

ASPECTOS DINÁMICOS DEL PROBLEMA RESTRINGIDO DE CUATRO
CUERPOS FOTO–GRAVITACIONAL: CONFIGURACIÓN DE LAGRANGE

JORGE ENRIQUE OSORIO VARGAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2020

ASPECTOS DINÁMICOS DEL PROBLEMA RESTRINGIDO DE CUATRO
CUERPOS FOTO–GRAVITACIONAL: CONFIGURACIÓN DE LAGRANGE

JORGE ENRIQUE OSORIO VARGAS

Trabajo de grado para optar por el título de
Magíster en Matemática Aplicada

Director

Guillermo A. González Villegas
Ph.D. en Física

Codirector

Fredy Leonardo Dubeibe Marín
Ph.D. en Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA

2020

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	19
1. BREVE RECUENTO HISTÓRICO	23
2. EL PROBLEMA RESTRINGIDO	29
2.1. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE CUATRO CUERPOS: CONFIGURACIÓN DE LAGRANGE	30
2.2. EL PROBLEMA FOTO–GRAVITACIONAL	35
2.2.1. El problema foto–gravitacional: presión de radiación.	36
2.2.2. El problema foto–gravitacional: presión de radiación + efecto Poynting–Robertson + radiación corpuscular.	39
3. PUNTOS DE LIBRACIÓN Y ESTABILIDAD	44
3.1. EL ERFBP FOTO–GRAVITACIONAL: $\alpha = 0$	50
3.1.1. Caso 1: $m_1 = m_2 = m_3$.	53
3.1.2. Caso 2: $m_1 \neq m_2 = m_3$.	58
3.1.3. Caso 3: $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.	62
3.2. EL ERFBP FOTO–GRAVITACIONAL: $\alpha = 1$	71
3.2.1. Caso 1: $m_1 = m_2 = m_3$.	75
3.2.2. Caso 2: $m_1 \neq m_2 = m_3$.	76
3.2.3. Caso 3: $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.	79
4. CRITERIOS Y ENSAYOS NUMÉRICOS	85
4.1. INTEGRADORES NUMÉRICOS	86

4.2. REGULARIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO: TRANSFORMACIÓN DE LEVI-CIVITA	92
4.2.1. Regularización del problema restringido.	97
4.3. INDICADOR DE CAOS: THE GENERALIZED ALIGNMENT INDEX OF ORDER k – EL MÉTODO DE GALI $_k$	100
4.3.1. Validación del método.	104
5. DINÁMICA ORBITAL	110
5.1. RESULTADOS NUMÉRICOS Y CLASIFICACIÓN DE ÓRBITAS	112
5.1.1. Caso 1: $m_1 = m_2 = m_3$.	115
5.1.2. Caso 2: $m_1 \neq m_2 = m_3$.	118
5.1.3. Caso 3: $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.	120
5.2. UNA VISIÓN GLOBAL	123
6. CONCLUSIONES	130
BIBLIOGRAFÍA	135
ANEXOS	145

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Representación esquemática de la configuración Lagrangiana del problema restringido de cuatro cuerpos, en los sistemas inercial (izquierda) y sinódico (derecha).	32
Figura 2. Regiones prohibidas (color naranja) del ERFBP, para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, y para diferentes valores de la constante Jacobiana, C . Los puntos en rojo y azul representan, la posición de las primarias y los puntos fijos, respectivamente.	45
Figura 3. Representación esquemática de la malla numérica para la obtención de los puntos de equilibrio. El par coordenado (x_0, y_0) , representa la estimación inicial necesaria para dar inicio al proceso iterativo.	47
Figura 4. Evolución paramétrica de los puntos de libración para $\beta \in [0, 1]$.	54
Figura 5. Evolución de las curvas de velocidad cero en función del factor de radiación β , para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, y para algunos valores característicos de la constante Jacobiana, C .	55
Figura 6. A izquierda: cuencas de atracción de Newton–Raphson, para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$. El código de color asignado a los diferentes atractores es el siguiente: $L_1 \leftarrow$ gris claro, $L_2 \leftarrow$ púrpura, $L_3 \leftarrow$ negro, $L_4 \leftarrow$ azul oscuro, $L_5 \leftarrow$ gris oscuro, $L_6 \leftarrow$ amarillo, $L_7 \leftarrow$ azul claro, $L_8 \leftarrow$ naranja, $L_9 \leftarrow$ verde, y $L_{10} \leftarrow$ rojo. A derecha: Convergencia del método. La paleta representa el número de iteraciones necesarias para la convergencia del método.	57

- Figura 7. Evolución paramétrica de los puntos de equilibrio con $\beta \in [0, 1]$, para diferentes valores de $\mu = m_2 = m_3$. Los puntos de color rojo representan la ubicación de las primarias, en tanto las inserciones permiten el acercamiento a la evolución de algunos puntos. 62
- Figura 8. Evolución de las curvas de velocidad cero con el factor de radiación β , para $\mu = m_2 = m_3 = 0.25$, y para algunos valores característicos de la constante Jacobiana, C . 63
- Figura 9. A izquierda: cuencas de atracción de Newton–Raphson, para $\mu = m_2 = m_3 = 0.25$. El código de color asignado a los diferentes atractores es el siguiente: $L_1 \leftarrow$ gris claro, $L_2 \leftarrow$ púrpura, $L_3 \leftarrow$ negro, $L_4 \leftarrow$ azul oscuro, $L_5 \leftarrow$ gris oscuro, $L_6 \leftarrow$ amarillo, $L_7 \leftarrow$ azul claro, $L_8 \leftarrow$ naranja, $L_9 \leftarrow$ verde, y $L_{10} \leftarrow$ rojo. A derecha: Convergencia del método. La paleta representa el número de iteraciones necesarias para la convergencia del método. 64
- Figura 10. Evolución paramétrica de los puntos de equilibrio con $\beta \in [0, 1]$, para el sistema Sol–Jupiter–Troyano. Los puntos de color rojo representan la ubicación de las primarias, en tanto la inserción permite el acercamiento a la evolución de los puntos cercanos a m_3 . 68
- Figura 11. Evolución de las CVC con el factor de radiación β , para el sistema Sol–Jupiter–Troyano, y para algunos valores característicos de la constante Jacobiana, C . 69
- Figura 12. A izquierda: cuencas de atracción de Newton–Raphson, para el sistema Sol–Jupiter–Troyano. El código de color asignado a los diferentes atractores es el siguiente: $L_1 \leftarrow$ gris claro, $L_2 \leftarrow$ púrpura, $L_3 \leftarrow$ negro, $L_4 \leftarrow$ azul oscuro, $L_5 \leftarrow$ gris oscuro, $L_6 \leftarrow$ amarillo, $L_7 \leftarrow$ azul claro, $L_8 \leftarrow$ naranja. A derecha: Convergencia del método. La paleta representa el número de iteraciones necesarias para la convergencia del método. 70

- Figura 13. Evolución paramétrica de los puntos de libración para $\beta \in [0, 1]$. Los puntos de color rojo indican la posición de las primarias. 75
- Figura 14. Evolución paramétrica de los puntos de equilibrio con $\beta \in [0, 1]$, para diferentes valores de $\mu = m_2 = m_3$. Los puntos de color rojo representan la ubicación de las primarias, en tanto las inserciones permiten el acercamiento a la evolución de algunos puntos. 78
- Figura 15. Evolución paramétrica de los puntos de equilibrio con $\beta \in [0, 1]$, para el sistema Sol–Jupiter–Troyano. Los puntos de color rojo representan la ubicación de las primarias, en tanto la inserción permite el acercamiento a la evolución de los puntos cercanos a m_3 . 80
- Figura 16. Conservación de la constante Jacobiana para algunos integradores de paso adaptativo. Rojo: Runge–Kutta de cuarto orden con coeficientes Cash–Karp; Azul: Runge–Kutta de cuarto orden con coeficientes Dormand–Prince; Naranja: Bulirsch Stoer. 87
- Figura 17. Promedio de la norma del error L_1 , para el algoritmo BS, y para el caso $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, $C = 3.52$, y $\alpha = \beta = 0$. Paleta de color en escala logarítmica. 90
- Figura 18. Conservación de la constante Jacobiana, para algunos integradores numéricos de paso fijo. De izquierda a derecha: Runge–Kutta de cuarto orden con coeficientes Cash–Karp (RK4 CK), Runge–Kutta de cuarto orden con coeficientes Dormand–Prince (RK4 DP), y Runge–Kutta de octavo orden con coeficientes Dormand–Prince (RK(8)7 DP). 91

Figura 19. Regularización de las ecuaciones de movimiento alrededor de m_1 .

En el panel superior, la trayectoria de la partícula de prueba para el conjunto de condiciones previamente descrito (la posición de m_1 está representada por medio del punto rojo). En el panel inferior, la conservación de la constante, en escala logarítmica, para las soluciones, no regularizada (negro), y regularizada (gris). En ambas soluciones, el paso dado al integrador (RK8(7) DP), es $dt = 0.05$.

98

Figura 20. Regularización de las ecuaciones de movimiento para una órbita

alrededor de las tres primarias ($(q_1, q_2, p_1, p_2) \approx (0.20689655, 0.05835544, 0.06340194, -0.22478868)$, $C = 3.52$ y $\alpha = \beta = 0$). En el panel izquierdo, la trayectoria de la partícula para 10^4 unidades de integración. En el panel derecho, la conservación de la constante, en escala logarítmica, para las soluciones, no regularizada (negro), y regularizada (gris). En ambas soluciones, el paso dado al integrador (RK8(7) DP), es $dt = 0.05$.

99

Figura 21. Panel izquierdo: órbita (caótica) de prueba para el sistema de

Hénon–Heiles con $H = 0.125$, $\delta = 0$, y $(x, y, p_x, p_y) \approx (0, 0.20837720, 0.44531470, 0.11960658)$. Panel derecho: evolución en el tiempo de $GALI_4$ para la órbita de prueba expuesta en el panel izquierdo.

105

Figura 22. Panel izquierdo: órbita (regular) de prueba para el sistema de

Hénon–Heiles con $H = 0.125$, $\delta = 0$, y $(x, y, p_x, p_y) \approx (0, 0.35207000, 0.36428445, 0.14979000)$. Panel derecho: evolución en el tiempo de $GALI_4$ para la órbita de prueba expuesta en el panel izquierdo.

106

Figura 23. Dinámica orbital del sistema Hénon–Heiles generalizado. Las pa-

letas de color (en escala logarítmica) indican el valor final del indicador, para un tiempo de integración final, $t = 10^4$. Para mayor claridad con respecto a los parámetros δ y n , véase (DUBEIBE, RIAÑO-DONCEL y ZOTOS, 2018).

107

- Figura 24. Tiempos de saturación (tiempo requerido para alcanzar el cero numérico) para los casos expuestos en la Figura 23. Las paletas de color (en escala logarítmica) indican el tiempo requerido para $GALI_4 \leq 10^{-16}$. 108
- Figura 25. Estructura orbital para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, $\alpha = \beta = 0$, y para diferentes valores de la constante Jacobiana. El código de color es el siguiente: naranja \rightarrow escape; amarillo \rightarrow colisión con m_1 ; rojo \rightarrow colisión con m_2 ; azul \rightarrow colisión con m_3 , verde \rightarrow movimiento regular; gris oscuro \rightarrow movimiento caótico; gris claro \rightarrow zonas de exclusión. 113
- Figura 26. Tiempos de escape, colisión, y saturación, para los casos tomados en consideración en la Figura 25. Las paletas en escala de amarillos, hacen referencia a los tiempos de escape y colisión requeridos por cada conjunto de condiciones iniciales. La paleta en escala de grises, corresponde a los tiempos de saturación para $GALI_4$. Paletas en escala logarítmica. 114
- Figura 27. Estructura orbital para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, $C = 2.95$, $\alpha = 0$, y para diferentes valores del factor de radiación, β . El código de color es el siguiente: naranja \rightarrow escape; amarillo \rightarrow colisión con m_1 ; rojo \rightarrow colisión con m_2 ; azul \rightarrow colisión con m_3 , verde \rightarrow movimiento regular; gris oscuro \rightarrow movimiento caótico; gris claro \rightarrow zonas de exclusión. 116
- Figura 28. Tiempos de escape, colisión, y saturación, para los casos tomados en consideración en la Figura 27. Las paletas en escala de amarillos, hacen referencia a los tiempos de escape y colisión requeridos por cada conjunto de condiciones iniciales. La paleta en escala de grises, corresponde a los tiempos de saturación para $GALI_4$. Paletas en escala logarítmica. 118

- Figura 29. Estructura orbital para $m_2 = m_3 = 0.25$, $C = 2.7$, $\alpha = 0$, y para diferentes valores del factor de radiación, β . El código de color es el siguiente: naranja \rightarrow escape; amarillo \rightarrow colisión con m_1 ; rojo \rightarrow colisión con m_2 ; azul \rightarrow colisión con m_3 , verde \rightarrow movimiento regular; gris oscuro \rightarrow movimiento caótico; gris claro \rightarrow zonas de exclusión. 120
- Figura 30. Tiempos de escape, colisión, y saturación, para los casos tomados en consideración en la Figura 29. Las paletas en escala de amarillos, hacen referencia a los tiempos de escape y colisión requeridos por cada conjunto de condiciones iniciales. La paleta en escala de grises, corresponde a los tiempos de saturación para $GALI_4$. Paletas en escala logarítmica. 121
- Figura 31. Estructura orbital para la configuración Lagrangiana Sol–Jupiter–Troiano, con $C = 2.485$, $\alpha = 0$, y para diferentes valores del factor de radiación, β . El código de color es el siguiente: naranja \rightarrow escape; amarillo \rightarrow colisión con m_1 ; rojo \rightarrow colisión con m_2 ; azul \rightarrow colisión con m_3 , verde \rightarrow movimiento regular; gris oscuro \rightarrow movimiento caótico; gris claro \rightarrow zonas de exclusión. 122
- Figura 32. Tiempos de escape, colisión, y saturación, para los casos tomados en consideración en la Figura 31. Las paletas en escala de amarillos, hacen referencia a los tiempos de escape y colisión requeridos por cada conjunto de condiciones iniciales. La paleta en escala de grises, corresponde a los tiempos de saturación para $GALI_4$. Paletas en escala logarítmica. 124
- Figura 33. Evolución paramétrica de los porcentajes correspondientes a cada tipo de trayectoria (panel izquierdo), y entropía de las cuencas (panel derecho) en función del parámetro de radiación β , para la configuración $m_1 = m_2 = m_3$. 127

Figura 34. Evolución paramétrica de los porcentajes correspondientes a cada tipo de trayectoria (panel izquierdo), y entropía de las cuencas (panel derecho) en función del parámetro de radiación β , para la configuración $\mu = m_2 = m_3 = 0.25$. 127

Figura 35. Evolución paramétrica de los porcentajes correspondientes a cada tipo de trayectoria (panel izquierdo), y entropía de las cuencas (panel derecho) en función del parámetro de radiación β , para la configuración Lagrangiana Sol–Jupiter–Troyano. 128

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Existencia de los puntos de libración, en función del factor de radiación, β , para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$.	54
Tabla 2. Existencia de los puntos de libración en función del factor de radiación β , para diferentes valores de $\mu = m_2 = m_3$.	60
Tabla 3. Estabilidad de los puntos de equilibrio con la variación del factor de radiación β , para $\mu = m_2 = m_3$.	65
Tabla 4. Existencia y estabilidad de los puntos de libración, con la variación del factor de radiación β , para el sistema Sol–Jupiter–Troyano.	67
Tabla 5. Existencia de los puntos de libración, en función del factor de radiación, β , para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$.	77
Tabla 6. Existencia de los puntos de libración en función del factor de radiación β , para diferentes valores de $\mu = m_2 = m_3$.	82
Tabla 7. Existencia y estabilidad de los puntos de libración, con la variación del factor de radiación β , para el sistema Sol–Jupiter–Troyano.	83
Tabla 8. Tiempo de computo (máquina) requerido por los diferentes integradores numéricos de paso adaptativo. Nótese la superioridad del algoritmo BS, en cuanto a tiempo de computo concierne, sobre los métodos RK4.	90

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. Ecuaciones de movimiento	145

RESUMEN

TÍTULO: ASPECTOS DINÁMICOS DEL PROBLEMA RESTRINGIDO DE CUATRO CUERPOS FOTO–GRAVITACIONAL: CONFIGURACIÓN DE LAGRANGE *

AUTOR: JORGE ENRIQUE OSORIO VARGAS **

PALABRAS CLAVE: RFBP, CONFIGURACIÓN DE LAGRANGE, FOTO–GRAVITACIONAL.

DESCRIPCIÓN:

Se generaliza la configuración de Lagrange del problema restringido de cuatro cuerpos, al considerar como fuente de radiación una de las primarias del sistema. Más aún, se derivan las ecuaciones de movimiento para una partícula de prueba en presencia de tres primarias en órbitas circulares alrededor de su centro de masa común, situadas siempre sobre los vértices de un triángulo equilátero. La inserción de las fuerzas de presión de radiación y de arrastre (efecto Poynting–Robertson y radiación corpuscular), permiten modelar de manera mucho más aproximada la dinámica de una partícula de masa infinitesimal, en órbita de un sistema astrofísico, siendo uno de sus cuerpos, una estrella activa. En general, se analizan dos diferentes versiones del problema foto–gravitacional: (i) presión de radiación ($\alpha = 0$), y (ii) presión de radiación + efecto Poynting–Robertson + radiación corpuscular ($\alpha = 1$). Así, y para tres configuraciones de masa, se determina la existencia y evolución de los diversos puntos de libración, en función del parámetro de radiación, β . Adicional a ello, se lleva a cabo un minucioso análisis en el espacio de configuración, (x, y) , al clasificar el conjunto de condiciones iniciales derivadas de éste, en seis diferentes categorías: (1)–(3), colisión con cualquiera de las primarias; (4) escape; (5) movimiento regular; y (6) movimiento caótico. En consecuencia, se expone cómo, la existencia de los puntos de libración (y estabilidad de los mismos), y la estructura orbital de los diferentes casos tomados en consideración, varían no sólo en función de la configuración dada a las masas de las primarias, sino también, en función de β .

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Guillermo A. González Villegas, Ph.D. en Física. Codirector: Fredy L. Dubeibe Marín, Ph.D. en Física.

ABSTRACT

TITLE: DYNAMIC ASPECTS OF THE PHOTO–GRAVITATIONAL RESTRICTED FOUR BODY PROBLEM: LAGRANGE CONFIGURATION *

AUTHOR: JORGE ENRIQUE OSORIO VARGAS **

KEYWORDS: RFBP, LAGRANGE CONFIGURATION, PHOTO–GRAVITATIONAL.

DESCRIPTION:

Lagrange's configuration of the restricted four–body problem is generalized by considering one primary body as a radiation source (photo–gravitational). Moreover, the equations of motion for a test particle, in the presence of three massive bodies in circular orbits around their common center of mass, and always located on the vertices of an equilateral triangle, are derived. The insertion of the radiation pressure and drag forces (Poynting–Robertson effect and corpuscular radiation), allow us to model in a realistic way the dynamics of a test particle in orbit of an astrophysical system, being one of its bodies, an active star. In general, two different versions of the photo–gravitational problem are taken into account: (i) radiation pressure ($\alpha = 0$), and (ii) radiation pressure + Poynting–Robertson effect + corpuscular radiation ($\alpha = 1$). Thus, and for three different mass configurations, the existence and evolution of the various libration points is completely determined, as a function of the radiation parameter, β . In addition, a thorough analysis is carried out in the configuration space, (x, y) , by classifying the set of initial conditions into six different categories: (1)–(3), collision with any of the primaries; (4) escape; (5) regular motion; and (6) chaotic motion. Consequently, it is state how, the existence of the libration points (and their stability), and the orbital structure of the different cases taken into account, vary not only as a function of the mass configuration given to the massive bodies, but also, according to the radiation parameter.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Guillermo A. González Villegas, Ph.D. en Física. Co–director: Fredy L. Dubeibe Marín, Ph.D. en Física.

INTRODUCCIÓN

Durante décadas, diversos sistemas compuestos de un par de cuerpos han sido vástamente estudiados, con el fin de explicar y entender la dinámica orbital de los cuerpos celestes en el espacio. Tal propósito, no sólo ha impelido notables avances en el ámbito de los sistemas dinámicos y de la mecánica celeste, sino en diversos campos de la Física en general. Así, eventos y formaciones a nivel planetario, estelar, e incluso galáctico, pueden ser modelados, en principio, haciendo uso de configuraciones gravitacionales de N cuerpos. Más aún, insignes avances en materia de estabilidad y puntos de libración, han facultado el posicionamiento de satélites artificiales en órbita terrestre con fines observacionales. En el contexto del problema de N cuerpos, el problema restringido de tres cuerpos (RTBP) ha sido quizá, el sistema dinámico de mayor trascendencia en mecánica celeste. En éste, dos cuerpos masivos (primarias) se mueven en órbitas circulares alrededor de su centro de masa común, en tanto un tercer cuerpo, de masa despreciable, orbita bajo la fuerza gravitatoria ejercida por las primarias. Propuesto primero por Euler, el problema restringido fue después refinado, en mayor medida, por los trabajos de Jacobi, Levi-Civita, Birkhoff, Hill, y Poincaré (WINTNER, 2014). Hogaño, su desarrollo constituye las bases de muchas de las teorías lunares y planetarias comúnmente usadas en navegación espacial (BROUCKE, 1968), siendo aún, materia activa en mecánica (ALBERS y col., 2012; ZOTOS y DUBEIBE, 2018; DUBEIBE, LORA-CLAVIJO y GONZÁLEZ, 2017; POUSSE, ROBUTEL y VIENNE, 2017; BRESLAU, VINCKE y PFALZNER, 2017).

Así mismo, el problema restringido de cuatro cuerpos (RFBP), versa sobre el movi-

miento de un cuerpo de masa infinitesimal, en presencia de tres primarias. El RFBP, al igual que el problema restringido de tres cuerpos, exhibe infinidad de aplicaciones en mecánica celeste, astronomía, y dinámica galáctica, *i.e.*, existen diversos sistemas de interés astrofísico que pueden ser modelados, en primera instancia, como un problema de cuatro cuerpos, *e.g.*, el sistema Sol–Júpiter–Saturno; el sistema Sol–Júpiter–Tierra, el sistema Sol–Tierra–Luna (ALMEIDA PRADO, 2005; MACHUY, PRADO y STUCHI, 2007). Una configuración particular del problema restringido de cuatro cuerpos, corresponde por ejemplo, a la solución dada por Lagrange para el problema restringido de tres cuerpos: el problema equilateral, o configuración de Lagrange. En ella, las primarias se ven siempre emplazadas sobre los vértices de un triángulo equilátero. Antaño, dicha configuración sería apenas considerada algo más que una simple rareza matemática. No obstante, en la actualidad es bien sabida la existencia de configuraciones en la naturaleza que obedecen a dicha solución, *e.g.*, el sistema Sol–Júpiter–Asteroides Troyanos; siendo aún, materia activa y de relevante interés astrofísico (SIMÓ, 1978; MICHALODIMITRAKIS, 1981; MARZARI y col., 2002; ROBUTEL y GABERN, 2006; MEDVEDEV y PEROV, 2008; BALTAGIANNIS y PAPANAKIS, 2013; ALVAREZ-RAMÍREZ y BARRABÉS, 2015; BURGOS-GARCÍA y DELGADO, 2013; ZOTOS, 2014; ZOTOS y DUBEIBE, 2018). En años recientes, numerosas modificaciones al problema restringido han sido expuestas, con el fin de modelar y entender la influencia y efectos derivados de diferentes parámetros en sistemas celestes algo reales. Así, Papadouris & Papadakis (PAPADOURIS y PAPANAKIS, 2013), bajo la hipótesis de masas iguales, determinan la existencia y estabilidad de los puntos de equilibrio para la versión foto–gravitacional del ERFBP. Singh & Vincent (SINGH y VINCENT, 2016), conducen un estudio similar, considerando la totalidad de primarias como cuerpos radiantes. Concerniente a la morfología de las mismas, Asique *et al.* (ASIQUE y col., 2016) exponen la ubicación y estabilidad de los puntos de libración, para una de las primarias siendo un esferoide oblato/prolato.

Tales estudios revelan que la inclusión de términos adicionales, modifica de manera sustancial, la existencia, posición y estabilidad de dichos puntos, y por tanto, la dinámica en general del sistema.

Se pretende entonces llevar a cabo un análisis completo de la existencia, evolución y estabilidad de los puntos de libración, debido a la inclusión de un cuerpo radiante en la configuración Lagrangiana del problema restringido de cuatro cuerpos. La inclusión de fuerzas de radiación y de arrastre en el ERFBP, permite modelar, de manera bastante aproximada, la dinámica de una partícula de prueba en presencia de un sistema astrofísico, *e.g.*, una estrella activa. Se extiende así, los trabajos desarrollados por Papadouris & Papadakis, Baltagiannis & Papadakis, y Zotos (BALTAGIANNIS y PAPADAKIS, 2011; PAPADOURIS y PAPADAKIS, 2013; ZOTOS, 2016), al considerar no sólo tres diferentes configuraciones de masa para las primarias ($m_1 = m_2 = m_3$; $m_1 \neq m_2 = m_3$; y $m_1 \neq m_2 \neq m_3$), sino también la inclusión de fuerzas de radiación y de arrastre. A diferencia de las fuerzas gravitatoria y de presión de radiación, los efectos asociados a las fuerzas de arrastre (efecto Poynting–Robertson y radiación corpuscular), son no–conservativos —la partícula pierde energía orbital—, resultando de ello, la precipitación en espiral de la partícula hacia la fuente de radiación. Tal efecto modifica de manera significativa la dinámica del sistema, mereciendo así, un estudio completo en el contexto del problema restringido de cuatro cuerpos. Más aún, siguiendo lo descrito por Nagler, y Skokos (NAGLER, 2004; SKOKOS, 2001; SKOKOS, BOUNTIS y ANTONOPOULOS, 2007), se explora también la dinámica orbital de los sistemas sometidos a estudio, al clasificar los diferentes tipos de trayectorias para el espacio de configuración (ZOTOS, 2016; ZOTOS y DUBEIBE, 2018).

La estructura de este estudio es la siguiente: el Capítulo 1 presenta un breve recuento histórico del problema restringido. El Capítulo 2, expone la formulación del problema restringido de cuatro cuerpos, sus ecuaciones de movimiento, y la inclusión de los términos de radiación y de arrastre. En el Capítulo 3, se derivan las expresiones generales necesarias para la determinación de los puntos de libración y estabilidad de los mismos, así como su evolución paramétrica en función del factor de radiación. En el Capítulo 4, se describen los métodos y criterios para la elección de los diferentes integradores numéricos, en tanto, la regularización de Levi-Civita surge como componente necesario si evitar desbordamientos numéricos, derivados de encuentros cercanos de tipo partícula-primaria, se requiere. Se describe también el método de GALI, como indicador para la fácil distinción entre movimiento regular y caótico. Finalmente, en el Capítulo 5, se expone la evolución paramétrica de la estructura orbital del problema en función del factor de radiación, para las diferentes configuraciones tomadas en consideración.

1. BREVE RECUENTO HISTÓRICO

El problema de los tres cuerpos, descrito por Whittaker como “*el más célebre problema en dinámica*” (WHITTAKER, 1937, Pág. 339), y que para Hilbert cumple a cabalidad los criterios necesarios para un buen problema matemático, puede simplemente enunciarse como: *dados tres cuerpos que se mueven en el espacio bajo mutua atracción gravitacional, determinar, para cualquier instante, las posiciones y velocidades de dichos cuerpos, dadas sus posiciones y velocidades iniciales*. Sin embargo, la simplicidad de su declaración dista enormemente de la complejidad de su solución. Empero, su trascendencia en problemas fundamentales de la mecánica celeste ha resultado en notables avances en los campos de las matemáticas y de la física, y especialmente, en la teoría de los sistemas dinámicos.

En general, el problema de los N cuerpos, y la dinámica moderna en sí, surgen tal vez a finales del siglo XVII con la publicación del *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (NEWTON, 1687). Al pretender describir la dinámica de los cuerpos celestes en el espacio, en su obra, y quizá la obra científica más importante de la historia, I. Newton expone sus leyes de movimiento y gravitación universal, dando así, sentido matemático a las leyes de movimiento planetario propuestas de manera empírica por J. Kepler años antes. Concretamente, Newton formula y resuelve de manera geométrica el problema de los dos cuerpos, para dos esferas en movimiento bajo mutua atracción gravitacional. Haciendo uso de aproximaciones esencialmente geométricas al método de variación de parámetros, Newton aplica también teorías de perturbación al movimiento de la Luna, y considera además, el efecto del Sol en la dinámica de ésta. En 1734, D. Bernoulli gana el premio de la Academia France-

sa por su desarrollo analítico sobre el problema de los dos cuerpos (KLINE, 1972, Pág. 492), llegando éste a ser resuelto en detalle por Euler años más tarde (EULER, 1744).

El creciente interés de mediados del siglo XVIII por la dinámica de los cuerpos celestes, daría inicio a las célebres teorías lunares, y con ellas, a un modelo mucho más completo y complejo que el resuelto por Newton décadas antes: el problema general de los tres cuerpos. En éste, las masas, posiciones, y velocidades iniciales de los tres cuerpos no están dispuestas de manera particular; además, el movimiento de cada cuerpo ha de considerarse de manera conjunta al movimiento de los cuerpos restantes. Ya por la época, el uso de métodos analíticos en la dinámica, y en particular, en la mecánica celeste, cobraba importancia de manera gradual, al permitir un desligue de las restricciones inherentes a la geometría. Con esta nueva visión, llegaba también el entendimiento de la imposibilidad de hallar soluciones cerradas en términos de funciones elementales. Generaciones posteriores de ilustres matemáticos tratarían de extender los resultados de Newton al problema general de N cuerpos (el problema de dos cuerpos no modela, al menos de manera estricta, la dinámica del sistema solar), llegando a concluir, tras décadas de esfuerzo, que para $N \geq 3$, el problema resulta irresoluble, al menos en el sentido de lograr una solución analítica general y exacta de las ecuaciones de movimiento. Es así como en 1747, Clairaut plantea la primer solución aproximada al problema lunar, haciendo uso de soluciones en series infinitas (CLAIRAUT, 1749) —sus resultados cobrarían importancia en 1759, al predecir, de manera acertada, el paso del perihelio del cometa Haley.

En 1772, L. Euler presenta su dossier de teorías lunares (EULER, 1772), que junto

a las memorias de J. L. Lagrange (LAGRANGE, 1772), consignan la primer formulación del problema restringido, basada en un marco de referencia rotante. En sus memorias, Lagrange demuestra que el problema de tres cuerpos puede reducirse a un sistema de séptimo orden, y plantea además, dos tipos de soluciones particulares para el problema general. Tales soluciones obedecen a configuraciones geométricas en las cuales los tres cuerpos permanecen invariantes. Haciendo uso de un marco de referencia rotante, es Euler quien primero determina la existencia de soluciones particulares de tipo *colineal* en el problema restringido, *i.e.*, soluciones en las cuales los cuerpos en movimiento permanecen sobre una línea recta que rota alrededor del centro de masa del sistema. Más tarde, Lagrange encontraría, además, configuraciones de tipo *equilateral*. Así, por ejemplo, para el sistema Sol–Júpiter, Lagrange determina la existencia de cinco puntos de equilibrio, también llamados *puntos Lagrangianos* o *de libración*, asociados a este tipo de soluciones particulares. Antaño, dichas soluciones no llegarían a ser algo más que una simple rareza matemática. Empero, en la actualidad es bien sabida la existencia de configuraciones en la naturaleza que obedecen a dichas soluciones, *e.g.*, los asteroides Troyanos en órbita alrededor del sistema Sol–Júpiter; siendo ampliamente usadas en el posicionamiento de satélites artificiales. En 1785, Laplace anuncia la solución de diversas anomalías presentes en la teoría del sistema solar, una de las cuales correspondería a las desviaciones observadas en las órbitas Keplerianas de los planetas Júpiter y Saturno.

La historia del problema restringido continua con Jacobi (1836), Hill (1878), y Poincaré (1899). La idea de un marco de referencia rotante, aplicada al problema restringido, lleva a una integral adicional de movimiento. Sin embargo, a pesar de sus contribuciones al problema restringido, el hallazgo de dicha integral no se atribuye a Euler propiamente, sino al matemático del cual toma su nombre: C. G. J. Jacobi.

Jacobi plantea una visión diferente y bastante significativa del problema restringido, al demostrar que éste puede representarse por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales de cuarto orden, con al menos una solución definida: *la integral de Jacobi* (JACOBI, 1836). Puesto que relaciona de manera directa la magnitud del vector velocidad del tercer cuerpo con sus coordenadas espaciales, ésta permite indagar de manera cualitativa acerca del movimiento de éste, sin necesidad de resolver, de manera explícita, las ecuaciones de movimiento del sistema. Sería el matemático y astrónomo, G. W. Hill, quien años más tarde llegaría a plantear la más importante aplicación de dicha integral a la mecánica celeste: las regiones de posible movimiento (HILL, 1878).

A pesar de los diferentes aciertos en casos particulares, la solución al problema general permaneció esquiva durante casi doscientos años después del *Principia*. En 1884, Oscar II, Rey de Suecia y Noruega, en conmemoración de su sexagésimo aniversario, ofreció una cuantiosa suma a quien diera solución, entre otros, al problema general de tres cuerpos. La solución debía darse en forma de una expansión en series que permitiese describir la posición de los tres cuerpos para cualquier instante, dada una configuración inicial arbitraria. Es así como en 1889, H. Poincaré presenta sus primeras memorias sobre el problema de tres cuerpos: *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* (POINCARÉ, 1890). En ellas, Poincaré establece que el problema carece de solución analítica, siendo posible, a pesar de ello, obtener aproximaciones numéricas que permitan predecir las trayectorias de los cuerpos. Dichas aproximaciones pueden darse por medio de series de potencias, las cuales, sin embargo, divergen en función de las condiciones iniciales. Así pues, cualquier pequeño cambio en las condiciones iniciales arrojará una solución diferente, amplificando la variación en el tiempo de una condición a otra (si bien destacan los resultados de los astrónomos Delaunay, Lindstedt y en particular,

de Gylden, sería Poincaré quien demostraría primero, en general, la divergencia de dichas series). Poincaré plantea además, un enfoque totalmente novedoso al exaltar aspectos cualitativos del problema, y desarrolla una poderosa aproximación geométrica que llegaría a florecer con aplicaciones que, hogaño, trascienden la mecánica celeste. Un año más tarde, debido a un error en su disertación, Poincaré modifica de manera sustancial su ensayo inicial sobre el problema de tres cuerpos, resultando así, el monumental *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* (POINCARÉ, 1899). El trabajo desarrollado por Poincaré sentaría las bases de la teoría del Caos en los sistemas dinámicos, y daría inicio a una nueva era en la historia de la mecánica celeste. En 1902, F. R. Moulton escribiría:

The methods employed by Poincaré were incomparably more profound and powerful than any previously used in Celestial Mechanics, and mark an epoch in the development of the science.

(MOULTON, 1914, Pág. 320)

A principios del siglo XIX, el matemático y astrónomo K. Sundman, resuelve el problema general de los tres cuerpos, al desarrollar una solución en series de potencias válida para cualquier instante de tiempo (SUNDMAN, 1912). Sin embargo, la tasa a la que converge dicha expansión es lenta en demasía, haciendo de ésta, una solución poco útil si lo que se quiere es determinar la trayectoria de los tres cuerpos. En cuanto al problema de tres cuerpos ataño, cabe destacar el trabajo desarrollado por los matemáticos Lyapunov (LYAPUNOV, 1907), en el tema de estabilidad; Painlevé (PAINLEVÉ, 1896), Levi-Civita (LEVI-CIVITA, 1903), Burrau (BURRAU, 1906), von Zeipel (VON ZEIPEL, 1908), Chazy (CHAZY, 1920), y Xia (XIA, 1992), en singularidades y regularización; Darwin (DARWIN, 1911), Moulton (MOULTON, 1914) y Strömngren (STRÖMGREN, 1933), en análisis de tipo cuantitativo y clasificación de órbitas; y Birkhoff (BIRKHOFF, 1915), quien realizó un notable avance en el campo de los sistemas dinámicos y en la teoría general de órbitas, llegando a expandir

de manera brillante, algunas de las ideas antes expuestas por Poincaré. Finalmente, Kolmogorov (KOLMOGOROV, 1954), Arnold (ARNOLD, 1963) y Möser (MÖSER, 1967), llevaron a cabo un extenso estudio sobre la existencia de soluciones cuasi-periódicas, y el efecto de pequeñas perturbaciones en sistemas Hamiltonianos, llegando a desarrollar la hoy reconocida teoría de KAM.

2. EL PROBLEMA RESTRINGIDO

Se empezará por describir la versión más simple y comúnmente usada del problema restringido equilateral de cuatro cuerpos. Su formulación base, el problema restringido de tres cuerpos, parece datar de las célebres memorias de Euler sobre sus teorías lunares (EULER, 1772). En él, dos cuerpos masivos, también llamados *primarias*, se mueven alrededor de su baricentro común, describiendo trayectorias circulares, en tanto un tercer cuerpo de masa despreciable, bajo la acción gravitatoria de dichas primarias, orbita, sin llegar a alterar la dinámica de éstas. Así mismo, el problema restringido de cuatro cuerpos se refiere a la dinámica de una partícula de masa infinitesimal, en presencia de tres cuerpos masivos. Un grupo de configuraciones del problema restringido de cuatro cuerpos, denominadas configuraciones centrales, obedecen a soluciones particulares del problema restringido de tres cuerpos, expuestas antes por Euler (solución colineal) y Lagrange (solución equilateral). El objeto de estudio de este documento, la configuración de Lagrange del problema restringido de cuatro cuerpos, puede derivarse de manera formal, al introducir una primaria adicional al problema restringido de tres cuerpos, de manera tal que las primarias se emplacen sobre los vértices de un triángulo equilátero.

Planteado el problema, se presentan las ecuaciones de movimiento en los sistemas de referencia inercial y rotante (véase Apéndice 1), derivando de este último, la constante de movimiento de Jacobi. Finalmente, se introduce la versión foto-gravitacional del problema restringido de cuatro cuerpos, y sus dos casos generales de estudio: *el problema foto-gravitacional: presión de radiación*; y, *el problema foto-gravitacional: presión de radiación + efecto Poynting-Robertson + radiación corpuscular*.

2.1. EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE CUATRO CUERPOS: CONFIGURACIÓN DE LAGRANGE

La configuración equilateral, o de Lagrange, del problema restringido de los cuatro cuerpos (ERFBP, por sus siglas en Inglés), describe la dinámica de una partícula de masa infinitesimal, m , bajo la influencia del campo gravitacional de tres cuerpos masivos, m_1 , m_2 , y m_3 , situados sobre los vértices de un triángulo equilátero (tal configuración es invariante e independiente de los valores de masa asignados a las primarias (MOULTON, 1900)). Más aún, en el problema equilateral, los cuerpos masivos, también llamados *primarias*, se mueven en el mismo plano con velocidad angular uniforme, describiendo trayectorias circulares alrededor de su centro de masa común.

Las ecuaciones de movimiento de la partícula de masa infinitesimal, m , en un sistema inercial de coordenadas rectangulares, (X, Y) , se escriben como (SZEBEHELY, 1967):

$$m \ddot{X} = \frac{\partial F}{\partial X}, \quad m \ddot{Y} = \frac{\partial F}{\partial Y} \quad (1)$$

con F , el negativo del potencial gravitacional, y R_i , la distancia de la partícula a cada primaria:

$$F = Gm \left(\frac{m_1}{R_1} + \frac{m_2}{R_2} + \frac{m_3}{R_3} \right), \quad (2)$$

$$R_i = [(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2]^{1/2}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

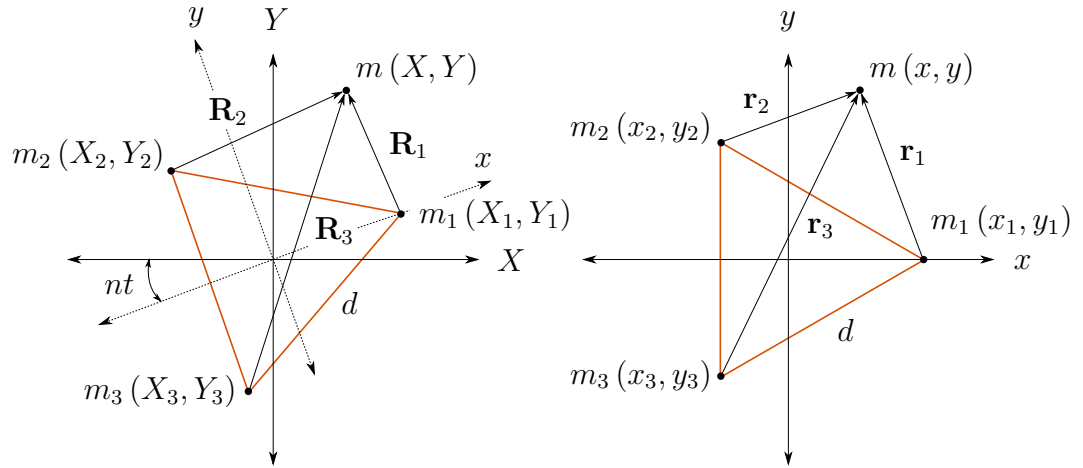
Supóngase ahora, que el sistema (1) se normaliza de manera tal, que las unidades de masa, M_T , distancia, d , y periodo orbital, T , sean, la suma de las tres masas primarias; la distancia entre éstas; y 2π , respectivamente. Bajo dichos supuestos, la constante universal gravitatoria, G , y la velocidad angular media del sistema, $n = 2\pi/T$, serán $G = n = 1$. Así, y por abuso de notación, las variables normalizadas del problema transforman en:

$$m_{1,2,3} = m_{1,2,3}/M_T, \quad R_{1,2,3} = R_{1,2,3}/d, \quad \text{y} \quad t = t(2\pi/T). \quad (4)$$

Debido a la dinámica de las primarias en el sistema inercial, las ecuaciones de movimiento asociadas al cuerpo infinitesimal presentan una dependencia temporal explícita, *i.g.*, $X_i(t)$ y $Y_i(t)$ (véase Fig. 1, panel izquierdo). La prueba formal de ello, consiste en reemplazar las dependencias precedentes, en el sistema (1), obteniendo así:

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= - \left[\frac{m_1 (X - X_1)}{R_1^3} + \frac{m_2 (X - X_2)}{R_2^3} + \frac{m_3 (X - X_3)}{R_3^3} \right], \\ \ddot{Y} &= - \left[\frac{m_1 (Y - Y_1)}{R_1^3} + \frac{m_2 (Y - Y_2)}{R_2^3} + \frac{m_3 (Y - Y_3)}{R_3^3} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Figura 1. Representación esquemática de la configuración Lagrangiana del problema restringido de cuatro cuerpos, en los sistemas inercial (izquierda) y sinódico (derecha).



Como consecuencia, el Hamiltoniano del sistema dependerá también explícitamente del tiempo, no siendo invariante. Se introduce entonces la transformación de coordenadas (en este sistema coordenado, las primarias permanecen fijas, y sus coordenadas, independientes del tiempo),

$$\mathbf{R}(X, Y) = \mathbf{r}(x, y) \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Más aún, las ecuaciones diferenciales de movimiento asociadas al cuerpo infinitesimal, normalizadas, y referidas a un sistema que rota a la misma velocidad angular que las primarias, se escriben como (véase Apéndice 1):

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= x - \frac{m_1(x - x_1)}{r_1^3} - \frac{m_2(x - x_2)}{r_2^3} - \frac{m_3(x - x_3)}{r_3^3}, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= y - \frac{m_1(y - y_1)}{r_1^3} - \frac{m_2(y - y_2)}{r_2^3} - \frac{m_3(y - y_3)}{r_3^3},\end{aligned}\quad (6)$$

donde,

$$r_i = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Si además, el centro de masa del ERFBP se sitúa sobre el origen de dicho marco de referencia, con m_1 sobre el eje x , y $M_T = d = 1$ (Fig. 1, panel derecho), las coordenadas de las primarias, (x_i, y_i) , quedan completamente determinadas por el sistema de ecuaciones (MOULTON, 1900),

$$\begin{aligned}y_1 &= 0, \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= 0, \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 &= 1, \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 &= 1, \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 &= 1,\end{aligned}$$

como:

$$\begin{aligned}
x_1 &= K_1 / K_2, \\
x_2 &= -\frac{m_3(m_2 - m_3) + m_1(2m_2 + m_3)}{2K_1K_2}, \\
x_3 &= -\frac{m_2(m_3 - m_2) + m_1(m_2 + 2m_3)}{2K_1K_2}, \\
y_1 &= 0, \\
y_2 &= \frac{\sqrt{3}m_3}{2K_1}, \\
y_3 &= -\frac{\sqrt{3}m_2}{2K_1},
\end{aligned} \tag{7}$$

con,

$$K_1 = \sqrt{m_2^2 + m_2m_3 + m_3^2}, \quad K_2 = m_1 + m_2 + m_3.$$

Las ecuaciones de movimiento en (6), pueden darse también de forma compacta:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} &= \partial U / \partial x \\
\ddot{y} + 2\dot{x} &= \partial U / \partial y
\end{aligned} \tag{8}$$

con, U , el potencial gravitacional, definido como,

$$U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3}. \tag{9}$$

Tal sistema admite la bien conocida integral de movimiento,

$$J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 2U(x, y) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (10)$$

que restringe la dinámica de la partícula a la región $J \leq 2U$.

2.2. EL PROBLEMA FOTO–GRAVITACIONAL

Además de la fuerza de atracción gravitacional, las partículas de polvo (partículas de radio $\in (1 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-2})$ m) en el sistema solar interactúan también con el campo de radiación electromagnética ejercido por el Sol. La versión foto–gravitacional del problema restringido surge entonces, naturalmente, del problema clásico, al considerar como fuente de radiación, al menos uno de los cuerpos masivos del sistema, *e.g.*, sistemas binarios de estrellas. Sería Radzievskii quien primero formularía el problema, para el sistema Sol–Tierra–Partícula (RADZIEVSKII, 1979). Así, se sabe que las fuerzas de radiación modifican la posición de los puntos de libración, llegando a alterar también la existencia de los mismos (RADZIEVSKII, 1953).

Si la partícula se asume esférica, con estructura homogénea, la radiación solar ejercerá una fuerza sobre ésta, en la dirección de propagación del haz incidente, y anti–paralela a la línea de acción de la fuerza gravitacional. La acción resultante sobre la partícula, dependerá entonces de la razón, β , entre dichas fuerzas, siendo máxima para partículas de algunos micrómetros de diámetro, en tanto su magnitud, estará dada, en mayor medida, en función del material y tamaño del grano de polvo

(BURNS, LAMY y SOTER, 1979). Las órbitas de tales partículas se ven también alteradas debido al efecto velo-dependiente Poynting–Robertson, el cual reduce, de manera gradual, la excentricidad orbital de la partícula (§ 2.2.2).

Las partículas de polvo abundan en el sistema solar. Así, por ejemplo, cualquier cuerpo celeste podría, en principio, inyectar materia en el medio interplanetario. Asteroides, cometas, y la luz zodiacal, son paradigmas comunes del polvo interplanetario fácilmente observable. Los cometas generan partículas visibles (el proceso de sublimación de hielo en el cometa libera polvo del núcleo, generando una estela cuya forma depende de la interacción entre las fuerzas gravitacional y de presión de radiación), y las anuales lluvias de meteoros, *e.g.*, las Perseidas; siendo, presuntamente, la mayor fuente de polvo cósmico en el sistema solar. La luz zodiacal, un tenue resplandor en el cielo nocturno, visible a lo largo de la eclíptica, es debida a la dispersión de la radiación solar por la nube de partículas de polvo interplanetarias derivadas de desechos cometarios. El origen preciso de dichas partículas es incierto. Empero, algunos materiales interplanetarios de tamaño inferior a un centímetro, provienen ciertamente de cometas, y de colisiones entre grandes asteroides. Partículas de mayor tamaño, no obstante afectadas por las fuerzas de radiación, pueden derivar también de núcleos cometarios extintos. Independiente de su origen, el entendimiento de la dinámica y evolución orbital de tales partículas, bajo fuerzas de radiación, permite indagar acerca del tamaño de las fuentes y sumideros que gobiernan la masa total de materia interplanetaria, facilitando también la interpretación de la evidencia observacional.

2.2.1. El problema foto-gravitacional: presión de radiación. Según Radzievskii, la fuerza de presión de radiación, F_r , ejercida sobre una partícula de masa m ,

puede darse en términos de la fuerza de atracción gravitacional, F_g , como,

$$F_r = F_g (1 - q), \quad (11)$$

donde, $q = 1 - (F_r/F_g)$, siendo constante para una partícula dada, equivale a despreciar fluctuaciones en el haz de radiación (CHERNIKOV, 1970). Al igual que la fuerza de gravedad, la presión de radiación sobre una partícula esférica homogénea, obedece, de manera aproximada, la ley del cuadrado inverso de la distancia. Así, la razón entre dichas fuerzas, al ser un parámetro completamente independiente de la distancia fuente–partícula, permite evaluar el efecto relativo de la presión de radiación en la dinámica de la partícula. A dicha razón se denomina *factor de radiación*, y se escribe como (BURNS, LAMY y SOTER, 1979; GUSTAFSON, 1994; LIOU, ZOOK y JACKSON, 1995):

$$\beta = \frac{F_r}{F_g} = \frac{SAQ_{pr} R_{\odot}^2}{c GmM_{\odot}}, \quad (12)$$

con M_{\odot} , la masa del cuerpo masivo (fuente lumínica); R_{\odot} , la distancia entre éste y la partícula de prueba; c , la velocidad de la luz; y S^1 , A , y Q_{pr} , la densidad de flujo de energía solar, la sección transversal geométrica de la partícula, y el coeficiente de presión de radiación, respectivamente. Los valores de β^2 para partículas esféricas y

¹ (BURNS, LAMY y SOTER, 1979, Pág. 14) $S = L/4\pi R_{\odot}^2$, con L , la luminosidad solar.

² BURNS, LAMY y SOTER, 1979, Pág. 17 – Resultados numéricos de β en función del tamaño de

homogéneas, en los sistemas solar y extra-solar, están dados con base en la teoría Mie, la cual provee, para una esfera homogénea, una solución exacta a las ecuaciones de Maxwell (MUKAI y MUKAI, 1973; ARTYMOWICZ, 1988; LAMY y PERRIN, 1997).

Dada la masa de la partícula y el valor de β , la fuerza resultante sobre ésta será entonces (BURNS, LAMY y SOTER, 1979; GUSTAFSON, 1994):

$$\mathbf{F} = -\frac{G(1-\beta)mM_{\odot}}{R_{\odot}^2}\hat{\mathbf{R}}_{\odot}. \quad (13)$$

Bajo un campo de fuerzas conservativas, la energía total y el momentum se conservan, permitiendo que los cuerpos en movimiento permanezcan en órbita solar de manera indefinida. Sin embargo, la interacción de la partícula en movimiento con la radiación solar, genera también una fuerza de arrastre que disipa energía y momentum, ocasionando la precipitación en espiral de la partícula hacia el Sol (efecto Poynting–Robertson, § 2.2.2).

Se extiende entonces el modelo clásico del ERFBP, al considerar como fuente de radiación, al menos uno de los cuerpos masivos del sistema. Más aún, haciendo uso del factor de radiación, β , las ecuaciones de movimiento del ERFBP, para una partícula de masa despreciable, normalizadas, y referidas a un marco de referencia rotante, reducen a (PAPADOURIS y PAPADAKIS, 2013):

la partícula, para algunos materiales cósmicos característicos, *e.g.*, grafito, hierro, basalto.

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = x - \sum_{i=1}^3 \frac{m_i (x - x_i)}{r_i^3} (1 - \beta_i), \\
\ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial y} = y - \sum_{i=1}^3 \frac{m_i (y - y_i)}{r_i^3} (1 - \beta_i),
\end{aligned} \tag{14}$$

con Γ , el potencial foto-gravitacional, definido como:

$$\Gamma(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{m_1}{r_1} (1 - \beta_1) + \frac{m_2}{r_2} (1 - \beta_2) + \frac{m_3}{r_3} (1 - \beta_3). \tag{15}$$

Así, la integral de Jacobi, para el caso foto-gravitacional del ERFBP, estará dada por:

$$C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 2\Gamma(x, y) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \tag{16}$$

En lo que sigue, se considerará como fuente de radiación la primaria m_1 , *i.e.*, $\beta \leftarrow \beta_1$, $\beta_2 = \beta_3 = 0$.

2.2.2. El problema foto-gravitacional: presión de radiación + efecto Poynting—Robertson + radiación corpuscular.

En 1903, Poynting establece que además de la influencia gravitacional, las pequeñas partículas en el espacio interplanetario, se ven también repelidas debido al campo de radiación electromagnético ejercido por los cuerpos celestes lumínicos. Poynting sugiere que un cuerpo infinitesimal en órbita solar, sufre una pérdida gradual de momentum angular y se precipita, en úl-

tima instancia, hacia el Sol. Si se asume que la partícula es esférica, y con una estructura completamente homogénea, ésta experimenta una fuerza (presión de radiación) en la dirección de propagación de la radiación, y contraria a la ejercida por la gravedad solar. Sería Robertson, quien primero daría un planteamiento relativista a dicho fenómeno, demostrando que la fuerza neta en la partícula, es entonces la suma de las fuerzas debidas al impulso ejercido por el haz incidente, y a la pérdida de densidad de momentum de la partícula en movimiento (ROBERTSON, 1937). Así, para una partícula de masa m , a términos de primer orden en $\dot{\mathbf{R}}_{\odot}/c$ (aproximación a la Mecánica Newtoniana), la fuerza total de presión de radiación se escribe como:

$$\mathbf{F}_T = F_r \left(\frac{\mathbf{R}_{\odot}}{R_{\odot}} - \frac{\dot{\mathbf{R}}_{\odot} \cdot \mathbf{R}_{\odot} \mathbf{R}_{\odot}}{c R_{\odot}^2} - \frac{\dot{\mathbf{R}}_{\odot}}{c} \right) ; \quad F_r = \frac{SAQ_{pr}}{c}, \quad (17)$$

con $\dot{\mathbf{R}}_{\odot}$ y \mathbf{R}_{\odot} , los vectores velocidad y posición de la partícula respecto de la fuente de radiación, respectivamente. El primer término en (17), expresa la magnitud de la fuerza de presión de radiación, en tanto los términos $\dot{\mathbf{R}}_{\odot}$ -dependientes, en conjunto denominados *efecto Poynting-Robertson* (P-R), representan, el corrimiento Doppler debido a la absorción y subsecuente re-emisión por parte de la radiación incidente; y el arrastre P-R. En cuanto a partículas esféricas concierne, el efecto P-R reduce gradualmente la excentricidad orbital y el semi-eje mayor debido a la fuerza de arrastre, conservando, sin embargo, la inclinación orbital. Este efecto resulta poco relevante a niveles galácticos (WYATT y WHIPPLE, 1950), siendo, no obstante, notable en pequeñas partículas en órbita de estrellas individuales.

Si se considera, además, el efecto de la radiación corpuscular, también denominada *fuerza de arrastre de viento solar*, las ecuaciones de movimiento para una partícula

de prueba, m , en un marco de referencia inercial, bajo la influencia de la fuerza gravitacional de tres cuerpos masivos (con m_1 siendo la fuente de radiación), la fuerza de presión de radiación, y las fuerzas de arrastre, pueden darse como (GUSTAFSON, 1994; LIOU, ZOOK y JACKSON, 1995):

$$m \ddot{\mathbf{R}} = - \sum_{i=1}^3 \frac{Gmm_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i + \frac{SAQ_{pr}}{c} \left[\frac{\mathbf{R}_1}{R_1} - (1 + sw) \left(\frac{\dot{\mathbf{R}}_1 \cdot \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1}{c R_1^2} + \frac{\dot{\mathbf{R}}_1}{c} \right) \right], \quad (18)$$

donde sw , expresa la razón entre las fuerzas de arrastre de viento solar y de presión de radiación.

Haciendo uso de (12), las ecuaciones de movimiento (18), normalizadas, y referidas a un marco de referencia rotante, se escriben como (§ 1):

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= x - \frac{m_1(x - x_1)}{r_1^3} (1 - \beta) - \frac{m_2(x - x_2)}{r_2^3} \\ &\quad - \frac{m_3(x - x_3)}{r_3^3} - (1 + sw) F_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= y - \frac{m_1(y - y_1)}{r_1^3} (1 - \beta) - \frac{m_2(y - y_2)}{r_2^3} \\ &\quad - \frac{m_3(y - y_3)}{r_3^3} - (1 + sw) F_y, \end{aligned} \quad (19)$$

o, de forma compacta,

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - (1 + sw) F_x, \quad (20)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Gamma}{\partial y} - (1 + sw) F_y, \quad (21)$$

con Γ , el potencial foto-gravitacional definido previamente ($\beta \leftarrow \beta_1, \beta_2 = \beta_3 = 0$) y, F_x y F_y , las componentes de las fuerzas de arrastre dadas por:

$$F_x = \frac{\beta m_1}{c r_1^2} \left[\frac{(x - x_1)}{r_1^2} [\dot{x}(x - x_1) + \dot{y}(y - y_1)] + \dot{x} - (y - y_1) \right],$$

$$F_y = \frac{\beta m_1}{c r_1^2} \left[\frac{(y - y_1)}{r_1^2} [\dot{x}(x - x_1) + \dot{y}(y - y_1)] + \dot{y} + (x - x_1) \right].$$

En ausencia de fuerzas disipativas ($F_x = F_y = sw = 0$), el sistema (19) reproduce el caso foto-gravitacional, en presencia únicamente de la fuerza de presión de radiación (sistema de ecuaciones (14)).

Tomando la adición de los productos, (20) $\times \dot{x}$, y (21) $\times \dot{y}$, se tiene entonces:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \dot{x}\frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial \Gamma}{\partial y} - (1 + sw)(\dot{x}F_x + \dot{y}F_y),$$

lo cual reduce a

$$\frac{dC}{dt} = 2 (1 + sw) (\dot{x}F_x + \dot{y}F_y), \quad (22)$$

con $C = 2\Gamma - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$, la constante de Jacobi para el caso foto-gravitacional. Más aún, puede demostrarse que el sistema (19) no posee cantidades conservadas:

Demostración. La ecuación (22) será integrable, sólo si existe una función F tal que, $dF/dt = \dot{x}F_x + \dot{y}F_y$. Esto es, $\partial F/\partial x = F_x(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, y $\partial F/\partial y = F_y(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Por tanto, $F = F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$, y sus derivadas, $\partial F/\partial \dot{x} = \partial F/\partial \dot{y} = 0$. No obstante, esto último es cierto, sí y sólo sí, $F = F(x, y)$, lo cual contradice la consecuencia previa en la que $F = F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Así pues, puede concluirse que no existe una constante de movimiento debido a la existencia de fuerzas disipativas en el sistema.

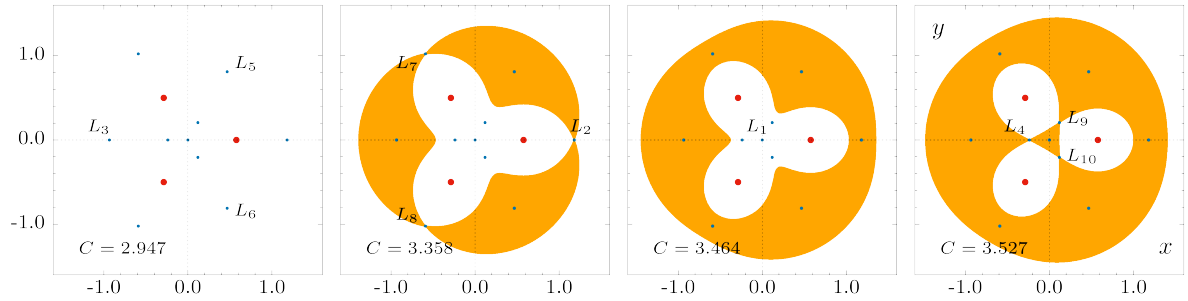
□

3. PUNTOS DE LIBRACIÓN Y ESTABILIDAD

En este apartado se presenta el estudio de los puntos de equilibrio y estabilidad, llevado a cabo para los casos considerados del problema foto-gravitacional de cuatro cuerpos. Los puntos de equilibrio, también llamados *de libración*, corresponden a estados de equilibrio del sistema, en los cuales la partícula, con velocidad nula, permanece en reposo respecto de las primarias. La estabilidad y existencia de dichos puntos ha sido vastamente estudiada para diversas versiones y configuraciones del problema restringido de N cuerpos. Así, por ejemplo, es bien sabido que el problema restringido clásico de tres cuerpos admite cinco puntos de libración: tres colineales (inestables), y dos equilaterales (estables) (SZEBEHELY, 1967). En la configuración de Lagrange del problema restringido de cuatro cuerpos, la cantidad de puntos, así como su estabilidad, dependen de los valores particulares dados a las masas de las primarias. (BALTAGIANNIS y PAPADAKIS, 2011).

Expuestos los puntos de libración y su estabilidad, se presentan las curvas de velocidad cero (CVC) para el caso foto-gravitacional, en presencia sólo de la fuerza de presión de radiación (la presencia de términos disipativos genera una dependencia temporal en las CVC, ocasionando así, una variación en las regiones permitidas). Las CVC, corresponden a puntos sobre el plano $x-y$ en los cuales la energía cinética de la partícula, y por tanto, su velocidad, son completamente nulas. Así, éstas definen la frontera que separa la región permitida, o de posible movimiento, de la zona de exclusión, restringiendo la dinámica de la partícula, a la región $C \leq 2\Gamma$ (Fig. 2).

Figura 2. Regiones prohibidas (color naranja) del ERFBP, para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, y para diferentes valores de la constante Jacobiana, C . Los puntos en rojo y azul representan, la posición de las primarias y los puntos fijos, respectivamente.



Se determinan y presentan también las cuencas de atracción para los diferentes atractores (puntos de equilibrio), y para algunos valores de β . Las cuencas, o dominios de atracción, se definen como el conjunto de puntos iniciales para los cuales, la implementación del método iterativo de Newton–Raphson, deriva en una posición de equilibrio. Se describe el proceso para la obtención de dichos dominios, exaltando su dependencia con el factor de radiación. Los resultados, en algunos casos estructuras de tipo fractal, permiten determinar de manera eficaz valores iniciales que conducen a zonas de equilibrio particulares.

En lo que sigue, se determinará cómo, además de las tres posibles configuraciones de masas para el ERFBP ($m_1 = m_2 = m_3$, $m_1 \neq m_2 = m_3$, $m_1 \neq m_2 \neq m_3$ (BALTAGIANNIS y PAPADAKIS, 2011)), el factor de radiación, β , altera, aún más, la posición y estabilidad de los puntos de libración del ERFBP foto–gravitacional. Para ello, se derivarán primero algunas expresiones generales.

Partiendo del sistema (19), se determinan los puntos de equilibrio al imponer la condición: $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$. Esto es:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= x - \frac{m_1 (x - x_1)}{r_1^3} (1 - \beta) - \frac{m_2 (x - x_2)}{r_2^3} - \frac{m_3 (x - x_3)}{r_3^3} \\
&\quad + \alpha (1 + sw) \frac{\beta m_1 (y - y_1)}{c r_1^2} = 0, \\
g(x, y) &= y - \frac{m_1 (y - y_1)}{r_1^3} (1 - \beta) - \frac{m_2 (y - y_2)}{r_2^3} - \frac{m_3 (y - y_3)}{r_3^3} \\
&\quad - \alpha (1 + sw) \frac{\beta m_1 (x - x_1)}{c r_1^2} = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

En ausencia de fuerzas disipativas, el sistema de ecuaciones (19) reproduce el caso foto-gravitacional en presencia únicamente de la fuerza de presión de radiación. En lo que sigue, $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, hará referencia a los casos *foto-gravitacional: presión de radiación*, y *foto-gravitacional: presión de radiación + efecto P-R + radiación corpuscular*, respectivamente. El sistema resultante se resuelve entonces, haciendo uso del método iterativo multivariable de Newton-Raphson:

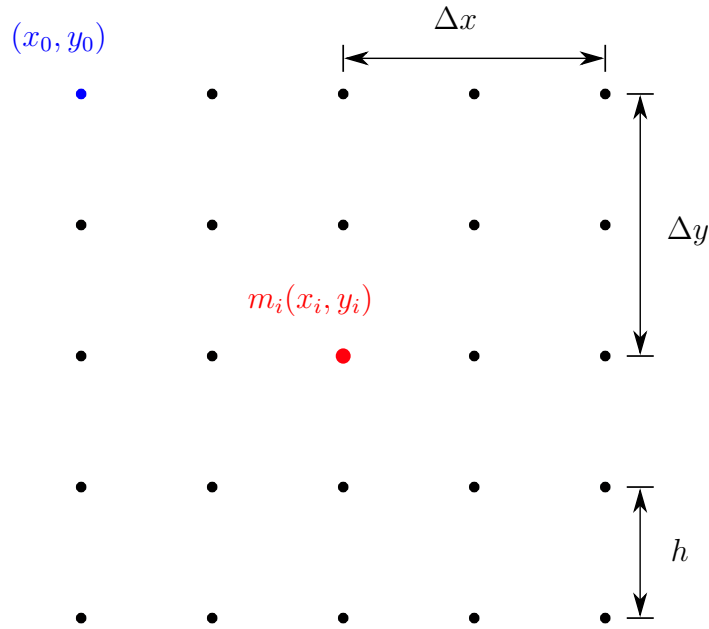
$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - [\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)]^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{x}_n), \tag{24}$$

con $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, la matriz Jacobiana, y $\mathbf{G}(\mathbf{x})$, el vector de funciones, definidos como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}.$$

Expandiendo (24), se tiene:

Figura 3. Representación esquemática de la malla numérica para la obtención de los puntos de equilibrio. El par coordenado (x_0, y_0) , representa la estimación inicial necesaria para dar inicio al proceso iterativo.



$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{|\mathbf{J}_n|} \left[f(x_n, y_n) \frac{\partial g(x_n, y_n)}{\partial y} - g(x_n, y_n) \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y} \right], \\
 y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{|\mathbf{J}_n|} \left[f(x_n, y_n) \frac{\partial g(x_n, y_n)}{\partial x} - g(x_n, y_n) \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} \right], \quad (25)
 \end{aligned}$$

con,

$$|\mathbf{J}_n| = \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} \frac{\partial g(x_n, y_n)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y} \frac{\partial g(x_n, y_n)}{\partial x},$$

y x_n , y y_n , las correspondientes estimaciones para x y y . La totalidad de soluciones (puntos de equilibrio), se obtiene definiendo una malla numérica alrededor de cada primaria, m_i , en los intervalos, $x_0 \in [x_i - \Delta x, x_i + \Delta x]$, $y_0 \in [y_i - \Delta y, y_i + \Delta y]$ (ver Fig. 3), y tomando como estimación inicial, cada uno de los diferentes puntos inmersos en ellas. Así, con $\Delta x = \Delta y = 5 \times 10^{-6}$, y para un paso $h = 1 \times 10^{-6}$, cada malla numérica estará compuesta de 121 condiciones iniciales, *i.e.*, 363 posibles raíces; de las cuales, sólo aquellas soluciones únicas serán consideradas. El proceso iterativo se detendrá y se tomará como raíz la solución estimada, si ésta converge a una tolerancia, ε , previamente definida ($\varepsilon = 10^{-12}$), *i.e.*, $|x_{n+1} - x_n| \leq 10^{-12}$ y $|y_{n+1} - y_n| \leq 10^{-12}$; de lo contrario, el proceso iterativo será finalizado completadas 5×10^4 iteraciones.

En cuanto a la estabilidad de los puntos de libración se refiere, es bien sabido que puede extraerse información detallada acerca de la dinámica de un sistema, al linealizar las ecuaciones de movimiento alrededor de un punto equilibrio, (x^*, y^*) (STROGATZ, 2018). Para ello, es necesario expresar (19), como un sistema de primer orden.

Introduciendo entonces el cambio de variables,

$$\begin{aligned} \xi &= x, & \zeta &= \dot{\xi} = \dot{x}, & \dot{\zeta} &= \ddot{\xi} = \ddot{x}, \\ \eta &= y, & \nu &= \dot{\eta} = \dot{y}, & \dot{\nu} &= \ddot{\eta} = \ddot{y}, \end{aligned}$$

se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \zeta \\
\dot{\eta} &= \nu \\
\dot{\zeta} &= \xi + 2\nu - \frac{m_1(\xi - x_1)}{\rho_1^3} (1 - \beta) - \sum_{i=2}^3 \frac{m_i(\xi - x_i)}{\rho_i^3} - \alpha(1 + sw) F_\xi \\
\dot{\nu} &= \eta - 2\zeta - \frac{m_1(\eta - x_1)}{\rho_1^3} (1 - \beta) - \sum_{i=2}^3 \frac{m_i(\eta - x_i)}{\rho_i^3} - \alpha(1 + sw) F_\eta
\end{aligned} \tag{26}$$

con,

$$\begin{aligned}
F_\xi &= \frac{\beta m_1}{c \rho_1^2} \left[\frac{(\xi - x_1)}{\rho_1^2} [\zeta(\xi - x_1) + \nu(\eta - y_1)] + \zeta - (\eta - y_1) \right], \\
F_\eta &= \frac{\beta m_1}{c \rho_1^2} \left[\frac{(\eta - x_1)}{\rho_1^2} [\zeta(\xi - x_1) + \nu(\eta - y_1)] + \nu + (\xi - x_1) \right],
\end{aligned}$$

y,

$$\rho_i = [(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2]^{1/2}; \quad i = 1, 2, 3.$$

Sean ahora, $u = x - x^*$ y $v = y - y^*$, las componentes de un pequeño desplazamiento dado al punto de equilibrio. La evolución de dicha perturbación alrededor de éste (y su estabilidad), puede determinarse a partir del sistema variacional,

$$\dot{\mathbb{X}} = \mathbb{A}\mathbb{X}, \tag{27}$$

con \mathbb{X} , el vector de estado de la partícula respecto del punto de equilibrio, y \mathbb{A} , la ma-

triz Jacobiana evaluada en (x^*, y^*) . Las soluciones para \mathbb{X} pueden escribirse como $\mathbb{X}(t) = e^{\lambda t} \mathbb{V}$, con \mathbb{V} y λ , los correspondientes eigenvectores y eigenvalores a ser determinados. Puesto que $\mathbb{X}(t)$, es en sí, una combinación de términos exponenciales oscilatorios ($e^{\lambda t} = e^{at} \cos bt + ie^{at} \sin bt$), $a = \mathbb{R}(\lambda) < 0$ y $a > 0$, representan entonces, un decaimiento y un crecimiento exponencial oscilatorio de la perturbación, respectivamente. En general, los eigenvalores de la matriz,

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \partial \dot{\xi} / \partial \xi & \partial \dot{\xi} / \partial \eta & \partial \dot{\xi} / \partial \zeta & \partial \dot{\xi} / \partial \nu \\ \partial \dot{\eta} / \partial \xi & \partial \dot{\eta} / \partial \eta & \partial \dot{\eta} / \partial \zeta & \partial \dot{\eta} / \partial \nu \\ \partial \dot{\zeta} / \partial \xi & \partial \dot{\zeta} / \partial \eta & \partial \dot{\zeta} / \partial \zeta & \partial \dot{\zeta} / \partial \nu \\ \partial \dot{\nu} / \partial \xi & \partial \dot{\nu} / \partial \eta & \partial \dot{\nu} / \partial \zeta & \partial \dot{\nu} / \partial \nu \end{pmatrix} \Big|_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & A_{13}^* & A_{14}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* & A_{23}^* & A_{24}^* \\ A_{31}^* & A_{32}^* & A_{33}^* & A_{34}^* \\ A_{41}^* & A_{42}^* & A_{43}^* & A_{44}^* \end{pmatrix},$$

están determinados por la ecuación característica, $\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) = 0$, cuyas raíces decretan la estabilidad del punto de equilibrio. Así, éste sólo será estable, si todas las raíces del polinomio característico son puramente imaginarias, o complejas con $a = \mathbb{R}(\lambda) < 0$.

3.1. EI ERFBP FOTO–GRAVITACIONAL: $\alpha = 0$

Previo al análisis de los resultados numéricos para los diferentes puntos de libración y su estabilidad, se presentan primero algunas expresiones generales necesarias, en cuanto a estabilidad concierne, en términos de las masas primarias, para el caso $\alpha = 0$.

Se tiene entonces el polinomio característico,

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 - \lambda & 0 & 1 \\ A_{31}^* & A_{32}^* & 0 - \lambda & 2 \\ A_{41}^* & A_{42}^* & -2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^4 + \lambda^2 (4 - A_{42}^* - A_{31}^*) + \lambda (2 A_{32}^* - 2 A_{41}^*) + (A_{31}^* A_{42}^* - A_{32}^* A_{41}^*) = 0, \quad (28)$$

con:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \xi} = 0, & A_{12} &= \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \eta} = 0, & A_{13} &= \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \zeta} = 1, & A_{14} &= \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \nu} = 0, \\ A_{21} &= \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \xi} = 0, & A_{22} &= \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} = 0, & A_{23} &= \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \zeta} = 0, & A_{24} &= \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \nu} = 1, \\ A_{31} &= \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \xi} = 1 + \frac{m_1 [2(\xi - x_1)^2 - (\eta - y_1)^2] (1 - \beta)}{[(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2]^{5/2}} \\ &\quad + \sum_{i=2}^3 \frac{m_i [2(\xi - x_i)^2 - (\eta - y_i)^2]}{[(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2]^{5/2}}, \\ A_{32} &= \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \eta} = \frac{3 m_1 (\xi - x_1) (\eta - y_1) (1 - \beta)}{[(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2]^{5/2}} + \sum_{i=2}^3 \frac{3 m_i (\xi - x_i) (\eta - y_i)}{[(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2]^{5/2}}, \\ A_{33} &= \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} = 0, \\ A_{34} &= \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \nu} = 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{41} &= \frac{\partial \dot{\nu}}{\partial \xi} = \frac{3 m_1 (\xi - x_1) (\eta - y_1) (1 - \beta)}{[(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2]^{5/2}} + \sum_{i=2}^3 \frac{3 m_i (\xi - x_i) (\eta - y_i)}{[(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2]^{5/2}}, \\
A_{42} &= \frac{\partial \dot{\nu}}{\partial \eta} = 1 - \frac{m_1 [(\xi - x_1)^2 - 2(\eta - y_1)^2] (1 - \beta)}{[(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2]^{5/2}} \\
&\quad - \sum_{i=2}^3 \frac{m_i [(\xi - x_i)^2 - 2(\eta - y_i)^2]}{[(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2]^{5/2}}, \\
A_{43} &= \frac{\partial \dot{\nu}}{\partial \zeta} = -2, \\
A_{44} &= \frac{\partial \dot{\nu}}{\partial \nu} = 0.
\end{aligned}$$

Al igual que antes, las raíces de dicho polinomio pueden determinarse haciendo uso del método iterativo multivariable de Newton–Raphson (ver Ec. (24)). Con $\lambda = a + ib$, (28) transforma en:

$$\begin{aligned}
0 &= (a + ib)^4 + (a + ib)^2 (4 - A_{31}^* - A_{42}^*) + (a + ib) (2 A_{32}^* - 2 A_{41}^*) \\
&\quad + (A_{31}^* A_{42}^* - A_{32}^* A_{41}^*). \tag{29}
\end{aligned}$$

Separando la parte real de la parte imaginaria, el sistema a resolver estará entonces determinado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
f(a, b) &= a^4 + b^4 - 6 a^2 b^2 + (a^2 - b^2) (4 - A_{31}^* - A_{42}^*) \\
&\quad + a (2 A_{32}^* - 2 A_{41}^*) + (A_{31}^* A_{42}^* - A_{32}^* A_{41}^*) = 0, \\
g(a, b) &= 4 (a^3 b - a b^3) + 2 ab (4 - A_{31}^* - A_{42}^*) \\
&\quad + b (2 A_{32}^* - 2 A_{41}^*) = 0, \tag{30}
\end{aligned}$$

cuyas soluciones, $\lambda_{1,2,3,4} = a \pm ib$, determinan la estabilidad lineal del punto de equilibrio.

3.1.1. Caso 1: $m_1 = m_2 = m_3$. Se empezará por considerar el caso en el cual los tres cuerpos masivos ostentan el mismo valor de masa, *i.e.*, $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$. De (7), las coordenadas de las primarias, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) , son respectivamente,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \quad \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right), \quad \text{y} \quad \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right).$$

La Figura 4, ilustra la evolución de los puntos de libración para $\beta \in [0, 1]$. A lo largo de todo el capítulo, se hará uso de una paleta de color para representar la variación del factor de radiación, β ; en tanto los puntos de color rojo permitirán representar la posición de las primarias. De la figura, se observa cómo a medida que la fuerza de presión de radiación incrementa, los puntos de libración L_1, L_2, L_5 y L_6 , tienden a m_1 gradualmente, desapareciendo por completo para $\beta \approx 0.999$; L_9 y L_{10} , se desplazan de su posición inicial alcanzando casi el mismo punto sobre el eje x , no sin antes desaparecer para $\beta \approx 0.690$; en tanto, L_3, L_4, L_7 y L_8 , apenas exhiben pequeños desplazamientos, conservando no obstante, su existencia, aún para $\beta = 1$.

En cuanto a estabilidad concierne, para el caso $\beta = 0$, y acorde con Baltagiannis & Papadakis (BALTAGIANNIS y PAPADAKIS, 2011), se reitera el carácter inestable de los puntos de libración, *i.e.*, todos los puntos de equilibrio son inestables. Más aún, para $\beta > 0$, el tipo de estabilidad de los puntos existentes permanece invariante. Esto es, los correspondientes eigenvalores, $\lambda_{1,2,3,4}$, son de la forma: (i)

Tabla 1. Existencia de los puntos de libración, en función del factor de radiación, β , para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$.

INTERVALO	PTOS. LIBRACIÓN	ESTAB.
$\beta \in [0.000, 0.690]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$	—
$\beta \in [0.691, 0.999]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8}$	—
$\beta = 1.000$	$L_{3,4,7,8}$	—

$\lambda_{1,2,3,4} = \pm a \pm ib$, para L_1, L_3, L_5 y L_6 ; y (ii) $\lambda_{1,2} = \pm ib$ y $\lambda_{3,4} = \pm a$, para los puntos de libración L_2, L_4, L_7, L_8, L_9 y L_{10} . Así, puede concluirse que para el caso $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, independiente del valor dado al factor de radiación, β , todos los puntos de libración del ERFBP foto-gravitacional, con $\alpha = 0$, serán inestables (véase Tab. 1 para información detallada acerca de la existencia y estabilidad de los diferentes puntos de libración).

Figura 4. Evolución paramétrica de los puntos de libración para $\beta \in [0, 1]$.

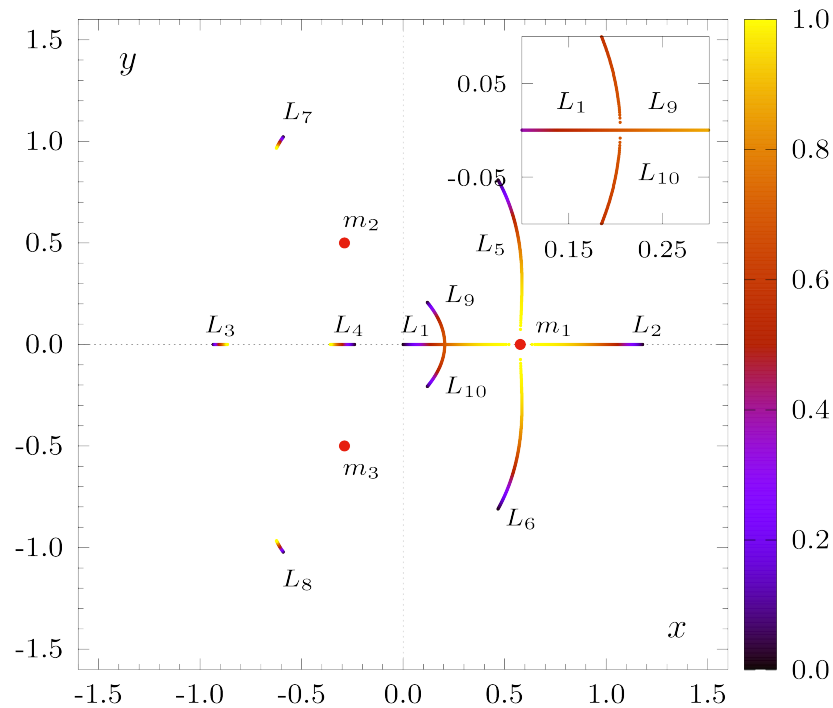
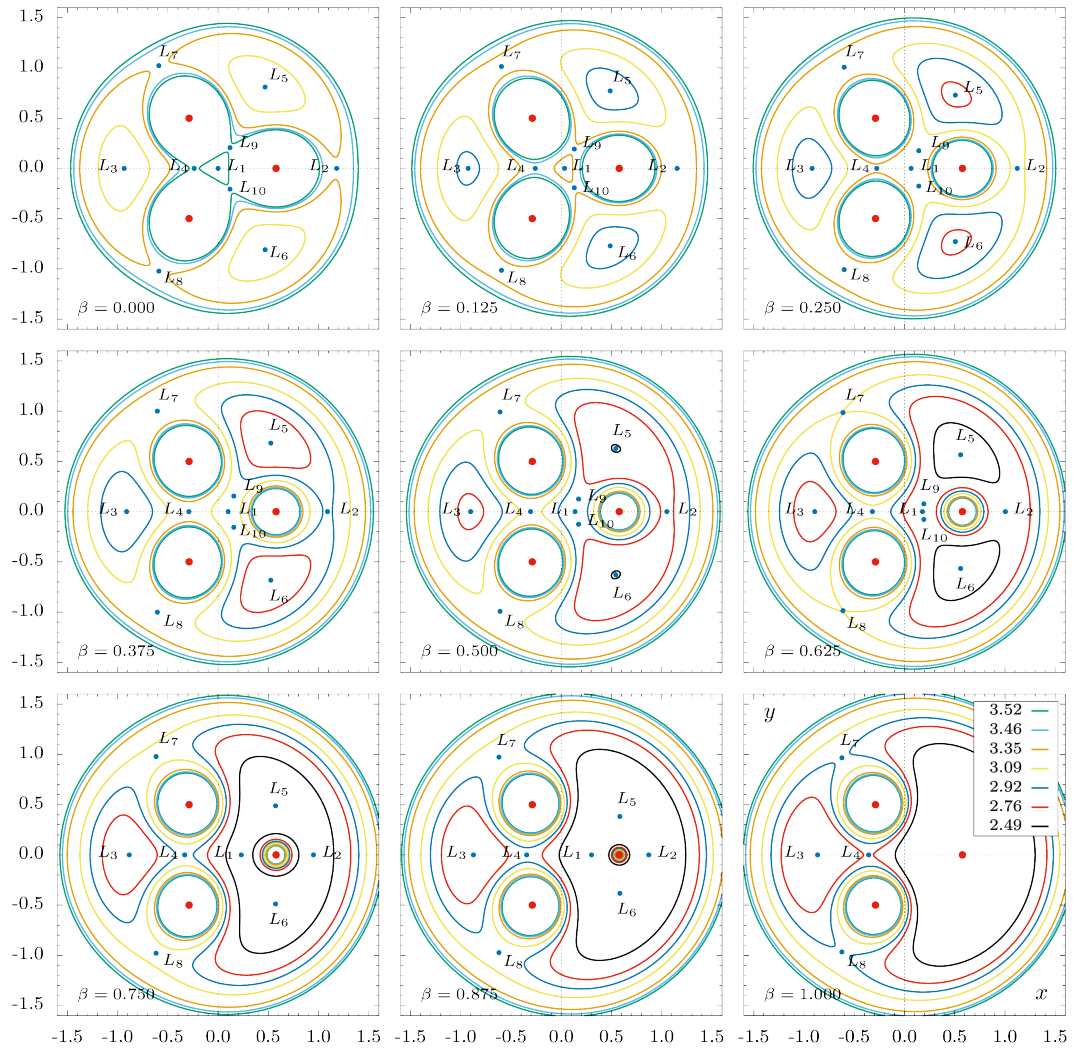


Figura 5. Evolución de las curvas de velocidad cero en función del factor de radiación β , para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, y para algunos valores característicos de la constante Jacobiana, C .



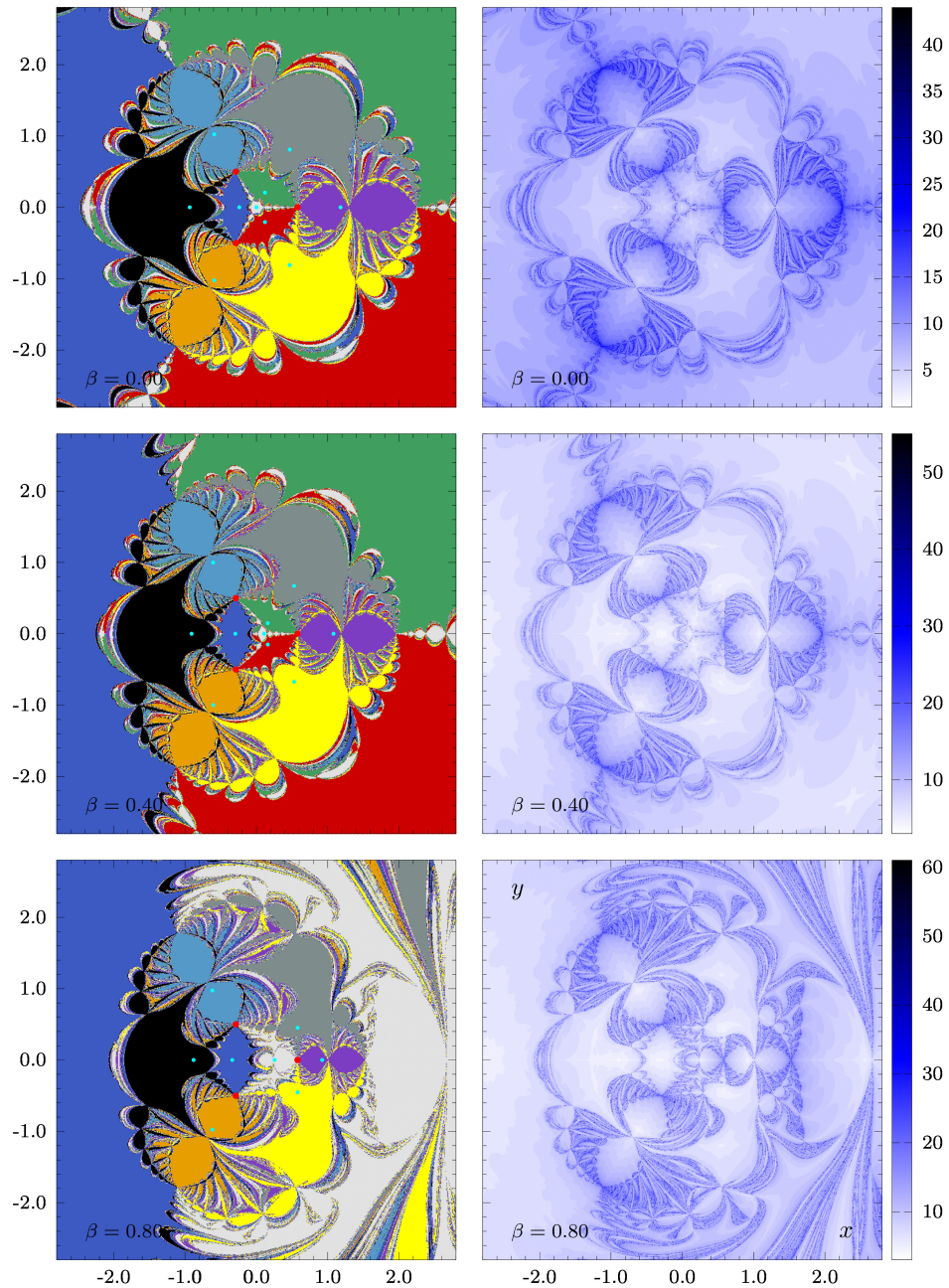
La Figura 5 presenta la evolución paramétrica de las CVC con el factor de radiación, β , para diferentes valores de la constante Jacobiana, C . De los diferentes paneles, puede observarse cómo las regiones de posible movimiento se ven modificadas de manera substancial para grandes valores de β . Así, por ejemplo, para $C = 2.92$ (contorno azul oscuro), y $\beta = 0.125$, la región prohibida está compuesta de tres pequeñas islas emplazadas sobre los puntos de libración L_3 , L_5 y L_6 . La partícula

de prueba será entonces libre de moverse alrededor de las primarias, siendo posible, cualquier escape de la fuerza gravitacional ejercida por éstas. Empero, el aumento en la fuerza de presión de radiación, supone un aumento también en el tamaño de cada isla, facultando primero la conexión entre regiones cercanas a la fuente de radiación, m_1 (panel para $\beta = 0.375$), hasta aislarla completamente.

Una partícula cuya evolución dinámica se dé a partir de un conjunto de condiciones iniciales inmersas en la región limitada por la zona de exclusión, describirá órbitas acotadas. Para grandes valores de β , la región permitida alrededor de m_1 , reduce su tamaño cada vez más, en tanto las zonas de exclusión, una vez separadas, se hacen una, moldeando primero una conexión entre m_2 y m_3 , para finalmente cerrarse sobre éstas. Tal efecto se sustenta al considerar que $\beta = 1$, implica una fuerza de presión de radiación equiparable a la fuerza gravitacional ejercida por la fuente, siendo entonces posible, la eyección de partículas lejos de ésta. Comportamientos similares se observan para diversos valores de C .

El término *cuenca de atracción* de un punto de equilibrio, hace referencia al conjunto de puntos iniciales que convergen a un atractor, o punto de equilibrio, bajo sucesivas iteraciones de algún mapeo. El procedimiento numérico implementado para la obtención de tales cuencas, es el descrito en (25) para el método de Newton–Raphson. Si el método iterativo, para una estimación inicial (x, y) , converge a una raíz específica del sistema algebraico (23), se considera entonces que tal estimación es miembro de la cuenca de dicho atractor (a cada cuenca se asigna un color). El método de Newton–Raphson se detendrá, alcanzada cierta tolerancia ($\epsilon = 1 \times 10^{-12}$), o, después de un número definido de iteraciones (5×10^4), en caso de diverger. Las estimaciones iniciales se definen inmersas en la región $x \in [-2.8, 2.8]$ y $y \in [-2.8, 2.8]$, para un paso $h = 8 \times 10^{-3}$.

Figura 6. A izquierda: cuencas de atracción de Newton–Raphson, para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$. El código de color asignado a los diferentes atractores es el siguiente: $L_1 \leftarrow$ gris claro, $L_2 \leftarrow$ púrpura, $L_3 \leftarrow$ negro, $L_4 \leftarrow$ azul oscuro, $L_5 \leftarrow$ gris oscuro, $L_6 \leftarrow$ amarillo, $L_7 \leftarrow$ azul claro, $L_8 \leftarrow$ naranja, $L_9 \leftarrow$ verde, y $L_{10} \leftarrow$ rojo. A derecha: Convergencia del método. La paleta representa el número de iteraciones necesarias para la convergencia del método.



En la Figura 6, paneles a izquierda, se exponen las cuencas de convergencia de los puntos de equilibrio, para tres valores característicos del factor de radiación β . De ellos, puede observarse cómo a medida que la fuerza de presión de radiación aumenta, el número total de cuencas, y por ende, de puntos de equilibrio, se reduce, rompiéndose, además, la simetría de forma $(2\pi/3)$, observada para el caso $\beta = 0$. Más aún, la complejidad de las cuencas incrementa sustancialmente, alterando su configuración inicial (nótese que la estructura característica de los atractores L_3 , L_7 y L_8 , parece no alterarse con la variación de β). Las regiones límite, *e.g.*, las regiones que definen la transición entre atractores, exhiben comportamientos caóticos. Esto es, cualquier estimación inicial del método iterativo, inmersa en ellas, será altamente sensible a pequeñas alteraciones, dificultando así, la predicción del estado final, *i.e.*, se requerirá un mayor número de iteraciones para alcanzar la convergencia establecida. Evidencia de ello, se observa en los paneles a derecha de la Figura 6 (el número de iteraciones necesarias para la convergencia del método se exhibe en la paleta).

3.1.2. Caso 2: $m_1 \neq m_2 = m_3$. Considérese el caso, $m_2 = m_3 = \mu$, con $\mu \in (0, 0.5)$. En consecuencia, la masa de la primaria m_1 , estará dada por $m_1 = 1 - 2\mu$, acorde con la condición $m_1 + m_2 + m_3 = 1$ (MOULTON, 1900); en tanto las coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) y (x_3, y_3) , en términos de μ , se escriben como (Ec. (7)):

$$\left(\sqrt{3}\mu, 0\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2\mu - 1), \frac{1}{2}\right), \quad \text{y} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2\mu - 1), -\frac{1}{2}\right).$$

En tal caso, la existencia, ubicación y estabilidad de los puntos de equilibrio, estarán determinadas en función de los parámetros β y μ . La Figura 7, expone la evolución

de los puntos de libración, para un factor de radiación, $\beta \in [0, 1]$. Así mismo, cada panel representa una configuración diferente de masas para las primarias. En los primeros dos paneles ($m_1 = 0.9$ y $m_1 = 0.8$), se observa la no-existencia de los puntos colineales L_3 y L_4 . Para $0.2 \leq m_1 \leq 0.7$, diez puntos de libración se hacen presentes, en tanto dos de ellos, L_9 y L_{10} , desaparecen para $m_1 = 0.1$. En general, para grandes valores de β , los puntos L_9 y L_{10} se desplazan hacia el eje x , llegando casi a converger sobre éste. L_3, L_4, L_7 y L_8 , exhiben pequeños desplazamientos respecto de su posición inicial, en tanto los puntos de libración, L_1, L_2, L_5 y L_6 , son atraídos hacia la fuente de radiación (éstos desaparecen para $\beta \approx 1$). La Tabla 2 presenta el número total de puntos de equilibrio, en términos de μ y β . De ella, se extrae, principalmente, que para valores grandes de β , el número total de puntos de libración tiende a verse reducido.

Para el análisis de estabilidad lineal, se empezará por considerar el caso $\beta = 0$. Los resultados se resumen como sigue: para $\mu \in (0, 0.0027]$, L_1, L_5 y L_6 , son estables; para $\mu \in [0.0028, 0.0188]$, L_5 y L_6 , son estables; y para $\mu > 0.0188$, todos los puntos son inestables (tales resultados, acorde con Baltagiannis & Papadakis (BALTAGIANNIS y PAPANAKIS, 2011)). La Tabla 3, contiene una descripción detallada de la estabilidad de los puntos de libración, para $\beta > 0$. Variando β en pasos $\Delta\beta = 1 \times 10^{-2}$, se obtienen los rangos de μ , para los cuales L_1, L_5 y L_6 , son estables. Así, puede concluirse entonces que los restantes puntos de equilibrio serán siempre inestables, independiente de los valores asignados a β y μ .

Por otra parte, la Figura 8 presenta las CVC para diferentes valores de la constante Jacobiana, C . En general, la tendencia es similar a la observada en las CVC de la Figura 5. Así, por ejemplo, para el caso $C = 2.64$, y para pequeños valores del factor

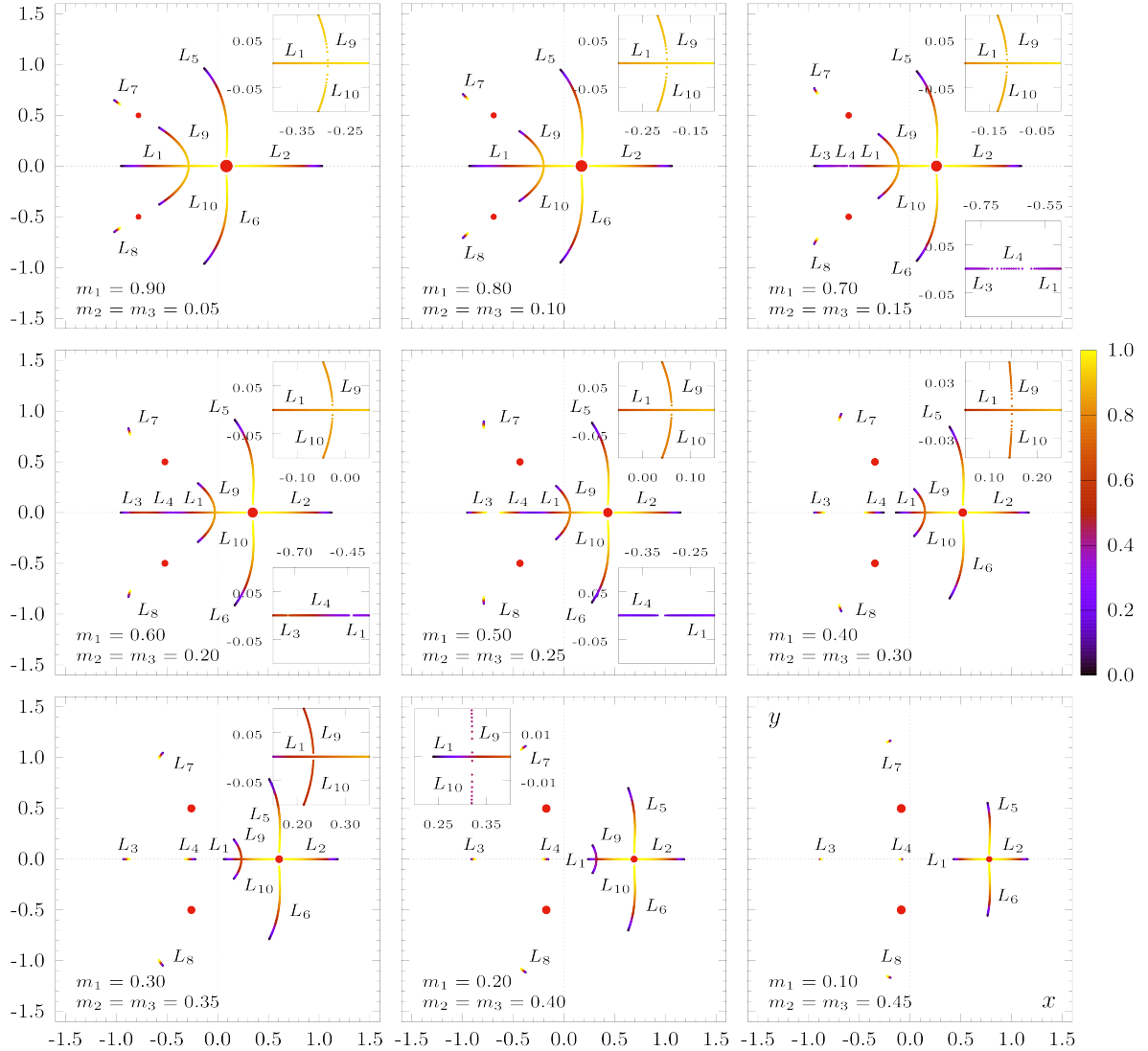
Tabla 2. Existencia de los puntos de liberación en función del factor de radiación β , para diferentes valores de $\mu = m_2 = m_3$.

μ	INTERVALO	PTOS. LIBERACIÓN
0.05	$\beta \in [0.000, 0.934]$	$L_{1,2,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.935, 0.999]$	$L_{1,2,5,6,7,8}$
	$\beta = 1.000$	$L_{7,8}$
0.10	$\beta \in [0.000, 0.916]$	$L_{1,2,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.917, 0.999]$	$L_{1,2,5,6,7,8}$
	$\beta = 1.000$	$L_{7,8}$
0.15	$\beta \in [0.000, 0.350]$	$L_{2,3,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.351, 0.360]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.361, 0.893]$	$L_{1,2,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.894, 0.999]$	$L_{1,2,5,6,7,8}$
	$\beta = 1.000$	$L_{7,8}$
0.20	$\beta \in [0.000, 0.293]$	$L_{2,3,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.294, 0.608]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.609, 0.862]$	$L_{1,2,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.863, 0.999]$	$L_{1,2,5,6,7,8}$
	$\beta = 1.000$	$L_{7,8}$
0.25	$\beta \in [0.000, 0.160]$	$L_{2,3,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.161, 0.819]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.820, 0.999]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8}$
	$\beta = 1.000$	$L_{3,4,7,8}$
0.30	$\beta \in [0.000, 0.755]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.756, 0.999]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8}$
	$\beta = 1.000$	$L_{3,4,7,8}$
0.35	$\beta \in [0.000, 0.647]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.648, 0.999]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8}$
	$\beta = 1.000$	$L_{3,4,7,8}$
0.40	$\beta \in [0.000, 0.433]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.434, 0.999]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8}$
	$\beta = 1.000$	$L_{3,4,7,8}$
0.45	$\beta \in [0.000, 0.999]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8}$
	$\beta = 1.000$	$L_{3,4,7,8}$

de radiación β , e.g., $\beta < 0.25$, la partícula de prueba es libre de moverse a través de toda la configuración espacial. No obstante, a medida que el valor de β incrementa, los puntos de libración L_5 y L_6 se ven reemplazados por pequeñas islas emplazadas sobre éstos. Tales islas aumentan en tamaño, llegando primero a rodear por completo a la fuente de radiación, para finalmente cerrarse sobre las primarias m_2 y m_3 . Las CVC contenidas en la Figura 8, corresponden a $\mu = m_2 = m_3 = 0.25$. Comportamientos similares se obtienen para los diferentes casos expuestos de μ .

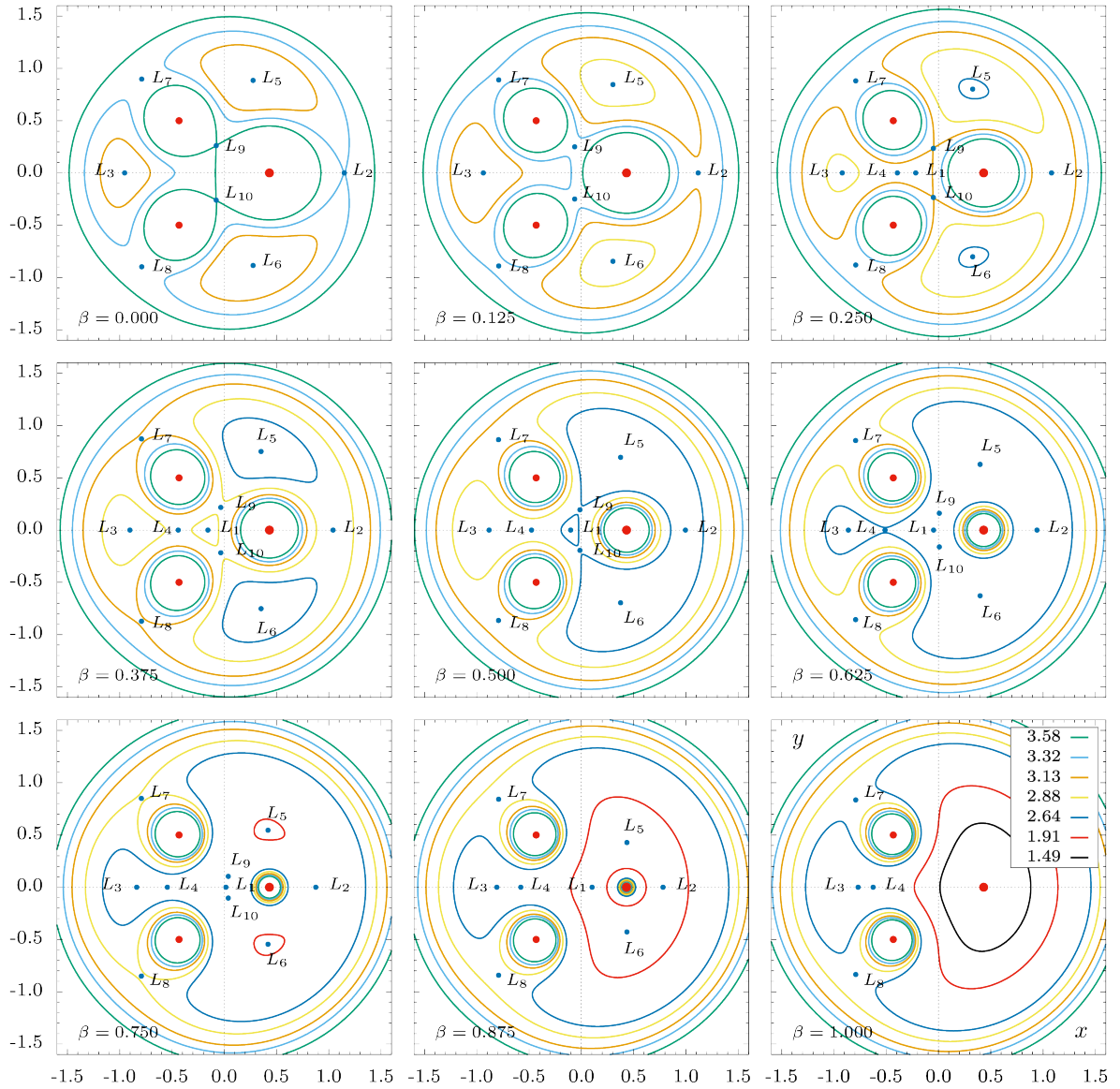
En la Figura 9, se exponen las cuencas de atracción para el caso $\mu = m_2 = m_3 = 0.25$, y para tres valores característicos del factor de radiación (los valores $\beta = 0$, $\beta = 0.4$, y $\beta = 0.85$, se toman como representativos, debido a los cambios que inducen en la dinámica del sistema). El código de colores, es el mismo descrito para el caso $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$. De la Figura 9, se observan cuencas con patrones simétricos en forma (simetría de reflexión respecto del eje x), mas no en color. Para $\beta = 0$, se advierten las peculiares cuencas de estructura arácnida, además de la visible región caótica presente a izquierda del espacio de configuración. Para $\beta = 0.4$, tal región desaparece por completo, dando paso a un nuevo atractor (estrictamente, L_4 emerge para $\beta = 0.161$. Véase Tab. 2). La extinción de los atractores L_9 y L_{10} , establece el dominio, en extensión, de los atractores L_1 y L_4 , llegando éstos, a suplir gran parte de la región antes ocupada por los primeros (panel inferior izquierdo). Tal comportamiento sugiere un aumento gradual, con el incremento de β , del área correspondiente a dichas cuencas. Finalmente, para $\beta = 1$, se presume un dominio del espacio casi total por parte de L_4 , esto, debido a la no existencia de los puntos L_1 , L_2 , L_5 , L_6 , L_9 y L_{10} (nótese además el nímio cambio en la estructura característica de los atractores L_3 , L_7 y L_8).

Figura 7. Evolución paramétrica de los puntos de equilibrio con $\beta \in [0, 1]$, para diferentes valores de $\mu = m_2 = m_3$. Los puntos de color rojo representan la ubicación de las primarias, en tanto las inserciones permiten el acercamiento a la evolución de algunos puntos.



3.1.3. Caso 3: $m_1 \neq m_2 \neq m_3$. Como último escenario, se considera entonces la configuración Lagrangiana, Sol–Jupiter–Asteroide —de las muchas posibilidades para $m_1 \neq m_2 \neq m_3$, se explora el sistema Sol–Jupiter–Asteroide, debido a su relevancia astrofísica.

Figura 8. Evolución de las curvas de velocidad cero con el factor de radiación β , para $\mu = m_2 = m_3 = 0.25$, y para algunos valores característicos de la constante Jacobiana, C .



En unidades normalizadas, las masas de las primarias están dadas por $m_1 = m_S = 0.999046321943$, $m_2 = m_J = 0.000953678050$, y $m_3 = m_A = 6.99996 \times 10^{-12}$, la masa

Figura 9. A izquierda: cuencas de atracción de Newton–Raphson, para $\mu = m_2 = m_3 = 0.25$. El código de color asignado a los diferentes atractores es el siguiente: $L_1 \leftarrow$ gris claro, $L_2 \leftarrow$ púrpura, $L_3 \leftarrow$ negro, $L_4 \leftarrow$ azul oscuro, $L_5 \leftarrow$ gris oscuro, $L_6 \leftarrow$ amarillo, $L_7 \leftarrow$ azul claro, $L_8 \leftarrow$ naranja, $L_9 \leftarrow$ verde, y $L_{10} \leftarrow$ rojo. A derecha: Convergencia del método. La paleta representa el número de iteraciones necesarias para la convergencia del método.

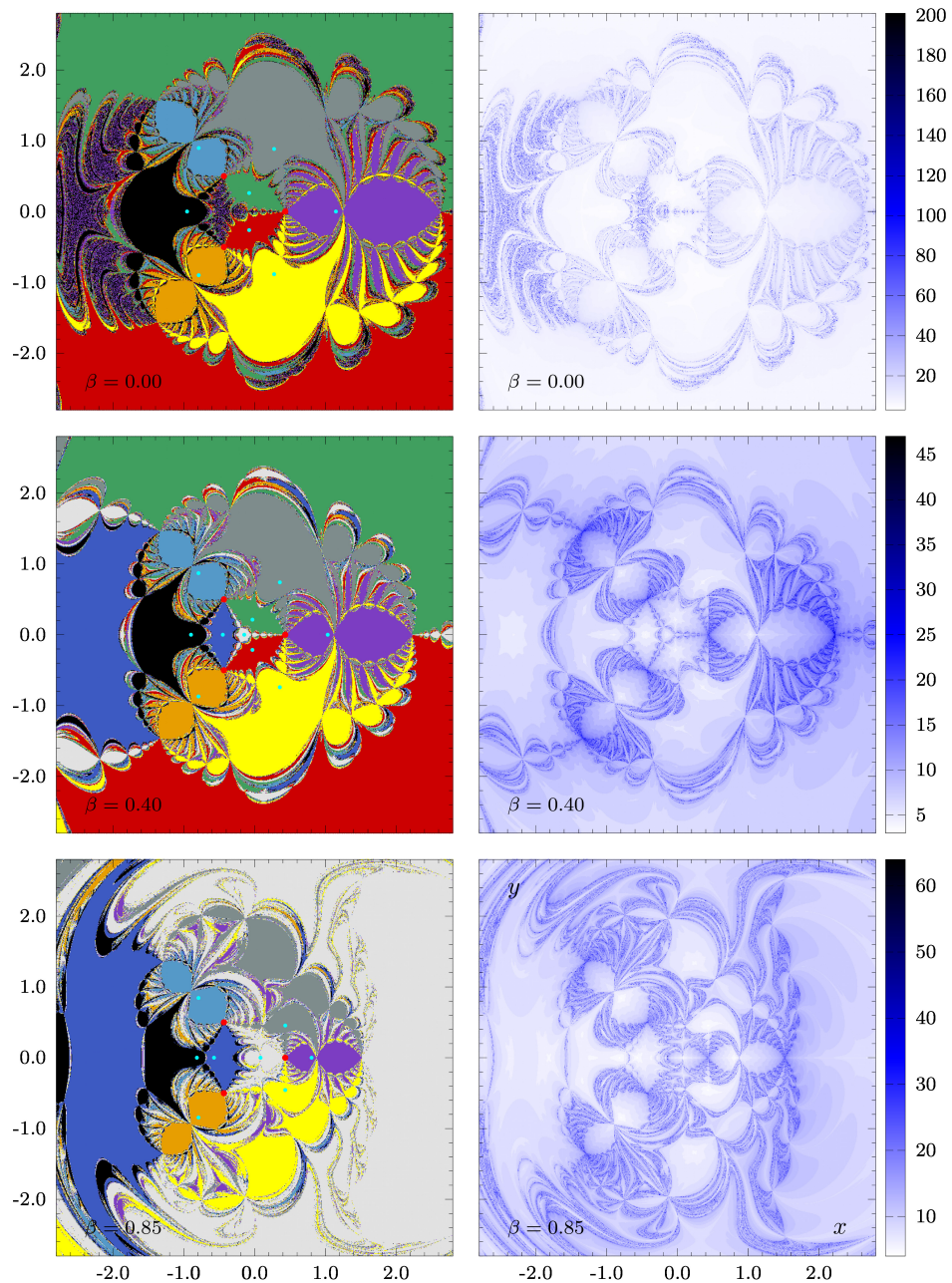


Tabla 3. Estabilidad de los puntos de equilibrio con la variación del factor de radiación β , para $\mu = m_2 = m_3$.

β INTERVALO	μ INTERVALO	ESTAB.
$\beta \in [0.00, 0.60]$	$\mu \in (0.000, 0.002]$ $\mu \in [0.003, 0.018]$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta \in [0.61, 0.70]$	$\mu \in (0.000, 0.003]$ $\mu \in [0.004, 0.018]$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta \in [0.71, 0.75]$	$\mu \in (0.000, 0.004]$ $\mu \in [0.005, 0.018]$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta \in [0.76, 0.79]$	$\mu \in (0.000, 0.005]$ $\mu \in [0.006, 0.018]$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta = 0.80$	$\mu \in (0.000, 0.006]$ $\mu \in [0.007, 0.018]$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta = 0.81$	$\mu \in (0.000, 0.006]$ $\mu \in [0.007, 0.019]$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta \in [0.82, 0.83]$	$\mu \in (0.000, 0.007]$ $\mu \in [0.008, 0.019]$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta = 0.84$	$\mu \in (0.000, 0.008]$ $\mu \in [0.009, 0.019]$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta = 0.85$	$\mu \in (0.000, 0.009]$ $\mu \in [0.010, 0.019]$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta = 0.86$	$\mu \in (0.000, 0.010]$ $\mu \in [0.011, 0.019]$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta = 0.87$	$\mu \in (0.000, 0.011]$ $\mu \in [0.012, 0.019]$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta = 0.88$	$\mu \in (0.000, 0.013]$ $\mu \in [0.014, 0.019]$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta = 0.89$	$\mu \in (0.000, 0.015]$ $\mu \in [0.016, 0.019]$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta = 0.90$	$\mu \in (0.000, 0.018]$ $\mu = 0.019$	$L_{1,5,6}$ $L_{5,6}$
$\beta = 0.91$	$\mu \in (0.000, 0.020]$ $\mu \in [0.021, 0.023]$	$L_{1,5,6}$ L_1
$\beta = 0.92$	$\mu \in (0.000, 0.020]$ $\mu \in [0.021, 0.032]$	$L_{1,5,6}$ L_1
$\beta = 0.93$	$\mu \in (0.000, 0.020]$ $\mu \in [0.021, 0.062]$	$L_{1,5,6}$ L_1
$\beta = 0.94$	$\mu \in (0.000, 0.020]$ $\mu \in [0.021, 0.030]$	$L_{1,5,6}$ L_1
$\beta \in [0.95, 0.97]$	$\mu \in (0.000, 0.021]$	$L_{5,6}$
$\beta = 0.98$	$\mu \in (0.000, 0.022]$	$L_{5,6}$
$\beta = 0.99$	$\mu \in (0.000, 0.023]$	$L_{5,6}$

de 624 Hektor, un asteroide del grupo de los Troyanos (BALTAGIANNIS y PAPADAKIS, 2013). De (7), las coordenadas de las primarias serán:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &\approx (0.000953678, 0.000000), \\(x_2, y_2) &\approx (-0.999046, 6.3565 \times 10^{-9}), \\(x_3, y_3) &\approx (-0.499046, -0.866025).\end{aligned}$$

Debido a la masa del Troyano, pequeña en contraste con las masas de las primarias m_1 y m_2 , el sistema se asemeja a la configuración para el problema de tres cuerpos, *i.e.*, el baricentro del sistema, casi coincide con la posición de m_1 , en tanto m_2 , se sitúa próxima al eje x . No obstante, en ausencia de radiación ($\beta = 0$), el sistema Sol–Jupiter–Troyano admite la existencia de tres puntos de libración, en adición a los cinco ya establecidos para el problema clásico de tres cuerpos (Sol–Jupiter) (BALTAGIANNIS y PAPADAKIS, 2013). La evolución paramétrica de los puntos de equilibrio para $\beta \in [0, 1]$, se presenta en la Figura 10. Como ya se ha mencionado, para $\beta = 0$, el sistema admite la existencia de ocho puntos de libración, cuatro de ellos (L_4 , L_6 , L_7 y L_8), próximos a m_3 (ver inserción en la figura). Para $\beta > 0$, los puntos L_4 y L_7 tienden a la misma coordenada, desapareciendo para $\beta \approx 0.003$. Así mismo, L_1 , L_2 , L_5 y L_6 , tienden a m_1 de manera gradual, cesando su existencia para $\beta \approx 1$. Finalmente, L_3 y L_8 , apenas modifican su posición, aproximándose cada uno, a la primaria más cercana.

La estabilidad de los puntos de equilibrio se expone en la Tabla 4. Así, se observa que para pequeños valores del parámetro de radiación, β , *e.g.*, $\beta \in (0, 0.003]$, los puntos de libración L_5 , L_6 y L_7 son linealmente estables. No obstante, a medida que

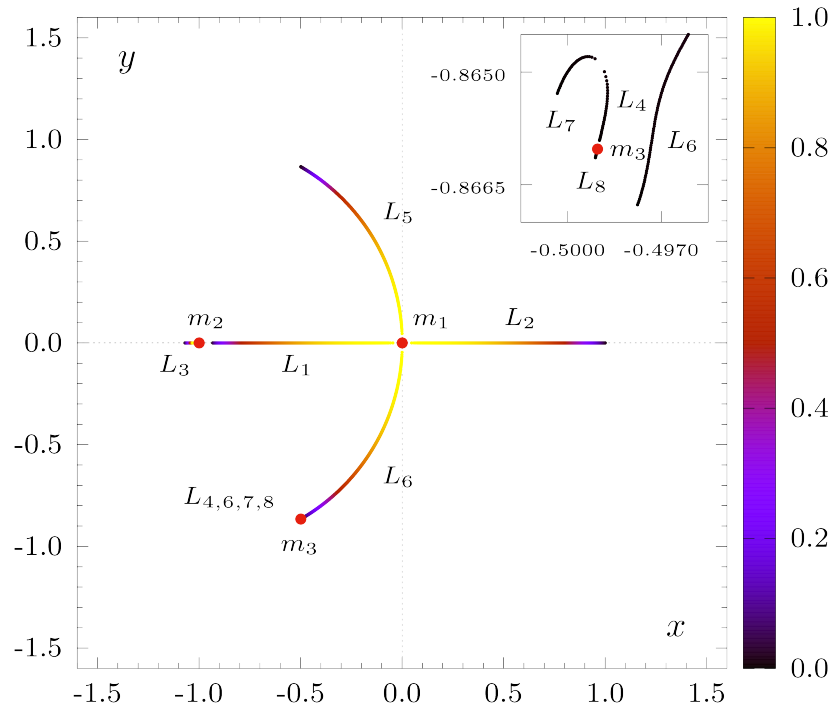
Tabla 4. Existencia y estabilidad de los puntos de libración, con la variación del factor de radiación β , para el sistema Sol–Jupiter–Troyano.

INTERVALO	PTOS. LIBRACIÓN	ESTAB.
$\beta \in [0.000, 0.003]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8}$	$L_{5,6,7}$
$\beta \in [0.004, 0.999]$	$L_{1,2,3,5,6,8}$	$L_{5,6}$
$\beta = 1.000$	$L_{3,8}$	–

β aumenta, *e.g.*, $\beta \approx 0.004$, la estabilidad de L_7 se ve alterada, en tanto los puntos L_5 y L_6 , preservan su estabilidad para $\beta \in [0.004, 0.999]$. Finalmente, para una fuerza de presión de radiación igual en magnitud a la fuerza gravitacional ejercida por la fuente ($\beta = 1$), los puntos aún existentes, L_3 y L_8 , serán inestables. Si se tiene en cuenta que para el sistema Solar, $\beta \approx 2 \times 10^{-1}$, se puede inferir que para el sistema Sol–Jupiter–Troyano, sólo los puntos de libración L_5 y L_6 serán estables. Más aún, de la Figura 10, puede observarse, para $\beta = 0$, la “simetría” de L_1 y L_3 , respecto de la posición de la primaria m_2 . No obstante, para $\beta > 0$, L_1 y L_3 , se desplazan gradualmente hacia el Sol y Jupiter, respectivamente, rompiendo dicha simetría. Debido a la evidente semejanza con el problema restringido de tres cuerpos, sería interesante considerar en futuros estudios, posibles aplicaciones en navegación espacial alrededor de tales puntos.

En la Figura 11, se presentan las curvas de velocidad cero, con la variación de β , para diferentes valores de la constante Jacobiana. En ausencia de la fuerza de presión de radiación, las regiones prohibidas del sistema Sol–Jupiter–Troyano, están compuestas por contornos en forma de herradura, similares a las observadas para el sistema Sol–Jupiter del problema restringido de tres cuerpos (véase (LIOU, ZOOK y JACKSON, 1995)). Estas herraduras, abiertas para m_2 , serán cada vez mayores en extensión, para valores altos de C . Más aún, fijando un valor para C , y con β en aumento, la herradura se cerrará sobre sí, adoptando forma de arandela. La zona de

Figura 10. Evolución paramétrica de los puntos de equilibrio con $\beta \in [0, 1]$, para el sistema Sol–Jupiter–Troyano. Los puntos de color rojo representan la ubicación de las primarias, en tanto la inserción permite el acercamiento a la evolución de los puntos cercanos a m_3 .



exclusión se hace cada vez mayor, abarcando incluso, las masas de las primarias m_2 y m_3 (la región permitida será entonces una pequeña zona circular alrededor de la fuente de radiación). Finalmente, para $\beta \rightarrow 1$, ésta (zona de exclusión) se cerrará por completo sobre m_1 , llegando a contener la totalidad de puntos y masas para dicho caso ($L_3, L_8, m_1, m_2, y m_3$). Nótese que la ubicación del asteroide coincide casi, con la posición de L_8 , razón por la cual, su representación en los diferentes paneles de la Figura 11 no es visible.

Por otra parte, en la Figura 12, se presentan las cuencas de convergencia de los diferentes atractores, para el sistema Sol–Jupiter–Troyano, y para tres valores característicos de β . Para $\beta = 0$, el panel izquierdo exhibe las ocho cuencas (colores)

correspondientes a los diferentes atractores (puntos de libración), siendo dominantes L_2 (púrpura) y L_5 (gris oscuro). Nótese el número reducido de condiciones iniciales que tienden a L_3 (negro) y L_8 (naranja).

Figura 11. Evolución de las CVC con el factor de radiación β , para el sistema Sol–Jupiter–Troyano, y para algunos valores característicos de la constante Jacobiana, C .

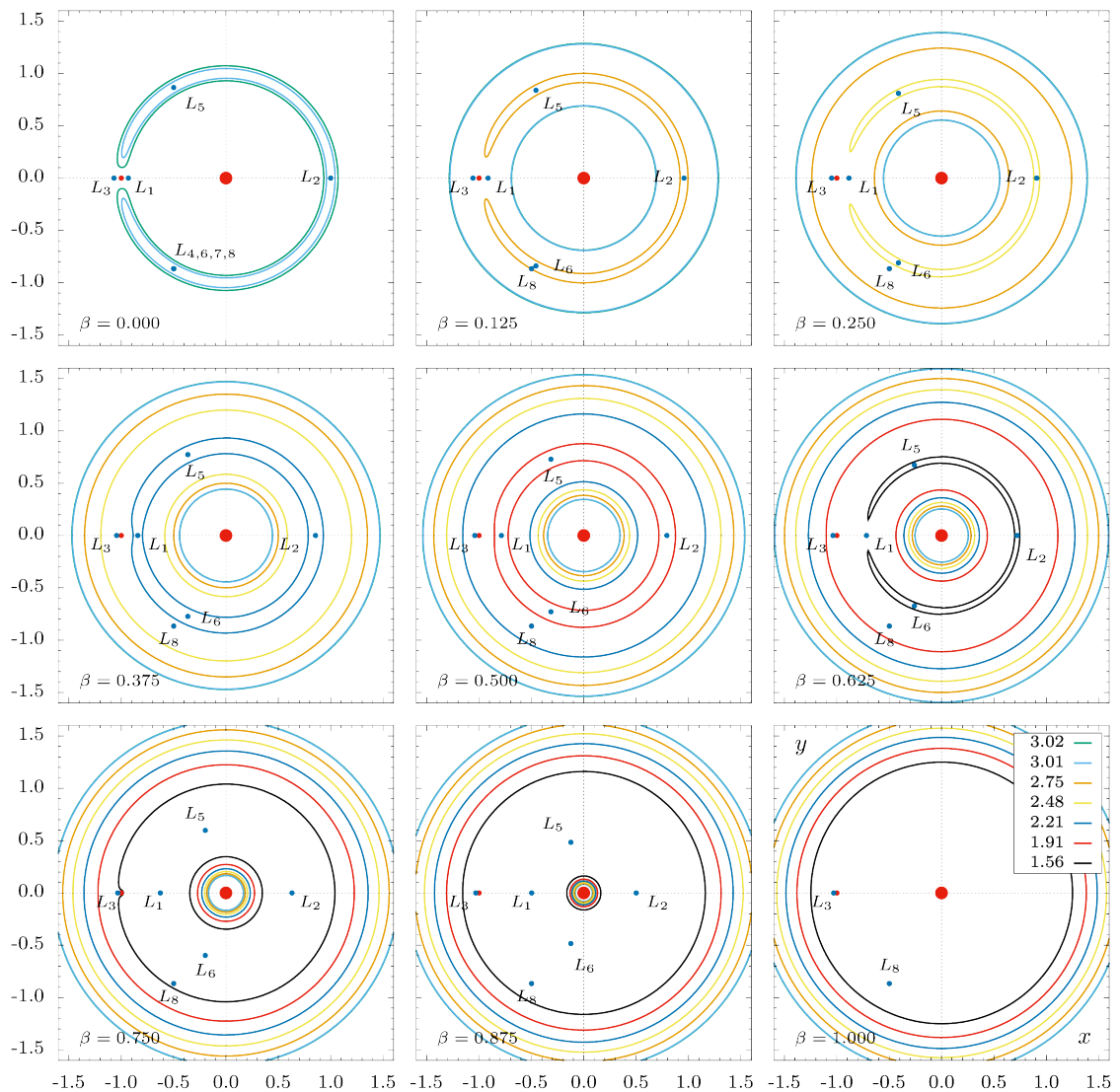
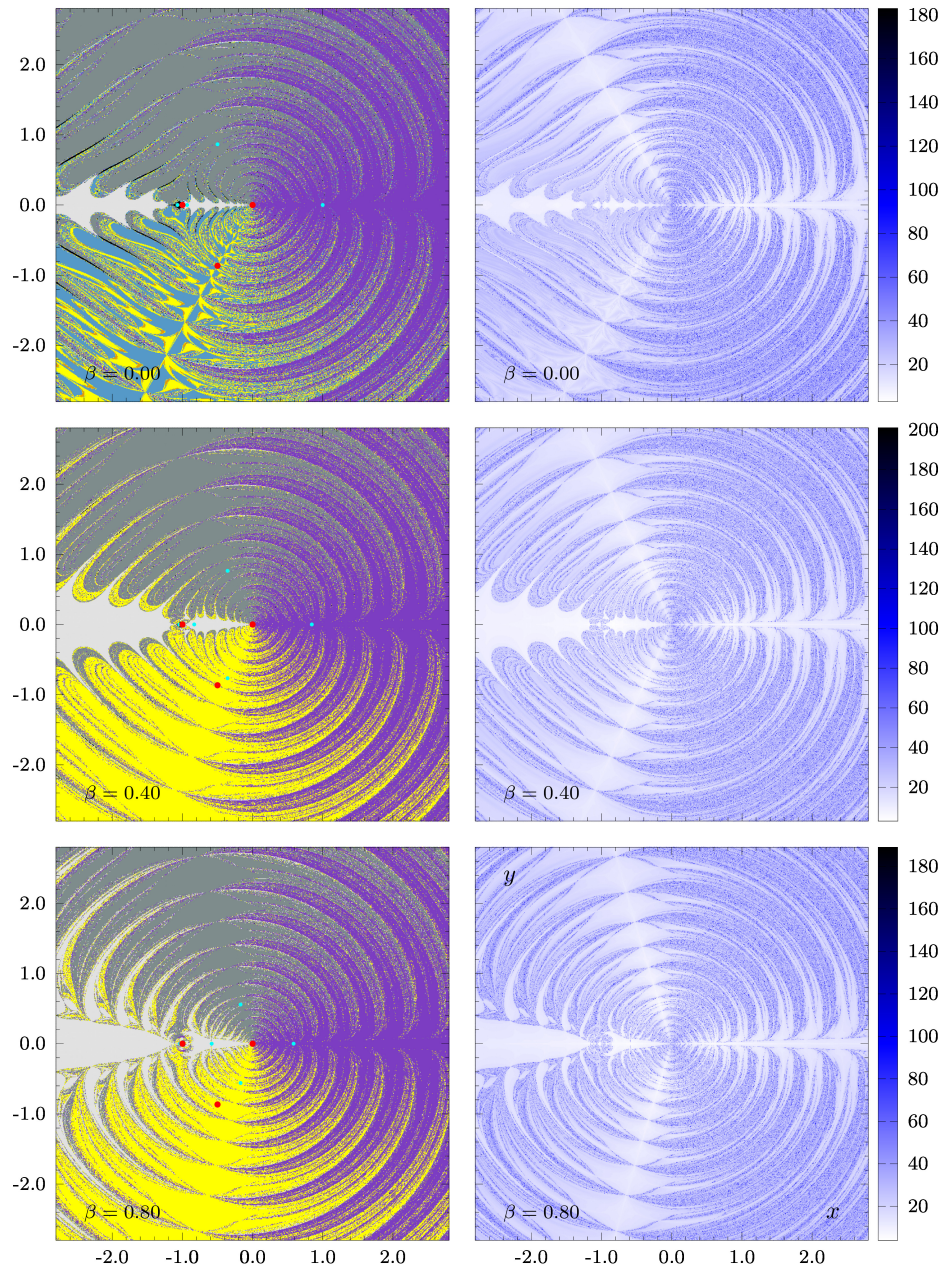


Figura 12. A izquierda: cuencas de atracción de Newton–Raphson, para el sistema Sol–Jupiter–Troyano. El código de color asignado a los diferentes atractores es el siguiente: L_1 ← gris claro, L_2 ← púrpura, L_3 ← negro, L_4 ← azul oscuro, L_5 ← gris oscuro, L_6 ← amarillo, L_7 ← azul claro, L_8 ← naranja. A derecha: Convergencia del método. La paleta representa el número de iteraciones necesarias para la convergencia del método.



En general, las condiciones iniciales tomadas a lo largo del eje $-x$, y $+x$, tienden a L_1 (gris claro) y L_2 , respectivamente. Para los paneles $\beta = 0.4$ y $\beta = 0.8$, el número de puntos decae a seis (L_1, L_2, L_3, L_5, L_6 y L_8), de los cuales, sólo cinco presentan cuencas (debido a la ubicación de L_8 , casi superpuesta a m_3 , ninguna condición inicial de la malla numérica converge a este atractor. Esto explica la no existencia de la cuenca naranja). Finalmente, se observa cómo a medida que el factor de radiación incrementa, la complejidad de las cuencas aumenta también, requiriendo, para su convergencia, un mayor número de iteraciones que las antes expuestas para los casos $m_1 = m_2 = m_3$ y $m_1 \neq m_2 = m_3$.

3.2. EL ERFBP FOTO–GRAVITACIONAL: $\alpha = 1$

Para $\alpha = 1$, el sistema (26), depende de manera explícita de c (la velocidad de la luz), β (el cociente entre las fuerzas de presión de radiación y gravitacional), y sw (el cociente entre la fuerza de arrastre de viento solar y la de presión de radiación). Por simplicidad entonces, al considerar el límite no–relativista del modelo, la velocidad de la luz, en unidades normalizadas, se toma como $c = 1 \times 10^4$ (DUBEIBE, LORA-CLAVIJO y GONZÁLEZ, 2017; ZOTOS y DUBEIBE, 2018), a menos de especificarse lo contrario (véase § 3.2.3). Así mismo, se asume $sw = 0.35$ (LIOU, ZOOK y JACKSON, 1995; GUSTAFSON, 1994).

A pesar de la no–conservación de la constante Jacobiana en presencia de términos disipativos, es posible derivar una expresión para las curvas de velocidad cero, si se considera la contribución de dichos términos como despreciable. Acorde con Liou (LIOU, ZOOK y JACKSON, 1995), las expresiones para F_x y F_y en (19), son directamente proporcionales a $\beta m_1 c^{-1}$ (con $\beta \leq 1$, $m_1 < 1$, y $c^{-1} = 10^{-4}$). Así, tales contribuciones, a pesar de ser no–nulas ($F_x \propto 10^{-4}$, $F_y \propto 10^{-4}$), pueden, por

simplicidad, despreciarse para efectos de trazado de las CVC. Bajo tales consideraciones, y con $\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$, las CVC estarán entonces determinadas, de manera aproximada, por:

$$C \approx (x^2 + y^2) + 2 \left[\frac{m_1}{r_1} (1 - \beta) + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3} \right]. \quad (31)$$

Nótese que para $\beta = 0$, (31) reproduce la expresión usual para el ERFBP clásico, en tanto, para $\beta \neq 0$, ésta coincide con aquella dada para el caso foto-gravitacional, $\alpha = 0$. Por tanto, el trazado de las diferentes CVC, y su análisis, para los diferentes casos aquí tomados en consideración, será el ya expuesto para el ERFBP foto-gravitacional, $\alpha = 0$.

Para el caso foto-gravitacional, $\alpha = 1$ (ERFBP foto-gravitacional + términos disipativos), se tiene entonces el polinomio característico,

$$\det(\mathbb{A} - \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 - \lambda & 0 & 1 \\ A_{31}^* & A_{32}^* & A_{33}^* - \lambda & A_{34}^* \\ A_{41}^* & A_{42}^* & A_{43}^* & A_{44}^* - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned} & \lambda^4 - \lambda^3 (A_{33}^* + A_{44}^*) + \lambda^2 (A_{33}^* A_{44}^* - A_{34}^* A_{43}^* - A_{42}^* - A_{31}^*) \\ & + \lambda (A_{31}^* A_{44}^* + A_{33}^* A_{42}^* - A_{32}^* A_{43}^* - A_{34}^* A_{41}^*) \\ & + (A_{31}^* A_{42}^* - A_{32}^* A_{41}^*) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

con,

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \xi} = 0, & A_{12} &= \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \eta} = 0, & A_{13} &= \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \zeta} = 1, & A_{14} &= \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \nu} = 0, \\
A_{21} &= \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \xi} = 0, & A_{22} &= \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} = 0, & A_{23} &= \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \zeta} = 0, & A_{24} &= \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \nu} = 1, \\
A_{31} &= \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \xi} = 1 + \frac{m_1 [2(\xi - x_1)^2 - (\eta - y_1)^2] (1 - \beta)}{[(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2]^{5/2}} \\
&+ \sum_{i=2}^3 \frac{m_i [2(\xi - x_i)^2 - (\eta - y_i)^2]}{[(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2]^{5/2}} \\
&- (1 + sw) \left\{ \frac{\beta m_1}{c} \left[\left[\frac{1}{\rho_1^4} - \frac{4(\xi - x_1)^2}{\rho_1^6} \right] [\zeta(\xi - x_1) + \nu(\eta - y_1)] \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{1}{\rho_1^4} (\xi - x_1) [2(\eta - y_1) - \zeta] \right] \right\}, \\
A_{32} &= \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \eta} = \frac{3m_1(\xi - x_1)(\eta - y_1)(1 - \beta)}{[(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2]^{5/2}} + \sum_{i=2}^3 \frac{3m_i(\xi - x_i)(\eta - y_i)}{[(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2]^{5/2}} \\
&- (1 + sw) \left\{ \frac{\beta m_1}{c} \left[-\frac{4(\xi - x_1)(\eta - y_1)}{\rho_1^6} [\zeta(\xi - x_1) + \nu(\eta - y_1)] - \frac{1}{\rho_1^2} \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{\nu(\xi - x_1)}{\rho_1^4} - \frac{2(\eta - y_1)}{\rho_1^4} [\zeta - (\eta - y_1)] \right] \right\}, \\
A_{33} &= \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} = -(1 + sw) \left\{ \frac{\beta m_1}{c} \left[\frac{(\xi - x_1)^2}{\rho_1^4} + \frac{1}{\rho_1^2} \right] \right\}, \\
A_{34} &= \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \nu} = 2 - (1 + sw) \left\{ \frac{\beta m_1}{c} \left[\frac{(\xi - x_1)(\eta - y_1)}{\rho_1^4} \right] \right\}, \\
A_{41} &= \frac{\partial \dot{\nu}}{\partial \xi} = \frac{3m_1(\xi - x_1)(\eta - y_1)(1 - \beta)}{[(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2]^{5/2}} + \sum_{i=2}^3 \frac{3m_i(\xi - x_i)(\eta - y_i)}{[(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2]^{5/2}} \\
&- (1 + sw) \left\{ \frac{\beta m_1}{c} \left[-\frac{4(\xi - x_1)(\eta - y_1)}{\rho_1^6} [\zeta(\xi - x_1) + \nu(\eta - y_1)] + \frac{1}{\rho_1^2} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left. \frac{\zeta(\eta - y_1)}{\rho_1^4} - \frac{2(\xi - x_1)}{\rho_1^4} [\nu + (\xi - x_1)] \right\}, \\
A_{42} &= \frac{\partial \dot{\nu}}{\partial \eta} = 1 - \frac{m_1 [(\xi - x_1)^2 - 2(\eta - y_1)^2] (1 - \beta)}{[(\xi - x_1)^2 + (\eta - y_1)^2]^{5/2}} \\
& - \sum_{i=2}^3 \frac{m_i [(\xi - x_i)^2 - 2(\eta - y_i)^2]}{[(\xi - x_i)^2 + (\eta - y_i)^2]^{5/2}} \\
& - (1 + sw) \left\{ \frac{\beta m_1}{c} \left[\left[\frac{1}{\rho_1^4} - \frac{4(\eta - y_1)^2}{\rho_1^6} \right] [\zeta(\xi - x_1) + \nu(\eta - y_1)] \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\rho_1^4} (\eta - y_1) [2(\xi - x_1) - \nu] \right] \right\}, \\
A_{43} &= \frac{\partial \dot{\nu}}{\partial \zeta} = -2 - (1 + sw) \left\{ \frac{\beta m_1}{c} \left[\frac{(\xi - x_1)(\eta - y_1)}{\rho_1^4} \right] \right\}, \\
A_{44} &= \frac{\partial \dot{\nu}}{\partial \nu} = -(1 + sw) \left\{ \frac{\beta m_1}{c} \left[\frac{(\eta - y_1)^2}{\rho_1^4} + \frac{1}{\rho_1^2} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

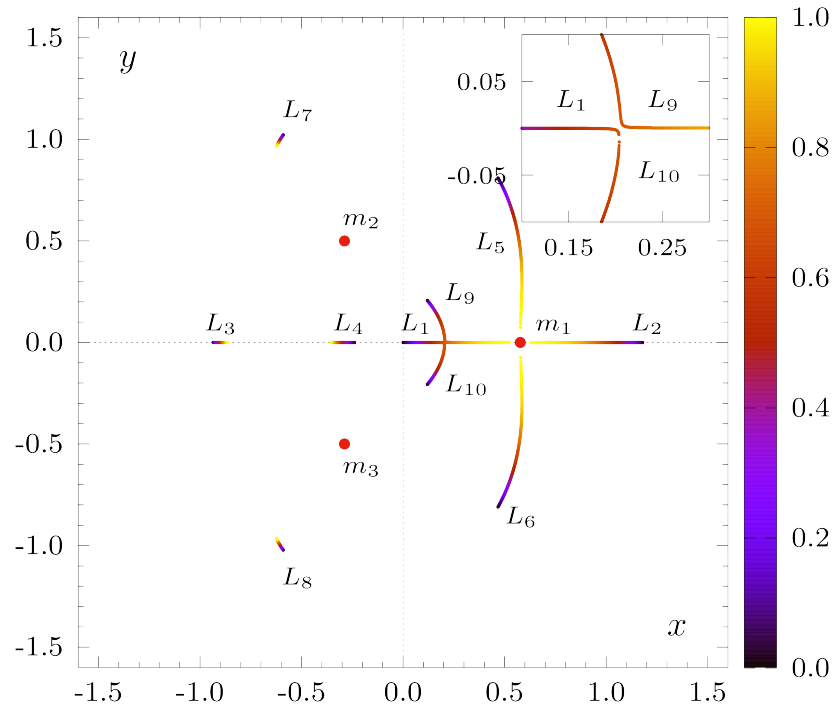
Al igual que antes, con $\lambda = a + ib$, (32) transforma en:

$$\begin{aligned}
0 &= (a + ib)^4 - (a + ib)^3 (A_{33}^* + A_{44}^*) + (a + ib)^2 (A_{33}^* A_{44}^* - A_{34}^* A_{43}^* - A_{31}^* - A_{42}^*) \\
&+ (a + ib) (A_{31}^* A_{44}^* + A_{33}^* A_{44}^* - A_{32}^* A_{43}^* - A_{34}^* A_{41}^*) + (A_{31}^* A_{42}^* - A_{32}^* A_{41}^*).
\end{aligned}$$

Separando la parte real de la parte imaginaria, el sistema a resolver estará entonces determinado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
f(a,b) &= a^4 + b^4 - 6a^2b^2 - (a^3 - 3ab^2)(A_{33}^* + A_{44}^*) \\
&\quad + (a^2 - b^2)(A_{33}^*A_{44}^* - A_{34}^*A_{43}^* - A_{31}^* - A_{42}^*) \\
&\quad + a(A_{31}^*A_{44}^* + A_{33}^*A_{44}^* - A_{32}^*A_{43}^* - A_{34}^*A_{41}^*) + (A_{31}^*A_{42}^* - A_{32}^*A_{41}^*) = 0, \\
g(a,b) &= 4(a^3b - ab^3) + (b^3 - 3a^2b)(A_{33}^* + A_{44}^*) \\
&\quad + 2ab(A_{33}^*A_{44}^* - A_{34}^*A_{43}^* - A_{31}^* - A_{42}^*) \\
&\quad + b(A_{31}^*A_{44}^* + A_{33}^*A_{44}^* - A_{32}^*A_{43}^* - A_{34}^*A_{41}^*) = 0.
\end{aligned}$$

Figura 13. Evolución paramétrica de los puntos de libración para $\beta \in [0, 1]$. Los puntos de color rojo indican la posición de las primarias.



3.2.1. Caso 1: $m_1 = m_2 = m_3$. Se empezará por considerar el caso en el cual, se asignan valores iguales a las masas de las primarias, *i.e.*, $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$.

Acorde con (7), las coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , y (x_3, y_3) , de los tres cuerpos masivos, se escriben como, $(1/\sqrt{3}, 0)$, $(-1/2\sqrt{3}, 1/2)$, y $(-1/2\sqrt{3}, -1/2)$, respectivamente.

En la Figura 13, se expone la existencia y evolución de los puntos de libración, para $\beta \in [0, 1]$. De ella, puede observarse cómo a medida que β incrementa, los puntos de libración L_1 y L_{10} , convergen a un mismo punto (fuera esta vez del eje x), desapareciendo por completo para $\beta \approx 0.687$. Así mismo, se observa que los puntos L_2 , L_5 , L_6 y L_9 , se desplazan de manera gradual hacia la fuente de radiación, desapareciendo para $\beta \approx 1$, en tanto L_3 , L_4 , L_7 y L_8 , apenas exhiben pequeños corrimientos respecto de su posición inicial (véase Tab. 5 para información detallada).

En cuanto a la estabilidad de los puntos de equilibrio concierne, se tiene, acorde con Baltagiannis & Papadakis (BALTAGIANNIS y PAPANAKIS, 2011), que para $\beta = 0$, todos los puntos son inestables. Más aún, para $\beta \in [0, 1]$, la estabilidad lineal de los diferentes puntos existentes permanece invariante. Esto es, la forma de los correspondientes eigenvalores del polinomio característico para la totalidad de los puntos de equilibrio, no se ve alterada, independiente del valor asignado a β , *i.e.*, los eigenvalores serán de la forma: (i) $\lambda_{1,2,3,4} = \pm a \pm ib$, para L_1 , L_3 , L_5 y L_6 ; y (ii) $\lambda_{1,2} = \pm ib$ y $\lambda_{3,4} = \pm a$, para los restantes puntos de libración (L_2 , L_4 , L_7 , L_8 , L_9 y L_{10}). Así, puede concluirse que para el caso $m_1 = m_2 = m_3$, del ERFBP foto-gravitacional en presencia de términos disipativos, la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio será de tipo inestable, independiente del valor dado a β .

3.2.2. Caso 2: $m_1 \neq m_2 = m_3$. Considérese el caso, $m_2 = m_3 = \mu$, $m_1 = 1 - \mu$, con $\mu \in (0, 0.5)$. Entonces, las coordenadas de las primarias, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , y

Tabla 5. Existencia de los puntos de libración, en función del factor de radiación, β , para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$.

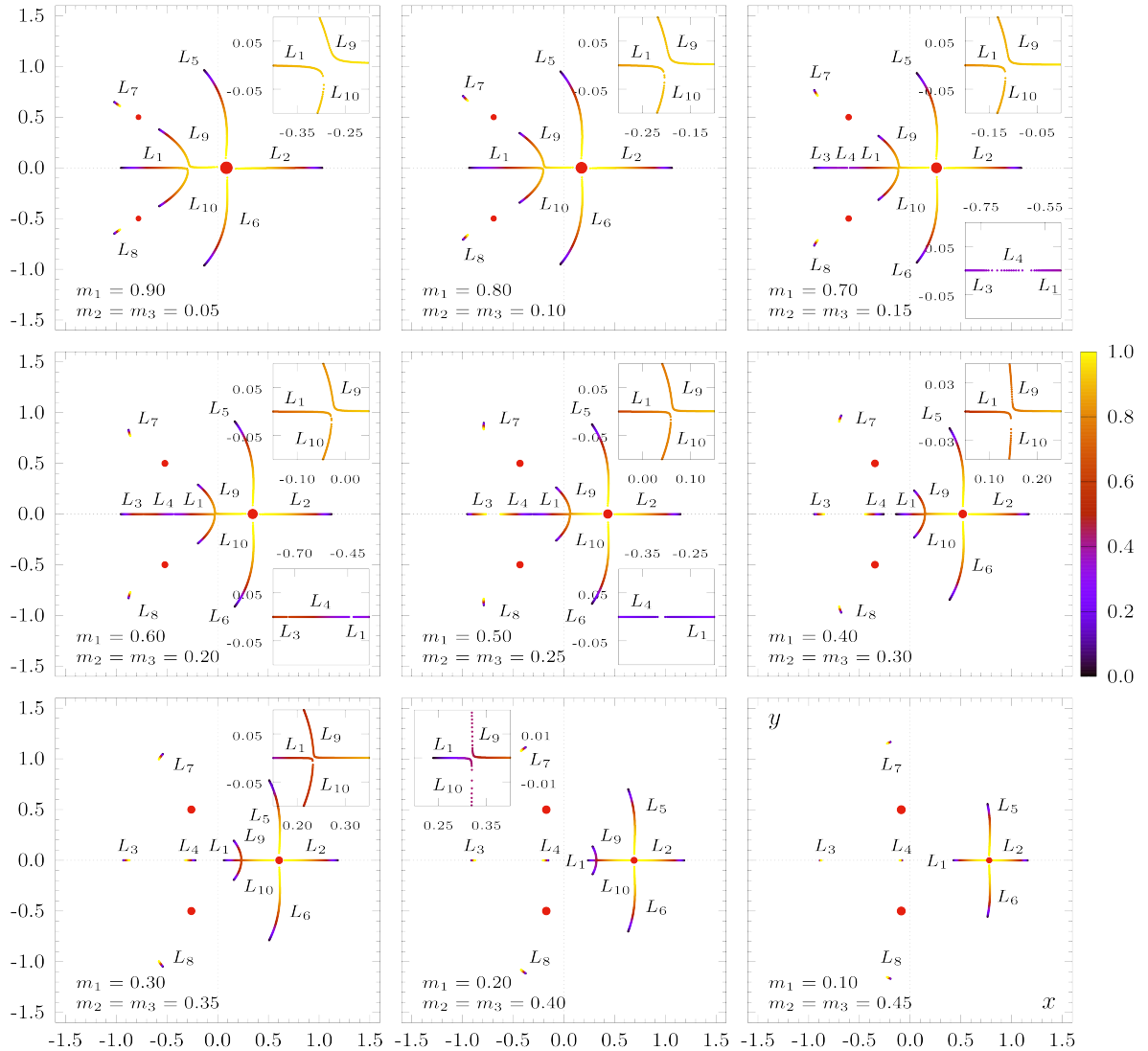
INTERVALO	PTOS. LIBRACIÓN	ESTAB.
$\beta \in [0.000, 0.687]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$	—
$\beta \in [0.688, 0.999]$	$L_{2,3,4,5,6,7,8,9}$	—
$\beta = 1.000$	$L_{3,4,7,8}$	—

(x_3, y_3) , en términos de μ , estarán dadas por:

$$\left(\sqrt{3}\mu, 0\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2\mu - 1), \frac{1}{2}\right), \quad \text{y} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2\mu - 1), -\frac{1}{2}\right).$$

En la Tabla 6, se presenta la existencia y evolución de los puntos de equilibrio, para $\beta \in [0, 1]$, y para diferentes valores de μ . En general, se observa que a medida que el factor de radiación aumenta, para un mismo valor de μ , la cantidad de puntos de libración tiende a disminuir. En contraste, para valores grandes del parámetro de masa, *e.g.*, $\mu \geq 0.25$, el número total de puntos que sobreviven ($\beta = 1$) parece aumentar. La Figura 14 expone la existencia y evolución de los puntos de libración, para diferentes valores de $\mu = m_2 = m_3$. De ella, se extracta lo siguiente: (i) para $m_1 \gg \mu$, los puntos L_3 y L_4 no existen; L_1 y L_{10} , se aproximan entre sí de manera gradual, desapareciendo para una coordenada cercana al eje x ; los puntos L_2 , L_5 , L_6 y L_9 , se desplazan en dirección de la fuente de radiación, m_1 , cesando su existencia para $\beta = 1$. (ii) Para $m_1 \approx \mu$, la existencia y evolución de los puntos de equilibrio es acorde a la expuesta en la subsección anterior (§ 3.2.1). (iii) Para $m_1 \ll \mu \approx 0.5$, los puntos no-colineales L_9 y L_{10} no existen. A medida que β incrementa, L_3 , L_4 , L_7 y L_8 . exhiben pequeños corrimientos respecto de sus posiciones iniciales, en tanto, los puntos de libración L_1 , L_2 , L_5 y L_6 , se desplazan gradualmente hacia m_1 , desapareciendo para $\beta = 1$.

Figura 14. Evolución paramétrica de los puntos de equilibrio con $\beta \in [0, 1]$, para diferentes valores de $\mu = m_2 = m_3$. Los puntos de color rojo representan la ubicación de las primarias, en tanto las inserciones permiten el acercamiento a la evolución de algunos puntos.

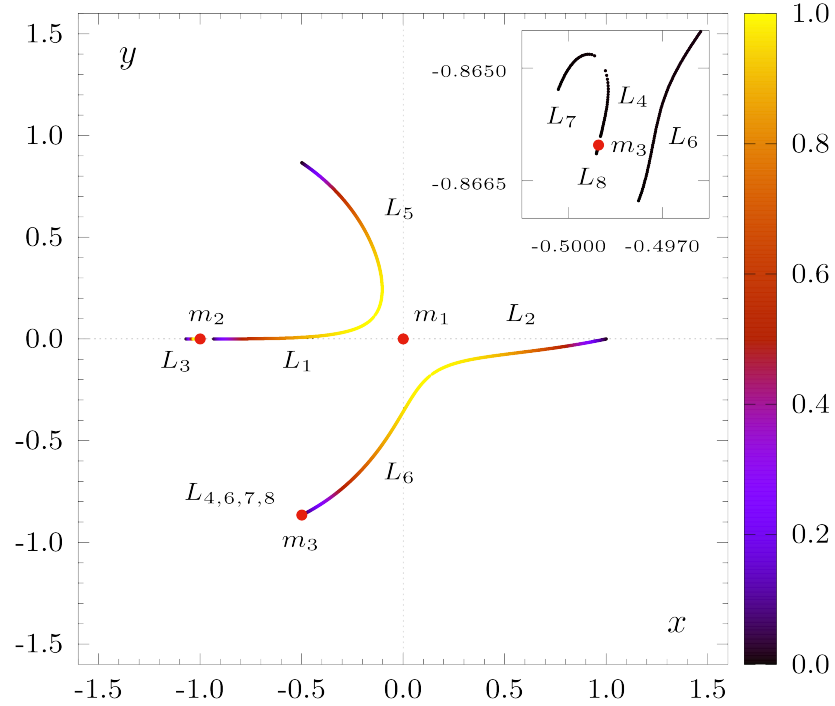


En cuanto a estabilidad concierne, se empezará por considerar el caso $\beta = 0$. Se tiene entonces que, para $\mu \in (0, 0.0027]$, los puntos de equilibrio L_1 , L_5 , y L_6 , son estables; para $\mu \in [0.0028, 0.0188]$, sólo L_5 y L_6 son estables; para $\mu > 0.0188$, todos

los puntos de libración son inestables (todo esto, acorde con Baltagianis & Papadakis (BALTAGIANNIS y PAPANAKIS, 2011)). Una vez se incrementa el valor de β , en pasos $\Delta\beta = 1 \times 10^{-3}$, se tiene lo siguiente: (i) para $\beta = 0.001$, y $\mu \in (0, 0.0024]$, los puntos de libración L_1 , L_5 y L_6 , son estables; para $\mu \in [0.0025, 0.0185]$, sólo L_5 y L_6 son estables; para $\mu > 0.0185$, todos los puntos son inestables. (ii) Para $\beta = 0.002$, y $\mu \in (0, 0.0011]$, los puntos L_1 , L_5 , y L_6 , son estables; para $\mu \in [0.0012, 0.0174]$, sólo L_5 y L_6 son estables; para $\mu > 0.0174$, todos los puntos son inestables. (iii) Para $\beta = 0.003$, y $\mu \in (0, 0.0147]$, L_5 y L_6 son estables; para $\mu > 0.0147$, todos los puntos son inestables. (iv) Para $\beta = 0.004$, y $\mu \in (0, 0.0093]$, L_5 y L_6 son estables; para $\mu > 0.0093$, todos los puntos son inestables. (v) Finalmente, para $\beta > 0.004$, todos los puntos serán inestables, independiente del valor asignado a μ . Así, puede inferirse que la estabilidad de los diferentes puntos de equilibrio permanece invariante, sólo para valores del factor de radiación del orden 10^{-3} . No obstante, para grandes valores del mismo, la totalidad de dichos puntos será inestable.

3.2.3. Caso 3: $m_1 \neq m_2 \neq m_3$. Como último escenario, se considera la configuración de Lagrange, Sol–Jupiter–Asteroide, en adición con las fuerzas de arrastre P–R y de viento solar. En unidades normalizadas, las masas de las primarias estarán dadas por $m_1 = m_S = 0.999046321943$ (la masa del Sol), $m_2 = m_J = 0.000953678050$ (la masa de Jupiter), y $m_3 = m_A = 6.99996 \times 10^{-12}$ (la masa de 624 Hektor, un asteroide del grupo de los Troyanos). A diferencia de casos previos, los resultados numéricos aquí consignados se han llevado a cabo para $c = 22945.23619$, la velocidad de la luz para el sistema Sol–Jupiter (ZOTOS y DUBEIBE, 2018). De (7), las coordenadas de las primarias serán entonces:

Figura 15. Evolución paramétrica de los puntos de equilibrio con $\beta \in [0, 1]$, para el sistema Sol–Jupiter–Troyano. Los puntos de color rojo representan la ubicación de las primarias, en tanto la inserción permite el acercamiento a la evolución de los puntos cercanos a m_3 .



$$(x_1, y_1) \approx (0.000953678, 0.000000),$$

$$(x_2, y_2) \approx (-0.999046, 6.35659 \times 10^{-9}),$$

$$(x_3, y_3) \approx (-0.499046, -0.866025).$$

Acorde con Baltagiannis & Papadakis (BALTAGIANNIS y PAPADAKIS, 2013), en ausencia de presión de radiación y fuerzas de arrastre, el sistema Sol–Jupiter–Troyano admite ocho puntos de equilibrio no–colineales, tres de ellos (L_5 , L_6 y L_7) linealmente estables. El adjetivo *no–colineal* se debe al hecho de que L_1 , L_2 , y L_3 , no yacen de manera exacta sobre el eje x . A medida que β incrementa, los puntos de

libración L_4 y L_7 , alcanzan el mismo punto, desapareciendo completamente para $0.0029 < \beta < 0.0030$. Así mismo, L_2 y L_6 , desaparecen para $0.9887 < \beta < 0.9888$, y, L_1 y L_5 , para $0.9940 < \beta < 0.9941$ (refiérase a Tab. 7 para mayor detalle), en tanto, L_3 y L_8 , apenas exhiben pequeños desplazamientos respecto de su posición inicial (ver Fig. 15).

En cuanto a estabilidad concierne, para $\beta \in (0, 0.0029]$, los puntos de equilibrio L_5 , L_6 , y L_7 , son linealmente estables. No obstante, a medida que β incrementa, la estabilidad de los puntos se ve alterada también, *i.e.*, para $\beta \in [0.0030, 0.0104]$, sólo L_5 y L_6 son estables, en tanto, para $\beta > 0.0104$, la estabilidad de la totalidad de puntos existentes resulta de tipo inestable. Nótese que $\beta \approx 10^{-2}$ corresponde al valor del factor de radiación más grande (de los casos considerados), el cual permite aún, puntos de equilibrio estables. Así, tomando en consideración que $\beta \approx 10^{-1}$ para el sistema solar, puede concluirse que para la configuración Lagrangiana Sol–Jupiter–Troyano, en presencia de fuerzas disipativas, todos los puntos serán inestables.

En general, en contraste con el caso $\alpha = 0$, la presencia de términos disipativos (P–R, y radiación corpuscular), modifica de manera notable el comportamiento de los puntos de libración L_1 , L_9 , y L_{10} . Así, por ejemplo, de las figuras de existencia y evolución para los diferentes puntos de equilibrio, y para los casos generales, $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, se listan las siguientes diferencias:

- La evolución de los puntos de libración L_1 , L_2 y L_3 , para $\alpha = 0$, y sus respectivos subcasos, se da siempre sobre el eje x . Esto es, L_1 , L_2 y L_3 son siempre puntos de equilibrio colineales. No obstante, en presencia de términos disipativos ($\alpha = 1$), esto ya no es válido. La evolución de tales puntos se da fuera del eje x .

Tabla 6. Existencia de los puntos de liberación en función del factor de radiación β , para diferentes valores de $\mu = m_2 = m_3$.

μ	INTERVALO	PTOS. LIBERACIÓN
0.05	$\beta \in [0.000, 0.928]$	$L_{1,2,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.929, 0.999]$	$L_{2,5,6,7,8,9}$
	$\beta = 1.000$	$L_{7,8}$
0.10	$\beta \in [0.000, 0.912]$	$L_{1,2,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.913, 0.999]$	$L_{2,5,6,7,8,9}$
	$\beta = 1.000$	$L_{7,8}$
0.15	$\beta \in [0.000, 0.350]$	$L_{2,3,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.351, 0.360]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.361, 0.889]$	$L_{1,2,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.890, 0.999]$	$L_{2,5,6,7,8,9}$
	$\beta = 1.000$	$L_{7,8}$
0.20	$\beta \in [0.000, 0.293]$	$L_{2,3,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.294, 0.608]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.609, 0.859]$	$L_{1,2,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.860, 0.999]$	$L_{2,5,6,7,8,9}$
	$\beta = 1.000$	$L_{7,8}$
0.25	$\beta \in [0.000, 0.160]$	$L_{2,3,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.161, 0.816]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.817, 0.999]$	$L_{2,3,4,5,6,7,8,9}$
	$\beta = 1.000$	$L_{3,4,7,8}$
0.30	$\beta \in [0.000, 0.751]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.752, 0.999]$	$L_{2,3,4,5,6,7,8,9}$
	$\beta = 1.000$	$L_{3,4,7,8}$
0.35	$\beta \in [0.000, 0.644]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.645, 0.999]$	$L_{2,3,4,5,6,7,8,9}$
	$\beta = 1.000$	$L_{3,4,7,8}$
0.40	$\beta \in [0.000, 0.430]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}$
	$\beta \in [0.431, 0.999]$	$L_{2,3,4,5,6,7,8,9}$
	$\beta = 1.000$	$L_{3,4,7,8}$
0.45	$\beta \in [0.000, 0.999]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8}$
	$\beta = 1.000$	$L_{3,4,7,8}$

Tabla 7. Existencia y estabilidad de los puntos de libración, con la variación del factor de radiación β , para el sistema Sol–Jupiter–Troyano.

INTERVALO	PTOS. LIBRACIÓN	ESTAB.
$\beta \in [0.0000, 0.0029]$	$L_{1,2,3,4,5,6,7,8}$	$L_{5,6,7}$
$\beta \in [0.0030, 0.0104]$	$L_{1,2,3,5,6,8}$	$L_{5,6}$
$\beta \in [0.0105, 0.9887]$	$L_{1,2,3,5,6,8}$	–
$\beta \in [0.9888, 0.9940]$	$L_{1,3,5,8}$	–
$\beta \in [0.9941, 1.0000]$	$L_{3,8}$	–

- Para $\alpha = 0$, y los casos $m_1 = m_2 = m_3$ y $m_1 \neq m_2 = m_3$, los puntos no colineales, L_9 y L_{10} , evolucionan alcanzando la misma coordenada sobre el espacio de configuración para un mismo valor de β , en tanto el punto colineal L_1 , sigue su evolución hacia m_1 , desapareciendo para $\beta \approx 0,999$. Para $\alpha = 1$, esto ya no es válido. L_1 y L_{10} convergen a un mismo punto (fuera del eje x), siendo L_9 quien tiende a m_1 . El sistema Sol–Jupiter–Troyano, presenta diferencias aún más notables. Para $\alpha = 0$, los puntos colineales L_1 y L_2 , y los no–colineales, L_5 , y L_6 , se desplazan en conjunto hacia la fuente de radiación, desapareciendo todos para $\beta \approx 0.999$. En presencia de términos disipativos, los puntos de libración, antes colineales, no lo son más, desviando sus trayectorias fuera del eje. A diferencia, esta vez, L_1 , L_2 , L_5 y L_6 , no evolucionan hacia la fuente, sino, a una coordenada común ($L_1(x, y) \approx L_5(x, y)$ y $L_2(x, y) \approx L_6(x, y)$), desapareciendo, ya no para $\beta \approx 1$.

En lo que concierne a la evolución de las CVC, se ha mencionado ya, que la expresión aproximada en (31), deriva en el trazado y análisis de las curvas de velocidad antes expuesto (§ 3.1). Finalmente, en cuanto a las cuencas de convergencia de Newton–Raphson atañe, basta mencionar que tales cuencas, para el ERFBP foto–gravitacional en presencia de términos disipativos, no difieren de manera notable con las ya presentadas para el caso $\alpha = 0$. Más aún, la estructura, color y compleji-

dad, se asemejan, siendo, no obstante, diferentes sólo en la distribución de colores observada en las regiones de transición y caóticas.

4. CRITERIOS Y ENSAYOS NUMÉRICOS

En lo que sigue, se pretende explorar la dinámica orbital de la versión foto-gravitacional del ERFBP, al clasificar de manera sistemática el conjunto de condiciones iniciales para el espacio de configuración del sistema. Para ello, se expondrán, de manera previa, los métodos y criterios numéricos aquí tomados en cuenta. Más aún, se provee información detallada acerca de los diferentes criterios de selección considerados (conservación de la constante de movimiento, tiempos de computo, etc.), para la elección de los integradores numéricos.

Debido a encuentros cercanos de tipo partícula-primaria, la fuerza ejercida sobre la partícula de masa infinitesimal se hace grande en demasía ($r_i \rightarrow 0$), induciendo así, singularidades en las ecuaciones de movimiento (de manera estricta, los objetos en el espacio no orbitan más allá de tales singularidades, pues sus trayectorias se extinguen al impactar con la superficie del cuerpo celeste masivo. Empero, en el contexto del problema de N cuerpos, tales impactos sólo toman lugar en la singularidad misma, al estos —cuerpos masivos— ser considerados como masas puntuales). Entonces, si lograr resultados confiables se precisa, deberá reducirse el paso del integrador de manera considerable (particularmente en regiones vecinas a dichas singularidades). Se expone así la regularización de Levi-Civita, como alternativa a tal contrariedad.

Finalmente, con el objeto de distinguir entre movimiento regular y caótico, se describe el método *The Generalized Alignment Index of order k* ($GALI_k$) (SKOKOS, BOUNTIS y ANTONOPOULOS, 2007). El método de $GALI_k$, una generalización del

método *The Smaller Alignment Index* (SALI) (SKOKOS, 2001), provee información detallada acerca de la dinámica local del sistema, incluso en regiones en las cuales SALI y otros indicadores resultan inconclusos.

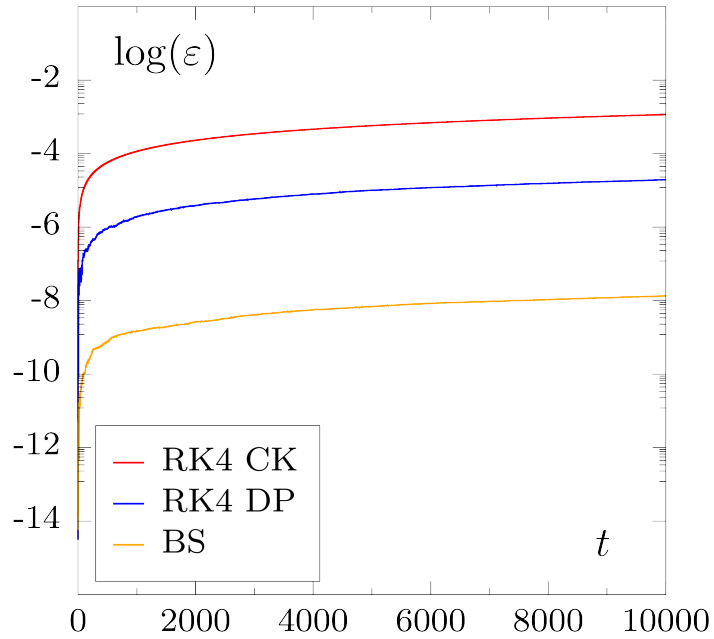
4.1. INTEGRADORES NUMÉRICOS

Se presetan entonces las ecuaciones de movimiento del problema foto-gravitacional, como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (formulación Hamiltoniana), para así, dar paso a los criterios y elección de los diferentes integradores numéricos. Debido a la no conservación de la constante para el caso $\alpha = 1$, se explorará sólo la dinámica orbital del *problema foto-gravitacional: presión de radiación* ($\alpha = 0$).

En el espacio de configuración n -dimensional, cualquier estado del sistema está completamente determinado por medio de un punto cuyas coordenadas (las n coordenadas generalizadas, q_k), permiten describir la dinámica de éste en función del tiempo, a través del espacio de configuración. Desde la perspectiva Lagrangiana, a cualquier sistema con n grados de libertad se asocian n variables independientes, $q_k(t)$. La formulación Hamiltoniana, empero, permite describir la dinámica de la partícula en términos de un sistema de ecuaciones de primer orden. Así, el número de condiciones iniciales, y de ecuaciones independientes de primer orden, que determinan la dinámica del sistema en el espacio de fase, deberá ser, por tanto, $2n$.

Entonces, a partir de las coordenadas y momentos generalizados, q_k y p_k , el Hamiltoniano se define como (GOLDSTEIN, POOLE y SAFKO, 2002):

Figura 16. Conservación de la constante Jacobiana para algunos integradores de paso adaptativo. Rojo: Runge–Kutta de cuarto orden con coeficientes Cash–Karp; Azul: Runge–Kutta de cuarto orden con coeficientes Dormand–Prince; Naranja: Bulirsch–Stoer.



$$H(q, p) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L(q, \dot{q}), \quad (33)$$

con

$$p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k, \quad k = 1, 2. \quad (34)$$

y L , el Lagrangiano del sistema:

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2 + \frac{1}{2} (q_1^2 + q_2^2) + \frac{m_1}{r_1} (1 - \beta) + \frac{m_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3}. \quad (35)$$

De (34) y (35), (33) transforma en:

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 - \frac{m_1}{r_1} (1 - \beta) - \frac{m_2}{r_2} - \frac{m_3}{r_3}, \quad (36)$$

con, $\dot{q}_k = \partial H / \partial p_k$ y $\dot{p}_k = -\partial H / \partial q_k$, las $2n$ ecuaciones de primer orden requeridas —*ecuaciones canónicas de hamilton*—, i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= p_1 + q_2, \\ \dot{q}_2 &= p_2 - q_1, \\ \dot{p}_1 &= p_2 - \frac{m_1 (q_1 - x_1)}{r_1^3} (1 - \beta) - \frac{m_2 (q_1 - x_2)}{r_2^3} - \frac{m_3 (q_1 - x_3)}{r_3^3}, \\ \dot{p}_2 &= -p_1 - \frac{m_1 (q_2 - y_1)}{r_1^3} (1 - \beta) - \frac{m_2 (q_2 - y_2)}{r_2^3} - \frac{m_3 (q_2 - y_3)}{r_3^3}. \end{aligned} \quad (37)$$

Expuestas las ecuaciones de movimiento en su forma integrable, considérese ahora el conjunto de condiciones iniciales $(q_1, q_2, p_1, p_2) \approx (0.7, 0, 0, -1.19973509)$, que definen la órbita de prueba para la elección de los integradores numéricos (los ensayos numéricos se realizaron para el caso de tres masas iguales, $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, con $C = 3.52$, $\alpha = \beta = 0$). Para la clasificación orbital de los diferentes sistemas sometidos a estudio, se emplearon entonces dos diferentes integradores numéricos: un integrador de paso adaptativo, y un integrador de paso fijo. La razón de esto es simple: una primera clasificación del espacio de fase requiere sólo del estado final de cada trayectoria concerniente al conjunto de condiciones iniciales inmersas en

éste. Así, el uso de un integrador de paso adaptativo permite la obtención de tal estado de manera rápida, en contraste con el tiempo requerido por aquel de paso fijo. Empero, un integrador de paso fijo resulta completamente necesario, si distinguir movimiento regular de caótico se precisa (§ 4.3). La Figura 16 expone el comportamiento de tres diferentes integradores de paso adaptativo, para la conservación de la constante Jacobiana, $\varepsilon = |C - C_{num}|$: (i) Runge–Kutta de cuarto orden con coeficientes Cash–Karp (RK4 CK) (CASH y KARP, 1990), (ii) Runge–Kutta de cuarto orden con coeficientes Dormand–Prince (RK4 DP) (PRINCE y DORMAND, 1981), y (iii) el algoritmo de Bulirsch–Stoer (BULIRSCH y STOER, 1966), el cual combina tres poderosas ideas: la extrapolación de Richardson, el uso de la extrapolación de funciones racionales en aplicaciones de tipo Richardson, y el método del punto medio modificado.

De ésta, se observa entonces la ventaja que supone el uso del algoritmo BS (mayor precisión), en contraste con los métodos RK4. Si además se toma en cuenta el poco esfuerzo computacional requerido por éste (Tab. 8), su uso como integrador numérico queda completamente justificado para la obtención de dicha primera clasificación.

Más aún, se presenta el promedio de la norma del error, L_1 , con el objeto de exponer de manera global la conservación de la constante para todo el espacio de fase del sistema. Se tiene entonces:

$$N_{L_1} = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l \varepsilon_k dt_k, \quad (38)$$

con l , el número de iteraciones, ε_k , definido previamente, el error para la constante

Tabla 8. Tiempo de computo (máquina) requerido por los diferentes integradores numéricos de paso adaptativo. Nótese la superioridad del algoritmo BS, en cuanto a tiempo de computo concierne, sobre los métodos RK4.

INTEGRADOR	T. INTEGRACIÓN	T. COMPUTO [S]
RK4 CK	10^4	107
RK4 DP	10^4	119
BS	10^4	16

Jacobiana en la k -ésima iteración, y , dt_k , el k -ésimo paso del parámetro de integración t . La Figura 17, expone entonces la conservación de la constante, para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, $C = 3.52$, y $\alpha = 0$. De ésta, se observa cómo, en el peor de los casos, la norma del error, y por tanto la constante Jacobiana, se conservan mejor que una parte en 10^{-6} , siendo, para la mayoría de las trayectorias, mejor que una parte en 10^{-10} .

Figura 17. Promedio de la norma del error L_1 , para el algoritmo BS, y para el caso $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, $C = 3.52$, y $\alpha = \beta = 0$. Paleta de color en escala logarítmica.

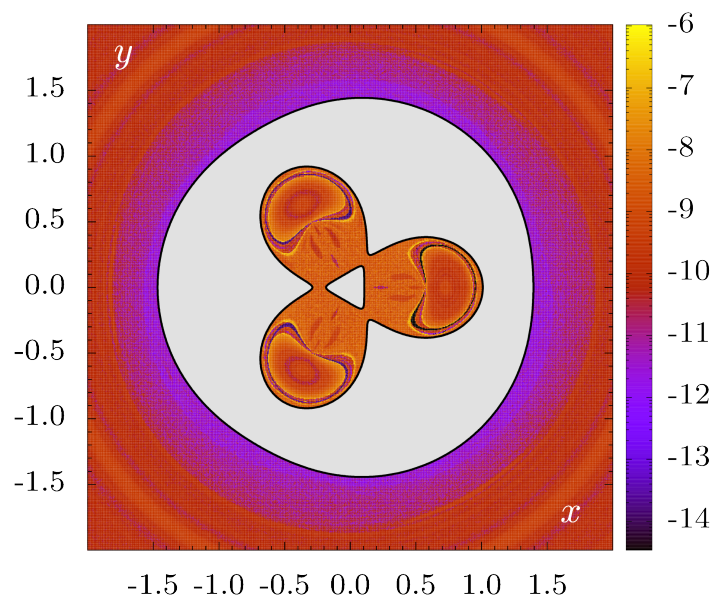
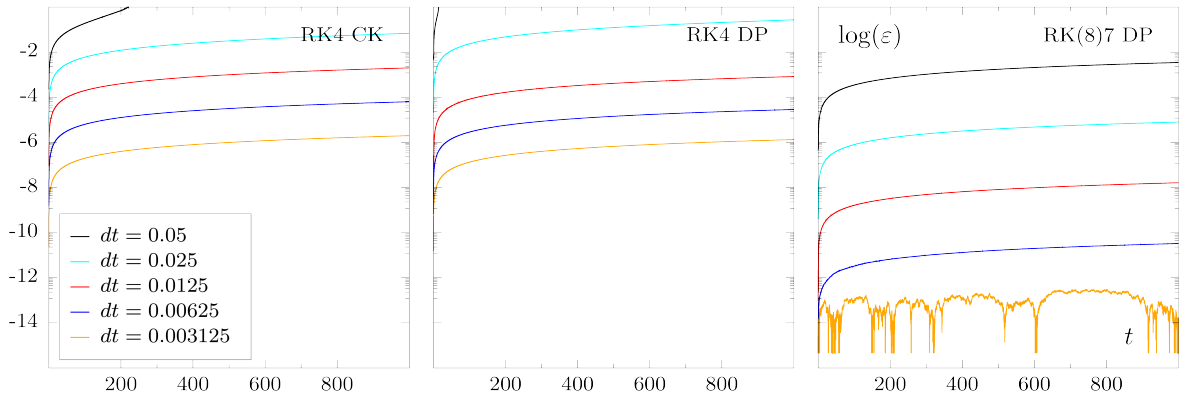


Figura 18. Conservación de la constante Jacobiana, para algunos integradores numéricos de paso fijo. De izquierda a derecha: Runge–Kutta de cuarto orden con coeficientes Cash–Karp (RK4 CK), Runge–Kutta de cuarto orden con coeficientes Dormand–Prince (RK4 DP), y Runge–Kutta de octavo orden con coeficientes Dormand–Prince (RK(8)7 DP).



Por otra parte, una segunda clasificación, que permita distinguir movimiento regular de caótico, requiere la evaluación, para el mismo instante de tiempo, de al menos dos vectores desviación continuamente normalizados con el fin de evitar desbordamientos de tipo numérico (§ 4.3). Para ello, se implementaron entonces tres diferentes integradores de paso fijo: (i) Runge–Kutta de cuarto orden con coeficientes Cash–Karp (RK4 CK), (ii) Runge–Kutta de cuarto orden con coeficientes Dormand–Prince (RK4 DP), y (iii) Runge–Kutta de octavo orden con coeficientes Dormand–Prince (RK(8)7 DP). En la Figura 18, se expone la conservación de la constante, para dichos integradores, y para diferentes pasos de integración, dt . De ésta, se observa, en general, cómo, a medida que el paso de integración es reducido, ε mejora de manera considerable. Más aún, los integradores de cuarto orden presentan un comportamiento similar, siendo necesario en éstos, un paso algo más pequeño que el empleado por el integrador de octavo orden, para lograr un valor de ε , de al menos una parte en 10^{-6} . Así, a pesar de emplear un mayor número de etapas para su implementación, el algoritmo RK(8)7 DP, se presenta como la mejor opción para llevar

a buen término la evaluación de los ya mencionados vectores desviación, compensando la cantidad de etapas requeridas, con un valor para el paso de integración mucho mayor al expuesto por los integradores de orden inferior, resultando, de esto, un menor tiempo de computo, y por tanto, poco esfuerzo computacional.

4.2. REGULARIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO: TRANSFORMACIÓN DE LEVI-CIVITA

La principal diferencia entre el movimiento asociado a cuerpos (celestes) naturales y aquel correspondiente al de cuerpos artificiales, radica en el hecho de que los encuentros (cercaños) entre cuerpos resultan comunes en este último caso, en tanto en el primero se dan, pero de manera poco usual. Las consecuencias de ello pueden entenderse, de acuerdo con la propiedad asociada al campo de fuerza gravitacional Newtoniano, según la cual, las fuerzas que actúan entre partículas se hacen grandes en demasía, a medida que la distancia entre cuerpos tiende a ser nula. Así, en la vecindad de la colisión entre cuerpos ($r_i \rightarrow 0$), las ecuaciones de movimiento presentan singularidades, *i.e.*, tanto la fuerza ejercida sobre la partícula, como su velocidad, incrementan a medida que ésta se acerca a la vecindad de una de las primarias. El tamaño del paso dado al integrador, debe entonces reducirse de manera considerable en tales regiones, con el fin de obtener resultados confiables. Puesto que tales singularidades ocurren en la colisión misma, éstas no son de carácter esencial en el contexto del problema restringido, pudiendo entonces, ser eliminadas por medio de la correcta elección de variables independientes.

En un sistema de referencia sinódico, la dinámica de la partícula de masa infinitesimal está gobernada por (33). Los pasos base de la regularización de Levi-Civita están provistos por: (i) un cambio de coordenadas (transformación de Levi-Civita),

(ii) la introducción del espacio de fase extendido, el cual permite prescindir de la dependencia temporal, y, (iii) la introducción de un tiempo ficticio.

Considérese entonces, la transformación canónica $(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (P_1, P_2, Q_1, Q_2)$, cuya función generatriz W , se asume lineal en sus p -variables:

$$W(p_1, p_2, Q_1, Q_2) = p_1 f(Q_1, Q_2) + p_2 g(Q_1, Q_2). \quad (39)$$

Las funciones f y g , concernientes a la transformación de Levi–Civita, están dados por:

$$\begin{aligned} f(Q_1, Q_2) &= Q_1^2 - Q_2^2 + x_j, \\ g(Q_1, Q_2) &= 2 Q_1 Q_2 + y_j, \end{aligned} \quad (40)$$

con x_j y y_j , las coordenadas de la primaria a ser regularizada. Así, las ecuaciones características asociadas a la función generatriz, W , serán entonces:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\partial W}{\partial p_1} = f(Q_1, Q_2) = Q_1^2 - Q_2^2 + x_j, \\ q_2 &= \frac{\partial W}{\partial p_2} = g(Q_1, Q_2) = 2 Q_1 Q_2 + y_j, \\ P_1 &= \frac{\partial W}{\partial Q_1} = p_1 \frac{\partial f}{\partial Q_1} + p_2 \frac{\partial g}{\partial Q_1} = 2 p_1 Q_1 + 2 p_2 Q_2, \\ P_2 &= \frac{\partial W}{\partial Q_2} = p_1 \frac{\partial f}{\partial Q_2} + p_2 \frac{\partial g}{\partial Q_2} = -2 p_1 Q_2 + 2 p_2 Q_1. \end{aligned} \quad (41)$$

Las dos últimas ecuaciones en (41), pueden escribirse como:

$$\mathbf{P} = 2 \mathbf{A}_0^T \mathbf{p} \quad ; \quad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} Q_1 & -Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}.$$

Sea ahora, $D = D(Q_1, Q_2) \equiv 4 \det \mathbf{A}_0 = 4(Q_1^2 + Q_2^2) > 0$. Los términos $p_1^2 + p_2^2$ y $q_2 p_1 - q_1 p_2$, en (33), transforman entonces como:

$$\begin{aligned} p_1^2 + p_2^2 &= (P_1^2 + P_2^2)/D, \\ q_2 p_1 - q_1 p_2 &= \frac{1}{2D} \left[P_1 \frac{\partial}{\partial Q_2} (f^2 + g^2) - P_2 \frac{\partial}{\partial Q_1} (f^2 + g^2) \right]. \end{aligned}$$

Así, el Hamiltoniano del sistema toma la forma,

$$\begin{aligned} \hat{H}(Q_1, Q_2, P_1, P_2) &= \frac{1}{2D} \left[P_1^2 + P_2^2 + P_1 \frac{\partial}{\partial Q_2} (f^2 + g^2) - P_2 \frac{\partial}{\partial Q_1} (f^2 + g^2) \right] \\ &- \hat{\Gamma}(Q_1, Q_2), \end{aligned} \quad (42)$$

con

$$\hat{\Gamma}(Q_1, Q_2) = \frac{m_1}{r_1(Q_1, Q_2)} (1 - \beta) + \frac{m_2}{r_2(Q_1, Q_2)} + \frac{m_3}{r_3(Q_1, Q_2)},$$

$$r_i = [(Q_1^2 - Q_2^2 + x_j - x_i)^2 + (2 Q_1 Q_2 + y_j - y_i)^2]^{1/2} \quad ; \quad i = 1, 2, 3,$$

y las correspondientes ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_1}, \quad \dot{Q}_2 = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P_2}, \quad \dot{P}_1 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_1}, \quad \dot{P}_2 = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q_2}.$$

Permítase ahora reescribir la función Hamiltoniana en el *espacio de fase extendido*.

Para ello, se introduce un nuevo par de variables conjugadas, (T, t) :

$$\begin{aligned} \Pi &= T + \hat{H} \\ &= T + \frac{1}{2D} \left[P_1^2 + P_2^2 + P_1 \frac{\partial}{\partial Q_2} (f^2 + g^2) - P_2 \frac{\partial}{\partial Q_1} (f^2 + g^2) \right] - \hat{\Gamma}(Q_1, Q_2). \end{aligned}$$

Nótese que,

$$\dot{t} = \frac{\partial \Pi}{\partial T} = 1, \quad \text{y} \quad \dot{T} = -\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0, \quad \rightarrow \quad T = -\hat{H} = \text{cte.}$$

En general, si \hat{H} depende explícitamente del tiempo, *i.e.*, $\hat{H} = \hat{H}(Q, P, t)$, es posible entonces definir un Hamiltoniano tiempo-dependiente, $\Pi = \Pi(Q, P, t, T) \equiv \hat{H}(Q, P, t) + T$, con T , el conjugado de t . Introduciendo el *tiempo ficticio*, o *regularizado*,

$$dt = D ds, \quad \text{o} \quad \frac{d}{dt} = \frac{1}{D} \frac{d}{ds},$$

la función Hamiltoniana transformada, se deriva como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{D} \frac{dQ}{ds} = \frac{\partial \Pi}{\partial P} & \rightarrow & \frac{dQ}{ds} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial P}, \\ \dot{P} &= \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{D} \frac{dP}{ds} = -\frac{\partial \Pi}{\partial Q} & \rightarrow & \frac{dP}{ds} = -\frac{\partial \Pi^*}{\partial Q},\end{aligned}$$

con $\Pi^* \equiv D \Pi$. Como $\partial \Pi^* / \partial Q = \Pi \partial D / \partial Q + D \partial \Pi / \partial Q = D \partial \Pi / \partial Q$, entonces $\Pi = 0$, a lo largo de la solución. Así, el nuevo Hamiltoniano, Π^* , transforma en:

$$\begin{aligned}\Pi^* &= D \Pi = D (\hat{H} + T), \\ &= DT + \frac{1}{2} \left[P_1^2 + P_2^2 + P_1 \frac{\partial}{\partial Q_2} (f^2 + g^2) - P_2 \frac{\partial}{\partial Q_1} (f^2 + g^2) \right] - D \hat{\Gamma},\end{aligned}\quad (43)$$

Más aún, las correspondientes ecuaciones de Hamilton asociadas a (43), estarán entonces dadas por:

$$\begin{aligned}Q'_1 &= \frac{\partial \Pi^*}{\partial P_1} = P_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial |\Theta|^2}{\partial Q_2}, \\ Q'_2 &= \frac{\partial \Pi^*}{\partial P_2} = P_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial |\Theta|^2}{\partial Q_1}, \\ P'_1 &= -\frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_1} = -T \frac{\partial D}{\partial Q_1} - \frac{1}{2} \left[P_1 \frac{\partial^2 |\Theta|^2}{\partial Q_1 \partial Q_2} - P_2 \frac{\partial^2 |\Theta|^2}{\partial Q_1^2} \right] + \frac{\partial}{\partial Q_1} (D \hat{\Gamma}), \\ P'_2 &= -\frac{\partial \Pi^*}{\partial Q_2} = -T \frac{\partial D}{\partial Q_2} + \frac{1}{2} \left[P_2 \frac{\partial^2 |\Theta|^2}{\partial Q_2 \partial Q_1} - P_1 \frac{\partial^2 |\Theta|^2}{\partial Q_2^2} \right] + \frac{\partial}{\partial Q_2} (D \hat{\Gamma}),\end{aligned}\quad (44)$$

con $\Theta(Q_1, Q_2) \equiv f(Q_1, Q_2) + i g(Q_1, Q_2)$, y $|\Theta|^2 = f^2 + g^2$. Nótese, de (43), que la singularidad del problema se ve asociada al término $D\hat{\Gamma}$, i.e.,

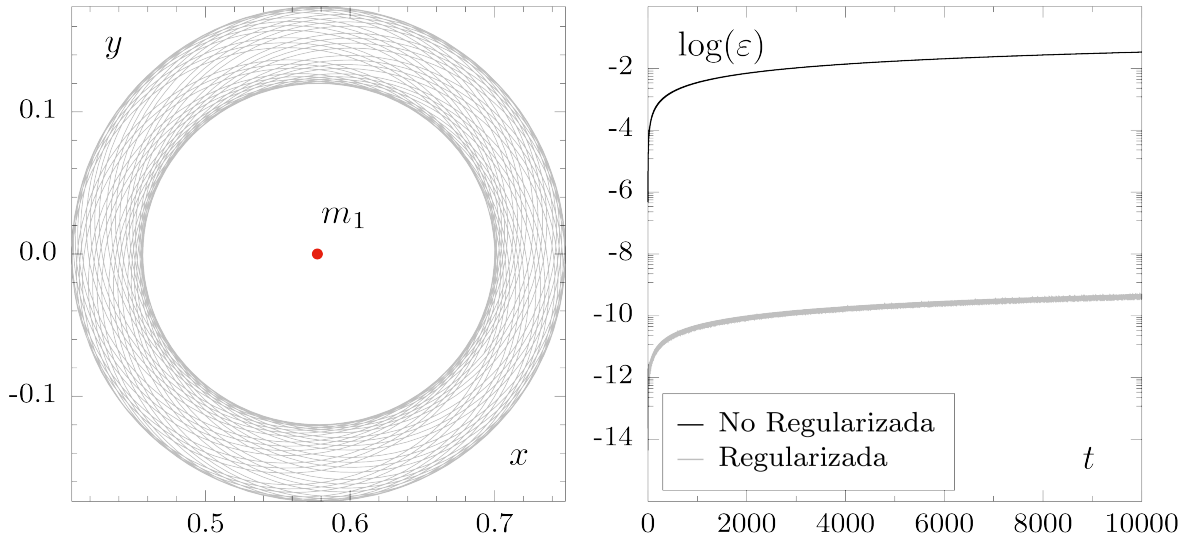
$$D\hat{\Gamma} = D \left[\frac{m_1}{[(Q_1^2 - Q_2^2 + x_j - x_1)^2 + (2 Q_1 Q_2 + y_j - y_1)^2]^{1/2}} (1 - \beta) \right. \\ \left. + \frac{m_2}{[(Q_1^2 - Q_2^2 + x_j - x_2)^2 + (2 Q_1 Q_2 + y_j - y_2)^2]^{1/2}} \right. \\ \left. + \frac{m_3}{[(Q_1^2 - Q_2^2 + x_j - x_3)^2 + (2 Q_1 Q_2 + y_j - y_3)^2]^{1/2}} \right]. \quad (45)$$

4.2.1. Regularización del problema restringido. A modo de ejemplo, se expone cómo el sistema de ecuaciones (44), puede ser usado para regularizar las ecuaciones de movimiento de la partícula de masa infinitesimal, alrededor del punto $\bar{P}_1(x_1, y_1)$.

Sean, $z = q_1 + i q_2$, y $w = Q_1 + i Q_2$, las coordenadas complejas de la partícula de prueba, en los planos físico y paramétrico, respectivamente. Así mismo, en el plano físico, la primaria m_1 estará situada en $z_1 = x_1 + i y_1$. La transformación $z = w^2 + z_1$, regulariza entonces la singularidad de las ecuaciones de movimiento en \bar{P}_1 . La función z , también llamada *transformación de Levi-Civita*, es una transformación de tipo *local*, pues sólo una singularidad es eliminada de manera simultánea. La transformación de $D\hat{\Gamma}$, en términos de la nueva variable compleja, w , requiere de las expresiones de r_1 , r_2 , y r_3 , en términos de ésta:

$$\begin{aligned}
r_1 &= |z - z_1| = |w^2|, \\
r_2 &= |z - z_2| = |w^2 + z_1 - z_2|, \\
r_3 &= |z - z_3| = |w^2 + z_1 - z_3|.
\end{aligned} \tag{46}$$

Figura 19. Regularización de las ecuaciones de movimiento alrededor de m_1 . En el panel superior, la trayectoria de la partícula de prueba para el conjunto de condiciones previamente descrito (la posición de m_1 está representada por medio del punto rojo). En el panel inferior, la conservación de la constante, en escala logarítmica, para las soluciones, no regularizada (negro), y regularizada (gris). En ambas soluciones, el paso dado al integrador (RK8(7) DP), es $dt = 0.05$.

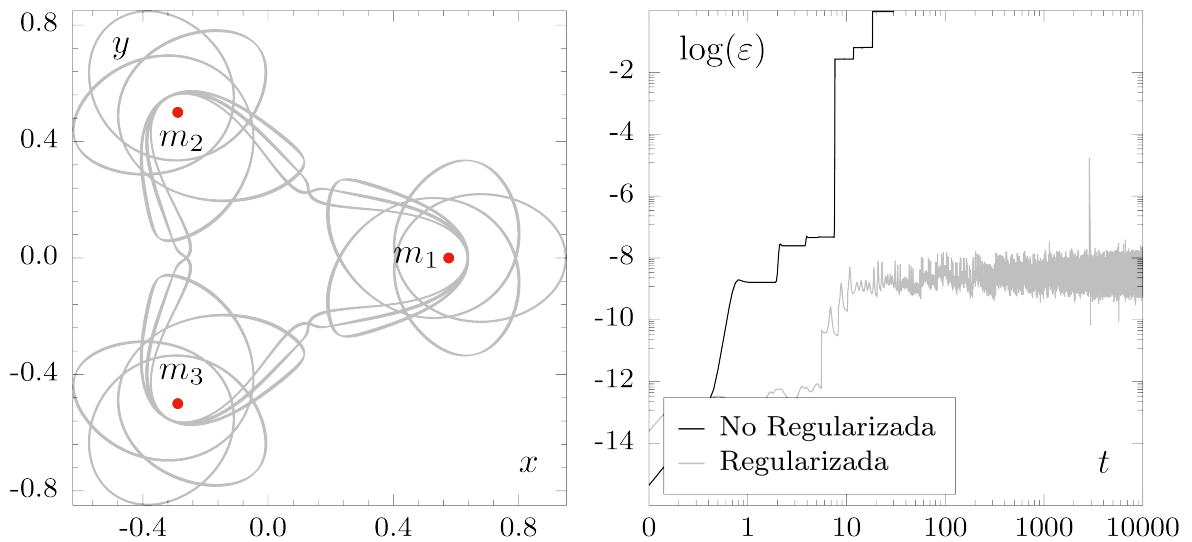


Así, de (46), se sigue entonces,

$$D\hat{\Gamma} = D \left(\frac{m_1}{|w^2|} (1 - \beta) + \frac{m_2}{|w^2 + z_1 - z_2|} + \frac{m_3}{|w^2 + z_1 - z_3|} \right). \tag{47}$$

Puesto que $D = 4(Q_1^2 + Q_2^2) = 4|w^2|$, el término $D\hat{\Gamma}$, no contiene singularidades en \bar{P}_1 . En la Figura 19, se presenta la evolución, alrededor de la primaria m_1 , de la trayectoria correspondiente a la órbita de prueba definida previamente (panel izquierdo), así como la conservación de la constante Jacobiana, para las soluciones regularizada (gris) y no regularizada (negro). Tales soluciones han sido determinadas haciendo uso del método iterativo de paso fijo, RK(8)7 DP, con $dt = 0.05$. De ésta, se observa entonces cómo para un mismo paso de integración, la solución regularizada mejora de manera considerable la conservación de la constante.

Figura 20. Regularización de las ecuaciones de movimiento para una órbita alrededor de las tres primarias $((q_1, q_2, p_1, p_2) \approx (0.20689655, 0.05835544, 0.06340194, -0.22478868), C = 3.52$ y $\alpha = \beta = 0)$. En el panel izquierdo, la trayectoria de la partícula para 10^4 unidades de integración. En el panel derecho, la conservación de la constante, en escala logarítmica, para las soluciones, no regularizada (negro), y regularizada (gris). En ambas soluciones, el paso dado al integrador (RK8(7) DP), es $dt = 0.05$.



La transformación de Levi–Civita resulta útil, en cuanto a trayectorias en torno a una sola primaria concierne. ¿Qué sucede entonces, en aquellos casos en los cuales la trayectoria evoluciona alrededor de más de una primaria? A pesar de regularizar

de manera local las ecuaciones de movimiento, se hace posible empero, adaptar dicha transformación, al menos de manera numérica, acorde a la dinámica de la partícula. Así, a medida que la trayectoria evoluciona, la transformación se adapta también, permitiendo entonces sortear cada posible singularidad. La Figura 20, presenta la evolución de una partícula que orbita alrededor de las tres primarias (panel izquierdo). Del panel derecho, se observa entonces cómo, a medida que la partícula no regularizada evoluciona (solución en color negro), se vulnera la restricción antes impuesta ($H = C/2$). La conservación de ésta, demanda un paso de integración bastante más pequeño. Esto, sin embargo, requiere de un mayor tiempo de cómputo, lo cual, para una cantidad considerable de trayectorias, resulta poco práctico. Es así como el proceso de regularización se hace imprescindible. La solución numérica derivada del sistema regularizado, se presenta entonces en color gris. Nótese cómo ésta, para el mismo paso de integración, conserva dicha restricción, en promedio, mejor que una parte en 10^{-8} , siendo, en el peor de los casos, algo mayor que una parte en 10^{-5} .

4.3. INDICADOR DE CAOS: THE GENERALIZED ALIGNMENT INDEX OF ORDER k – EL MÉTODO DE GALI $_k$

Con el objeto de explorar la dinámica en detalle del sistema Hamiltoniano referente al problema restringido, se sigue la evolución de los elementos de volumen formados por los k vectores desviación unitarios, concernientes a una órbita de prueba. El comportamiento de dichos elementos de volumen se ve altamente influenciado por la naturaleza regular o caótica del movimiento, el número de vectores desviación, su dependencia (o independencia) lineal, y el espectro derivado de los exponentes de Lyapunov. La diferencia en la evolución temporal de éstos, es usada para identificar de manera rápida y eficaz, la naturaleza de la dinámica orbital para todo el espacio

de fase, haciendo uso de cantidades que permiten distinguir entre movimiento caótico y cuasi-periódico, en sistemas n -dimensionales.

Se introduce entonces el método, *The Generalized Alignment Index of Order k* , como el volumen del paralelepípedo, cuyas aristas son los k vectores unitarios desviación de la órbita de prueba, inicialmente linealmente independientes. Se presenta de manera analítica el indicador, y se comprueba numéricamente, que para órbitas caóticas, éste tiende de manera exponencial a cero, con exponentes que engloban algunos de los valores correspondientes a los exponentes característicos de Lyapunov. Más aún, para el caso de movimiento regular, se expone cómo GALI fluctúa alrededor de un valor no nulo, para $2 \leq k \leq N$, tendiendo, sin embargo a cero, para $N < k \leq 2N$, en leyes de potencias que dependen, en mayor medida, de la cantidad de vectores desviación empleados.

Considérese el sistema Hamiltoniano autónomo de n grados de libertad, cuya función Hamiltoniana se define como:

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n) = h = \text{cte}, \quad (48)$$

con q_i y p_i ($i = 1, 2, \dots, n$), las n coordenadas generalizadas y momentos conjugados, respectivamente. Cualquier órbita derivada de (48), se define entonces como $\mathbf{x}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$, con $x_i = q_i$, y $x_{i+n} = p_i$. Así, la evolución temporal de ésta, se ve gobernada por las ecuaciones de movimiento de Hamilton,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \Gamma(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right), \quad (49)$$

en tanto, cualquier vector desviación inicial, $\mathbf{w}(0) = (dx_1(0), \dots, dx_{2n}(0))$, asociado a dicha órbita, obedece al conjunto de ecuaciones variacionales,

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{M}(\mathbf{x}(t))\mathbf{w}, \quad (50)$$

con $\mathbf{M} = \partial\Gamma/\partial\mathbf{x}$, la matriz Jacobiana de Γ .

El método de GALI_k , permite entonces determinar si dos o más vectores desviación, normalizados (norma unitaria), se hacen linealmente dependientes. La idea fundamental, en contraste a la empleada en el cálculo de los exponentes característicos de Lyapunov, es la introducción de dos o más vectores desviación adicionales, con respecto a la órbita de referencia. Así, la relación entre éstos, hace posible sortear la dificultad de la lenta convergencia expuesta por dichos exponentes, a medida que $t \rightarrow \infty$. Puesto que sólo resulta de interés la dirección de los ya mencionados vectores desviación, los mismos se normalizan a cada paso de tiempo, conservando su norma igual a la unidad, *i.e.*,

$$\hat{w}_i(t) = \frac{\mathbf{w}_i(t)}{\|\mathbf{w}_i(t)\|}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (51)$$

con $\|\cdot\|$, la norma usual. Entonces, de acuerdo con (SKOKOS, BOUNTIS y ANTONOPOULOS, 2007), GALI_k se define como el producto ‘exterior’ de los k vectores desviación unitarios (geométricamente, el producto exterior representa el volumen

del k -paralelogramo, cuyas aristas, están dadas por los k vectores desviación unitarios)

$$\text{GALI}_k(t) = \|\hat{w}_1(t) \wedge \hat{w}_2(t) \wedge \dots \wedge \hat{w}_k(t)\|, \quad (52)$$

con $2 \leq k \leq 2n$. De (52), es evidente que si al menos dos vectores desviación se hacen linealmente dependientes, el producto exterior, y por tanto, GALI_k , serán nulos. El método de GALI es una generalización de SALI: *the Smaller Alignment Index* ($\text{GALI}_2 \propto \text{SALI}$) (SKOKOS, 2001)³. Ésta consiste en el uso de información de más de dos vectores desviación, derivados de la órbita de referencia, resultando así, una distinción entre movimiento regular y caótico, mucho más rápida y eficaz que la provista por SALI.

Acorde con (SKOKOS, BOUNTIS y ANTONOPOULOS, 2007; MANOS, SKOKOS y ANTONOPOULOS, 2012), para el caso de órbitas regulares, el comportamiento de GALI_k está dado por:

$$\text{GALI}_k(t) \propto \begin{cases} \text{constante} & \text{if } 2 \leq k \leq n, \\ \frac{1}{t^{2(k-n)}} & \text{if } n < k \leq 2n. \end{cases} \quad (53)$$

Así mismo, para órbitas caóticas, la totalidad de vectores desviación se hacen lineal-

³ (SZÉLL y col., 2004; PANAGOPOULOS, BOUNTIS y SKOKOS, 2004; BOUNTIS y SKOKOS, 2006; CAPUZZO-DOLCETTA y col., 2007; MANOS y col., 2008) – SALI ha sido ampliamente usado como indicador de caos en diversos sistemas dinámicos.

mente dependientes, alineándose entre sí, en la dirección definida por el máximo exponente característico de Lyapunov (LCE), *i.e.*, $GALI_k$ tiende a cero de manera exponencial, bajo la ley de exponentes,

$$GALI_k(t) \propto e^{-[(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3) + \dots + (\sigma_1 - \sigma_k)]t}, \quad (54)$$

con $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, los primeros k LCE de la órbita.

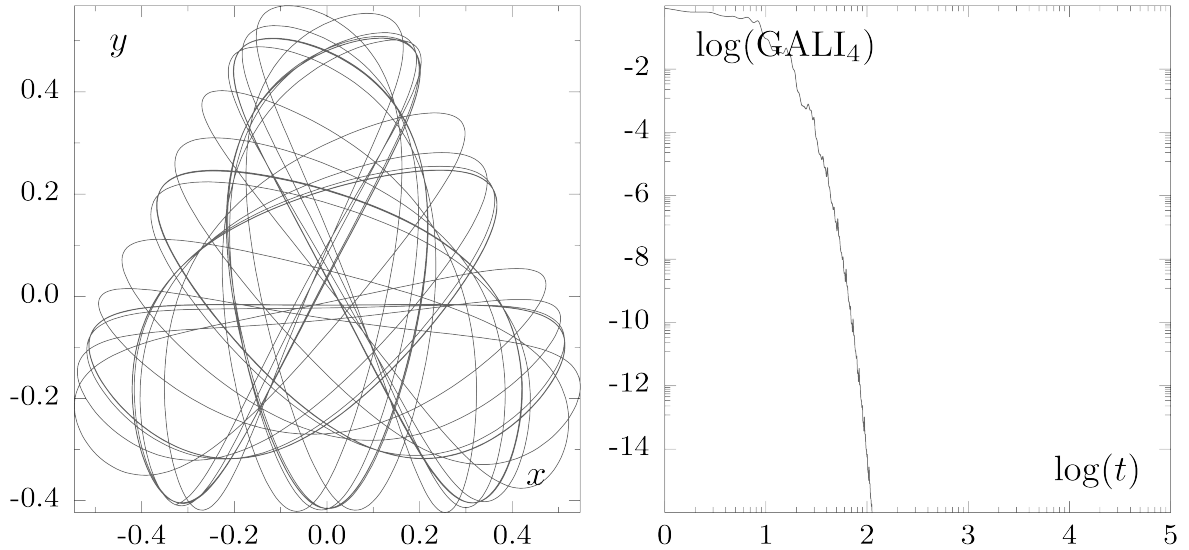
4.3.1. Validación del método. Con el objeto de validar las predicciones teóricas previamente descritas, se determina entonces el valor de GALI para algunas órbitas de prueba del sistema Hamiltoniano de Hénon–Heiles (el potencial de Hénon–Heiles fue primero propuesto como una versión simplificada del potencial gravitacional experimentado por una estrella en presencia de un centro galactico) generalizado (DUBEIBE, RIAÑO-DONCEL y ZOTOS, 2018). El sistema de Hénon–Heiles es considerado un paradigma en sistemas Hamiltonianos tiempo–independientes. Hogaño, es quizá uno de los trabajos más citados en el ámbito de sistemas complejos, siendo su dinámica orbital explorada en demasía.

Considérese entonces el sistema

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{y^3}{3} + \delta [x^4 y + x^2 y^3 - y^5 - (x^2 + y^2)^2].$$

El parámetro δ , provee una fácil transición entre los sistemas clásico (HH) (HÉNON y HEILES, 1964) y generalizado (GHH) (DUBEIBE, RIAÑO-DONCEL y ZO-

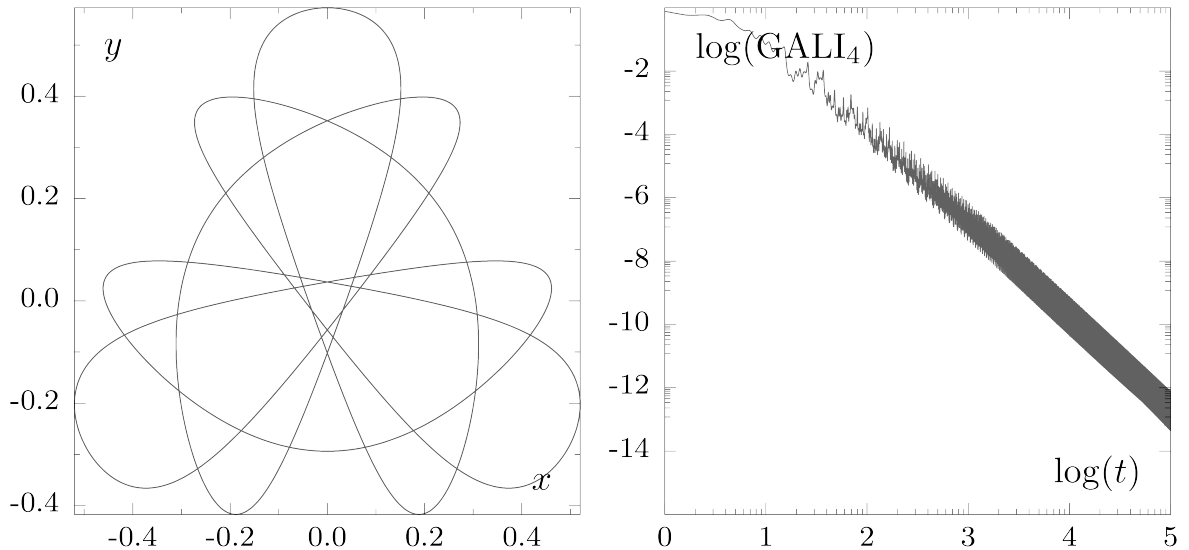
Figura 21. Panel izquierdo: órbita (caótica) de prueba para el sistema de Hénon–Heiles con $H = 0.125$, $\delta = 0$, y $(x, y, p_x, p_y) \approx (0, 0.20837720, 0.44531470, 0.11960658)$. Panel derecho: evolución en el tiempo de GALI_4 para la órbita de prueba expuesta en el panel izquierdo.



TOS, 2018). En las Figuras 21 y 22, se presentan las órbitas de prueba regular y caótica (paneles izquierdos), respectivamente. La evolución de GALI_4 (en lo que sigue, $k = 4$, *i.e.*, se hará uso de cuatro vectores desviación), para tales órbitas, y para un conjunto de vectores desviación inicialmente ortonormales, $\hat{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\hat{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\hat{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\hat{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$, es expuesta en los paneles derechos de dichas figuras.

Nótese la diferencia en los tiempos requeridos para la distinción entre movimiento regular y caótico. En general, el cálculo del máximo exponente característico de Lyapunov, necesita de al menos 10^4 unidades de integración para la convergencia del mismo (SKOKOS, BOUNTIS y ANTONOPOULOS, 2007). Empero, GALI_4 provee información acerca de la caoticidad de la órbita de prueba en $t < 200$.

Figura 22. Panel izquierdo: órbita (regular) de prueba para el sistema de Hénon–Heiles con $H = 0.125$, $\delta = 0$, y $(x, y, p_x, p_y) \approx (0, 0.35207000, 0.36428445, 0.14979000)$. Panel derecho: evolución en el tiempo de $GALI_4$ para la órbita de prueba expuesta en el panel izquierdo.

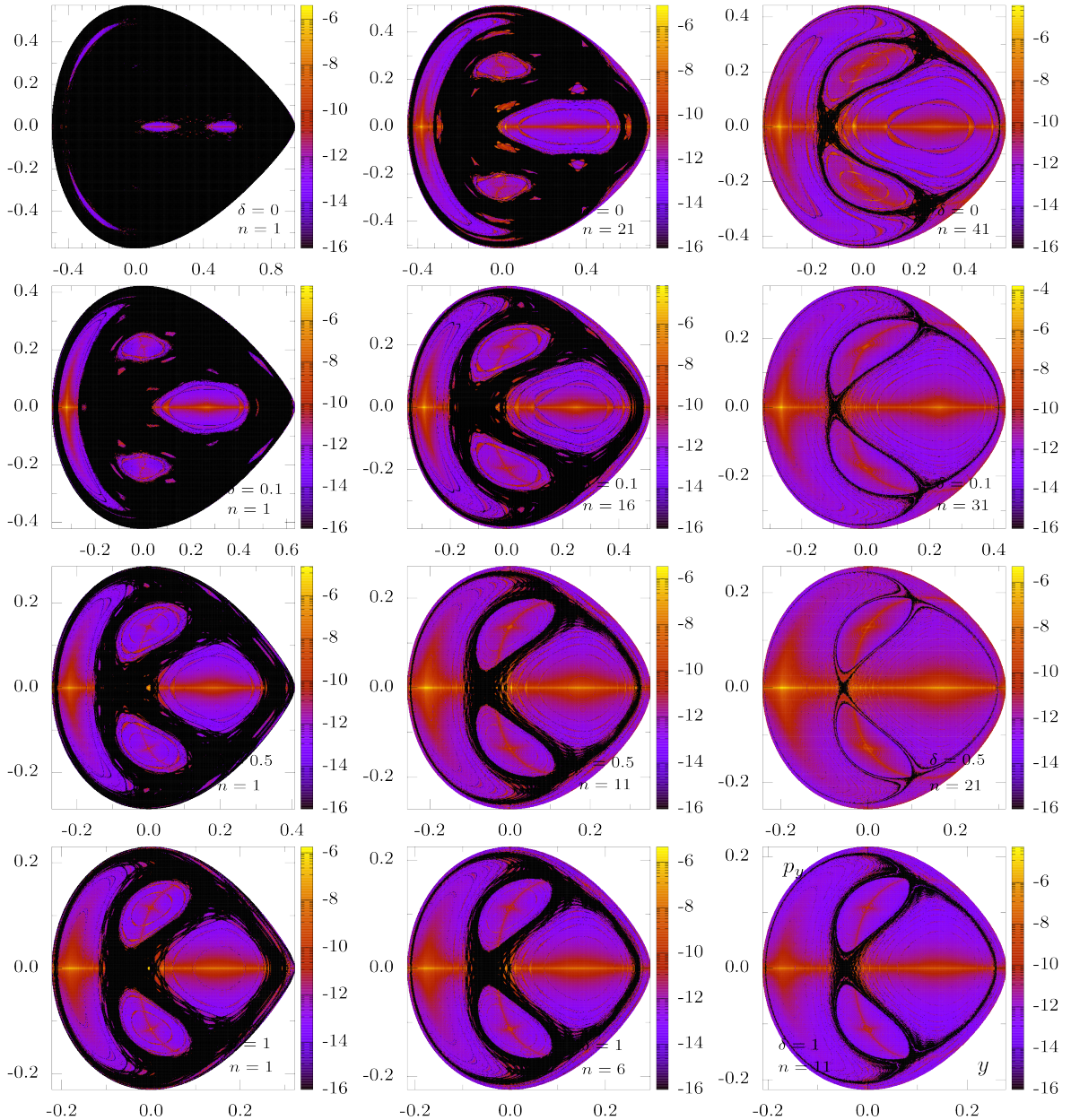


De las Figuras 21 y 22, se observa entonces que, indistintamente, $GALI_4$ alcanza el límite de precisión de máquina (10^{-16}), empleando sin embargo, tiempos de integración disímiles. La diferencia entre éstos, es lo que permite distinguir de manera rápida y eficaz la naturaleza caótica de las trayectorias.

El comportamiento expuesto por $GALI_2$ (\approx SALI) ha sido ampliamente usado para distinguir entre regiones caóticas y regulares en diversos sistemas dinámicos (SKOKOS y col., 2004; SZÉLL y col., 2004; BOUNTIS y SKOKOS, 2006; DUBEI-BE, RIAÑO-DONCEL y ZOTOS, 2018). Así, integrando el conjunto de condiciones iniciales inmersas en determinada malla numérica, y asignando a cada punto de dicha malla un color acorde con el valor final del indicador, para un tiempo de integración previamente establecido, resulta posible obtener un panorama completo de la dinámica para todo el espacio de configuración, para un sin número de sistemas

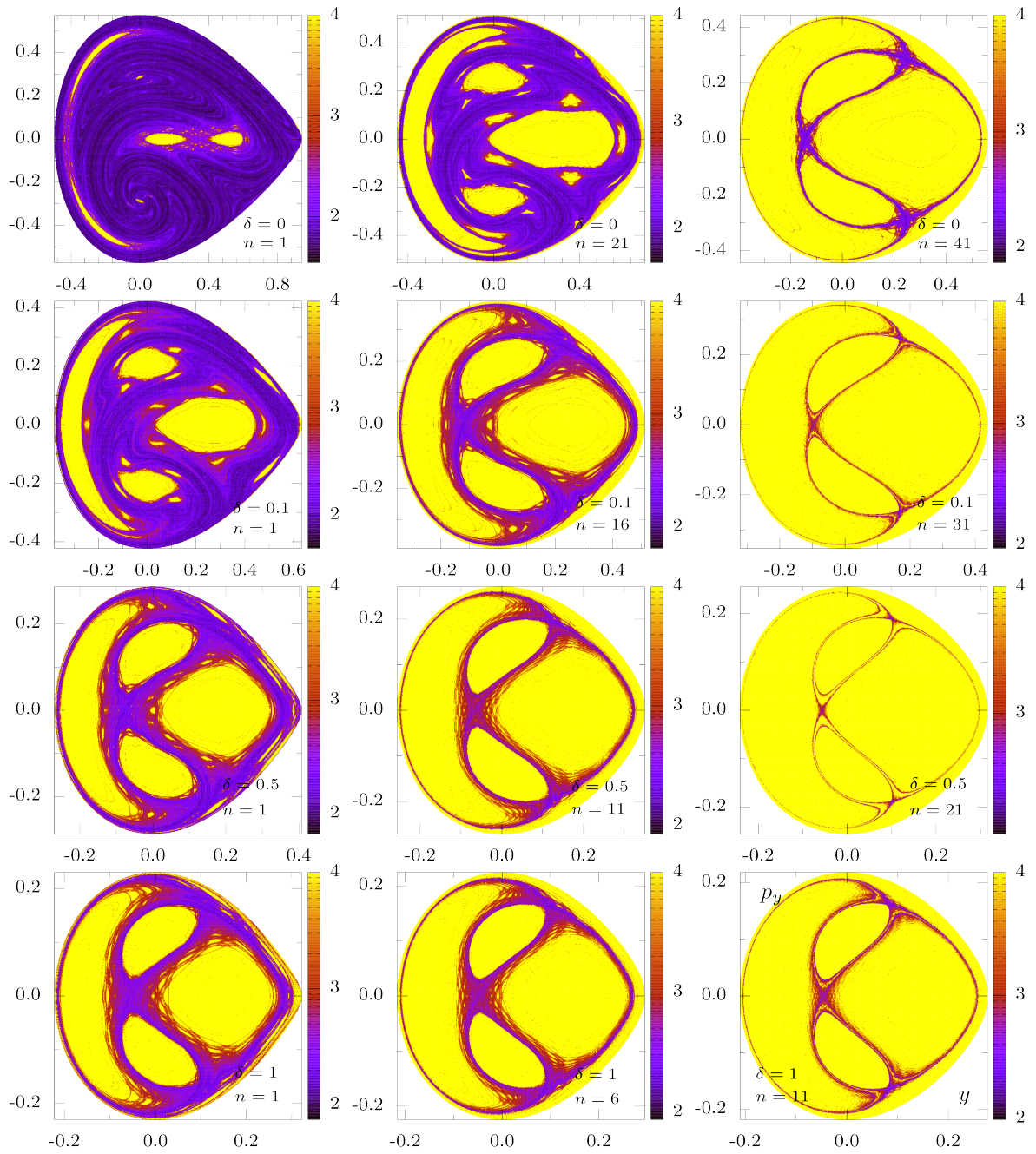
Hamiltonianos de significancia física.

Figura 23. Dinámica orbital del sistema Hénon–Heiles generalizado. Las paletas de color (en escala logarítmica) indican el valor final del indicador, para un tiempo de integración final, $t = 10^4$. Para mayor claridad con respecto a los parámetros δ y n , véase (DUBEIBE, RIAÑO-DONCEL y ZOTOS, 2018).



Como ya se ha mencionado, $GALI_4$ tiende a cero, tanto para órbitas caóticas como

Figura 24. Tiempos de saturación (tiempo requerido para alcanzar el cero numérico) para los casos expuestos en la Figura 23. Las paletas de color (en escala logarítmica) indican el tiempo requerido para $GALI_4 \leq 10^{-16}$.



regulares. Sin embargo, las tasas de convergencia difieren, permitiendo distinguir fácilmente entre unas y otras. Se pretende entonces hacer uso de este principio, con el fin de discernir entre movimiento regular y caótico. Permítase ilustrar lo anterior, al llevar a cabo un estudio global de la dinámica del sistema de Hénon–Heiles generalizado (DUBEIBE, RIAÑO-DONCEL y ZOTOS, 2018). En particular, se hace uso de 625×625 condiciones iniciales, y se determina el valor de $GALI_4$, para el mismo conjunto de vectores desviación inicialmente ortonormales, previamente establecido. En la Figura 23, se presenta el valor de $GALI_4$, en escala logarítmica, para $t = 10^4$. Las zonas para las cuales $GALI_4 \approx 10^{-16}$, corresponden a regiones pobladas por trayectorias de naturaleza caótica. Más aún, de la Figura 24, se extrae también el tiempo de saturación (tiempo requerido para converger a la tolerancia numérica), para tales trayectorias. Así, debido a la rápida convergencia en estas regiones, y de las condiciones de proporcionalidad en (53) y (54), para órbitas regulares y caóticas, respectivamente, resulta posible concluir, de manera general, que el tiempo empleado por el indicador para alcanzar la tolerancia numérica, es mucho mayor para aquellas trayectorias de naturaleza regular, que el requerido por las caóticas (para sistemas 2D Hamiltonianos, existe sólo un LCE positivo, σ_1 . Más aún, $\sigma_2 = -\sigma_3 = 0$, y $\sigma_4 = -\sigma_1$ (SKOKOS, BOUNTIS y ANTONOPOULOS, 2007). Por tanto, y de (53) y (54), $GALI_4(t) \propto t^{-4}$, y $GALI_4(t) \propto e^{-4\sigma_1 t}$, para órbitas regulares y caóticas, respectivamente). Estas tasas de convergencia, permiten entonces, en lugar de registrar el valor del indicador para el tiempo final de integración (SALI), establecer un tiempo de saturación, t_s , suficiente para que $GALI_4 \approx 10^{-16}$. Si el valor del indicador, transcurrido t_s , es, por ejemplo, $> 10^{12}$, el correspondiente punto sobre la malla, y por tanto, la órbita asociada a éste, será considerado regular. De los diferentes paneles expuestos en la Figura 24, se establece entonces un tiempo de saturación, $t_s = 1000$.

5. DINÁMICA ORBITAL

Previo a explorar cómo la estructura orbital del ERFBP foto–gravitacional se ve alterada debido a la inclusión del factor de radiación, β , permítase establecer los criterios usados para tal fin. En general, existen tres tipos de posibles trayectorias para la partícula de prueba: (i) escape ha ‘infinito’, (ii) movimiento acotado alrededor de una o más primarias, y (iii) colisión con una de ellas. De éstos, los dos primeros pueden ser determinados de manera numérica como sigue: el movimiento será considerado como acotado, si para un tiempo de integración t_{max} , la partícula de prueba permanece confinada dentro de la región inmersa en una circunferencia de radio R_e , con centro en el marco de referencia sinódico; de no ser el caso, se considera entonces que la trayectoria escapa a infinito, si además, la partícula intersecta la circunferencia, con velocidad apuntando al exterior de ésta, para $t_e < t_{max}$. Acorde con (NAGLER, 2004; ZOTOS, 2016), $t_{max} = 10^4$, y $R_e = 20$ (el valor dado al radio de escape corresponde al necesario para garantizar la nímia influencia gravitacional de las primarias sobre la partícula. Este criterio se sustenta por medio de gran cantidad de simulaciones numéricas aleatorias, para las cuales se observa cómo aquellas trayectorias que superan el radio de escape, siguen alejándose de manera exponencial de la región de interés). Concerniente al tercer tipo de trayectorias, se considera colisión con una de las primarias, el cruce de la partícula con cualquiera de los discos de radio $R_c = 10^{-4}$, definidos alrededor de éstas.

La totalidad del espacio de fase estará dividido entonces, en regiones de escape, de colisión, y de movimiento acotado. Más aún, gran parte de las regiones regulares se ven usualmente habitadas por condiciones iniciales cuyas trayectorias moldean

pequeñas islas de estabilidad. En diversos sistemas dinámicos, sin embargo, trayectorias de naturaleza caótica han sido también observadas (ZOTOS, 2014). Así, para aquellas regiones de movimiento acotado, se pretende entonces distinguir entre movimiento regular y caótico, haciendo uso del indicador $GALI_4$, con $t_s = 1000$ (§ 4.3).

En lo que sigue, se define como región de dispersión la cuadrícula $-2 \leq x, y \leq 2$, con 625×625 condiciones iniciales, regularmente distribuidas. Más aún, haciendo uso de diagramas de color (diagramas en los cuales se asigna un color específico a cada pixel, acorde con el tipo de órbita), se pretende exponer cómo la estructura orbital del ERFBP foto-gravitacional, para sus diferentes casos de estudio (con $\alpha = 0$), se ve alterada debido a la variación gradual del factor de radiación, $\beta \in [0, 1]$. El código de color usado es el siguiente: naranja \rightarrow escape; amarillo \rightarrow colisión con m_1 ; rojo \rightarrow colisión con m_2 ; azul \rightarrow colisión con m_3 , verde \rightarrow movimiento regular; gris oscuro \rightarrow movimiento caótico; gris claro \rightarrow zonas de exclusión. Cabe mencionar que para una primera clasificación del espacio de fase (órbitas de colisión, escape y movimiento acotado), se hizo uso de un algoritmo Bulirsch–Stoer de paso adaptativo ($\epsilon = 10^{-12}$) (BULIRSCH y STOER, 1966), en tanto, para lograr la distinción entre movimiento regular y caótico (la evaluación de los vectores desviación debe darse para los mismos tiempos de integración), la implementación de un Runge–Kutta (8)7 Dormand–Prince de paso fijo ($dt = 0.05$) fue necesaria. Finalmente, para aquellas órbitas en las cuales la partícula penetra en la región de radio $R_r = 10^{-2}$, definida alrededor de cada primaria, la regularización de Levi–Civita es empleada (§ 4.2.1). Los resultados numéricos aquí consignados han sido desarrollados en FORTRAN 90.

5.1. RESULTADOS NUMÉRICOS Y CLASIFICACIÓN DE ÓRBITAS

Siguiendo la convención usual para las cuencas de escape del sistema HH (HÉNON y HEILES, 1964), los momentos conjugados iniciales $(p_1(0), p_2(0))$, se determinan de las condiciones $\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = 0$ y $\mathbf{r} \times \mathbf{p} > 0$, con $\mathbf{r} = q_1 \hat{\mathbf{i}} + q_2 \hat{\mathbf{j}}$, *i.e.*,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} = 0 \quad \rightarrow \quad q_1 p_1 = -q_2 p_2, \quad (55)$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} > 0 \quad \rightarrow \quad q_1 p_2 > q_2 p_1. \quad (56)$$

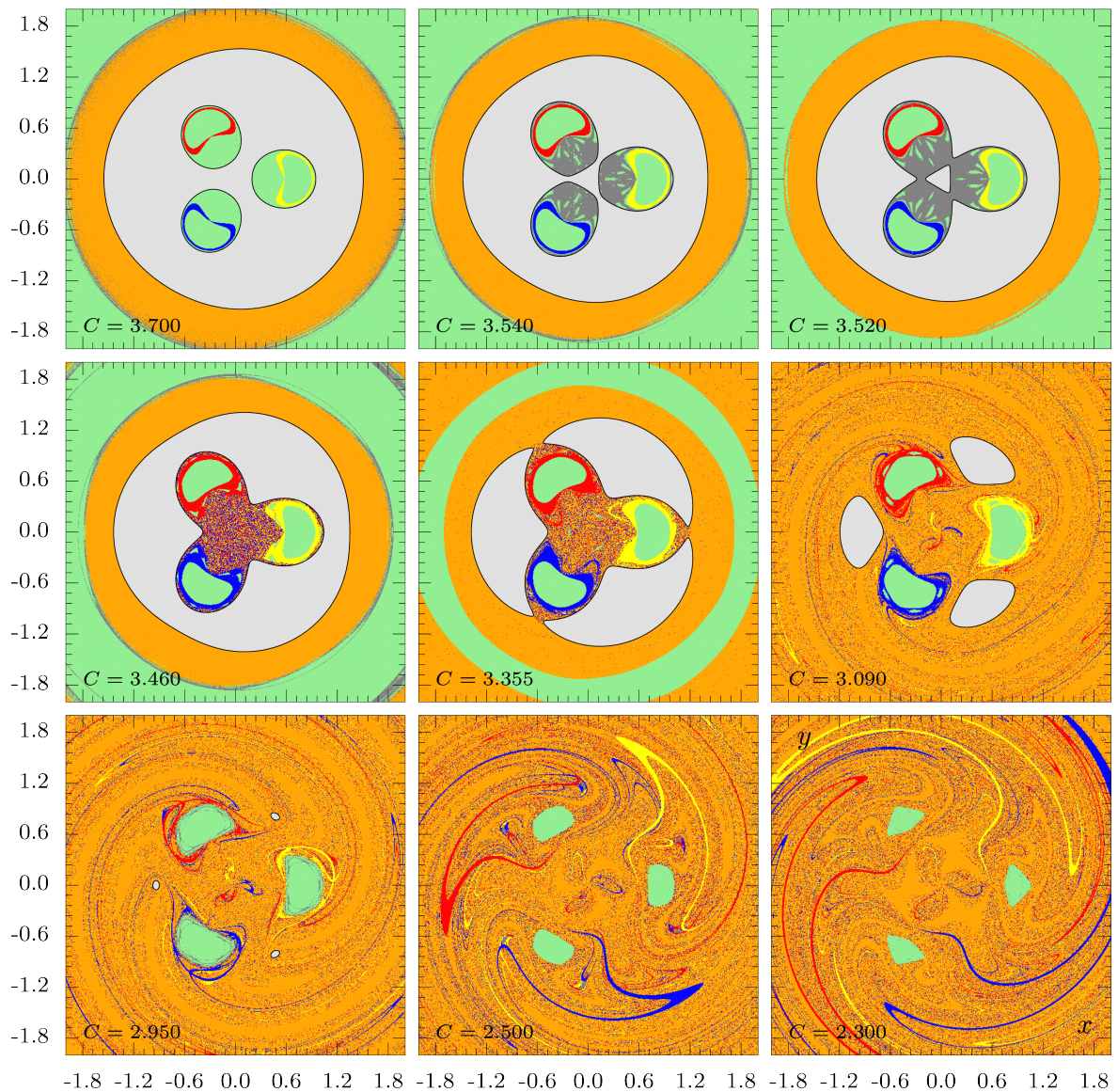
De $C/2 = -H$ y (56), se tiene entonces:

$$\begin{aligned} q_1 &= x, \\ q_2 &= y, \\ p_1 &= -q_2 \left(1 \pm \sqrt{2\Gamma - C/r} \right), \\ p_2 &= q_1 \left(1 \pm \sqrt{2\Gamma - C/r} \right), \end{aligned} \quad (57)$$

con $r = (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}$. Así, las trayectorias son lanzadas con coordenadas y momentos iniciales, definidos por la región de dispersión antes establecida, y por (57) y (56), respectivamente.

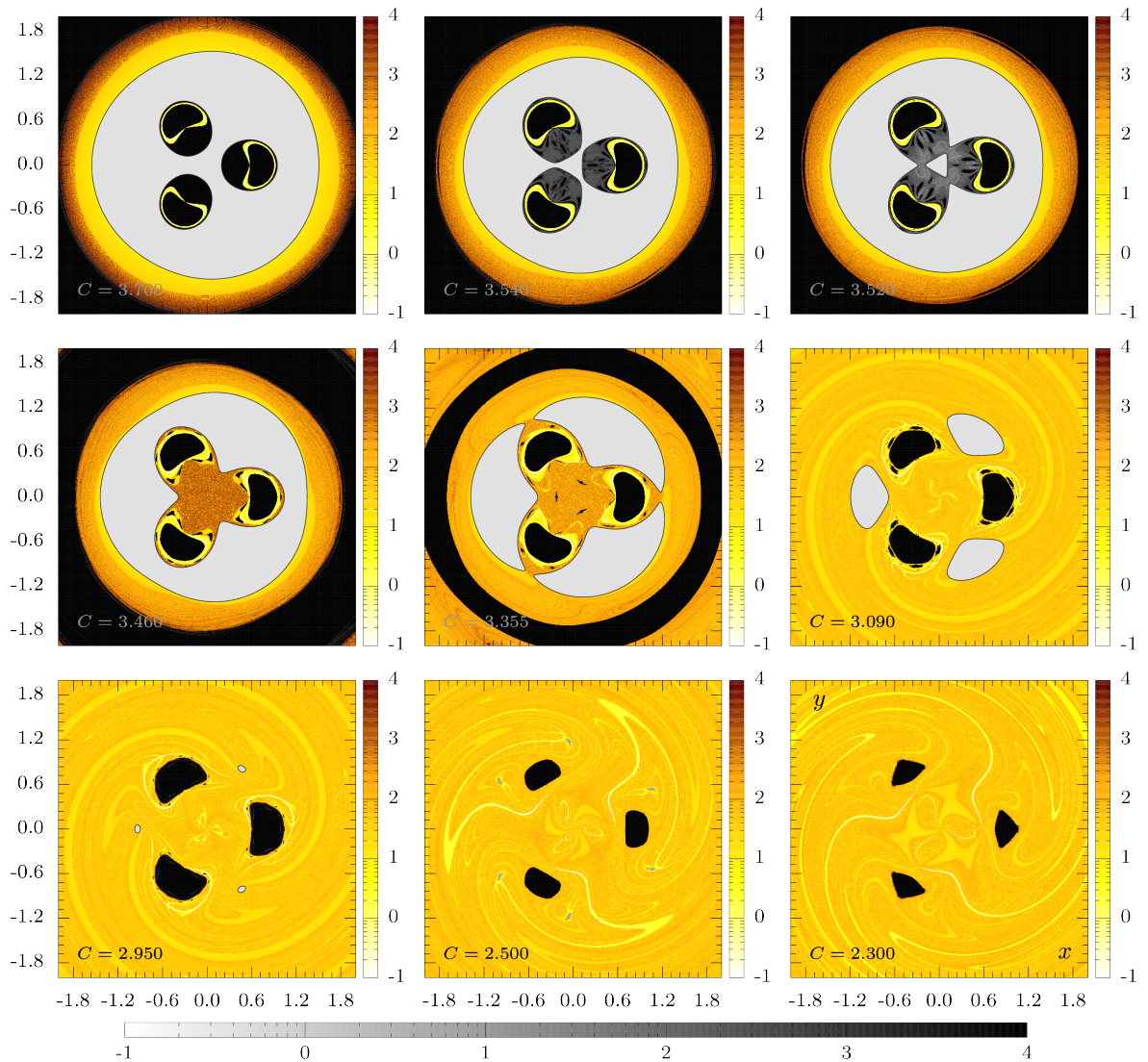
Se considerará primero, a modo de ejemplo, el caso $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$ ($\alpha = \beta = 0$), para diferentes valores de la constante Jacobiana, al igual que en (ZO-

Figura 25. Estructura orbital para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, $\alpha = \beta = 0$, y para diferentes valores de la constante Jacobiana. El código de color es el siguiente: naranja \rightarrow escape; amarillo \rightarrow colisión con m_1 ; rojo \rightarrow colisión con m_2 ; azul \rightarrow colisión con m_3 , verde \rightarrow movimiento regular; gris oscuro \rightarrow movimiento caótico; gris claro \rightarrow zonas de exclusión.



TOS, 2016). La Figura 25, revela entonces la estructura orbital para el espacio de configuración (x, y) . De ésta, se observan pequeñas islas de movimiento acotado situadas alrededor de cada primaria. Para valores pequeños de la constante, estas

Figura 26. Tiempos de escape, colisión, y saturación, para los casos tomados en consideración en la Figura 25. Las paletas en escala de amarillos, hacen referencia a los tiempos de escape y colisión requeridos por cada conjunto de condiciones iniciales. La paleta en escala de grises, corresponde a los tiempos de saturación para $GALI_4$. Paletas en escala logarítmica.



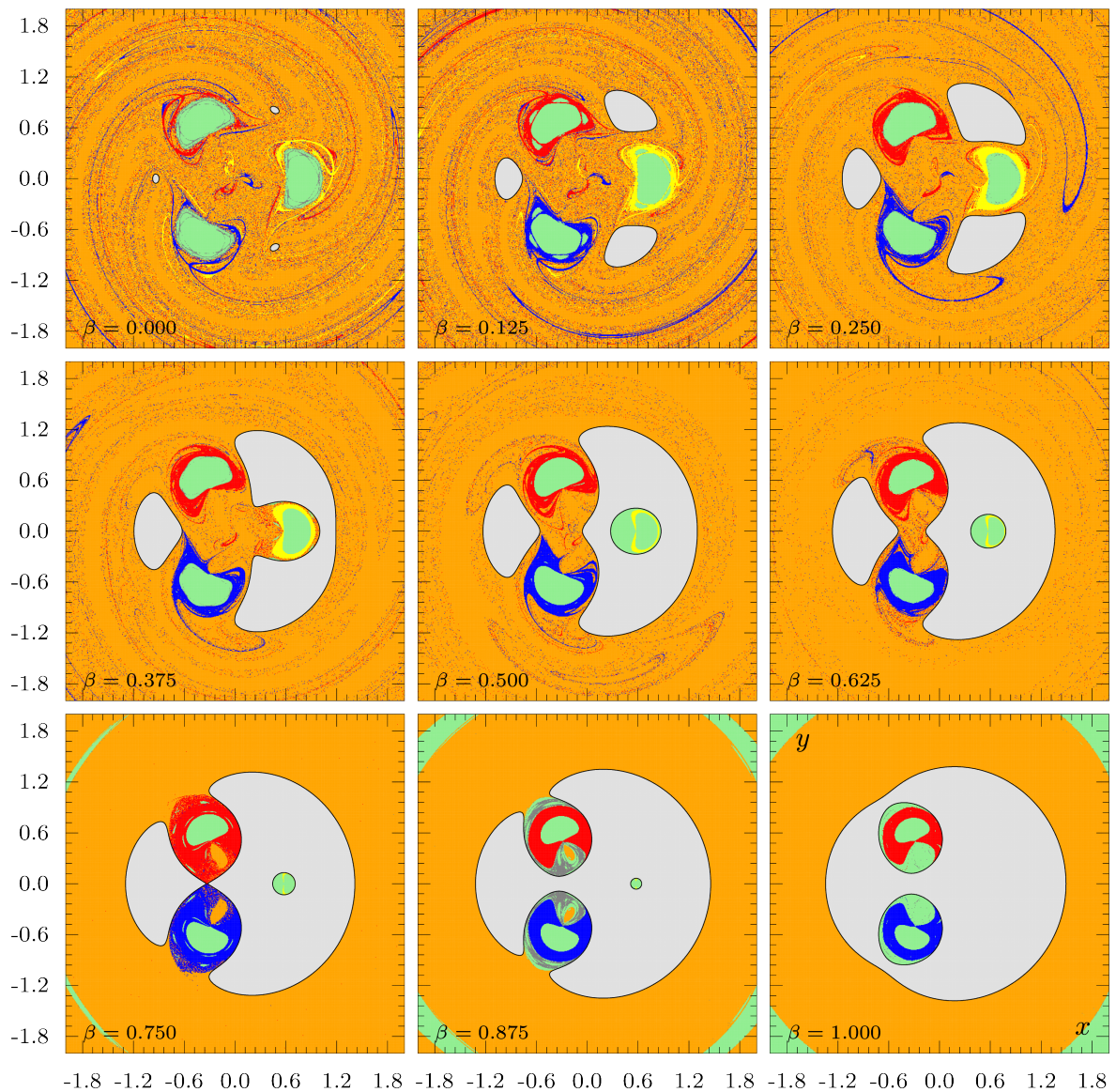
islas se ven pobladas, en mayor medida, por órbitas regulares, en tanto la vastedad del espacio de configuración se ve dominada por trayectorias de escape (paneles 6, 7, 8 y 9 $\rightarrow \downarrow$). Nótese además, cómo las regiones concernientes a trayectorias de colisión se cierran paulatinamente, llegando a rodear por completo dichas islas de

estabilidad. A medida que el valor dado a la constante va en aumento, las regiones de exclusión se cierran sobre las primarias, dando origen, primero, a una región en extremo caótica (paneles 4 y 5 $\rightarrow \downarrow$), para revelar finalmente, una estructura orbital casi exenta de caos. Para $3.52 \leq C \leq 3.54$, un fenómeno interesante toma lugar. En las regiones acotadas alrededor de las primarias (paneles 2 y 3 $\rightarrow \downarrow$), se hace notable la presencia de condiciones iniciales cuyo estado final corresponde a trayectorias de naturaleza caótica. Aquí, se hace salvedad en la sutil diferencia entre las denominadas ‘región caótica’ y ‘trayectoria caótica’: la primera, hace referencia a aquellas regiones del espacio de configuración altamente sensibles a cualquier variación en las condiciones iniciales; en tanto la otra, concierne al estado final alcanzado determinada trayectoria, para la cual, $GALI_4 \leq 10^{-16}$.

Para una visión más completa acerca de la dinámica global del sistema, en la Figura 26 se presentan entonces los tiempos de escape, colisión (paleta en escala de amarillos), y saturación (paleta en escala de grises), para los casos considerados previamente en la Figura 25. Los colores claros corresponden a trayectorias de rápida convergencia. En general, los tiempos de corta duración ($< 10^1$) presentan una fuerte correlación con trayectorias asociadas a colisión con cualquiera de las primarias. Más aún, los tiempos de escape parecen aumentar en regiones adyacentes a las zonas de transición entre dinámica de escape y movimiento acotado (y visceversa). Por otra parte, las zonas oscuras se corresponden con regiones de estabilidad (trayectorias regulares), en tanto aquellas grisáceas, asociadas a trayectorias caóticas, exponen tiempos de saturación $< 5 \times 10^2$, como era de esperar.

5.1.1. Caso 1: $m_1 = m_2 = m_3$. Considérese el caso $m_1 = m_2 = m_3$, con $\alpha = 0$ (§ 3.1) y $\beta \in [0, 1]$. Aquí, se toma $C = 2.95$ como paradigma para la constante de movimiento, pues permite exponer de manera clara, la evolución del espacio de

Figura 27. Estructura orbital para $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, $C = 2.95$, $\alpha = 0$, y para diferentes valores del factor de radiación, β . El código de color es el siguiente: naranja \rightarrow escape; amarillo \rightarrow colisión con m_1 ; rojo \rightarrow colisión con m_2 ; azul \rightarrow colisión con m_3 , verde \rightarrow movimiento regular; gris oscuro \rightarrow movimiento caótico; gris claro \rightarrow zonas de exclusión.

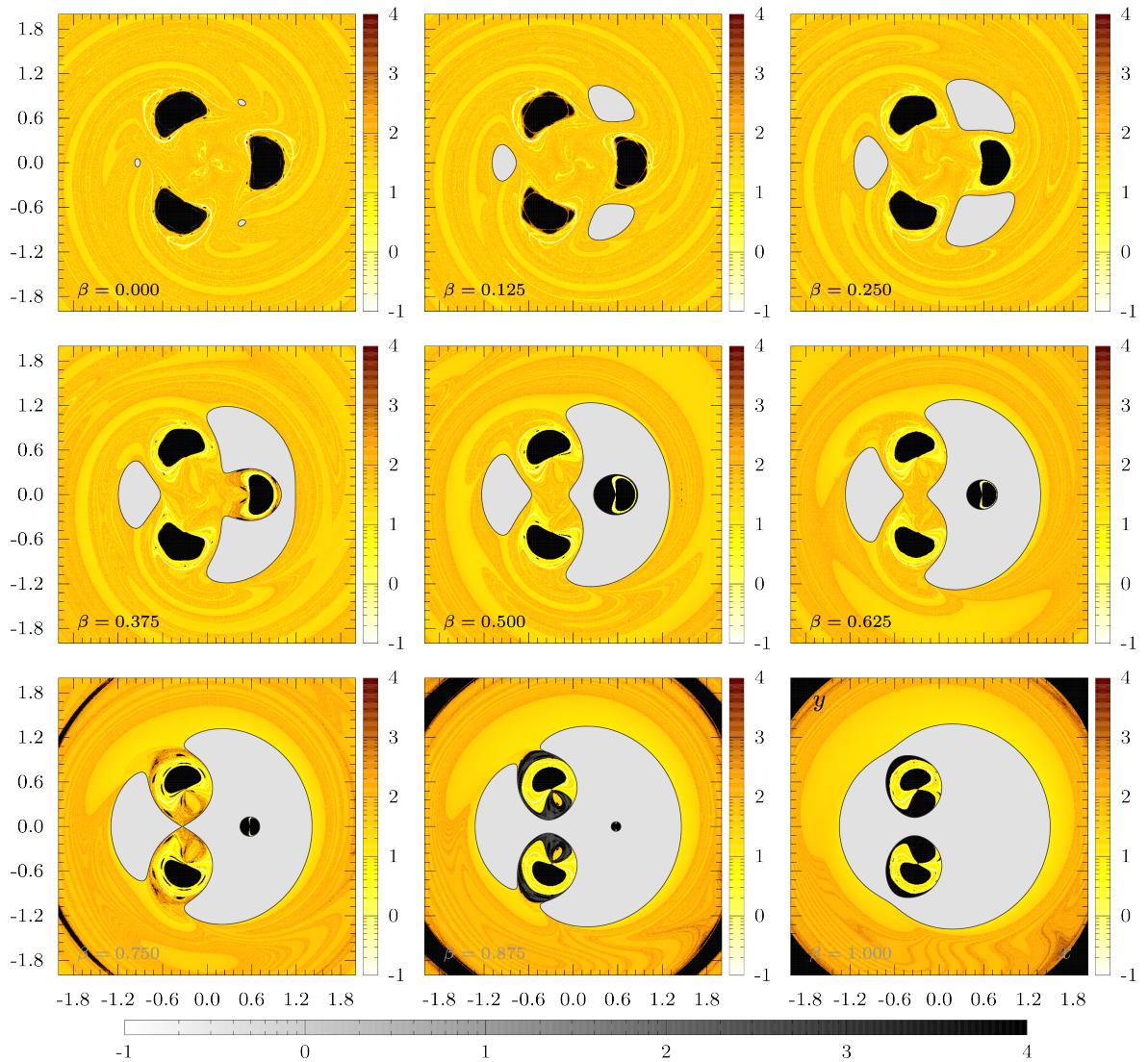


configuración a medida que el factor de radiación incrementa. En la Figura 27, se presenta entonces la evolución de la estructura orbital del sistema en estudio, para diferentes valores del factor de radiación. Los resultados numéricos sugieren que en

ausencia de radiación ($\beta = 0$, panel 1 $\rightarrow \downarrow$), las primarias se ven rodeadas por islas de estabilidad, ligeramente mezcladas con capas de trayectorias caóticas. Órbitas de escape dominan la región exterior, empero teñida de órbitas de colisión algo dispersas. En el centro de masa del sistema, algunas de éstas trayectorias de colisión toman forma de ‘tri-hélice’. Para $\beta = 0.125$, saltan a la vista las siguientes discrepancias: las regiones asociadas a órbitas de colisión, alrededor de las mencionadas islas de estabilidad, se dilatan, en tanto el espacio poblado por órbitas de escape se ve reducido debido al notable incremento en la zonas de exclusión (región prohibida). Para valores medios de β , e.g., $\beta = 0.625$, el mar caótico antes visible tiende a desaparecer por completo. Así mismo, para $\beta = 0.875$, órbitas caóticas surgen de las regiones de movimiento acotado aledañas a las primarias m_2 y m_3 . Finalmente, la región de exclusión se cierra sobre dichas primarias, disolviendo así, la mezcla de órbitas caóticas, de escape, y de colisión ($\beta = 1$). Nótese además, cómo las zonas de escape pareciesen inmersas en una región de estabilidad. En general, se observa que a medida que el factor de radiación incrementa, las zonas de exclusión aumentan en extensión, desconectando las primarias m_2 y m_3 de la región exterior del sistema. Más aún, el estado final asociado a colisión con m_1 tiende a desaparecer. Acorde con los resultados expuestos en § 3.1, la estructura del espacio de configuración se hace uniforme para grandes valores de β , debido a la reducción en la cantidad de puntos de libración.

En la Figura 28 se presentan los tiempos de escape, colisión, y saturación para los diferentes valores de β . Al igual que antes, se observa una fuerte correlación entre los tiempos de corta duración y las regiones particularmente ocupadas por órbitas de colisión. Las regiones para las cuales $10^1 < t < 10^2$, parecen corresponder con regiones sólo pobladas por trayectorias de escape, e.g., las bandas en ‘espiral’ para $\beta < 0.5$; en tanto, regiones aparentemente caóticas, presentan tiempos de

Figura 28. Tiempos de escape, colisión, y saturación, para los casos tomados en consideración en la Figura 27. Las paletas en escala de amarillos, hacen referencia a los tiempos de escape y colisión requeridos por cada conjunto de condiciones iniciales. La paleta en escala de grises, corresponde a los tiempos de saturación para $GALI_4$. Paletas en escala logarítmica.



escape y colisión algo superiores a los expuestos por otras regiones del espacio de configuración.

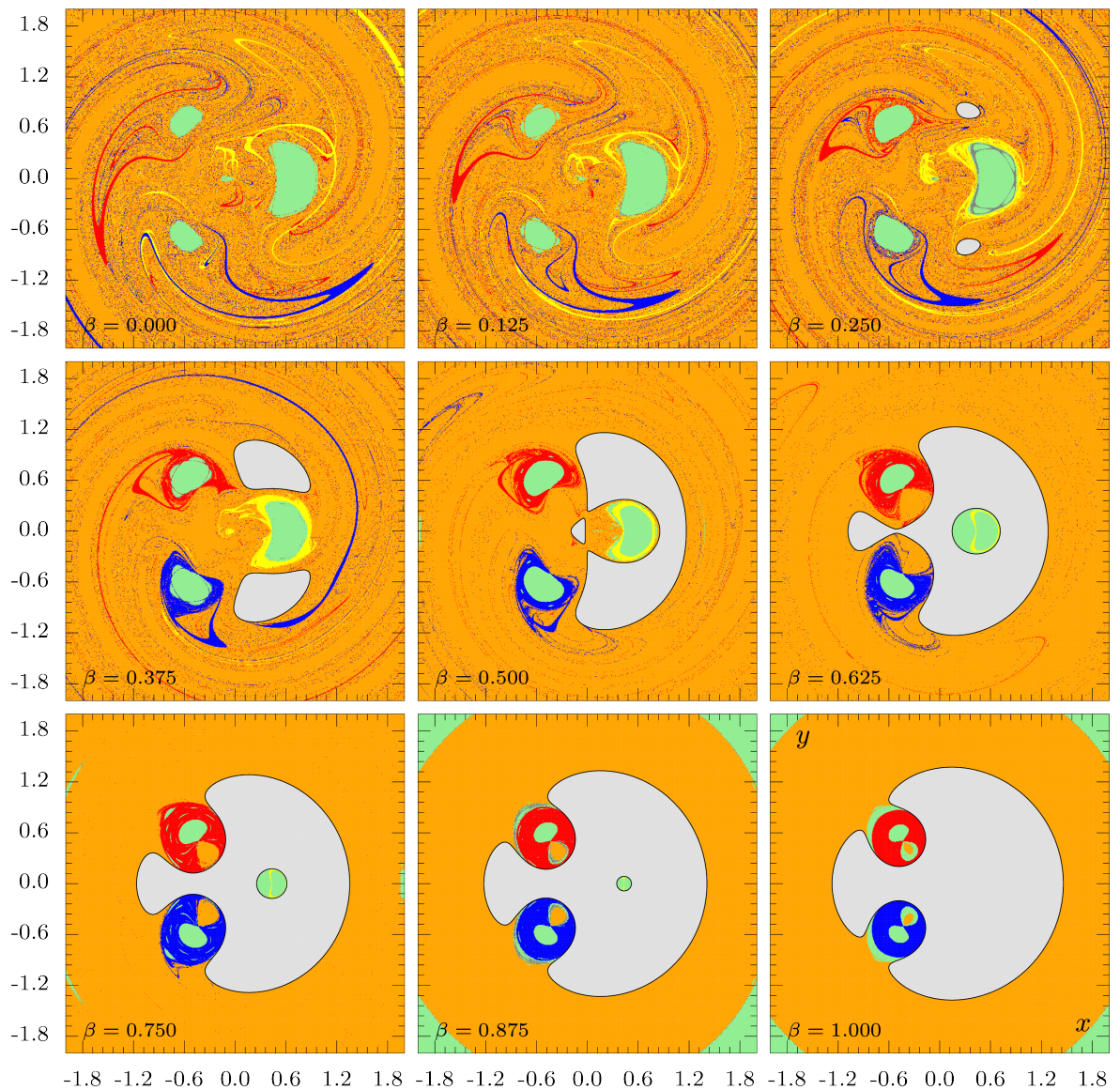
5.1.2. Caso 2: $m_1 \neq m_2 = m_3$. Como segundo caso de estudio, se considera entonces la configuración de masas, $m_1 = 0.5$ y $m_2 = m_3 = 0.25$, con $C = 2.7$. En la Figura 29, se expone la estructura orbital del sistema, en el espacio de configuración, para diferentes valores del factor de radiación. El código de color es el descrito en § 5.1.1.

Los resultados se resumen así: en ausencia de radiación ($\beta = 0$), las primarias se ven inmersas en islas de estabilidad, ya no rodeadas por regiones de colisión. Al igual que para $m_1 = m_2 = m_3$, la región exterior está ocupada, en mayor medida, por una mezcla de órbitas de escape y colisión, configurando así, un mar de caos en extremo sensible a variaciones en las condiciones iniciales. En presencia de radiación, *e.g.*, $\beta = 0.125$, las estructuras formadas son similares a las observadas en el primer panel, permitiendo, no obstante, la formación de archipiélagos de estabilidad sobre las primarias m_2 y m_3 .

Nótese además cómo algunas trayectorias de naturaleza caótica emergen en la periferia de la región de estabilidad concerniente a m_1 ($0.125 \leq \beta \leq 0.25$). Para valores intermedios de β , la estructura de trayectorias caóticas antes visible, desaparece por completo, incrementando también en extensión, las islas de estabilidad en m_1 y m_2 , ahora cercadas por regiones de colisión. Para $\beta > 0.625$, la fuente de radiación se ve aislada por la zona de exclusión, forzando la dinámica en rededor a trayectorias regulares y de colisión. Más aún, la región externa a la zona de exclusión, se ve poblada, en mayor medida, por trayectorias de escape, la cual parece estar inmersa a su vez, en una gran isla de estabilidad ($\beta \geq 0.875$). Finalmente, para $\beta = 1$, las fronteras se muestran completamente definidas, desapareciendo así, la estructura de tipo fractal.

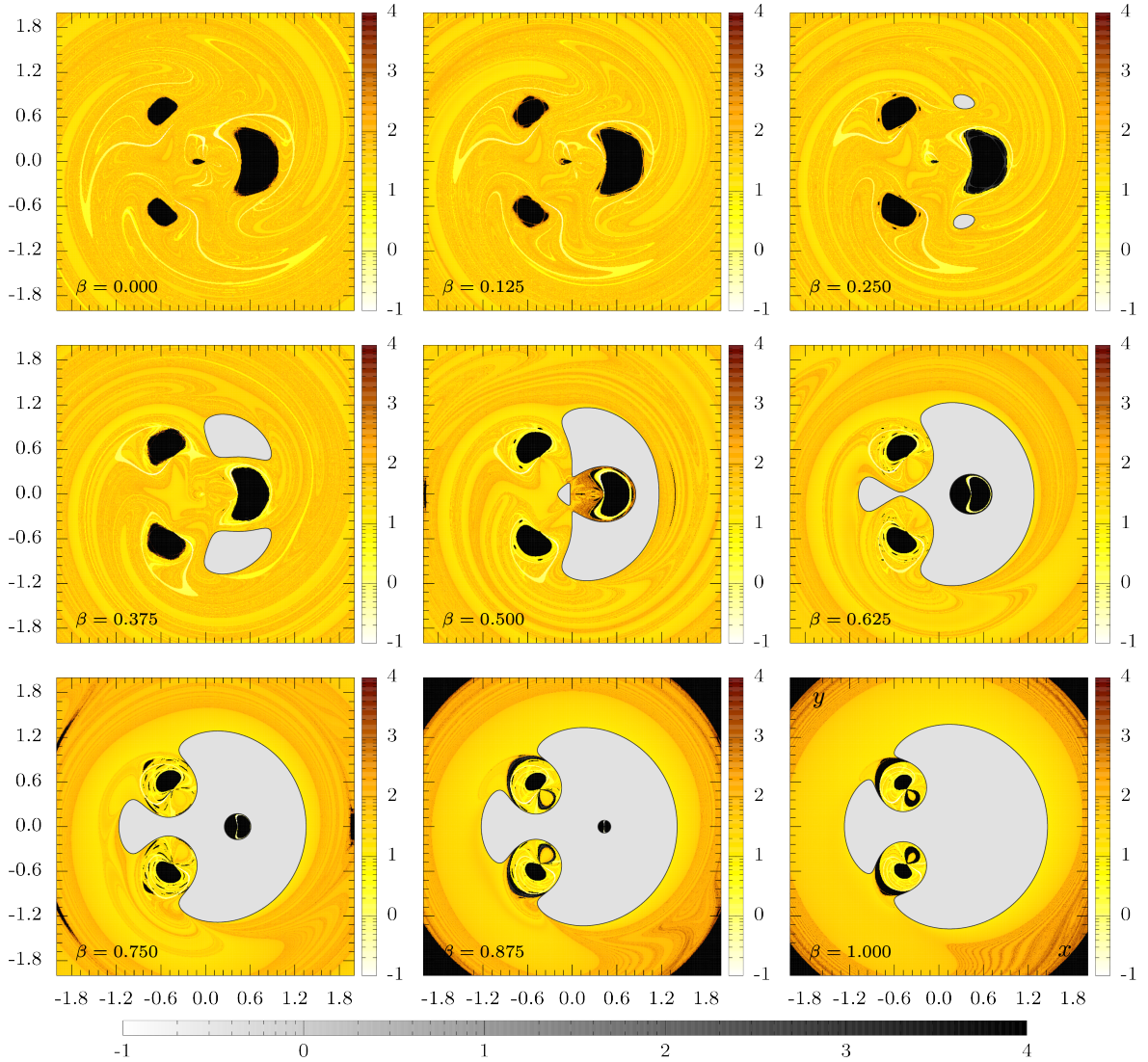
En la Figura 30, se presentan los tiempos de escape, colisión y saturación para

Figura 29. Estructura orbital para $m_2 = m_3 = 0.25$, $C = 2.7$, $\alpha = 0$, y para diferentes valores del factor de radiación, β . El código de color es el siguiente: naranja \rightarrow escape; amarillo \rightarrow colisión con m_1 ; rojo \rightarrow colisión con m_2 ; azul \rightarrow colisión con m_3 , verde \rightarrow movimiento regular; gris oscuro \rightarrow movimiento caótico; gris claro \rightarrow zonas de exclusión.



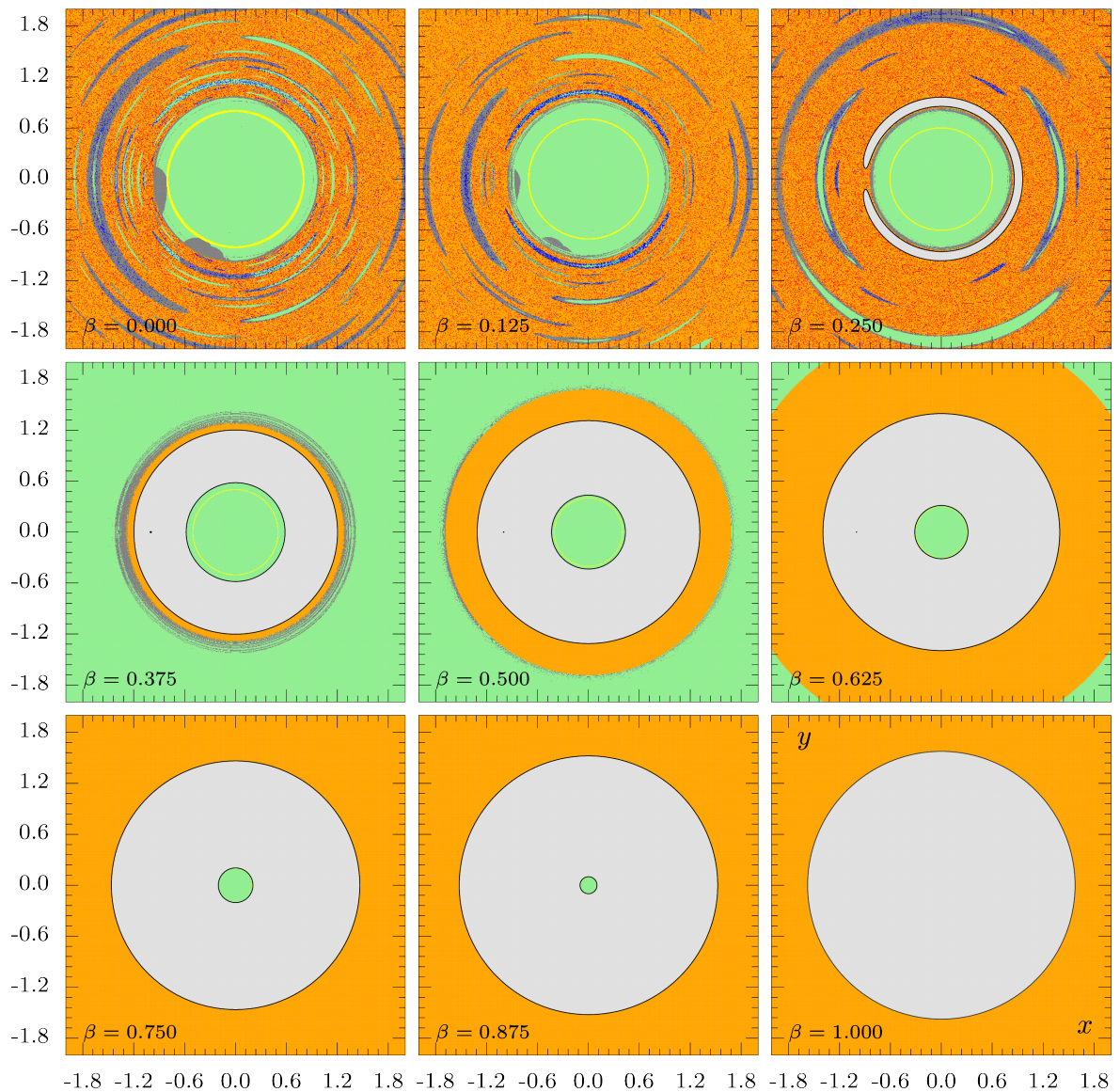
$m_1 \neq m_2 = m_3$. La tendencia aquí, es símil a la expuesta para $m_1 = m_2 = m_3$ (§ 5.1.1).

Figura 30. Tiempos de escape, colisión, y saturación, para los casos tomados en consideración en la Figura 29. Las paletas en escala de amarillos, hacen referencia a los tiempos de escape y colisión requeridos por cada conjunto de condiciones iniciales. La paleta en escala de grises, corresponde a los tiempos de saturación para $GALI_4$. Paletas en escala logarítmica.



5.1.3. Caso 3: $m_1 \neq m_2 \neq m_3$. Finalmente, se considera el sistema Sol–Jupiter–Troyano, como paradigma para la configuración $m_1 \neq m_2 \neq m_3$, con $C = 2.485$. Al igual que en § 3.2.3, las masas de las primarias están dadas por: $m_1 = 0.999046321943$, $m_2 = 0.000953678050$, y $m_3 = 6.99996 \times 10^{-12}$. En la Figura 31, se presenta entonces

Figura 31. Estructura orbital para la configuración Lagrangiana Sol–Jupiter–Troyano, con $C = 2.485$, $\alpha = 0$, y para diferentes valores del factor de radiación, β . El código de color es el siguiente: naranja \rightarrow escape; amarillo \rightarrow colisión con m_1 ; rojo \rightarrow colisión con m_2 ; azul \rightarrow colisión con m_3 , verde \rightarrow movimiento regular; gris oscuro \rightarrow movimiento caótico; gris claro \rightarrow zonas de exclusión.



la evolución de la estructura orbital del sistema, para $\beta \in [0, 1]$. Así, para $\beta = 0$, un región circular de estabilidad envuelve a m_1 , junto con un halo interno plagado de órbitas de colisión. Las primarias m_2 y m_3 se ven envueltas en pequeñas regiones de

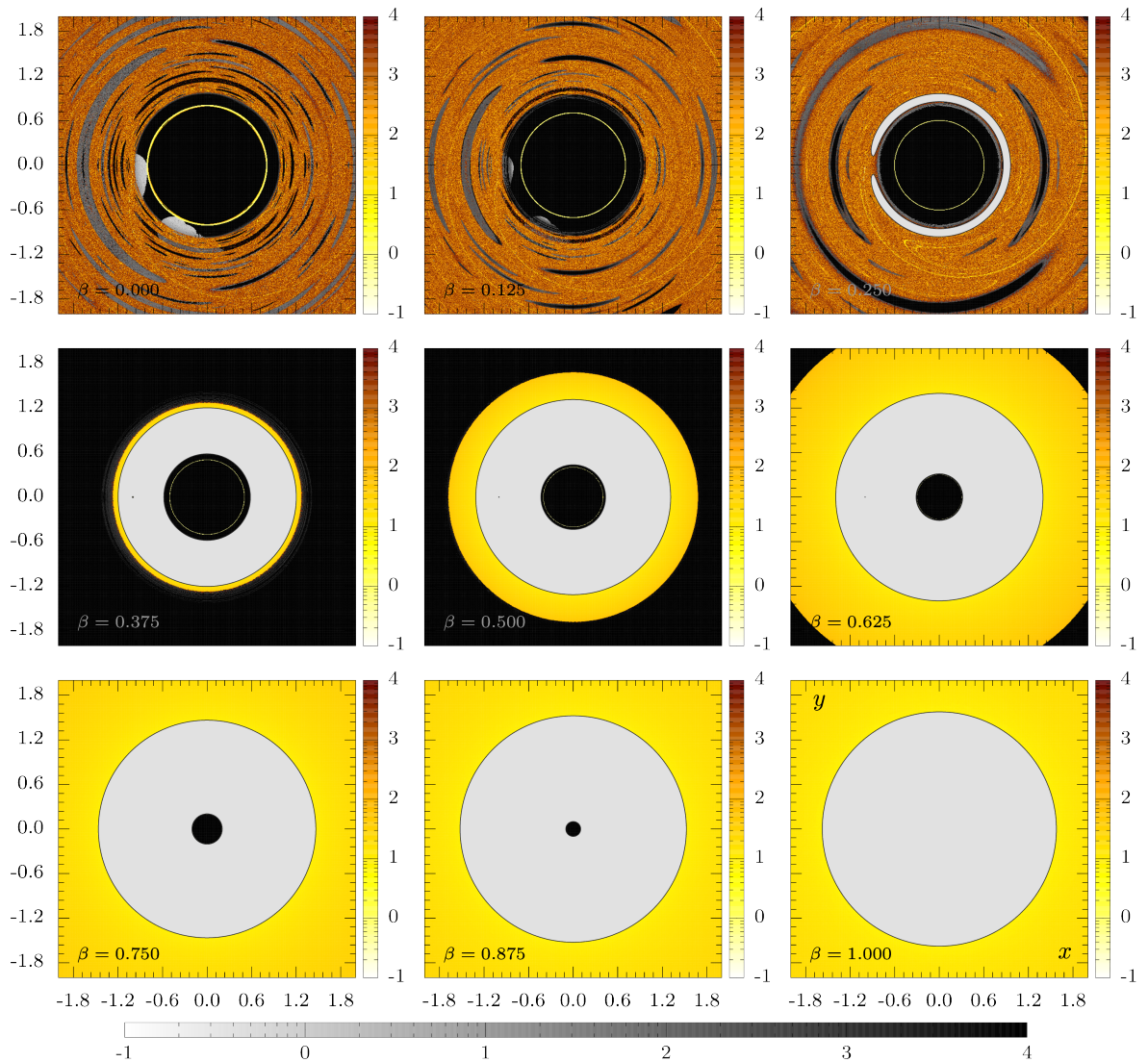
órbitas caóticas, en tanto la zona externa, en mayor medida compuesta por trayectorias de escape, se ve también mezclada con algunas órbitas de colisión, y regiones de movimiento regular y caótico en forma de arco. Para $\beta = 0.375$, la zona de exclusión se cierra sobre m_1 , ocasionando ésto, un cambio drástico en la estructura orbital del sistema. Aquí, la región exterior a la zona de exclusión se ve mayormente poblada por trayectorias regulares, con la salvedad de delgados discos de trayectorias de escape y caóticas bordeando la zona de exclusión. A medida que el factor de radiación sigue en aumento, el disco de trayectorias de escape se hace cada vez más grande y definido, llegando, finalmente, a ocupar la totalidad del espacio exterior a la zona de exclusión. Nótese también cómo la región de estabilidad interna se va haciendo cada vez más pequeña, hasta desaparecer por completo para $\beta = 1$.

En la Figura 32, se presentan los tiempos de escape, colisión y saturación para los casos antes considerados en la Figura 31. En general, se observa, acorde con lo mencionado en secciones anteriores, cómo los tiempos de escape y colisión asociados a trayectorias en inmediaciones de un mar difuso (paneles 1, 2 y 3 $\rightarrow \downarrow$), exponen valores mayores, en contraste con los correspondientes a trayectorias inmersas en regiones correspondientes sólo a zonas de escape.

5.2. UNA VISIÓN GLOBAL

Aquí, se pretende exponer una visión algo más general acerca de la dinámica orbital del ERFBP foto-gravitacional. Cada caso antes expuesto será ahora monitoreado siguiendo la evolución de los porcentajes correspondientes a cada tipo de órbita, en función del factor de radiación, β . Como se ha mencionado antes, en general, se tiene un total de seis posibles trayectorias: colisión con m_1 , m_2 o m_3 ; escape; movimiento regular; y movimiento caótico. Así, los porcentajes concernientes a cada tipo

Figura 32. Tiempos de escape, colisión, y saturación, para los casos tomados en consideración en la Figura 31. Las paletas en escala de amarillos, hacen referencia a los tiempos de escape y colisión requeridos por cada conjunto de condiciones iniciales. La paleta en escala de grises, corresponde a los tiempos de saturación para $GALI_4$. Paletas en escala logarítmica.



de trayectoria, permiten un análisis cuantitativo acerca de la cantidad de órbitas de cada tipo presentes en el espacio de configuración, *i.e.*, el estado final más probable para una condición inicial dada.

Más aún, puesto que las figuras asociadas a la estructura orbital son, en esencia, un conjunto de píxeles para el cual, cada color asignado se corresponde con el estado final de la trayectoria, éstas pueden ser vistas entonces como especies de cuencas de convergencia. Así, como indicador cuantitativo de la intrincada distribución de las condiciones iniciales correspondientes a cada tipo de órbita, se expone también la ‘entropía’ de las cuencas (DAZA y col., 2016), como herramienta numérica para la estimación de la ‘incertidumbre’ en sistemas dinámicos.

Supóngase entonces un sistema dinámico con N_A atractores (estados), para una selección de parámetros en determinada región Ω del espacio de fase. La región Ω se discretiza haciendo uso de un número finito de cajas ($\varepsilon \times \varepsilon$) que abarquen la totalidad de dicha región. Cada caja contiene, en principio, infinitas trayectorias, cada una correspondiente a un color etiquetado de 1 a N_A . En la práctica, sólo es posible hacer uso de un número finito de trayectorias por caja. Acorde con (DAZA y col., 2016), $\varepsilon = 5$, provee valores precisos para la entropía de las cuencas, permitiendo además, la rápida obtención de los mismos. La información provista por las diferentes trayectorias inmersas en dichas cajas, pueden ser usadas para generar hipótesis acerca de la incertidumbre asociada a éstas. Así, los estados presentes en cada caja, distribuidos de manera aleatoria, pueden ser asociados a la probabilidad $P_{i,j}$, de cada color j , inmerso en la caja. Ésta es entonces evaluada, determinando la estadística sobre las diferentes trayectorias (entropía de Gibbs):

$$S_i = \sum_{j=1}^{m_i} P_{ij} \log \left(\frac{1}{P_{ij}} \right), \quad (58)$$

con $m_i \in [1, N_A]$, el número total de estados (colores) en la caja i , y $P_{i,j}$, la probabilidad de cada color j , determinada por el cociente entre el número de trayectorias

que llevan a tal color, y el número total de trayectorias presentes en la caja. Se hará uso entonces, de N cajas aleatoriamente distribuidas por todo el espacio de fase, de manera que la entropía global sea la adición de cada entropía asociada a una de las N cajas:

$$S = \sum_{i=1}^N S_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} P_{ij} \log \left(\frac{1}{P_{ij}} \right). \quad (59)$$

Para evitar desbordamientos en S , producto del decremento en ε , se considera entonces la entropía relativa al número total de cajas N :

$$S_b = \frac{S}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} P_{ij} \log \left(\frac{1}{P_{ij}} \right). \quad (60)$$

La expresión en (60), es denominada *entropía de la cuenca*. La interpretación de esta cantidad, se ve asociada al grado de incertidumbre de la cuenca. En general, ésta disminuye con el tamaño de ε , resultando así, una poderosa herramienta para el contraste cuantitativo de diferentes cuencas de atracción.

En la Figura 33, se observa entonces, para $m_1 = m_2 = m_3$, que la mayoría de trayectorias en el espacio de configuración, corresponden a órbitas de escape, con un porcentaje pequeño derivado de trayectorias caóticas ($0 < \beta < 0.8$). Para $0.8 < \beta \leq 1$, el porcentaje de colisión con m_1 tiende a cero, en tanto, trayectorias de naturaleza regular, exponen el segundo mayor porcentaje, llegando a oscilar entre 4% y 12%. La entropía de las cuencas, exhibe una tendencia gradual a reducir su valor, acorde con los resultados expuestos en § 5.1.1. Esto sugiere que la incertidumbre de las cuencas es mayor para el ERFBP clásico, que la concerniente al problema foto-

Figura 33. Evolución paramétrica de los porcentajes correspondientes a cada tipo de trayectoria (panel izquierdo), y entropía de las cuencas (panel derecho) en función del parámetro de radiación β , para la configuración $m_1 = m_2 = m_3$.

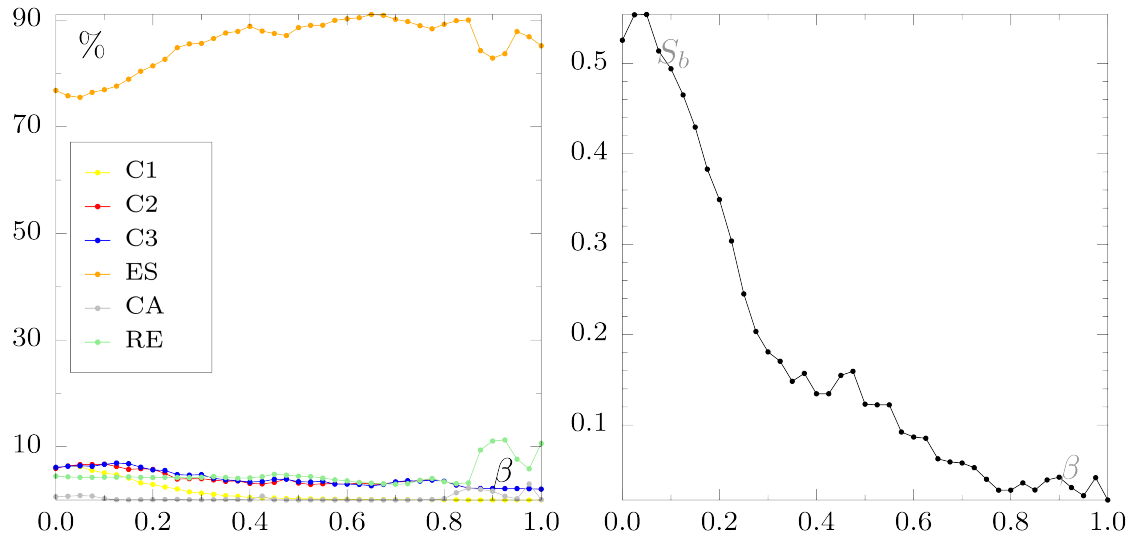
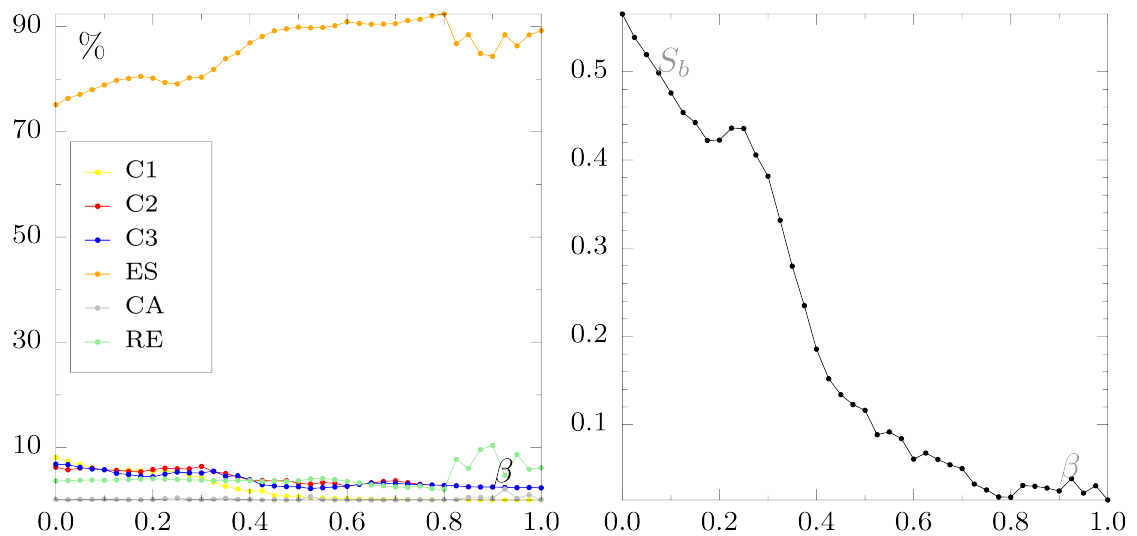


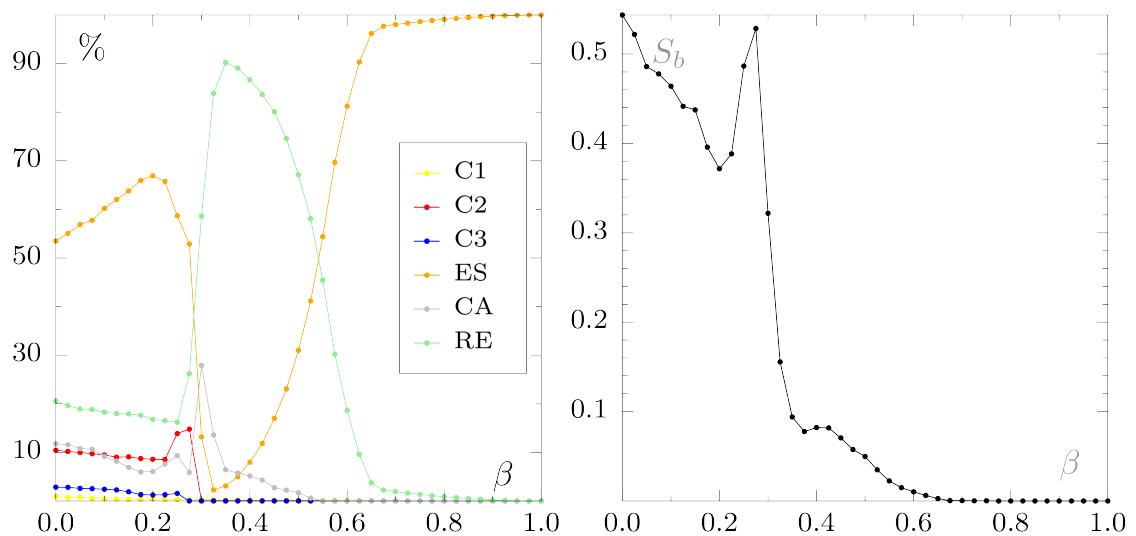
Figura 34. Evolución paramétrica de los porcentajes correspondientes a cada tipo de trayectoria (panel izquierdo), y entropía de las cuencas (panel derecho) en función del parámetro de radiación β , para la configuración $\mu = m_2 = m_3 = 0.25$.



gravitacional con $\beta > 0.3$.

En la Figura 34, se presentan los resultados para $\mu = m_2 = m_3 = 0.25$. Estos resultados son similares a los observados en la Figura 33, *i.e.*, la mayor parte de trayectorias sobre el espacio de configuración, corresponde a trayectorias de escape, en tanto, la minoría, concierne a órbitas de naturaleza caótica, salvo para $0.8 < \beta \leq 1$, donde el porcentaje de colisión con m_1 tiende a cero. Así mismo, la entropía exhibe una tendencia global a verse reducida hasta lograr un valor final $S_b = 0.02$.

Figura 35. Evolución paramétrica de los porcentajes correspondientes a cada tipo de trayectoria (panel izquierdo), y entropía de las cuencas (panel derecho) en función del parámetro de radiación β , para la configuración Lagrangiana Sol–Jupiter–Troyano.



Finalmente, en la Figura 35, se exponen los resultados para el sistema Sol–Jupiter–Troyano. A pesar de seguir siendo dominante el porcentaje de trayectorias de escape para $\beta < 0.3$ y $\beta > 0.6$, para $0.3 < \beta < 0.6$, el espacio se ve dominado por trayectorias regulares. Nótese, además, que para $0 \leq \beta < 0.2$, la totalidad de órbitas regulares alcanza un 20%, seguido, por trayectorias caóticas y de colisión con m_2 . Más aún, para $\beta \approx 0.55$, los porcentajes de órbitas regulares y de escape se ven igualmente distribuidos. A medida que β incrementa $\beta > 0.55$, los porcentajes de trayectorias

caóticas y regulares, presentan tasas de aumento y reducción similares. De manera acorde, la entropía de las cuencas se ve reducida de manera gradual, salvo un notable incremento para $0.2 < \beta < 0.3$.

6. CONCLUSIONES

En el presente dossier, se explora de manera numérica la existencia, evolución, estabilidad y convergencia de los puntos de libración, para la configuración triangular equilateral del problema restringido de cuatro cuerpos (ERFBP), con una de las primarias considerada como fuente de radiación (ERFB foto–gravitacional). Más aún, se considera el problema foto–gravitacional en dos diferentes versiones: (i) presión de radiación ($\alpha = 0$); y (ii) presión de radiación + efecto Poynting–Robertson + radiación corpuscular ($\alpha = 1$). Específicamente, se demuestra cómo, para los casos aquí considerados, el parámetro de radiación altera de manera considerable la dinámica del sistema. Siguiendo el procedimiento usual, se hace uso del método multivariable de Newton–Raphson, para la obtención y evolución de los diferentes puntos de libración y cuencas de convergencia —también llamadas de Newton–Raphson—. Tales cuencas arrojan un panorama global del conjunto de condiciones iniciales que, tras un proceso iterativo, tienden a determinado punto o atractor.

Se explora además, la evolución de la estructura orbital del ERFBP foto–gravitacional, en función del parámetro de radiación, β , para $\alpha = 0$ (presión de radiación). En particular, se distingue entre seis posibles tipos de trayectorias: colisión con cualquiera de las primarias, escape, movimiento regular y caótico. Haciendo uso de diagramas de tipo orbital —ODTs, por sus siglas en inglés—, donde el espacio de configuración emerge como una mezcla compacta de cuencas de escape, colisión, y de movimiento acotado, se lleva a cabo entonces un análisis cualitativo de la estructura orbital del sistema, además de un monitoreo sistemático de la evolución de los diferentes porcentajes concernientes a cada tipo de trayectoria. Finalmente, se de-

termina la entropía de los diagramas de tipo orbital, como medida cuantitativa de la incertidumbre derivada de éstos.

Las conclusiones más relevantes se listan a continuación:

1. Para $\alpha = 0$: presión de radiación:

En general, e independiente de la configuración dada a las primarias, se observa que el número total de puntos de equilibrio tiende a verse reducido a medida que el parámetro de radiación va en aumento (salvo para $0.15 \leq \mu = m_2 = m_3 \leq 0.25$, donde la cantidad de puntos asciende primero, para luego decrecer con la evolución de β). De las Tablas 1, 2 y 4, se observa además, que para valores de $m_1 \leq 0.7$ ($\mu = m_2 = m_3 = 0.15$), el número total de puntos de equilibrio puede ascender a 10 con la evolución del parámetro de radiación. Esto es, para $m_1 > 0.7$, no es posible la existencia de 9 o más puntos de libración. Así mismo, para $\beta = 1$ y $m_1 \geq 0.6$, la cantidad de puntos existentes reduce siempre a 2, en tanto para $\beta = 1$ y $m_1 < 0.6$, éstos serán siempre 4.

Por otra parte, para $\beta = 0$, los puntos de libración L_5 y L_6 serán estables, si $0.000 < \mu = m_2 = m_3 < 0.018$ (esto, acorde con Baltagiannis & Papadakis (BALTAGIANNIS y PAPANAKIS, 2011)). A medida que el parámetro de radiación evoluciona, este rango apenas se dilata, llegando, en el mejor de los casos a $\mu = m_2 = m_3 = 0.023$. Para valores de $\mu > 0.023$, los resultados sugieren la no existencia de puntos estables, independiente del valor dado a β .

De las Figuras 5 y 8, se observa que para valores equiparables de m_1 , m_2 , y m_3 , y para $C > 3$ por ejemplo (§ 3.1.1 y § 3.1.2), las zonas de exclusión se ven inicialmente conformadas por tres diferentes islas, emplazadas sobre los

puntos de libración L_3 , L_5 y L_6 . A medida que el parámetro β incrementa, tales zonas se acoplan, primero cercando la fuente de radiación, hasta absorberla por completo ($\beta \approx 1$). Entre tanto, las primarias m_2 y m_3 se ven también envueltas por dichas zonas, sin llegar no obstante, a ser cubiertas por completo. Comportamientos similares se observa para diferentes valores de la constante de movimiento. Para $m_1 \gg m_2 \gg m_3$, una sola isla en forma de herradura se hace visible. A medida que β evoluciona, ésta se cierra alrededor de la fuente, hasta cerrarse por completo para $\beta \approx 1$.

De la Figura 25, se ve cómo para diferentes valores de la constante Jacobiana, la estructura orbital del espacio de configuración se ve alterada a medida que las zonas de exclusión van en aumento. Así, por ejemplo, para $C < 3.09$, el espacio de configuración está compuesto por tres pequeñas regiones de estabilidad, inmersas en un mar difuso derivado de miles de condiciones cuyo estado final es catalogado acorde con el tipo de trayectoria. A medida que las zonas de exclusión se van cerrando, la estructura orbital se hace más ordenada, permitiendo distinguir fácilmente las regiones concernientes a cada tipo de trayectoria. Como se observa de las CVC, el incremento del parámetro de radiación desencadena también un aumento en las zonas de exclusión. Por ello, y acorde con las Figuras 27, 29, y 31, a medida que β aumenta, lo hacen también dichas zonas, modificando a su vez, la estructura orbital de los casos sometidos a estudio, pasando de un mar caótico, a una estructura orbital ordenada, casi ausente de caos. Esto último se sustenta haciendo uso de los diagramas de entropía expuestos en las Figuras 33, 34, y 35, donde se ve cómo la incertidumbre de las cuencas de color se hace casi nula a medida que el parámetro β evoluciona. Más aún, los tiempos de corta duración corresponden a trayectorias de colisión, y, en menor medida, a trayectorias de escape inmersas en regiones bien definidas. Empero, estos tienden a aumentar de manera

considerable, en regiones de mares caóticos.

2. Para $\alpha = 1$: presión de radiación + efecto P–R + radiación corpuscular:

Al igual que para $\alpha = 0$, la cantidad total de puntos de libración tiende a verse reducida con el incremento del parámetro de radiación β . Así, para $\beta = 1$ y $m_1 < 0.6$, la cantidad de puntos de libración final reduce a 4, en tanto, para $m \geq 0.6$, ésta será 2. La diferencia principal entre los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, radica en la manera en que los puntos L_1 , L_9 y L_{10} se desplazan. En el primer caso, L_9 y L_{10} tienden hacia una misma coordenada sobre el eje x , desapareciendo ambos para $\beta \approx 1$. En éste último, por el contrario, debido a la inclusión de los términos de arrastre (efecto Poynting–Robertson + radiación corpuscular), son los puntos L_1 y L_{10} quienes tienden a una coordenada común (ya no sobre el eje x), en tanto L_9 cambia de manera abrupta su ‘trayectoria’, dirigiéndose ahora hacia la fuente de radiación.

En cuanto a estabilidad concierne, a diferencia de $\alpha = 0$, un valor dado al parámetro de radiación $\beta > 0.01$, es capaz de destruir la estabilidad de los diferentes puntos de libración, sin importar la configuración dada a las primarias.

Finalmente, de los resultados previos se infiere que el tipo de estabilidad de los diferentes puntos de libración permanece invariante, sólo para valores del factor de radiación del orden 10^{-3} . Cabe destacar que para el sistema Solar, éste es del orden 10^{-1} , siendo, en un sistema realista, capaz de destruir la estabilidad de los puntos de libración.

Los resultados derivados del presente trabajo se listan a continuación:

- Artículo:

Osorio–Vargas J. E., Dubeibe F. L., & González Guillermo A. “Equilibrium points and basins of convergence in the triangular restricted four–body problem with a radiating body.” *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **30(2)**. arXiv: 1812.08641

- Artículo:

Osorio–Vargas J. E., Dubeibe F. L., & González Guillermo A. “Orbital dynamics in the photogravitational restricted four–body problem: Lagrange configuration” *Physics Letters A*. doi:10.1016/j.physleta.2020.126305

- Ponencia:

Osorio–Vargas J. E., Dubeibe F. L., & González Guillermo A. “Dinámica orbital en el sistema Hénon–Heiles relativista.” *Congreso Colombiano de Astronomía y Astrofísica*. Medellín–Colombia, Oct. 15–18, 2019.

- Ponencia:

Osorio–Vargas J. E., Dubeibe F. L., & González Guillermo A. “Stability and Basins of convergence in the Lagrange configuration of the restricted four–body problem with radiation terms / Escape and collision dynamics in the photogravitational restricted four–body problem: Lagrange configuration.” *Latin American Regional Regional IAU Meeting*. Antofagasta–Chile, Nov. 3–9, 2019.

BIBLIOGRAFÍA

ALBERS, P. y col. "Contact geometry of the restricted three-body problem". En: *Communications on pure and applied mathematics* 65.2 (2012), págs. 229-263 (vid. pág. 19).

ALMEIDA PRADO, A. F. B. de. "Numerical and analytical study of the gravitational capture in the bicircular problem". En: *Advances in Space Research* 36.3 (2005), págs. 578-584 (vid. pág. 20).

ALVAREZ-RAMÍREZ, M. y E. BARRABÉS. "Transport orbits in an equilateral restricted four-body problem". En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 121.2 (2015), págs. 191-210 (vid. pág. 20).

ARNOLD, V. I. "Proof of a theorem of a. n. kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian". En: *Russian Mathematical Surveys* 18 (1963), págs. 9-36 (vid. pág. 28).

ARTYMOWICZ, P. "Radiation pressure forces on particles in the Beta Pictoris system". En: *The Astrophysical Journal* 335 (1988), págs. L79-L82 (vid. pág. 38).

ASIQUE, M. C. y col. "On the photogravitational R4BP when the third primary is a triaxial rigid body". En: *Astrophysics and Space Science* 361.12 (2016), pág. 379 (vid. pág. 20).

BALTAGIANNIS, A. N. y K. E. PAPADAKIS. “Equilibrium points and their stability in the restricted four–body problem”. En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 21.8 (2011), págs. 2179-2193 (vid. págs. 21, 44, 45, 53, 59, 76, 79, 131).

BALTAGIANNIS, A. N. y K. E. PAPADAKIS. “Periodic solutions in the Sun–Jupiter–Trojan asteroid–Spacecraft system”. En: *Planetary and Space Science* 75 (2013), págs. 148-157 (vid. págs. 20, 66, 80).

BIRKHOFF, G. D. “The restricted problem of the three bodies”. En: *Rend. Circ. Mat. Palermo* 39 (1915), pág. 1 (vid. pág. 27).

BOUNTIS, T. y C. SKOKOS. “Application of the SALI chaos detection method to accelerator mappings”. En: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 561.2 (2006), págs. 173-179 (vid. págs. 103, 106).

BRESLAU, A., K. VINCKE y S. PFALZNER. “From star–disc encounters to numerical solutions for a subset of the restricted three–body problem”. En: *Astronomy & Astrophysics* 599 (2017), A91 (vid. pág. 19).

BROUCKE, R. A. *Periodic orbits in the restricted three body problem with earth–moon masses*. 1968 (vid. pág. 19).

BULIRSCH, R. y J. STOER. “Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods”. En: *Numerische Mathematik* 8.1 (1966), págs. 1-13 (vid. págs. 89, 111).

BURGOS-GARCÍA, J. y J. DELGADO. “Periodic orbits in the restricted four–body problem with two equal masses”. En: *Astrophysics and Space Science* 345.2 (2013), págs. 247-263 (vid. pág. 20).

BURNS, J. A., P. L. LAMY y S. SOTER. “The Poynting-Robertson effect on meteor orbits”. En: *Icarus* 40.1 (1979), págs. 1-48 (vid. págs. 36-38).

BURRAU, C. *Über einige in Aussicht genommene Berechnungen betreffend einen Spezialfall des Dreikörper-Problems*. 1906 (vid. pág. 27).

CAPUZZO-DOLCETTA, R. y col. “Self-consistent models of cuspy triaxial galaxies with dark matter halos”. En: *The Astrophysical Journal* 666.1 (2007), pág. 165 (vid. pág. 103).

CASH, J. R. y A. H. KARP. “A variable order Runge-Kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides”. En: *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* 16.3 (1990), págs. 201-222 (vid. pág. 89).

CHAZY, J. “Sur les singularities impossible du problème des n corps”. En: *Comptes Rendus* 170 (1920), págs. 575-577 (vid. pág. 27).

CHERNIKOV, Y. A. “The Photogravitational Restricted Three-Body Problem”. En: *Soviet Astronomy* 14 (1970), pág. 176 (vid. pág. 37).

CLAIRAUT, A. C. *Du système du monde dans les principes de la gravitation universelle*. Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris, 1749 (vid. pág. 24).

DARWIN, G. *Periodic orbits and miscellaneous papers*. London y New York: Cambridge Univ. Press, 1911 (vid. pág. 27).

DAZA, A. y col. “Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems”. En: *Scientific reports* 6 (2016), pág. 31416 (vid. pág. 125).

DUBEIBE, F. L., F. D. LORA-CLAVIJO y G. A. GONZÁLEZ. “On the conservation of the Jacobi integral in the post–Newtonian circular restricted three–body problem”. En: *Astrophysics and Space Science* 362.5 (2017), pág. 97 (vid. págs. 19, 71).

DUBEIBE, F. L., A. RIAÑO-DONCEL y E. E. ZOTOS. “Dynamical analysis of bounded and unbounded orbits in a generalized Hénon–Heiles system”. En: *Physics Letters A* 382.13 (2018), págs. 904-910 (vid. págs. 104, 106, 107, 109).

EULER, L. *Theoria motuum Lunae*. Typis Academiæ Imperialis Scientiarum, 1772 (vid. págs. 24, 29).

EULER, L. *Theoria motuum planetarum et cometarum*. Haude, 1744 (vid. pág. 24).

GOLDSTEIN, H., C. POOLE y J. SAFKO. *Classical mechanics*. 2002 (vid. pág. 86).

GUSTAFSON, B. A. “Physics of zodiacal dust”. En: *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* 22.1 (1994), págs. 553-595 (vid. págs. 37, 38, 41, 71).

HÉNON, M. y C. HEILES. “The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments”. En: *The Astronomical Journal* 69 (1964), pág. 73 (vid. págs. 104, 112).

HILL, G. W. “Researches in the lunar theory”. En: *Am. J. Math* 1 (1878) (vid. pág. 26).

JACOBI, C. G. “Sur le mouvement d’un point et sur un cas particulier du problème des trois corps”. En: *Compt. Rend* 3 (1836), págs. 59-61 (vid. pág. 26).

KLINE, M. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press, 1972 (vid. pág. 24).

KOLMOGOROV, A. N. "On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function". En: *In Dokl. Akad. Nauk SSSR* 98 (1954), págs. 527-530 (vid. pág. 28).

LAGRANGE, J. L. "Essai sur le problème des trois corps". En: *Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris* 9 (1772), pág. 292 (vid. pág. 25).

LAMY, P. L. y J. M. PERRIN. "Circumstellar grains: radiation pressure and temperature distribution". En: *Astronomy and astrophysics* 327 (1997), págs. 1147-1154 (vid. pág. 38).

LEVI-CIVITA, T. *Sur les trajectoires singulières du problème restreint des trois corps*. Gauthier-Villars, 1903 (vid. pág. 27).

LIOU, J. C., H. A. ZOOK y A. A. JACKSON. "Radiation pressure, Poynting–Robertson drag, and solar wind drag in the restricted three–body problem". En: *Icarus* 116.1 (1995), págs. 186-201 (vid. págs. 37, 41, 67, 71).

LYAPUNOV, A. M. "Problème général de la stabilité du mouvement". En: *Annals de la Faculté des Sciences de Toulouse* 2.9 (1907), págs. 203-474 (vid. pág. 27).

MACHUY, A. L., A. F. B. A. PRADO y T. J. STUCHI. "Numerical study of the time required for the gravitational capture in the bi–circular four–body problem". En: *Advances in Space Research* 40.1 (2007), págs. 118-124 (vid. pág. 20).

MANOS, T., C. SKOKOS y C. ANTONOPOULOS. "Probing the local dynamics of periodic orbits by the generalized alignment index (GALI) method". En: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 22.09 (2012), pág. 1250218 (vid. pág. 103).

MANOS, T. y col. "Studying the global dynamics of conservative dynamical systems using the SALI chaos detection method". En: *Nonlin. Phenom. Compl. Syst* 11 (2008), págs. 171-176 (vid. pág. 103).

MARZARI, F. y col. "Origin and evolution of Trojan asteroids". En: *Asteroids III* 1 (2002), págs. 725-738 (vid. pág. 20).

MEDVEDEV, Y. D. y N. I. PEROV. "Restricted four-body problem. The case of a central configuration: libration points and their stability". En: *Astronomy Letters* 34.5 (2008), págs. 357-365 (vid. pág. 20).

MICHALODIMITRAKIS, M. "The circular restricted four-body problem". En: *Astrophysics and Space Science* 75.2 (1981), págs. 289-305 (vid. pág. 20).

MÖSER, J. "Convergent series expansions for quasi-periodic motions". En: *Mathematische Annalen* 169.1 (1967), págs. 136-176 (vid. pág. 28).

MOULTON, F. R. *An introduction to celestial mechanics*. New York: Macmillan, 2ed, 1914 (vid. pág. 27).

MOULTON, F. R. "On a class of particular solutions of the problem of four bodies". En: *Trans. Amer. Math. Soc* 1.1 (1900), págs. 17-29 (vid. págs. 30, 33, 58).

MUKAI, T. y S. MUKAI. "Temperature and motion of the grains in interplanetary space". En: *Publications of the Astronomical Society of Japan* 25 (1973), pág. 481 (vid. pág. 38).

NAGLER, J. "Crash test for the Copenhagen problem". En: *Physical Review E* 69.6 (2004), pág. 066218 (vid. págs. 21, 110).

NEWTON, I. *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. London, 1687 (vid. pág. 23).

PAINLEVÉ, P. “Sur les singularités des équations de la dynamique et sur le problème des trois corps”. En: *Comptes Rendus* 123 (1896), págs. 871-873 (vid. pág. 27).

PANAGOPOULOS, P., T. BOUNTIS y C. SKOKOS. “Existence and stability of localized oscillations in 1–dimensional lattices with soft-spring and hard–spring potentials”. En: *Journal of vibration and acoustics* 126.4 (2004), págs. 520-527 (vid. pág. 103).

PAPADOURIS, J. P. y K. E. PAPADAKIS. “Equilibrium points in the photogravitational restricted four–body problem”. En: *Astrophysics and Space Science* 344.1 (2013), págs. 21-38 (vid. págs. 20, 21, 38).

POINCARÉ, H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Paris: Gauthier–Villars, 1899 (vid. pág. 27).

POINCARÉ, H. “Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique”. En: *Acta Mathematica* 13.1 (1890), A3-A270 (vid. pág. 26).

POUSSE, A., P. ROBUTEL y A. VIENNE. “On the co–orbital motion in the planar restricted three–body problem: the quasi–satellite motion revisited”. En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 128.4 (2017), págs. 383-407 (vid. pág. 19).

PRINCE, P. J. y J. R. DORMAND. “High order embedded Runge–Kutta formulae”. En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 7.1 (1981), págs. 67-75 (vid. pág. 89).

RADZIEVSKII, V. V. “The restricted problem of three bodies taking account of light pressure”. En: *Astron. Zh.* 27.4 (1979), págs. 250-256 (vid. pág. 35).

RADZIEVSKII, V. V. “The space photogravitational restricted three–body problem”. En: *Astron. Zh.* 30.3 (1953), págs. 265-273 (vid. pág. 35).

ROBERTSON, H. P. “Dynamical effects of radiation in the solar system”. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 97 (1937), pág. 423 (vid. pág. 40).

ROBUTEL, P. y F. GABERN. “The resonant structure of Jupiter’s Trojan asteroids–I. Long–term stability and diffusion”. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 372.4 (2006), págs. 1463-1482 (vid. pág. 20).

SIMÓ, C. “Relative equilibrium solutions in the four body problem”. En: *Celestial Mechanics* 18.2 (1978), págs. 165-184 (vid. pág. 20).

SINGH, J. y A. E. VINCENT. “Equilibrium points in the restricted four–body problem with radiation pressure”. En: *Few–Body Systems* 57.1 (2016), págs. 83-91 (vid. pág. 20).

SKOKOS, C. “Alignment indices: a new, simple method for determining the ordered or chaotic nature of orbits”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 34.47 (2001), pág. 10029 (vid. págs. 21, 86, 103).

SKOKOS, C., T. C. BOUNTIS y C. ANTONOPOULOS. “Geometrical properties of local dynamics in Hamiltonian systems: The Generalized Alignment Index (GALI) method”. En: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 231.1 (2007), págs. 30-54 (vid. págs. 21, 85, 102, 103, 105, 109).

SKOKOS, C. y col. “Detecting order and chaos in Hamiltonian systems by the SALI method”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 37.24 (2004), pág. 6269 (vid. pág. 106).

STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC Press, 2018 (vid. pág. 48).

STRÖMGREN, E. “Connaissance actuelle des orbites dans le problème des trois corps”. En: *Bulletin Astronomique* 9 (1933), págs. 87-130 (vid. pág. 27).

SUNDMAN, K. F. “Mémoire sur le problème des trois corps”. En: *Acta Mathematica* 36 (1912), págs. 105-179 (vid. pág. 27).

SZEBEHELY, V. *Theory of orbits: the restricted problem of three bodies*. Yale University New Haven CT, 1967 (vid. págs. 30, 44).

SZÉLL, A. y col. “Chaotic and stable behaviour in the Caledonian symmetric four-body problem”. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 347.2 (2004), págs. 380-388 (vid. págs. 103, 106).

VON ZEIPEL, H. “Sur les singularities du problème des n corps”. En: *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* 4.32 (1908), págs. 1-4 (vid. pág. 27).

WHITTAKER, E. T. *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*. Cambridge University Press, 4 ed, 1937 (vid. pág. 23).

WINTNER, A. *The analytical foundations of celestial mechanics*. Courier Corporation, 2014 (vid. pág. 19).

WYATT, S. P. y F. L. WHIPPLE. “The Poynting-Robertson effect on meteor orbits”. En: *American Astron. Soc. APJ* 111 (1950), págs. 134-141 (vid. pág. 40).

XIA, Z. “The existence of noncollision singularities in Newtonian systems”. En: *Annals of Mathematics* 135 (1992), págs. 411-468 (vid. pág. 27).

ZOTOS, E. E. “Escape and collision dynamics in the planar equilateral restricted four–body problem”. En: *International Journal of Non–Linear Mechanics* 86 (2016), págs. 66-82 (vid. págs. 21, 110, 112).

ZOTOS, E. E. “Revealing the escape mechanism of three–dimensional orbits in a tidally limited star cluster”. En: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 446.1 (2014), págs. 770-792 (vid. págs. 20, 111).

ZOTOS, E. E. y F. L. DUBEIBE. “Orbital dynamics in the post–Newtonian planar circular restricted Sun–Jupiter system”. En: *International Journal of Modern Physics D* 27.04 (2018), pág. 1850036 (vid. págs. 19-21, 71, 79).

ANEXOS

Anexo A. Ecuaciones de movimiento

A continuación se derivan las ecuaciones de movimiento dadas en el Cap. 2 para el problema restringido equilátero de cuatro cuerpos, en sus versiones (i) clásica § 1, y (ii) foto-gravitacional en presencia de fuerzas no conservativas (efecto P-R y radiación corpuscular) § 1.

EL ERFBP CLÁSICO.

De la matriz de transformación en § 2.1:

$$\begin{aligned} X &= x \cos t - y \sin t, \\ Y &= x \sin t + y \cos t, \\ \dot{X} &= (\dot{x} - y) \cos t - (x - \dot{y}) \sin t, \\ \dot{Y} &= (\dot{x} - y) \sin t + (x - \dot{y}) \cos t, \\ \ddot{X} &= (\ddot{x} - x - 2\dot{y}) \cos t - (\ddot{y} - y + 2\dot{x}) \sin t, \\ \ddot{Y} &= (\ddot{x} - x - 2\dot{y}) \sin t + (\ddot{y} - y + 2\dot{x}) \cos t. \end{aligned} \tag{61}$$

Se tiene entonces el sistema de ecuaciones en el marco inercial,

$$\ddot{X} = - \left[\frac{m_1 (X - X_1)}{R_1^3} + \frac{m_2 (X - X_2)}{R_2^3} + \frac{m_3 (X - X_3)}{R_3^3} \right],$$

$$\ddot{Y} = - \left[\frac{m_1 (Y - Y_1)}{R_1^3} + \frac{m_2 (Y - Y_2)}{R_2^3} + \frac{m_3 (Y - Y_3)}{R_3^3} \right]. \quad (62)$$

Reemplazando (61) en (62):

$$(\ddot{x} - x - 2\dot{y}) \cos t - (\ddot{y} - y + 2\dot{x}) \sin t =$$

$$(x \cos t - y \sin t) \left(-\frac{m_1}{R_1^3} - \frac{m_2}{R_2^3} - \frac{m_3}{R_3^3} \right) + \frac{m_1 X_1}{R_1^3} + \frac{m_2 X_2}{R_2^3} + \frac{m_3 X_3}{R_3^3},$$

$$(\ddot{x} - x - 2\dot{y}) \sin t + (\ddot{y} - y + 2\dot{x}) \cos t =$$

$$(x \sin t + y \cos t) \left(-\frac{m_1}{R_1^3} - \frac{m_2}{R_2^3} - \frac{m_3}{R_3^3} \right) + \frac{m_1 Y_1}{R_1^3} + \frac{m_2 Y_2}{R_2^3} + \frac{m_3 Y_3}{R_3^3}. \quad (63)$$

Más aún, de la Figura 1,

$$\begin{aligned}
X_1 &= d/\sqrt{3} \cos t, & Y_1 &= d/\sqrt{3} \sin t, \\
X_2 &= -d/\sqrt{3} \cos(60 - t), & Y_2 &= d/\sqrt{3} \sin(60 - t), \\
X_3 &= -d/\sqrt{3} \cos(60 + t), & Y_3 &= -d/\sqrt{3} \sin(60 + t),
\end{aligned} \tag{64}$$

y

$$R_i \rightarrow r_i = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{65}$$

De nuevo, reemplazando (64) y (65), en (63), se tiene el sistema:

$$\begin{aligned}
&(\ddot{x} - x - 2\dot{y}) \cos t - (\ddot{y} - y + 2\dot{x}) \sin t = \\
&(x \cos t - y \sin t) \left(-\frac{m_1}{r_1^3} - \frac{m_2}{r_2^3} - \frac{m_3}{r_3^3} \right) \\
&+ \frac{m_1 (d/\sqrt{3}) \cos t}{r_1^3} + \frac{m_2 (-d/\sqrt{3}) \cos(60 - t)}{r_2^3} + \frac{m_3 (-d/\sqrt{3}) \cos(60 + t)}{r_3^3}, \\
&(\ddot{x} - x - 2\dot{y}) \sin t + (\ddot{y} - y + 2\dot{x}) \cos t = \\
&(x \sin t + y \cos t) \left(-\frac{m_1}{r_1^3} - \frac{m_2}{r_2^3} - \frac{m_3}{r_3^3} \right) \\
&+ \frac{m_1 (d/\sqrt{3}) \sin t}{r_1^3} + \frac{m_2 (d/\sqrt{3}) \sin(60 - t)}{r_2^3} + \frac{m_3 (-d/\sqrt{3}) \sin(60 + t)}{r_3^3}. \tag{66}
\end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando la primer y segunda ecuación en (66), por $\cos t$ y $\sin t$,

respectivamente, y superponiendo, se tiene:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{m_1(x - x_1)}{r_1^3} - \frac{m_2(x - x_2)}{r_2^3} - \frac{m_3(x - x_3)}{r_3^3}. \quad (67)$$

De manera símil,

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - \frac{m_1(y - y_1)}{r_1^3} - \frac{m_2(y - y_2)}{r_2^3} - \frac{m_3(y - y_3)}{r_3^3}. \quad (68)$$

$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - \frac{m_1(x - x_1)}{r_1^3} - \frac{m_2(x - x_2)}{r_2^3} - \frac{m_3(x - x_3)}{r_3^3},$ $\ddot{y} + 2\dot{x} = y - \frac{m_1(y - y_1)}{r_1^3} - \frac{m_2(y - y_2)}{r_2^3} - \frac{m_3(y - y_3)}{r_3^3}.$	(69)
---	------

EL ERFBP FOTO-GRAVITACIONAL

De (18), el sistema de ecuaciones (inercial) del ERFBP foto-gravitacional, en presencia de fuerzas de arrastre ($\alpha = 1$), está dado por:

$$m \ddot{\mathbf{R}} = - \sum_{i=1}^3 \frac{Gmm_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i + \frac{SAQ_{pr}}{c} \left[\frac{\mathbf{R}_1}{R_1} - (1 + sw) \left(\frac{\dot{\mathbf{R}}_1 \cdot \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_1}{c R_1^2} + \frac{\dot{\mathbf{R}}_1}{c} \right) \right]. \quad (70)$$

con

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{R}_1}{R_1} &= \frac{\hat{\mathbf{i}}(X - X_1) + \hat{\mathbf{j}}(Y - Y_1)}{[(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2]^{1/2}}, \\
\dot{\mathbf{R}}_1 &= \hat{\mathbf{i}}(\dot{X} + Y_1) + \hat{\mathbf{j}}(\dot{Y} - X_1), \\
\dot{\mathbf{R}}_1 \cdot \mathbf{R}_1 &= \dot{X}(X - X_1) + \dot{Y}(Y - Y_1) + XY_1 - X_1Y, \\
(\dot{\mathbf{R}}_1 \cdot \mathbf{R}_1) \mathbf{R}_1 &= \hat{\mathbf{i}}(X - X_1) \left[\dot{X}(X - X_1) + \dot{Y}(Y - Y_1) + XY_1 - X_1Y \right] \\
&\quad + \hat{\mathbf{j}}(Y - Y_1) \left[\dot{X}(X - X_1) + \dot{Y}(Y - Y_1) + XY_1 - X_1Y \right]. \quad (71)
\end{aligned}$$

Separando componentes:

$$\begin{aligned}
\ddot{X} = & - \left[\frac{m_1(X - X_1)}{R_1^3} + \frac{m_2(X - X_2)}{R_2^3} + \frac{m_3(X - X_3)}{R_3^3} \right] + \frac{SAQ_{pr}}{cm} \left\{ \frac{X - X_1}{R_1} \right. \\
& - \frac{(1 + sw)}{cR_1^2} \left[(X - X_1) \left[\dot{X}(X - X_1) + \dot{Y}(Y - Y_1) + XY_1 - X_1Y \right] \right. \\
& \left. \left. + R_1^2(\dot{X} + Y_1) \right] \right\}, \quad (72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{Y} = & - \left[\frac{m_1(Y - Y_1)}{R_1^3} + \frac{m_2(Y - Y_2)}{R_2^3} + \frac{m_3(Y - Y_3)}{R_3^3} \right] + \frac{SAQ_{pr}}{cm} \left\{ \frac{Y - Y_1}{R_1} \right. \\
& - \frac{(1 + sw)}{cR_1^2} \left[(Y - Y_1) \left[\dot{X}(X - X_1) + \dot{Y}(Y - Y_1) + XY_1 - X_1Y \right] \right. \\
& \left. \left. + R_1^2(\dot{Y} - X_1) \right] \right\}. \quad (73)
\end{aligned}$$

Ahora, haciendo uso de

$$\beta = \frac{SAQ_{pr} R_1^2}{c G m m_1}, \quad (74)$$

las ecuaciones (72) y (73), transforman en:

$$\begin{aligned} \ddot{X} = & - \left[\frac{m_1 (X - X_1)}{R_1^3} (1 - \beta) + \frac{m_2 (X - X_2)}{R_2^3} + \frac{m_3 (X - X_3)}{R_3^3} \right] \\ & - (1 + sw) \left\{ \frac{\beta m_1}{c R_1^2} \left[\frac{X - X_1}{R_1} \left[\dot{X}(X - X_1) + \dot{Y}(Y - Y_1) + XY_1 - X_1Y \right] + \dot{X} + Y_1 \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{Y} = & - \left[\frac{m_1 (Y - Y_1)}{R_1^3} (1 - \beta) + \frac{m_2 (Y - Y_2)}{R_2^3} + \frac{m_3 (Y - Y_3)}{R_3^3} \right] \\ & - (1 + sw) \left\{ \frac{\beta m_1}{c R_1^2} \left[\frac{Y - Y_1}{R_1} \left[\dot{X}(X - X_1) + \dot{Y}(Y - Y_1) + XY_1 - X_1Y \right] + \dot{Y} - X_1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Usando las relaciones dadas en (61), (64) y (65), y siguiendo el procedimiento descrito en § 1, se llega a:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} &= x - \frac{m_1(x-x_1)}{r_1^3}(1-\beta) - \frac{m_2(x-x_2)}{r_2^3} \\
&\quad - \frac{m_3(x-x_3)}{r_3^3} - (1+sw)F_x, \\
\ddot{y} + 2\dot{x} &= y - \frac{m_1(y-y_1)}{r_1^3}(1-\beta) - \frac{m_2(y-y_2)}{r_2^3} \\
&\quad - \frac{m_3(y-y_3)}{r_3^3} - (1+sw)F_y,
\end{aligned} \tag{75}$$

con

$$\begin{aligned}
F_x &= \frac{\beta m_1}{c r_1^2} \left[\frac{(x-x_1)}{r_1^2} [\dot{x}(x-x_1) + \dot{y}(y-y_1)] + \dot{x} - (y-y_1) \right], \\
F_y &= \frac{\beta m_1}{c r_1^2} \left[\frac{(y-y_1)}{r_1^2} [\dot{x}(x-x_1) + \dot{y}(y-y_1)] + \dot{y} + (x-x_1) \right].
\end{aligned}$$