

**La Función  $\mathcal{T}$  de Jones:  
Propiedades y aplicaciones.**

**Ruben Alveiro Castellanos Calderón**

**Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Matemáticas  
Bucaramanga  
2015**

# La Función $\mathcal{T}$ de Jones: Propiedades y aplicaciones.

Autor

Ruben Alveiro Castellanos Calderón

Trabajo de grado como requisito para optar el título de

*Matemático*

Director

Javier Enrique Camargo García, Ph.D.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2015

# Agradecimientos

- ◇ En primer lugar agradezco a Dios por estar siempre protegiéndome y guiando en todo momento.
- ◇ De manera muy especial, quiero agradecer a toda mi familia, en especial a mi madre porque me ha dado su apoyo incondicional a lo largo de mi carrera y mi vida. A mi padre que desde el cielo me guía y mi hermano, porque me han ayudado a conseguir todo lo que tengo y a no caer cuando me siento derrotado.
- ◇ Agradezco al Dr. Javier Enrique Camargo por toda su colaboración e interés en mi proyecto, por todas sus recomendaciones y por su dedicación y empeño.
- ◇ También quiero agradecer a la Universidad Industrial de Santander, a la Escuela de Matemática y a todos sus miembros entre maestros y alumnos.
- ◇ A todos quienes hicieron posible este gran logro que representa para mi.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>10</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1. Notación . . . . .	12
1.2. Conceptos generales . . . . .	13
1.3. Continuos . . . . .	15
1.4. Hiperespacios . . . . .	21
<b>2. Continuos: propiedades y ejemplos</b>	<b>23</b>
2.1. Aposíndesis . . . . .	23
2.2. Continuos irreducibles . . . . .	28
2.3. Continuos descomponibles e indescomponibles . . . . .	31
2.4. Continuos uncoherentes . . . . .	36
<b>3. La función <math>\mathcal{T}</math> de Jones</b>	<b>38</b>
3.1. Propiedades generales de la función $\mathcal{T}$ . . . . .	38
3.2. Propiedades topológicas y la función $\mathcal{T}$ . . . . .	43
3.3. $\mathcal{T}$ -Simétrico y $\mathcal{T}$ -Aditivo . . . . .	47
3.4. Aplicaciones de la función $\mathcal{T}$ . . . . .	51

# Índice de figuras

1.1. Curva senoidal del topólogo . . . . .	15
1.2. Continuo $F_\omega$ . . . . .	16
1.3. Sucesión de abanicos armónicos . . . . .	18
1.4. Abanico armónico . . . . .	19
1.5. Suspensión sobre Cantor . . . . .	20
2.1. Suspensión armónica . . . . .	25
2.2. Curva senoidal del topólogo . . . . .	25
2.3. Peine armónico . . . . .	26
2.4. Círculo de Varsovia . . . . .	30
2.5. Construcción de Sierpiński. . . . .	33
2.6. Curva Universal de Sierpiński. . . . .	34
2.7. Continuo indescomponible . . . . .	35
2.8. Continuo unicoherente . . . . .	37
3.1. Suspensión armónica . . . . .	40
3.2. Cono sobre el conjunto de Cantor . . . . .	41
3.3. Cono doble sobre el conjunto de Cantor . . . . .	41
3.4. Abanico armónico . . . . .	45

**TITULO:** LA FUNCIÓN  $\mathcal{T}$  DE JONES: PROPIEDADES Y APLICACIONES<sup>1</sup>  
**AUTOR:** RUBEN ALVEIRO CASTELLANOS CALDERÓN<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVE:**

Continuos, Aposíndesis, Función  $\mathcal{T}$  de Jones.

**DESCRIPCIÓN:**

Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. La Teoría de continuos es la rama de la topología que estudia los espacios métricos compactos y conexos; espacios llamados continuos. A finales de los años 30, el profesor Burton Jones define la función  $\mathcal{T}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  como el subconjunto de  $X$  tal que:

$$X \setminus \mathcal{T}(A) = \{x \in X : \text{existe un subcontinuo } K \text{ de } X \text{ tal que} \\ x \in K^\circ \text{ y } K \cap A = \emptyset\}, \text{ para cada } A \in \mathcal{P}(X).$$

Esta función se le llama *función  $\mathcal{T}$  de Jones*.

Este trabajo muestra el comportamiento de la función  $\mathcal{T}$  en clases de continuos, caracterizando algunos de ellos. Además, se muestran propiedades de la función  $\mathcal{T}$  como la  $\mathcal{T}$ -simetría y  $\mathcal{T}$ -aditividad, las cuales se presentan de manera natural siempre que tenemos un operador con las características de la función  $\mathcal{T}$  de Jones.

Consideramos importante resaltar que se presentan demostraciones alternativas de resultados clásicos de Teoría de continuos usando la función  $\mathcal{T}$ . De esta forma planteamos la función  $\mathcal{T}$  como una herramienta para abordar problemas en topología, particularmente en Teoría de continuos.

---

<sup>1</sup>Proyecto de Grado

<sup>2</sup>FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE MATEMÁTICAS.  
DIRECTOR Ph. D. Javier Enrique Camargo García

**TITLE:** FUNCTION  $\mathcal{T}$  DE JONES: PROPERTIES AND APPLICATIONS<sup>1</sup>  
**AUTHOR:** RUBEN ALVEIRO CASTELLANOS CALDERÓN<sup>2</sup>

**KEY WORDS:**

Continuous; Aposindesis; Function  $\mathcal{T}$  de Jones.

**DESCRIPTION:**

A continuum is a nonempty, compact, connected and metric space. Theory of Continua is the branch of topology that study properties of continua. The set function  $\mathcal{T}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , was defined by professor Floyd Burton Jones at the end of the 30's, such that

$$X \setminus \mathcal{T}(A) = \{x \in X : \text{there exists a subcontinuum } K \text{ of } X \text{ such that} \\ x \in K^\circ \text{ and } K \cap A = \emptyset\}, \text{ for each } A \in \mathcal{P}(X).$$

The function  $\mathcal{T}$  is called *Jones's set function*  $\mathcal{T}$ .

We show some of the well known properties in a kind of continua and characterize some of them. Also, we present when a continuum is  $\mathcal{T}$ -symmetric or  $\mathcal{T}$ -additive; properties presented in a natural way when we study an operator like the Jones's set function  $\mathcal{T}$ .

It is important to emphasize that we give some applications of the set function  $\mathcal{T}$ , presenting proofs of classical results in Continuum Theory with the set function  $\mathcal{T}$ . Therefore, the set function  $\mathcal{T}$  is a tool to solve open problems in Topology, particularly, in Theory of Continua.

---

<sup>1</sup>Degree Project

<sup>2</sup>FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE MATEMÁTICAS.  
DIRECTOR Ph. D. Javier Enrique Camargo García

# Introducción

La topología nos ofrece muchos campos de investigación, uno de ellos es la teoría de continuos. Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío. En esta rama se estudian diversas características de los espacios y propiedades que cumplen los mismos, donde se utilizan diversos métodos para su estudio. Una propiedad interesante de los continuos es la aposindesis. La aposindesis fue definida y muy estudiada por el profesor Floyd Burton Jones en los años 40's. Intuitivamente un continuo es aposindético si cada punto lo puedo separar por un subcontinuo lejos de los demás puntos del continuo. La aposindesis, fue la motivación de Jones para definir la función  $\mathcal{T} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ , con el objetivo de estudiar y caracterizar propiedades de los continuos. El profesor Jones demostró diversas propiedades de esta función y caracterizó diferentes clases de continuos usando su definición. Estas propiedades despertaron el interés de diferentes matemáticos por estudiar esta función, función que con el paso de los años llamaron Función  $\mathcal{T}$  de Jones.

Desde su definición, la función  $\mathcal{T}$  de Jones, se a mostrado como una alternativa para abordar y resolver problemas abiertos. Por esta razón, en este trabajo, la idea es mostrar cómo se pueden caracterizar los continuos localmente conexos, indescomponibles y unicoherentes, por medio de la función  $\mathcal{T}$ . Además mostrar ejemplos puntuales de cómo definir la función  $\mathcal{T}$  en continuos. Este documento es un estudio de la función  $\mathcal{T}$  y un estudio general de propiedades topológicas caracterizadas por la función  $\mathcal{T}$ . Para desarrollar esta idea dividimos el presente escrito en tres capítulos distribuidos de la

siguiente forma:

El Capítulo 1 contiene conceptos básicos de topología, empezando con estandarizar la notación, logrando abarcar de forma general temas vitales para el desarrollo del presente escrito como conexidad, continuos e hiperespacios.

El Capítulo 2 está dedicado a definir formalmente la aposindesis. Además, mostramos propiedades generales de clases de continuos: continuos indescomponibles, irreducibles y unicoherentes.

Finalmente en el Capítulo 3, introducimos la función  $\mathcal{T}$  y sus propiedades. Luego en las secciones 2 y 3 hacemos una caracterización de continuos usando las propiedades descritas en el Capítulo 2 usando la función  $\mathcal{T}$ . Para finalizar nuestro trabajo mostramos cómo se comporta la función  $\mathcal{T}$  al componerla con funciones continuas, monótonas y abiertas.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo presentamos definiciones y resultados básicos de topología general necesarios para el desarrollo de este trabajo. Iniciamos con una sencilla notación para luego abarcar conceptos como conexidad, componentes, continuos y algunos ejemplos y características de los mismos. En la parte final de este capítulo daremos algunas definiciones básicas de hiperespacios.

### 1.1. Notación

Para tener presente mostramos los siguientes símbolos muy utilizados en el desarrollo de este trabajo.

- ◇  $\mathbb{N}$ : Conjunto de los números naturales.
- ◇  $\mathbb{R}$ : Conjunto de los números reales.
- ◇  $\mathcal{P}(X)$ : Conjunto de partes de  $X$ .
- ◇  $|A|$ : Cardinal del conjunto  $A$ .
- ◇  $A^\circ$ : Conjunto de puntos interiores de  $A$ .
- ◇  $\bar{A}$ : Clausura (adherencia) de  $A$ .

- ◇  $Fr(A)$ : Frontera de  $A$ .
- ◇  $X \setminus A$ : Diferencia entre dos conjuntos.
- ◇  $A \subset B$ :  $A$  es un subconjunto de  $B$ .
- ◇  $B(x, \varepsilon)$ : Bola abierta de centro  $x$  y radio  $\varepsilon$ .
- ◇  $d(x, y)$ : Distancia del punto  $x$  al punto  $y$ .

## 1.2. Conceptos generales

Para comenzar, miremos conceptos y propiedades muy conocidas en topología que nos servirán a lo largo de este escrito.

**Definición 1.2.1.** *Un espacio métrico  $X$  es desconexo si existen abiertos no vacíos,  $A$  y  $B$ , tales que  $X = A \cup B$  y  $A \cap B = \emptyset$ . Si  $X$  no es desconexo entonces diremos que  $X$  es conexo.*

**Definición 1.2.2.** *Sean  $X$  un espacio métrico y  $C$  un subconjunto de  $X$ . Diremos que  $C$  es una componente de  $X$  si  $C$  es conexo y tiene la propiedad de que si  $C$  está contenida en  $D$  y  $D$  es un conexo de  $X$  entonces  $C = D$ .*

Llamaremos a  $\mathbf{C}$  la familia de componentes de  $X$ , es decir,

$$\mathbf{C} = \{C \subset X \mid C \text{ es componente de } X\}.$$

Además, nótese que  $\mathbf{C}$  determina una partición de  $X$ .

**Proposición 1.2.3.** *Sean  $X$  un espacio topológico y  $\mathbf{C}$  la familia de componentes de  $X$ . Si  $C \in \mathbf{C}$ , entonces  $C$  es cerrado de  $X$ .*

*Demostración.* Sea  $C \in \mathbf{C}$ . Por el Teorema 1.6 Capítulo 5 de [2],  $\overline{C}$  es conexa. Pero como  $C$  es una componente y  $C \subset \overline{C}$ , necesariamente  $C = \overline{C}$ . De donde  $C$  es cerrada.  $\square$

**Lema 1.2.4.** *Sea  $X$  un espacio topológico. Si  $X$  tiene una cantidad finita de componentes entonces las componentes son abiertas y cerradas.*

*Demostración.* Sea  $\mathbf{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$  donde  $C_j \cap C_i = \emptyset$ , para  $j \neq i$ . Por la Proposición 1.2.3, las componentes son cerradas. Probemos que las componentes son abiertas. Sabemos que  $\cup_{i \neq j} C_i$  es un cerrado de  $X$ . Como  $\mathbf{C}$  es una partición de  $X$ , deducimos que  $C_j = X \setminus (\cup_{i \neq j} C_i)$  es un abierto de  $X$ , para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ .  $\square$

A continuación presentamos construcciones de espacios topológicos como conos y suspensiones, las cuales usaremos con frecuencia en el desarrollo de este escrito.

Denotemos por  $I = [0, 1]$  y  $J = [-1, 1]$ .

**Definición 1.2.5.** *Sea  $X$  un espacio topológico. El cono de  $X$ , que denotamos por  $\text{Cono}(X)$ , es el espacio cociente*

$$\text{Cono}(X) = X \times I / \sim$$

donde  $(x, 1) \sim (y, 1)$  para todo  $x, y \in X$ .

**Definición 1.2.6.** *Sea  $X$  un espacio topológico. La suspensión de  $X$ , que denotamos por  $\text{Sus}(X)$ , es el espacio cociente*

$$\text{Sus}(X) = X \times J / \sim$$

donde  $(x, -1) \sim (y, -1)$  y  $(x, 1) \sim (y, 1)$ , para todo par de puntos  $x, y \in X$ .

En este trabajo dedicamos una sección para ver como se comporta la función  $\mathcal{T}$  al componerla con funciones continuas, por esto recordamos la siguiente definición.

**Definición 1.2.7.** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Diremos que una función  $f: X \rightarrow Y$  es continua en  $a$ , si dado un abierto  $V$  de  $Y$  con  $f(a) \in V$ , existe un abierto  $U$  de  $X$  tal que  $a \in U$  y  $f(U) \subset V$ . Diremos que  $f$  es continua en  $X$ , si  $f$  es continua en todo punto  $a$  de  $X$ .*

### 1.3. Continuos

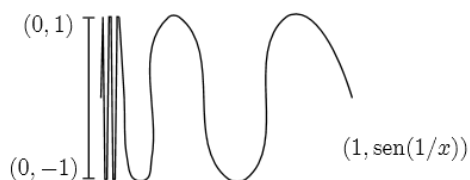
Los continuos son la base de nuestro estudio, por esto mostramos algunas definiciones y resultados básicos que serán de utilidad en los próximos capítulos.

**Definición 1.3.1.** *Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. A cualquier subconjunto de un espacio métrico que sea un continuo se le llama subcontinuo.*

**Ejemplo 1.3.2.** *Algunos ejemplos de continuos son:*

1. *Un arco. Espacio homeomorfo al intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Si  $h: X \rightarrow [0, 1]$  es un homeomorfismo, diremos que  $a, b$  son los puntos finales de  $X$  siempre que  $h(\{a, b\}) = \{0, 1\}$ .*
2. *Las gráficas. Una gráfica es un continuo que se puede escribir como la unión finita de arcos para los cuales, cualesquiera dos de estos arcos, son disyuntos o se interceptan en uno o sus dos puntos finales.*
3. *El producto a lo más numerable de continuos es un continuo. En particular, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $[0, 1]^n$  es un continuo y cualquier espacio homeomorfo a  $[0, 1]^n$  se conoce como  $n$ -celda. Si  $\omega$  es el primer ordinal infinito,  $[0, 1]^\omega$  se le conoce como cubo de Hilbert.*
4. *La curva senoidal del topólogo; se define como el siguiente subespacio del plano,*

$$T = \{(x, \text{sen}(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{\{0\} \times [-1, 1]\}$$



**Figura 1.1** – Curva senoidal del topólogo

es un continuo.

Veamos ahora algunas propiedades de conexidad en continuos.

**Definición 1.3.3.** Sean  $X$  un continuo y  $x \in X$ . Si para cualquier abierto  $U$  de  $X$  con  $x \in U$ , existe un abierto y conexo  $V$  de  $X$  tal que  $x \in V \subset U$ , entonces se dice que  $X$  es localmente conexo en  $x$ .  $X$  se dice localmente conexo si lo es en cada uno de sus puntos. Si  $X$  es un continuo localmente conexo, también se le llama continuo de Peano.

Un arco, las gráficas, las  $n$ -celdas, el cubo de Hilbert e incluso, la curva universal de Sierpiński (ver Ejemplo 2.3.7) son ejemplos de continuos localmente conexos. Como se puede verificar para los puntos sobre la barra límite, la curva senoidal del topólogo es un continuo que no es localmente conexo. A continuación presentamos otro ejemplo de esta clase de continuos.

**Ejemplo 1.3.4.** Sea  $F_\omega$  el continuo que consta de la unión numerable de los segmentos de recta en el plano de la siguiente forma: Sea  $f(x) = x - x^2$ ,  $a_n = \frac{1}{n}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $X_n = (a_n, f(a_n))$ .  $F_\omega$  se define como la unión de los segmentos de recta del origen 0 al punto  $X_n$ , para cada  $n$ , como mostramos en la Figura 1.2.

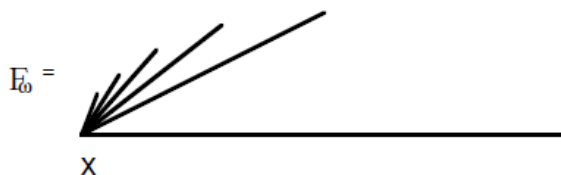


Figura 1.2 – Continuo  $F_\omega$

El continuo  $F_\omega$  es un continuo localmente conexo como se puede verificar fácilmente.

En la siguiente proposición caracterizamos los continuos localmente conexo por medio de sus componentes.

**Proposición 1.3.5.** Sea  $X$  un continuo. Entonces  $X$  es localmente conexo si y sólo si cada una de las componentes de un abierto es abierta.

*Demostración.* Sean  $X$  un continuo localmente conexo,  $U$  un abierto de  $X$  y  $C$  una componente de  $U$ . Para cada punto  $x$  en  $C$ , existe un abierto conexo  $V_x$  de  $X$  que contiene a  $x$  y que está contenido en  $U$ . Así  $C \cup V_x$  es conexo y está contenido en  $U$ . Como  $C$  es componente,  $V_x \subset C$ . Por lo tanto,  $C = \cup_{x \in C} V_x$  es un abierto ya que es unión de abiertos.

Recíprocamente, si  $U$  es un abierto que contiene a un punto  $x$  y  $C$  es la componente de  $U$  que contiene a  $x$ . Podemos tomar a  $C$  como el abierto conexo de la definición de localmente conexo.  $\square$

**Lema 1.3.6.** *Sean  $X$  un continuo y  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$  con un número finito de componentes. Si  $p \in A^\circ$ , entonces  $p$  está en el interior de la componente de  $A$  que lo contiene.*

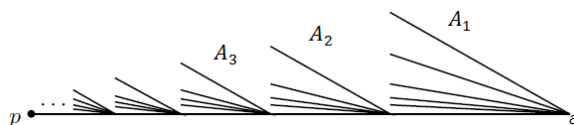
*Demostración.* Sean  $C_1, \dots, C_n$  las componentes de  $A$ . Como  $p \in A^\circ$ , existe  $\varepsilon_1 > 0$ , tal que  $B(p, \varepsilon_1) \subset A$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $p \in C_1$ . Sea  $\delta = \min\{d(C_1, C_j) \mid j \in \{2, \dots, n\}\} > 0$ , donde  $d(C_1, C_j) = \min\{d(c, c') : c \in C_1, c' \in C_j\}$ . Nótese que  $\delta$  existe y está bien definido pues las componentes de  $A$  son cerradas, por la Proposición 1.2.3. Sea  $\varepsilon < \min\{\varepsilon_1, \delta\}$ . Veamos que  $B(p, \varepsilon) \subset C_1$ . Sea  $x \in B(p, \varepsilon)$ , como  $\varepsilon < \varepsilon_1$ ,  $x \in A$ . Si  $x \in C_j$  para algún  $j \neq 1$  entonces  $\varepsilon > d(p, x) \geq \delta > \varepsilon$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $x \in C_1$ . Así  $p$  está en el interior de  $C_1$  la componente de  $A$  que lo contiene.  $\square$

**Definición 1.3.7.** *Sean  $X$  un continuo y  $x$  un punto de  $X$ . Si para cada abierto  $U$  de  $X$  con  $x \in U$ , existe una vecindad conexa (no necesariamente abierta)  $V$  de  $x$  en  $X$  tal que  $x \in V^\circ \subset V \subset U$ , entonces se dice que  $X$  es conexo en pequeño en  $x$ .  $X$  se dice conexo en pequeño si lo es en cada uno de sus puntos.*

De la definición, es claro que todo continuo localmente conexo en un punto, es conexo en pequeño en dicho punto. Veamos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.3.8.** *Sea  $X = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$  el continuo mostrado en la Figura 1.3. Mostremos en*

pocas palabras que  $X$  es conexo en pequeño en el punto  $p$  pero no es localmente conexo en  $p$ .



**Figura 1.3** – Sucesión de abanicos armónicos

Facilmente podemos ver que todo abierto conexo que contenga a  $p$ , contiene el segmento  $pa$ . Así el continuo no es localmente conexo en el punto  $p$ . Sin embargo, para cada abierto  $U$  de  $X$ , con  $p \in U$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > N$   $\cup_{i=N}^{\infty} A_i \subset U$ ,  $\cup_{i=N}^{\infty} A_i$  es un continuo y  $p \in (\cup_{i=N}^{\infty} A_i)^{\circ}$ ; es decir,  $X$  es conexo en pequeño en  $p$ .

La siguiente proposición es de utilidad en nuestro estudio ya que establece condiciones para la equivalencia entre conexo en pequeño y localmente conexo.

**Proposición 1.3.9.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces  $X$  es conexo en pequeño si y sólo si  $X$  es localmente conexo.*

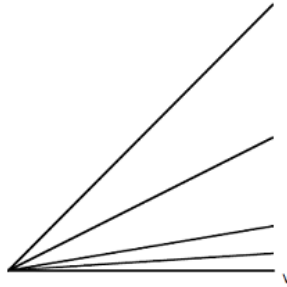
*Demostración.* Supongamos que  $X$  es conexo en pequeño en todos sus puntos. Sean  $U$  un abierto  $X$  y  $C$  una componente de  $U$ . Sea  $x \in C$ , por Definición 1.3.7, existe un subcontinuo  $V$  de  $X$  tal que  $x \in V^{\circ} \subset V \subset U$ , en particular  $V$  es conexo contenido en  $U$ . Así,  $V$  está contenido en  $C$ . Además,  $x \in V^{\circ} \subset V \subset C$ , por lo tanto  $x \in C^{\circ}$ . Como  $x$  lo tomamos de manera arbitraria,  $C$  es abierta. Así  $X$  es localmente conexo por la Proposición 1.3.5.

Si  $X$  es localmente conexo es claro que es conexo en pequeño en todo punto de  $X$ .  $\square$

**Definición 1.3.10.** *Un continuo  $X$  es semilocalmente conexo en el punto  $x$  si para todo abierto  $U$  de  $X$  con  $x \in U$ , existe un abierto  $V$  de  $X$  tal que  $x \in V \subset U$  y  $X \setminus V$  tiene un número finito de componentes. Si  $X$  es semilocalmente conexo en todos sus puntos, se dice que el continuo  $X$  es semilocalmente conexo.*

Un continuo semilocalmente conexo en  $p$  no es necesariamente localmente conexo en  $p$ , también se tiene que si un continuo es semilocalmente conexo en  $p$  entonces no es necesariamente conexo en pequeño en  $p$ , como lo muestran los siguientes ejemplos.

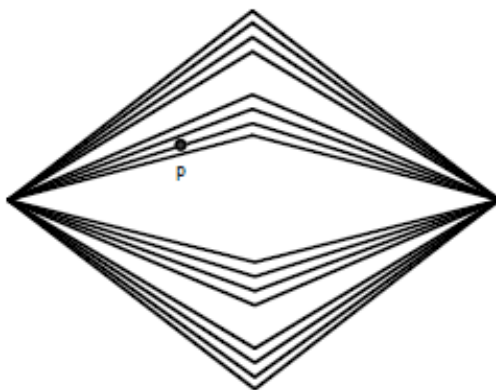
**Ejemplo 1.3.11.** Sea  $X = \text{Cono}(A)$ , el cono armónico, donde  $A = (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$ .



**Figura 1.4** – Abanico armónico

$X$  es semilocalmente conexo en  $v$ , pues para cada abierto  $U$  de  $X$  tal que  $v \in U$ , existe un abierto  $V$  de  $X$  tal que  $v \in V \subset U$  y  $X \setminus V$  tiene un número finito de componentes (una componente). Así  $X$  es semilocalmente conexo. Por otro lado  $X$  no es localmente conexo en  $v$ , porque existe  $U$  abierto de  $X$  con  $v \in U$  tal que no existe un  $V$  abierto y conexo contenido en  $U$  que contenga a  $v$ . Cabe resaltar que  $X$  no es semilocalmente conexo en  $y$ , con  $y \neq v$  tal que  $y$  pertenezca a la barra límite de  $X$ . Además en la barra límite solo es localmente conexo en el vertice del abanico.

**Ejemplo 1.3.12.** Sea  $X = \text{Sus}(C)$  donde  $C$  es el conjunto de Cantor.



**Figura 1.5** – Suspensión sobre Cantor

Este continuo es semilocalmente conexo, pues para cada abierto  $U$  de  $X$  tal que  $p \in U$ , existe un abierto  $V$  de  $X$  tal que  $p \in V \subset U$  y  $X \setminus V$  tiene una componente. Pero es claro que  $X$  no es conexo en pequeño, porque existe un abierto  $U'$  tal que no existe una vecindad conexa  $V'$  con  $p \in V'^{\circ} \subset V' \subset U'$ .

A continuación mostramos teoremas muy importantes en la teoría de continuos. Estos teoremas los utilizaremos en los siguientes capítulos. El siguiente teorema se conoce como el Teorema del Cable Cortado.

**Teorema 1.3.13.** *Sean  $X$  un espacio métrico compacto,  $A$  y  $B$  cerrados no vacíos de  $X$ . Si no existe un conexo en  $X$  que interseca a  $A$  y  $B$  simultáneamente, entonces  $X = X_1 \cup X_2$ , donde  $X_1$  y  $X_2$  son cerrados disjuntos tales que  $A \subset X_1$  y  $B \subset X_2$ .*

Una prueba del Teorema del cable cortado puede consultarse en [10, Teorema 5.2]. La demostración no se realiza en este escrito, ya que se necesitan conceptos que extenderían mucho el desarrollo del mismo. El siguiente teorema se conoce como el Teorema de Golpes en la Frontera.

**Teorema 1.3.14.** *Sean  $X$  un continuo y  $U$  un subconjunto abierto y no vacío de  $X$ . Si  $K$  es una componente de  $\overline{U}$  entonces  $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$ ; equivalentemente,  $K \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $K \cap Fr(U) = \emptyset$ . Como  $K$  y  $Fr(U)$  son cerrados en  $\overline{U}$  y no existe una componente en  $\overline{U}$  que interseca a  $K$  y  $Fr(U)$  simultáneamente, por ser  $K$  componente, entonces por el Teorema 1.3.13 existen  $M_1$  y  $M_2$  cerrados disjuntos de  $\overline{U}$  tales que  $K \subset M_1$ ,  $Fr(U) \subset M_2$  y  $\overline{U} = M_1 \cup M_2$ . Definamos  $M_3 = M_2 \cup (X \setminus U)$ , cerrado en  $X$ . Notemos que  $M_1$  y  $M_2$  son cerrados no vacíos de  $X$ . Ahora como  $M_1 \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cup (X \setminus U)) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap (X \setminus U))$ , donde  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  y  $M_1 \cap X \setminus U = \emptyset$ , tenemos que  $M_1 \cap M_3 = \emptyset$ . Como  $X = M_1 \cup M_3$ , tenemos que  $X$  no es conexo. Por tanto  $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$ .  $\square$

**Proposición 1.3.15.** *Sean  $X$  un continuo y  $C$  un subcontinuo de  $X$ . Si  $U$  y  $V$  son abiertos no vacíos y disjuntos de  $X$  tales que  $X \setminus C = U \cup V$ , entonces  $C \cup U$  y  $C \cup V$  son subcontinuos de  $X$ .*

*Demostración.* Nótese que  $X \setminus (C \cup U) = V$  es abierto de  $X$ . Así,  $C \cup U$  es cerrado de  $X$ . Veamos que  $C \cup U$  es conexo. Supongamos que existen  $M$  y  $N$  cerrados disjuntos y no vacíos, tales que  $C \cup U = M \cup N$ . Como  $C$  es conexo,  $C \subset M$  o  $C \subset N$ . Supongamos que  $C \subset M$ ; así,  $N \subset U$ . Nótese que  $X = (U \cup C) \cup V = M \cup N \cup V = (M \cup V) \cup N$ . Veamos que  $M \cup V$  y  $N$  están mutuamente separados. Como  $V \cap (M \cup N) = \emptyset$  y  $N$  es cerrado, tenemos que  $\overline{N} \cap (M \cup V) = \emptyset$ . Por otra parte  $\overline{M \cup V} \cap N = (\overline{M} \cap N) \cup (\overline{V} \cap N)$ . Es claro que  $\overline{M} \cap N = M \cap N = \emptyset$ . Además, como  $N \subset U$  y  $U \cap V = \emptyset$ , tenemos que  $\overline{V} \cap U = \emptyset$ . Así,  $\overline{V} \cap N = \emptyset$  y  $\overline{M \cup V} \cap N = \emptyset$ . De lo anterior,  $X = (M \cup V) \cup N$ , contradiciendo la conexidad de  $X$ . Así,  $U \cup C$  es un continuo. De la misma manera probamos que  $V \cup C$  es un continuo.  $\square$

## 1.4. Hiperespacios

Esta sección la dedicamos para dar una introducción a los hiperespacios utilizados en este trabajo.

Sea  $X$  un continuo con métrica  $d$ . Definimos los hiperespacios asociados a  $X$  de la

siguiente manera:

1.  $2^X = \{A \subset X \mid A \text{ es cerrado y no vacío}\}$ .
2.  $\mathcal{C}(X) = \{A \in 2^X \mid A \text{ es conexo}\}$ .

Para considerar estos conjuntos como espacios topológicos bastará dotar de una topología a  $2^X$  pues  $\mathcal{C}(X)$  ya tendrá la topología inducida. Cabe resaltar que se pueden definir otros hiperespacios de  $X$  pero van mas allá del propósito de este trabajo. Definimos una métrica  $H$  en  $2^X$  como:

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\},$$

donde

$$N(\varepsilon, A) = \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon \text{ para alguna } a \in A\}.$$

A  $H$  se le llama la métrica de Hausdorff. En [11, Teorema 2.2] se puede encontrar una demostración que  $H$  es en efecto una métrica sobre  $2^X$ . Además,  $2^X$  y  $\mathcal{C}(X)$  son continuos para cualquier continuo  $X$ , como muestra el Capítulo 3 de [11].

La función  $\mathcal{T}$  de Jones, como vemos más adelante, es una función definida sobre el conjunto  $\mathcal{P}(X)$ , para un espacio  $X$ . Además  $\mathcal{C}(X) \subset 2^X \subset \mathcal{P}(X)$ . Con lo anterior queremos resaltar que podemos restringir  $\mathcal{T}$  a  $2^X$  o  $\mathcal{C}(X)$  y estudiar naturalmente la continuidad de estas restricciones. Este problema es complicado de abordar y solamente mostramos algunos aspectos relacionados al final del Capítulo 3.

# Capítulo 2

## Continuos: propiedades y ejemplos

Historicamente, la teoría de continuos tiene sus orígenes en 1886 con los trabajos de G. Cantor, como ciertos subconjuntos de la recta real que satisfacen algunas condiciones. Posteriormente la noción de continuo fue formalizada como es conocida hoy en día, por Fréchet, Alexandroff, Uryshon y Borel como espacios métricos compactos y conexos.

En este capítulo mostramos algunas propiedades generales de los continuos, con el fin de estudiar posteriormente dichas propiedades al aplicar la función  $\mathcal{T}$ . Particularmente, estudiaremos la aposíndesis, noción introducida por el profesor Burton Jones que a su vez dio origen a la función  $\mathcal{T}$ . Más adelante introducimos los continuos irreducibles, mostramos ejemplos y estudiamos algunas propiedades de esta clase de continuos; y finalmente, presentamos la unícoherencia en continuos resaltando algunas propiedades importantes.

### 2.1. Aposíndesis

La palabra aposíndesis, con las indicaciones del profesor B. Jones, (quien definió el concepto matemático formal), fue construida por el Dr. Leon del Departamento de Letras Clásicas de la Universidad de Texas en Austin. Aposíndesis tiene tres raíces griegas: apo, que significa “lejos” sin que quiere decir “junto” y deo que significa “envolver”; con

lo que podemos interpretar que el profesor Jones quería dar a entender que un espacio  $X$  es aposindético en  $p$  con respecto a  $q$  si  $X$  envuelve a  $p$  lejos de  $q$ . Formalmente, tenemos la siguiente definición:

**Definición 2.1.1.** Sean  $X$  es continuo y  $x, y \in X$ . Diremos que  $X$  es aposindético en  $x$  con respecto a  $y$  si existe un subcontinuo  $K$  de  $X$  tal que  $x \in K^\circ$  y  $y \in X \setminus K$ .  $X$  es aposindético en  $x$  si  $X$  es aposindético en  $x$  con respecto a cualquier otro punto de  $X$ . Finalmente, diremos que  $X$  es aposindético si es aposindético en todo punto de  $X$ .

Veamos ahora algunos ejemplos de continuos donde reflejamos la noción de aposindesis de diferentes maneras.

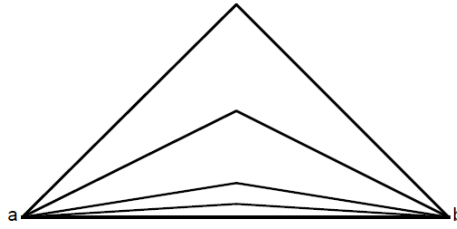
**Lema 2.1.2.** Todo espacio localmente conexo en un punto es aposindético en dicho punto.

Sean  $X$  un continuo localmente conexo y  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ . Como  $X \setminus \{y\}$  es abierto y  $x \in X \setminus \{y\}$ , existe un abierto conexo  $U$  de  $X$  tal que  $x \in U \subset \bar{U} \subset X \setminus \{y\}$ . De lo anterior  $\bar{U}$  es un continuo tal que contiene a  $x$  en su interior y no contiene a  $y$ ; es decir,  $X$  es aposindético en  $x$  con respecto a  $y$ .

Del lema anterior podemos decir que si un espacio  $X$  es localmente conexo, entonces  $X$  es aposindético.

**Ejemplo 2.1.3.** Sean  $A = (\frac{1}{n})_{n=1}^\infty \cup \{0\}$  y  $X = Sus(A)$ .  $X$  es aposindético.

Por definición  $Sus(A) = A \times [-1, 1] / (A \times \{-1\}, A \times \{1\})$ , donde denotaremos las clases  $a = A \times \{-1\}$  y  $b = A \times \{1\}$ . Llamemos  $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [-1, 1]$ , para cada  $n \geq 1$  y  $A_0 = \{0\} \times [-1, 1]$ . Abusando un poco del lenguaje, supondremos que  $X = \cup_{n=0}^\infty A_n$ , donde cada  $A_n$  es un arco con puntos extremos  $a$  y  $b$ , como mostramos en la Figura 2.1. Veamos que  $X$  es aposindético.



**Figura 2.1** – Suspensión armónica

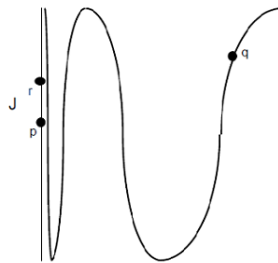
Sean  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ . consideremos los siguientes casos:

1. Si  $x \in \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ . Nótese que  $X$  es localmente conexo en  $x$ . Así, como hicimos en el Lema 2.1.2, existe un subcontinuo  $C$  de  $X$  tal que  $x \in C^\circ$  y  $y \notin C$ ; es decir,  $X$  es aposindético en  $x$ .
2. Si  $x \in A_0 \setminus \{a, b\}$ . En este caso tenemos dos alternativas:
  - a)  $y \in A_n \setminus \{a, b\}$ , para algún  $n \geq 1$ . Sea  $C = \cup_{m>n} A_m$ . Es claro que  $C$  es un continuo, donde  $x \in C^\circ$  y  $y \notin C$ .
  - b)  $y \in A_0$ . Sea  $w \in A_0$  entre  $x$  y  $y$ . Definimos  $C = \{(e, t) : e \in A, t \leq w\}$  y  $D = \{(e, t) : e \in A, t \geq w\}$ . Observe que  $C$  y  $D$  son subcontinuos de  $X$  y  $X = C \cup D$ . No es difícil ver que si  $x \in C$  entonces  $x \in C^\circ$  y  $y \notin C$ . De la misma forma si  $x \in D$ . De lo anterior, concluimos que  $X$  es aposindético.

**Ejemplo 2.1.4.** *La curva senoidal del topólogo es aposindética en algunos puntos.*

Recordemos que la curva senoidal del topólogo, que denotamos por  $X$ , se define como

$$X = \{(x, \text{sen}(1/x)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\} \cup \{\{0\} \times [-1, 1]\}.$$



**Figura 2.2** – Curva senoidal del topólogo

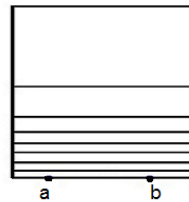
Sea  $q = (x, \text{sen}(\frac{1}{x}))$ , para algún  $0 < x \leq 1$ . Como  $X$  es localmente conexo en  $q$ , usando el mismo argumento del Lema 2.1.2,  $X$  es aposindético en  $q$ .

Sean  $r$  y  $p$  que pertenecen a  $\{\{0\} \times [-1, 1]\}$ . Es fácil ver que si  $C$  es un subcontinuo de  $X$  que contiene a  $r$  en su interior, entonces  $\{\{0\} \times [-1, 1]\} \subset C$ ; es decir  $p \in C$  y  $X$  no es aposindético en  $r$ .

En el siguiente ejemplo mostramos que la propiedad de aposindesis no es simétrica; es decir, existen dos puntos  $a$  y  $b$  en  $X$  tales que  $X$  es aposindético en  $a$  con respecto a  $b$ , pero  $X$  no es aposindético en  $b$  con respecto a  $a$ .

**Ejemplo 2.1.5.** *El peine armónico es aposindético en algunos puntos.*

Sea  $X = (\cup_{n=0}^{\infty} A_n) \cup A$ , donde, para cada  $n \geq 1$ ,  $A_n = [0, 1] \times \{\frac{1}{n}\}$ ,  $A_0 = [0, 1] \times \{0\}$  y  $A = \{0\} \times [0, 1]$ . El espacio  $X$  se conoce como peine armónico. Sean  $a, b \in A_0$  como se muestra en la Figura 2.3. Nótese que si tomamos  $C = X \cap (([0, \frac{1}{2}] \times \{0, \frac{1}{n}\}) \cup A)$ , entonces  $a \in C^\circ$  y  $b \notin C$ . Así  $X$  es aposindético en  $a$  con respecto a  $b$ . Sin embargo no es difícil probar que si  $C$  es un subcontinuo que tiene a  $b$  en su interior entonces contiene a  $a$ , pues si  $b \in C$  entonces  $C$  contiene el segmento desde 0 hasta  $b$ . De lo anterior,  $X$  no es aposindético en  $b$  con respecto a  $a$ . Finalmente, note que  $X$  es aposindético en  $x$  para todo  $x \in (\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup A$ , ya que en estos puntos  $X$  es localmente conexo.



**Figura 2.3** – Peine armónico

A continuación presentamos como se relacionan algunas propiedades topológicas con la aposindesis. Como mencionamos en el capítulo anterior si un continuo es localmente conexo en un punto, es conexo en pequeño en dicho punto. La siguiente proposición

muestra que basta que un continuo sea conexo en pequeño en un punto para tener aposíndesis (ver Ejemplo 2.1.3).

**Proposición 2.1.6.** *Sea  $X$  un continuo y  $x \in X$ . Si  $X$  es conexo en pequeño en  $x$  entonces  $X$  es aposíndético en  $x$ .*

*Demostración.* Sea  $y \in X$ ,  $y \neq x$ . Como  $X$  es conexo en pequeño en  $x$  y  $X \setminus \{y\}$  es abierto que contiene a  $x$ , tenemos que existe una vecindad conexa  $C$  de  $x$  tal que  $\overline{C} \subset X \setminus \{y\}$ . Nótese que  $\overline{C}$  es un continuo tal que  $x \in \overline{C}^\circ$  y  $y \notin \overline{C}$ ; es decir,  $X$  es aposíndético en  $x$  con respecto a  $y$ . Como  $y$  lo tomamos arbitrariamente,  $X$  es aposíndético en  $x$ .  $\square$

Con el siguiente resultado caracterizamos los continuos semilocalmente conexos por medio de continuos aposíndéticos.

**Proposición 2.1.7.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces  $X$  es semilocalmente conexo si y sólo si  $X$  es aposíndético.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es semilocalmente conexo y veamos que  $X$  es aposíndético. Sean  $x$  y  $y$  puntos distintos de  $X$ . Observe que  $X \setminus \{x\}$  es un abierto tal que  $y \in X \setminus \{x\}$ . Como  $X$  es un espacio métrico, existe un abierto  $U$  que contiene a  $y$  tal que  $\overline{U} \subset X \setminus \{x\}$ . Como  $X$  es semilocalmente conexo, existe un abierto  $V$  de  $X$  que contiene a  $y$  contenido en  $X \setminus \{x\}$ , tal que  $X \setminus V$  tiene un número finito de componentes. Por lema 1.3.6, se tiene que  $x$  está en el interior de la componente de  $X \setminus V$  que lo contiene. Por lo tanto  $X$  es aposíndético en  $x$  con respecto a  $y$ . Así,  $X$  es aposíndético.

Recíprocamente supongamos que  $X$  es aposíndético. Probemos que  $X$  es semilocalmente conexo. Sean  $x \in X$  y  $U$  un abierto de  $X$  con  $x \in U$ . Para todo punto  $y \in X \setminus U$ , se tiene que existe un subcontinuo  $K_y$  de  $X$ , tal que  $y \in K_y^\circ$  y  $x \in X \setminus K_y$ . Observemos que  $X \setminus U \subset \cup_{y \in X \setminus U} K_y^\circ$ . Como  $X \setminus U$  es compacto, existen  $y_1, \dots, y_n \in X \setminus U$  tales que  $X \setminus U \subset \cup_{j=1}^n K_{y_j}^\circ \subset \cup_{j=1}^n K_{y_j}$ . Sea  $V = X \setminus \cup_{j=1}^n K_{y_j}$ . Note que  $V$  es un abierto contenido en  $U$  que contiene a  $x$  y  $X \setminus V$  tiene un número finito de componentes; es

decir  $X$  es semilocalmente conexo en  $x$ . Como  $x$  fue un punto arbitrario de  $X$ , se tiene que  $X$  es semilocalmente conexo.  $\square$

## 2.2. Continuos irreducibles

En esta sección estudiamos una clase importante de continuos, los continuos irreducibles. Para profundizar en el estudio de continuos irreducibles el lector puede consultar el Capítulo 5 de [5].

**Definición 2.2.1.** *Sea  $X$  un continuo. Diremos que  $X$  es irreducible si existen dos puntos  $a$  y  $b$  en  $X$  tales que no existe un subcontinuo propio de  $X$  que contenga a ambos puntos. Es decir si  $C$  es un subcontinuo propio de  $X$ , entonces  $|C \cap \{a, b\}| \neq 2$ . En este caso diremos que  $X$  es irreducible entre  $a$  y  $b$ .*

**Ejemplo 2.2.2.** *Algunos ejemplos de continuos irreducibles son:*

1. *Cualquier intervalo cerrado  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}$  es irreducible entre  $a$  y  $b$ .*
2. *La curva senoidal del topólogo es irreducible entre cualquier punto del segmento  $\{0\} \times [-1, 1]$  y el punto  $(1, \text{sen}1)$  (ver Ejemplo 2.1.4).*

El siguiente teorema es un resultado importante de los continuos irreducibles, pues permite ver que el complemento de un subcontinuo tiene a lo más dos componentes.

**Teorema 2.2.3.** *Sean  $X$  un continuo irreducible entre  $a$  y  $b$  y  $C$  un subcontinuo de  $X$ . Si  $C$  es tal que  $C \cap \{a, b\} = \emptyset$  y  $X \setminus C$  no es conexo, entonces  $X \setminus C$  es la unión de dos subconjuntos abiertos y conexos, uno de los cuales contiene a  $a$  y el otro contiene a  $b$ . Además, si  $\{a, b\} \cap C \neq \emptyset$ , entonces  $X \setminus C$  es conexo.*

*Demostración.* Supongamos que  $X \setminus C$  no es conexo; es decir, existen abiertos disjuntos no vacíos  $P$  y  $Q$  en  $X$ , tales que  $X \setminus C = P \cup Q$ . Se sigue que tanto  $A = P \cup C$  como  $B = Q \cup C$  son subcontinuos de  $X$ , por la Proposición 1.3.15. Además, es claro que  $X = A \cup B$ ,  $A \cap B = C$ ,  $A \neq X$  y  $B \neq X$ .

Como  $X$  es un continuo irreducible entre  $a$  y  $b$ , se tiene que  $a \notin C$ , pues si  $a \in C$  entonces  $\{a, b\} \subset A$  o  $\{a, b\} \subset B$ , lo cual contradice la irreducibilidad de  $X$  entre  $a$  y  $b$ . Análogamente  $b \notin C$ . Por tanto  $\{a, b\} \subset X \setminus C = P \cup Q$ . Podemos suponer con un argumento similar que  $a \in P$  y  $b \in Q$ .

Veamos que  $Q = X \setminus A$  es conexo. Supongamos que no lo es; es decir,  $X \setminus A = H \cup K$ , donde  $H$  y  $K$  son abiertos disjuntos no vacíos. Como  $b \in X \setminus A$  podemos suponer que  $b \in H$  de donde  $A \cup H$  sería un subcontinuo propio de  $X$ , pues  $K \neq \emptyset$  y  $K \cap (A \cup H) = \emptyset$ , que contendría tanto a  $a$  como a  $b$ ; lo que contradice la irreducibilidad de  $X$  entre  $a$  y  $b$ . De lo anterior  $Q$  es conexo. De la misma forma se prueba que  $P$  es conexo. Por lo tanto  $X \setminus C$  es la unión de dos subconjuntos abiertos y conexos.

Por ultimo veamos que si  $a \in C$  entonces  $X \setminus C$  es conexo. Supongamos que  $X \setminus C$  no es conexo; es decir,  $X \setminus C = T \cup L$ , donde  $T$  y  $L$  son abiertos disjuntos no vacíos. Como  $b \in X \setminus C$ ,  $b \in T$  o  $b \in L$ . Supongamos que  $b \in T$ . Nótese que  $A \cup T$  es un subcontinuo de  $X$ , por la Proposición 1.3.15. Además,  $A \cup T$  es un subcontinuo propio que contendría a  $a$  y  $b$ , lo cual contradice la irreducibilidad de  $X$ . Por tanto  $X \setminus C$  es conexo.  $\square$

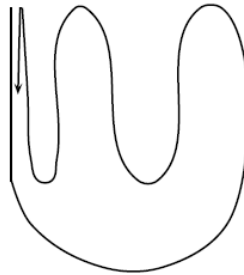
**Teorema 2.2.4.** *Sean  $X$  un continuo irreducible entre  $a$  y  $b$ , y  $A$  y  $B$  subcontinuos de  $X$ . Si  $a \in A$  y  $b \in B$  entonces  $X \setminus (A \cup B)$  es conexo.*

*Demostración.* Supongamos que  $A \cap B = \emptyset$ , de lo contrario  $X = A \cup B$ . Sea  $C = X \setminus A$  es conexo por el Teorema 2.2.3. Supongamos que  $C \setminus B$  no es conexo; es decir,  $C \setminus B = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos disjuntos. Con el mismo argumento que usamos en la prueba del Teorema 1.3.15, podemos probar que  $B \cup U$  y  $B \cup V$  son conexos. Luego  $B \cup \overline{U}$  y  $B \cup \overline{V}$  son continuos. Así  $X = A \cup B \cup \overline{X \setminus (A \cup B)}$ . Como  $A \cap B = \emptyset$ , se tiene que  $A \cap \overline{X \setminus (A \cup B)} \neq \emptyset$ . De donde  $A \cap \overline{U \cup V} \neq \emptyset$ . Luego  $A \cap \overline{U} \neq \emptyset$  o  $A \cap \overline{V} \neq \emptyset$ . Supongamos que  $A \cap \overline{U} \neq \emptyset$ . Como  $B \cup \overline{U}$  es un continuo,  $A \cup \overline{U} \cup B$  es continuo que contiene los puntos  $a$  y  $b$ . Lo anterior implica que  $V = \emptyset$ , y  $C \setminus B$  es conexo.  $\square$

A continuación introducimos una noción un poco más general de un continuo irreducible que nos será de utilidad posteriormente.

**Definición 2.2.5.** Diremos que un continuo  $X$  es débilmente irreducible si el complemento de cualquier unión finita de subcontinuos de  $X$  tiene un número finito de componentes.

Observemos que la circunferencia unitaria del plano es un continuo débilmente irreducible que no es irreducible. Además si en la curva senoidal del topólogo definida en el Ejemplo 2.1.4, identificamos el punto  $(1, \text{sen}(1))$  con el punto  $(0, -1)$ , obtenemos un espacio llamado Círculo de Varsovia, el cual es otro ejemplo de un continuo débilmente irreducible que no es irreducible (ver Figura 2.4).



**Figura 2.4** – Círculo de Varsovia

A continuación mostramos un resultado donde probamos que todo continuo irreducible es débilmente irreducible.

**Proposición 2.2.6.** Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es irreducible entonces  $X$  es débilmente irreducible.

*Demostración.* Sean  $Z_1, \dots, Z_n$  subcontinuos de  $X$  tales que  $Z_i \cap Z_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Veamos que si procedemos inductivamente obtenemos el resultado. Sea  $Z_1$  un subcontinuo de  $X$ . Observemos que por el Teorema 2.2.3,  $X \setminus Z_1$  contiene a lo más dos componentes. Supongamos ahora que para  $Z_1, \dots, Z_{n-1}$ , tenemos que  $X \setminus (\cup_{i=1}^{n-1} Z_i)$  tiene un número finito de componentes. Sea  $X \setminus (\cup_{i=1}^{n-1} Z_i) = U_1 \cup \dots \cup U_l$  donde  $U_j$  es abierto y conexo, para cada  $j \in \{1, \dots, l\}$ . Nótese que,  $Z_n \subset U_j$  para algún  $j \in \{1, \dots, l\}$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $Z_n \subset U_1$ . Probemos que  $X \setminus (\cup_{i=1}^n Z_i)$  tiene un número finito de componentes. Observe que, por el Teorema 2.2.3,  $X \setminus Z_n = V \cup W$  donde  $V, W$

abiertos conexos. Sean  $a, b \in X$  tal que  $X$  es irreducible entre  $a$  y  $b$ . Supongamos que  $a \in V$  y  $b \in W$ . Como  $Z_i \cap X_n \neq \emptyset$ , para cada  $i \neq n$ , y  $Z_i$  es conexo, tenemos que  $Z_i \subset V$  o  $Z_i \subset W$ , para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\cup_{i=1}^k Z_i \subset V$  y  $\cup_{i=k+1}^{n-1} Z_i \subset W$  para algún  $k$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , existen abiertos conexos y disjuntos, tales que  $X \setminus Z_i = V_i \cup W_i$ , donde  $a \in V_i$  y  $b \in W_i$ . Supongamos que  $\cup_{i=1}^{k-1} Z_i \subset V_k$  y  $\cup_{i=k+2}^{n-1} Z_i \subset W_{k+1}$ . Nótese que  $Z_k \cup V_k$  y  $Z_n \cup W$  por la Proposición 2.2.4, son subcontinuos disjuntos tales que  $a \in Z_k \cup V_k$  y  $b \in Z_n \cup W$ . Así,  $R = X \setminus ((Z_k \cup V_k) \cup (Z_n \cup W))$  es conexo, por el Teorema 2.2.4. De la misma forma  $L = X \setminus ((Z_n \cup V) \cup (Z_{k+1} \cup W_{k+1}))$  es conexo. Finalmente, no es difícil ver que  $X \setminus (\cup_{i=1}^n Z_i) = R \cup L \cup U_2 \cup \dots \cup U_l$ . Así  $X \setminus (\cup_{i=1}^n Z_i)$  tiene un número finito de componentes.  $\square$

## 2.3. Continuos descomponibles e indescomponibles

En esta sección presentamos propiedades básicas de la teoría de continuos descomponibles e indescomponibles. También mostramos algunos resultados que nos permitan la construcción de un continuo indescomponible.

**Definición 2.3.1.** *Un continuo  $X$  se dice descomponible si existen dos subcontinuos propios  $A$  y  $B$  tales que  $X = A \cup B$ . Si  $X$  no es descomponible diremos que  $X$  es indescomponible.*

Exceptuando el punto, los continuos que hemos presentado y podemos imaginar hasta este punto, son descomponibles. Construcciones con sus debidas demostraciones de continuos indescomponibles se pueden encontrar en [5] y [10]. Una caracterización útil la presentamos en el siguiente teorema y la usaremos más adelante.

**Teorema 2.3.2.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces  $X$  es descomponible si y sólo si  $X$  contiene un subcontinuo propio con interior no vacío.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un continuo descomponible. Entonces  $X$  es la unión de dos subconjuntos propios  $Y$  y  $Z$ . Así  $X \setminus Z$  es un abierto no vacío contenido

en  $Y$ , de donde  $Y^\circ \neq \emptyset$ .

Recíprocamente supongamos que  $X$  tiene un subcontinuo propio  $Y$  con interior no vacío. Por otra parte si  $X \setminus Y$  es conexo entonces  $\overline{X \setminus Y}$  es un subcontinuo propio de  $X$ . De lo anterior  $X = Y \cup \overline{X \setminus Y}$  es una descomposición de  $X$ . Si  $X \setminus Y$  no es conexo entonces  $X \setminus Y = U \cup V$ , con  $U$  y  $V$  abiertos disjuntos no vacíos. Entonces  $Y \cup U$  y  $Y \cup V$  son subcontinuos de  $X$  por la Proposición 1.3.15. Como  $X = (Y \cup U) \cup (Y \cup V)$ ,  $X$  es descomponible.  $\square$

El Teorema 2.3.2 se puede enunciar de manera equivalente como mostramos en el siguiente resultado.

**Corolario 2.3.3.** *Un continuo  $X$  es indescomponible si y sólo si todo subcontinuo propio de  $X$  tiene interior vacío.*

Una consecuencia sencilla es el siguiente corolario.

**Corolario 2.3.4.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es localmente conexo entonces  $X$  es descomponible.*

*Demostración.* Sean  $X$  es un continuo localmente conexo y  $x \in X$ . Para cualquier abierto  $U$  de  $X$  con  $x \in U$ , existe un abierto y conexo  $V$  de  $X$  tal que  $x \in V \subset U$ . Como  $V$  es conexo,  $\overline{V}$  es continuo. Por lo tanto  $\overline{V}$  es un subcontinuo propio de  $X$  con interior no vacío. Así, por Lema 2.3.2,  $X$  es descomponible.  $\square$

**Lema 2.3.5.** *Sean  $(X_i)_{i=1}^\infty$  una sucesión de espacios métricos compactos tal que  $X_{i+1} \subset X_i$ , para cada  $i \in \mathbb{N}$  y  $X = \bigcap_{i=1}^\infty X_i$ . Si  $U$  es un abierto de  $X_1$  tal que  $X \subset U$ , entonces existe  $N$  tal que  $X_i \subset U$  para toda  $i \geq N$ . En particular si cada  $X_i \neq \emptyset$  entonces  $X \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Supongamos que para cada  $i \in \mathbb{N}$  existe  $x_i \in X_i - U$ . Como  $(x_i)_{i=1}^\infty \subset X_1 \setminus U$  y  $X_1 \setminus U$  es compacto, podemos suponer que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_i = p$  para algún punto  $p \in X_1 - U$ . Nótese que para  $k, x_i \in X_k$  con  $i \geq k$ . Así, por la compacidad de  $X_k$ , tenemos que  $p \in X_k$ , para cada  $k$ . Lo anterior implica que  $p \in X$ , y por lo tanto  $p \in U$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe  $N$  tal que  $X_i \subset U$  para toda  $i \geq N$ .

Esto prueba la primera parte del lema. El hecho que  $X \neq \emptyset$  si cada  $X_i \neq \emptyset$ , se sigue de la primera parte si  $U = \emptyset$ .  $\square$

La siguiente proposición nos proporciona un método para la construcción de continuos y se conoce como la técnica de intersecciones anidadas.

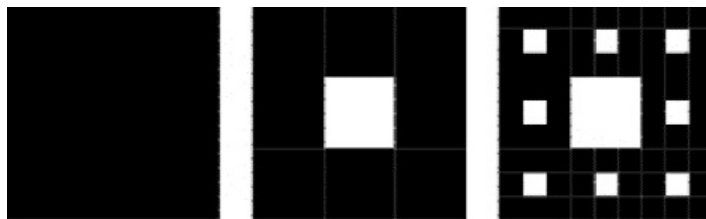
**Proposición 2.3.6.** *Sea  $(X_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de continuos. Si  $X_{n+1} \subset X_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$  es un continuo.*

*Demostración.* Claramente,  $X$  es un espacio métrico compacto no vacío, por el Lema 2.3.5. Supongamos que  $X$  no es conexo. Sean  $A$  y  $B$  cerrados disjuntos, tales que  $X = A \cup B$ . Puesto que  $X_1$  es un espacio normal, existen subconjuntos abiertos disjuntos  $V$  y  $W$  de  $X_1$  tales que  $A \subset V$  y  $B \subset W$ . Sea  $U = V \cup W$ . Por el Lema 2.3.5,  $X_n \subset U$  para algún  $n$ . Como  $X_n$  es conexo,  $X_n \subset V$  o  $X_n \subset W$ . Además  $X \subset X_n$ . Luego  $A = \emptyset$  o  $B = \emptyset$ . Por tanto  $X$  es conexo.  $\square$

Ahora mostramos dos ejemplos donde usamos la técnica de intersección anidadas para construir continuos.

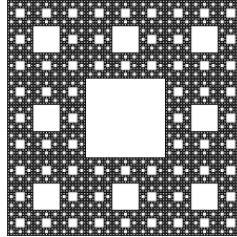
**Ejemplo 2.3.7.** *La curva universal de Sierpiński.*

Sea  $X_1 = [0, 1]^2$ . Definimos  $X_2$  de la siguiente manera: dividimos  $X_1$  en 9 cuadrados iguales y quitamos el interior del cuadrado de la mitad; es decir,  $X_2 = X_1 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . A su vez,  $X_3$  se obtiene dividiendo cada uno de los 8 cuadrados restantes de  $X_2$  en 9 cuadrados iguales, y quitando el interior del cuadrado de la mitad en cada uno. La Figura 2.5, representa  $X_1, X_2$  y  $X_3$ .



**Figura 2.5** – Construcción de Sierpiński.

Continuando inductivamente obtenemos  $X_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . De la definición, es claro que  $X_{n+1} \subset X_n$ , para cada  $n$ , luego por la Proposición 2.3.6,  $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$  es un continuo y se conoce como curva universal de Sierpiński (ver Figura 2.6).



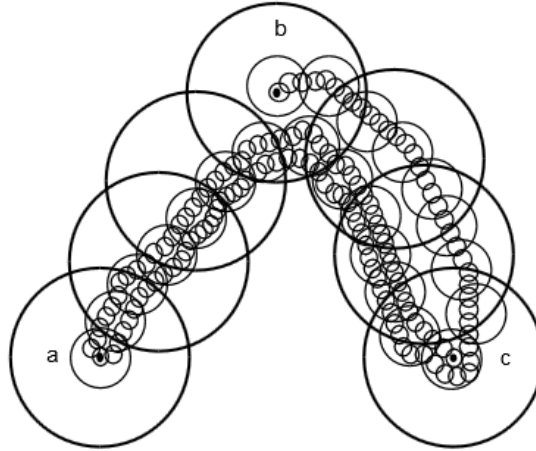
**Figura 2.6** – Curva Universal de Sierpiński.

**Definición 2.3.8.** Sean  $X$  un continuo,  $C = \{A_1, \dots, A_n\}$  una colección finita de subconjuntos de  $X$  y  $x, y, z \in X$ . Diremos que  $C$  es una cadena simple que empieza en  $x$  pasa por  $y$  y termina en  $z$ , siempre que  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$  si y sólo si  $|i - j| \leq 1$ ,  $x \in A_i$  si y sólo si  $i = 1$ ,  $z \in A_i$  si y sólo si  $i = n$ , y  $y \in A_i$  para algún  $i$ . Los elementos de  $C$  los llamamos eslabones de la cadena.

A continuación mostramos un continuo indescomponible.

**Ejemplo 2.3.9.** Existe un continuo indescomponible en el plano.

Sean  $a, b$  y  $c$  puntos de  $\mathbb{R}^2$  y construyamos una cadena simple  $C_1$  donde sus eslabones son discos abiertos de diámetro menor que uno, empezando en  $a$ , pasando por  $b$  y terminando en  $c$ . Dentro de  $C_1$ , construyamos una cadena simple  $C_2$  de discos abiertos de diámetro menor que un medio, que empiece en  $b$ , pase por  $c$  y que termine en  $a$ , de tal forma de que  $C_2$  sea un refinamiento propio de  $C_1$  (para cada  $A \in C_2$  existe un  $A' \in C_1$  tal que  $\overline{A} \subset A'$ ). Dentro de  $C_2$ , construyamos una tercera cadena simple  $C_3$  de discos abiertos de diámetro menor que un cuarto, empezando en  $c$ , pasando por  $a$  y terminando en  $b$ , de tal manera que  $C_3$  sea un refinamiento propio de  $C_2$  (ver Figura 2.7).



**Figura 2.7** – Continuo indecomponible

Todo el procedimiento comienza otra vez con una cadena simple  $C_4$  que está contenida en  $C_3$  y sigue el patrón  $a - b - c$ . En general, para cualquier  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , se construyen cadenas simples:  $C_{3n+1}$  que sigue el patrón  $a - b - c$ ;  $C_{3n+2}$  que sigue el patrón  $b - c - a$ ; y  $C_{3n+3}$  que tiene el patrón  $c - a - b$ . Además el diámetro de cada eslabon en la cadena  $C_n$  es menor que  $\frac{1}{2^n}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $X_n = \cup\{\bar{A} : A \in C_n\}$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Es claro por la definición de cadena simple que  $X_n$  es un continuo y  $X_{n+1} \subset X_n$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Así, por la Proposición 2.3.6,  $X = \cap_{n=1}^{\infty} (X_n)$  es un continuo.

Veamos que  $X$  es indecomponible. Supongamos que  $X = A \cup B$  donde  $A$  y  $B$  son subcontinuos propios de  $X$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $a, c \in A$ . Sea  $z \in X \setminus A$ . Como  $X \setminus A$  es abierto, existe  $r > 0$  tal que  $B(z, r) \cap A = \emptyset$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $C_{3n+1} = \{D_1, \dots, D_m\}$  y  $z \in D_k$  para algún  $k \in \{2, \dots, m-1\}$ , y  $D_k \subset B(z, r)$ . Como  $A \subset \cup_{i=1}^m D_i$  y  $D_k \cap A = \emptyset$ , tenemos que  $A \subset (\cup_{i=1}^{k-1} D_i) \cup (\cup_{i=k+1}^m D_i)$ . Nótese que  $a \in A \cap D_1$  y  $c \in A \cap D_m$ . Así  $A \cap (\cup_{i=1}^{k-1} D_i) \neq \emptyset$  y  $A \cap (\cup_{i=k+1}^m D_i) \neq \emptyset$ . Finalmente como  $C_{3n+1}$  es una cadena simple,  $\cup_{i=1}^{k-1} D_i$  y  $\cup_{i=k+1}^m D_i$  están mutuamente separados, contradiciendo la conexidad de  $A$ . De esta manera tenemos una contradicción si dos de los tres puntos están en  $A$  o  $B$ . Así,  $X$  es indecomponible.

## 2.4. Continuos unicoherentes

La noción de unicoherencia fue introducida por K. Kuratowski. Sin embargo, matemáticos como K. Borsuk, S. Eilenberg, T. Ganea y A. H. Stone realizaron trabajos donde estudiaron a profundidad propiedades relacionadas con la unicoherencia de continuos. Hasta estos días, la unicoherencia es una propiedad muy estudiada en teoría de continuos, y por esta razón mostramos algunas propiedades y ejemplos de esta clase de continuos.

**Definición 2.4.1.** *Un continuo  $X$  es unicoherente si para cualesquiera dos subcontinuos propios  $A$  y  $B$  de  $X$  tales que  $X = A \cup B$  se tiene que  $A \cap B$  es conexo.*

Es fácil ver que cualquier intervalo en  $\mathbb{R}$  es unicoherente y la circunferencia unitaria  $S^1$  en el plano no es unicoherente.

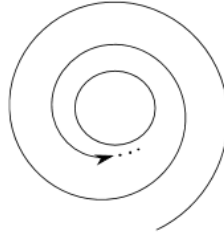
La siguiente proposición se sigue directamente de la definición de continuo indescomponible.

**Proposición 2.4.2.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es indescomponible entonces  $X$  es unicoherente.*

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Como  $X$  es indescomponible  $A = X$  o  $B = X$ . Así  $A \cap B = A$  o  $A \cap B = B$ ; de cualquier manera es conexo y  $X$  es unicoherente.  $\square$

A continuación mostraremos otro ejemplo de un continuo unicoherente.

**Ejemplo 2.4.3.** *Sea  $X = S^1 \cup \{(1 + \frac{1}{1+\theta})e^{i\theta} : \theta \geq 0\}$ . Observe que  $X$  es una circunferencia más una espiral que lo rodea asintóticamente como muestra la Figura 2.8.*



**Figura 2.8** – Continuo uncoherente

$X$  es un continuo uncoherente. Para ver esto sean  $A$  y  $B$  subcontinuos de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Es claro que si  $A = X$  o  $B = X$ ,  $A \cap B$  es conexo. Así supongamos que  $A \neq X$  y  $B \neq X$ . Nótese que  $X$  es irreducible entre  $(2, 0)$  y cualquier punto de la circunferencia unitaria  $S^1$ . Así, podemos suponer que  $S^1 \subset A$  y  $(2, 0) \in B$ . De lo anterior es fácil aceptar que  $(A \cap B)$  es un arco contenido en la espiral. Por tanto  $X$  es uncoherente.

**Definición 2.4.4.** *Un continuo  $X$  es hereditariamente uncoherente si todo subcontinuo de  $X$  es uncoherente.*

De la definición es claro que todo continuo hereditariamente uncoherente es uncoherente. Sin embargo el continuo presentado en el Ejemplo 2.4.3 es uncoherente pero contiene una circunferencia unitaria y por tanto no es hereditariamente uncoherente. Aunque la demostración no es sencilla, se conoce que toda  $n$ -celda  $[0, 1]^n$  con  $n \in \mathbb{N}$  es uncoherente y claramente no es hereditariamente uncoherente.

# Capítulo 3

## La función $\mathcal{T}$ de Jones

En este capítulo estudiamos formalmente la función  $\mathcal{T}$  de Jones, primero veremos algunas propiedades de esta función en continuos. Luego utilizaremos esta función para probar de una manera diferente algunos resultados de la topología general.

### 3.1. Propiedades generales de la función $\mathcal{T}$

**Definición 3.1.1.** Sean  $X$  un espacio métrico compacto y definimos  $\mathcal{T}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  para cada  $A$  subconjunto de  $X$ , de manera que:

$$X \setminus \mathcal{T}(A) = \{x \in X : \text{existe un subcontinuo } K \text{ de } X \text{ tal que } x \in K^\circ \text{ y } K \cap A = \emptyset\}.$$

A la función  $\mathcal{T}$  se le llama función  $\mathcal{T}$  de Jones. Utilizaremos la notación de  $\mathcal{T}(x)$  para referirnos a  $\mathcal{T}(\{x\})$ .

Veamos ahora algunas propiedades de la función de Jones, las cuales nos serán útiles para mostrar algunos resultados más adelante.

**Proposición 3.1.2.** Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Si  $A \subset X$ , entonces  $A \subset \mathcal{T}(A)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$ . Entonces existe un subcontinuo  $W$  tal que  $x \in W^\circ$  y  $W \cap A = \emptyset$ ; es decir,  $x \in W^\circ \subset W \subset X \setminus A$ ; de lo anterior  $x \notin A$ .  $\square$

**Lema 3.1.3.** *Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Si  $A \subset X$ , entonces  $\mathcal{T}(A)$  es un cerrado de  $X$ .*

*Demostración.* Probemos que  $X \setminus \mathcal{T}(A)$  es un abierto de  $X$ . Sea  $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$ . Entonces existe un subcontinuo  $W$  tal que  $x \in W^\circ \subset W \subset X \setminus A$ . Veamos que  $W^\circ \subset X \setminus \mathcal{T}(A)$ . Sea  $z \in W^\circ$ , entonces  $W$  es un subcontinuo de  $X$  tal que  $\overline{W} \cap A = \emptyset$ , es decir,  $z \in X \setminus \mathcal{T}(A)$ . De lo anterior  $W^\circ \subset X \setminus \mathcal{T}(A)$ ,  $X \setminus \mathcal{T}(A)$  es abierto y  $\mathcal{T}(A)$  es cerrado.  $\square$

**Proposición 3.1.4.** *Sea  $X$  un espacio métrico y compacto. Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $X$  tales que  $A \subset B$ , entonces  $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(B)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $A \subset B$  y probemos que  $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(B)$ . Sea  $x \in X \setminus \mathcal{T}(B)$ . Entonces existe  $W$  subcontinuo de  $X$  tal que  $x \in W^\circ \subset W \subset X \setminus B \subset X \setminus A$ ; es decir  $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$ . Por tanto  $X \setminus \mathcal{T}(B) \subset X \setminus \mathcal{T}(A)$  y  $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(B)$ .  $\square$

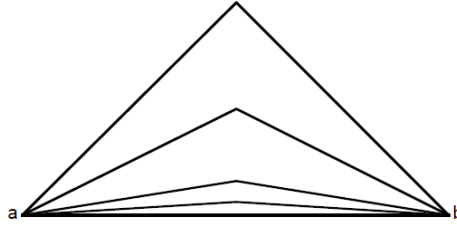
Cuando definimos un operador es natural estudiar si este operador es aditivo. En esta dirección y como consecuencia de la Proposición 3.1.4, tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.1.5.** *Sea  $X$  un espacio métrico compacto. Si  $A$  y  $B$  son subconjuntos de  $X$ , entonces  $\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$ .*

*Demostración.* Sabemos que  $A \subset A \cup B$ , entonces por la Proposición 3.1.4,  $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$ . Análogamente, como  $B \subset A \cup B$ ,  $\mathcal{T}(B) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$ . Por tanto,  $\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$ .  $\square$

En el siguiente ejemplo podemos ver claramente que en general la función  $\mathcal{T}$  no es aditiva.

**Ejemplo 3.1.6.** *Sea  $X = \text{Sus}(A)$ , donde  $A = (\frac{1}{n})_{n=1}^\infty \cup \{0\}$  con vértices en  $a$  y  $b$ . No es difícil ver que para todo  $x \in X$ ,  $\mathcal{T}(x) = \{x\}$ . En particular  $\mathcal{T}(a) = \{a\}$ ,  $\mathcal{T}(b) = \{b\}$ . Por otra parte,  $\mathcal{T}(\{a, b\})$  es el arco horizontal que une a y b, como vemos en la Figura 3.1. Así  $\mathcal{T}(a) \cup \mathcal{T}(b) \neq \mathcal{T}(\{a, b\})$ .*



**Figura 3.1** – Suspensión armónica

**Ejemplo 3.1.7.** *Observemos que no siempre  $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$ . Si  $X$  es el conjunto de Cantor,  $\mathcal{T}(\emptyset) = X$ . Para ver esto, supongamos que existe un punto  $x \in X \setminus \mathcal{T}(\emptyset)$ . Así, existe un subcontinuo  $W$  de  $X$  tal que  $x \in W^\circ \subset W \subset X \setminus \emptyset$ . Por otra parte,  $X$  es totalmente desconexo y ninguno de sus puntos es abierto en él, por tanto,  $X$  no contiene subcontinuos con interior distinto del vacío. De lo anterior podemos concluir que no puede haber un punto  $x$  en  $X \setminus \mathcal{T}(\emptyset)$ . Así,  $\mathcal{T}(\emptyset) = X$ .*

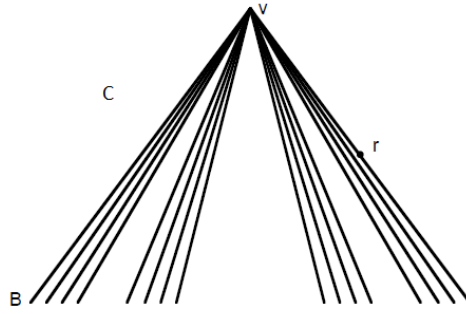
En la siguiente proposición se establecen condiciones necesarias para que  $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$ .

**Proposición 3.1.8.** *Sea  $X$  un espacio métrico y compacto. Si  $X$  tiene una cantidad finita de componentes, entonces  $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$ .*

*Demostración.* Sean  $x$  un punto de  $X$  y  $C$  la componente de  $X$  que lo contiene. Como  $X$  tiene un número finito de componentes,  $x \in C^\circ$ . Así,  $C$  es un subcontinuo de  $X$  y por tanto  $x \in X \setminus \mathcal{T}(\emptyset)$ . Como  $x$  es un punto arbitrario de  $X$ , se tiene que  $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$ .  $\square$

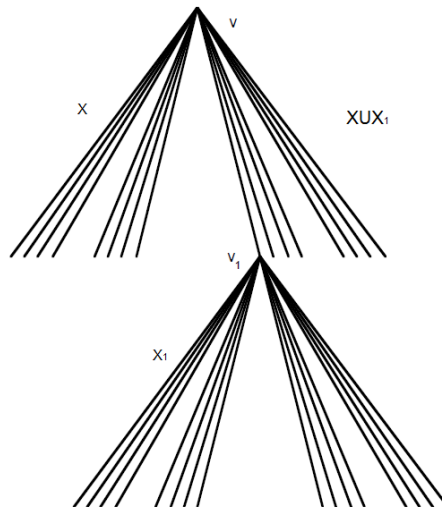
Veamos a continuación algunos ejemplos para visualizar mejor la función  $\mathcal{T}$ .

**Ejemplo 3.1.9.** *Sea  $X = \text{Cono}(C)$ , donde  $C$  es el conjunto de Cantor, con vértice en  $v$  y base el conjunto de Cantor que denotaremos por  $B$ . Se puede ver que  $\mathcal{T}(v) = X$  ya que todo subcontinuo de  $X$  con interior no vacío debe contener al vértice  $v$ . Además, si  $r$  es un punto de  $X$  diferente de  $v$  entonces resulta que  $\mathcal{T}(r)$  es igual al segmento hacia  $B$  desde  $r$  (ver Figura 3.2). Finalmente, con algunos cálculos elementales se tiene que  $\mathcal{T}(B) = B$ .*



**Figura 3.2** – Cono sobre el conjunto de Cantor

**Ejemplo 3.1.10.** Si construimos el espacio  $Y = X \cup X_1$  con  $X$  el espacio del ejemplo anterior y  $X_1$  una copia del cono con vértice en un punto  $v_1$  de la base  $B$  como muestra la Figura 3.3.



**Figura 3.3** – Cono doble sobre el conjunto de Cantor

En este caso podemos ver fácilmente que  $\mathcal{T}(v) = X$ ,  $\mathcal{T}(v_1) = X_1$  y  $\mathcal{T}(\mathcal{T}(v)) = Y$ . De esto, se puede observar que en general, la función  $\mathcal{T}$  no es idempotente; esto es,  $\mathcal{T}^2 \neq \mathcal{T}$ .

En el siguiente teorema mostramos que la función  $\mathcal{T}$  es invariante en continuos. Dicho de otra manera,  $\mathcal{T}(\mathcal{C}(X)) \subset \mathcal{C}(X)$ , para cualquier continuo  $X$ .

**Teorema 3.1.11.** Sea  $X$  un continuo. Si  $W$  es un subcontinuo de  $X$  entonces  $\mathcal{T}(W)$  también es un continuo.

*Demostración.* Por el Lema 3.1.3 ,  $\mathcal{T}(W)$  es un cerrado. Debemos probar que  $\mathcal{T}(W)$  es conexo. Supongamos que  $\mathcal{T}(W)$  no es conexo; esto es,  $\mathcal{T}(W) = A \cup B$ , donde  $A$  y  $B$  son cerrados disjuntos y no vacíos. Sabemos que  $W \subset \mathcal{T}(W)$ . Como  $W$  es conexo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $W \subset A$ .

Por otra parte, por la normalidad de  $X$ , existe un abierto  $U$  de  $X$  tal que  $A \subset U$  y  $\overline{U} \cap B = \emptyset$ . Notemos que  $Fr(U) \cap \mathcal{T}(W) = \emptyset$ . Por tanto, para todo punto  $z$  de la frontera de  $U$ , existe  $W_z$  subcontinuo de  $X$  tal que  $z \in W_z^\circ \subset W_z \subset X \setminus W$ . Como la frontera de  $U$  es un compacto, existen  $z_1, z_2, \dots, z_n \in Fr(U)$  tales que  $Fr(U) \subset \cup_{j=1}^n W_{z_j}^\circ \subset \cup_{j=1}^n W_{z_j}$ . Sea  $V = U \setminus \cup_{j=1}^n W_{z_j}$ . Probemos que  $Y = X \setminus V = (X \setminus U) \cup (\cup_{j=1}^n W_{z_j})$ . Si  $z \in V$  y  $V \subset U$  entonces  $z \in U$ . Además,  $V \cap (\cup_{j=1}^n W_{z_j}) = \emptyset$ . Así  $z \notin \cup_{j=1}^n W_{z_j}$ ; de lo anterior  $(X \setminus U) \cup (\cup_{j=1}^n W_{z_j}) \subset X \setminus V$ . Ahora, sea  $z \notin ((X \setminus U) \cup (\cup_{j=1}^n W_{z_j}))$ . Así  $z \notin X \setminus U$  y  $z \notin \cup_{j=1}^n W_{z_j}$ . De lo anterior  $z \in U$ . Como  $z \notin \cup_{j=1}^n W_{z_j}$ ,  $z \in V$ .

Veamos ahora que  $Y$  tiene un número finito de componentes. Sea  $L$  una componente de  $Y$ . Por Teorema 1.3.14 (Golpes en la frontera),  $L \cap Fr(Y) \neq \emptyset$ . Como  $V \subset U$ ,  $X \setminus U \subset X \setminus V$ . Además,  $L \cap (X \setminus V) = \emptyset$  y tenemos que  $L \cap (X \setminus U) = \emptyset$ . Por otro lado, como  $Y$  es cerrado tenemos que  $Fr(Y) \subset Y$ . De lo anterior,  $L \cap \cup_{j=1}^n W_{z_j} \neq \emptyset$ . Así  $W_{z_k} \cap L \neq \emptyset$ , para algún  $k$ . Como  $L$  es una componente, tenemos que  $W_{z_k} \subset L$  para algún  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Así  $Y$  tiene a lo más  $n$  componentes.

Finalmente, sean  $b \in B$  y  $C$  la componente de  $Y$  tal que  $b \in C$ . Veamos que  $B \subset Y^\circ$ . Sabemos que  $X \setminus \overline{V}$  es abierto de  $X$  y  $X \setminus \overline{V} \subset Y$ ; por tanto  $X \setminus \overline{V} \subset Y^\circ$ . También,  $\overline{V} \subset \overline{U}$  y  $\overline{U} \cap B = \emptyset$ . Entonces  $B \subset X \setminus \overline{U} \subset X \setminus \overline{V} \subset Y^\circ$ . Por tanto, por Lema 1.3.6,  $b \in C^\circ \subset C \subset X \setminus V \subset X \setminus W$ . Así,  $b \notin \mathcal{T}(W)$  lo cual es una contradicción.  $\square$

**Lema 3.1.12.** *Sean  $X$  un continuo y  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$ . Si  $p \notin \mathcal{T}(A)$  entonces existe un subconjunto abierto  $U$  de  $X$  tal que  $A \subset U$  y  $p \notin \mathcal{T}(\overline{U})$ .*

*Demostración.* Si  $p \notin \mathcal{T}(A)$  entonces existe un subcontinuo  $W$  de  $X$  tal que  $p \in W^\circ \subset W \subset X \setminus A$ . Por la normalidad de  $X$ , existe un abierto  $U$  de  $X$  tal que  $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus W$ . Por lo tanto,  $p \notin \mathcal{T}(\overline{U})$ .  $\square$

**Definición 3.1.13.** *Un continuo  $X$  es semiaposindético si para cualesquiera dos puntos distintos  $x$  y  $y$  de  $X$ , existe un subcontinuo de  $X$  que contiene a uno de sus puntos en su interior, pero no contiene al otro. Esto es,  $X$  es semiaposindético si para cualesquiera dos puntos distintos  $x$  y  $y$  de  $X$ ,  $x \notin \mathcal{T}(y)$  o  $y \notin \mathcal{T}(x)$ .*

Un continuo semiaposindético que no es aposindético lo podemos ver en el Ejemplo 2.1.5. De la definición es claro que todo continuo aposindético es semiaposindético. Un ejemplo de un continuo que no es semiaposindético es la curva senoidal del topólogo ya que  $p \in \mathcal{T}(r)$  y  $r \in \mathcal{T}(p)$ , donde  $r, p \in \{0\} \times [-1, 1]$  como observamos en el Ejemplo 2.1.4.

## 3.2. Propiedades topológicas y la función $\mathcal{T}$

Veamos ahora como usando la función  $\mathcal{T}$  de Jones podemos construir las pruebas de algunas propiedades de los continuos, en muchos casos de manera más sencilla. Empezamos caracterizando los continuos localmente conexos.

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces  $X$  es localmente conexo si y sólo si para todo conjunto cerrado  $A$  de  $X$ ,  $\mathcal{T}(A) = A$ .*

*Demostración.* Supongamos primero que  $X$  es localmente conexo y veamos que  $\mathcal{T}(A) = A$ , para cualquier subconjunto cerrado  $A$  de  $X$ . Sean  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$  y  $p \in X \setminus A$ . Como  $X \setminus A$  es un abierto, existe un abierto  $U$  tal que  $p \in U \subset \bar{U} \subset X \setminus A$ . Por la conexidad local de  $X$ , existe un subconjunto abierto y conexo,  $V$ , de  $X$  tal que  $p \in V \subset U$ . De lo anterior tenemos que  $p \in V \subset \bar{V} \subset \bar{U} \subset X \setminus A$ , donde  $\bar{V}$  es un subcontinuo. Por lo tanto  $p \notin \mathcal{T}(A)$ . Esto demuestra que  $\mathcal{T}(A) \subset A$ . Además, por la Proposición 3.1.2,  $A \subset \mathcal{T}(A)$ ; de lo que se concluye que  $A = \mathcal{T}(A)$ .

Supongamos ahora que  $\mathcal{T}(A) = A$ , para cualquier subconjunto cerrado  $A$  de  $X$  y probemos que  $X$  es localmente conexo. Sean  $p \in X$  y  $U$  subconjunto abierto de  $X$  con  $p \in U$ . Tenemos que  $X \setminus U$  es un cerrado que no contiene a  $p$ . Como  $\mathcal{T}(X \setminus U) = X \setminus U$ ,  $p \notin \mathcal{T}(X \setminus U)$ . Así, existe  $C$  subcontinuo de  $X$  tal que  $p \in C^\circ$  y  $C \cap (X \setminus U) = \emptyset$ .

De donde se sigue que  $C \subset U$  y  $X$  es conexo en pequeño en  $p$ . Como  $p$  es un punto arbitrario de  $X$ ,  $X$  es conexo en pequeño en todos sus puntos. Luego, por la Proposición 1.3.9,  $X$  es localmente conexo.  $\square$

La conexidad semilocal que definimos en el Capítulo 1, también la podemos caracterizar usando la función  $\mathcal{T}$  como mostramos en la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.2.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces  $X$  es semilocalmente conexo en  $p$  si y sólo si  $\mathcal{T}(p) = \{p\}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es semilocalmente conexo en  $p$  y vemos que  $\mathcal{T}(p) = \{p\}$ . Por la Proposición 3.1.2, tenemos que  $\{p\} \subset \mathcal{T}(p)$ . Sea  $q \in X \setminus \{p\}$  y  $U$  un subconjunto abierto de  $X$  tales que  $p \in U$  y  $q \in X \setminus \bar{U}$ . Como  $X$  es semilocalmente conexo en  $p$ , existe un abierto  $V$  de  $X$  que contiene a  $p$ , tal que  $X \setminus V$  tiene un número finito de componentes y  $V \subset \bar{U}$ . Por Lema 1.3.6, tenemos que  $q$  está en el interior de la componente de  $X \setminus V$  que lo contiene, con lo cual, podemos concluir que  $q \notin \mathcal{T}(p)$ . De lo anterior  $\mathcal{T}(p) = \{p\}$ .

Supongamos ahora que  $\mathcal{T}(p) = \{p\}$ , para algún  $p \in X$ , y probemos que  $X$  es semilocalmente conexo en  $p$ . Sean  $p \in X$  y  $U$  un subconjunto abierto de  $X$  con  $p \in U$ . Como  $\mathcal{T}(p) = \{p\}$ , para todo  $q \in X \setminus \{p\}$  existe  $C_q$  subcontinuo de  $X$ , tal que  $q \in C_q^\circ \subset C_q \subseteq X \setminus \{p\}$ . Observemos que  $X \setminus U \subset \cup_{q \in X \setminus U} C_q^\circ$ . Como  $X \setminus U$  es compacto, existen  $q_1, \dots, q_n \in X \setminus U$  tales que  $X \setminus U \subset \cup_{j=1}^n C_{q_j}^\circ \subset \cup_{j=1}^n C_{q_j}$ . Sea  $V = X \setminus \cup_{j=1}^n C_{q_j}$ . Es claro que entonces  $V$  es un abierto tal que  $V \subset U$ ,  $p \in V$  y  $X \setminus V$  tiene un número finito de componentes.. Por lo tanto,  $X$  es semilocalmente conexo en  $p$ .  $\square$

Por la definición de la función  $\mathcal{T}$ , la aposindesis es la propiedad topológica mas natural que se puede describir con la función  $\mathcal{T}$ .

**Teorema 3.2.3.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces  $X$  es aposindético si y sólo si  $\mathcal{T}(p) = \{p\}$ , para todo punto  $p$  de  $X$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es aposindético, es claro que

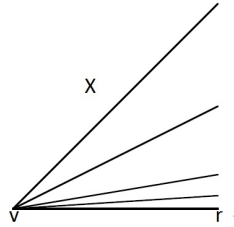
$$X \setminus \{p\} = \{x \in X \mid \text{existe } W \in \mathcal{C}(X) \text{ tal que } x \in W^\circ \text{ y } W \subset X \setminus \{p\}\},$$

por lo que  $\mathcal{T}(p) = \{p\}$ .

Recíprocamente, sean  $p, q \in X$  con  $p \neq q$ . Como  $q \notin \mathcal{T}(p)$ , existe  $W_q$  un subcontinuo de  $X$  tal que  $p \notin W_q$  y  $q \in W_q^\circ$ . Lo anterior implica que  $X$  es aposindético en  $q$  con respecto a  $p$ . Como  $p$  y  $q$  son arbitrarios, se tiene que  $X$  es aposindético.  $\square$

Veamos un ejemplo que nos muestra que la proposición anterior no es cierta de manera puntual; es decir, existe un continuo  $X$  y  $p \in X$  tales que  $X$  es aposindético en  $p$ , pero  $\mathcal{T}(p) \neq \{p\}$ .

**Ejemplo 3.2.4.** Sea  $X = \text{Cono}(A)$ , el cono armónico, donde  $A = (\frac{1}{n})_{n=1}^\infty \cup \{0\}$ . No es difícil ver que  $X$  es aposindético en  $v$ , pero  $\mathcal{T}(v) \neq \{v\}$  ya que  $\mathcal{T}(v) = J$  donde  $J$  es el arco que une a  $v$  y  $r$ , como mostramos en la Figura 3.4.



**Figura 3.4** – Abanico armónico

Una clara consecuencia de la Proposición 3.2.2 y el Teorema 3.2.3 es el siguiente resultado.

**Corolario 3.2.5.** Sea  $X$  un continuo. Entonces  $X$  es aposindético si y sólo si  $X$  es semilocalmente conexo.

Veamos ahora algunos resultados que relacionan los continuos indescomponibles con la función  $\mathcal{T}$ .

**Proposición 3.2.6.** Sea  $X$  un continuo. Entonces  $X$  es indescomponible si y sólo si  $\mathcal{T}(p) = X$ , para todo punto  $p$  de  $X$ .

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es indescomponible. Por Corolario 2.3.3, todo subcontinuo propio de  $X$  tiene interior vacío. De lo anterior es inmediato concluir que  $\mathcal{T}(p) = X$ , para todo punto  $p$  de  $X$ . Recíprocamente, supongamos que  $X$  es descomponible, esto es existen  $A$  y  $B$  dos subcontinuos propios de  $X$  tales que  $X = A \cup B$ . Sean  $a$  y  $b$  puntos tales que  $a \in A \setminus B$  y  $b \in B \setminus A$ . Luego  $b \in B^\circ \subset B \subset X \setminus \{a\}$  y  $b \in X \setminus \mathcal{T}(a)$ . De lo anterior  $\mathcal{T}(a) \neq X$ .  $\square$

Con el siguiente resultado mostramos que para tener conexidad local es suficiente verificar que  $\mathcal{T}$  actúa como la identidad únicamente en los subcontinuos (ver Teorema 3.2.1).

**Teorema 3.2.7.** *Sea  $X$  un continuo. Si para cualquier subcontinuo  $Y$  de  $X$  se tiene que  $\mathcal{T}(Y) = Y$  entonces  $X$  es localmente conexo.*

*Demostración.* Sea  $Q$  un subconjunto abierto de  $X$ . Por Proposición 1.3.5, basta probar que todas las componentes de  $Q$  son abiertas. Sea  $p \in Q$ . Como  $\mathcal{T}(p) = \{p\}$  y  $X \setminus Q$  es compacto, existe  $\mathcal{W} = \{W_j\}_{j=1}^m$  una familia finita de subcontinuos de  $X$  contenidos en  $X \setminus Q$  tales que  $X \setminus Q \subset \cup_{j=1}^m W_j^\circ$  y  $\mathcal{W}$  tiene la menor cardinalidad posible. Definamos  $U = X \setminus \cup_{j=1}^m W_j$ . Sea  $P$  la componente de  $\bar{U}$  que contiene a  $p$ . Por Teorema 1.3.14, para cada componente  $L$  de  $\bar{U}$  tenemos que  $L \cap \cup_{j=1}^m W_j \neq \emptyset$ . Veamos que ninguna componente de  $\bar{U}$  puede intersectar a más de un  $W_j$  salvo  $P$ . Supongamos que existe  $P'$  componente de  $\bar{U}$  con  $P' \neq P$  tal que intersecta a  $W_i$  y a  $W_k$ . En este caso tenemos que  $P' \cup W_i \cup W_k$  es un continuo. De donde resulta que  $\mathcal{W}' = (\cup_{\substack{j \neq i \\ j \neq k}} W_j) \cup (P' \cup W_i \cup W_k)$  tiene  $m - 1$  elementos y  $X \setminus Q \subset (\cup_{\substack{j \neq i \\ j \neq k}} W_j) \cup (P' \cup W_i \cup W_k)$  lo cual contradice la minimalidad de  $m$ . De lo anterior tenemos que para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $A_j$  denota la unión de todas las componentes de  $\bar{U}$  que intersectan a  $W_j$ . Entonces,  $A_j \cap A_k \subset P$  para cada  $j \neq k$ .

Por otra parte, como  $p \notin \mathcal{T}(W_j) = W_j$ , para cada  $j \in \{1, \dots, m\}$ , existe un subcontinuo  $K_j$  de  $X$  tal que  $p \in K_j^\circ \subset K_j \subset X \setminus W_j$ . Probemos ahora que  $K_j \cap (A_j \setminus P) = \emptyset$ . Supongamos que  $x \in K_j \cap A_j$ . Sea  $L$  la componente de  $\bar{U}$  tal que  $x \in L$  y  $L \cap W_j \neq \emptyset$ . Sea  $E$  la componente de  $K_j \cap \bar{U}$  tal que  $x \in E$ . Por Teorema 1.3.14,  $E \cap (\cup_{j=1}^m W_j) \neq \emptyset$ .

Como  $E \subset K_j$  y  $K_j \cap W_j = \emptyset$ ,  $E \cap W_n \neq \emptyset$  para algún  $n \neq j$ . Como  $L$  es componente de  $\bar{U}$  y  $E$  es componente de  $K_j \cap \bar{U}$ , podemos decir que  $E \cup L$  es compacto y conexo de  $\bar{U}$ . Así existe una componente  $R$  de  $\bar{U}$ , tal que  $E \cup L \subset R$ . Luego tenemos que  $R \cap W_j \neq \emptyset$  y  $R \cap W_n \neq \emptyset$ , para  $n \neq j$ . Así  $R = P$  pues  $P$  es la única componente de  $\bar{U}$  que intersecta a más de una  $W_j$ . De lo anterior  $z \in P$  y  $K_j \cap A_j \subset P$ .

Por tanto  $(\cap_{j=1}^m K_j) \cap (\cup_{j=1}^m (A_j \setminus P)) = \emptyset$ . De donde se tiene que  $\cap_{j=1}^m K_j \subset P$ . Como  $p \in (\cap_{j=1}^m K_j)^\circ$ ,  $p \in P$ . Por tanto  $P$  es una vecindad conexa de  $p$  contenida en  $\bar{U} \subset Q$ . Como  $p$  fue un punto arbitrario de  $Q$ , se tiene que las componentes de  $Q$  son abiertas.  $\square$

Como consecuencia del teorema anterior y el Teorema 3.2.1 tenemos el siguiente resultado.

**Corolario 3.2.8.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces  $X$  es localmente conexo si y sólo si  $\mathcal{T}(A) = A$ , para todo  $A$  subcontinuo de  $X$ .*

### 3.3. $\mathcal{T}$ -Simétrico y $\mathcal{T}$ -Aditivo

En esta sección vamos a introducir dos propiedades importantes sobre la función  $\mathcal{T}$ , como son el ser  $\mathcal{T}$ -simétrico y  $\mathcal{T}$ -aditivo, las cuales nos permiten probar algunas propiedades.

**Definición 3.3.1.** *Se dice que un continuo  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico si para toda pareja de subconjuntos cerrados de  $X$ ,  $A$  y  $B$ , se tiene que  $A \cap \mathcal{T}(B) = \emptyset$  si y sólo si  $B \cap \mathcal{T}(A) = \emptyset$ . Además, decimos que  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico puntualmente si para cualesquiera dos puntos distintos de  $X$ ,  $p$  y  $q$ ,  $p \notin \mathcal{T}(q)$  si y sólo si  $q \notin \mathcal{T}(p)$ .*

Un ejemplo de un continuo que es  $\mathcal{T}$ -simétrico, es cualquier intervalo cerrado  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . Un continuo que no es  $\mathcal{T}$ -simétrico es el peine armónico que definimos en el Ejemplo 2.1.5, pues para  $a$  y  $b$  se tiene que,  $b \in \mathcal{T}(a)$ , pero  $a \notin \mathcal{T}(b)$ .

Veamos como con el siguiente resultado podemos relacionar los continuos débilmente irreducibles, de los cuales hablamos en el capítulo anterior con los continuos  $\mathcal{T}$ -simétrico.

**Teorema 3.3.2.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es débilmente irreducible entonces  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico.*

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos cerrados de  $X$ . Supongamos que  $A \cap \mathcal{T}(B) = \emptyset$ . Como  $A \cap \mathcal{T}(B) = \emptyset$ , para cada  $a \in A$ , existe un subcontinuo  $W_a$  de  $X$  tal que  $a \in W_a^\circ \subset X \setminus B$ . Como  $A$  es compacto, existen  $a_1, \dots, a_n \in A$  tales que  $A \subset \cup_{j=1}^n W_{a_j}^\circ \subset \cup_{j=1}^n W_{a_j} \subset X \setminus B$ . De lo anterior se tiene que  $B \subset X \setminus (\cup_{j=1}^n W_{a_j}) \subset X \setminus (\cup_{j=1}^n W_{a_j}^\circ) \subset X \setminus A$ . Sea  $b \in B$ . Como  $X$  es débilmente irreducible,  $X \setminus (\cup_{j=1}^n W_{a_j})$  tiene un número finito de componentes las cuales son subconjuntos abiertos de  $X$ . Sea  $C$  la componente de  $X \setminus (\cup_{j=1}^n W_{a_j})$  que contiene a  $b$ . Entonces  $b \in C \subset \overline{C} \subset X \setminus (\cup_{j=1}^n W_{a_j}^\circ) \subset X \setminus A$ . Esto implica que  $b \notin \mathcal{T}(A)$ . Por tanto  $B \cap \mathcal{T}(A) = \emptyset$ . De manera equivalente se tiene que si  $B \cap \mathcal{T}(A) = \emptyset$  entonces  $A \cap \mathcal{T}(B) = \emptyset$ . Por tanto  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico.  $\square$

El siguiente corolario es un resultado que es consecuencia inmediatamente de la Proposición 2.2.6 y el Teorema 3.3.2.

**Corolario 3.3.3.** *Si  $X$  es un continuo irreducible entonces  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico.*

A continuación definimos la  $\mathcal{T}$ -aditividad, que es la segunda propiedad que estudiamos en esta sección.

**Definición 3.3.4.** *Un continuo  $X$  es  $\mathcal{T}$ -aditivo si para cualquiera  $A$  y  $B$  cerrados de  $X$ ,  $\mathcal{T}(A \cup B) = \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$ .*

En el Ejemplo 3.1.6 mostramos un continuo que no es  $\mathcal{T}$ -aditivo.

La siguiente proposición es importante en nuestro trabajo ya que relaciona las dos propiedades que acabamos de enunciar.

**Proposición 3.3.5.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico, entonces  $X$  es  $\mathcal{T}$ -aditivo.*

*Demostración.* Sabemos por el Corolario 3.1.5 que  $\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$ . Recíprocamente, sea  $x \in \mathcal{T}(A \cup B)$ . Es claro que  $\{x\} \cap \mathcal{T}(A \cup B) \neq \emptyset$ . Como  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico,

$\mathcal{T}(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ . De lo anterior,  $\mathcal{T}(x) \cap A \neq \emptyset$  o  $\mathcal{T}(x) \cap B \neq \emptyset$ . Aplicando la simetría tenemos que  $\{x\} \cap \mathcal{T}(A) \neq \emptyset$  o  $\{x\} \cap \mathcal{T}(B) \neq \emptyset$ . De aquí  $x \in \mathcal{T}(A)$  o  $x \in \mathcal{T}(B)$  y por lo tanto,  $x \in \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$ .  $\square$

La siguiente proposición nos relaciona los continuos hereditariamente unicoherentes con los continuos  $\mathcal{T}$ -aditivos, lo cual nos permite tener otros ejemplos de continuos  $\mathcal{T}$ -aditivos.

**Proposición 3.3.6.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es hereditariamente unicoherente entonces  $X$  es  $\mathcal{T}$ -aditivo.*

*Demostración.* Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos cerrados de  $X$ . Por el Corolario 3.1.5, tenemos que  $\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$ . Debemos probar que  $\mathcal{T}(A \cup B) \subset \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$ . Sea  $p \notin \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$ . Se tiene entonces que  $p \notin \mathcal{T}(A)$  y  $p \notin \mathcal{T}(B)$ . Así existen  $W_A$  y  $W_B$  subcontinuos de  $X$  tales que  $p \in W_A^\circ \cap W_B^\circ$ ,  $W_A \cap A = \emptyset$  y  $W_B \cap B = \emptyset$ . Así  $p \in W_A^\circ \cap W_B^\circ \subset W_A \cap W_B \subset X \setminus A \cup B$ . Como  $W_A \cup W_B$  es un subcontinuo de  $X$  y  $X$  es hereditariamente unicoherente se tiene que  $W_A \cap W_B$  es un subcontinuo de  $X$ . De donde se concluye que  $p \notin \mathcal{T}(A \cup B)$ .  $\square$

**Proposición 3.3.7.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es  $\mathcal{T}$ -aditivo y  $A$  es un cerrado de  $X$ , entonces se tiene que  $\mathcal{T}(A) = \cup_{p \in A} \mathcal{T}(p)$ .*

*Demostración.* Sea  $A$  un cerrado de  $X$ . Si  $p \in A$  entonces  $\{p\} \subset A$  y por la Proposición 3.1.4  $\mathcal{T}(p) \subset \mathcal{T}(A)$ . Por lo tanto  $\cup_{p \in A} \mathcal{T}(p) \subseteq \mathcal{T}(A)$ .

Sea  $x \in X$  tal que  $x \notin \mathcal{T}(p)$  para todo punto  $p \in A$ . Por el Lema 3.1.12, para todo  $p \in A$  existe un abierto  $U_p$  de  $X$  tal que  $p \in U_p$  y  $x \notin \mathcal{T}(\overline{U_p})$ . Así tenemos que  $\{U_p\}_{p \in A}$  es un recubrimiento abierto de  $A$ . Como  $A$  es compacto, existen  $p_1, \dots, p_n$  tales que  $\{U_{p_j}\}_{j=1}^n$  cubre a  $A$ . Como  $x \notin \mathcal{T}(\overline{U_{p_j}})$ ,  $x \notin \cup_{j=1}^n \mathcal{T}(\overline{U_{p_j}})$ . Además, como  $X$  es  $\mathcal{T}$ -aditivo, tenemos que  $x \notin \mathcal{T}(\cup_{j=1}^n \overline{U_{p_j}})$  y por lo tanto  $x \notin \mathcal{T}(A)$ .  $\square$

**Proposición 3.3.8.** *Sea  $X$  un continuo. Entonces  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico si y sólo si  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico puntualmente y  $\mathcal{T}$ -aditivo.*

*Demostración.* Por la Proposición 3.3.5 es claro que si  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico entonces  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico puntualmente y  $\mathcal{T}$ -aditivo.

Recíprocamente, sean  $A$  y  $B$  subconjuntos cerrados de  $X$ . Supongamos que  $A \cap \mathcal{T}(B) = \emptyset$  y  $B \cap \mathcal{T}(A) \neq \emptyset$ . Sea  $x \in B \cap \mathcal{T}(A)$ . Es claro que  $x \in B$  y  $x \in \mathcal{T}(A)$ . Observemos que  $x \notin A$ , ya que si  $x \in A$  entonces  $x \in A \cap \mathcal{T}(B)$ , lo cual es una contradicción a nuestra suposición. Sabemos que  $\mathcal{T}(A) = \cup_{a \in A} \mathcal{T}(a)$ , por  $X$  ser  $\mathcal{T}$ -aditivo. Por lo tanto, existe  $a \in A$  tal que  $x \in \mathcal{T}(a)$ . Así  $a \in \mathcal{T}(x)$  ya que  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico puntualmente. Además,  $a \in \mathcal{T}(x) \subset \mathcal{T}(B)$ , y  $a \in A \cap \mathcal{T}(B)$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $B \cap \mathcal{T}(A) = \emptyset$  y concluimos que  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico.  $\square$

A lo largo de este trabajo hemos visto la relación entre la aposindesis y la función  $\mathcal{T}$ , por esta razón en la siguiente proposición mostramos cómo caracterizar un continuo localmente conexo por medio de éstas.

**Proposición 3.3.9.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es  $\mathcal{T}$ -aditivo y aposindético entonces  $X$  es localmente conexo.*

*Demostración.* Sabemos que si  $A$  es un cerrado de  $X$ , entonces  $\mathcal{T}(A) = \cup_{a \in A} \mathcal{T}(a)$  por la Proposición 3.3.7, por otra parte, como  $X$  es aposindético, para todo punto  $x$  de  $X$ ,  $\mathcal{T}(x) = \{x\}$  por la Proposición 3.2.3. Por tanto, si  $A$  es un cerrado de  $X$ , entonces  $\mathcal{T}(A) = A$ . Como  $A$  fue arbitrario, se tiene por la Proposición 3.2.1 que  $X$  es localmente conexo.  $\square$

El siguiente resultado se obtiene de manera inmediata por la Proposición 3.3.6 y el Corolario 3.3.9.

**Corolario 3.3.10.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es hereditariamente unicoherente y aposindético, entonces  $X$  es localmente conexo.*

En la Definición 3.1.13 caracterizamos los continuos semiaposindéticos. En el siguiente teorema mostramos condiciones para que un continuo sea homeomorfo a  $[0,1]$ .

**Teorema 3.3.11.** *Sea  $X$  un continuo. Si  $X$  es no degenerado, irreducible y semiaposindético, entonces  $X$  es homeomorfo a  $[0,1]$ .*

*Demostración.* Como  $X$  es irreducible,  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico por el Corolario 3.3.3. Como  $X$  es semiaposindético, dados  $x, y \in X$ ,  $x \notin \mathcal{T}(y)$  o  $y \notin \mathcal{T}(x)$ . Por otra parte se tiene que  $x \notin \mathcal{T}(y)$  si y sólo si  $y \notin \mathcal{T}(x)$ . Lo anterior implica que para toda  $x \in X$ ,  $\mathcal{T}(x) = \{x\}$ . Por lo tanto  $X$  es aposindético, por la Proposición 3.2.3. Como  $X$  es un continuo  $\mathcal{T}$ -simétrico es  $\mathcal{T}$ -aditivo por la Proposición 3.3.8. Así tenemos que  $X$  es localmente conexo, por la Proposición 3.3.9. Cosecuentemente  $X$  es arco conexo por [Teorema 8.23 de 10]. Así  $X$  es homeomorfo a  $[0, 1]$ , por ser arco conexo.  $\square$

### 3.4. Aplicaciones de la función $\mathcal{T}$

En esta sección se establece conexiones entre la función  $\mathcal{T}$  y algunas clases de funciones continuas.

**Definición 3.4.1.** Sean  $X$  y  $Y$  dos continuos. Una función  $f : X \rightarrow Y$  continua y sobreyectiva se dice:

1. monótona si  $f^{-1}(B)$  es conexo, para todo subcontinuo  $B$  de  $Y$ .
2. abierta si  $f(U)$  es un abierto de  $Y$ , para todo abierto  $U$  de  $X$ .

**Teorema 3.4.2.** Sean  $X$  y  $Y$  continuos. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua y sobreyectiva,  $A \subseteq X$  y  $B \subseteq Y$  entonces se tiene:

1.  $\mathcal{T}(B) \subseteq f(\mathcal{T}(f^{-1}(B)))$ .
2. Si  $f$  es monótona entonces  $f(\mathcal{T}(A)) \subseteq \mathcal{T}(f(A))$  y  $\mathcal{T}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\mathcal{T}(B))$ .
3. Si  $f$  es monótona entonces  $\mathcal{T}(B) = f(\mathcal{T}(f^{-1}(B)))$ .
4. Si  $f$  es abierta entonces  $f^{-1}(\mathcal{T}(B)) \subseteq \mathcal{T}(f^{-1}(B))$ .
5. Si  $f$  es monótona y abierta entonces  $f^{-1}(\mathcal{T}(B)) = \mathcal{T}(f^{-1}(B))$ .

*Demostración.* 1. Sea  $y \in Y$ . Supongamos que  $y \notin f(\mathcal{T}(f^{-1}(B)))$ , esto es,  $f^{-1}(y) \cap \mathcal{T}(f^{-1}(B)) = \emptyset$ . Lo anterior implica que para cada  $x \in f^{-1}(y)$ , existe un subcontinuo  $W_x$  de  $X$  tal que  $x \in W_x^\circ \subset W_x \subset X \setminus f^{-1}(B)$ . Como  $f^{-1}(y)$  es compacto, existen  $x_1, \dots, x_n \in f^{-1}(y)$  tales que  $f^{-1}(y) \subset \cup_{j=1}^n W_{x_j}^\circ$  y  $(\cup_{j=1}^n W_{x_j}) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ . Por tanto se tiene que  $f(\cup_{j=1}^n W_{x_j}) \cap B = \emptyset$  y  $f(\cup_{j=1}^n W_{x_j})$  es un continuo; pues  $f(W_{x_j}) \cap f(W_{x_k}) \neq \emptyset$  para toda  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Probemos ahora que  $Y \setminus f(X \setminus \cup_{j=1}^n W_{x_j}^\circ)$  es un abierto contenido en  $f(\cup_{j=1}^n W_{x_j})$ . Como  $\cup_{j=1}^n W_{x_j}^\circ \subset \cup_{j=1}^n W_{x_j}$ , se tiene que  $X \setminus \cup_{j=1}^n W_{x_j} \subset X \setminus \cup_{j=1}^n W_{x_j}^\circ$ , de donde  $f(X \setminus \cup_{j=1}^n W_{x_j}) \subset f(X \setminus \cup_{j=1}^n W_{x_j}^\circ)$  y  $Y \setminus f(X \setminus \cup_{j=1}^n W_{x_j}^\circ) \subset Y \setminus f(X \setminus \cup_{j=1}^n W_{x_j})$ . Como  $f$  es sobreyectiva, tenemos que  $Y \setminus f(X \setminus \cup_{j=1}^n W_{x_j}^\circ) \subset f(X \setminus (X \setminus \cup_{j=1}^n W_{x_j})) = f(\cup_{j=1}^n W_{x_j})$ . Por tanto  $Y \setminus f(X \setminus \cup_{j=1}^n W_{x_j}^\circ) \subset f(\cup_{j=1}^n W_{x_j})$ . No es difícil ver que  $y \in Y \setminus f(\cup_{j=1}^n W_{x_j}^\circ)$ . De lo anterior  $y \notin \mathcal{T}(B)$ , lo que demuestra el resultado.

2. Primero veamos que  $f(\mathcal{T}(A)) \subset \mathcal{T}(f(A))$ . Sea  $y \notin \mathcal{T}(f(A))$ . Así existe  $W$  un subcontinuo de  $X$  tal que  $y \in W^\circ \subset W \subset Y \setminus f(A)$ . Lo anterior implica que  $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(W^\circ) \subset f^{-1}(Y \setminus f(A)) \subset X \setminus A$  y  $f^{-1}(y) \subset X \setminus A$ . Como  $f$  es monótona,  $f^{-1}(W)$  es un subcontinuo de  $X$  y  $y \notin f(\mathcal{T}(A))$ .

Ahora probemos que  $\mathcal{T}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\mathcal{T}(B))$ . Sea  $x \notin f^{-1}(\mathcal{T}(B))$ . Lo anterior implica que  $f(x) \notin \mathcal{T}(B)$ . Por tanto, existe  $W$  subcontinuo de  $Y$  tal que  $f(x) \in W^\circ \subset W$  y  $B \cap W = \emptyset$ . Con lo que podemos concluir que  $x \in f^{-1}(W^\circ) \subset f^{-1}(W)$ ,  $f^{-1}(W)$  es un subcontinuo de  $X$ , y  $f^{-1}(W) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(W \cap B) = \emptyset$ . Así,  $x \notin \mathcal{T}(f^{-1}(B))$ , y  $\mathcal{T}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\mathcal{T}(B))$ .

3. Por el ítem 1,  $\mathcal{T}(B) \subset f(\mathcal{T}(f^{-1}(B)))$ . Por el ítem 2,  $\mathcal{T}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\mathcal{T}(B))$ , lo cual implica que  $f(\mathcal{T}(f^{-1}(B))) \subset f(f^{-1}(\mathcal{T}(B))) = \mathcal{T}(B)$  y  $\mathcal{T}(B) = f(\mathcal{T}(f^{-1}(B)))$ .

4. Sea  $x \notin \mathcal{T}(f^{-1}(B))$ . Entonces, existe  $W$  subcontinuo de  $X$  tal que  $x \in W^\circ \subset W \subset X \setminus f^{-1}(B)$ . Por tanto  $W \cap f^{-1}(B) = \emptyset$  y  $f(W) \cap B = \emptyset$ . Como  $f$  es abierta,  $f(W^\circ)$  es abierto y  $f(W^\circ) \subset f(W)$ . Así  $f(x) \notin \mathcal{T}(B)$ . Es decir,  $x \notin f^{-1}(\mathcal{T}(B))$  y  $f^{-1}(\mathcal{T}(B)) \subset \mathcal{T}(f^\circ(B))$ .

5. El resultado se obtiene de manera inmediata por los items 2 y 4.

□

Gracias a este teorema que acabamos de demostrar podemos utilizar la función  $\mathcal{T}$  para probar de una manera diferente algunos resultados interesantes ya conocidos.

**Proposición 3.4.3.** *Sean  $X$  y  $Y$  continuos y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y sobreyectiva. Si  $X$  es localmente conexo, entonces  $Y$  es localmente conexo.*

*Demostración.* Basta probar que  $\mathcal{T}(B) = B$ , para todo cerrado no vacío  $B$ , por la Proposición 3.2.1. Sabemos por la Proposición 3.1.2, que  $B \subset \mathcal{T}(B)$ . Por otra parte por el item 1 del Teorema 3.4.2,  $\mathcal{T}(B) \subseteq f(\mathcal{T}(f^{-1}(B)))$ . Como  $X$  es localmente conexo,  $\mathcal{T}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(B)$ . Entonces  $\mathcal{T}(B) \subseteq f(f^{-1}(B)) = B$ . Así,  $\mathcal{T}(B) = B$  para cada cerrado no vacío  $B$  y  $Y$  es localmente conexo. □

Con el siguiente resultado mostramos que la imagen monótona de un continuo indescomponible es indescomponible.

**Proposición 3.4.4.** *Sean  $X$  y  $Y$  continuos y  $f : X \rightarrow Y$  una función monótona. Si  $X$  es indescomponible, entonces  $Y$  es indescomponible.*

*Demostración.* Sea  $y \in Y$ . Entonces, por el item 2 del Teorema 3.4.2  $\mathcal{T}f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}\mathcal{T}(y)$ . Como  $X$  es indescomponible, por la Proposición 3.2.6, tenemos que  $\mathcal{T}(f^{-1}(y)) = X$ . Nótese que  $Y = f(X) \subset f(f^{-1}(\mathcal{T}(y))) \subset Y$ . Por lo tanto  $\mathcal{T}(y) = Y$ , para cada  $y \in Y$ . Así por la Proposición 3.2.6,  $Y$  es indescomponible. □

En el siguiente teorema mostramos que la  $\mathcal{T}$ -simetría (respectivamente,  $\mathcal{T}$ -aditividad) son invariantes bajo funciones continuas y monótonas.

**Teorema 3.4.5.** *Sea  $X$  un continuo y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y monótona. Si  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico (respectivamente,  $\mathcal{T}$ -aditivo), entonces  $Y$  también es  $\mathcal{T}$ -simétrico (respectivamente,  $\mathcal{T}$ -aditivo).*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es  $\mathcal{T}$ -aditivo. Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos cerrados de  $Y$ . Aplicando el ítem 3 del Teorema 3.4.2, tenemos que  $\mathcal{T}(A \cup B) = f(\mathcal{T}(f^{-1}(A \cup B))) = f(\mathcal{T}(f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B))) = f(\mathcal{T}(f^{-1}(A)) \cup \mathcal{T}(f^{-1}(B))) = f(\mathcal{T}(f^{-1}(A))) \cup f(\mathcal{T}(f^{-1}(B)))$ . Nuevamente, por el Teorema 3.4.2,  $\mathcal{T}(A \cup B) = \mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B)$ . De lo anterior  $X$  es  $\mathcal{T}$ -aditivo.

Supongamos ahora que  $X$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico. Sean  $A$  y  $B$  dos cerrados de  $Y$ , tales que  $A \cap \mathcal{T}(B) = \emptyset$ . Por la parte 3 del Teorema 3.4.2,  $A \cap f(\mathcal{T}(f^{-1}(B))) = \emptyset$ . Por lo que  $f(\mathcal{T}(f^{-1}(A))) \cap B = \mathcal{T}(A) \cap B = \emptyset$  de donde se concluye que  $Y$  es  $\mathcal{T}$ -simétrico.  $\square$

Por el Lema 3.1.3, la imagen bajo la función  $\mathcal{T}$  de cualquier subconjunto de un continuo  $X$  es un subconjunto cerrado de  $X$ . Entonces podemos restringir la función  $\mathcal{T}$  al hiperespacio de subconjuntos cerrados de  $X$ ,  $2^X$ . Como  $2^X$  tiene una topología (ver sección 1.4), podemos preguntarnos si la función  $\mathcal{T}$  restringida a  $2^X$  es continua. Esto no siempre sucede como puede verificarse fácilmente con los Ejemplos 2.1.4 y 3.2.4, y como vemos a continuación:

- (a) En la curva senoidal del topólogo, si tomamos una sucesión de puntos sobre  $(x, \text{sen}(\frac{1}{x}))$  que converge a  $(0, 1)$ .  $\mathcal{T}$  de cada punto en  $(x, \text{sen}(\frac{1}{x}))$  es el mismo punto, pero  $\mathcal{T}((0, 1))$  es  $\{0\} \times [-1, 1]$ , lo cual daña la continuidad de la función  $\mathcal{T}$ .
- (b) En el cono armónico, si tomamos una sucesión que converge a  $(\frac{1}{2}, 0)$  donde cada punto de la sucesión está sobre un rayo del cono, entonces  $\mathcal{T}$  de cada punto es el mismo punto, sin embargo  $\mathcal{T}((\frac{1}{2}, 0))$  es todo el rayo desde  $(\frac{1}{2}, 0)$  hasta  $(1, 0)$ . Por tanto  $\mathcal{T}$  no es continua.

Terminamos mencionando una pregunta que surge de manera natural en [1].

**Pregunta 3.4.6.** *¿Para que continuo  $X$  se tiene que la función  $\mathcal{T}: 2^X \rightarrow 2^X$  es continua?*

# Bibliografía

- [1] D. P. Bellamy, Continua for Which the Set Function  $T$  is Continuous, Trans. Amer. Math. Soc., 1511 (1970), 581-587.
- [2] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. (1966).
- [3] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Dover Publications, Inc., New York, 1988.
- [4] F. B. Jones, Aposindetic Continua and certain boundary problems, Amer. J. Math., 53 (1941) 545-553.
- [5] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 2, Academic Press, 1968.
- [6] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275. Chapman y Hall / CRC, Taylor y Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.
- [7] S. Macías, A Class of One-dimensional Nonlocally Connected Continua for Which the Set Function  $T$  is Continuous, Houston J. Math., 32(2006), 161-165.
- [8] M. A. Molina, *Algunos Aspectos Sobre la Función  $T$  de Jones*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, U. N. A. M., 1998.
- [9] J. Munkres, *Topología*, segunda edición, Prentice hall, Madrid, 2002.
- [10] S. Nadler, Jr. *Continuum Theory, An Introduction*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.

- [11] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol.49, Marcel Dekker, Inc., New York, N. Y., 1978.
- [12] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley Publishing Co., 1970.