

IMPLEMENTACIÓN DE UNA FUENTE PUNTUAL EN UN SISTEMA DE  
MODELADO DE ONDAS 2D ELÁSTICO GALERKIN DISCONTINUO

ALBERTO LUIS SILVA LORA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
MAESTRÍA EN GEOFÍSICA  
BUCARAMANGA  
2018

IMPLEMENTACIÓN DE UNA FUENTE PUNTUAL EN UN SISTEMA DE  
MODELADO DE ONDAS 2D ELÁSTICO GALERKIN DISCONTINUO

ALBERTO LUIS SILVA LORA

Trabajo de grado para optar por el título de  
Magister en Geofísica

Director

José David Sanabria Gómez

Doctor en Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

MAESTRÍA EN GEOFÍSICA

BUCARAMANGA

2018

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradecimiento a mi Director y Codirector por la confianza que tuvieron en mi para culminar con éxito este trabajo.

A mis padres que fueron un gran apoyo durante el proceso de formación en esta maestría.

## CONTENIDO

	<b>pág.</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>17</b>
<b>1. ECUACIONES DE LA ELASTODINÁMICA</b>	<b>20</b>
1.1. LEY DE HOOKE	21
1.2. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO	22
<b>2. Método Galerkin Discontinuo</b>	<b>26</b>
2.1. ESQUEMA NUMÉRICO	27
2.2. FORMA SEMIDISCRETA DEL ESQUEMA	33
2.3. FLUJO NUMÉRICO	36
2.4. CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD	37
2.5. CONDICIONES DE FRONTERA	38
<b>3. DISCRETIZACIÓN DEL CAMPO DE ONDA P-SV</b>	<b>40</b>
3.1. DISCRETIZACIÓN ESPACIAL	40
3.2. DISCRETIZACIÓN TEMPORAL	44
<b>4. FUENTE PUNTUAL Y SOPORTE ESPACIAL</b>	<b>46</b>
4.1. FUENTE PUNTUAL	46
4.2. SOPORTE ESPACIAL GAUSSIANO	47
<b>5. RESULTADOS</b>	<b>49</b>
5.1. VALIDACIÓN DEL ESQUEMA	49
5.1.1. Problema de $\lambda$	49
5.1.2. Capa sobre semiespacio	52

5.2. POSICIONAMIENTO DE LA FUENTE DENTRO DE UN ELEMENTO	57
5.2.1. Fuente localizada en el centroide del elemento	59
5.2.2. Fuente localizada cerca de uno de los vértices del elemento	59
5.2.3. Fuente localizada en uno de los vértices del elemento	59
5.2.4. Fuente localizada en la interfaz entre dos elementos	61
5.3. IMPLEMENTACIÓN DE UN SOPORTE ESPACIAL GAUSSIANO	62
<b>6. CONCLUSIONES</b>	<b>69</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>71</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>76</b>

## LISTA DE FIGURAS

	<b>pág.</b>
Figura 1. Sección cruzada de la malla cerca de la posición de la fuente, estrella amarilla en el plano $xy$ . Esta vista representa el soporte espacial de la componente de esfuerzo en: a) un elemento $P_0$ que contiene la fuente puntual, b) con elemento $P_1$ y c) con elemento $P_2$ (Imagen obtenida de [11] fig. 3, pag. 945).	18
Figura 2. Representación cartesiana de las componentes del tensor de esfuerzos actuando sobre las caras de un elemento de volumen.	21
Figura 3. Polinomios a trozos en subdominios, representación de la $p$ -adaptatividad. subdominios con diferente tamaño, representación de la $h$ -adaptatividad.	26
Figura 4. Comportamiento de algunas funciones base ortonormal definidas dentro del elemento estándar $\mathcal{I}$ .	30
Figura 5. Ilustración de la correspondiente transformación de los elementos de la malla definidos dentro de un sistema de coordenadas global, a un elemento de referencia dentro de un sistema de coordenadas local. Esta transformación facilita las operaciones realizadas sobre cada elemento y permite, por medio de una transformación inversa, volver al sistema de coordenadas global.	31
Figura 6. Comunicación entre los elementos y sus primeros vecinos a través de las interfaces por medio del flujo numérico.	36
Figura 7. Círculo inscrito dentro de un elemento de la malla, cuyo radio permite definir el parámetro de estabilidad.	38

Figura 8.	Localización espacial de la fuente puntual indicada por la estrella roja, la circunferencia limita la zona sobre la cual se extiende el soporte espacial.	48
Figura 9.	Evolución temporal de la fuente puntual tipo Gaussiana usada para el desarrollo de las pruebas.	50
Figura 10.	(Izquierda) Posición de la fuente puntual en el centroide de uno de los elementos de malla. (Derecha) Proyección del valor de la excitación inicial de la fuente sobre los puntos de soporte del elemento que la contiene, usando polinomios de orden 4.	51
Figura 11.	Malla no estructurada de 17230 elementos y 8794 vértices generada para la validación del esquema desarrollado.	52
Figura 12.	Comparación de sismogramas obtenido usando el esquema desarrollado con la solución analítica al problema de Lamb, usando un cuarto orden de aproximación dentro del elemento que contiene la fuente y tercer orden en el resto de los elementos. Campo de velocidad $v_x$ (Arriba) y campo de velocidad $v_z$ (Abajo).	53
Figura 13.	Capturas de pantalla de la componente $x$ del campo de velocidades en un semiespacio homogéneo, al excitar la componente $z$ del campo de velocidades en dirección $z$ positivo. El semiespacio es simulado usando fronteras absorbentes en los bordes del dominio excepto en la superficie donde se tuvieron en cuenta condiciones de frontera libre.	54
Figura 14.	Historia temporal de la fuente usada para las pruebas desarrolladas sobre un modelo de capa sobre semiespacio.	54
Figura 15.	Mallado tipo no estructurado generado teniendo en cuenta las propiedades del medio. Se puede observar un mallado más fino en la zona en donde se presenta menor velocidad y mas grueso en la zona donde la velocidad es mayor.	55

- Figura 16. Proyección del valor de la excitación inicial de la fuente sobre los puntos de soporte del elemento que la contiene. (Izquierda) Usando polinomios de orden 3 y (Derecha) polinomios de orden 4. 56
- Figura 17. Comparación de sismogramas para 3 receptores ubicados dentro del dominio computacional, usando polinomios de orden 3 para el elemento que contiene la fuente y 2 para el resto de elementos. Los receptores se encuentran localizados en (a)  $(3200.0m, 0.01m)$ , (b)  $(2500.0m, 1100.0m)$ , y (c)  $(3400.0m, 500.0m)$ . 56
- Figura 18. Comparación de sismogramas para 3 receptores ubicados dentro del dominio computacional, usando polinomios de orden 4 para el elemento que contiene la fuente y 3 para el resto de elementos. Los receptores se encuentran localizados en (a)  $(3200.0m, 0.01m)$ , (b)  $(2500.0m, 1100.0m)$ , y (c)  $(3400.0m, 500.0m)$ . 57
- Figura 19. Capturas de pantalla de la componente  $x$  del campo de velocidades, en donde se muestra la localización de la fuente (estrella) y de los receptores (triángulos). Se usaron polinomios interpolantes de cuarto orden dentro del elemento que contiene la fuente y de tercer orden en el resto de los elementos. 58
- Figura 20. Proyección del valor de la excitación inicial de la fuente sobre los puntos de soporte del elemento que la contiene, usando polinomio de orden 4. 59
- Figura 21. Comparación de sismogramas para 3 receptores ubicados dentro del dominio computacional, usando polinomios de orden 4 dentro del elemento que contiene la fuente y orden 3 en el resto de elementos. Los receptores se encuentran localizados en (a)  $(3200.0m, 0.01m)$ , (b)  $(2500.0m, 1100.0m)$ , y (c)  $(3400.0m, 500.0m)$ . 60

- Figura 22. Proyección del valor de la excitación inicial de la fuente sobre los puntos de soporte del elemento que la contiene, usando polinomio de orden 4. 60
- Figura 23. Comparación de sismogramas para 3 receptores ubicados dentro del dominio computacional, usando polinomios de orden 4 dentro del elemento que contiene la fuente y 3 en el resto de elementos. Las flechas indican las zonas en donde hay más presencia de dispersión numérica. Los receptores se encuentran localizados en (a)  $(3200.0m, 0.01m)$ , (b)  $(2500.0m, 1100.0m)$ , y (c)  $(3400.0m, 500.0m)$ . 61
- Figura 24. Proyección del valor de la excitación inicial de la fuente sobre los puntos de soporte del elemento que la contiene, usando polinomio de orden 4. 62
- Figura 25. Comparación de sismogramas para 3 receptores ubicados dentro del dominio computacional, usando polinomios de orden 4 dentro del elemento que contiene la fuente y orden 3 en el resto de los elementos. La flecha indica la zona en donde hay más presencia de dispersión numérica. Los receptores se encuentran localizados en (a)  $(3200.0m, 0.01m)$ , (b)  $(2500.0m, 1100.0m)$ , y (c)  $(3400.0m, 500.0m)$ . 62
- Figura 26. Capturas de pantalla del campo de onda en cercanías al punto en donde se encuentra localizada la fuente puntual, sin soporte espacial. (a) Fuente localizada en el centroide del elemento, (b) cerca de uno de los vértices, (c) sobre uno de los vértices y (d) en la interfaz entre dos elementos. 63
- Figura 27. Elementos que contiene el soporte espacial dentro de un área definida por un círculo de radio igual a  $2\sigma$ . 64
- Figura 28. Captura de pantalla de la componente  $x$  del campo de velocidades en la vecindad del punto donde se encuentra localizada la fuente. 65

Figura 29. Comparación de sismogramas obtenidos por medio del esquema desarrollado, para fuente ubicada sobre uno de los vértices del elemento que la contiene, con los resultados obtenidos usando el esquema DG-Crack2D.	65
Figura 30. Elementos que contiene el soporte espacial dentro de un área definida por un círculo de radio igual a $2\sigma$ .	66
Figura 31. Captura de pantalla de la componente $x$ del campo de velocidades en la vecindad del punto donde se encuentra localizada la fuente.	67
Figura 32. Comparación de sismogramas obtenidos por medio del esquema desarrollado, para fuente ubicada sobre la interfaz entre dos elementos, con los resultados obtenidos usando el esquema DGCrack2D. Soporte espacial $\sigma = 30m$ .	67
Figura 33. Capturas de pantalla de la componente $x$ del campo de velocidades usando una fuente puntual con soporte espacial Gaussiano. La fuente es implementada excitando las componentes diagonales del tensor de esfuerzos. La estrella indica la localización de la fuente y los triángulos la localización de los receptores.	68
Figura 34. Modelo de dos capas planas.	80
Figura 35. Modelo de 3 capas, una de ellas con una inclinación.	81
Figura 36. Modelo de 3 capas, una de ellas variable a lo largo del eje horizontal.	82
Figura 37. Diagrama de flujo para la generación del mallado.	86
Figura 38. Diagrama de flujo para la generación de los parámetros del esquema DG.	87
Figura 39. Diagrama de flujo para encontrar la solución correspondiente al sistema de ecuaciones de la elastodinámica.	88

## LISTA DE TABLAS

	<b>pág.</b>
Tabla 1. Caption for LOF	27
Tabla 2. Valores de los pesos $\alpha_k$ y $\beta_k$ para los métodos ERK de dos registros y de cuarto orden.	45
Tabla 3. Valores usados para validar el esquema numérico usando la solución analítica al problema de Lamb.	51
Tabla 4. Características usadas para la simulación sobre un medio de capa plana sobre un semiespacio. El dominio se extiende en una región que se extiende en un dominio de $5600m \times 3600m$ .	53
Tabla 5. Posición de los receptores para las pruebas realizadas.	58
Tabla 6. Archivos principales que componen el esquema DG para la solución de las ecuaciones de la elastodinámica.	82

## LISTA DE ANEXOS

	<b>pág.</b>
Anexo A. <a href="#">Mallado</a>	76
Anexo B. <a href="#">Código Principal</a>	82

## RESUMEN

**TÍTULO:** IMPLEMENTACIÓN DE UNA FUENTE PUNTUAL EN UN SISTEMA DE MODELADO DE ONDAS 2D ELÁSTICO GALERKIN DISCONTINUO \*

**AUTOR:** ALBERTO LUIS SILVA LORA \*\*

**PALABRAS CLAVE:** ALGORITMO, ELASTODINÁMICA, ELEMENTOS FINITOS, FUENTE PUNTUAL, GALERKIN, MÉTODOS NUMÉRICOS, SISMOLOGÍA, SOPORTE GAUSSIANO.

### DESCRIPCIÓN:

La sismología computacional es una herramienta que, por medio del uso de métodos numéricos, permite estudiar el comportamiento de eventos sísmicos en el subsuelo. Existe una gran variedad de métodos numéricos entre los cuales se encuentran los métodos de diferencias finitas, volumen finito y elementos finitos. Existen en la literatura otros métodos que surgen a partir de mejoras de los métodos anteriormente mencionados, entre los cuales se destacan los métodos Galerkin discontinuo. En este trabajo es presentada la implementación de una fuente puntual en un esquema de modelado de onda elástica 2D Galerkin Discontinuo  $hp$ -adaptativo, sobre una malla tipo conforme y no estructurada de elementos triangulares, basado en flujos numéricos tipo centrados.

Aplicaciones del método desarrollado al problema de Lamb fueron llevadas a cabo, como también comparaciones con el esquema DGCrack2D desarrollado por J. Tago, en donde para este último se implementó un modelo de capa sobre semi-espacio. En ambos casos se hicieron pruebas cambiando el orden de aproximación de los polinomios.

Se generaron sismogramas sintéticos variando la posición de la fuente dentro del elemento, en donde se observó mayor dispersión numérica en los resultados a medida que la fuente se aproximaba a un vértice o a la interfaz, por lo que se sugiere implementar un soporte espacial Gaussiano alrededor de la localización de la fuente.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física, Maestría en Geofísica. Director: José David Sanabria Gómez, Doctor en Física.

## ABSTRACT

**TÍTULO:** IMPLEMENTATION OF A GAUSSIAN SOURCE POINT IN AN 2D ELASTIC WAVE MODELING SYSTEM BASED ON DISCONTINUOUS GALERKIN METHODS \*

**AUTHOR:** ALBERTO LUIS SILVA LORA \*\*

**KEYWORDS:** ALGORITHM, ELASTODYNAMICS, FINITE ELEMENTS, GALERKIN, GAUSSIAN SUPPORT, NUMERICAL METHODS, POINT SOURCE, SEISMOLOGY.

### DESCRIPTION:

Computational seismology is a tool that, through the use of numerical methods, allows to study the behavior of seismic events in the subsoil. There is a great variety of numerical methods among which are finite differences methods, finite volume methods and finite elements methods. There are other methods in the literature that arise from improvements in the previous methods, among which stand out discontinuous Galerkin methods.

In this study it is presented a point source implementation in an *hp*-adaptive 2D Galerkin Discontinuous elastic wave modeling scheme based on centered numerical fluxes, on a triangular nonconforming and unstructured mesh.

Applications of the developed method to the Lamb problem were carried out, as well as comparisons with DGCrack2D scheme developed by J. Tago, where for the latter was implemented a layer over half space model. In both cases tests were carried out using different order of approximations.

Synthetic seismograms were generated varying the source location inside the element, where was observed higher numerical dispersion in the results while the source location approached the edges or a vertex of the element, so it is suggested to implement a Gaussian spatial support around the source location vicinity.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física, Maestría en Geofísica. Director: José David Sanabria Gómez, Doctor en Física.

## INTRODUCCIÓN

La sismología computacional es una herramienta muy importante que ayuda a modelar y estudiar el comportamiento del subsuelo por medio de modelos generados a partir de formulaciones matemáticas y el uso de los métodos numéricos[5]. Existe una gran variedad de métodos numéricos entre los cuales se destacan los métodos de diferencias finitas (DF)[26, 31], los métodos de volumen finitos (VF)[23] y los métodos de elementos finitos (EF)[9], que han sido usados en un sin número de trabajos a lo largo de los años[35, 20, 24].

Es posible encontrar en la literatura nuevos métodos que mejoran ciertas características de métodos anteriores, y que se han destacado por su desempeño para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, por lo cual han sido adoptados para la solución de problemas en áreas como la sismología. Entre estos se encuentran los métodos Galerkin Discontinuo (GD) [27], los cuales son una combinación entre los métodos EF y los métodos VF. Se puede destacar en estos la facilidad para adaptarse a geometrías complejas debido a la forma de sus elementos, y su trato estrictamente local en donde los elementos no comparten sus valores nodales, acoplándose con sus vecinos a través de las interfaces haciendo uso de flujos numéricos[18, 10, 22, 34].

Dentro del desarrollo de trabajos relacionados con la implementación de una fuente encontramos que diferentes autores han implementado la fuente sísmica de manera distinta. Hay algunos autores que implementan la fuente sísmica incluyendo los términos de las fuerzas externas a través de la evolución temporal de las componentes de velocidad, como se puede ver en el trabajo de Kosloff[21]. Coutant[6] por su parte sigue la misma estrategia de Vireaux[35], quien implementa una fuente sísmica explosiva sobre un esquema DF excitando las componentes diagonales del tensor de esfuerzos. De igual manera es desarrollado el trabajo de Sarah Delcoute[8] usando

en este caso un esquema GD de alto orden.

Dentro de un esquema DF no es posible obtener el valor del campo en un punto diferente a los nodos de la malla, por lo que existen estrategias para proyectar el valor de la excitación de una fuente puntual cuando esta no coincide con un punto de soporte[15]. Para el caso de los métodos GD la interpolación de los valores del campo fuera de los puntos de soporte es llevada a cabo usando un conjunto de funciones base en términos de la cual es expresada la solución. Debido a las discontinuidades en las funciones base, las derivadas espaciales no siempre son bien definidas en las caras de los elementos[13]. Para tratar con estas discontinuidades se debe escoger de manera correcta el flujo numérico, lo cual no es tarea fácil. Adicional a esto, Etienne[11] en su trabajo indica como dentro de un esquema GD es proyectado el valor de la excitación de la fuente dentro de un elemento de la malla, y muestra la dependencia del soporte espacial de la fuente con respecto al orden de aproximación en donde se observa que para bajos ordenes de aproximación se dificulta la localización como se muestra en Fig. 1. En este trabajo se muestra la

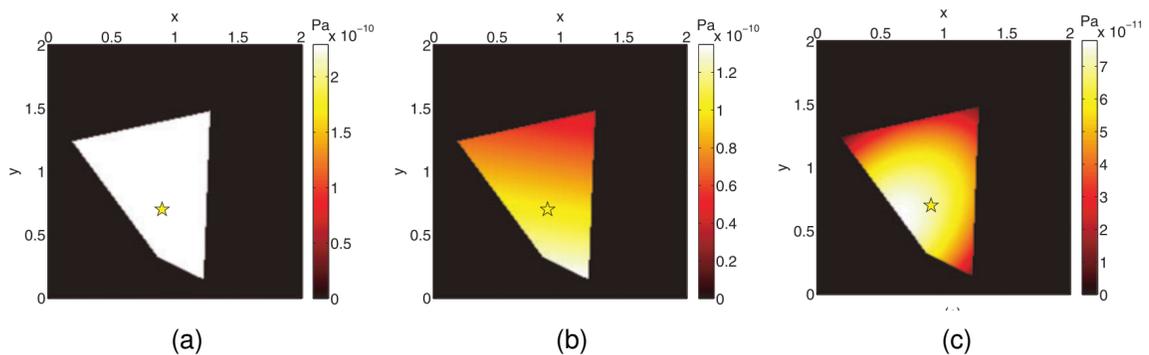


Figura 1. Sección cruzada de la malla cerca de la posición de la fuente, estrella amarilla en el plano  $xy$ . Esta vista representa el soporte espacial de la componente de esfuerzo en: a) un elemento  $P_0$  que contiene la fuente puntual, b) con elemento  $P_1$  y c) con elemento  $P_2$  (Imagen obtenida de [11] fig. 3, pag. 945).

implementación de una fuente puntual sobre un sistema GD usando la formulación fuerte y flujo numérico tipo centrado para la solución del sistema de ecuaciones

diferenciales para el campo de onda elástico 2D (formulación esfuerzo-velocidad) isótropo y homogéneo. Todo el desarrollo del esquema numérico es llevado a cabo usando Python como herramienta de programación.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 2 se construye el sistema de ecuaciones 2D de la elastodinámica en la formulación esfuerzo-velocidad para el campo PS-V, en donde se incluye el término de la fuente espacio temporal. Las componentes del esquema Nodal del método Galerkin Discontinuo[14] son presentadas en el capítulo 3, y se deducen además la forma de las ecuaciones semi-discretas del esquema desarrollado, las expresiones para los flujos numéricos, el criterio de estabilidad y los tipos de condiciones de frontera para el problema a resolver. En el capítulo 4 son discretizadas las ecuaciones de manera espacial y es mostrado el método Runge-Kutta de bajo almacenamiento[37] usado para la discretización temporal. Las expresiones matemáticas obtenidas para la extrapolación de la excitación de la fuente sobre los puntos de soporte del elemento que la contiene y la expresión usada para generar el soporte espacial Gaussiano son mostradas en el capítulo 5. Los resultados obtenidos para el problema de Lamb, los cuales validan la correcta implementación de la fuente puntual y la correcta implementación de la frontera libre, son mostrados en el capítulo 6 junto con los resultados obtenidos de la comparación del esquema desarrollado con el esquema DGCrack2D[33]. Estos últimos resultados son mostrados también usando un soporte espacial, de cuya comparación se observa mejora en los resultados obtenidos.

## 1. ECUACIONES DE LA ELASTODINÁMICA

Las ecuaciones de la elastodinámica permiten modelar el comportamiento de las ondas sísmicas en el subsuelo. Existen dos tipos de ondas sísmicas, las ondas de cuerpo y las ondas superficiales. Las ondas de cuerpo se desplazan en el interior del subsuelo cambiando de dirección a medida que va cambiando la impedancia del medio. Dentro del conjunto de las ondas de cuerpo se encuentran las ondas  $P$ , las cuales son ondas de tipo longitudinal, y las ondas  $S$ , las cuales poseen un desplazamiento transversal a la dirección de propagación. Estas últimas poseen una componente vertical y otra horizontal, las cuales se conocen también como componentes  $SV$  y  $SH$  respectivamente. Las ondas superficiales son ondas que se producen debido a la interferencia entre las ondas de cuerpo cuando estas alcanzan la superficie del subsuelo, de este tipo de ondas se encuentran las ondas *Rayleigh* y ondas *Love*.

El campo de onda descrito por las ecuaciones de la elastodinámica se puede dividir en campo  $P-SV$  y campo  $P-SH$ , los cuales son la combinación de el campo de onda  $P$  con alguna de las componentes del campo de onda  $S$ . El campo  $P-SV$  permite estudiar el comportamiento de las ondas *Rayleigh*, mientras que el campo  $P-SH$  el comportamiento de las ondas *Love*.

Sobre un medio elástico, continuo, es posible aplicar dos tipos de fuerzas: las fuerzas de cuerpo, las cuales son fuerzas que se ejercen a distancia sobre el interior del medio, y las fuerzas superficiales las cuales son aplicadas sobre el contorno que limita dicho medio. El sistema de ecuaciones que rigen el comportamiento de un medio elástico al ser sometido a fuerzas de cuerpo y fuerzas superficiales, las cuales inducen sobre este deformaciones, se pueden obtener a partir de la segunda ley de Newton aplicada sobre un elemento diferencial de volumen.

## 1.1. LEY DE HOOKE

En la mecánica de medios continuos existe una relación entre la fuerza que se le aplica a un cuerpo y la deformación que este sufre, la cual se denomina ley de Hooke, y se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}, \quad (1)$$

donde  $k$  es una constante y  $\mathbf{x}$  es el desplazamiento. Una representación más general, conocida como la ecuación constitutiva, se puede escribir como:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (2)$$

donde  $\tau_{ij}$  es el *tensor de esfuerzos* (ver Fig. 2),  $\varepsilon_{kl}$  es el *tensor de deformaciones* y  $C_{ijkl}$  es el *tensor de rigidez*, el cual describe las propiedades del material. Si se

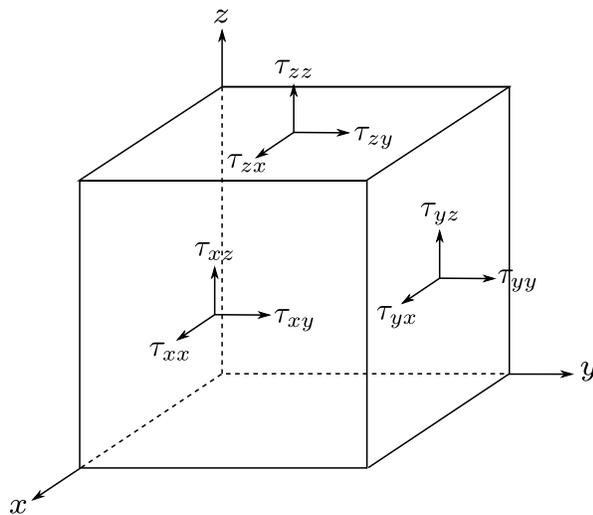


Figura 2. Representación cartesiana de las componentes del tensor de esfuerzos actuando sobre las caras de un elemento de volumen.

consideran  $u_i$  como el campo de desplazamiento de las deformaciones que experimenta un cuerpo con propiedades elásticas a lo largo de las coordenadas  $i$ , se

pueden representar dichas deformaciones en función de este campo de desplazamiento

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}). \quad (3)$$

La representación del tensor de rigidez para el caso isótropo es la siguiente:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (4)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son los parámetros de Lamé, los cuales están, junto con la densidad del medio, se relacionan con las velocidades de las ondas sísmicas de la siguiente manera:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{ondas } P),$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{onda } S).$$

## 1.2. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Al aplicar la segunda ley de Newton sobre un elemento de volumen  $\Delta V$ , sobre el cual actúan fuerzas de cuerpo y fuerzas superficiales, es posible obtener la siguiente ecuación de movimiento[28]

$$\tau_{ij,i}(\mathbf{x}, t) + f_i(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

en donde  $f_i$  son las fuerzas de cuerpo,  $\rho$  es la densidad del medio y  $u_i$  es el campo de desplazamientos. Esta ecuación se satisface en cualquier punto sobre un medio continuo.

Usando la expresión (3), se puede reescribir la ecuación (2) como

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l}, \quad (6)$$

esto dentro de una aproximación lineal y para pequeños desplazamientos. Reemplazando la expresión (6) en la ecuación (5) se tiene

$$(C_{ijkl}u_{k,l})_{,i}(\mathbf{x}, t) + f_i(\mathbf{x}, t) = \rho\ddot{u}_i(\mathbf{x}, t). \quad (7)$$

Incluyendo ahora la representación del tensor de rigidez, ecuación (4), dentro de la ecuación (2) se obtiene la siguiente expresión

$$\tau_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (8)$$

donde  $\theta$  se conoce como la *dilatación*, dada por la expresión

$$\theta = \nabla \cdot \mathbf{u} = u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z}.$$

Usando las ecuaciones (5) y (8) se pueden obtener el siguiente sistema de ecuaciones lineales hiperbólicas de primer orden, para el caso 2D

$$\tau_{xx}(\mathbf{x}, t) = (\lambda + 2\mu)u_{x,x}(\mathbf{x}, t) + \lambda u_{z,z}(\mathbf{x}, t), \quad (9)$$

$$\tau_{xz}(\mathbf{x}, t) = \mu(u_{x,z}(\mathbf{x}, t) + u_{z,x}(\mathbf{x}, t)), \quad (10)$$

$$\tau_{zz}(\mathbf{x}, t) = (\lambda + 2\mu)u_{z,z}(\mathbf{x}, t) + \lambda u_{x,x}(\mathbf{x}, t), \quad (11)$$

$$\rho v_{x,t}(\mathbf{x}, t) = \tau_{xx,x}(\mathbf{x}, t) + \tau_{xz,z}(\mathbf{x}, t) + f_x(\mathbf{x}, t), \quad (12)$$

$$\rho v_{z,t}(\mathbf{x}, t) = \tau_{zx,x}(\mathbf{x}, t) + \tau_{zz,z}(\mathbf{x}, t) + f_z(\mathbf{x}, t), \quad (13)$$

donde  $u_x$  y  $u_z$  representa los desplazamientos en las respectivas direcciones  $x$  y  $z$ ,

$v_x$  y  $v_z$  las velocidades en las respectivas direcciones  $x$  y  $z$ , y  $\mathbf{x} = (x, z)$  el vector posición. Estas ecuaciones caracterizan el comportamiento de un medio elástico, isótropo y no homogéneo cuando este es sometido a esfuerzos o sobre este actúan fuerzas de cuerpo.

Si se derivan las ecuaciones (9-11) con respecto al tiempo, y se introduce un término más general para la fuente espacio temporal, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\tau_{xx,t} - (\lambda + 2\mu)v_{x,x} - \lambda v_{z,z} = s_1, \quad (14)$$

$$\tau_{xz,t} - \mu(v_{x,z} + v_{z,x}) = s_2, \quad (15)$$

$$\tau_{zz,t} - (\lambda + 2\mu)v_{z,z} - \lambda v_{x,x} = s_3, \quad (16)$$

$$\rho v_{x,t} - \tau_{xx,x} - \tau_{xz,z} = \rho s_4, \quad (17)$$

$$\rho v_{z,t} - \tau_{zx,x} - \tau_{zz,z} = \rho s_5, \quad (18)$$

Este sistema de ecuaciones se puede representar como la siguiente ecuación diferencial parcial

$$u_t + \mathcal{A}u_x + \mathcal{B}u_z - s = 0, \quad (19)$$

en donde  $u = (\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}, v_x, v_z)^T$  es el vector de los campos y  $s = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)^T$  son las componentes del vector que caracteriza la fuente espacio temporal.  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$

son matrices definidas de la siguiente manera

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \\ -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda + 2\mu) \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

las cuales se conocen como *matrices Jacobianas* espacio-dependientes.

## 2. Método Galerkin Discontinuo

El método GD es usado para resolver ecuaciones diferenciales de tipo hiperbólica, elíptica y parabólica, y combina ciertas características de los métodos de EF y de VF. El método GD fue propuesto primeramente por W. Reed and T. Hill [27] para la solución de problemas de transporte de neutrones. Este método es principalmente usado en el área de la elastodinámica, mecánica de fluidos y física del plasma, aunque recientemente se han desarrollado trabajos con aplicaciones en la geofísica, específicamente en propagación de ondas [34].

Se puede considerar el método GD como una clase del método de EF pero con la diferencia de que este método hace uso de funciones base completamente discontinuas en los bordes de los elementos como se muestra en Fig. 4.

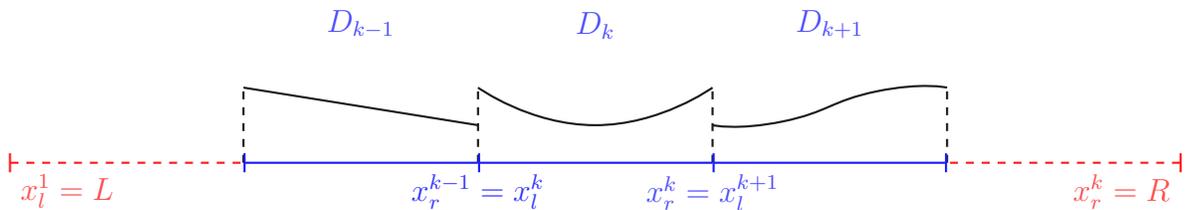


Figura 3. Polinomios a trozos en subdominios, representación de la  $p$ -adaptatividad. subdominios con diferente tamaño, representación de la  $h$ -adaptatividad.

Este permite el uso de mallas no estructuradas ( $h$ -adaptativo) y la libertad para cambiar los grados de los polinomios en cada elemento de manera independiente de sus vecinos ( $p$ -adaptativo). También maneja una estructura de datos extremadamente local ya que los elementos sólo se comunican con sus vecinos inmediatos a través de los flujos de los campos de interés, por medio de sus caras lo que lo hace ideal para su desarrollo en plataformas *GPGPU* (General-Purpose Computing)[12]. Esta estructura del método permite definir matrices de masa locales, las cuales son pequeñas en comparación con el método EF, el cual consta de una matriz de masa

global cuyo proceso de inversión hace más costoso computacionalmente el método EF en comparación con el método GD. Algunas ventajas del método GD en comparación con otros métodos se pueden observar en la Tabla 1.

Método	Geometrías complejas	Aproximación a alto orden y $hp$ -adaptativo	Forma explícita semi-discreta	Leyes de conservación	Problemas elípticos
DF	×	✓	✓	✓	×
VF	✓	×	✓	✓	(✓)
EF	✓	✓	×	(✓)	✓
GD	✓	✓	✓	✓	(✓)

Tabla 1. Propiedades de los métodos más usados para la discretización de ecuaciones diferenciales parciales. ✓ indica que es un éxito, × que falla y (✓) que con modificaciones dicha característica funciona en el método<sup>1</sup>.

## 2.1. ESQUEMA NUMÉRICO

El esquema numérico para el método GD es construido a partir de una aproximación del dominio físico,  $\Omega$ , por medio de un dominio computacional,  $\Omega_h$ ,

$$\Omega \approx \Omega_h = \bigcup_{k=1}^K D^k,$$

el cual consta de  $K$  elementos que forman una malla, que para el caso de elementos triangulares, están identificados por sus 3 vértices  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ , estos enumerados en sentido contrario a las manecillas del reloj, en donde  $\mathbf{v}_i = (x_i, z_i)$  está definido sobre un sistema de coordenadas global. Para cada dominio local,  $D^k$ , que componen la malla, se asume que la solución de la ecuación (19) se puede expresar haciendo

<sup>1</sup> Información obtenida de [14]

uso de una aproximación *nodal* y una aproximación *modal*. La aproximación nodal se define como

$$\mathbf{x} \in D^k : u_h^k(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_p} u_h^k(\mathbf{x}_i^k, t) \ell_i^k(\mathbf{x}). \quad (22)$$

la cual es una combinación lineal de polinomios base dependientes de la posición (Polinomios de Lagrange) y grados de libertad, dependientes tanto del tiempo como del número de puntos de soporte. La aproximación modal se define como

$$\mathbf{x} \in D^k : u_h^k(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_p} \hat{u}_n^k(t) \psi_n(\mathbf{x}), \quad (23)$$

la cual es una combinación lineal entre polinomios de Legendre, dependientes de la posición, y unos pesos dependientes del tiempo, en donde el espacio de las funciones base se define como  $V_h = \bigoplus_{k=1}^K \{\psi_n(D^k)\}_{n=1}^{N_p}$ .

En cada uno de los elementos de la malla se expresa la solución local como un polinomio de orden  $N$  en donde para cada uno de ellos se definen  $N_p$  puntos de soporte,  $\mathbf{x}_i^k$ , dados por la ecuación

$$N_p = (N + 1)(N + 2)/2.$$

La solución global, representada por  $u(\mathbf{x}, t)$ , se puede expresar como la suma directa de todas las soluciones locales dentro de cada elemento que define el dominio computacional, esto es

$$u(\mathbf{x}, t) \approx u_h^k(\mathbf{x}, t) = \bigoplus_{k=1}^K u_h^k(\mathbf{x}, t).$$

Considerando una aproximación local en el espacio estándar,  $\mathbf{r} = (r, s)$ ,

$$\sum_{n=1}^{N_p} \hat{u}_n \psi_n(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_p} u(\mathbf{r}_i) \ell_i(\mathbf{r}), \quad (24)$$

sobre el cual  $\psi_n(\mathbf{r})$  es continuo, se puede expresar el valor del campo sobre los puntos de soporte,  $\mathbf{u} = [u(\mathbf{r}_1), \dots, u(\mathbf{r}_{N_p})]^T$ , en función de los coeficientes de la expansión polinomial  $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{N_p}]^T$ , de la siguiente manera

$$u(\mathbf{r}_i) = \sum_{j=1}^{N_p} \hat{u}_j \psi_j(\mathbf{r}_i),$$

$$\mathbf{u} = \mathcal{V} \hat{\mathbf{u}}, \quad (25)$$

donde  $\mathcal{V}$  se conoce cómo la *matriz generalizada de Vandermonde*, definida como

$$\mathcal{V}_{ij} = \psi_j(\mathbf{r}_i), \quad (26)$$

la cual establece una conexión entre los valores nodales,  $\mathbf{u}$ , y los valores modales,  $\hat{\mathbf{u}}$ .

Para asegurar un buen comportamiento numérico de la matriz de Vandermonde lo primero que se debe hacer es identificar una base polinomial ortonormal,  $\psi_j$ . Para ello se considera una base canónica

$$\psi_m(\mathbf{r}) = r^i s^j, \quad (i, j) \geq 0; \quad i + j \leq N,$$

$$m = j + (N + 1)i + 1 - \frac{i}{2}(i - 1),$$

a la cual se le aplica el proceso de *ortogonalización de Gram-Schmidt*, para obtener la siguiente base

$$\psi_m(\mathbf{r}) = \sqrt{2} P_i^{(0,0)}(a) P_j^{(2i+1,0)}(b) (1 - b)^i,$$

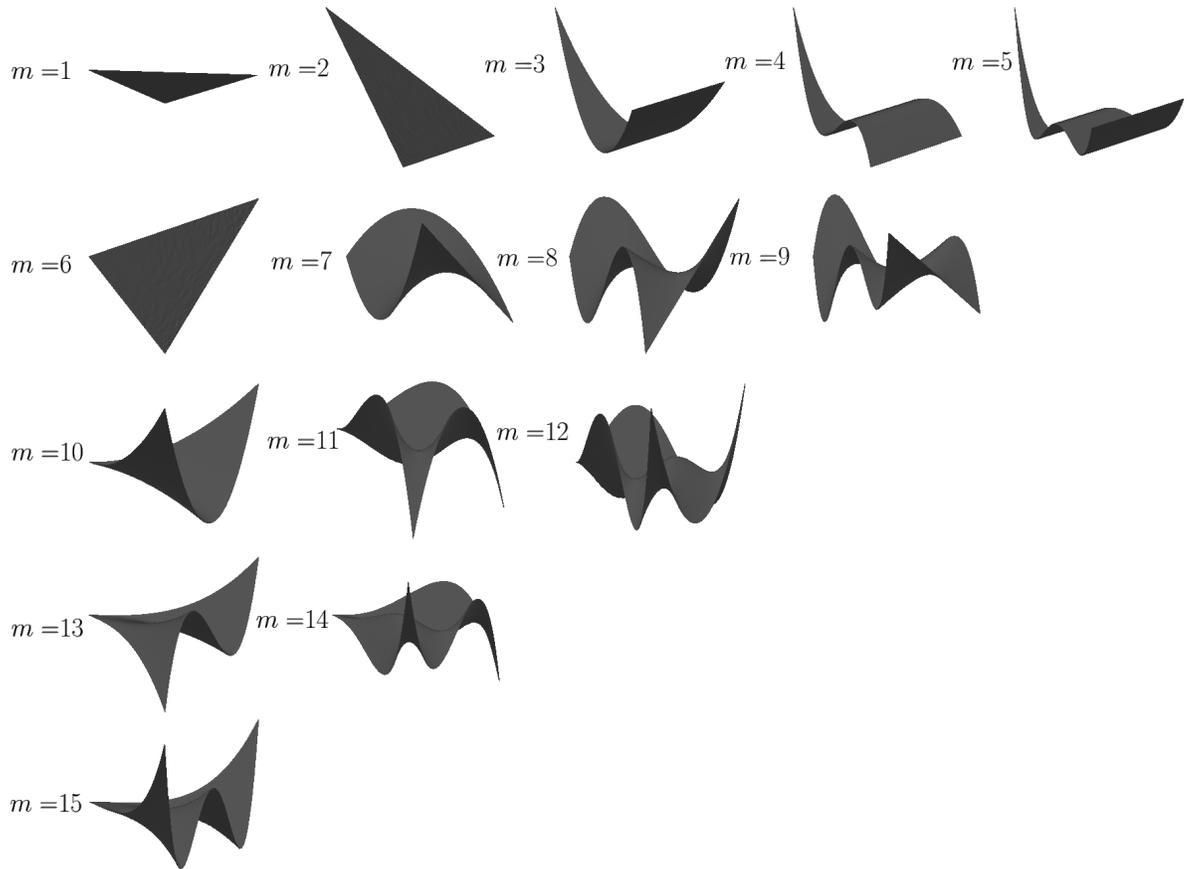


Figura 4. Comportamiento de algunas funciones base ortonormal definidas dentro del elemento estándar  $\mathcal{I}$ .

donde  $a = 2(1+r)/(1-s) - 1$ ,  $b = s$  y  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  son los polinomios de Jacobi de orden  $n$ . Debido a que los *polinomios de Legendre normalizados* son un caso especial de los *polinomios de Jacobi normalizados*, para el caso en que  $\alpha = \beta = 0$  se obtienen los polinomios de Legendre. El comportamiento de algunas de estas funciones base ortonormales definidas en el elemento estándar se puede observar en Fig. 4.

Para trabajar en esta base polinomial, se define el elemento en el sistema de coordenadas global,  $(x, y)$  cuyos vertices son  $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$  y  $\mathbf{v}_3 = (x_3, y_3)$ , y se define el elemento de referencia,  $\mathcal{I}$ , el cual es un elemento cuyos vértices están fijos en los puntos  $\mathbf{v}_1 = (-1, -1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$  y  $\mathbf{v}_3 = (-1, 1)$ , y que pertenece al sistema de coordenadas local  $(r, s)$ . Cualquier punto dentro de un elemento puede

ser mapeado desde el sistema de coordenadas global al sistema de coordenadas local por medio de una transformación (Fig. 5).

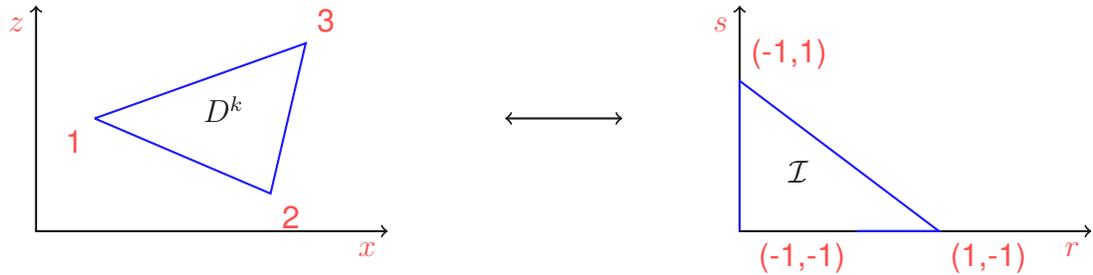


Figura 5. Ilustración de la correspondiente transformación de los elementos de la malla definidos dentro de un sistema de coordenadas global, a un elemento de referencia dentro de un sistema de coordenadas local. Esta transformación facilita las operaciones realizadas sobre cada elemento y permite, por medio de una transformación inversa, volver al sistema de coordenadas global.

Si se definen las coordenadas baricéntricas,  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , teniendo que

$$0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad (27)$$

se puede expresar cualquier punto dentro del triángulo cómo

$$\mathbf{x} = \lambda_2 \mathbf{v}_1 + \lambda_3 \mathbf{v}_2 + \lambda_1 \mathbf{v}_3.$$

De igual manera se pueden expresar puntos dentro del triángulo de referencia,  $\mathcal{I}$ , por medio de la siguiente expresión

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Combinando esta ecuación con la ecuación (27), se puede escribir las coordenadas

baricéntricas en función de las coordenadas del elemento estándar,  $\mathcal{I}$

$$\lambda_1 = \frac{s+1}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{r+s}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{r+1}{2},$$

de donde se tiene que el mapeo directo, que permite pasar del sistema de coordenadas local al sistema de coordenadas global, está dado por la transformación

$$\mathbf{x} = \Psi(\mathbf{r}) = -\frac{r+s}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{r+1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{s+1}{2}\mathbf{v}_3. \quad (28)$$

El Jacobiano de la transformación se define como,

$$J = x_r y_s - x_s y_r, \quad (29)$$

de donde, según la ecuación (28), se obtienen las siguientes expresiones

$$\mathbf{x}_r = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{2}, \quad \mathbf{x}_s = \frac{\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1}{2},$$

que si se reemplazan en la ecuación (29) se llega a la expresión

$$J = \frac{1}{2} \left| \frac{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)}{2} \right| = \frac{1}{2} A_T,$$

cuya expresión del Jacobiano está relacionada con el área,  $A_T$ , del elemento.

Adicional a la identificación de la base polinomial ortonormal, se deben identificar los  $N_p$  puntos sobre el elemento estándar que permita obtener un buen comportamiento de los polinomios interpolantes y así evitar una matriz de Vandermonde mal condicionada. Estos puntos se pueden ver como una generalización de los puntos *Legendre-Gauss-Lobatto*. Para solucionar el problema de la correcta posición de los puntos de soporte, se usó un enfoque simple para el cálculo de un buen conjunto de dichos puntos nodales sobre elementos triangulares y para cualquier orden de

interpolación [14].

Considerando que las aproximaciones locales dentro del elementos estándar están definidas por la ecuación (24), y usando la expresión (25), se puede escribir

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= \sum_{i=0}^{N_p} \left[ \sum_{j=1}^{N_p} \hat{u}_j \psi_j(\mathbf{r}_i) \right] \ell_i(\mathbf{r}), \\ &= \mathcal{V}^T \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{u}}, \\ &= \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

de la cual se obtiene la expresión

$$\mathcal{V}^T \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}),$$

donde  $\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}) = [\ell_1(\mathbf{r}), \ell_2(\mathbf{r}), \dots, \ell_{N_p}(\mathbf{r})]^T$  y  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) = [\psi_1(\mathbf{r}), \psi_2(\mathbf{r}), \dots, \psi_{N_p}(\mathbf{r})]^T$ . Con esta expresión es posible evaluar los polinomios interpolantes de Lagrange,  $\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r})$ , para los cuales no hay una expresión explícita.

## 2.2. FORMA SEMIDISCRETA DEL ESQUEMA

Para obtener una solución de un sistema físico, en primer lugar se debe discretizar el sistema de ecuaciones que representa dicho sistema. Para este caso se tiene la ecuación (19), la cual es una ecuación diferencial parcial hiperbólica lineal conocida como la ecuación de *advección* no homogénea. Se asume que la solución local se puede representar como una aproximación lineal  $u_h \in V_h$  que forma el residual local

$$\mathbf{x} \in D^k : \quad \mathcal{R}_h(\mathbf{x}, t) = (u_h^k)_t + \mathcal{A}(u_h^k)_x + \mathcal{B}(u_h^k)_z - s_h^k(\mathbf{x}, t), \quad (30)$$

para cada uno de los elementos que componen el dominio  $\Omega_h$ . Se requiere que este residual sea ortogonal a un conjunto de funciones pruebas  $\phi_h \in V_h$ , esto es

$$\int_{D^k} \mathcal{R}_h(\mathbf{x}, t) \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (31)$$

Una elección clásica para llegar al esquema GD es considerar que las funciones pruebas y las funciones base pertenecen al mismo espacio  $V_h$ , los que permite escribir las funciones pruebas como una combinación lineal de las funciones base. El espacio  $V_h$  es un espacio roto compuesto por una base discontinua, lo que conlleva además a que se tengan soluciones duplicadas en las interfaces que se comparten con los elementos vecinos. El hecho de que este esquema numérico sea estrictamente local viene de que los elementos sólo se comunican con los primeros vecinos, independientemente del orden de precisión del esquema[30].

Reemplazando la ecuación (30) en (31) se llega a la siguiente expresión

$$\int_{D^k} (u_h^k)_t \ell^k d\mathbf{x} + \int_{D^k} (\mathcal{A}(u_h^k)_x + \mathcal{B}(u_h^k)_z) \ell^k d\mathbf{x} - \int_{D^k} s_h^k \ell^k d\mathbf{x} = 0, \quad (32)$$

en donde la integración por parte de la segunda expresión de la izquierda, conduce a

$$\begin{aligned} \int_{D^k} [\nabla \cdot (\mathcal{A}u_h^k \hat{x} + \mathcal{B}u_h^k \hat{z})] \ell^k d\mathbf{x} = \\ \int_{D^k} [\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathcal{A}u_h^k \hat{x} + \mathcal{B}u_h^k \hat{z})] \ell^k d\mathbf{x} - \int_{D^k} (\mathcal{A}u_h^k \hat{x} + \mathcal{B}u_h^k \hat{z}) \cdot \nabla \ell^k d\mathbf{x} \\ = \int_{\partial D^k} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{f}^*) \ell^k d\mathbf{x} - \int_{D^k} \mathbf{f}_h^k \cdot \nabla \ell^k d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (33)$$

donde

$$\mathbf{f}_h^k = (\mathcal{A}u_h^k, \mathcal{B}u_h^k). \quad (34)$$

En el esquema GD y VF,  $\mathbf{f}^*$  se conoce como el flujo numérico definido sobre la frontera  $\partial D^k$  del elemento  $D^k$ . Este valor es el que permite recuperar una solución global significativa. El proposito principal del flujo numérico es conectar cada elemento con sus vecinos directos.

Si se reemplaza la expresión (33) en la ecuación (32), se llega a la expresión

$$\int_{D^k} [(u_h^k)_t \ell^k - \mathbf{f}_h^k \cdot \nabla \ell^k] d\mathbf{x} + \int_{\partial D^k} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{f}^* \ell^k d\mathbf{x} - \int_{D^k} s_h^k \ell^k d\mathbf{x} = 0,$$

la cual se conoce como la *formulación débil* del esquema GD. Si se integra nuevamente por partes la segunda expresión de la derecha de la anterior ecuación, se obtiene la siguiente expresión

$$\int_{D^k} [(u_h^k)_t + \nabla \cdot \mathbf{f}_h^k] \ell^k d\mathbf{x} - \int_{\partial D^k} \hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{f}_h^k - \mathbf{f}^*] \ell^k d\mathbf{x} - \int_{D^k} s_h^k \ell^k d\mathbf{x} = 0,$$

conocida como la *formulación fuerte*. Despejando el término de la derivada temporal se tiene,

$$\begin{aligned} \int_{D^k} (u_h^k)_t \ell^k d\mathbf{x} = \\ - \int_{D^k} \nabla \cdot \mathbf{f}_h^k \ell^k d\mathbf{x} + \int_{\partial D^k} \hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{f}_h^k - \mathbf{f}^*] \ell^k d\mathbf{x} + \int_{D^k} s_h^k \ell^k d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (35)$$

la cual se conoce como la ecuación semi-discreta para el esquema GD.

Implementando cualquier método numérico para la integración del tiempo, como por ejemplo el método de *Runge-Kutta* o el método *Leapfrog*, se puede obtener una aproximación del problema a solucionar.

### 2.3. FLUJO NUMÉRICO

Como se mencionó anteriormente, el flujo numérico es el componente principal del método GD que permite conectar cada uno de los elementos que componen el dominio con sus vecinos directos (Fig. 6).

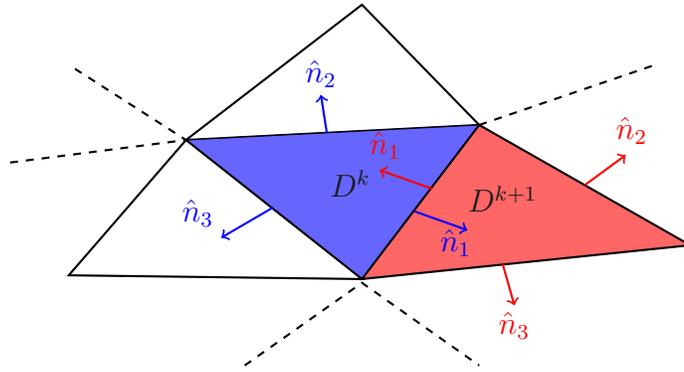


Figura 6. Comunicación entre los elementos y sus primeros vecinos a través de las interfaces por medio del flujo numérico.

Para mayor simplicidad se considera un flujo tipo *centrado*, el cual es obtenido a partir del promedio entre el flujo del campo saliente (-) y el flujo del campo entrante (+) en el  $k$ -ésimo elemento,

$$\mathbf{f}^* = \{\{\mathbf{f}\}\} = \frac{(\mathbf{f}_h^k)^- + (\mathbf{f}_h^k)^+}{2}, \quad (36)$$

cuya expresión permite escribir

$$\mathbf{f}_h^k - \mathbf{f}^* = (\mathbf{f}_h^k)^- - \frac{1}{2} [(\mathbf{f}_h^k)^- + (\mathbf{f}_h^k)^+] = \frac{1}{2} [(\mathbf{f}_h^k)^- - (\mathbf{f}_h^k)^+]. \quad (37)$$

Usando las ecuaciones (34) y (37) junto con las matrices (20-21) se pueden obtener

las siguientes expresiones

$$\nabla \cdot \mathbf{f}_h^k = \begin{pmatrix} -(\lambda + 2\mu)v_{x,x} - \lambda v_{z,z} \\ -\lambda v_{x,x} - (\lambda + 2\mu)v_{z,z} \\ -\mu(v_{z,x} + v_{x,z}) \\ -\frac{1}{\rho}(\tau_{xx,x} + \tau_{xz,z}) \\ -\frac{1}{\rho}(\tau_{xz,x} + \tau_{zz,z}) \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{f}_h^k)^- - (\mathbf{f}_h^k)^+] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -n_x(\lambda + 2\mu)[v_x] - n_z\lambda[v_z] \\ -n_x\lambda[v_x] - n_z(\lambda + 2\mu)[v_z] \\ -\mu(n_z[v_x] + n_x[v_z]) \\ -\frac{1}{\rho}(n_x[\tau_{xx}] + n_z[\tau_{xz}]) \\ -\frac{1}{\rho}(n_z[\tau_{zz}] + n_x[\tau_{xz}]) \end{pmatrix}, \quad (39)$$

las cuales son calculadas solamente sobre los bordes de cada elemento. Se hace uso de la notación

$$[u] = u^- - u^+,$$

donde  $u^-$  es el campo que sale del  $k$ -ésimo elemento hacia los vecinos cercanos y  $u^+$  es el campo entrante. Estas expresiones permiten obtener el valor del primer y segundo término de la parte derecha de la ecuación (35).

## 2.4. CONVERGENCIA Y ESTABILIDAD

Para los métodos GD se tiene que la convergencia es lograda ya sea disminuyendo el tamaño de los elementos, incrementando el orden de aproximación de los polinomios dentro de los elementos o ambas cosas a la vez (*hp*-convergencia). La estabilidad del método es determinada bajo el criterio heurístico propuesto por Kaser y

Dumbser [17], en donde el paso del tiempo está determinado por

$$\Delta t < \min_i \left( \frac{1}{2N_i + 1} \frac{2r_i}{\alpha_i} \right),$$

donde  $\alpha_i$  es la velocidad de onda  $P$ ,  $N_i$  es el grado del polinomio y  $r_i$  es el radio del círculo inscrito en el triángulo que representa el elemento  $i$ . El valor de  $r_i$  se obtiene del cociente entre el área del elemento y el semiperímetro (Fig. 7),

$$r_i = \frac{2(A_1 + A_2 + A_3)}{a + b + c} = \frac{2A_T}{a + b + c}$$

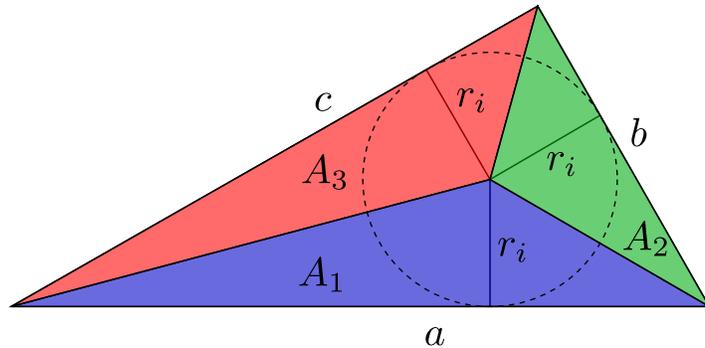


Figura 7. Círculo inscrito dentro de un elemento de la malla, cuyo radio permite definir el parámetro de estabilidad.

En la literatura se encuentra demostrada la estabilidad y la convergencia de los métodos GD para la propagación del campo de onda sísmico, como se puede observar en [30][8][1].

## 2.5. CONDICIONES DE FRONTERA

Dentro del algoritmo de definieron dos tipos de condiciones de frontera, las condiciones de *frontera de superficie libre* y las condiciones de *frontera absorbente*. Las condiciones de frontera de superficie libre son definidas en la parte superior del mo-

delo y las condiciones de frontera absorbente en la parte inferior y los laterales del modelo. Para las condiciones de frontera libre se requiere que los esfuerzos sean cero en la superficie libre, esto se logra haciendo uso del método de imágenes[36]. Este método se implementa creando elementos virtuales sobre la superficie, lo cual se expresa de la siguiente manera:

$$u^- - u^+ = 2u^-, \quad (40)$$

donde  $u^-$  es el campo dentro del elemento y  $u^+$  es el campo fuera. Con esta expresión se define de manera implícita la cancelación de las tracciones normales a la superficie en la frontera

$$\sigma_{ij}n_j = 0.$$

Las condiciones de frontera absorbente para el modelo se desarrollaron haciendo uso del método de *condiciones de frontera no reflectante*[4].

### 3. DISCRETIZACIÓN DEL CAMPO DE ONDA P-SV

El campo de onda P-SV está caracterizado por las ecuaciones (14-18), las cuales se pueden discretizar haciendo uso de la formulación fuerte del esquema GD.

#### 3.1. DISCRETIZACIÓN ESPACIAL

Usando las expresiones (38) y (39), se obtienen a partir de la ecuación (35) las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \int_{D^k} \tau_{xx,t}(\mathbf{x}, t) \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{D^k} [(\lambda + 2\mu)v_{x,x}(\mathbf{x}, t) + \lambda v_{z,z}(\mathbf{x}, t)] \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial D^k} (n_x(\lambda + 2\mu)[v_x] + n_z \lambda [v_z]) \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{D^k} s_1(\mathbf{x}, t) \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \int_{D^k} \tau_{zz,t}(\mathbf{x}, t) \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{D^k} [\lambda v_{x,x}(\mathbf{x}, t) + (\lambda + 2\mu)v_{z,z}(\mathbf{x}, t)] \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial D^k} (n_x \lambda [v_x] + n_z(\lambda + 2\mu)[v_z]) \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{D^k} s_2(\mathbf{x}, t) \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \int_{D^k} \tau_{xz,t}(\mathbf{x}, t) \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \mu \int_{D^k} [v_{z,x}(\mathbf{x}, t) + v_{x,z}(\mathbf{x}, t)] \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{\mu}{2} \int_{\partial D^k} (n_x [v_z] + n_z [v_x]) \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{D^k} s_3(\mathbf{x}, t) \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \int_{D^k} v_{x,t}(\mathbf{x}, t) \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \frac{1}{\rho} \int_{D^k} [\tau_{xx,x}(\mathbf{x}, t) + \tau_{xz,z}(\mathbf{x}, t)] \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2\rho} \int_{\partial D^k} (n_x [\tau_{xx}] + n_z [\tau_{xz}]) \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{D^k} s_4(\mathbf{x}, t) \ell^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
\int_{D^k} v_{z,t}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \frac{1}{\rho} \int_{D^k} [\tau_{xz,x}(\mathbf{x}, t) + \tau_{zz,z}(\mathbf{x}, t)] \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\quad - \frac{1}{2\rho} \int_{\partial D^k} (n_x[\tau_{xz}] + n_z[\tau_{zz}]) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{D^k} s_5(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Si se reemplaza la solución  $u_h^k$ , escrita como la combinación lineal de las funciones base (22), en el sistema de ecuaciones anterior, se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N_p} \tau_{xx,t}(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \\
\sum_{i=1}^{N_p} \left[ (\lambda + 2\mu) v_x(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} (\boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}))_x \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \lambda v_z(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} (\boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}))_z \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial D^k} (n_x(\lambda + 2\mu)[v_x] + n_z \lambda [v_z]) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{D^k} s_1(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N_p} \tau_{zz,t}(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \\
\sum_{i=1}^{N_p} \left[ \lambda v_x(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} (\boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}))_x \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + (\lambda + 2\mu) v_z(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} (\boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}))_z \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial D^k} (n_x \lambda [v_x] + n_z(\lambda + 2\mu)[v_z]) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{D^k} s_2(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N_p} \tau_{xz,t}(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \\
\mu \sum_{i=1}^{N_p} \left[ v_z(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} (\boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}))_x \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + v_x(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} (\boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}))_z \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] \\
&\quad - \frac{\mu}{2} \int_{\partial D^k} (n_x [v_z] + n_z [v_x]) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\quad + \int_{D^k} s_3(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N_p} v_{x,t}(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\
\frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{N_p} \left[ \tau_{xx}(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} (\boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}))_x \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \tau_{xz}(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} (\boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}))_z \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] \\
- \frac{1}{2\rho} \int_{\partial D^k} (n_x[\tau_{xx}] + n_z[\tau_{xz}]) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
+ \int_{D^k} s_4(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N_p} v_{z,t}(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\
\frac{1}{\rho} \sum_{i=1}^{N_p} \left[ \tau_{xz}(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} (\boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}))_x \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \tau_{zz}(\mathbf{x}_i^k, t) \int_{D^k} (\boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}))_z \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] \\
- \frac{1}{2\rho} \int_{\partial D^k} (n_x[\tau_{xz}] + n_z[\tau_{zz}]) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
+ \int_{D^k} s_5(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \tag{50}
\end{aligned}$$

Haciendo uso de las relaciones

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^k &= \int_{D^k} \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) \boldsymbol{\ell}^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = J^k \int_{\mathcal{I}} \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\
&= J^k \mathcal{M} = J^k (\mathcal{V}\mathcal{V}^T)^{-1}, \tag{51}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_x^k = \int_{D^k} (\boldsymbol{\ell}(\mathbf{x}))_x \boldsymbol{\ell}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathcal{M}^k \mathcal{D}_x^k, \tag{52}$$

$$\mathcal{S}_z^k = \int_{D^k} (\boldsymbol{\ell}(\mathbf{x}))_z \boldsymbol{\ell}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathcal{M}^k \mathcal{D}_z^k, \tag{53}$$

en donde

$$\mathcal{D}_x^k = (\boldsymbol{\ell}(\mathbf{x}))_x \Big|_{\mathbf{x}_i}, \quad \mathcal{D}_z^k = (\boldsymbol{\ell}(\mathbf{x}))_z \Big|_{\mathbf{x}_i}, \tag{54}$$

el conjunto de ecuaciones (46)-(50) se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\tau_{xx,t}(\mathbf{x}_i, t) &= (\lambda + 2\mu)\mathcal{D}_x v_x(\mathbf{x}_i, t) + \lambda\mathcal{D}_z v_z(\mathbf{x}_i, t) \\
&\quad - \frac{1}{2}(J\mathcal{M})^{-1} \int_{\partial D^k} (n_x(\lambda + 2\mu)[v_x(\mathbf{x}, t)] + n_z\lambda[v_z(\mathbf{x}, t)]) \ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\quad + (J\mathcal{M})^{-1} \int_{D^k} s_1(\mathbf{x}, t) \ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{zz,t}(\mathbf{x}_i, t) &= \lambda\mathcal{D}_x v_x(\mathbf{x}_i, t) + (\lambda + 2\mu)\mathcal{D}_z v_z(\mathbf{x}_i, t) \\
&\quad - \frac{1}{2}(J\mathcal{M})^{-1} \int_{\partial D^k} (n_x\lambda[v_x(\mathbf{x}, t)] + n_z(\lambda + 2\mu)[v_z(\mathbf{x}, t)]) \ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\quad + (J\mathcal{M})^{-1} \int_{D^k} s_2(\mathbf{x}, t) \ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xz,t}(\mathbf{x}_i, t) &= \mu(\mathcal{D}_x v_z(\mathbf{x}_i, t) + \mathcal{D}_z v_x(\mathbf{x}_i, t)) \\
&\quad - \frac{1}{2}(J\mathcal{M})^{-1} \int_{\partial D^k} \mu(n_z[v_x(\mathbf{x}, t)] + n_x[v_z(\mathbf{x}, t)]) \ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\quad + (J\mathcal{M})^{-1} \int_{D^k} s_3(\mathbf{x}, t) \ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
v_{x,t}(\mathbf{x}_i, t) &= \frac{1}{\rho}(\mathcal{D}_x \tau_{xx}(\mathbf{x}_i, t) + \mathcal{D}_z \tau_{xz}(\mathbf{x}_i, t)) \\
&\quad - \frac{1}{2}(J\mathcal{M})^{-1} \int_{\partial D^k} \frac{1}{\rho} (n_x[\tau_{xx}(\mathbf{x}, t)] + n_z[\tau_{xz}(\mathbf{x}, t)]) \ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\quad + (J\mathcal{M})^{-1} \int_{D^k} s_4(\mathbf{x}, t) \ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
v_{z,t}(\mathbf{x}_i, t) &= \frac{1}{\rho}(\mathcal{D}_x \tau_{xz}(\mathbf{x}_i, t) + \mathcal{D}_z \tau_{zz}(\mathbf{x}_i, t)) \\
&\quad - \frac{1}{2}(J\mathcal{M})^{-1} \int_{\partial D^k} \frac{1}{\rho} (n_x[\tau_{xz}(\mathbf{x}, t)] + n_z[\tau_{zz}(\mathbf{x}, t)]) \ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\quad + (J\mathcal{M})^{-1} \int_{D^k} s_5(\mathbf{x}, t) \ell(\mathbf{x}) d\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{59}$$

Aquí se observa que para obtener el valor del lado derecho de este sistema de ecuaciones, es necesario invertir la matriz de masa local  $\mathcal{M}^k$  y conocer las matrices de

derivadas,  $\mathcal{D}_x^k$  y  $\mathcal{D}_z^k$ . También cabe mencionar que estas matrices sólo dependen de los polinomios interpolantes de Lagrange, los cuales se pueden expresar en función de los polinomios de Legendre haciendo uso de la matriz de Vandermonde.

### 3.2. DISCRETIZACIÓN TEMPORAL

Luego de obtener las ecuaciones semi-discretas del esquema GD es necesario implementar algún método para la discretización de la parte temporal del sistema de ecuaciones (55-59). Existen varios métodos entre los cuales se destacan los métodos explícitos de Runge-Kutta (ERK) de bajo almacenamiento[3] y el método de Leapfrog[8]. Para el desarrollo del sistema de modelado se optó por los métodos ERK, ya que por ser de bajo almacenamiento son ideales para los métodos GD de alto orden por lo que permite disminuir memoria durante el almacenamiento de los datos generados durante el procesamiento de los cálculos para la obtención de los campos de onda.

El esquema ERK desarrollado por Williamson[37] consta de dos registros que permiten pasar del campo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_n$  a  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{n+1}$ . Si se considera la ecuación diferencial  $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, t)$ , se pueden encontrar su solución aplicando el método ERK de la siguiente manera,

$\Delta\mathbf{u} \leftarrow 0$

for  $k = 1 : s$

$\Delta\mathbf{u} \leftarrow \alpha_k \Delta\mathbf{u} + \Delta t \mathbf{g}(\mathbf{u})$

$\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u} + \beta_k \Delta\mathbf{u}$

end

en donde  $\Delta t$  el paso de tiempo,  $\alpha_k$  son los pesos del primer registro y  $\beta_k$  los pesos del segundo registro, los valores usados para estos coeficientes se muestran en la tabla 2.

Coeficiente	Valor
$\alpha_1$	0.0
$\alpha_2$	-0.41789047449985195
$\alpha_3$	-1.192151694642677
$\alpha_4$	-1.6977846924715279
$\alpha_5$	-1.5141834442571558
$\beta_1$	0.14965902199922912
$\beta_2$	0.37921031299962726
$\beta_3$	0.8229550293869817
$\beta_4$	0.6994504559491221
$\beta_5$	0.15305724796815198

Tabla 2. Valores de los pesos  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  para los métodos ERK de dos registros y de cuarto orden.

## 4. FUENTE PUNTUAL Y SOPORTE ESPACIAL

### 4.1. FUENTE PUNTUAL

Una de las herramientas que permite estudiar la dinámica de un evento sísmico de manera aproximada es una fuente puntual, esto para el caso en el que no se quiera observar detalles del proceso de ruptura de una falla. De lo contrario se debe tener en cuenta la geometría de la fuente y la propagación de la ruptura a lo largo de la falla[25]. Para el alcance del presente trabajo se tienen en cuenta fuentes puntuales, las cuales pueden ser introducidas dentro del esquema ya sea excitando las componentes del tensor de esfuerzos o excitando las componentes del campo de velocidades.

Para obtener la expresión para la excitación de la fuente se usa el último término de la parte derecha del sistema de ecuaciones (55-59) el cual, teniendo en cuenta que

$$\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}) = (\mathcal{V}^T)^{-1}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}),$$

donde  $\boldsymbol{\ell}(\mathbf{r}) = [\ell_1(\mathbf{r}), \dots, \ell_{N_p}(\mathbf{r})]^T$  y  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) = [\psi_1(\mathbf{r}), \dots, \psi_{N_p}(\mathbf{r})]^T$ , junto con la expresión que me define una fuente puntual

$$s(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)s(t),$$

donde  $\mathbf{x}_s$  es la posición exacta de la fuente, se obtiene la expresión

$$\begin{aligned} (JM)^{-1} \int_{D^k} s_p(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\ell}(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= (JM)^{-1} \int_{D^k} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)s_p(t)\boldsymbol{\ell}(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \\ &= (JM)^{-1}\boldsymbol{\ell}(\mathbf{x}_s)s_p(t), \\ &= (JM)^{-1}(\mathcal{V}^T)^{-1}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_s)s_p(t), \end{aligned} \tag{60}$$

por medio de la cual se implementa la fuente puntual en el esquema desarrollado. Esta expresión permite proyectar el valor de la excitación a todos los puntos dentro del elemento que contiene la fuente en cada instante de tiempo.

## 4.2. SOPORTE ESPACIAL GAUSSIANO

Además del soporte espacial que se genera al proyectar la excitación de la fuente sobre los puntos de soporte del elemento donde se encuentra, se genera un soporte espacial Gaussiano que se extiende cierto radio, limitado por la desviación, alrededor de la localización exacta de la fuente puntual. La fuente es localizada sobre un punto cualquiera  $(x, z)$  dentro del dominio computacional como se muestra en Fig. (8), alrededor del cual se crea el soporte espacial Gaussiano que suaviza la solución y reduce la dispersión numérica. Finalmente, dentro de la región que abarca el soporte espacial, es interpolado el valor de la perturbación para cada paso del tiempo sobre todos los nodos dentro de dicha región.

La función usada para proyectar el valor de la excitación es una función tipo Gaussiana descrita por

$$g(x_i, z_i) = Ae^{-\frac{(x_i-x_s)^2+(z_i-z_s)^2}{\sigma^2}},$$

donde  $(x_i, z_i)$  son las coordenadas de los puntos de soporte para cada elemento dentro del soporte espacial,  $A$  es su amplitud máxima,  $x_s$  es la posición de la fuente en el eje  $x$  y  $z_s$  la posición en el eje  $z$ . Esta función es usada para distribuir el valor de los esfuerzos dentro del área del soporte espacial en cada paso de tiempo.

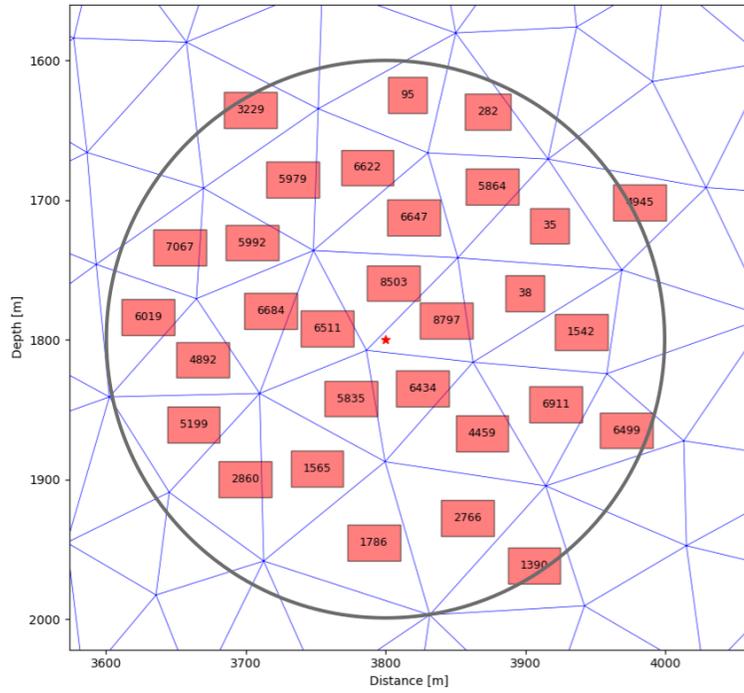


Figura 8. Localización espacial de la fuente puntual indicada por la estrella roja, la circunferencia limita la zona sobre la cual se extiende el soporte espacial.

## 5. RESULTADOS

Como resultado de este trabajo, se desarrolló un esquema GD de malla triangular no estructurada *hp*-adaptativo, para lo cual se tuvieron en cuenta los algoritmos desarrollados por Jan S. Hesthaven, Tim Warburton y colaboradores[14]. Por medio de este esquema desarrollado, fue posible la implementación de una fuente puntual para el estudio de la propagación de ondas sísmicas en el subsuelo, lo cual es fundamental para el desarrollo de investigaciones en el área de la geofísica y la sismología.

### 5.1. VALIDACIÓN DEL ESQUEMA

**5.1.1. Problema de lamb** Para la validación del esquema desarrollado se usó la solución analítica al problema de Lamb, algoritmo desarrollado por Per Berg y Flemming If[7, 2] del departamento de Física Matemática Aplicada de la Universidad Técnica de Dinamarca, cuyo algoritmo permite obtener la respuesta exacta 2D para una interfaz entre el vacío y un semi-espacio elástico para una fuente puntual. Este algoritmo permite obtener la respuesta a una fuente puntual aplicada sobre el campo  $u_z$ , esta respuesta es el valor de los campos de desplazamientos  $u_x$  y  $u_z$  sobre un punto dentro del dominio físico. Debido a que el programa retorna los campos de desplazamiento, es necesario derivar estos para obtener los campos de velocidades  $v_x$  y  $v_z$ .

El término para la fuente, según la ecuación (19), se expresa de la siguiente manera

$$\mathbf{s} = [0, 0, 0, 0, s_5]^T,$$

que, de acuerdo a la ecuación (60), se puede expresar

$$s_5(\mathbf{x}_s, t) = (J\mathcal{M})^{-1}(\mathcal{V}^T)^{-1}\psi(\mathbf{x}_s)s_5(t),$$

en donde el comportamiento de  $s_5(t)$  se puede observar en Fig. 9.

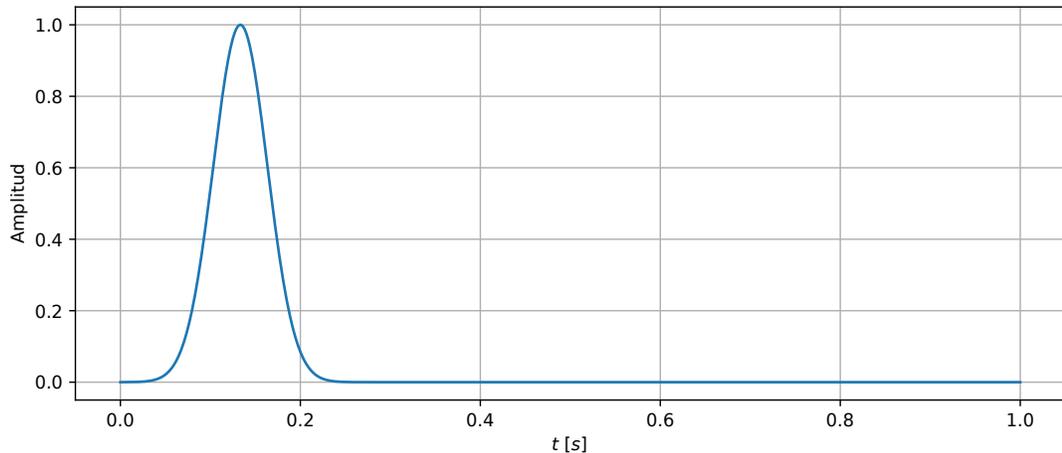


Figura 9. Evolución temporal de la fuente puntual tipo Gaussiana usada para el desarrollo de las pruebas.

Para el mallado, se generó una malla no estructurada bastante fina como se muestra en Fig (11). Esta malla fue generada con base a un modelo homogéneo del subsuelo y se siguieron las instrucciones mostradas en el Apéndice 1. La fuente se localizó sobre el centroide de uno de sus elementos como se muestra en Fig. 10, donde cuya localización es representada por una estrella amarilla (Imagen derecha).

Para generar los resultados, tanto analíticos como numéricos, fue usada la configuración que se muestra en la Tabla 3. Como resultado de la comparación, usando el esquema desarrollado, se puede observar en Fig. 12 que la solución muestra resultados favorables en comparación con los obtenidos de la solución analítica, esto usando polinomios de orden 4 dentro del elemento donde se encuentra localizada la fuente y polinomios de orden 3 en el resto de los elementos de la malla. Usando este orden de aproximación, se observó un buen comportamiento tanto de las fron-

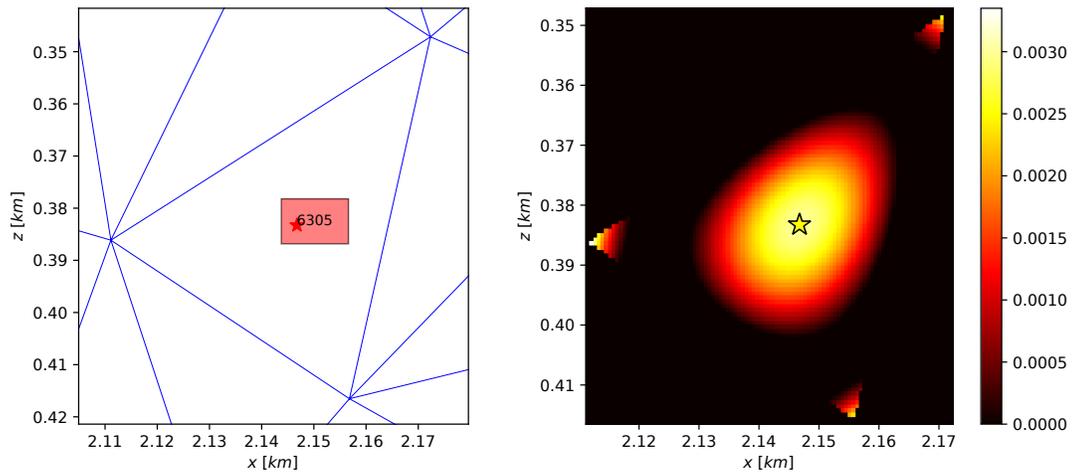


Figura 10. (Izquierda) Posición de la fuente puntual en el centroide de uno de los elementos de malla. (Derecha) Proyección del valor de la excitación inicial de la fuente sobre los puntos de soporte del elemento que la contiene, usando polinomios de orden 4.

Característica	Valor
Tiempo de simulación	1s
Tamaño del dominio	5600m × 3600m
$\alpha$	4000m/s
$\beta$	2306.67m/s
$\rho$	2465.34kg/m <sup>3</sup>
Frecuencia máxima	7.5Hz
Posición de la fuente	(2146.76m, 383.27m)
Posición del receptor	(3100m, 0.01m)

Tabla 3. Valores usados para validar el esquema numérico usando la solución analítica al problema de Lamb.

teras absorbentes como de la propagación del fenómeno simulado como se ilustra en Fig. 13. Con estas pruebas se puede decir que el esquema desarrollado queda validado y con lo que se concluye que tanto las fronteras absorbentes como la condición de frontera libre son consistentes para representar una solución numérica de la respuesta impulsional del sistema de modelado sísmico.

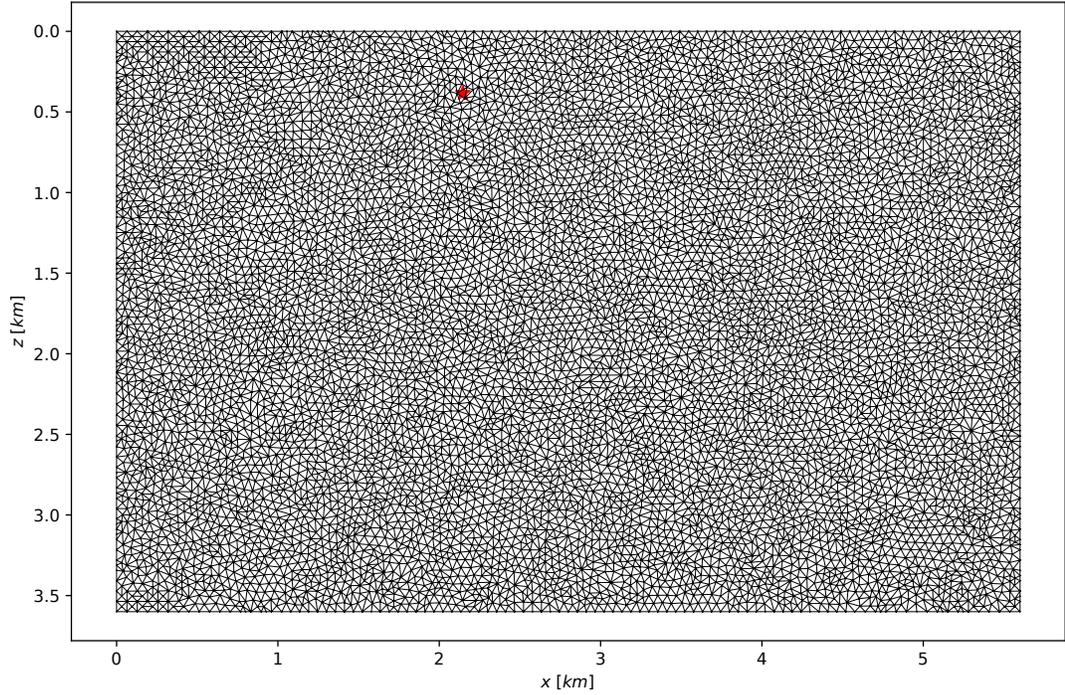


Figura 11. Malla no estructurada de 17230 elementos y 8794 vértices generada para la validación del esquema desarrollado.

**5.1.2. Capa sobre semiespacio** En la literatura existen distintos tipos de esquemas desarrollados por diferentes autores, que permiten hacer estudios de la propagación de ondas en el subsuelo, como por ejemplo, encontramos el esquema DGCrack, desarrollado por J. Tago y colaboradores usado para modelar la dinámica de un evento sísmico[34], del cual se usó una versión 2D (DGCrack2D) para comparar los resultados obtenidos usando el esquema desarrollado en este trabajo. Para estas pruebas se excitaron los esfuerzos  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{zz}$  para generar una fuente explosiva, cuya historia temporal se muestra en Fig. 14. Para este caso se tiene que la fuente está representada por  $\mathbf{s} = [s_1, s_2, 0, 0, 0]^T$ , en donde

$$\mathbf{s}_p(\mathbf{x}_s, t) = (\mathcal{J}\mathcal{M})^{-1}(\mathcal{V}^T)^{-1}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_s)s_p(t), \quad p = 1, 2.$$

Para estas pruebas se usó un modelo de dos capas planas cuyas características se

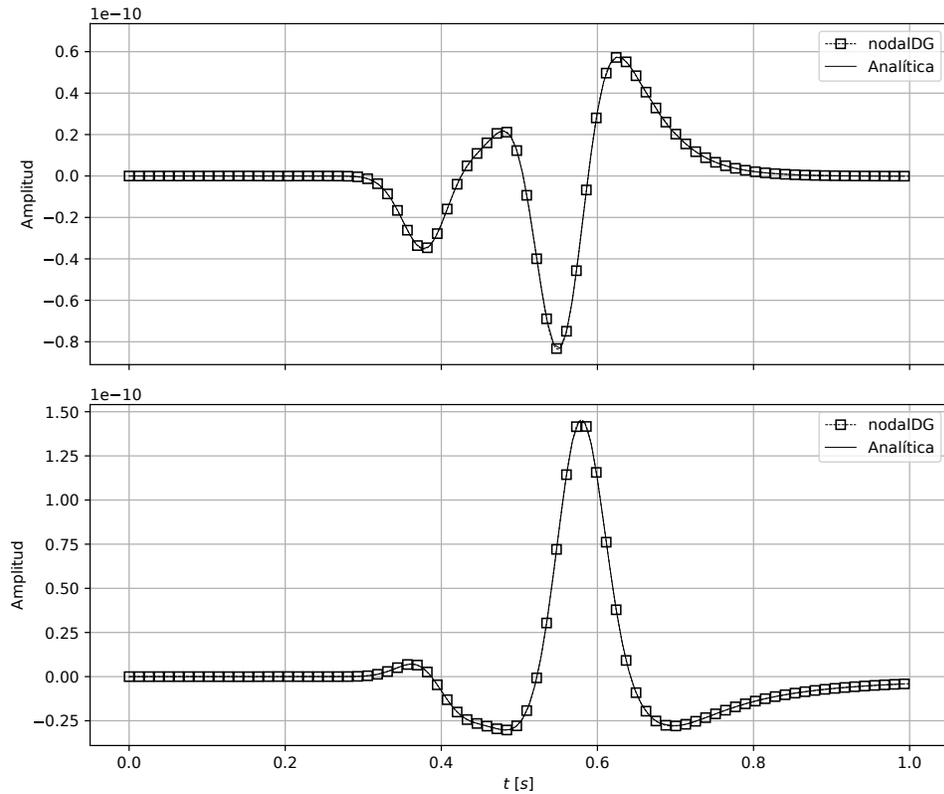


Figura 12. Comparación de sismogramas obtenido usando el esquema desarrollado con la solución analítica al problema de Lamb, usando un cuarto orden de aproximación dentro del elemento que contiene la fuente y tercer orden en el resto de los elementos. Campo de velocidad  $v_x$  (Arriba) y campo de velocidad  $v_z$  (Abajo).

pueden ver en Tabla 4.

Característica	Capa 1	Capa 2
Espesor	800m	—
$\alpha$	2200m/s	4000m/s
$\beta$	1268.67m/s	2306.67m/s
$\rho$	2123.08kg/m <sup>3</sup>	2465.34kg/m <sup>3</sup>

Tabla 4. Características usadas para la simulación sobre un medio de capa plana sobre un semiespacio. El dominio se extiende en una región que se extiende en un dominio de  $5600m \times 3600m$ .

El mallado se realizó teniendo en cuenta los cambios en las propiedades del medio,

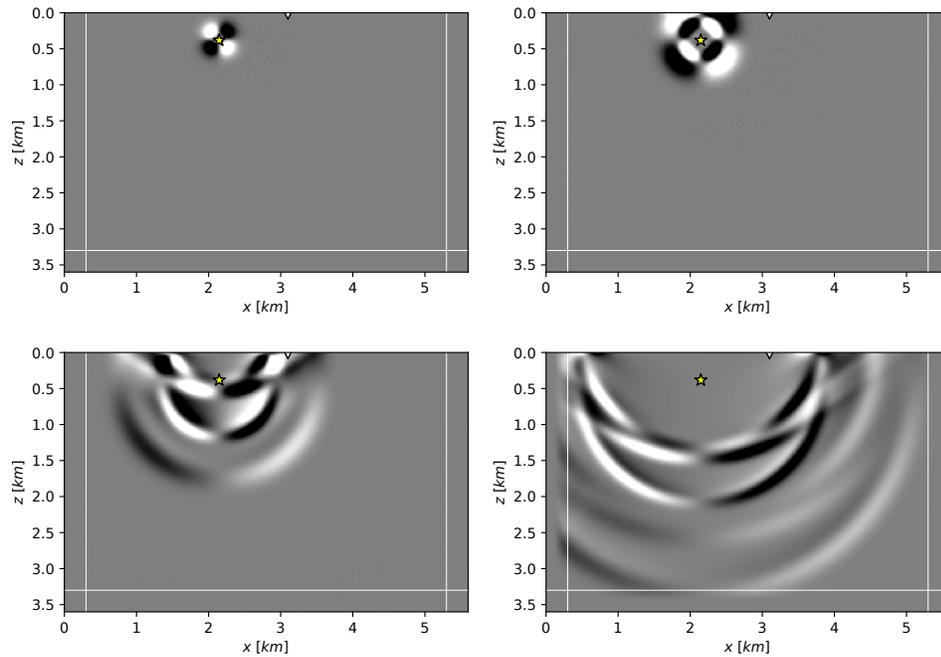


Figura 13. Capturas de pantalla de la componente  $x$  del campo de velocidades en un semiespacio homogéneo, al excitar la componente  $z$  del campo de velocidades en dirección  $z$  positivo. El semiespacio es simulado usando fronteras absorbentes en los bordes del dominio excepto en la superficie donde se tuvieron en cuenta condiciones de frontera libre.

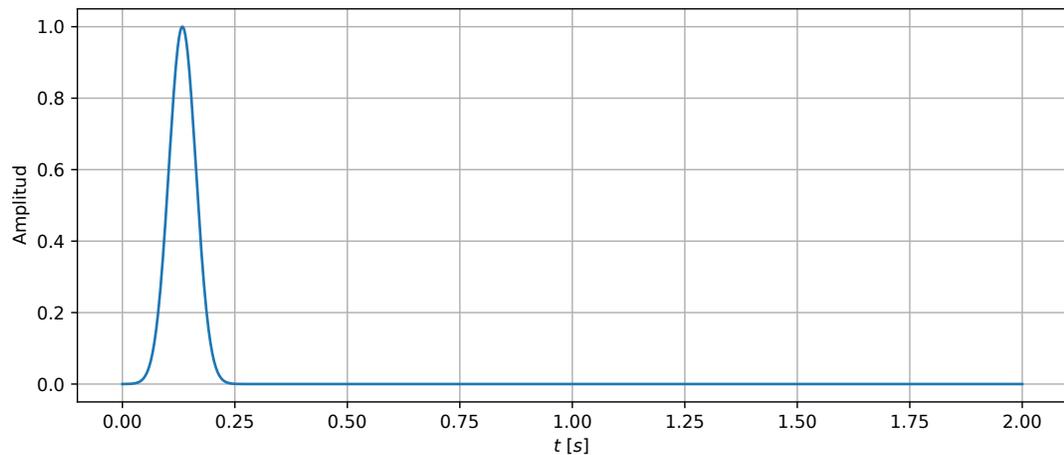


Figura 14. Historia temporal de la fuente usada para las pruebas desarrolladas sobre un modelo de capa sobre semiespacio.

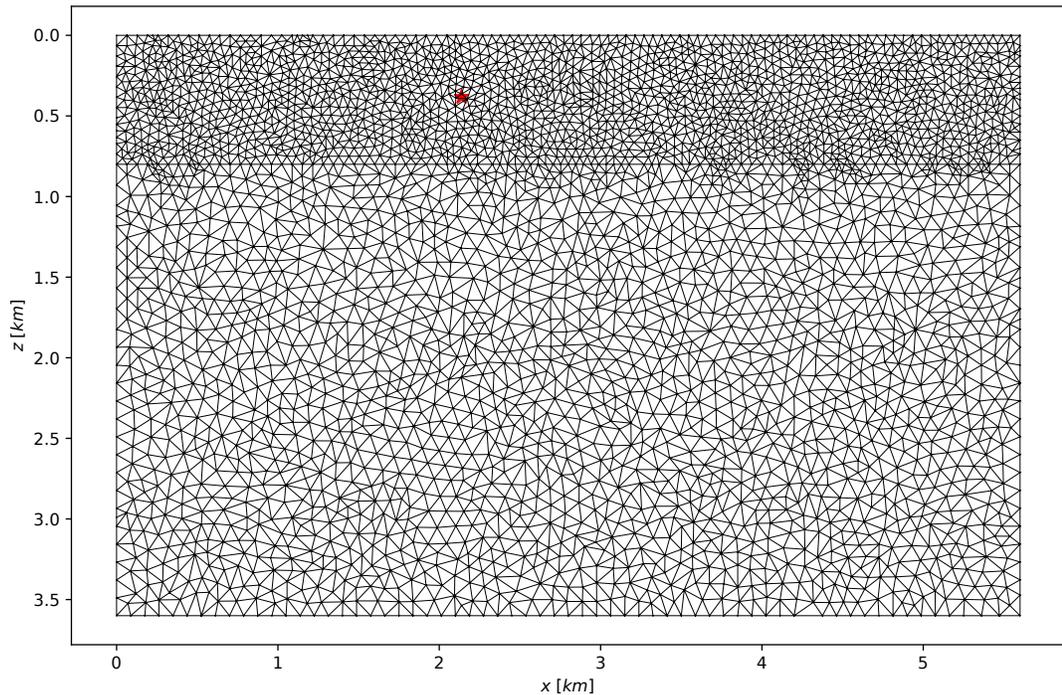


Figura 15. Mallado tipo no estructurado generado teniendo en cuenta las propiedades del medio. Se puede observar un mallado más fino en la zona en donde se presenta menor velocidad y mas grueso en la zona donde la velocidad es mayor.

en donde se realizo un mallado más grueso para el medio con mayor velocidad y un mallado más fino para el medio con menor velocidad (ver Fig. 15).

Nuevamente, la fuente se localizó en el centroide de uno de los elementos de la malla, localizada en estas pruebas en  $(2138.13m, 382.35m)$ , y se tuvieron en cuenta polinomios  $P_3$  y  $P_4$  dentro de dicho elemento como se puede observar en Fig. 16.

Se colocaron 3 receptores para medir la respuesta sísmica del medio a la fuente puntual, uno en la posición  $(3200.0m, 0.01m)$ , otro en  $(2500.0m, 1100.0m)$  y el último en la posición  $(3400.0m, 500.0m)$ . Como resultado se obtuvieron los sismogramas que se muestran en Fig. 17 en donde se puede observar que el esquema desarrollado se aproxima a los resultados obtenidos con el esquema DGCrack2D. En el registro obtenido en la parte (b) de esta misma imagen se puede observar una leve

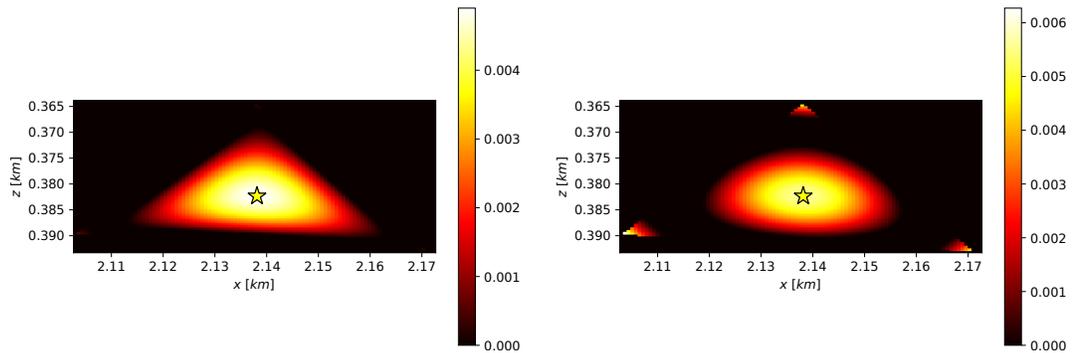


Figura 16. Proyección del valor de la excitación inicial de la fuente sobre los puntos de soporte del elemento que la contiene. (Izquierda) Usando polinomios de orden 3 y (Derecha) polinomios de orden 4.

dispersión la cual es mejorada haciendo una aproximación a un orden superior de los polinomios dentro de cada uno de los elementos que conforman la malla. Este resultado se muestra en Fig. 17 (máximo orden 3) y Fig. 18 (máximo orden 4), en donde se puede apreciar una mejora en los resultados obtenidos para los registros (b). Entre mayor sea el orden de aproximación, el esquema se aproximará con más precisión a el resultado ideal.

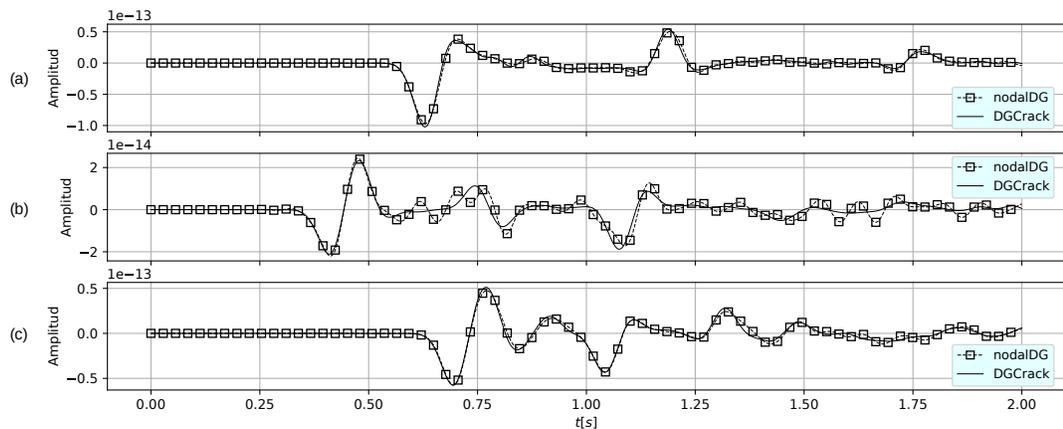


Figura 17. Comparación de sismogramas para 3 receptores ubicados dentro del dominio computacional, usando polinomios de orden 3 para el elemento que contiene la fuente y 2 para el resto de elementos. Los receptores se encuentran localizados en (a)  $(3200.0m, 0.01m)$ , (b)  $(2500.0m, 1100.0m)$ , y (c)  $(3400.0m, 500.0m)$ .

Visualmente también se puede observar un buen resultado de la propagación del

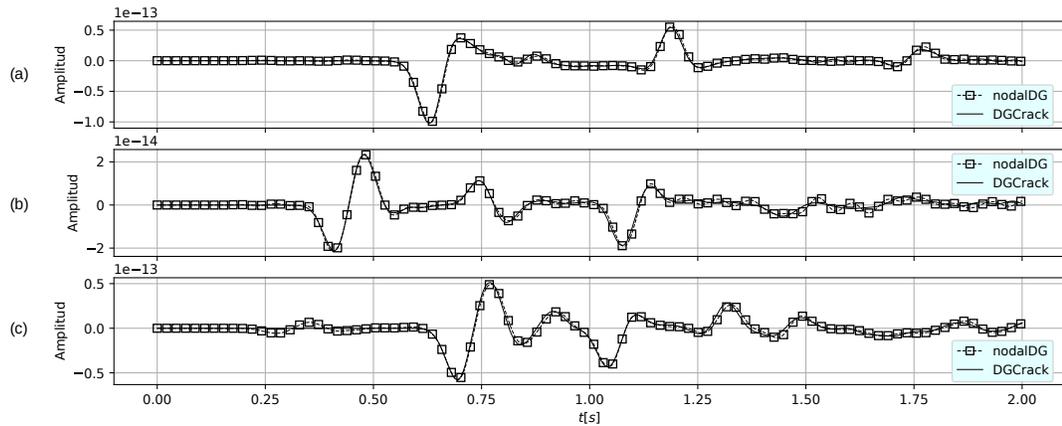


Figura 18. Comparación de sismogramas para 3 receptores ubicados dentro del dominio computacional, usando polinomios de orden 4 para el elemento que contiene la fuente y 3 para el resto de elementos. Los receptores se encuentran localizados en (a)  $(3200.0m, 0.01m)$ , (b)  $(2500.0m, 1100.0m)$ , y (c)  $(3400.0m, 500.0m)$ .

campo de onda  $v_x$  como se observa en Fig. 19 en donde se pueden apreciar ondas  $P$ , ondas  $S$ , ondas reflejadas y ondas difractadas. Además, se observa el trabajo hecho por las fronteras absorbentes al disipar parte del campo en la frontera, permitiendo la generación de sismogramas con poco efecto producto de las ondas reflejadas por los bordes del dominio computacional.

## 5.2. POSICIONAMIENTO DE LA FUENTE DENTRO DE UN ELEMENTO

Ya teniendo validado el esquema desarrollado el siguiente paso es llevar a cabo pruebas con diferentes configuraciones para la localización de la fuente dentro de uno de los elementos de malla. Las configuraciones tenidas en cuenta fueron,

- Fuente localizada en el centroide del elemento.
- Fuente localizada cerca de uno de los vértices del elemento.
- Fuente localizada en uno de los vértices del elemento.
- Fuente localizada en la interfaz entre dos elementos.

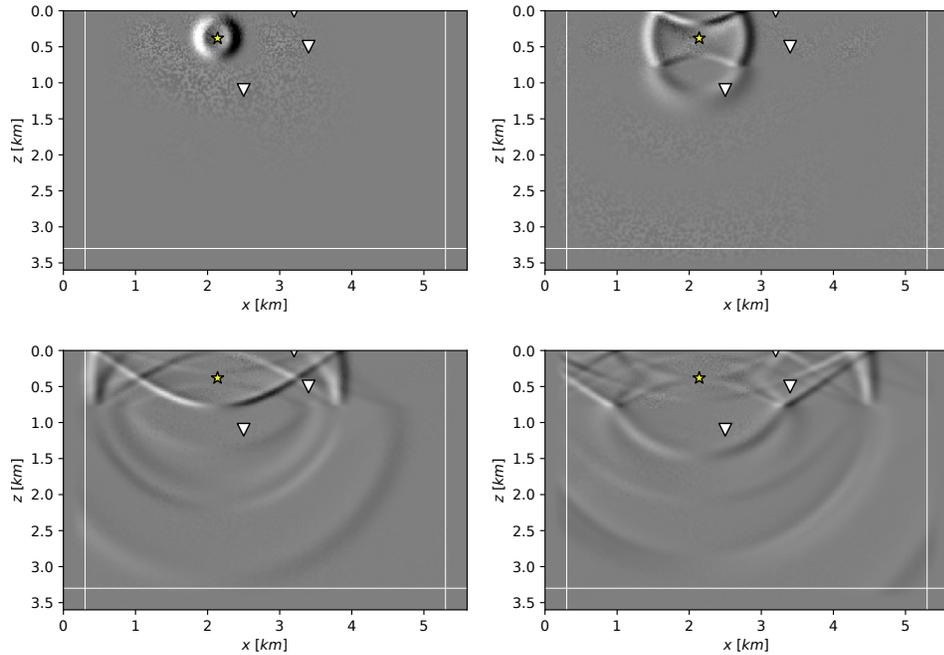


Figura 19. Capturas de pantalla de la componente  $x$  del campo de velocidades, en donde se muestra la localización de la fuente (estrella) y de los receptores (triángulos). Se usaron polinomios interpolantes de cuarto orden dentro del elemento que contiene la fuente y de tercer orden en el resto de los elementos.

Para este conjunto de pruebas se usó un valor de  $\sigma = 0$  (parámetro que define el tamaño del soporte espacial) y se registraron tres sismogramas ubicados como se muestra en la Tabla 5 (La misma configuración de los resultados anteriores).

Receptor	Posición $(x, z)[m]$
1	(3200, 0.01)
2	(2500, 1100.0)
3	(3400, 500.0)

Tabla 5. Posición de los receptores para las pruebas realizadas.

A continuación se muestra la configuración y los resultados obtenidos en cada una de las pruebas llevadas a cabo, usando los mismos parámetros usados para obtener los resultados anteriores.

**5.2.1. Fuente localizada en el centroide del elemento** Para esta prueba la posición exacta de la fuente fue  $(2138.13m, 382.35m)$ , cuyos resultados son los mismo mostrados en Fig. 18.

**5.2.2. Fuente localizada cerca de uno de los vértices del elemento** Para esta prueba se localizó la fuente cerca de uno de los vértices del triángulo, en la posición  $(2160.0m, 390.0m)$  como se muestra en Fig. 20.

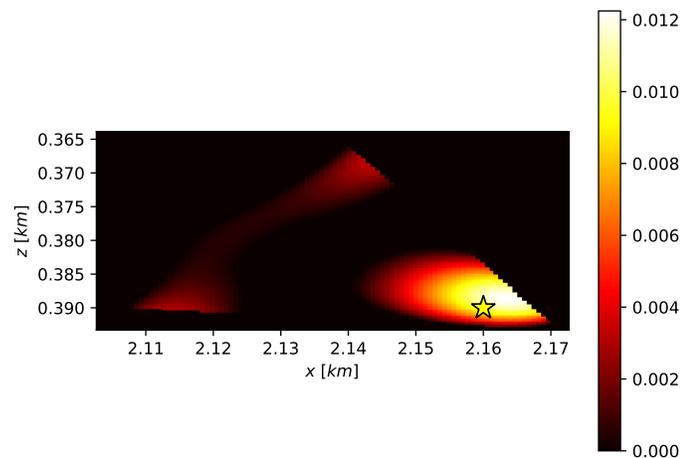


Figura 20. Proyección del valor de la excitación inicial de la fuente sobre los puntos de soporte del elemento que la contiene, usando polinomio de orden 4.

Como resultado se obtuvieron los sismogramas que se muestran en Fig. 21, en donde se muestra un buen comportamiento de la respuesta sísmica en comparación con los resultados obtenidos usando el esquema DGCrack2D.

**5.2.3. Fuente localizada en uno de los vértices del elemento** Para esta prueba se localizó la fuente sobre uno de los vértices del triángulo, en la posición  $(2100.68m, 439.45m)$  como se muestra en Fig. 22. Para este caso se observa que no es clara la localización de la fuente, de donde se deduce que ubicar la fuente sobre uno de los

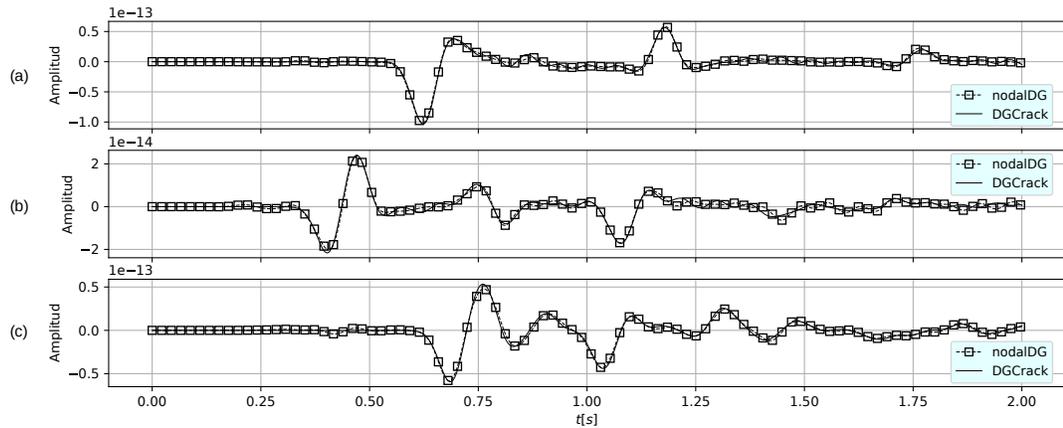


Figura 21. Comparación de sismogramas para 3 receptores ubicados dentro del dominio computacional, usando polinomios de orden 4 dentro del elemento que contiene la fuente y orden 3 en el resto de elementos. Los receptores se encuentran localizados en (a)  $(3200.0m, 0.01m)$ , (b)  $(2500.0m, 1100.0m)$ , y (c)  $(3400.0m, 500.0m)$ .

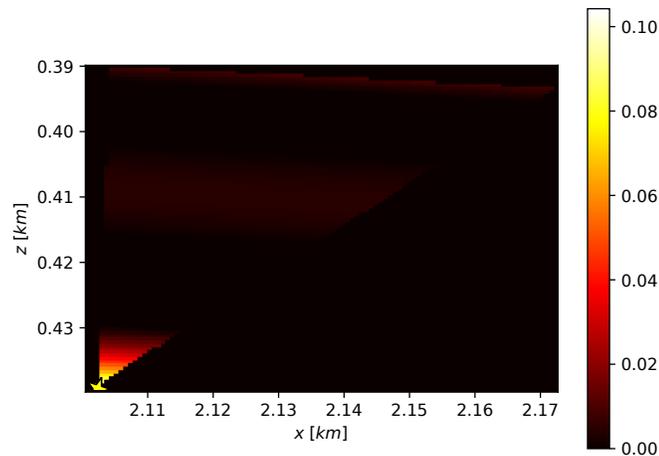


Figura 22. Proyección del valor de la excitación inicial de la fuente sobre los puntos de soporte del elemento que la contiene, usando polinomio de orden 4.

vértices no es buena idea.

Como resultado se obtuvieron los sismogramas que se muestran en Fig. 23, en donde se muestra un mal comportamiento de la respuesta sísmica, al menos pa-

ra el segundo sismograma, en comparación con los resultados obtenidos usando el esquema DGCrack2D, se puede apreciar mayor dispersión numérica en dichos resultados.

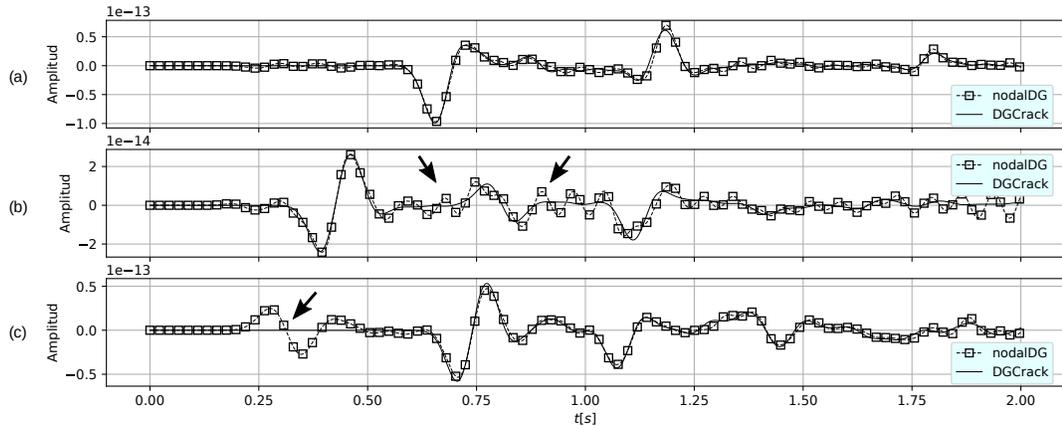


Figura 23. Comparación de sismogramas para 3 receptores ubicados dentro del dominio computacional, usando polinomios de orden 4 dentro del elemento que contiene la fuente y 3 en el resto de elementos. Las flechas indican las zonas en donde hay más presencia de dispersión numérica. Los receptores se encuentran localizados en (a)  $(3200.0m, 0.01m)$ , (b)  $(2500.0m, 1100.0m)$ , y (c)  $(3400.0m, 500.0m)$ .

**5.2.4. Fuente localizada en la interfaz entre dos elementos** Para esta prueba se localizó la fuente sobre la interfaz entre dos elementos de malla, en la posición  $(2127.39m, 391.05m)$  como se muestra en Fig. 24. Para este caso no se distingue muy bien el soporte espacial de la fuente dentro del elemento, de aquí se deduce que ubicar la fuente entre la interfaz de dos elementos de malla no es la mejor configuración para obtener resultados confiables.

Como resultado se obtuvieron los sismogramas que se muestran en Fig. 25, en donde se muestra un mal comportamiento de la respuesta sísmica en comparación con los resultados obtenidos usando el esquema DGCrack2D, por lo menos en el tercer registro se puede apreciar dispersión numérica en dichos resultados.

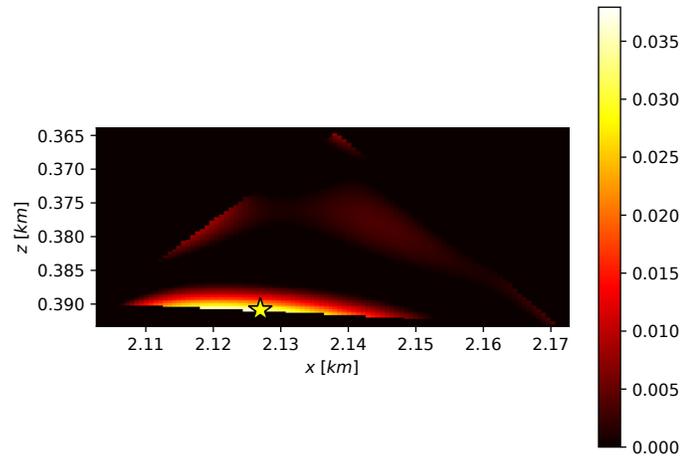


Figura 24. Proyección del valor de la excitación inicial de la fuente sobre los puntos de soporte del elemento que la contiene, usando polinomio de orden 4.

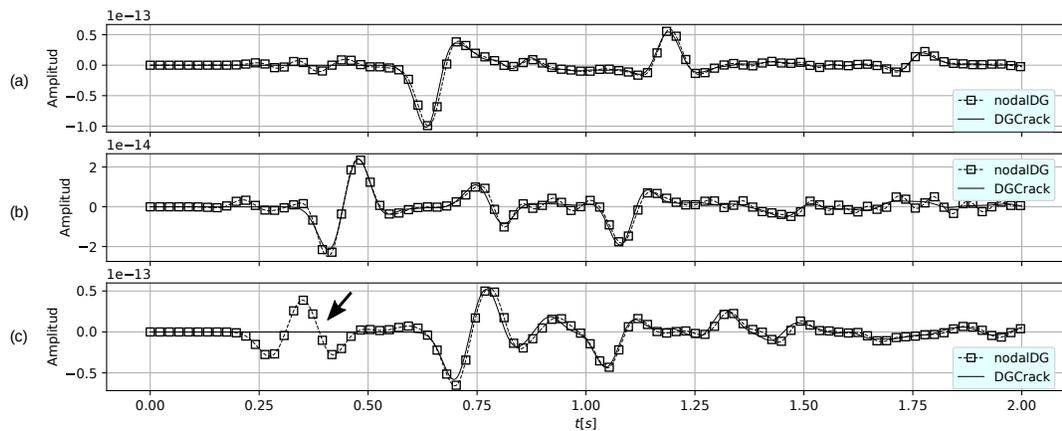


Figura 25. Comparación de sismogramas para 3 receptores ubicados dentro del dominio computacional, usando polinomios de orden 4 dentro del elemento que contiene la fuente y orden 3 en el resto de los elementos. La flecha indica la zona en donde hay más presencia de dispersión numérica. Los receptores se encuentran localizados en (a)  $(3200.0m, 0.01m)$ , (b)  $(2500.0m, 1100.0m)$ , y (c)  $(3400.0m, 500.0m)$ .

### 5.3. IMPLEMENTACIÓN DE UN SOPORTE ESPACIAL GAUSSIANO

De las pruebas anteriores se puede deducir que a medida que la posición de la fuente se aproxima a uno de los bordes del elemento que la contiene, se deteriora

la imagen obtenida del campo de onda, esto se puede observar en Fig. 26. Para

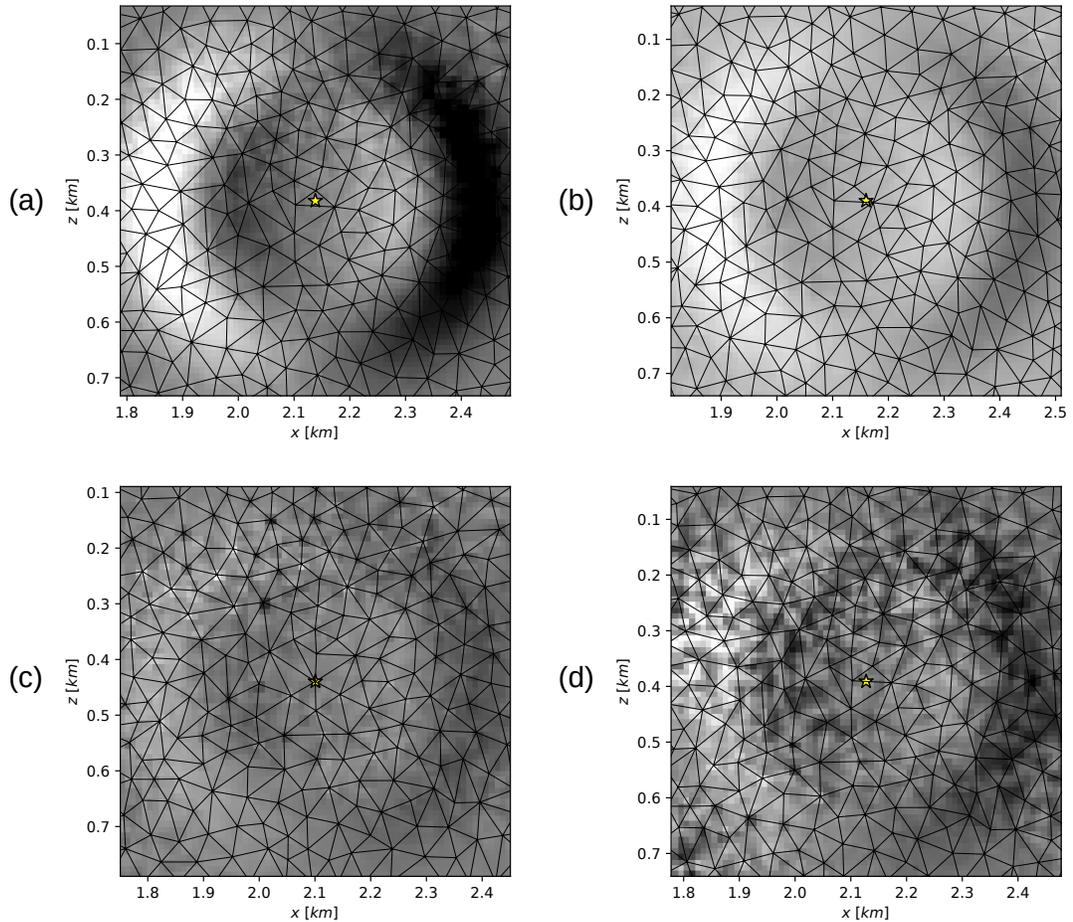


Figura 26. Capturas de pantalla del campo de onda en cercanías al punto en donde se encuentra localizada la fuente puntual, sin soporte espacial. (a) Fuente localizada en el centroide del elemento, (b) cerca de uno de los vértices, (c) sobre uno de los vértices y (d) en la interfaz entre dos elementos.

corregir este problema se construye un soporte espacial Gaussiano que está conformado por varios elementos de la malla. La configuración que se escogió fue la misma que se tuvo en cuenta para la fuente sobre uno de los vértices del elemento, pero para este caso con un valor de  $\sigma = 30m$ . Con este valor, el soporte espacial se esparce sobre 7 elementos como se muestra en Fig. 27.

Como resultado se puede ver en Fig. 28, en comparación con la figura (c) en Fig. 26,

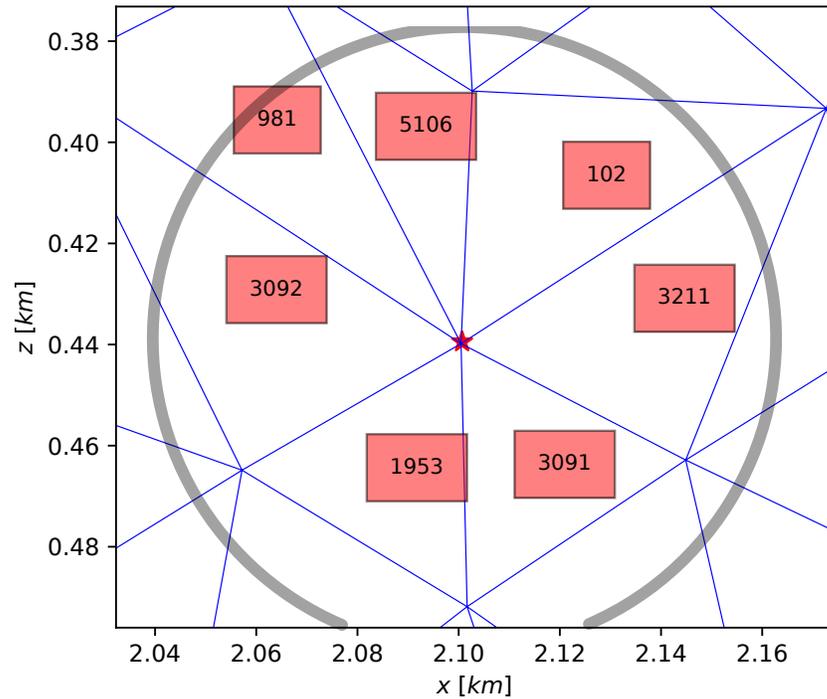


Figura 27. Elementos que contiene el soporte espacial dentro de un área definida por un círculo de radio igual a  $2\sigma$ .

una mejora bastante evidente en la forma del campo de onda. El soporte espacial permite suavizar la solución y extender el valor de la fuente a elementos vecinos, evitando que una mala posición de la fuente se traduzca en unos malos resultados de la respuesta sísmica. Se puede observar también el resultado obtenido de los sismogramas registrados por los receptores en Fig. 29, el donde se puede ver un resultado más suave y muy similar al obtenido usando el esquema DGCrack2D.

De igual manera, para el caso en que la fuente se encuentra localizada entre la interfaz de dos elementos, se implementa un soporte espacial con  $\sigma = 30m$ , que en este caso se esparce en 9 elementos de la malla como se muestra en Fig. 30. El resultado de la visualización del campo de onda se puede apreciar en Fig. 31 en donde se observa el frente de onda al rededor del punto de localización de la fuente sin problemas de dispersión numérica.

Por último, el resultado de la comparación de el sismograma generado usando esta

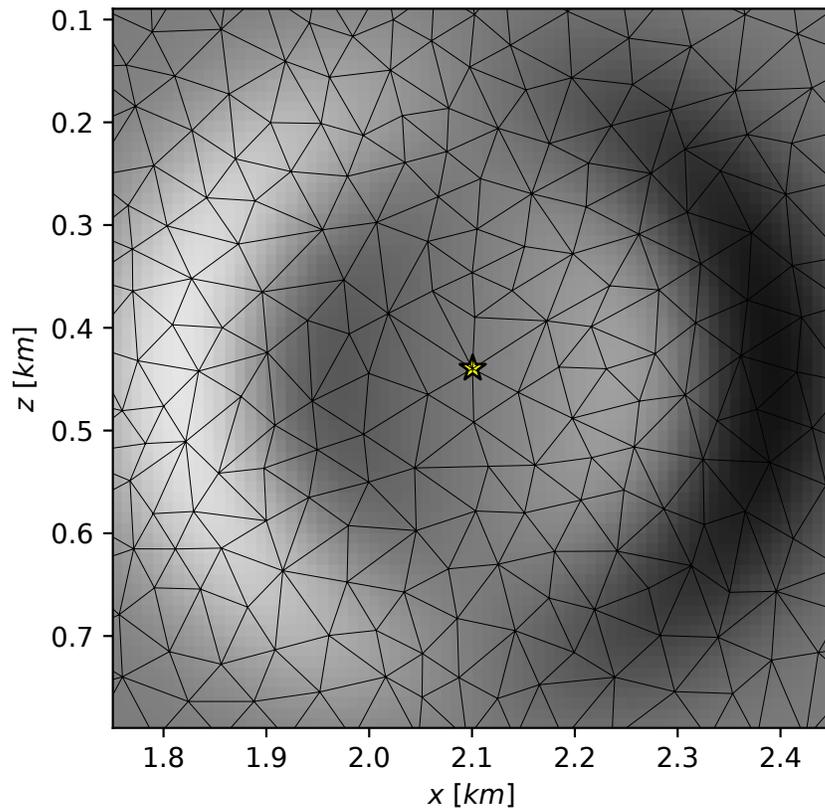


Figura 28. Captura de pantalla de la componente  $x$  del campo de velocidades en la vecindad del punto donde se encuentra localizada la fuente.

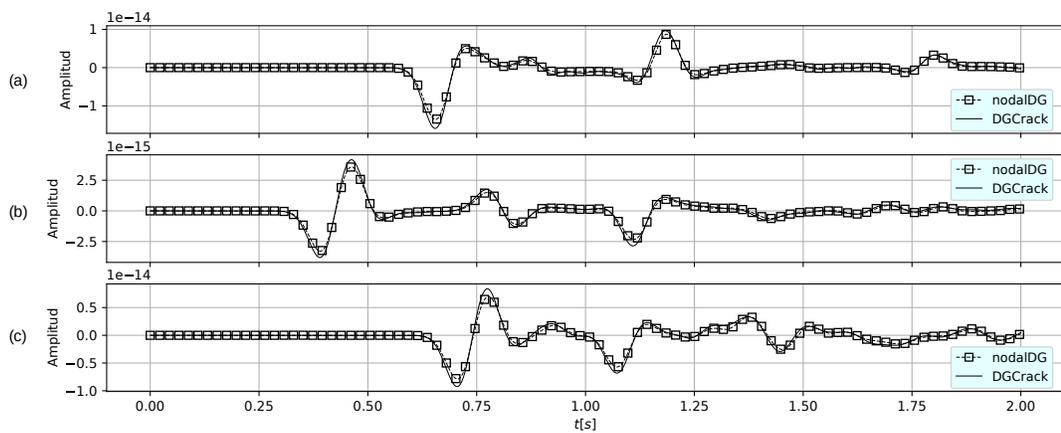


Figura 29. Comparación de sismogramas obtenidos por medio del esquema desarrollado, para fuente ubicada sobre uno de los vértices del elemento que la contiene, con los resultados obtenidos usando el esquema DGCrack2D.

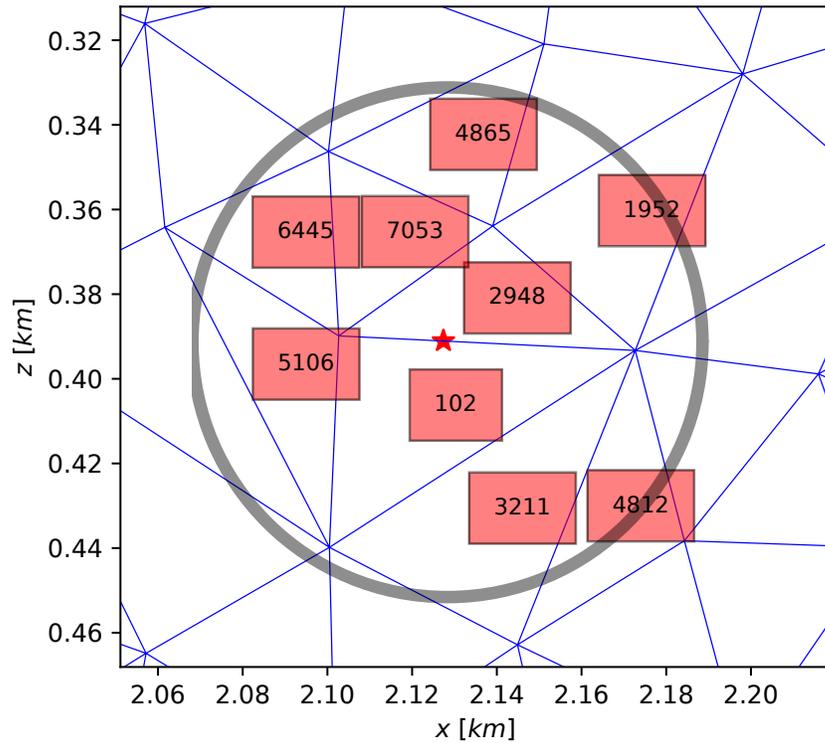


Figura 30. Elementos que contiene el soporte espacial dentro de un área definida por un círculo de radio igual a  $2\sigma$ .

configuración se puede observar en Fig. 32, en donde se aprecia la similitud entre ambos resultados, usando el esquema desarrollado y el esquema DGCrack2D. Para este también se puede decir la implementación de un soporte espacial es útil para obtener un buen resultado de la respuesta sísmica como se observa en Fig. 33.

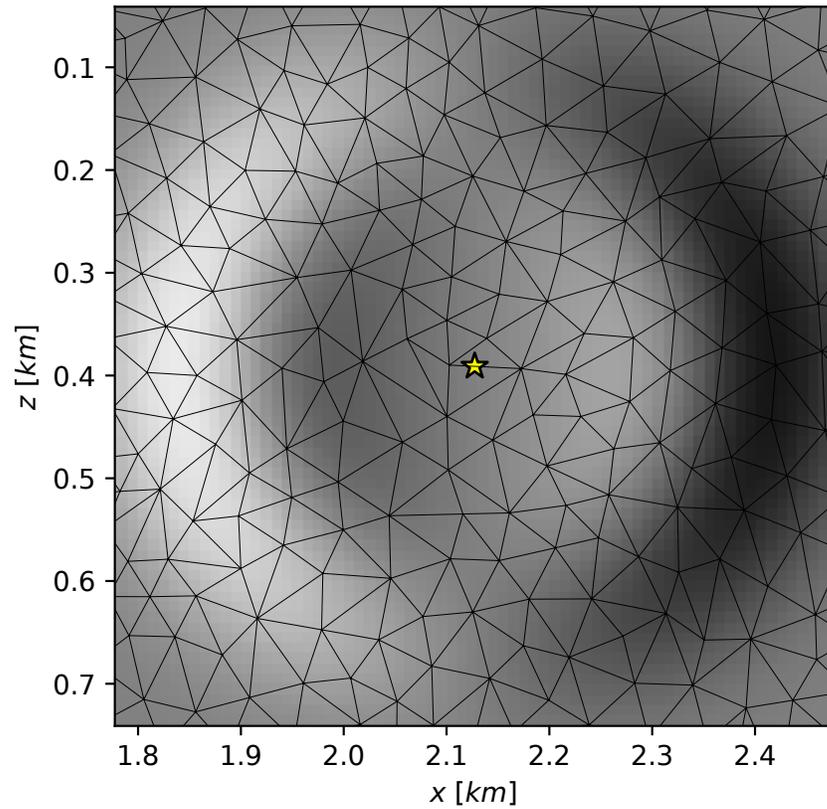


Figura 31. Captura de pantalla de la componente  $x$  del campo de velocidades en la vecindad del punto donde se encuentra localizada la fuente.

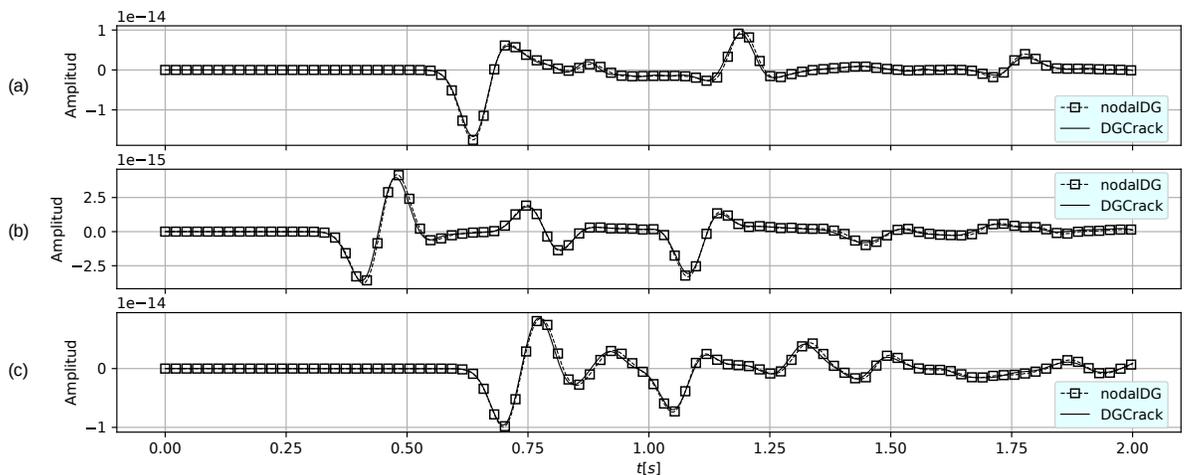


Figura 32. Comparación de sismogramas obtenidos por medio del esquema desarrollado, para fuente ubicada sobre la interfaz entre dos elementos, con los resultados obtenidos usando el esquema DGCrack2D. Soporte espacial  $\sigma = 30m$

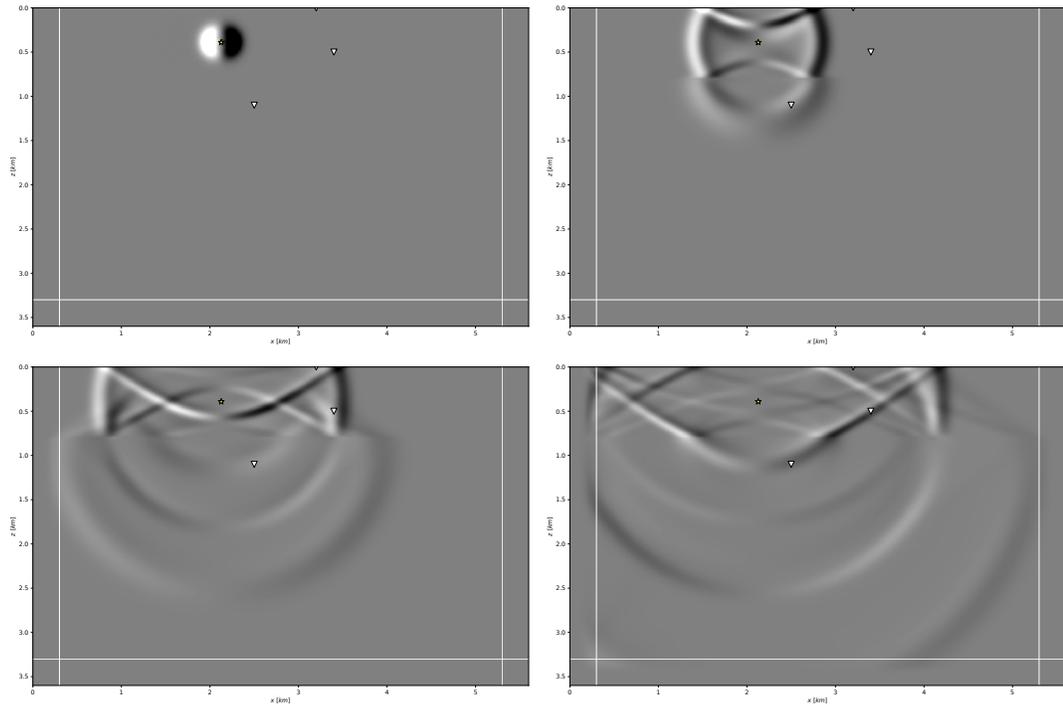


Figura 33. Capturas de pantalla de la componente  $x$  del campo de velocidades usando una fuente puntual con soporte espacial Gaussiano. La fuente es implementada excitando las componentes diagonales del tensor de esfuerzos. La estrella indica la localización de la fuente y los triángulos la localización de los receptores.

## 6. CONCLUSIONES

Se desarrolló un esquema de modelado de onda elástica GD *hp*-adaptativo de malla tipo conforme y no estructurada de elementos triangulares, sobre el cual se implementaron condiciones de frontera absorbente y condiciones de frontera de superficie libre. El esquema fue desarrollado usando Python como herramienta computacional. Se llevaron a cabo pruebas para validar el esquema desarrollado las cuales mostraron resultados positivos. La solución usando el esquema desarrollado converge tanto al resultado analítico como a los resultados obtenidos con el esquema DG-Crack2D.

Se logró la implementación de la *hp*-adaptatividad, por lo que se hizo uso de mallas no estructuradas con variaciones del tamaño de los elementos dentro de los cuales se implementaron distintos ordenes de aproximación con lo que se observaron mejores resultados.

Se obtuvieron resultados con diferentes posiciones de la fuente y se observó que cuando la posición coincide con uno de los vértices del triangulo la solución se distorsiona generándose eventos falsos. Lo mismo ocurría cuando la posición de la fuente se encontraba entre la interfaz de dos elementos. Para estos casos se observaron mejoras en la solución al implementar un soporte espacial Gaussiano. Se concluye que un soporte espacial gaussiano corrige los problemas de dispersión numérica que surgen a raíz de una "mala ubicación" de la fuente con respecto a un elemento de malla. Se sugiere que por lo menos el soporte espacial contenga los puntos de soporte de los primeros vecinos del elemento que contenía la fuente.

Para finalizar, basado en los resultados obtenidos, se recomienda el uso de dicho esquema para encontrar la solución en problemas relacionados con geofísica y sismología. Para trabajos futuros, este esquema puede ser usado para el desarrollo de un esquema 3D, en donde se pueda implementar nuevos modelos considerando

por ejemplo, la influencia de la porosidad en los sistemas rocosos y el comportamiento anisótropo del subsuelo para un estudio mucho más detallado del fenómeno ondulatorio en medios con mayor complejidad.

## BIBLIOGRAFÍA

- 1 Paola F Antonietti y col. “Stability analysis of discontinuous Galerkin approximations to the elastodynamics problem”. En: *Journal of Scientific Computing* 68.1 (2016), págs. 143-170.
- 2 P Berg y col. “Analytical reference solutions”. En: *Modeling the earth for oil exploration* (1994), págs. 421-427.
- 3 Daniele Cavaglieri y Thomas Bewley. “Low-storage implicit/explicit Runge–Kutta schemes for the simulation of stiff high-dimensional ODE systems”. En: *Journal of Computational Physics* 286 (2015), págs. 172-193.
- 4 Charles Cerjan y col. “A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations”. En: *Geophysics* 50.4 (1985), págs. 705-708.
- 5 RCY Chin, Gerald Hedstrom y Lewis Thigpen. “Numerical methods in seismology”. En: *Journal of computational physics* 54.1 (1984), págs. 18-56.
- 6 O Coutant, J Virieux y A Zollo. “Numerical source implementation in a 2D finite difference scheme for wave propagation”. En: *Bulletin of the Seismological Society of America* 85.5 (1995), págs. 1507-1512.
- 7 AT De Hoop. “A modification of Cagniard’s method for solving seismic pulse problems”. En: *Applied Scientific Research, Section B* 8.1 (1960), págs. 349-356.
- 8 Sarah Delcourte, Loula Fezoui y Nathalie Glinsky-Olivier. “A high-order discontinuous Galerkin method for the seismic wave propagation”. En: *ESAIM: Proceedings*. Vol. 27. EDP Sciences. 2009, págs. 70-89.

- 9 Gouri Dhatt, Emmanuel Lefrançois, Gilbert Touzot y col. *Finite element method*. John Wiley & Sons, 2012.
- 10 Michael Dumbser y Martin Käser. “An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes—II. The three-dimensional isotropic case”. En: *Geophysical Journal International* 167.1 (2006), págs. 319-336.
- 11 V Etienne y col. “An hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3-D elastic wave modelling”. En: *Geophysical Journal International* 183.2 (2010), págs. 941-962.
- 12 Martin Fuhry, Andrew Giuliani y Lilia Krivodonova. “Discontinuous Galerkin methods on graphics processing units for nonlinear hyperbolic conservation laws”. En: *CoRR* abs/1601.07944 (2016). arXiv: [1601.07944](https://arxiv.org/abs/1601.07944). URL: <http://arxiv.org/abs/1601.07944>.
- 13 Sjoerd Geevers. “Space-Time Discontinuous Galerkin Methods for the Elastic Wave Equations”. Tesis de maestría. University of Twente, 2014.
- 14 Jan S Hesthaven y Tim Warburton. *Nodal discontinuous Galerkin methods: algorithms, analysis, and applications*. Springer Science & Business Media, 2007.
- 15 Graham J Hicks. “Arbitrary source and receiver positioning in finite-difference schemes using Kaiser windowed sinc functions”. En: *Geophysics* 67.1 (2002), págs. 156-165.
- 16 *The JSON Data Interchange Format*. Inf. téc. Standard ECMA-404 1st Edition / October 2013. ECMA, oct. de 2013. URL: <http://www.ecma-international.org/publications/files/ECMA-ST/ECMA-404.pdf>.

- 17 Martin Käser y Michael Dumbser. “A highly accurate discontinuous Galerkin method for complex interfaces between solids and moving fluids”. En: *Geophysics* 73.3 (2008), T23-T35.
- 18 Martin Käser y Michael Dumbser. “An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes—I. The two-dimensional isotropic case with external source terms”. En: *Geophysical Journal International* 166.2 (2006), págs. 855-877.
- 19 Steven Knight. “Building Software with SCons”. En: *Computing in Science and Engg.* 7.1 (ene. de 2005), págs. 79-88. ISSN: 1521-9615. DOI: [10.1109/MCSE.2005.11](https://doi.org/10.1109/MCSE.2005.11). URL: <http://dx.doi.org/10.1109/MCSE.2005.11>.
- 20 Dimitri Komatitsch y Jean-Pierre Vilotte. “The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures”. En: *Bulletin of the seismological society of America* 88.2 (1998), págs. 368-392.
- 21 Dan Kosloff y col. “Numerical solution of the acoustic and elastic wave equations by a new rapid expansion method”. En: *Geophysical Prospecting* 37.4 (1989), págs. 383-394.
- 22 Ethan J Kubatko y col. “Dynamic p-adaptive Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for the shallow water equations”. En: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198.21-26 (2009), págs. 1766-1774.
- 23 Randall J LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Vol. 31. Cambridge university press, 2002.

- 24 Randall J LeVeque, David L George y Marsha J Berger. "Tsunami modelling with adaptively refined finite volume methods". En: *Acta Numerica* 20 (2011), págs. 211-289.
- 25 R Madariaga. "Seismic source theory". En: (2007).
- 26 Peter Moczo y col. "The finite-difference and finite-element modeling of seismic wave propagation and earthquake motion". En: *Acta physica slovacica* 57.2 (2007).
- 27 WH Reed y TR Hill. "Triangular mesh methods for the neutron transport equation". En: *Los Alamos Report LA-UR-73-479* (1973).
- 28 Peter M Shearer. *Introduction to seismology*. Cambridge University Press, 2009.
- 29 Jonathan Richard Shewchuk. "Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator". En: *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering*. Ed. por Ming C. Lin y Dinesh Manocha. Vol. 1148. Lecture Notes in Computer Science. From the First ACM Workshop on Applied Computational Geometry. Springer-Verlag, mayo de 1996, págs. 203-222.
- 30 Chi-Wang Shu. "Discontinuous Galerkin methods: general approach and stability". En: *Numerical solutions of partial differential equations* 201 (2009).
- 31 Gordon D Smith. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*. Oxford university press, 1985.
- 32 John W Stockwell Jr. "The CWP/SU: Seismic Unix package1, 11". En: *Computers & Geosciences* 25.4 (1999), págs. 415-419.

- 33 Josué Tago. "Version 2D del esquema numérico DGCrack: Algoritmo facilitado por el profesor J. Tago". En: (2012).
- 34 Josué Tago y col. "A 3D hp-adaptive discontinuous Galerkin method for modeling earthquake dynamics". En: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 117.B9 (2012).
- 35 Jean Virieux. "P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method". En: *Geophysics* 51.4 (1986), págs. 889-901.
- 36 Jean Virieux y col. *Modelling seismic wave propagation for geophysical imaging*. Intech, 2016.
- 37 JH Williamson. "Low-storage runge-kutta schemes". En: *Journal of Computational Physics* 35.1 (1980), págs. 48-56.

## ANEXOS

### Anexo A. Mallado

Para el mallado se hizo uso de la herramienta triangles[29] para la generación del mallado, asistido por un algoritmo desarrollado en C++ que de manera iterativa genera el mallado de modelos de capas a partir de parámetros definidos en archivos con formato JSON[16],

---

```
{
  "xmax": 5600,
  "ymax": 3600,
  "nx": 5600,
  "nz": 3600,
  "dx": 1.0,
  "dz": 1.0,
  "velocity": [2200, 4000],
  "data": [
    {
      "x": [0, 5600],
      "z": [0, 0]
    },
    {
      "x": [0, 5600],
      "z": [510, 510]
    },
    {
      "x": [0, 5600],
      "z": [3600, 3600]
    }
  ]
}
```

---

donde  $x_{max}$  es el valor máximo en la dirección  $x$  del dominio,  $y_{max}$  el valor máximo en la dirección  $y$  del dominio,  $n_x$  el número de datos del modelo en la dimensión  $x$ ,  $n_z$  el número de datos en la dirección  $z$ ,  $dx$  y  $dz$  son los valores del tamaño del

muestreo en las respectivas direcciones  $x$  y  $z$ , `velocity` es una lista de valores de velocidades acorde con el número de capas y `data` es otra lista que cada item contiene dos listas  $x$  y  $z$  que contienen los valores de los puntos que definen las capas del modelo. Además de estos parámetros, otros parámetros son definidos en un archivo `SConstruct`[19], el cual contiene el flujo principal de comandos que realizan el trabajo completo de la generación del mallado a partir de modelos rectangulares de datos binarios generados usando la herramienta `Seismic Unix`[32].

A continuación se muestran algunos ejemplos de mallas obtenidas con distintas configuraciones del archivo JSON. Un primer ejemplo consta de un modelo de dos capas planas generado usando el siguiente archivo

---

```
{
  "xmax": 5600,
  "zmax": 3600,
  "nx": 5600,
  "nz": 3600,
  "dx": 1.0,
  "dz": 1.0,
  "velocity": [2200, 4000],
  "data": [
    {
      "x": [0, 5600],
      "z": [0, 0]
    },
    {
      "x": [0, 5600],
      "z": [1500, 1500]
    },
    {
      "x": [0, 5600],
      "z": [3600, 3600]
    }
  ]
}
```

---

donde la primera capa tiene una velocidad de onda  $P$  de  $2200m/s$  y se extiende

hasta una profundidad de  $1500m$  y la segunda capa, con una velocidad de  $4000m/s$ , cubre el resto del dominio como se muestra en Fig. (34).

Un segundo ejemplo es un modelo de tres capas generado con el siguiente archivo

---

```
{
  "xmax": 5600,
  "zmax": 3600,
  "nx": 5600,
  "nz": 3600,
  "dx": 1.0,
  "dz": 1.0,
  "velocity": [2200, 4000, 6000],
  "data": [
    {
      "x": [0, 5600],
      "z": [0, 0]
    },
    {
      "x": [0, 5600],
      "z": [1000, 1500]
    },
    {
      "x": [0, 5600],
      "z": [2500, 2500]
    },
    {
      "x": [0, 5600],
      "z": [3600, 3600]
    }
  ]
}
```

---

la primera de ellas, con una velocidad de  $2200m/s$ , tiene una inclinación con respecto a las otras dos capas como se muestra en Fig. (35). La segunda y la tercera capa tienen velocidades de  $4000m/s$  y  $6000m/s$  respectivamente.

Un ultimo ejemplo es un modelo un poco mas complejo, generado con el siguiente archivo

---

```

{
  "xmax": 5600,
  "zmax": 3600,
  "nx": 5600,
  "nz": 3600,
  "dx": 1.0,
  "dz": 1.0,
  "velocity": [2200, 4000, 6000],
  "data": [
    {
      "x": [0, 5600],
      "z": [0, 0]
    },
    {
      "x": [0, 417, 885, 1085, 1297, 1502, 1708, 2410, 2553, 2700, 2800, 2900,
3047, 3190, 3892, 4098, 4303, 4515, 4715, 5183, 5600],
      "z": [500, 761, 959, 1020, 1043, 1035, 986, 613, 556, 514, 507, 514, 556,
613, 986, 1035, 1043, 1020, 959, 761, 500]
    },
    {
      "x": [0, 5600],
      "z": [2500, 2500]
    },
    {
      "x": [0, 5600],
      "z": [3600, 3600]
    }
  ]
}

```

---

que consta de una capa cuyo perfil inferior varia a lo largo del eje horizontal como se muestra en Fig. (36).

El mallado de cada uno de estos modelos es realizado teniendo en cuenta la velocidad del medio, como resultado del proceso se obtienen tres archivos principales, uno donde se encuentra la información de cada uno de los nodos de la malla, otro con la información de cada uno de los elementos y sus respectivos vértices y la

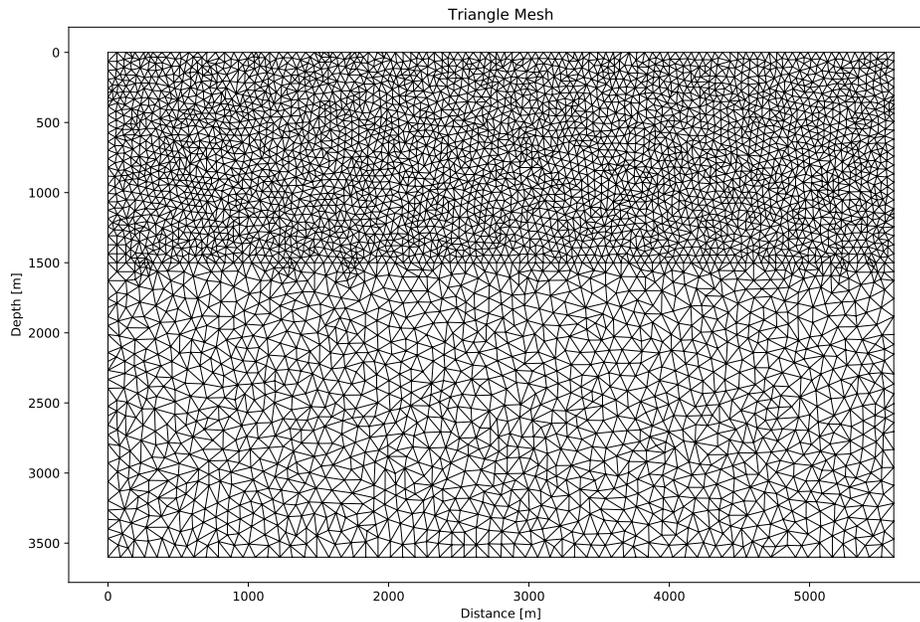


Figura 34. Modelo de dos capas planas.

información de las propiedades físicas de cada uno de los elementos.

Cabe mencionar que, como se observa, los elementos triangulares son capaces de adaptarse muy bien a distintos tipos de geometrías, esto es de gran ayuda para trabajar modelos del subsuelo con estructuras complejas y obtener así resultados mucho más acertados a medida que los elementos se hacen más pequeños. En Fig. (37) se muestra el diagrama de flujo relacionado con el algoritmo para la generación del mallado, el cual empieza con la carga de los datos y la definición de los parámetros necesarios, relacionados con la geometría del modelo que se desea generar, seguido de la generación del modelo de velocidad de onda  $P$ , a partir del cual se generan los modelos de velocidad de onda  $S$  y de densidad. Se crea luego el archivo `.poly` que luego pasa a ser parámetro de entrada para la herramienta `triangle`, con el cual genera los archivos `.ele`, `.node` y `.area`. Estos archivos pasan a ser parámetros de entrada para el programa `meshing` desarrollado en C++,

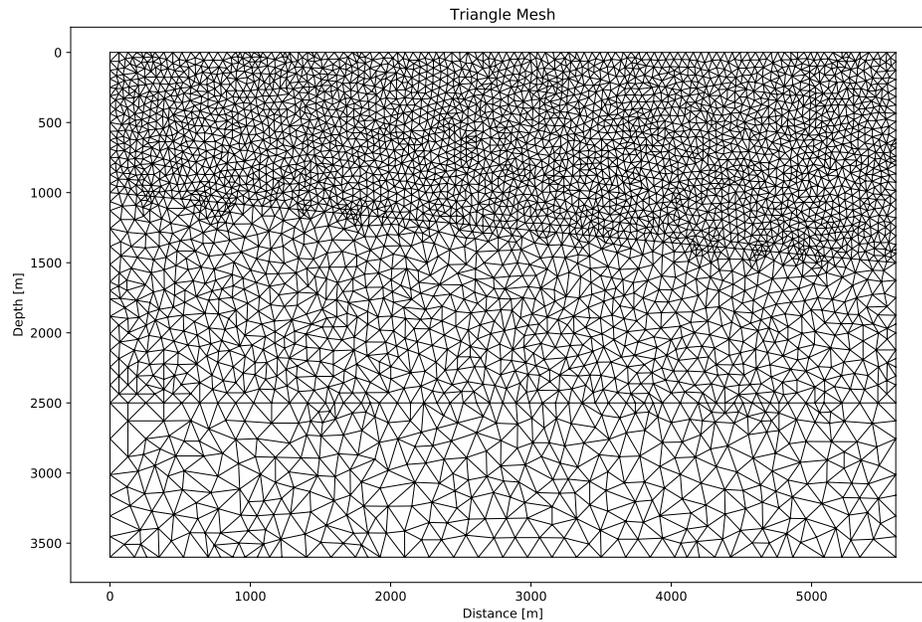


Figura 35. Modelo de 3 capas, una de ellas con una inclinación.

que se encarga de definir los parámetros físicos (parámetros de Lamé) y de definir la condición para refinar la malla. Si la malla contiene elementos muy grandes se vuelve a mallar usando `triangle` hasta que no existan triángulos muy grandes o hasta que se alcance el número de iteraciones máximo definido dentro del archivo `SConstruct`.

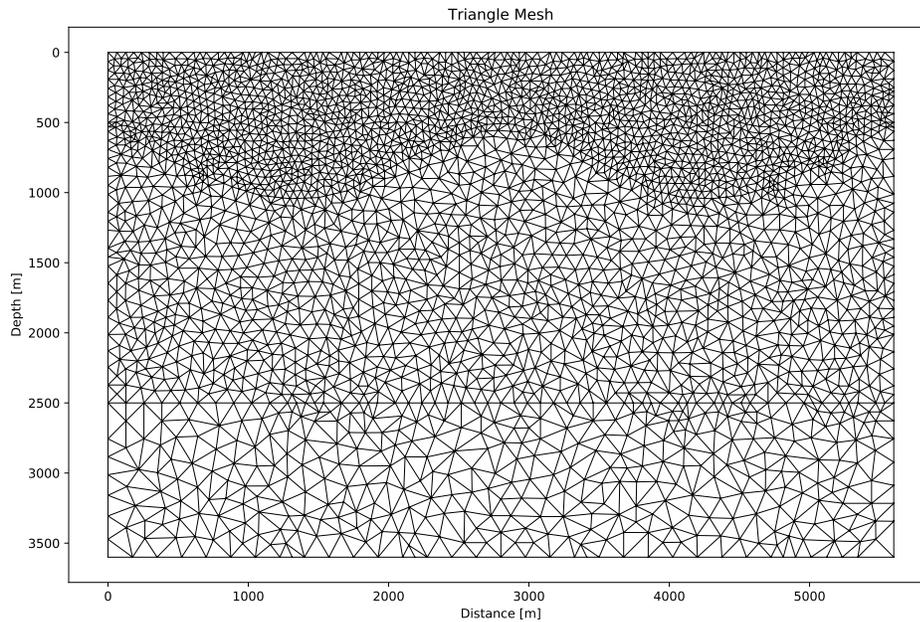


Figura 36. Modelo de 3 capas, una de ellas variable a lo largo del eje horizontal.

### Anexo B. Código Principal

El esquema desarrollado es un esquema DG de mallado triangular no estructurado *hp*-adaptativo. El desarrollo del esquema numérico se llevó a cabo haciendo uso de una combinación de herramientas computacionales, principalmente Python, ya que todo el algoritmo base fue desarrollado usando esta herramienta.

Archivo	Descripción
main.py	Archivo principal, define los parámetros de entrada
Mesh2D.py	Instrucciones encargadas de cargar la malla
nodal2D.py	Instrucciones encargadas de definir y calcular todos los parámetros relacionados con el esquema DG
wave2D	Instrucciones para calcular la parte derecha del sistema de ecuaciones de la elastodinámica y calcular los valores de los campos para cada paso del tiempo

Tabla 6. Archivos principales que componen el esquema DG para la solución de las ecuaciones de la elastodinámica.

El código, principal desarrollado en Python, está compuesto por 4 archivos que se muestran en la tabla 6 junto a sus descripciones.

**Archivo main.py** El archivo main.py se encarga de definir todos los parámetros de entrada como son el archivo de la malla, el archivo de la fuente, ordenes de interpolación dentro de los elementos<sup>1</sup>, localización de la fuente, localización de los receptores, tiempo de simulación, entre otros.

---

```
#####  
obj = WaveDrive2D(  
    ''' parámetros principales '''  
    mesh_file = 'archivo.ele', # Archivo de la malla  
    param_file = 'archivo.param', # Archivo de parámetros físicos  
    src_file = 'archivo.src', # Archivo de la fuente  
    src_position = (3200.0,400.), # Posición de la fuente (x,y)  
    src_smooth = 100., # ancho del soporte gaussiano  
    gather = [(4200.,0.01), (4250.,0.01)], # posición de receptores  
    source_order = 2, # orden de interpolacion, dentro del soporte espacial  
    order = 1, # orden de interpolacion, fuera del soporte espacial  
    src_freq = 7.5, # frecuencia máxima  
    src_delay = 1/7.5, # retraso de la fuente  
    src_dt = 0.001, # muestreo de los datos del archivo de la fuente  
    duration = 3.0, # tiempo de simulación  
    pml_layer = (300., 300., 0., 300.), # zona fronteras absorbentes  
    pml_coef = 0.0015, # coeficiente de amortiguamiento  
    pixel_size = 10., # resolución de las imágenes resultantes  
    tpf = 0.01, # tiempo entre imagen generada  
    stress = np.array([1,1,0]), # tensor de esfuerzo inicial  
)  
#####
```

---

<sup>2</sup> Para este trabajo se definieron dos zonas con distinto orden de interpolación, la zona de los elementos que componen el soporte espacial de la fuente y la zona de los elementos restantes.

**Archivo Mesh2D.py** El archivo Mesh2D.py se encarga de carga los datos correspondientes al mallado y retornar aquellos parámetros necesarios para identificar cada uno de los elementos que conforman el dominio computacional como lo son el numero de elementos ( $K$ ) y vértices  $N_v$ , posición de los vértices ( $V_X$  y  $V_Y$ ) y la relación elementos-vértices ( $e_{2v}$ ). A continuación se muestra parate de la clase Mesh2D encargada de leer los archivos de la malla.

---

```
#####
def __tri(self):
    if os.path.exists(self.ele_file):
        data = []
        with open(self.ele_file, 'rt') as f:
            for line in f.readlines():
                if not line.startswith('#'):
                    data.append(line)
        K = int(data[0].split()[0])
        e2v = np.array(list(map(lambda a: a.split()[1:], data[1:K+1])), dtype=int
).T-1
    else:
        print("Error: Especificed file '{}' does not exists.".format(self.mesh_file))
        exit(-1)

    if os.path.exists(self.node_file):
        data = []
        with open(self.node_file, 'rt') as f:
            for line in f.readlines():
                if not line.startswith('#'):
                    data.append(line)
        Nv = int(data[0].split()[0])
        VX,VY = np.array(list(map(lambda a: a.split()[1:3], data[1:Nv+1])), dtype=
float).T
    else:
        print("Error: Especificed file '{}' does not exists.".format(self.mesh_file))
        exit(-1)

    print("Info: Mesh file {} loaded successfully. ({} E, {} V)".format(self.filename
, K, Nv))
    return Nv, VX, VY, K, e2v
#####
```

---

Adicionalmente, en este archivo, se calculan las posiciones de la fuente y receptores, y se mapean los elementos que se encuentran dentro del soporte espacial.

**Archivo** `nodalDG.py` El archivo `nodalDG.py` se encarga de definir y calcular todos los parámetros correspondientes al esquema DG, principalmente la matriz de Vandemonde y la matriz para el cálculo de los flujos de los elementos con los respectivos elementos vecinos. Dentro de este archivo también se calculan los puntos de soporte dentro de cada elemento, se define el mapeo de los elementos de mi espacio global al espacio estandar  $\mathcal{I}$  junto con el Jacobiano de esta transformación y los vectores normales a las interfaces entre elementos.

Además, se generan las matrices de diferenciación. En la imagen [38](#) se muestra el diagrama de flujo del algoritmo implementado.

**Archivo** `wave2D.py` Dentro de este archivo se encuentran definidas las instrucciones para el cálculo correspondiente a los campos de velocidades y campos de esfuerzos de las ecuaciones de la elastodinámica. El diagrama de flujo respectivo para los procesos que se llevan a cabo dentro de este archivo se puede ver en Fig. [39](#).

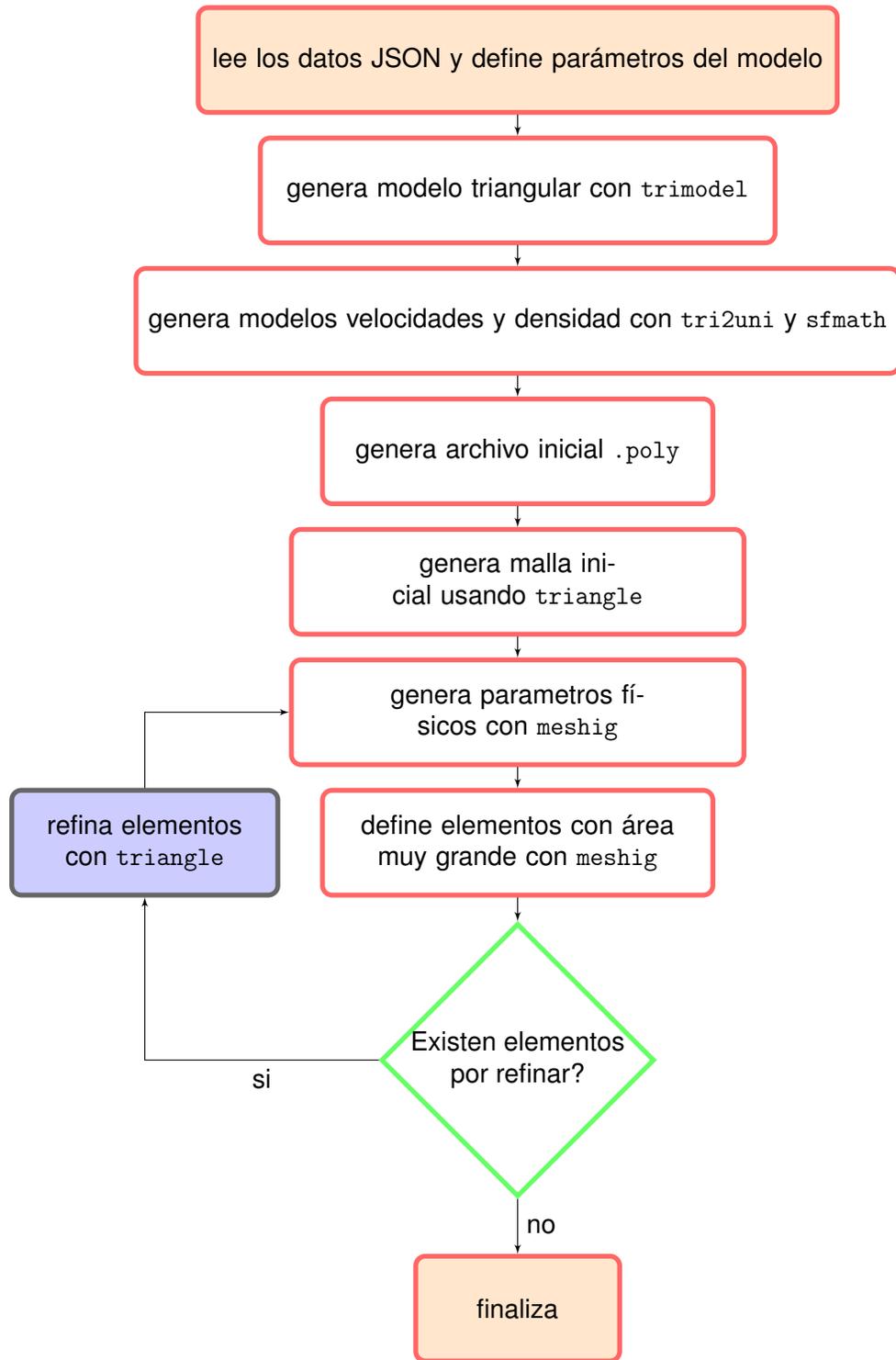


Figura 37. Diagrama de flujo para la generación del mallado.

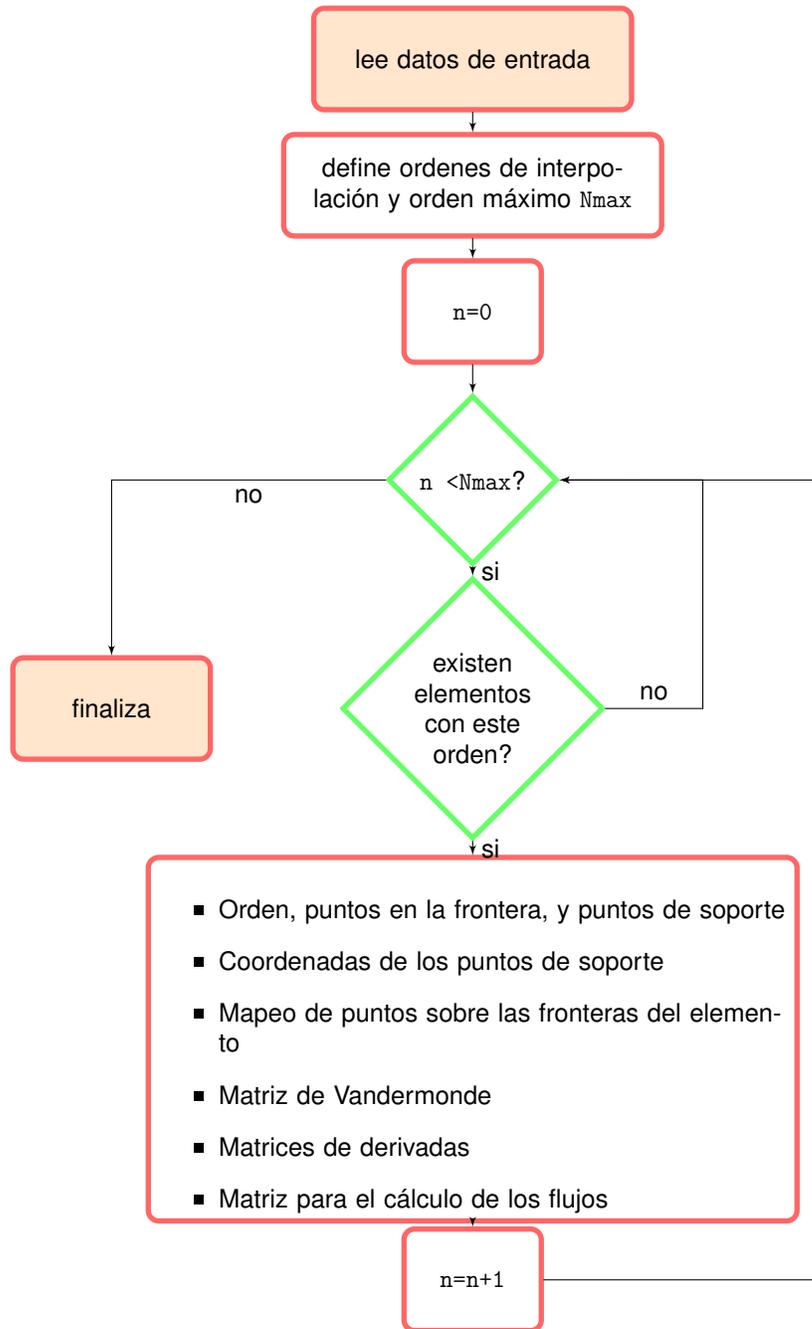


Figura 38. Diagrama de flujo para la generación de los parámetros del esquema DG.

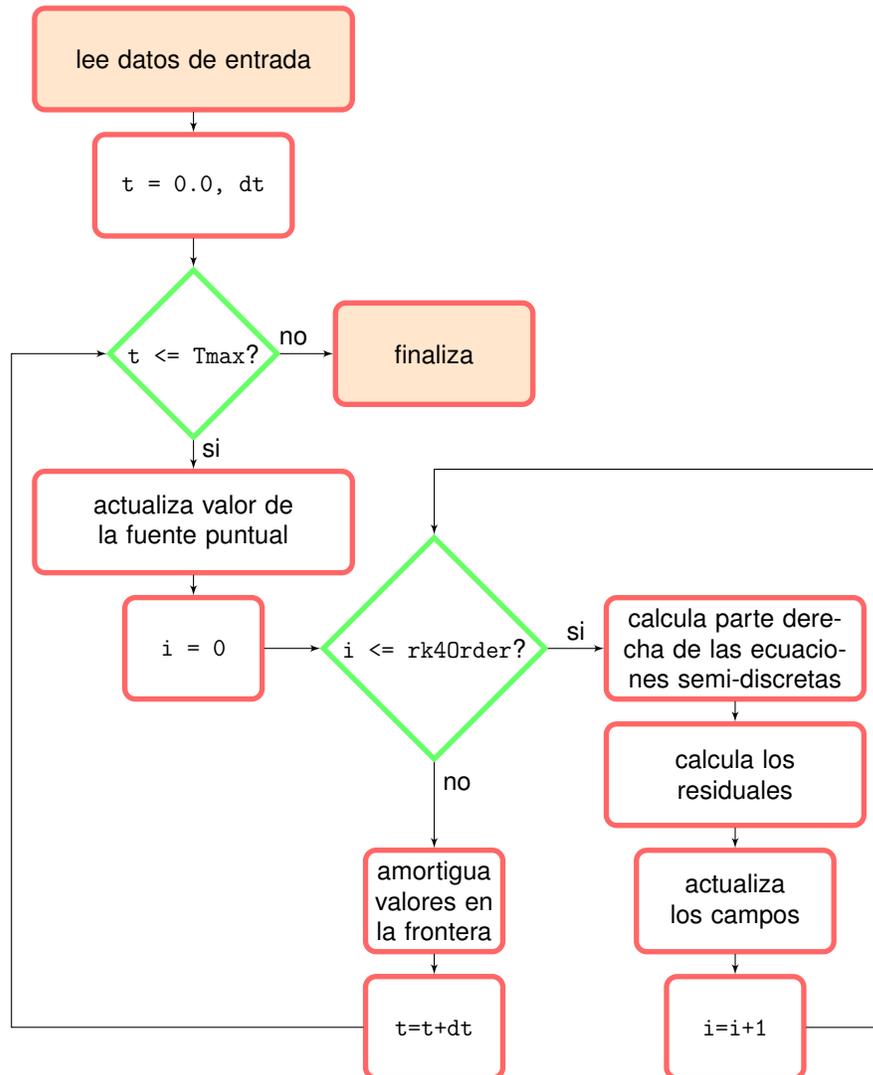


Figura 39. Diagrama de flujo para encontrar la solución correspondiente al sistema de ecuaciones de la elastodinámica.