación, la cual debe incluir un término de disipación para cada coordenada articular.

$$F = F_1(q_1) + F_2(q_2) + \dots + F_i(q_i) \quad (7)$$

5. Se desarrolla la ecuación de Movimiento de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i} = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Figura 4. Brazo manipulador PUMA MA2000



Fuente: [5]

En la Figura 4 se puede observar el brazo manipulador PUMA MA2000 al cual se le aplicarán los pasos expuestos anteriormente para calcular finalmente el modelo dinámico no lineal.

La estructura general que se obtendrá para la dinámica total del brazo en cada una de las articulaciones es [5]:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q) + \tau_p \quad (9)$$

donde:

$M(q)$ = matriz de Inercia $n \times n$ [Kg/rad].

$C(q, \dot{q})$ = vector de Coriolis $n \times 1$ [Kg-rad/seg].

$F(q)$ = vector de fuerza de Fricción $n \times 1$ [N].

$G(q)$ = vector de Fuerzas Gravitacionales $n \times 1$ [N-m].

τ_p = perturbación que supone la dinámica no modelada del sistema [Nm].

τ = Trayectorias de excitación aplicadas a cada uno de los motores [N-m].

Para el caso de estudio se realizan las siguientes simplificaciones. El vector de fuerzas de fricción se encuentra en función de la velocidad, teniendo en cuenta que el vector de fuerzas centrífugas y de coriolis, también están en función de la velocidad, se simplificara la fricción y la perturbación que supone la dinámica no modela del sistema y se dejara en un solo término constante. Esto con el fin de suprimir 6 parámetros del sistema final, la reducción de parámetros se hace necesaria para reducir la complejidad de la identificación del sistema.

Finalmente el modelo dinámico no lineal para el brazo robótico es:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) + \tau_p \quad (10)$$

El desarrollo de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para las articulaciones cintura, hombro y codo del brazomanipulador se puede observar en el anexo A, dichos cálculos fueron realizados con la toolbox de matemática simbólica de MATLAB. Finalmente después de realizar los cálculos requeridos, se obtiene el modelo dinámico no lineal del brazo robótico.

La matriz de inercia se define como:

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) & M_{13}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) & M_{23}(q) \\ M_{31}(q) & M_{32}(q) & M_{33}(q) \end{bmatrix} \quad (11)$$

Cada uno de los componentes de la matriz de inercia del sistema se describe a continuación

$$\begin{aligned}
 M_{11}(q) &= I_1 + I_2 + I_3 + m_1 l_{c1}^2 \cos^2 q_2 + m_2 l_{c2}^2 \cos^2(q_2 + q_3) \\
 &\quad + (2m_2 l_1 l_{c1} + 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \cos(q_2 + q_3) \\
 M_{12}(q) &= 0 \\
 M_{13}(q) &= 0 \\
 M_{21}(q) &= 0 \\
 M_{22}(q) &= I_2 + l_1^2 m_2 + I_3 + l_{c2}^2 m_2 + 2l_{c2} m_2 l_1 \cos(q_3) \\
 M_{23}(q) &= (I_3 + l_{c2}^2 m_2) l_1 l_{c2} m_2 \cos(q_3) \\
 M_{31}(q) &= 0 \\
 M_{32}(q) &= I_3 + l_{c2}^2 m_2 + l_1 l_{c2} m_2 \cos(q_3) \\
 M_{33}(q) &= I_3 + l_{c2}^2 m_2
 \end{aligned} \tag{12}$$

Los términos centrífugos o de Coriolis se definen en la siguiente matriz:

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) & C_{13}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) & C_{23}(q, \dot{q}) \\ C_{31}(q, \dot{q}) & C_{32}(q, \dot{q}) & C_{33}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \tag{13}$$

Donde cada uno de sus componentes son:

$$\begin{aligned}
C(1,1) &= -(m_2 l_{c2}^2) \text{sen}(q_2 + q_3) \cos(q_2 \\
&+ q_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - (2m_2 l_1 \dot{l}_{c1} + 2m_3 l_1 l_2) \text{sen}(q_2) \cos(q_2 \\
&+ q_3) \dot{q}_2 - \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} \\
&+ 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \text{sen}(q_2 \\
&+ q_3) \dot{q}_2 - m_1 l_{c1}^2 \text{sen}(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_2 - \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} \\
&+ 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \text{sen}(q_2 + q_3) \dot{q}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(1,2) &= -(m_2 l_{c2}^2) \text{sen}(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 - \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} \\
&+ 2m_3 l_1 l_2) \text{sen}(q_2) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 - \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} \\
&+ 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \text{sen}(q_2 \\
&+ q_3) \dot{q}_1 - m_1 l_{c1}^2 \text{sen}(q_2) \cos(q_3) \dot{q}_1
\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}
C(1,3) &= -(m_2 l_{c2}^2) \text{sen}(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \\
&- \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} + 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \text{sen}(q_2 + q_3) \dot{q}_1
\end{aligned}$$

$C(2,1)$

$$\begin{aligned}
&= (m_2 l_{c2}^2) \text{sen}(q_2 + q_3) \cos(q_2 \\
&+ q_3) \dot{q}_1 + \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} + 2m_3 l_1 l_2) \text{sen}(q_2) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 - \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} \\
&+ 2m_3 l_1 l_2) \text{sen}(q_2 + q_3) \cos(q_2) \dot{q}_1 + m_1 l_{c1}^2 \text{sen}(q_2) \cos(q_3) \dot{q}_1
\end{aligned}$$

$$C(2,2) = l_{c2} m_2 l_2 \text{sen}(q_3) \dot{q}_3$$

$$C(2,3) = l_{c2} m_2 l_2 \text{sen}(q_3) q_2 + l_{c2} m_2 \dot{l}_2 \text{sen}(q_3) \dot{q}_3$$

$$C(3,1) = (m_2 l_{c2}^2) \text{sen}(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 + \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} + 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \text{sen}(q_2 + q_3) \dot{q}_1$$

$$C(3,2) = l_{c2} m_2 l_2 \text{sen}(q_3)$$

$$C(3,3) = 0$$

Finalmente los términos gravitacionales son:

$$g(q) = [g_1(q) g_2(q) g_3(q)]^T$$

$$g_1(q) = 0$$

$$g_2(q) = m_2 g l_{c2} \cos(q_2)$$

$$+ m_3 g l_2 \cos(q_2) + m_3 g l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_4 g l_3 \cos(q_2 + q_3) \quad (15)$$

$$g_3(q) = m_3 g l_{c3}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) & M_{13}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) & M_{23}(q) \\ M_{31}(q) & M_{32}(q) & M_{33}(q) \end{bmatrix} \ddot{q} + \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) & C_{13}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) & C_{23}(q, \dot{q}) \\ C_{31}(q, \dot{q}) & C_{32}(q, \dot{q}) & C_{33}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \\ g_3(q) \end{bmatrix} \quad (16)$$

+ τ_p

La dinámica no modelada, por su parte se refleja en el par de cada articulación, que incluye la acción externa. Cada articulación posee un actuador conformado por un motor de corriente continua, la dinámica del actuador se expresa mediante la siguiente representación:

$$J\ddot{q} + B\dot{q} + R\tau = Kv \quad (17)$$

donde:

J = es la inercia del motor

B = Coeficiente de amortiguamiento

R = Tasa de reducción del juego de engranes.

Para el motor las variables articulares representan posiciones, velocidades y aceleraciones de giro del eje del motor, mientras que R es un término de reducción debido al acoplamiento que se presenta entre el actuador y el manipulador.

El modelo dinámico completo del robot manipulador cuyos accionadores se encuentran en cada una de las articulaciones se obtiene reemplazando 18 en 16.

$$[R^2M(q) + J]\ddot{q} + [R^2C(q, \dot{q}) + B]\dot{q} + R^2g(q) + R^2\tau_p = \tau R \quad (18)$$

Al integrar la dinámica de los accionadores en el modelo, la tasa de reducción del juego de engranes reduce considerablemente el efecto que causan algunos términos de la matriz de coriolis por lo tanto solo se tendrán en cuenta los términos de la diagonal principal.

En base a lo anterior y reemplazando 18 en 16 se obtiene finalmente el modelo no lineal para cada una de las tres articulaciones.

Para cintura el modelo no lineal es:

$$\begin{aligned}
\tau_1 = & [(I_1 + I_2 + I_3 + m_1 l_{c1}^2 \cos^2 q_2 + m_2 l_{c2}^2 \cos(q_2 + q_3))^2 \\
& + (2m_2 l_1 l_{c1} + 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \cos(q_2 + q_3)] R_1^2 \\
& + J_1] \ddot{q}_1 + \left[\left(-(m_2 l_{c2}^2) \sin(q_2 + q_3) \cos(q_2 \right. \right. \\
& + q_3) \dot{q}_1 \dot{q}_2 - (2m_2 l_1 l_{c1} + 2m_3 l_1 l_2) \sin(q_2) \cos(q_2 \\
& + q_3) \dot{q}_2 - \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} \\
& + 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \sin(q_2 \\
& + q_3) \dot{q}_2 - m_1 l_{c1}^2 \sin(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_2 - \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} \\
& + 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \sin(q_2 + q_3) \dot{q}_3 \left. \right) R_1^2 + B_1 \right] \dot{q}_1 + R_1^2 \tau_{p1}
\end{aligned} \tag{19}$$

Para el hombro el modelo no lineal es:

$$\begin{aligned}
\tau_2 = & [(I_1 + I_2 + I_3 + m_1 l_{c1}^2 \cos^2 q_2 + m_2 l_{c2}^2 \cos(q_2 + q_3))^2 \\
& + (2m_2 l_1 l_{c1} + 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \cos(q_2 + q_3)] R_2^2 \\
& + J_2] \ddot{q}_2 + \left[\left((I_3 + l_{c2}^2 m_2) l_1 l_{c2} m_2 \cos(q_3) \right) \dot{q}_3 \right. \\
& + (l_{c2} m_2 l_2 \sin(q_3) \dot{q}_3) \dot{q}_2 \\
& + m_2 g l_{c2} \cos(q_2) \\
& + m_3 g l_2 \cos(q_2) \\
& + m_3 g l_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_4 g l_3 \cos(q_2 + q_3) \left. \right) R_2^2 + B_2 \right] \\
& + R_2^2 \tau_{p2}
\end{aligned} \tag{20}$$

Finalmente para el codo tenemos:

$$\begin{aligned}
\tau_3 = & [(I_3 + l_{c2}^2 m_2) R_3^2 + J_3] \ddot{q}_3 + [(I_3 + l_{c2}^2 m_2 + l_1 l_{c2} m_2 \cos(q_3)) R_3^2 \\
& + B_3] \dot{q}_3 + R_3^2 m_3 g l_{c3} + R_3^2 \tau_{p3}
\end{aligned} \tag{21}$$

3 IDENTIFICACIÓN DEL MODELO NO LINEAL DEL BRAZO MANIPULADOR PUMA MA2000

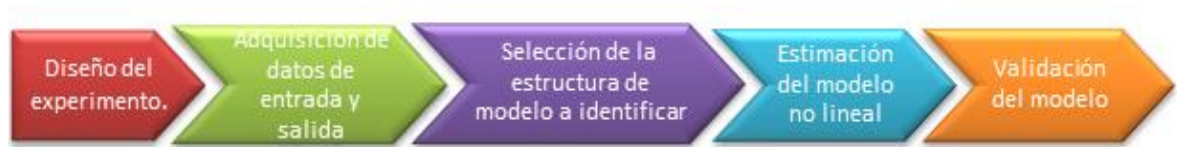
La Identificación de sistemas se define como el proceso para encontrar las ecuaciones matemáticas, que rigen el comportamiento dinámico de un sistema, es decir, obtener del sistema físico real un modelo matemático que represente al mismo. La identificación es el enfoque experimental por medio del cual se modelan los sistemas físicos [8]. Para conocer el comportamiento de un sistema necesitamos primero conocer su representación matemática.

El modelo matemático se hace necesario para comparar ciertos aspectos del sistema físico, resaltando que es poco probable que se pueda establecer una relación exacta entre estos. [9] Por medio del modelado se obtienen aproximaciones del sistema, esperando que las mismas provean un nivel de aproximación tolerable. Se podrá validar la exactitud del modelo del sistema a través de experimentación [10].

3.1 PROCEDIMIENTO PARA LA IDENTIFICACIÓN DEL MODELO NO LINEAL DEL BRAZO ROBOTICO PUMA MA2000.

A continuación se procede a describir detalladamente los diferentes pasos del proceso de identificación realizado, la figura 5 muestra el diagrama de bloques que resume las etapas requeridas para la identificación del modelo no lineal. A continuación se realiza una descripción de cada una de las etapas.

Figura 5. Diagrama de bloques del procedimiento de identificación.



Fuente: Autor

- **Diseño del experimento:** en esta etapa se analiza la respuesta del experimento a diferentes entradas, con el fin de tener trayectorias de excitación adecuadas que garanticen una mayor contribución a la respuesta dinámica del brazo robótico. La trayectoria seleccionada para realizar el experimento puede afectar considerablemente la precisión con la cual se identifican los parámetros.

En base a lo anterior, se establecen los criterios de diseño de la trayectoria según las frecuencias de cada una de las articulaciones y también las restricciones en posición, velocidad y aceleración presentes en el robot. Adicionalmente, es necesario considerar el espacio de trabajo y las limitaciones de la tarjeta de potencia y los actuadores, todos estos criterios permiten que se minimice la diferencia entre el modelo dinámico y los valores de las medidas obtenidos experimentalmente.

Según la literatura consultada una trayectoria conformada por una suma finita de funciones armónicas de series de Fourier, presentan mejores resultados para el sistema, además garantiza limitar el ancho de banda del experimento, lo que conlleva a repetir varias veces la señal de excitación, de esta forma la señal es el promedio de las repeticiones, lo cual contribuye a la disminución de ruido del sistema [15][16].

$$q_i(t) = q_{i,0} + \sum_{k=1}^N (a_{i,k} \sin(k\omega_f t) + b_{i,k} \cos(k\omega_f t)) \quad (22)$$

Donde ω_f representa la frecuencia fundamental y los coeficientes de la serie de Fourier que se deben a las restricciones descritas.

Los valores de los coeficientes se obtuvieron de [16] donde algunas de las trayectorias propuestas se ajustaban a nuestro sistema, después de probar en el brazo robótico y verificar que se eviten problemas en el movimiento libre del brazo se escogieron dos trayectorias a diferentes frecuencias. Las trayectorias utilizadas en los experimentos de identificación son:

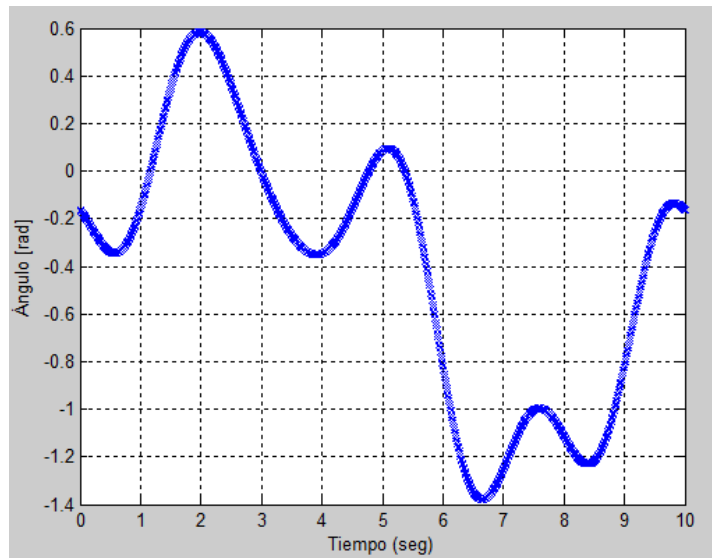
Tabla 1 Trayectorias de excitación

Coeficiente	Trayectoria 1	Trayectoria 2
a_0	0,692324	1,3687
	0,08833	-0,3805
	-0,13	0,04138
	-0,08833	-0,15438
	-0,14069	-0,02228
b_0	0,02706	-0,14
	0,14165	-0,20133
	-0,1800376	-0,1629
	0,21963	0,2184
	0,02833	0,04775
q_0	-0,4	-0,05

Fuente: Autor

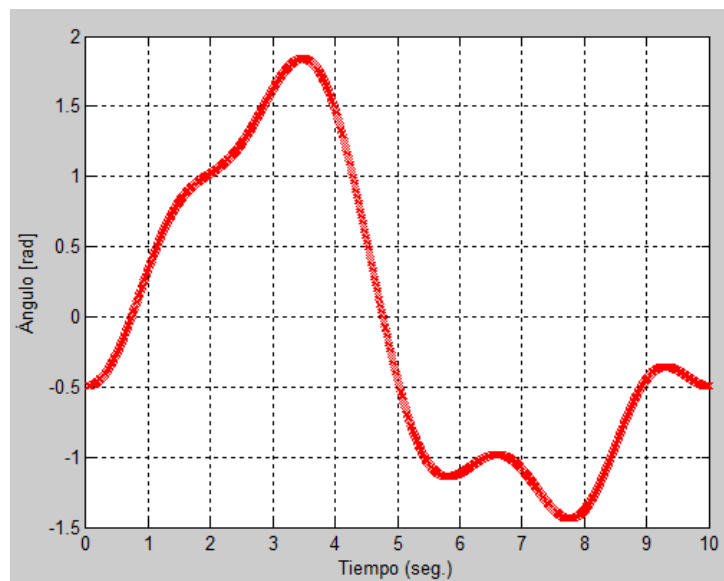
En la figura 3 y 4 se pueden apreciar las trayectorias 1 y 2 utilizadas en el proceso de identificación para las articulaciones cintura, hombro y codo.

Figura 6. Trayectoria de excitación 1



Fuente: Autor.

Figura 7. Trayectoria de excitación 2



Fuente: Autor

Las trayectorias de excitación se generaron por medio de la herramienta LABVIEW® y se aplican a los motores del robot por medio de la tarjeta de adquisición de datos. En el ANEXO E se amplía la información

correspondiente a la implementación de las trayectorias de excitación utilizadas.

- **Adquisición de datos de entrada y salida del sistema:** en esta etapa se realiza la captura de la respuesta de cada una de las articulaciones ante la trayectoria de excitación definida en el ítem anterior. Los datos son capturados por el osciloscopio, donde se visualiza la entrada y la salida que corresponde a la medición de los potenciómetros lineales de cada una de las articulaciones del brazo manipulador. En el ANEXO F se muestran las capturas obtenidas por medio del osciloscopio.
- **Selección de la estructura de modelo a identificar:** Una estructura de modelo bien definida, para el caso de estudio, producirá resultados más precisos, como consecuencia de una mayor cantidad de conocimiento a priori del sistema [11]. Debido a la complejidad del sistema y a la necesidad de obtener un modelo no lineal del mismo, la representación de la dinámica de las tres articulaciones se desarrolla por medio de las Ecuaciones de Euler- Lagrange, que permiten obtener el sistema dinámico no lineal del brazo robótico.
- **Estimación de los parámetros:** En esta fase finalmente se van a identificar los parámetros del modelo, teniendo en cuenta que la selección de un método de estimación apropiado conlleva a la obtención de un buen modelo dinámico. En el caso del sistema del brazo robótico, la estimación de los parámetros se realizará por medio de un método de ajuste de curvas, enfatizando en que se realiza primero un modelado de caja gris que posee la dinámica no lineal del sistema a través de su representación en el espacio de estados [11], [13].

En la tabla 1 se aprecian los distintos parámetros del modelo dinámico no lineal de brazo manipulador PUMA MA200

Tabla 2. Parámetros del brazo manipulador PUMA MA2000

$p_1 = I_1$
$p_2 = I_2$
$p_3 = I_3$
$p_4 = m_1$
$p_5 = m_2$
$p_6 = m_3$
$p_7 = m_4$
$p_8 = l_2$
$p_9 = l_3$
$p_{10} = l_{c1}$
$p_{11} = l_{c2}$
$p_{12} = l_{c3}$
$p_{13} = J_1$
$p_{14} = B_1$
$p_{15} = R_1$
$p_{16} = J_2$
$p_{17} = B_2$
$p_{18} = R_2$
$p_{19} = J_3$
$p_{20} = B_3$
$p_{21} = R_3$

Fuente: Autor

- **Validación del modelo:** la validación del modelo depende de las propiedades esperadas en el modelo. Generalmente se desea exactitud y una buena generalización del sistema. En el caso particular utilizaremos las simulaciones obtenidas como una herramienta útil para la validación del

modelo, la cual está basada en la minimización de la diferencia entre la salida medida y la salida obtenida por medio del modelo.

3.2 Modelo no lineal del brazo manipulador PUMA MA2000

En esta sección se ilustrará el procedimiento para la obtención de los parámetros del brazo manipulador. Luego de exponer algunas simplificaciones necesarias para la identificación se concluye por medio del análisis experimental que la cintura se comporta linealmente, por lo cual no presenta cambios significativos en su medida de posición articular por causa de las otras dos articulaciones. Luego se determina que la cintura se modele por medio de un sistema lineal desacoplado. Finalmente se centra el proceso de identificación en las articulaciones hombro y codo como un sistema de dos grados de libertad.

Es importante resaltar que los modelos experimentales y teóricos se complementan entre sí, en el modelo teórico tenemos las dependencias funcionales entre la física y propiedades del sistema. Por el contrario el modelo experimental puede describir la dinámica real del sistema mejor y puede ser obtenido con menos esfuerzo. Por lo tanto el análisis del sistema mejorará considerablemente si se fusionan las bondades de cada uno de los métodos de estimación. Por lo tanto para obtener el mayor grado de fidelidad en la identificación del brazo robótico, se utiliza el modelado de caja gris.

La articulación cintura se identifica por medio de un modelo lineal de ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$J_1\ddot{q} + B_1\dot{q} + kq = u \quad (23)$$

Por medio del algoritmo *idnlgrey*, el cual utiliza por medio de un archivo .m la representación de espacio de estados para después por medio de un método de ajustes de curvas calcular los parámetros desconocidos.

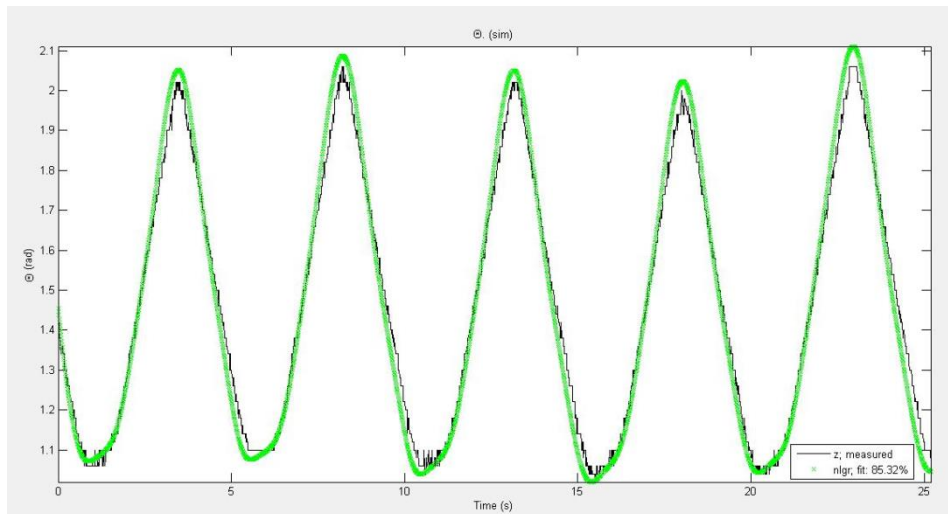
La representación del espacio de estados para cintura es:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= q_1 \\
 x_2 &= \dot{q}_1 \\
 \ddot{q}_1 &= \frac{1}{J_1} u - \frac{B_1}{J_1} \dot{q}_1 - \frac{k}{J_1} q_1
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{J_1} & -\frac{B_1}{J_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \end{bmatrix} u$$

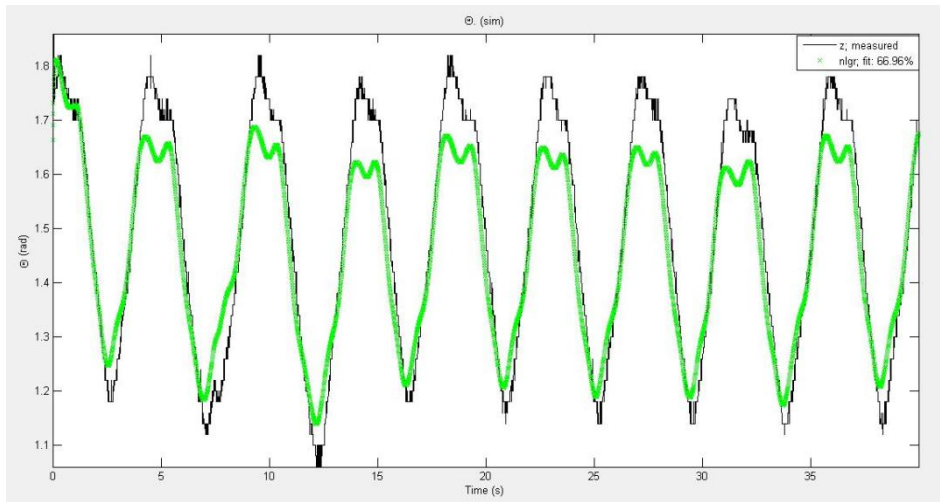
Después de ejecutar el algoritmo los resultados para dos experimentos diferentes nos arrojan los siguientes resultados:

Figura 8. Estimación de la dinámica del motor en cintura trayectoria 1



Fuente: Autor.

Figura 9. Estimación de la dinámica del motor en cintura trayectoria 2



Fuente: Autor

Las estimaciones anteriores suministran los siguientes parámetros:

Tabla 3. Parámetros del motor obtenidos para la cintura

Parámetros	Valor
Inercia	1.198
Amortiguamiento	6.165
Constante	-0.1817

Fuente: Autor

En base a las consideraciones anteriores el modelo dinámico para la cintura es:

$$1.198\ddot{q} + 6.165\dot{q} - 0.1817q = u$$

El desacople de la cintura con respecto a hombro y codo se presenta debido al efecto que proporcionan las reductoras del motor sobre la dinámica del sistema, por lo cual se procede a realizar la identificación lineal de los parámetros del motor en hombro y codo. Lo anterior con el fin de encontrar parámetros iniciales para el algoritmo con el modelo no lineal. La nueva identificación se llevara a cabo sobre este modelo:

$$M_q = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{11}(q) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2 \\ M_{12}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\ M_{21}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\ M_{22}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2 \end{aligned} \quad (25)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C_{11}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\ C_{12}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\ C_{21}(q, \dot{q}) &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \\ C_{22}(q, \dot{q}) &= 0 \\ g(q) &= \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} g_1(q) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ g_2(q) &= m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Agrupando parámetros para reducir los mismos tenemos el nuevo modelo dinámico como:

$$k_1 = m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 \quad (29)$$

$$k_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2 \quad (30)$$

$$k_3 = m_2 l_{c2} \quad (31)$$

$$k_4 = m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \quad (32)$$

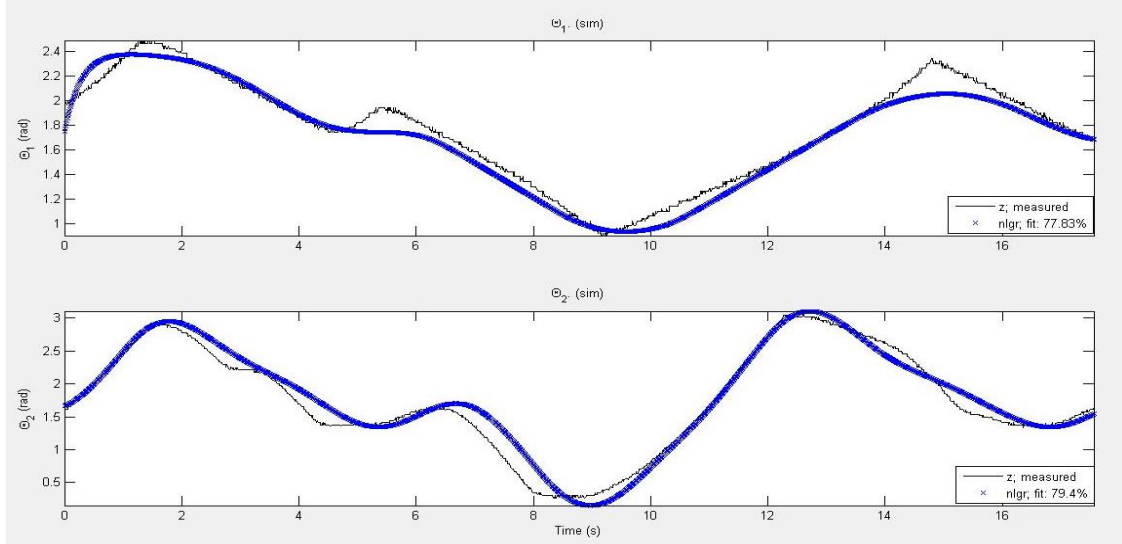
$$M(q) = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + 2k_3 l_1 \cos(q_2) & k_2 + k_3 l_1 \cos(q_2) \\ k_2 + k_3 l_1 \cos(q_2) & k_2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -k_3 l_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) & -k_3 l_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ k_3 l_1 \dot{q}_1 \sin(q_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} k_4 g \cos(q_1) + k_3 g \cos(q_1 + q_2) \\ k_3 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

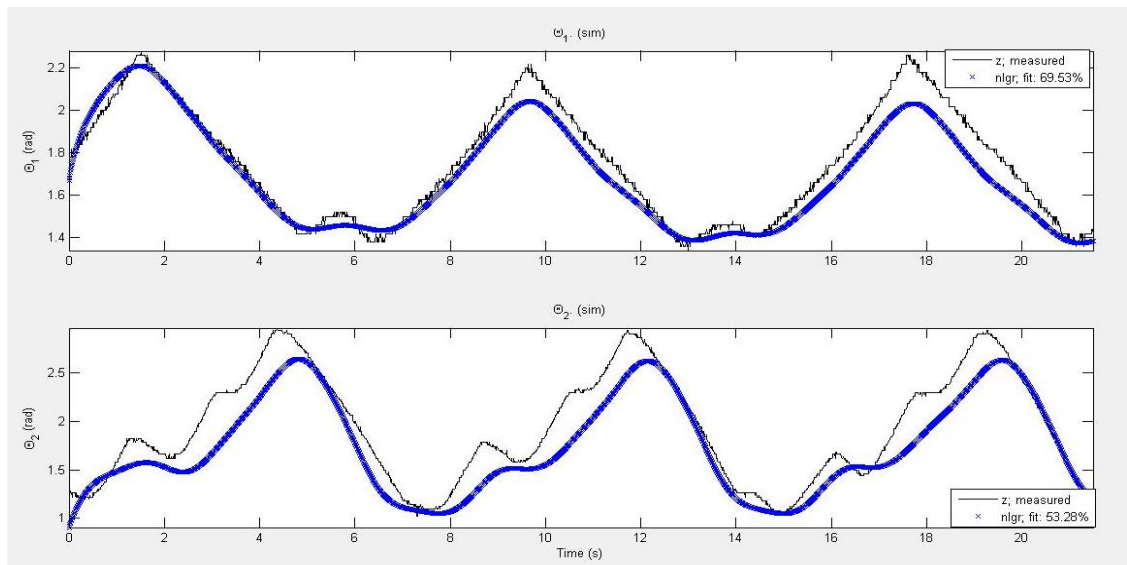
Este experimento se lleva a cabo para las trayectorias 1, 2, 3. La trayectoria 3 tiene los mismos coeficientes que la trayectoria dos pero su frecuencia aumenta. Se procede a hacer el cálculo con el algoritmo idnlgrey donde se obtienen las siguientes estimaciones para cada uno de los experimentos

Figura 10. Estimación parámetros del motor en hombro y codo trayectoria 1.



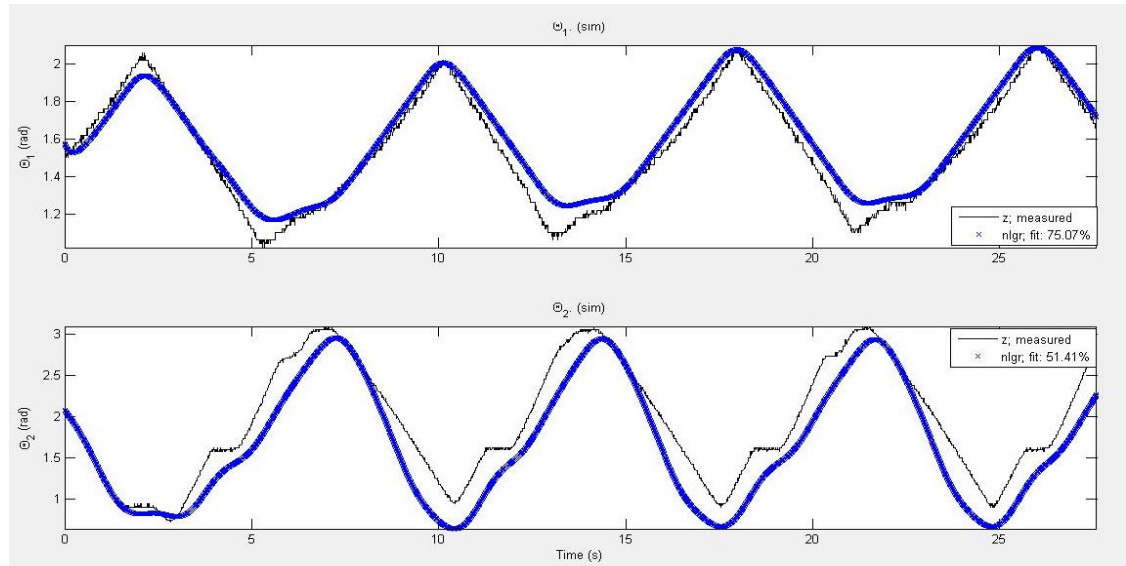
Fuente: Autor

Figura 11. Estimación parámetros del motor en hombro y codo trayectoria 2



Fuente: Autor

Figura 12. Estimación parámetros del motor en hombro y codo trayectoria 3



Fuente: Autor

Los parámetros obtenidos son los presentados en la Tabla 3

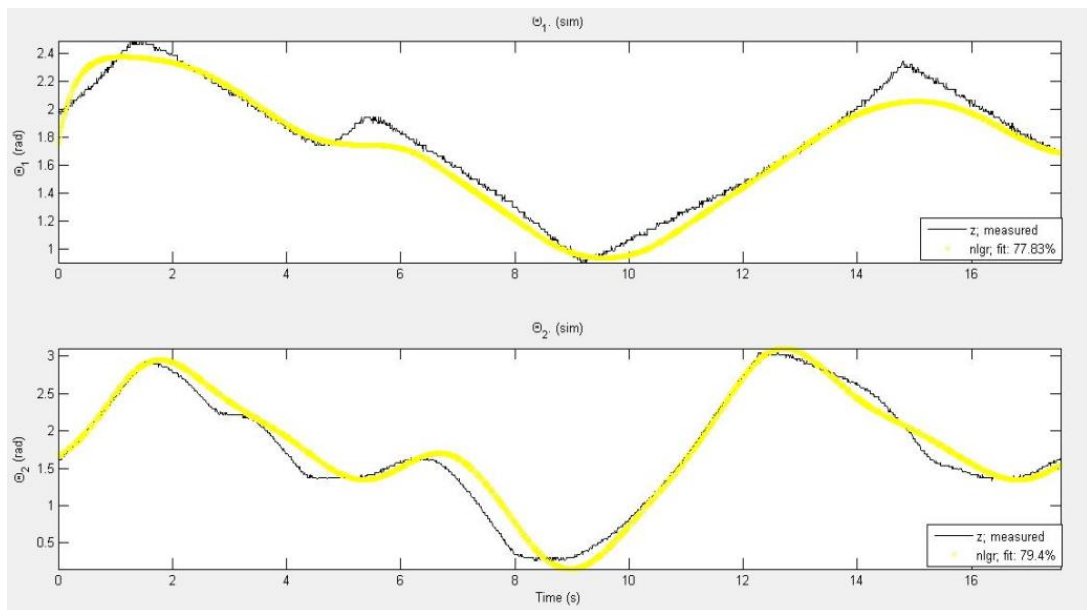
Tabla 4. Parámetros del motor hombro y cintura.

Parámetros	Valor
Inercia 1	2,4177
Amortiguamiento 1	12,08
Constante 1	0
Inercia 2	0,948946
Amortiguamiento 2	3,41337
Constante 2	0

Fuente: Autor

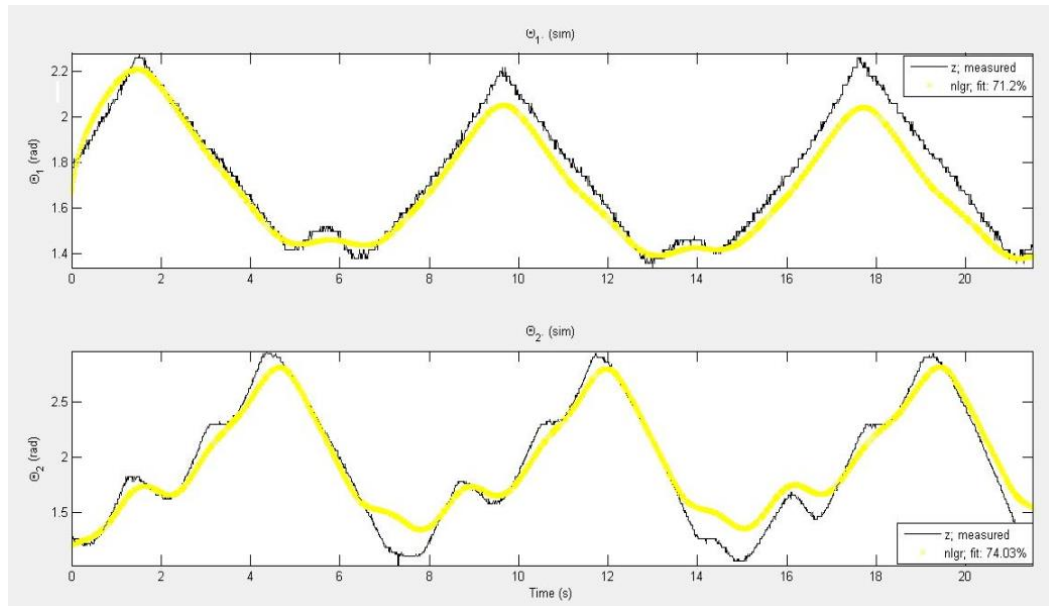
En base a los resultados anteriores se procede a identificar el modelo no lineal para las articulaciones hombro y codo acoplados. Para esta identificación se utilizaron las trayectorias 1,2 ,3. El resultado de la estimación se puede ver en las siguientes figuras.

Figura 13. Estimación de la dinámica no lineal del brazo de 2 grados de libertad con la trayectoria 1



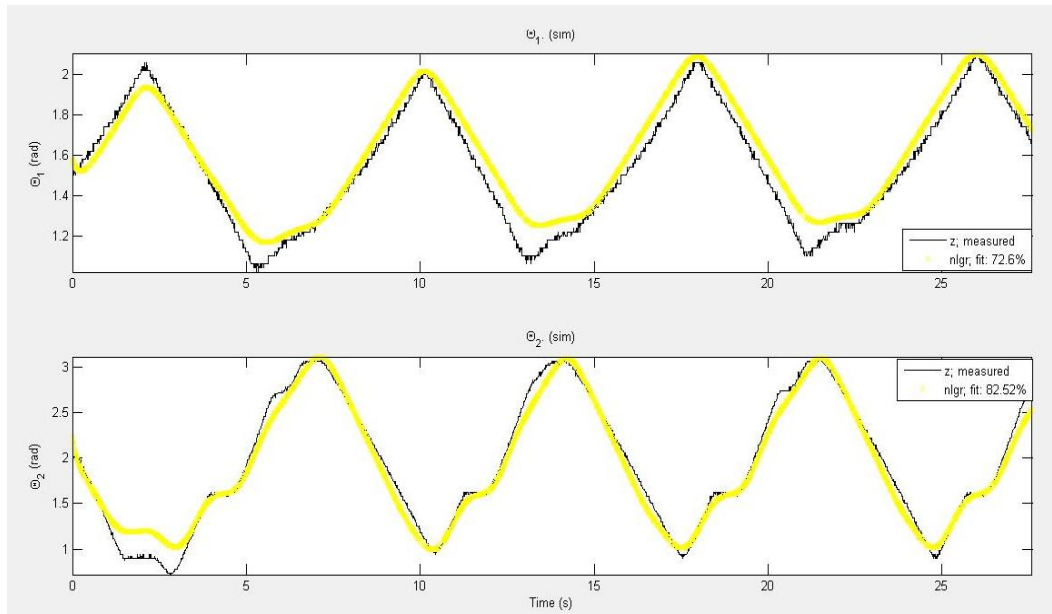
Fuente: Autor

Figura 14. Estimación de la dinámica no lineal del brazo de 2 grados de libertad con la trayectoria 2



Fuente: Autor

Figura 15. Estimación de la dinámica no lineal del brazo de 2 grados de libertad con la trayectoria 2



Fuente: Autor

Los resultados obtenidos en la identificación son:

Tabla 5. Parámetros para hombro y codo.

Parámetros	Valor
Gravedad	9,81
Longitud Hombro	0,423
Inercia 1	2,4177
Amortiguamiento 1	12,08
Constante 1	0
Inercia 2	0,948946
Amortiguamiento 2	3,41337
Constante 1	0
Perturbación	0,0818701
k_1	0,162985
k_2	-0,364441
k_3	-0,054565
k_4	0,0461518

Fuente: Autor

Finalmente el modelo dinámico no lineal para las articulaciones hombro y codo es:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,16298 - 0,364441 - 0,04616 \cos(q_2) & -0,364441 - 0,364441 \cos(q_2) \\ -0,364441 - 0,023081 \cos(q_2) & -0,364441 \end{bmatrix} \ddot{q} \\
&+ \begin{bmatrix} 0,04616 \dot{q}_2 \sin(q_2) & 0,04616(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ 0,04616 \dot{q}_1 \sin(q_2) & 0 \end{bmatrix} \dot{q} \\
&+ \begin{bmatrix} 0,45228 \cos(q_1) - 0,53473 \cos(q_1 + q_2) \\ 0,45228 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} q
\end{aligned}$$

4. CONTROL ÓPTIMO

El fin principal del diseño de controladores óptimos es obtener un sistema cuyo comportamiento dinámico de operación sea lo más próximo al deseado. Un comportamiento deseado en el diseño de cualquier tipo control depende en gran medida de la aplicación que se está analizando y el contexto en que la misma es utilizada. Para el caso expuesto, este comportamiento puede establecerse por medio de índices en el dominio de tiempo tales como el tiempo de subida, tiempo de establecimiento y sobreelongación máxima [19].

Considerando el problema de control óptimo, se parte de la representación en el espacio de estados del sistema del brazo robótico PUMA MA2000 linealizado, en el anexo C Se encuentra la linealización del modelo.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (34)$$

Por tanto, el problema se reduce a determina la matriz **K** del vector de la ley de control óptimo [18] definida en la ecuación (35), con el fin de minimizar la función de costo definida en la ecuación (36).

$$u(t) = -Kx(t) \quad (35)$$

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (36)$$

Donde **Q** es no definida negativa y **R** es definida positiva. Cabe resaltar que el segundo miembro de la ecuación considera el costo de energía de las señales de control y las matrices **Q** y **R** determinan la importancia relativa del error al igual que el costo de energía. La ley de control lineal obtenida mediante (35) es la ley de control óptimo. Al determinar los elementos desconocidos de la matriz **K** para

minimizar la función de coste, la ecuación (35) será óptima para cualquier estado inicial $x(0)$.

Sustituyendo la ecuación (35) en la ecuación (34) se obtiene:

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x \quad (37)$$

Para las deducciones siguientes se supone que la matriz $A - BK$ es estable. Al sustituir la ecuación (35) en (36) se tiene que:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt \\ &= \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt \end{aligned} \quad (38)$$

Al derivar se tiene que:

$$x^T (Q + K^T R K) x = -\frac{d}{dt} (x^T P x) \quad (39)$$

Donde P es una matriz simétrica real, por tanto se obtiene:

$$\begin{aligned} x^T (Q + K^T R K) x &= -\dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} \\ &= -x^T [(A - BK)^T P + P(A - BK)] x \end{aligned} \quad (40)$$

Al comparar ambos lados de la ecuación y considerando que debe ser válida para cualquier x , es necesario que

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T R K) \quad (41)$$

El índice de comportamiento J es calculado de la siguiente manera:

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} \quad (42)$$

$$= -\mathbf{x}^T(\infty) \mathbf{P} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^T(\mathbf{0}) \mathbf{P} \mathbf{x}(\mathbf{0})$$

$$J = \mathbf{x}^T(\mathbf{0}) \mathbf{P} \mathbf{x}(\mathbf{0}) \quad (43)$$

Se obtiene la matriz óptima \mathbf{K} de la siguiente expresión:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (44)$$

La solución del problema de control óptimo se completa con la solución de la ecuación de Riccati

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (45)$$

Los pasos de diseño del controlador óptimo son:

Resolver la ecuación matricial reducida de Riccati (45), para la matriz \mathbf{P} .

Sustituir esta matriz \mathbf{P} en la ecuación (44) y finalmente la matriz \mathbf{K} resultante es la matriz óptima.

4.1 DISEÑO DE CONTROLADORES ÓPTIMOS CUADRÁTICOS PARA EL BRAZO MANIPULADOR PUMA MA2000.

Después de linealizar el modelo no lineal alrededor del punto (0,0) se procede a calcular los controladores óptimos cuadráticos correspondientes a un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Considere la siguiente representación en el espacio de estados:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} u(t) \end{aligned} \quad (46)$$

La representación en el espacio de estados para las articulaciones hombro y codo es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]; \quad D = 0; \quad (47)$$

El vector de estados x está conformado por la posición articular y la velocidad.

Para obtener los valores de las matrices R y Q , se simuló el comportamiento dinámico del controlador y se ajustaron dichos parámetros hasta obtener la siguiente estructura de R y Q para las tres articulaciones:

$$R = r; \quad Q = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Introduciendo las matrices en la ecuación diferencial de Ricatti resulta:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} [r^{-1}] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (49)$$

Los resultados obtenidos son:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 - \frac{P_{12}^2}{J^2 r} & -\frac{P_{12} P_{22}}{J^2 r} - \frac{B P_{12}}{J} + P_{11} \\ -\frac{P_{12} P_{22}}{J^2 r} - \frac{B P_{12}}{J} + P_{11} & -\frac{P_{22}^2}{J^2 r} - \frac{2 B P_{22}}{J} + \mu_2 + 2 P_{12} \end{bmatrix} = 0 \quad (50)$$

Resolviendo el sistema matricial se obtiene:

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{B}{J} P_{12} + \frac{P_{12} + P_{22}}{J^2 r} \\ P_{12} &= J \sqrt{r \mu_1} \\ P_{22} &= J r \left[-B + \sqrt{B^2 + \frac{(\mu_2 + 2J\sqrt{r\mu_1})}{r}} \right] \end{aligned} \quad (51)$$

Reemplazando en la ecuación (44) se tiene que:

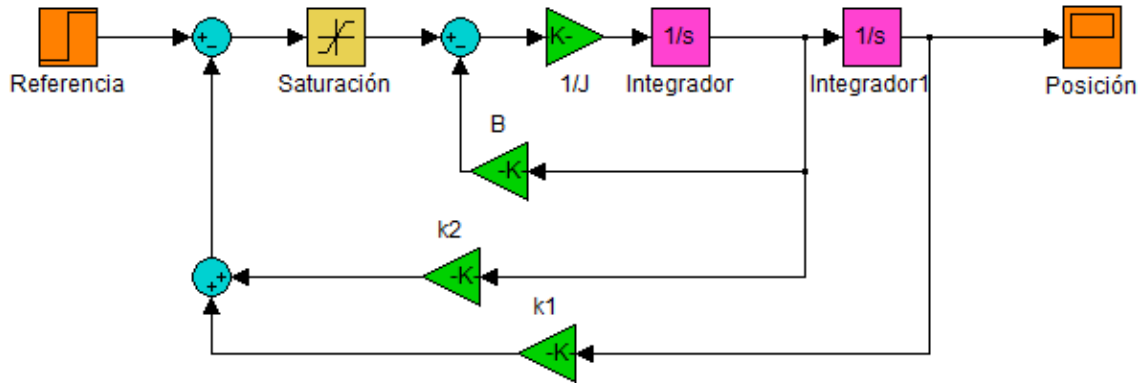
$$\begin{aligned} K &= R^{-1} B P = R^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \\ K &= \frac{1}{J r} [P_{12} \quad P_{22}] \end{aligned} \quad (52)$$

Luego:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{r}} & -B + \sqrt{B^2 + \frac{(\mu_2 + 2J\sqrt{r\mu_1})}{r}} \end{bmatrix} \quad (53)$$

En la Figura 15 aparece el diagrama de bloques del controlador óptimo cuadrático. k_1 y k_2 son las constantes proporcionales de la posición y velocidad de cada articulación, respectivamente.

Figura 16. Diagrama de bloques en Simulink del controlador óptimo cuadrático



Fuente: Autor

Por la dinámica del proceso a controlar, se pudo observar que valores de k_1 grandes generaban una respuesta más rápida y mientras que valores de k_2 pequeños permitían un sistema con menores oscilaciones. Teniendo en cuenta este análisis, los valores de Q y R de mejor desempeño para cada articulación y el respectivo valor de K, son:

Cintura:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}; R = [10^{-3}] \quad (54)$$

$$K = [30 \quad 3.49]$$

Hombro:

$$Q = \begin{bmatrix} 5.18 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}; R = [10^{-3}] \quad (55)$$

$$K = [72 \quad 9.33]$$

Codo:

$$Q = \begin{bmatrix} 3.6 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}; R = [10^{-3}]$$

$$K = [60 \quad 9.04] \quad (56)$$

4.2 COMPARACIÓN DE LAS MEDIDAS DE DESEMPEÑO DE CONTROLADORES ÓPTIMOS Y PID CLÁSICOS PARA LAS ARTICULACIONES CINTURA, HOMBRO Y CODO.

Los índices de desempeño para comparar la respuesta de los controladores óptimos y controladores PID clásicos sintonizados empíricamente son el sobreimpulso y tiempo de establecimiento con un criterio del 2%.

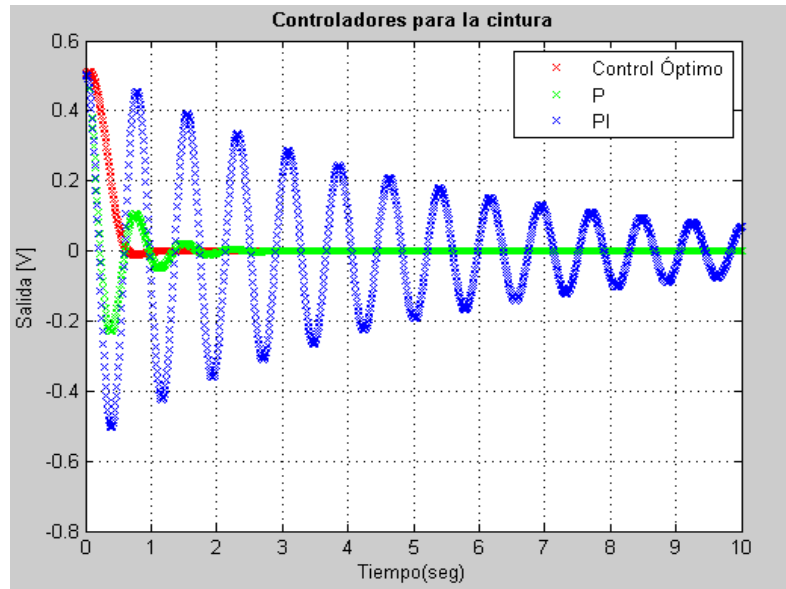
En [20] se sintonizan los controladores clásicos PID para cada una de las articulaciones cintura, hombro y codo obteniendo los siguientes resultados:

Tabla 6. Resultado Sintonización PID clásicos [20]

Articulación	Kp	Ti	Td
Codo	72	0.12	0.03
Hombro	87	0.151	0.03775
Cintura	36	0.1625	0.040625

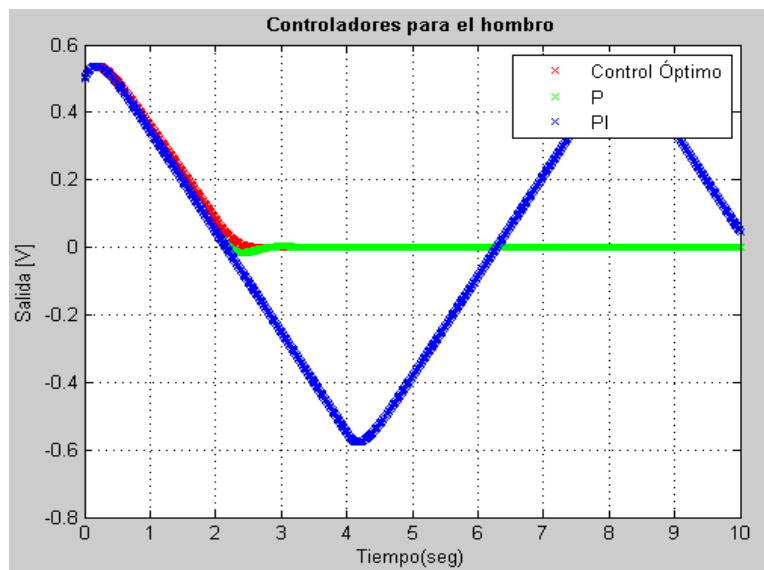
Fuente: Autor

Figura 17. Controladores óptimo, P, PI para la cintura



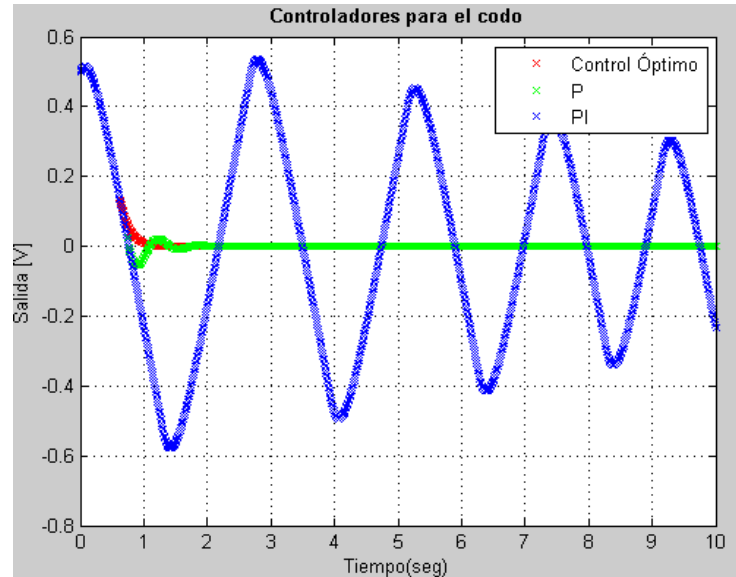
Fuente: Autor

Figura 18. Controladores óptimo, P, PI para el hombro



Fuente: Autor

Figura 19. Controladores óptimo, P, PI para el codo.



Fuente: Autor

En [20] se realiza el proceso de sintonización de controladores P, PI y PID para cada una de las articulaciones del PUMA MA2000. Sin embargo, los controladores PI y PID presentan demasiadas oscilaciones.

Las gráficas 1, 2 y 3 representan las curvas obtenidas a partir de la aplicación de un escalón de amplitud de 0.5 Voltios. Como se puede apreciar en las tablas 1, 2 y 3 los controladores óptimos presentan mejor desempeño que los proporcionales sintonizados.

Tabla 7. Resultados de consideraciones de desempeño con control óptimo.

Controlador Óptimo	M_P (%)	t_s (seg.)
Cintura	2.2	0.828
Hombro	0	2.3817
Codo	0	1.005

Fuente: Autor

Tabla 8. Resultados de consideraciones de desempeño con control P.

Controlador P	M_P (%)	t_s (seg.)
Cintura	22.4	1.5675
Hombro	3	2.585
Codo	10.74	1.34

Fuente: Autor

Tabla 9. Resultados de consideraciones de desempeño con control PI.

Controlador PI	M_P (%)	t_s (seg.)
Cintura	114.5	22
Hombro	115.5	>30
Codo	115.5	21

Fuente: Autor

5. CONCLUSIONES

- El diseño de las trayectorias conformadas por una suma finita de funciones armónicas de series de Fourier implica la solución de un problema de optimización no lineal. Aunque en los experimentos las trayectorias se seleccionaron a partir de las restricciones impuestas por las articulaciones del robot y las frecuencias de trabajo de este, los resultados indican que el procedimiento proporcionó una buena estimación del modelo no lineal.
- Como el modelo dinámico de un brazo robótico es complejo y presenta una cantidad significativa de parámetros fue necesario realizar ciertas simplificaciones con el fin de reducir el cálculo computacional. Como la dinámica de la articulación Cintura no se afecta considerablemente por las otras articulaciones, se tomó la unión Hombro-Codo como un brazo de dos grados de libertad. Los resultados de simulación indicaron que estas simplificaciones no generan errores de estimación significativos, además que se redujo considerablemente el tiempo de simulación.
- El diseño de trayectorias de excitación que estimulen correctamente la dinámica del brazo robótico es esencial para obtener una estimación apropiada. Se evidencia a través de los resultados obtenidos en las simulaciones de los resultados de la estimación del algoritmo idnlgrey que para las articulaciones hombro y codo, se obtiene un mejor porcentaje en la estimación que en otros experimentos. Lo anterior demuestra que una trayectoria correctamente diseñada para el caso particular y que abarque las condiciones de restricción del sistema proporciona mejores resultados de estimación.

- Como consecuencia de la linealización del modelo del robot que se efectuó alrededor del punto de operación seleccionado, se puede evidenciar un desacople en las articulaciones del brazo manipulador, que permite realizar el diseño de los controladores óptimos de cada articulación por separado, como si se tratara de tres sistemas SISO sujetos a perturbaciones.
- Como se esperaba, los resultados de simulación indican que los controladores óptimos diseñados presentaron mejores resultados que los controladores clásicos sintonizados previamente. Mientras que los controladores PID y PI en cada articulación presentaron excesivas oscilaciones, los controladores óptimos tuvieron un buen comportamiento dinámico en cuanto a sobrepico y tiempo de establecimiento.

6. TRABAJOS FUTUROS

Con el fin de continuar con la investigación iniciada en el control óptimo del brazo MA-2000 se propone que se trabaje en:

- Ajuste y mejora en el modelo dinámico obtenido a partir de la optimización de las trayectorias de excitación aplicadas a las articulaciones.
- Implementación de los controladores óptimos para validarlos en el sistema real.
- Estudio de otras técnicas de control avanzadas, a partir del modelo no-lineal obtenido.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Román, J., & Mireles, M. “Controladores de Robots Rígidos: Un Análisis Comparativo Entre las Metodologías de Control Clásica, Adaptable y Robusta Basadas en el método de Lyapunov”. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico. México, 2006.
- [2] Beltrán, G., N. y Medina, R. D. “Diseño e Implementación de la Tarjeta para Control del Robot Manipulador PUMA MA2000”. Tesis de pregrado. Universidad Industrial de Santander. Colombia, Escuela de Ingeniería Eléctrica Electrónica y Telecomunicaciones. 2011.
- [3] W. Khalil y E. Dombre, Modeling, Identification and Control of Robots, 3ra ed. Bristol. PA. USA: Taylor & Francis. Inc. 2002
- [4] Kelly R. y Santibáñez, V. Control de Movimiento de Robots Manipuladores. Pearson, Prentice Hall. 2003.
- [5] Carreño Zagarra, J. “Control Robusto de la Dinámica de un Robot Manipulador, considerando Incertidumbre Paramétrica” Propuesta de Grado de Investigación de Maestría. Bucaramanga, Universidad Industrial de Santander, Escuela de Ingeniería Eléctrica Electrónica y Telecomunicaciones. 2011.
- [6] Pérez Fernández C. “Simulación y Control de un Robot Manipulador” Trabajo de Grado. Sevilla, Universidad de Sevilla Escuela Superior de Ingenieros.1999.
- [7] B.Yao, S.PChan y W.B Kong. “Trajectory Control of Robot Manipulator Using Variable Structure Model Reaching Control Strategy, Nanyang Technological Institute, Singapur 1999.

- [8] K.J. Åström y M. Bodson ,“Computer Controlled Systems: Theory and Design” Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1990.
- [9] L. Ljung. System Identification: Theory for the User, 2da ed. Englewood Cliffs, New Jersey. Prentice Hall, 1999.
- [10] E. Ikonen y K. Najim, “Advanced Process Identification and Control” NewYork:Marcel Dekker, Inc.,2002.
- [11] R. Isermann y M. Munchhof, “Identification of Dynamic System”Spinger-Verlag Berlin Heidelberg 2011.
- [12] E. Wernholt “Multivariable Frequency-Domain Identification Of Industrial Robots” Linköping Studies in Science and Technology. Dissertations No. 1138 .Linköpings University Sweden 2007.
- [13]M. Östring, S.Gunnarsson y M.Norrlöf.“Closed-Loop Identification of an Industrial Robot Containing Flexibilities” Linköpings University Sweden 2003.
- [14] L. Ljung “Predictor Error Estimation Methods” Circuits Systems Signal Processeng. Vol 21. No.1. 2002.
- [15] M. Díaz Rodríguez. “Identificación de Parámetros Dinámicos de Robots Paralelos Basada en un Conjunto de Parámetros Significativos” Tesis de Doctorado. Universidad de Valencia España. Octubre de 2009.
- [16] K. Radkhah, D. Kulic y E. Croft.” Dynamic Parameter Identification for the CRS A460 Robot” Proccedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, San Diego; USA, Oct 29- Nov 2, 2007.

[17] R. Mantz. "Introducción al Control Óptimo" Universidad Industrial de la Plata, Cátedra de control Moderno. Argentina 2003.

[18] K. Ogata "Ingeniería de Control Moderno" Pearson Education Madrid 2010.

[19] R Dorf, R. Bishop. "Sistemas de Control Moderno" Décima edición. Pearson Prentice Hall. Madrid 2005.

[20] I. Ortiz. "Sintonización de Controladores PID para un Robot Manipulador PUMA MA2000" Tesis de Pregrado. Universidad Industrial de Santander. Escuela de Ingenieras Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones. Bucaramanga 2012.

[21] Carreño Zagarra, J. "Control Robusto de la Dinámica de un Robot Manipulador, considerando Incertidumbre Paramétrica" Trabajo de grado Maestría. Bucaramanga, Universidad Industrial de Santander, Escuela de Ingeniería Eléctrica Electrónica y Telecomunicaciones. 2014.

BIBLIOGRAFIA

ATROM, K.J. Y BODSON, M., "Computer Controlled Systems: Theory and Design"
Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1990.

BELTRÁN, G., N. y MEDINA, R. D. "Diseño e Implementación de la Tarjeta para Control del Robot Manipulador PUMA MA2000". Tesis de pregrado. Universidad Industrial de Santander. Colombia, Escuela de Ingeniería Eléctrica Electrónica y Telecomunicaciones. 2011.

CARREÑO ZAGARRA, J. "Control Robusto de la Dinámica de un Robot Manipulador, considerando Incertidumbre Paramétrica" Propuesta de Grado de Investigación de Maestría. Bucaramanga, Universidad Industrial de Santander, Escuela de Ingeniería Eléctrica Electrónica y Telecomunicaciones. 2011.

DÍAZ RODRÍGUEZ, M. "Identificación de Parámetros Dinámicos de Robots Paralelos Basada en un Conjunto de Parámetros Significativos" Tesis de Doctorado. Universidad de Valencia España. Octubre de 2009.

DORF, R. Y BISHOP, R. "Sistemas de Control Moderno" Décima edición. Pearson Prentice Hall. Madrid 2005.

IKONEN, E. Y NAJIM, K. "Advanced Process Identification and Control"
New York: Marcel Dekker, Inc., 2002.

ISERMANN, R. Y MUNCHHOF, M., "Identification of Dynamic System" Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.

KELLY R. y SANTIBÁÑEZ, V. Control de Movimiento de Robots Manipuladores. Pearson, Prentice Hall. 2003.

KHALIL, W. KHALIL y DOMBRE, E. Modeling, Identification and Control of Robots, 3ra ed. Bristol. PA. USA: Taylor & Francis. Inc. 2002

LJUNG, L. System Identification: Theory for the User, 2da ed. Englewood Cliffs, New Jersey. Prentice Hall, 1999.

LJUNG, L. "Predictor Error Estimation Methods" Circuits Systems Signal Processeng. Vol 21. No.1. 2002.

MANTZ, R. "Introducción al Control Óptimo" Universidad Industrial de la Plata, Cátedra de control Moderno. Argentina 2003.

OGATA, K. "Ingeniería de Control Moderno" Pearson Education Madrid 2010.

ORITZ, I. "Sintonización de Controladores PID para un Robot Manipulador PUMA MA2000" Tesis de Pregrado. Universidad Industrial de Santander. Escuela de Ingenieras Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones. Bucaramanga 2012.

ÖSTRING, M. GUNNARSSON, S Y NORRLÖF. M. "Closed-Loop Identification of an Industrial Robot Containing Flexibilities" Linköpings University Sweden 2003.

PÉREZ FERNÁNDEZ C. "Simulación y Control de un Robot Manipulador" Trabajo de Grado. Sevilla, Universidad de Sevilla Escuela Superior de Ingenieros.1999.

RADLKHAH, K., KULIC, D. Y CROFT, E. "Dynamic Parameter Identification for the CRS A460 Robot" Proccedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, San Diego; USA, Oct 29- Nov 2, 2007

ROMÁN, J., & MIRELES, M. "Controladores de Robots Rígidos: Un Análisis Comparativo Entre las Metodologías de Control Clásica, Adaptable y Robusta

Basadas en el método de Lyapunov”. Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico. México, 2006.

WERNHOLT, E. “Multivariable Frequency-Domain Identification Of Industrial Robots” Linköping Studies in Science and Techonology. Dissertations No. 1138 .Linköpings University Sweden 2007.

YAO, B. CHAN, S.P y KONG, W.B. “Trajectory Control of Robot Manipulator Using Variable Structure Model Reaching Control Strategy, Nanyang Technological Institute, Singapur 1999.

ANEXOS

Anexo A. Desarrollo de las ecuaciones de Euler-Lagrange para un brazo robótico PUMA MA2000.

Se procede a obtener las ecuaciones de las energías cinéticas y potenciales para las articulaciones cintura, hombro y codo del brazo manipulador para finalmente obtener el modelo dinámico no lineal completo.

Articulación 1 La energía cinética correspondiente a la cintura es:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_i \dot{q}^2 \quad (A1)$$

La energía potencial correspondiente a la cintura esta defina como:

$$U_1 = 0$$

Articulación 2 La energía cinética correspondiente al hombro se define como:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \quad (A2)$$

Es necesario obtener la expresión para la velocidad, para ello se tiene que:

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 \\ x_2 &= l_{c2} \cos(q_2) \cos(q_1) \\ y_2 &= l_{c2} \cos(q_2) \sin(q_1) \\ z_2 &= l_{c2} \sin(q_1) \end{aligned} \quad (A3)$$

Derivando con respecto al tiempo las coordenadas articulares de la cintura se obtiene la velocidad:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -l_{c2} \sin(q_2) \cos(q_1) \dot{q}_2 - l_{c2} \cos(q_2) \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ \dot{y}_2 &= -l_{c2} \sin(q_2) \sin(q_1) \dot{q}_2 + l_{c2} \cos(q_2) \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ \dot{z}_2 &= l_{c2} \dot{\cos}(q_2) \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (A4)$$

Sustituyendo en (A1) y simplificando la expresión se tiene que la energía cinética para el hombro está dada por:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 [l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + l_{c2}^2 \cos(q_2) \dot{q}_1^2] + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \quad (A5)$$

La energía potencial correspondiente al hombro está dada por:

$$U_2 = m_2 g (l_{c2} \sin(q_2)) \quad (A6)$$

Articulación 3 La energía Cinética correspondiente para el codo está dada por:

$$K_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2) \quad (A7)$$

Es necesario obtener la velocidad en el hombro para ello, se obtiene primero las coordenadas articulares en el hombro:

$$\begin{aligned} x_3 &= l_2 \cos(q_2) \cos(q_1) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \cos(q_1) \\ y_3 &= l_2 \cos(q_2) \sin(q_1) + l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_1) \\ z_3 &= l_2 \sin(q_2) + l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \end{aligned} \quad (A8)$$

Derivando con respecto al tiempo las coordenadas articulares para el hombro se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -l_2 \sin(q_2) \cos(q_1) \dot{q}_2 - l_2 \cos(q_2) \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ &\quad - l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \cos(q_1) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ &\quad - l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ \dot{y}_3 &= -l_2 \sin(q_2) \sin(q_1) \dot{q}_2 + l_2 \cos(q_2) \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ &\quad - l_{c3} \sin(q_2 + q_3) \sin(q_1) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ &\quad + l_{c3} \cos(q_2 + q_3) \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ \dot{z}_3 &= l_2 \cos(q_2) \dot{q}_2 + l_{c3} \cos(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \end{aligned} \quad (A9)$$

Sustituyendo en (A7) la energía cinética es determinada para el codo es:

$$\begin{aligned}
K_3 = & \frac{1}{2}m_3l_{c3}^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_3l_{c3}^2\dot{q}_3^2 \\
& + m_3l_{c3}^2\dot{q}_2q_3 + m_3l_2l_{c3}\cos q_2\cos(q_2 + q_3)\dot{q}_1^2 \\
& + \frac{1}{2}m_3l_2^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_3l_{c3}^2\cos(q_2 + q_3)^2\dot{q}_1^2 \\
& + \frac{1}{2}m_3l_2^2\cos(q_2)\dot{q}_1^2 \\
& + m_3l_2l_{c3}\cos(q_3)q_2(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \frac{1}{2}I_3[\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2]
\end{aligned} \tag{A10}$$

La energía potencial para el codo está determinada por:

$$U_3 = m_3g(l_2 \text{ sen } \theta_2 + l_{c3} \text{ sen}(\theta_2 + \theta_3)) \tag{A11}$$

Las tres articulaciones superiores serán modeladas a través de una masa total. Basados en lo anterior se procede a calcular la energía cinética y potencial.

La energía cinética correspondiente al efector final se determina por medio de:

$$K_4 = \frac{1}{2}m_4v_4^2 \tag{A12}$$

La velocidad para la m_4 es:

$$\begin{aligned}
v_4^2 = & \dot{x}_4^2 + \dot{y}_4^2 + \dot{z}_4^2 \\
x_4 = & l_2\cos(q_2)\cos(q_1) + l_3\cos(q_2 + q_3)\cos(q_1) \\
y_4 = & l_2\cos(q_2)\text{sen}(q_1) + l_3\cos(q_2 + q_3)\text{sen}(q_1) \\
z_4 = & l_2\text{sen}(q_2) + l_3\text{sen}(q_2 + q_3)
\end{aligned} \tag{A13}$$

Derivando con respecto al tiempo se obtiene las siguientes expresiones para las coordenadas articulares de la velocidad:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 = & -l_2\text{sen}(q_2)\cos(q_1)\dot{q}_2 - l_2\cos(q_2)\text{sen}(q_1)\dot{q}_1 \\
& - l_3\text{sen}(q_2 + q_3)\cos(q_1)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& - l_3\cos(q_2 + q_3)\text{sen}(q_1)\dot{q}_1
\end{aligned} \tag{A14}$$

$$\begin{aligned}
y_3 &= -l_2 \text{sen}(q_2) \text{sen}(q_1) \dot{q}_2 + l_2 \text{cos}(q_2) \text{cos}(q_1) \dot{q}_1 \\
&\quad - l_3 \text{sen}(q_2 + q_3) \text{sen}(q_1) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
&\quad + l_3 \text{cos}(q_2 + q_3) \text{cos}(q_1) \dot{q}_1 \\
z_3 &= l_2 \text{cos}(q_2) \dot{q}_2 + l_3 \text{cos}(q_2 + q_3) (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)
\end{aligned}$$

Luego la ecuación de energía cinética es:

$$\begin{aligned}
K_3 &= \frac{1}{2} m_4 l_3^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_4 l_3^2 \dot{q}_3^2 \\
&\quad + m_4 l_3^2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + m_4 l_2 l_3 \text{cos}(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_4 l_2^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_4 l_3^2 \text{cos}(q_2 + q_3)^2 \dot{q}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_4 l_2^2 \text{cos}(q_2) \dot{q}_1^2 + m_4 l_2 l_3 \text{cos}(\theta_3) \theta_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)
\end{aligned} \tag{A15}$$

La energía potencial: correspondiente al efector final está determinado por:

$$U_4 = m_4 g (l_2 \text{sen}(q_2) + l_3 \text{sen}(q_2 + q_3)) \tag{A16}$$

Después de obtener las energías cinética y potencial para cada una de las articulaciones estudiadas en el presente informe procedemos a realizar la sumatoria de cada una de las energías:

$$K_T = K_1 + K_2 + K_3 + K_4 \tag{A17}$$

$$\begin{aligned}
K_T = & \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 + l_{c2}^2 \cos(q_2) \dot{q}_1^2] + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \\
& + \frac{1}{2} m_3 l_{c3}^2 \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} m_3 l_{c3}^2 \dot{q}_3^2 + m_3 l_{c3}^2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \\
& + m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_2) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 \dot{q}^2 \\
& + \frac{1}{2} m_3 l_{c3}^2 \cos(q_2 + q_3)^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_3 l_2^2 \cos(q_2)^2 \dot{q}_1^2 \\
& + m_3 l_2 l_{c3} \cos(q_3) \dot{q}_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \frac{1}{2} I_3 [\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2] \\
& + \frac{1}{2} m_4 l_3^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_4 l_3^2 \dot{q}_3^2 \\
& + m_4 l_3^2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + m_4 l_2 l_3 \cos(q_2) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1^2 \\
& + \frac{1}{2} m_4 l_2^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_4 l_3^2 \cos(q_2 + q_3)^2 \dot{q}_1^2 \\
& + \frac{1}{2} m_4 l_2^2 \cos(q_2)^2 \dot{q}_1^2 + m_4 l_2 l_3 \cos(q_3) \dot{q}_2 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)
\end{aligned}$$

La energía total del sistema es:

$$U_T = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

(A18)

$$\begin{aligned}
U_T = & m_2 g l_{c2} \text{sen}(q_2) + m_3 g (l_2 \text{sen}(q_2) + l_{c3} \text{sen}(q_2 + q_3)) \\
& + m_4 g (l_2 \text{sen}(q_2) + l_3 \text{sen}(q_2 + q_3))
\end{aligned}$$

Se obtiene el Lagrangiano del sistema:

$$\begin{aligned}
L = & \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2[l_{c2}^2\dot{q}_2^2 + l_{c2}^2\cos(q_2)\dot{q}_1^2] + \frac{1}{2}I_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \\
& + \frac{1}{2}m_3l_{c3}^2\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}m_3l_{c3}^2\dot{q}_3^2 + m_3l_{c3}^2\dot{q}_2\dot{q}_3 \\
& + m_3l_2l_{c3}\cos(q_2)\cos(q_2 + q_3)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_3l_2^2\dot{q}_2^2 \\
& + \frac{1}{2}m_3l_{c3}^2\cos(q_2 + q_3)^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_3l_2^2\cos(q_2)^2\dot{q}_1^2 \\
& + m_3l_2l_{c3}\cos(q_3)\dot{q}_2(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \frac{1}{2}I_3[\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2] \\
& + \frac{1}{2}m_4l_3^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_4l_3^2\dot{q}_3^2 \\
& + m_4l_3^2\dot{q}_2\dot{q}_3 + m_4l_2l_3\cos(q_2)\cos(q_2 + q_3)\dot{q}_1^2 \\
& + \frac{1}{2}m_4l_2^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}m_4l_3^2\cos(q_2 + q_3)^2\dot{q}_1^2 \\
& + \frac{1}{2}m_4l_2^2\cos(q_2)^2\dot{q}_1^2 + m_4l_2l_3\cos(q_3)\dot{q}_2(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\
& - m_2gl_{c2}\text{sen}q_2 - m_3g(l_2\text{sen}q_2 + l_{c3}\text{sen}(q_2 + q_3)) \\
& - m_4g(l_2\text{sen}q_2 + l_3\text{sen}(q_2 + q_3))
\end{aligned} \tag{A19}$$

Finalmente se obtienen los elementos de las ecuaciones de movimiento Euler-Lagrange.

Con estos resultados se procede a calcular el modelo dinámico no lineal del brazo manipulador MA2000 realizando la siguiente definición de matrices.

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) & M_{13}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) & M_{23}(q) \\ M_{31}(q) & M_{32}(q) & M_{33}(q) \end{bmatrix} \tag{A20}$$

$$\begin{aligned}
M_{11}(q) &= I_1 + I_2 + I_3 + m_1l_{c1}^2\cos^2q_2 + m_2l_{c2}^2\cos(q_2 + q_3)^2 \\
&+ (2m_2l_1l_{c1} + 2m_3l_1l_2)\cos(q_2)\cos(q_2 + q_3) \\
M_{12}(q) &= 0 \\
M_{13}(q) &= 0 \\
M_{21}(q) &= 0 \\
M_{22}(q) &= I_2 + l_1^2m_2 + I_3 + l_{c2}^2m_2 + 2l_{c2}m_2l_1\cos(q_3) \\
M_{23}(q) &= (I_3 + l_{c2}^2m_2)l_1l_{c2}m_2\cos(q_3) \\
M_{33}(q) &= I_3 + l_{c2}^2m_2 \\
M_{31}(q) &= 0 \\
M_{32}(q) &= I_3 + l_{c2}^2m_2 + l_1l_{c2}m_2\cos(q_3)
\end{aligned} \tag{A21}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) & C_{13}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) & C_{23}(q, \dot{q}) \\ C_{31}(q, \dot{q}) & C_{32}(q, \dot{q}) & C_{33}(q, \dot{q}) \end{bmatrix} \quad (\text{A22})$$

$$\begin{aligned} C(1,1) = & -(m_2 l_{c2}^2) \text{sen}(q_2 + q_3) \cos(q_2) \\ & + q_3 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - (2m_2 l_1 l_{c1} + 2m_3 l_1 l_2) \text{sen}(q_2) \cos(q_2) \\ & + q_3 \dot{q}_2 - \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} \\ & + 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \text{sen}(q_2) \\ & + q_3 q_2 - m_1 l_{c1}^2 \text{sen}(q_2) \cos(q_2) \dot{q}_2 - \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} \\ & + 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \text{sen}(q_2 + q_3) \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(1,2) = & -(m_2 l_{c2}^2) \text{sen}(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 - \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} \\ & + 2m_3 l_1 l_2) \text{sen}(q_2) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 - \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} \\ & + 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \text{sen}(q_2) \\ & + q_3 \dot{q}_1 - m_1 l_{c1}^2 \text{sen}(q_2) \cos(q_3) \dot{q}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(1,3) = & -(m_2 l_{c2}^2) \text{sen}(q_2 + q_3) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \\ & - \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} + 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \text{sen}(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(2,1) & = (m_2 l_{c2}^2) \text{sen}(q_2 + q_3) \cos(q_2) \\ & + q_3 \dot{q}_1 + \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} + 2m_3 l_1 l_2) \text{sen}(q_2) \cos(q_2 + q_3) \dot{q}_1 - \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} \\ & + 2m_3 l_1 l_2) \text{sen}(q_2 + q_3) \cos(q_2) \dot{q}_1 + m_1 l_{c1}^2 \text{sen}(q_2) \cos(q_3) \dot{q}_1 \end{aligned} \quad (\text{A23})$$

$$C(2,2) = l_{c2} m_2 l_2 \text{sen}(q_3) \dot{q}_3$$

$$C(2,3) = l_{c2} m_2 l_2 \text{sen}(q_3) q_2 + l_{c2} m_2 \dot{l}_2 \text{sen}(q_3) \dot{q}_3$$

$$\begin{aligned} C(3,1) = & (m_2 l_{c2}^2) \text{sen}(q_2 + q_3) \cos(q_2) \\ & + q_3 \dot{q}_1 + \frac{1}{2} (2m_2 l_1 l_{c1} + 2m_3 l_1 l_2) \cos(q_2) \text{sen}(q_2 + q_3) \dot{q}_1 \end{aligned}$$

$$C(3,2) = l_{c2} m_2 l_2 \text{sen}(q_3)$$

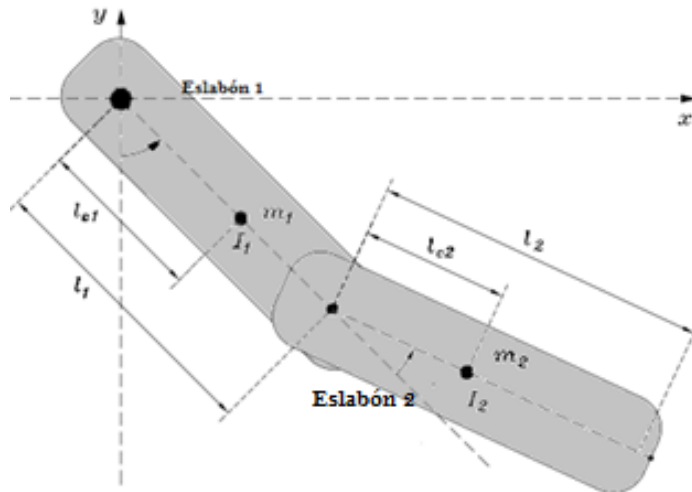
$$C(3,3) = 0$$

$$\begin{aligned}
g(q) &= [g_1(q)g_2(q)g_3(q)]^T \\
g_1(q) &= 0 \\
g_2(q) &= m_2gl_{c2} \cos(q_2) \\
&\quad + m_3gl_2 \cos(q_2) \\
&\quad + m_3gl_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_4gl_3 \cos(q_2 + q_3) \\
g_3(q) &= m_3gl_{c3} \cos(q_2 + q_3) + m_4l_3 \cos(q_2 + q_3)
\end{aligned}
\tag{A24}$$

Anexo B. Modelado dinámico por medio de la Metodología De Euler-Lagrange para un robot manipulador de dos grados de libertad

Debido a la simplificación realizada por causa del efecto que proporcionan las reductoras del motor en el desacople de la cintura se planteó un nuevo modelo dinámico de dos grados de libertad, en base a esto en la Figura 3 se puede apreciar el nuevo sistema de estudio.

Figura 20. Esquema del brazo manipulador de dos grados de libertad



Fuente: [21]

. El vector de coordenadas articulares se define como:

$$q(t) = [q_1(t)q_2(t)]^T \quad (B1)$$

Se obtienen a continuación las energías cinéticas y potenciales para cada uno de las articulaciones.

Coordenadas del centro de masa del hombro son:

$$\begin{aligned}x_1 &= l_{c1} \sin(q_1) \\y_1 &= -l_{c1} \cos(q_1)\end{aligned}\tag{B2}$$

La velocidad del centro de masa del hombro es:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix}\tag{B3}$$

La energía cinética correspondiente al hombro es:

$$K_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2\tag{B4}$$

La energía potencial correspondiente al hombro es:

$$U_1(q) = -m_1 l_{c1} g \cos(q_1)\tag{B5}$$

Coordenadas del centro de masa del codo son:

$$\begin{aligned}x_2 &= l_1 \sin(q_1) + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\y_2 &= -l_1 \cos(q_1) - l_{c2} \cos(q_1 + q_2)\end{aligned}\tag{B6}$$

La Velocidad del centro de masa del codo es:

$$v_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 + l_{c2} \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix}\tag{B7}$$

La energía cinética correspondiente del codo es:

$$\begin{aligned}
K_2(q, \dot{q}) = & \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2^2 \\
& + m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_1^2 \cos q_2 + m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos q_2 \\
& + \frac{1}{2} I_2 [\dot{q}_1 + \dot{q}_2]^2
\end{aligned} \tag{B8}$$

La energía potencial correspondiente del codo es:

$$U_2 = -m_2 l_1 g \cos(q_1) - m_2 l_{c2} g \cos(q_1 + q_2) \tag{B9}$$

Finalmente los elementos de las matrices que conforman el modelo dinámico no lineal del modo reducido a dos grados de libertad es:

$$M_q = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
M_{11}(q) &= m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + 2m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_1 + I_2 \\
M_{12}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\
M_{21}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2) + I_2 \\
M_{22}(q) &= m_2 l_{c2}^2 + I_2
\end{aligned} \tag{B10}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} C_{11}(q, \dot{q}) & C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{21}(q, \dot{q}) & C_{22}(q, \dot{q}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
C_{11}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_2 \\
C_{12}(q, \dot{q}) &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) [\dot{q}_1 + \dot{q}_2] \\
C_{21}(q, \dot{q}) &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1 \\
C_{22}(q, \dot{q}) &= 0
\end{aligned} \tag{B11}$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
g_1(q) &= [m_1 l_{c1} + m_2 l_1] g \sin(q_1) + m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\
g_2(q) &= m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2)
\end{aligned} \tag{B12}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \tag{B13}$$

Agrupando parámetros para reducir los mismos tenemos el nuevo modelo dinámico como:

$$k_1 = m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 \quad (\text{B14})$$

$$k_2 = m_2 l_{c2}^2 + I_2 \quad (\text{B15})$$

$$k_3 = m_2 l_{c2} \quad (\text{B16})$$

$$k_4 = m_1 l_{c1} + m_2 l_1 \quad (\text{B17})$$

$$M(q) = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + 2k_3 l_1 \cos(q_2) & k_2 + k_3 l_1 \cos(q_2) \\ k_2 + k_3 l_1 \cos(q_2) & k_2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -k_3 l_1 \dot{q}_2 \sin(q_2) & -k_3 l_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ k_3 l_1 \dot{q}_1 \sin(q_2) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B18})$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} k_4 g \cos(q_1) + k_3 g \cos(q_1 + q_2) \\ k_3 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Anexo C. Linealización del modelo no lineal del robot manipulador MA2000

La técnica de control óptimo aplica para sistemas lineales, luego se hace necesario linealizar el modelo no lineal del brazo manipulador MA2000.

Considere el sistema no lineal representado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u)\end{aligned}\tag{C1}$$

El proceso de linealización resulta en el siguiente modelo lineal necesario para realizar el diseño de los controladores óptimos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{C2}$$

Dónde:

$$\begin{aligned}A &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, u)|_{x_0, u_0} & B &= \frac{\partial f}{\partial u}(x, u)|_{x_0, u_0} \\ C &= \frac{\partial h}{\partial x}(x, u)|_{x_0, u_0} & D &= \frac{\partial h}{\partial u}(x, u)|_{x_0, u_0}\end{aligned}\tag{C3}$$

Tomando en cuenta lo anterior y la tesis de maestría [21] el modelo lineal del brazo manipulador MA2000 es:

Para hombro el modelo linealizado es:

$$q_1(s) = \frac{u_1 + p_1 q_2(s)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (C4)$$

Dónde:

$$k_1 = \frac{B_3 g \sin(\bar{x}_2)(B_1 + B_2 + 2k_3 l \cos(\bar{x}_2)) + 2B_3 l \sin(\bar{x}_2) \cos(\bar{x}_2)}{B_1 + B_2 + 2B_3 l \cos(\bar{x}_2)}$$

$$a_2 = J_1 + k_1 + k_2 + 2k_3 l \cos(\bar{x}_2)$$

$$a_1 = B_1 \quad (C5)$$

$$a_0 = -k_4 g \sin(\bar{x}_1)$$

Para codo se tiene finalmente el modelo linealizado representado en:

$$\frac{u_2 + b_0 q_2}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (C6)$$

Dónde:

$$b_0 = k_4 g \sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$$

$$a_2 = J_2 + k_2$$

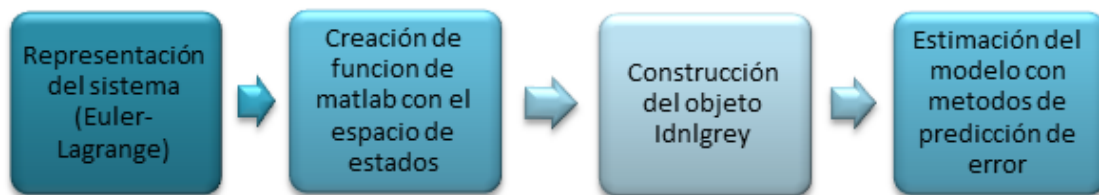
$$a_1 = k_2 \quad (C7)$$

$$a_0 = -k_4 g \sin(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$$

Anexo D.Generalidades del algoritmo Idnlgrey de MATLAB

Como se mencionó anteriormente el modelado de caja gris contiene el enfoque experimental y teórico que fusiona las ventajas de cada uno de ellos. Básicamente los modelos no lineales de caja gris son adecuados para estimar los parámetros de los sistemas que describen estructuras como una representación en el espacio de estados. En la Figura15 se puede ver un algoritmo que describe los pasos que emplea el modelado de caja gris.

Figura 21. Pasos para la identificación del sistema por medio del algoritmo indlgrey



Fuente: Autor

- **Representación del sistema:** se lleva a cabo por medio de ecuaciones diferenciales no lineales, las cuales son obtenidas a través del desarrollo de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange obtenidas en el capítulo anterior.
- **Creación de la Función:** en esta fase se elabora un archivo de texto de MATLAB donde se describe el espacio de estados, las entradas y los parámetros a identificar, esta función será llamada por la estructura idnlgrey creada en el ítem siguiente.
- **Construcción de la estructura idnlgrey:** idnlgrey se llama el modelo no lineal de caja gris donde después de crear el archivo que contiene la estructura de espacio de estados del modelo se procede a caracterizar el idnlgrey en base a la estructura señalada en [pdf de toolboxident].

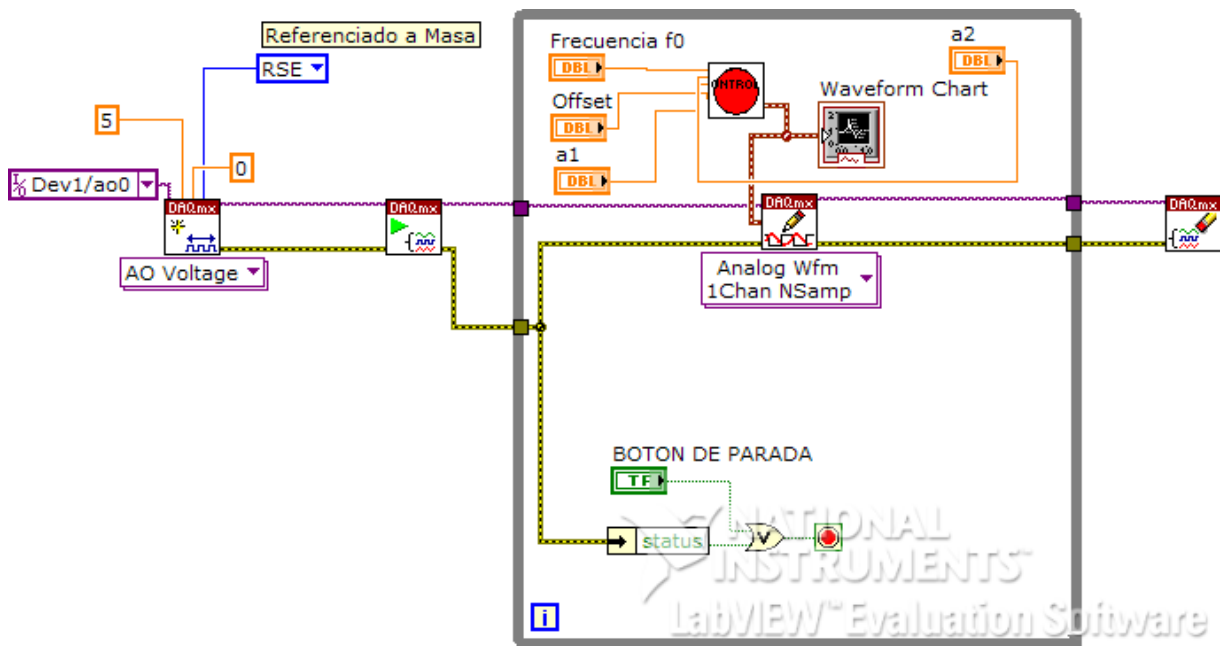
- **Estimación del modelo usando PEM:** todo lo anterior se realiza finalmente para utilizar un método de predicción de error que utiliza optimización para minimizar la función de coste. El algoritmo maneja

Anexo E. Trayectorias de excitación implementada por medio de LABVIEW

En este anexo se presenta por medio de las Figuras 16 y 17 la programación en la herramienta LABVIEW, para la creación de las trayectorias de excitación y su respectiva comunicación con la tarjeta de adquisición de datos.

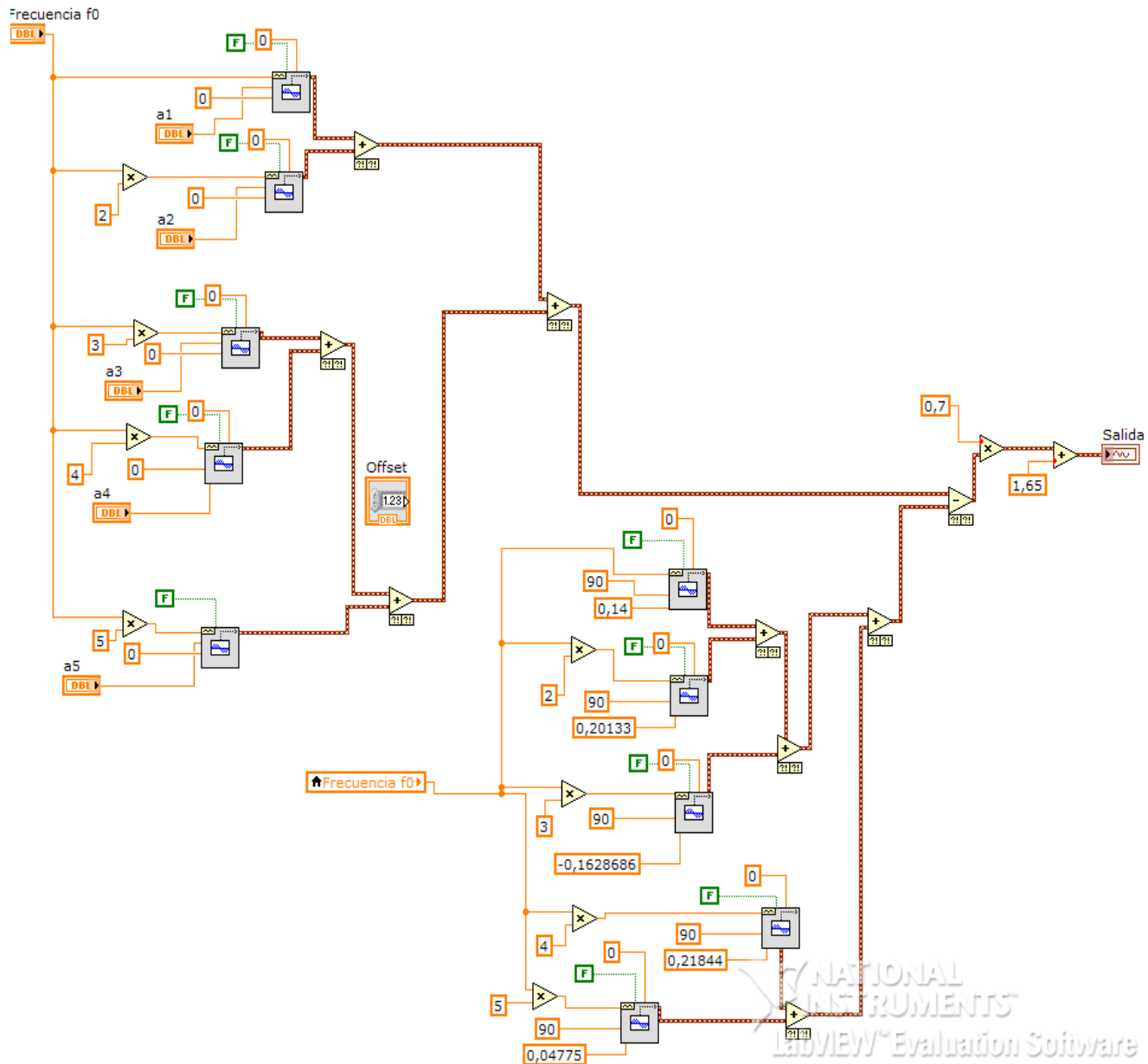
En la figura 16 se muestra el archivo principal de programación donde sobresale la comunicación con la tarjeta de adquisición de datos. Se evidencia en la Figura 16 se evidencia un SubVI llamado control, esta función contiene la creación de las señales senos y cosenos que me permitirán obtener la representación en series de Fourier necesaria para realizar el proceso de identificación. En la Figura 17 se evidencia la función control en detalle.

Figura 22. Estructura general que representa la programación de las trayectorias de excitación y la comunicación con la tarjeta de adquisición de datos.



Fuente: Autor

Figura 23. Función que genera la trayectoria de excitación por medio de series de Fourier.

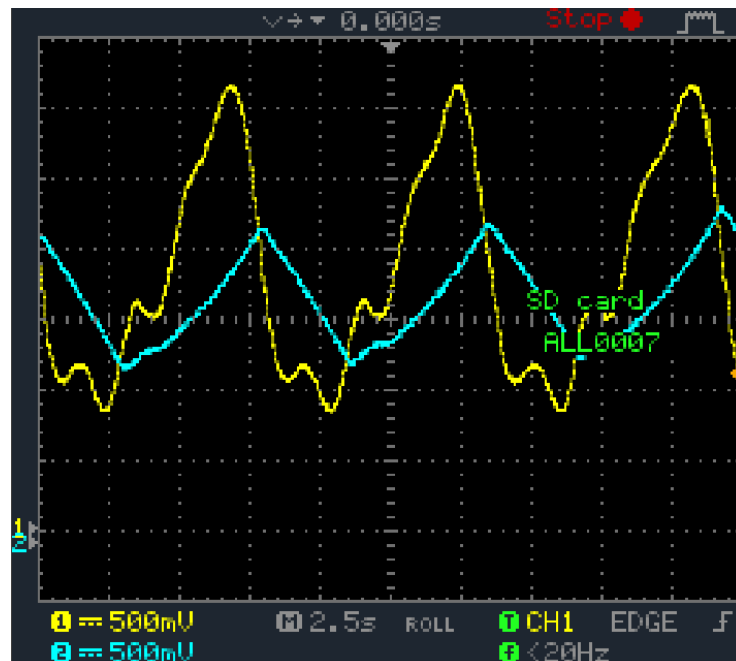


Fuente: Autor

Anexo F. Resultados Experimentales En El Proceso De Identificación

En el siguiente anexo se muestran las gráficas suministradas por el osciloscopio, donde tenemos la trayectoria de excitación que excita la dinámica del brazo manipulador, dicha señal es la de color amarillo. La señal azul es la posición articular medida en cada una de las articulaciones según corresponda.

Figura 24. Respuesta ante la trayectoria de excitación 1 en Hombro



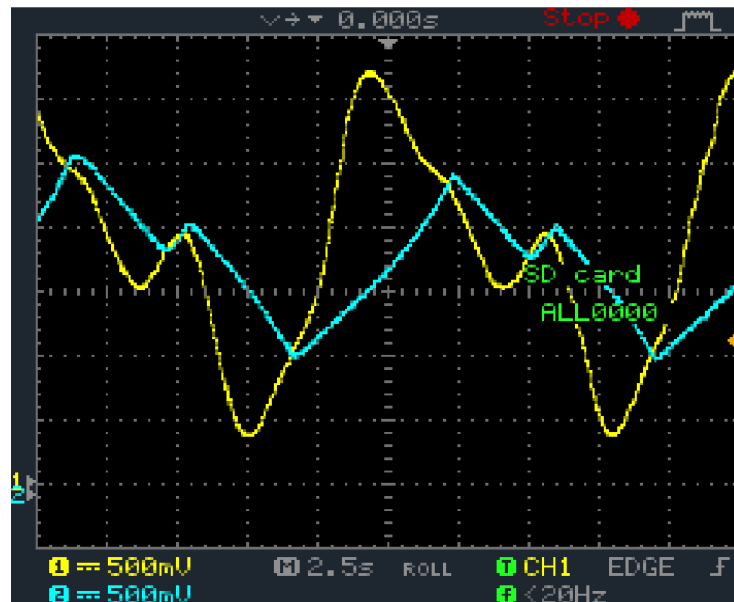
Fuente: Autor

Figura 25. Respuesta ante la trayectoria de excitación 2 en hombro



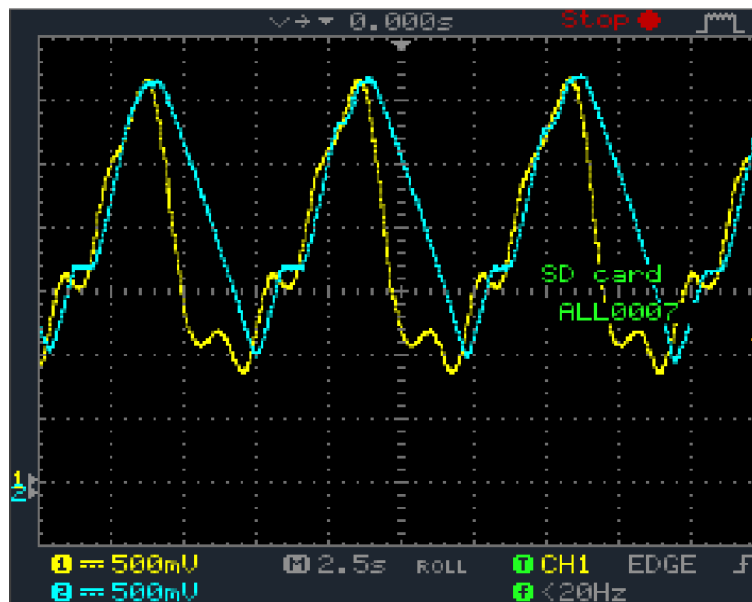
Fuente: Autor

Figura 26. Respuesta ante la trayectoria de excitación 3 en hombro



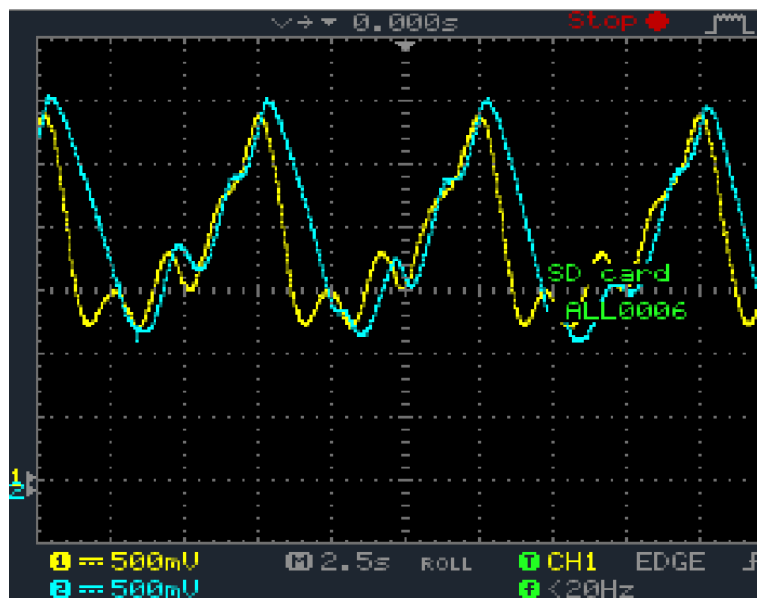
Fuente: Autor

Figura 27. Respuesta ante la trayectoria de excitación 3 en codo



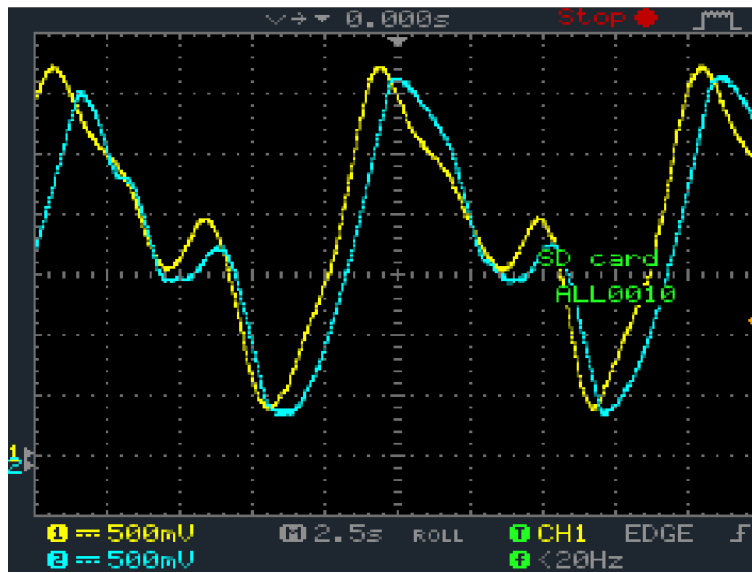
Fuente: Autor

Figura 28. Respuesta ante la trayectoria de excitación 2 en codo



Fuente: Autor

Figura 29. Respuesta ante la trayectoria de excitación 1 en codo



Fuente: Autor