

**USO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONAL PARA EL
ESTUDIO DE UN CONJUNTO ESPECÍFICOS DE SEÑALES EEG PARA
PACIENTES EPILÉPTICOS**

JUAN FELIPE REMOLINA GARCÍA

PABLO ELÍAS RENDÓN HORMIGA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2017**

**Uso de la Transformada de Fourier Fraccional para el estudio de un conjunto
específicos de señales EEG para pacientes epilépticos**

Juan Felipe Remolina García

Pablo Elías Rendón Hormiga

Trabajo de grado para optar al título de:

Ingeniero Electrónico

Director

**Daniel Alfonso Sierra Bueno
Doctor en Ingeniería Biomédica**

Co-director

**Lenin Chinchilla Atencia
Magíster en Ingeniería Electrónica**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERIAS FISICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2017**

*GRACIAS A DIOS POR DARNOS LA VIDA Y LOS TESOROS MÁS VALIOSOS
QUE TENEMOS, LA SALUD Y LA FAMILIA.*

*A NUESTROS DIRECTORES DANIEL ALFONSO SIERRA BUENO Y LENIN
CHINCHILLA ATENCIA, POR SU PACIENCIA Y ORIENTACIÓN.*

LOS AUTORES

Dedicado principalmente a mi madre Nayíbe García Osorio, por sobresalir en su rol como madre y padre al mismo tiempo. Sin la confianza, educación y el amor que me ha brindado este logro nunca se habría cumplido.

A mi hermana Ana Milena Remolina García y a mis hermanos José Andrés Remolina García y Jairo Iván Remolina García por su eterno apoyo.

A mi cuñado y esposo de mi hermana, Enrique Abrego Vásquez por ser un apoyo incondicional, por estar pendiente de nuestra familia y por ser un hermano para mí.

A mis dos sobrinas Daniela y Mariana Abrego por ser la alegría más grande de nuestra familia.

A mis amigos de toda la vida: Gabriel Burgos Angulo, Nicolás Romero Díaz, José Ulises Niño Rivera, Diego Andrés Caballero Loza y José Pablo Prada Serrano por ser los caballeros de lo que yo consideraría mi mesa redonda.

A Katherine Alexandra Flórez, que difícilmente podría alguien pedir una amiga más leal y atenta durante el desarrollo de esta etapa de mi vida.

A mi compañero de proyecto y amigo Pablo Elías Rendón Hormiga por haber llevado conmigo esta carga y haber culminado la carrera de ingeniería electrónica como un compañero de trabajo supremamente eficiente y además como un amigo fiel y sincero.

A nuestro director, profesor y amigo Daniel Alfonso Sierra Bueno, por siempre haber sido un punto de referencia, un guía, un ejemplo a seguir y finalmente una persona admirable.

A mi interminable lista de amigos y amigas a quienes resguardo con cariño en mi corazón y a todas esas personas que hicieron parte de este proceso de formación que finalmente culmina con este proyecto.

Juan Felipe Remolina García

A mis padres, Pedro Pablo Rendón y Josefina Hormiga, por su esfuerzo, amor y confianza incondicional, los cuales me educaron y convirtieron en lo que soy.

A mi hermana Lady, por su apoyo incondicional, por brindarme su experiencia y ejemplo.

A mis compañeros y amigos, con quienes compartí esta experiencia y fueron de ayuda a cumplir con esta etapa.

A mi amigo Juan Felipe, por brindarme su amistad sincera y apoyo.

PABLO ELÍAS RENDÓN HORMIGA.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	19
1 MARCO TEÓRICO.....	22
1.1 EPILEPSIA.....	22
1.2 ELECTROENCEFALOGRAFÍA.....	22
1.3 RECONOCIMIENTO DE PATRONES.....	24
1.3.1 Definición.....	24
1.3.2 Análisis de Componentes.....	24
1.3.3 Clasificador.....	25
1.3.4 Aprendizaje y Adaptación.....	26
1.3.5 Validación Cruzada.....	27
1.3.6 Máquina de Soporte Vectorial.....	27
1.3.7 Clasificadores Cuadráticos.....	27
1.3.8 Matriz de Confusión.....	28
1.3.9 Índice de Separabilidad.....	30
1.4 TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONARIA.....	31

1.4.1 Definición.....	31
1.4.2 Señales No estacionarias.	32
1.5 MOMENTOS ESTADÍSTICOS.....	32
1.6 TRANSFORMADA WAVELET.....	33
1.6.1 Transformada de Wavelet Continua.....	33
1.6.2 Transformada de Wavelet Discreta.....	34
2 METODOLOGÍA.....	35
2.1 BASE DE DATOS Y ADECUACIÓN DE LAS SEÑALES.....	36
2.2 TRANSFORMADA WAVELET.....	40
2.3 EXTRACCIÓN DE CARACTERÍSTICAS.....	41
2.3.1 Dominio del Tiempo.....	42
2.3.2 Dominio de la Frecuencia.	42
2.3.3 Dominio del Tiempo-Frecuencia.	43
2.3.4 Características Fraccionarias.....	43
2.4 REDUCCIÓN DE ESPACIOS.....	45
2.5 ADICIÓN CARACTERÍSTICAS FRACCIONARIAS.....	47

2.6 ENTRENAMIENTO Y CLASIFICACIÓN	48
2.6.1 Clasificador Cuadrático.....	50
2.6.2 Máquina de Soporte Vectorial.....	54
3 RESULTADOS	57
3.1 OBTENCIÓN DE CARACTERÍSTICAS	57
3.2 CARACTERÍSTICAS FRACCIONARIAS	59
3.3 ENTRENAMIENTO CLASIFICADOR CUADRÁTICO	64
3.4 ENTRENAMIENTO MÁQUINA DE SOPORTE VECTORIAL	66
3.5 RESULTADOS DE LA VALIDACIÓN CRUZADA.....	67
4 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	69
4.1 CONCLUSIONES	69
4.2 TRABAJOS FUTUROS.....	71
REFERENCIAS	73
BIBLIOGRAFÍA.....	75

INDICE DE FIGURAS

Figura 1, Esquema de colocación de electrodos en el sistema internacional 10-20. Tomado de [3]	23
Figura 2, Metodología General Proyecto	35
Figura 3, Señal de un Sujeto con los ojos cerrados O001	38
Figura 4, Ejemplo de Señal, Sujeto Sano ojos cerrados.....	39
Figura 5, Descomposición Señales por medio de Daubechies nivel 4.....	41
Figura 6, Datos etiquetados tras la reducción de espacios dimensionales	46
Figura 7, Metodología de Clasificación.....	49
Figura 8, Datos para entrenamiento	50
Figura 9, Sanos contra Enfermos Generalizados	52
Figura 10, Convulsión contra Enfermos	53
Figura 11, Funcionamiento Clasificador Cuadrático en cascada.....	54
Figura 12, Máquina de Soporte Vectorial 1	55
Figura 13, Máquina de Soporte Vectorial 2.....	56
Figura 14, Media y Varianza de la densidad espectral de potencia obtenida en el orden $a=0.932$	60

Figura 15, Histograma de la media de la densidad espectral de potencia en el dominio fraccionario con orden $\alpha=0.932$	61
Figura 16, Histograma de la varianza de la densidad espectral de potencia en el dominio fraccionario con orden $\alpha=0.932$	61
Figura 17, Histograma del sesgo de la densidad espectral de potencia en el dominio fraccionario con orden $\alpha=0.932$	62

INDICE DE TABLAS

Tabla 1, Matriz de Confusión de 2x2.....	28
Tabla 2, Resumen de las características lineales extraídas	57
Tabla 3, Características obtenidas en el dominio fraccionario con orden $\alpha=0.932$	63
Tabla 4, Índices de Separabilidad	64
Tabla 5, Coeficientes Clasificador Cuadrático 1	65
Tabla 6, Coeficientes Clasificadores Cuadráticos 2.....	65
Tabla 7, Matriz de confusión del Clasificador Cuadrático	66
Tabla 8, Matriz de confusión de la Máquina de Soporte Vectorial	67
Tabla 9, Parámetros de rendimiento del clasificador cuadrático	67
Tabla 10, Parámetros de rendimiento de la máquina de soporte vectorial.	68

SÍMBOLOS

Símbolo:	Definición:
X :	Matriz columna del conjunto de características.
μ :	Media aritmética de una variable o promedio.
Σ :	Matriz de covarianza.
Q :	Matriz de coeficientes del clasificador cuadrático.
V :	Vector de coeficientes del clasificador cuadrático.
V_0 :	Coefficiente escalar del clasificador cuadrático.
α :	Orden de la transformada de Fourier fraccional.
a :	Orden normalizado de la transformada de Fourier fraccional.
m_r :	Momento estadístico de una variable aleatoria.
$E\{x\}$:	Calculo de la esperanza matemática de una variable aleatoria x .
\bar{x} :	Media ponderada de una variable aleatoria x .
n :	Variable asociada al dominio discreto.
N :	Numero de muestras de una señal.
max_x :	Valor máximo de una señal.
min_x :	Valor mínimo de una señal.
w :	Variable asociada al dominio de la frecuencia angular.
x' :	Variable asociada al dominio fraccionario.

- i : Factor imaginario.
- $\|S_\alpha(x)\|^2$: Densidad espectral de potencia de una señal.
- A : Matriz de vectores propios.
- C_n : Coeficientes de la transformada de Fourier.

RESUMEN

Título: Uso de la Transformada de Fourier Fraccional para el estudio de un conjunto específico de señales EEG para pacientes epilépticos¹.

Autores²: JUAN FELIPE REMOLINA GARCÍA

PABLO ELÍAS RENDÓN HORMIGA

Palabras Claves: Reconocimiento de Patrones, Transformada de Fourier Fraccional, Validación Cruzada, Epilepsia.

Este trabajo de grado presenta el diseño y validación de clasificadores para la detección de epilepsia basado en el tratamiento y obtención de características de señales EEG a partir de un conjunto determinado de datos. Se adicionan características fraccionarias a los clasificadores para luego analizar su desempeño, esto para confirmar si las características fraccionarias ayudan al proceso de clasificación. Con los conjuntos de datos se diseñaron dos tipos de clasificadores: uno bajo la técnica de Máquina de Soporte Vectorial y otro sobre la teoría de los clasificadores cuadráticos.

Se utilizaron tres conjuntos de muestras, cada uno con su respectiva etiqueta bajo los cuales se buscó discriminar la existencia de epilepsia en un conjunto de datos específicos basándose en su señal EEG. La extracción de características involucró el uso de diversas técnicas en los dominios tanto fraccionales, como en tiempo, frecuencia y finalmente tiempo-frecuencia, donde se comprende la transformada wavelet y la transformada de Fourier entre otras. La reducción de dimensiones se llevó a cabo bajo la técnica de PCA. La evaluación de los clasificadores se hizo por medio de validación cruzada con un k-fold de 5 y se comparó la precisión entre dos tipos de clasificadores con y sin características fraccionarias.

¹ Trabajo de Grado modalidad en investigación.

² Facultad de Ingenierías Físico Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones. Director: PhD. Daniel Alfonso Sierra Bueno. Codirector: M.Sc Lenin Chinchilla Atencia.

ABSTRACT

TITLE: Fractional Fourier Transform usage for the study of a certain set of EEG signals for epileptic patients.³

AUTHORS⁴: JUAN FELIPE REMOLINA GARCÍA

PABLO ELÍAS RENDÓN HORMIGA

KEYWORDS: Pattern Recognition, Fractional Fourier Transform, Cross Validation, Epilepsy.

The following document introduces the design and validation of classifiers capable of detecting epilepsy based on feature extraction from a certain set of EEG signals. In this data set each sub-set of signals have with their own corresponding label. The accuracy of those classifiers with the inclusion of features extracted based on the fractional Fourier analysis will be a subject of analysis as well. After the feature extraction two classification techniques were chosen to design the classifiers: one based on Vector Support Machine and another based on the quadratic classifiers theory.

Three different sets of EEG signals were used to discriminate the epileptic signals, each one has their own label. The features were extracted from several domains of study which include: time, frequency and time-frequency, which involve the wavelet and Fourier transform. The dimension reduction was performed with the principal component analysis (PCA) technique. The classifiers were evaluated with the cross-validation technique base on 5-fold, the accuracy of both classifiers was compared taking into account their performance with and without the features obtained from the Fractional Fourier Analysis. The overall idea was to conclude if the characteristics obtained from the Fractional Fourier Analysis could improve or aide the classification process.

³ Graduation Work

⁴ Electrical, Electronics and Telecommunications College, Universidad Industrial de Santander. Advisors Ph.D. Daniel Alfonso Sierra Bueno, Msc. Lenin Chinchilla Atencia

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la ingeniería a nivel mundial ha buscado mejorar la calidad de vida del ser humano en su cotidianidad. Por su parte, la medicina se dedica al estudio y entendimiento del cuerpo humano. Estas dos áreas del conocimiento junto con sus herramientas de estudio se unen para formar el campo de la ingeniería biomédica. El término “Ingeniería Biomédica” hace referencia a ejercer principios químicos, eléctricos, ópticos y mecánicos entre otros para entender, modificar y/o controlar sistemas biológicos, en este caso al ser humano. Cuando se ejerce la ingeniería biomédica dentro de un hospital se hace referencia al término: Ingeniería clínica en la mayoría de los casos.⁵

Por medio del análisis de datos, desarrollo de instrumentos y demás aplicaciones, la ingeniería ha complementado y ha ayudado a la profundización de los males que pueden afectar al cuerpo humano, un ejemplo de estos es la epilepsia. La epilepsia se presenta como una enfermedad cerebral crónica la cual afecta a personas de todo el mundo, es caracterizada por episodios de convulsiones recurrentes, a su vez es clasificada como un trastorno neurológico. La Organización Mundial de la Salud (OMS) estima que 50 millones de personas en todo el mundo padecen de epilepsia, dentro de esta cifra se considera que entre 4 y 10 de 1000 personas existe epilepsia activa, es decir que sufren de ataques continuos y por ende necesitan un seguimiento y tratamiento. Existen estudios que aclaran que en países de ingresos

⁵ Tomado de: John Denis Enderle; Joseph D. Bronzino (2012). Introduction to Biomedical Engineering. Academic Press. pp. 16-. ISBN 978-0-12-374979-6

bajos y medianos hay una porción más elevada y esta corresponde a 7 y 14 de 1000 personas. Los síntomas de la epilepsia dependen de la zona del cerebro donde empiece el trastorno, sin embargo, se identifican ciertos síntomas transitorios como lo es la ausencia o pérdida de conocimiento, trastornos del movimiento, de los sentidos, del humor o inclusive de las funciones cognitivas. Estas convulsiones pueden resultar en lesiones físicas, puesto que las convulsiones pueden generar traumatismos como lo son los hematomas y las fracturas. El riesgo de muerte prematura en las personas epilépticas es tres veces mayor que el de la población general [1].

En el campo de estudio del Reconocimiento de Patrones se han generado diferentes clasificadores, un ejemplo de estos esfuerzos se refleja en: Gajic y colaboradores en [2], donde describen un clasificador capaz de discriminar mediante las señales encefalográficas la existencia de epilepsia en un paciente. Este estudio se basó en un conjunto específico de señales encefalográficas extraídas por Andrzejak en [3], el cual describe unos conjuntos de datos extraídos de pacientes enfermos y epilépticos. La detección de epilepsia se ha realizado con diferentes técnicas para extraer características como lo son: el estudio de los exponentes de Lyapunov, la transformada wavelet y por los métodos de vectores propios entre otros. Sin embargo, hasta el momento la extracción de características por medio de la teoría de Fourier fraccionario para mejorar un método de clasificación no se ha explorado. Se considera que la extracción de características fraccionarias [4] de una señal EEG puede servir como complemento para la discriminación de epilepsia en pacientes por medio de su señal EEG. Si adjuntar las características fraccionarias a un clasificador puede ayudar a discriminar la epilepsia se estaría obteniendo una alternativa de estudio con la cual se podrían

entrenar clasificadores con un grado más alto de precisión y con esto se podría hacer diagnósticos tempranos para tratar la enfermedad con mayor anticipación.

Este proyecto abarcará el campo de la ingeniería biomédica al entrenar un clasificador utilizando la base de datos realizada en el estudio de Andrzejak [3] para detectar epilepsia en los seres humanos, basándose en la metodología encontrada en [2]. Se extrajeron características fraccionarias de la base de datos [3] para estudiar si estas otorgan una mayor separabilidad en la reducción de espacios al adjuntarlas con características lineales extraídas en [2]. En este orden de ideas se realizó un estudio de los datos sobre la transformada de Fourier Fraccionaria de manera que se concluyó el entrenamiento de una máquina de soporte vectorial como la técnica de clasificación diferente a la mencionada en [2], se hizo una comparación entre los rendimientos de los dos clasificadores: el que se basa en la metodología mencionada en [2] y sobre la máquina de soporte vectorial.

Este reporte consta de cuatro capítulos, donde se refleja el desarrollo de un proyecto de investigación. El primer capítulo describe el marco teórico, donde se hace una presentación de los términos y temas esenciales para su entendimiento. El segundo capítulo contiene la metodología de trabajo donde se presentan los procesos que sobrellevó este proyecto de investigación los cuales involucraron: el tratamiento de la señal, la reducción de espacios de características, el entrenamiento y clasificación. El tercer capítulo expone los resultados, se presentan los clasificadores con sus respectivas matrices de confusión. Por último, en el cuarto capítulo se reportan las conclusiones y trabajo futuro, donde se sintetiza el trabajo realizado analizando los resultados obtenidos en el tercer capítulo mientras se mantiene en discusión aspectos a tener en cuenta para futuros trabajos.

1 MARCO TEÓRICO

1.1 EPILEPSIA

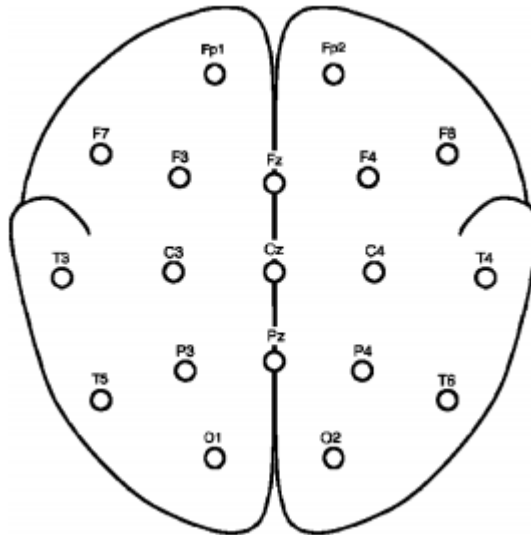
La epilepsia es una enfermedad cerebral crónica, capaz de desorientar aquellos quienes la padecen. Según la organización mundial de la salud (OMS) la epilepsia afecta a personas de todo el mundo y se caracteriza por convulsiones recurrentes. En el mundo entero aproximadamente 50 millones de personas padecen de epilepsia, haciendo de esta la enfermedad neurológica de defunción más común a nivel mundial. Estas convulsiones son episodios breves de movimientos involuntarios que pueden afectar a una parte del cuerpo (convulsiones parciales) o a su totalidad (convulsiones generalizadas) y a veces se acompañan de pérdida de la consciencia y de control de los esfínteres. Los episodios de convulsiones se deben a descargas eléctricas excesivas de grupos de células cerebrales. Las descargas pueden producirse en diferentes partes del cerebro. Las convulsiones pueden ir desde episodios muy breves de ausencia o de contracciones musculares hasta convulsiones prolongadas y graves. Su frecuencia también puede variar desde menos de una al año hasta varias al día [1].

1.2 ELECTROENCEFALOGRAFÍA

La electroencefalografía (EEG) es un método de monitoreo electrofisiológico para registrar la actividad eléctrica del cerebro. El examen típicamente no es invasivo, colocando los electrodos sobre el cuero cabelludo del paciente como se puede observar en la Figura 1. El EEG mide las fluctuaciones de voltaje resultantes de las corrientes bio-eléctricas que generan las neuronas del cerebro. Los diagnósticos están centrados en el contenido espectral de la EEG, el tipo de oscilaciones

neurales popularmente conocido como “ondas cerebrales” son observadas en las señales obtenidas en este examen.

Figura 1, Esquema de colocación de electrodos en el sistema internacional 10-20. Tomado de [3]



El EEG se usa para diagnosticar epilepsia, porque la epilepsia presenta anomalías en la actividad eléctrica cerebral, evidenciada en las lecturas de los exámenes. También es usada para diagnosticar desórdenes de sueño, coma, encefalopatía, muerte cerebral entre otras. El electroencefalograma fue el primer método para diagnosticar tumores, golpes, desórdenes de coordinación, pero su uso ha disminuido con el avance de técnicas de alta resolución anatómica como la imagen por resonancia magnética y la tomografía computarizada [5]. A pesar de la baja resolución espacial, la encefalografía sigue siendo una herramienta valiosa para investigar y diagnosticar, específicamente cuando se desea una resolución temporal en el rango de milisegundos, resolución que no es posible con una tomografía o una resonancia magnética.

1.3 RECONOCIMIENTO DE PATRONES

1.3.1 Definición. El reconocimiento de patrones se define como la acción de tomar decisiones basándose únicamente en una recopilación de datos. El ser humano a diario realiza esta función gracias a sus capacidades y estructura cognitiva, a diferencia de las máquinas quienes deben ser entrenadas. Se ha buscado armar máquinas capaces de reconocer patrones para realizar ciertas aplicaciones entre las cuales existen: reconocimiento lingüístico, identificación dactilar, claves de acceso en sistemas de seguridad, entre otras. El reconocimiento de Patrones y tratamiento de máquinas comprende diferentes técnicas de clasificaciones las cuales se ajustan a la complejidad del sistema. La complejidad del sistema abarca tanto a la dimensión del sistema como a la organización de sus datos [6].

1.3.2 Análisis de Componentes. El análisis de componentes es un acercamiento no supervisado para encontrar las características representativas en un conjunto de datos. Existen diferentes métodos sin embargo los principales se conocen como Análisis de Componentes Principales (PCA) y Análisis de Componentes Independientes (ICA) [6].

1.3.2.1 Análisis de componentes principales. Cuando se utiliza el análisis de componentes principales más conocido como PCA se busca representar el conjunto de datos d -dimensional en un espacio dimensional menor. Esto a su vez disminuye los grados de libertad, reduce el espacio y las complejidades de tiempo. Lo primero que se debe hacer es coger el conjunto de características completo y computar el vector de media μ y la matriz $d \times d$ de covarianza Σ . Luego deben obtener los valores propios e_x de la matriz de covarianza y se debe organizar de mayor a menor con su

respectivo vector propio λ_x . Se deben escoger los K vectores propios que corresponden a los valores propios más grandes y a partir de estos se crea la matriz **A** cuyas columnas son los vectores propios. La transformación se presenta en la ecuación (1.1) obtenida de [6].

$$Y = A^t(X - \mu) \quad (1.1)$$

1.3.3 Clasificador. Los clasificadores comprenden a las técnicas utilizadas para el diseño de un algoritmo adecuado con el fin de discriminar entre clases y poder tomar una decisión. “El fin de la clasificación es tomar un vector de entrada X y asignarlo a una clase K basado en el conjunto de C_K clases discretas donde $K= 1, \dots, K$ ” [7]. El escenario más común consideraría una diferencia notable entre las clases, esto hace que se espere una única clasificación para cada entrada. Al ingresar diferentes entradas al sistema y observar su distribución se pueden empezar a reconocer fronteras de decisión, esto basado en la organización de los datos. La forma en la que los datos se organizan pueden ser o no lineal. Esto conlleva a realizar ciertas transformaciones para tratar de linealizar el sistema lo mejor posible, posibilitando la discriminación entre los datos junto con la toma de decisiones. Ejemplos de dichas técnicas de clasificación son las siguientes: Funciones Discriminantes, Mínimos cuadrados y Coeficiente Lineal de Fisher entre otras.

Existen otras técnicas capaces de cubrir los casos en los que no exista linealidad, estas son más complejas que aquellas que cubren los casos lineales, entre estas se consideran las Maquinas de Soporte Vectorial [7].

Sin embargo, se pueden integrar varias técnicas de clasificación para hacer un clasificador más completo, es decir, se puede seccionar el problema de clasificación

de manera que, en vez de utilizar un clasificador complejo, se utilicen varios clasificadores sencillos.

1.3.4 Aprendizaje y Adaptación. Puesto que se está tomando información para entrenar un clasificador, se debe atribuir el concepto de aprendizaje. Los problemas generales y específicos en el reconocimiento de patrones presentan una alta dificultad, dado a que un sistema no puede tomar decisiones aleatorias y sin fundamento, se considera que el tiempo de aprendizaje es esencial. Crear un clasificador básicamente busca enseñarle al sistema el comportamiento general de unos datos específicos de manera que cuando se interactúe con datos de la misma naturaleza, pero desconocidos, pueda asemejarlos y categorizarlos. Se busca reducir el error en un sistema de reconocimiento de patrones al entrenar el sistema con un conjunto de datos; sin embargo, es importante no ajustar demasiado el clasificador a los datos de entrenamiento porque puede comprometer la capacidad de clasificación correcta de información de la misma naturaleza pero que provenga de otra fuente, esto es conocido como sobre entrenamiento [6].

1.3.4.1 Aprendizaje Supervisado. En el aprendizaje supervisado existe una referencia por la cual se puede identificar una característica etiquetada previamente; cada dato de entrenamiento cuenta con su respectiva etiqueta. Esta referencia sirve como punto de partida en la comparación y toma de decisión con respecto a la naturaleza de un dato [6].

1.3.4.2 Aprendizaje No Supervisado. El aprendizaje no supervisado no tiene referencia alguna, es decir, los datos de entrenamiento no cuentan con etiquetas. La clasificación de los datos depende directamente de la tendencia y organización de los mismos, es decir, se forman agrupaciones naturales basadas en como distribuyen estos en un campo de datos [6].

1.3.5 Validación Cruzada. En la validación cruzada se separan de manera aleatoria el grupo de muestras D en dos partes: una es utilizada para realizar el entrenamiento y los ajustes en los parámetros del modelo de clasificación mientras el otro set se conoce como el “grupo de validación” el cual se utiliza para estimar un error generalizado. También se hace la validación de k iteraciones donde un grupo de entrenamiento es dividido de manera aleatoria en m grupos diferentes de igual tamaño N/m , donde N es el número total de patrones en D . El clasificador se entrena m veces, y cada vez se mantiene un grupo de validación de igual tamaño. El desempeño estimado se obtiene por medio de las medias de estos m errores [6].

1.3.6 Máquina de Soporte Vectorial. La máquina de Soporte vectorial surgió como una alternativa para la clasificación de datos que no presentaban una distribución linealmente separable, su objetivo es buscar la máxima separación entre clases al mapear los datos a otra dimensión donde se logre dicha separación y así trazar una frontera capaz de diferenciar una clase de la otra [8].

1.3.7 Clasificadores Cuadráticos. Este clasificador es muy utilizado inclusive cuando existen conjuntos de datos no normales, conceptualmente se puede decir que la clasificación se realiza a través de la comparación de las distancias normalizadas $(X - \mu_i)^T \Sigma_i^{-1} (X - \mu_i)$ junto con un límite adecuado.

En términos generales el clasificador cuadrático general se puede expresar cómo (1.2).

$$h(X) = X^T Q X + V^T X + V_0 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0 \quad (1.2)$$

Donde Q, V, V_0 y X son una matriz, un vector, un escalar y las características respectivamente [9].

1.3.8 Matriz de Confusión. Un modelo de clasificación hace un mapeo de las instancias sobre la predicción de ciertas clases. También llamada “Tabla de Contingencia”. En un clasificador puede haber varias instancias de clasificación, esto permite armar una tabla que represente la disposición de las posibles instancias [10]. Observe la Tabla 1.

Tabla 1, Matriz de Confusión de 2x2

		Clase Verdadera	
		P	N
Clase Hipotética	V	Verdadero Positivo	Falso Positivo
	F	Falso Negativo	Verdadero Negativo

Los grupos P y N hacen referencia a las clases verdaderas etiquetadas como positivos o negativos. Observe V y F, estas referencias se dan para después de la clasificación o para los valores que resultaron de la predicción, se denominan como verdadero o falso. Ahora para entender las instancias de clasificación: Si un dato positivo es clasificado como verdadero se denomina verdadero positivo, como lo aclara la Tabla 1, pero, por ejemplo, si un dato positivo se clasifica como falso, este es denominado como falso negativo. Si un dato negativo es clasificado como verdadero llamamos esto un falso positivo y de la misma manera si un dato negativo

es denominado falso obtenemos un verdadero negativo. Los resultados obtenidos en la diagonal representan la clasificación correcta, los demás representan errores en la clasificación. La matriz de confusión se utiliza para buscar los cálculos con respecto al rendimiento del clasificador [10].

1.3.8.1 Cálculos de la Matriz de Precisión y Rendimiento de un Clasificador. La precisión fue calculada a partir de la matriz de confusión obtenida de cada uno de los grupos de clasificadores, se define como (1.3):

$$\%Precisión = \frac{VP}{VP + VF} \quad (1.3)$$

La tasa de verdaderos positivos se estima utilizando la ecuación (1.4).

$$Taza\ de\ TP = \frac{VP}{DP} \quad (1.4)$$

Donde VP hace referencia a los datos positivos clasificados correctamente, mientras DP hace referencia al número de datos con la etiqueta "Positivos".

A su vez se puede calcular la tasa de los falsos positivos, también se conoce como tasa de falsa alarma (1.5).

$$Taza\ de\ FP = \frac{FN2}{DN} \quad (1.5)$$

Donde FN2 hace referencia a los datos negativos clasificados incorrectamente, mientras DN hace referencia al número de datos con la etiqueta "Negativos".

Existen también los cálculos de la sensibilidad y la especificidad definidos por las ecuaciones (1.6) y (1.7).

$$\text{Sensibilidad} = \frac{VP}{DP} \quad (1.6)$$

Con la ecuación (1.7) se define el rendimiento de los clasificadores [10].

$$\text{Especificidad} = \frac{VN}{FP + VN} \quad (1.7)$$

El último cálculo de importancia para el análisis del desempeño del clasificador es la exactitud [10] y se define por (1.8).

$$\text{Exactitud} = \frac{VP + VN}{DP + DN} \quad (1.8)$$

1.3.9 Índice de Separabilidad. Una medida de rendimiento más adecuada para expresar la separabilidad de las clases es la relación entre las distancias inter clase y entre clase [11].

De esta manera se define un vector de media total entre las clases (1.9).

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^c N_i \mu_i \quad (1.9)$$

Donde N_i se define como el número de muestras por clase y N el número de todo el conjunto de datos.

Se define la matriz intra-clase S_W como la dispersión de los datos entre clases [11] esta es definida por (1.10).

$$S_W = \sum_{x \in D_i} (x - \mu_i)(x - \mu_i)^T \quad (1.10)$$

La matriz de dispersión inter-clase S_B es una matriz complementaria cual describe la dispersión de las medias correspondientes a las muestras que son dependientes de las clases con respecto a la media general [11], esta es definida por (1.11):

$$S_B = \sum_{i=1}^c n_i (\mu_i - m)(\mu_i - m)^T \quad (1.11)$$

Finalmente, el índice de separabilidad se puede definir por la ecuación (1.12).

$$J = \text{traza}(S_W^{-1} \cdot S_B) \quad (1.12)$$

1.4 TRANSFORMADA DE FOURIER FRACCIONARIA

1.4.1 Definición. La transformada de Fourier Fraccional es una generalización de la transformada de Fourier. Fue utilizada originalmente en relación a la Teoría de Grupos y la Mecánica Cuántica.

En forma integral para una función $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, su transformada de Fourier Fraccional se define como [4] y corresponde a la ecuación (1.13).

$$\mathcal{F}_\alpha[f](x) = C_\alpha e^{i\pi x^2 \cot \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{i\pi x x' \cot \alpha} e^{\frac{-2i\pi x x'}{\sin \alpha}} dx' \quad (1.13)$$

Donde $C_\alpha = \frac{e^{-i(\frac{\mathbb{S}(\sin \alpha)\pi - \alpha}{4})}}{\sqrt{|\sin \alpha|}}$, la función $\mathbb{S}(\sin \alpha)$ es el signo de $\sin \alpha$. Si se reemplaza $\alpha = \frac{\pi}{2}$ en la ecuación de la forma integral de la transformada fraccional de Fourier se obtiene la transformada de Fourier Convencional [4].

1.4.2 Señales No estacionarias. En forma general, una señal estacionaria es aquella cuyas estadísticas no varían con el tiempo. Pero en la práctica, al analizar situaciones reales, ésta hipótesis es imposible de verificar, por lo que en términos prácticos se trabaja y aplica el concepto de estacionariedad en sentido amplio, lo cual solo considera las estadísticas de primer y segundo orden. Las señales estacionarias tienen una ventaja, esta es que su análisis está bien caracterizado puesto que bajo el análisis de Fourier se pueden describir en el dominio de la frecuencia. Dado a que su modelado es obtenido a partir de la convolución o de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes, su estudio se puede hacer en el tiempo. Sin embargo, el análisis por Fourier entrega información de la composición frecuencial de la señal, por ende, no puede identificar o discriminar lo que ocurre en tiempo, de manera que se convierte en una herramienta poco eficiente en el análisis de señales no estacionarias [4].

1.5 MOMENTOS ESTADÍSTICOS

El r-ésimo momento de una variable aleatoria X , denotado por m_r , es el valor esperado o la esperanza de X^r , donde $r = 0, 1, 2, \dots$ [12] definido por (1.14).

$$m_r = E\{X^r\} = \sum_x f(x) \cdot x^r \quad (1.14)$$

Si $r = 1$ se tiene que $m_1 = E\{X\}$ que es el valor esperado de una variable aleatoria conocida como media ponderada y se denota con \bar{x} .

El r-ésimo momento centrado en el origen de una variable aleatoria X , denotado por m_r , es el valor esperado o la esperanza de $(X - \bar{x})^r$, donde $r = 0, 1, 2, \dots$ [12], calculado por medio de (1.15).

$$m_r = E\{(X - \bar{x})^r\} = \sum_x f(x) \cdot (x - \bar{x})^r \quad (1.15)$$

1.6 TRANSFORMADA WAVELET

La transformada wavelet se puede describir como una herramienta matemática que descompone un conjunto de datos o una función en diferentes secuencias de datos (o funciones) con rangos de frecuencia delimitados [13].

1.6.1 Transformada de Wavelet Continua. La transformada wavelet continua se define mediante la siguiente expresión, (1.16) extraída de [14].

$$(W_{\psi x})_{(a,b)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \langle x(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \quad (1.16)$$

Donde $\psi(t)$ es conocida como la función wavelet madre [13].

La localización en tiempo y el análisis de la transformada integral de wavelet está determinada por (1.17).

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (1.17)$$

Donde a es el factor de escalamiento y b el factor de desplazamiento en el tiempo [13].

1.6.2 Transformada de Wavelet Discreta. La Transformada Wavelet Discreta aparece a partir de la transformada wavelet continua al considerar parámetros de escalamiento y desplazamiento únicamente con valores discretos, observe la ecuación (1.18).

$$(W_{\psi}x)_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{a_o^j}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi(a_o^{-j}t - kb_o) dt = \langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \quad (1.18)$$

Donde el conjunto de funciones wavelet está dado por [13], y su ecuación corresponde a (1.19).

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_o^j}} \psi(a_o^{-j}t - kb_o) \quad (1.19)$$

La reconstrucción de la señal se puede hacer por medio de la transformada inversa de wavelet utilizando (1.20).

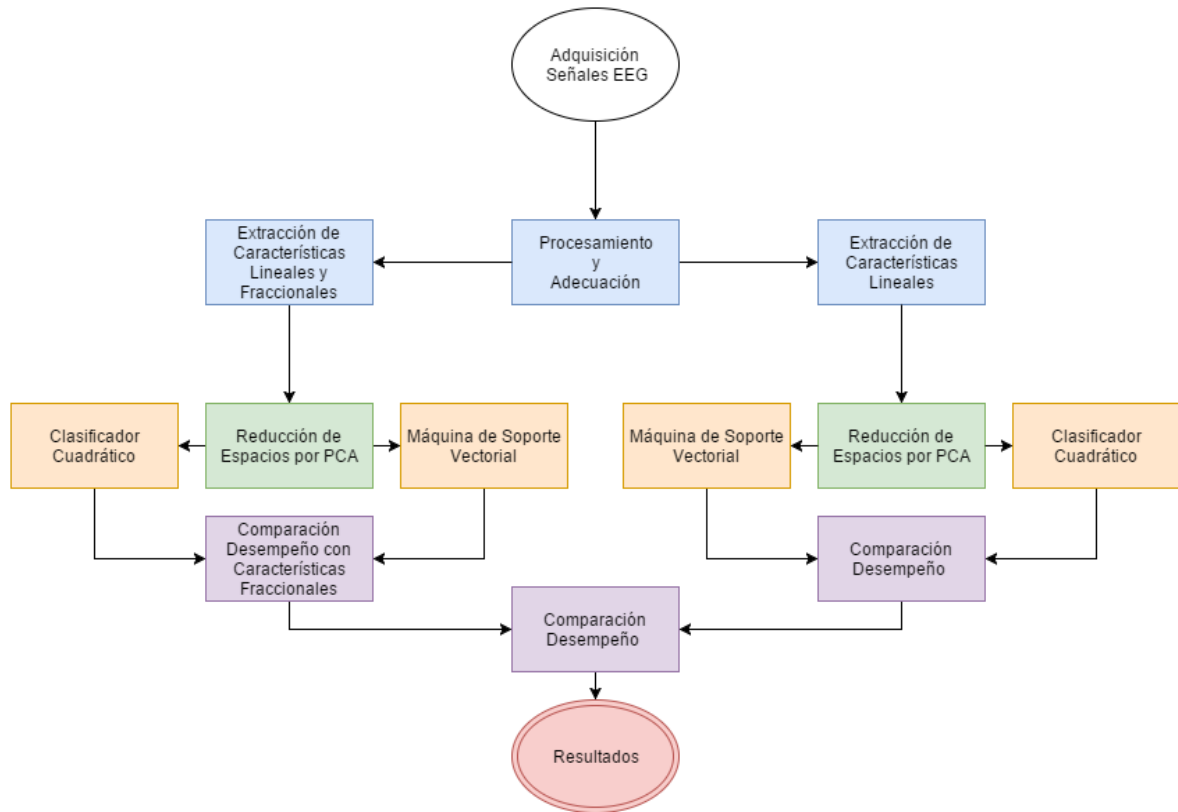
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{w=0}^{2\pi(N-1)/N} fft[w] e^{iwn}, 1 \leq n \leq N \quad (1.20)$$

Donde se puede analizar que entre mayor duración tenga el segmento $x[n]$, N va a ser mayor y por ende su frecuencia de resolución también lo será [2].

2 METODOLOGÍA

El proyecto conllevó una metodología de trabajo que se puede apreciar de manera gráfica en un aspecto general refiriéndose a la Figura 2, esta se presenta como un resumen para dar una visión general de los procesos que conllevó este proyecto.

Figura 2, Metodología General Proyecto



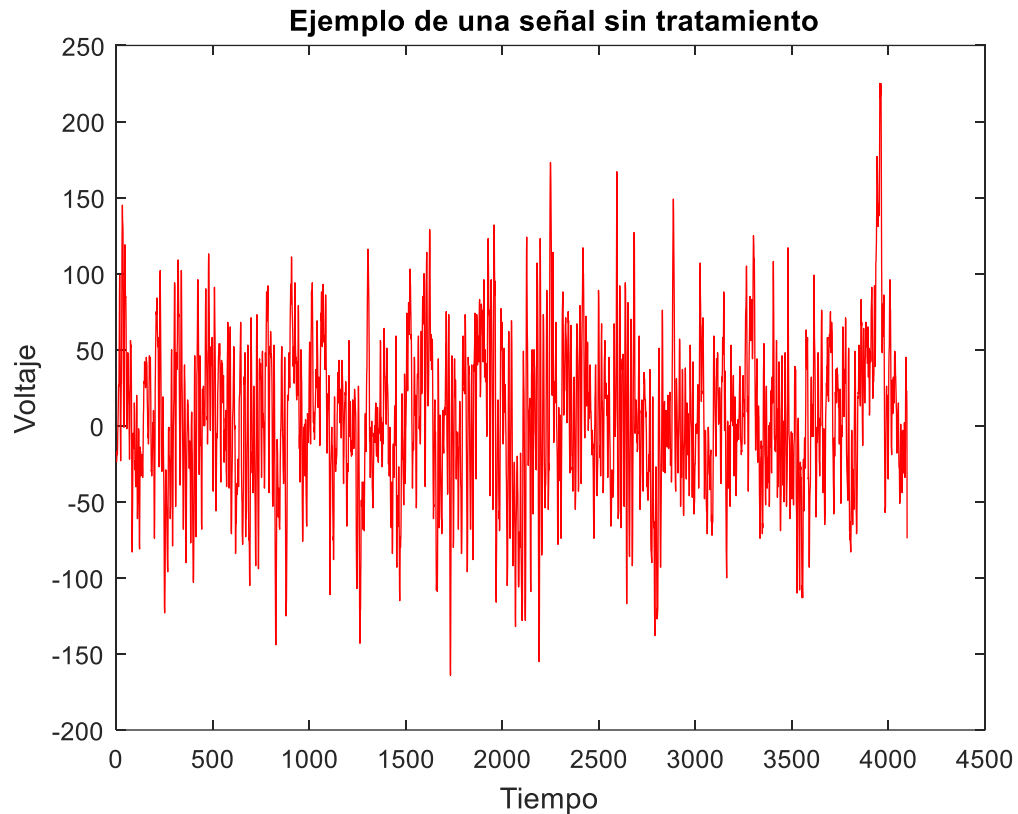
2.1 BASE DE DATOS Y ADECUACIÓN DE LAS SEÑALES

La base de datos está conformada por 5 grupos de datos, denotados de la A hasta la E. Está compuesta por 100 segmentos de un solo canal con duración de 23.6 segundos cada una, obtenidos de señales de mayor duración. La razón de obtener estos segmentos está relacionada con el ruido asociado a la actividad muscular y el movimiento de los ojos, se discriminaron los momentos continuos de la señal EEG tras una inspección visual. Los grupos de datos A y B fueron obtenidos a partir de voluntarios sin rastros de epilepsia, estando en un estado de relajación el grupo A tuvo a los voluntarios con los ojos abiertos mientras la toma del B se realizó con los ojos cerrados. Los grupos C, D y E se tomaron de diagnósticos pre quirúrgicos.

Los segmentos del grupo D se obtuvieron de la zona epileptógena, el grupo C se obtuvo del hipocampo en el hemisferio opuesto del cerebro, estos dos grupos vinieron de tiempos sin ataques epilépticos. El grupo E fue obtenido durante ataques epilépticos. Las señales fueron obtenidas a una frecuencia de muestreo de 173.61 Hz, filtradas por un filtro pasa banda entre 0.53 a 40 Hz (12dB/oct) [3].

Como se mencionó anteriormente, la base de datos cuenta con 5 grupos de señales de los cuales se tomaron tres para la realización de este proyecto, se escogieron los conjuntos E, D y B. La Figura 3 muestra el ejemplo de la señal O001 del conjunto “sujetos sanos con ojos cerrados” extraída de [3] antes de su tratamiento.

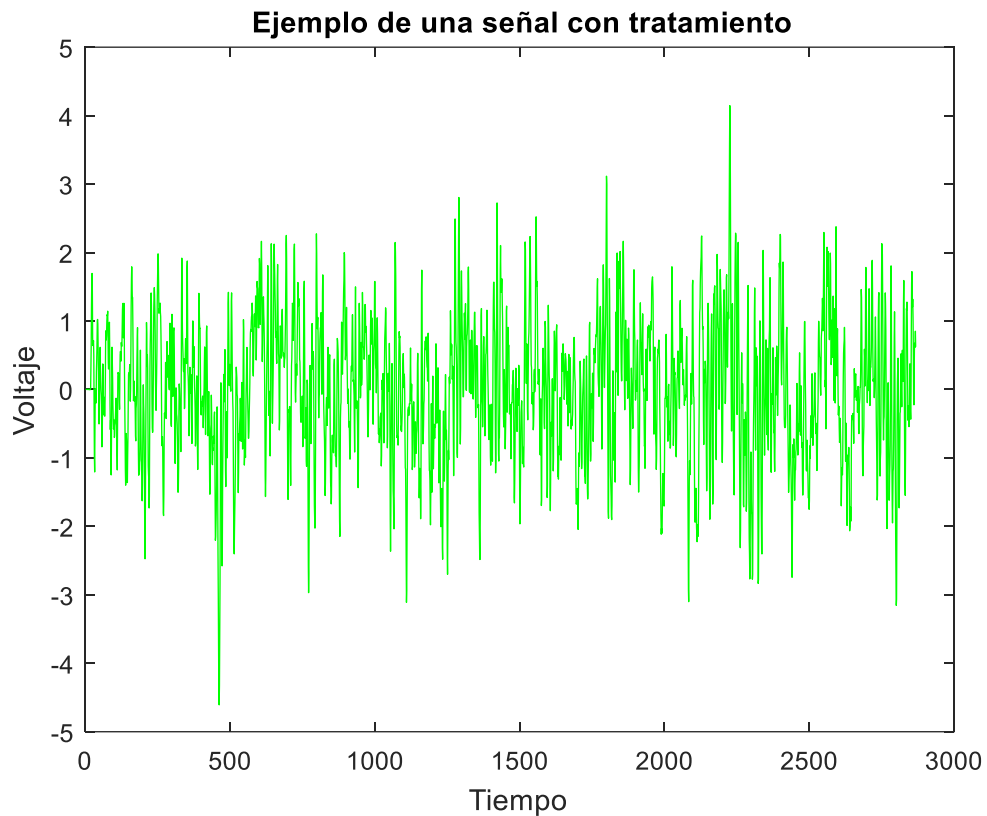
Figura 3, Señal de un Sujeto con los ojos cerrados O001



En primera instancia se normalizó la señal, debido a que las señales fueron obtenidas de diferentes pacientes con diferentes tipos de electrodos, los datos normalizados tienen una media de cero y varianza unitaria, esto garantiza que la técnica de detección no dependa del sujeto ni del sistema de medición [1]. La normalización realizada hace referencia al término estadístico “Unidad Tipificada”. Después de la normalización se filtró cada una de las señales a 60 Hz y se re muestrearon en una relación de 7/10 con respecto al tasa de muestreo de 173.61

Hz. Un ejemplo del tratamiento realizado a la señal se puede apreciar en la Figura 4 donde se muestra el resultado del procesado de la señal O001 del grupo B.

Figura 4, Ejemplo de Señal, Sujeto Sano ojos cerrados



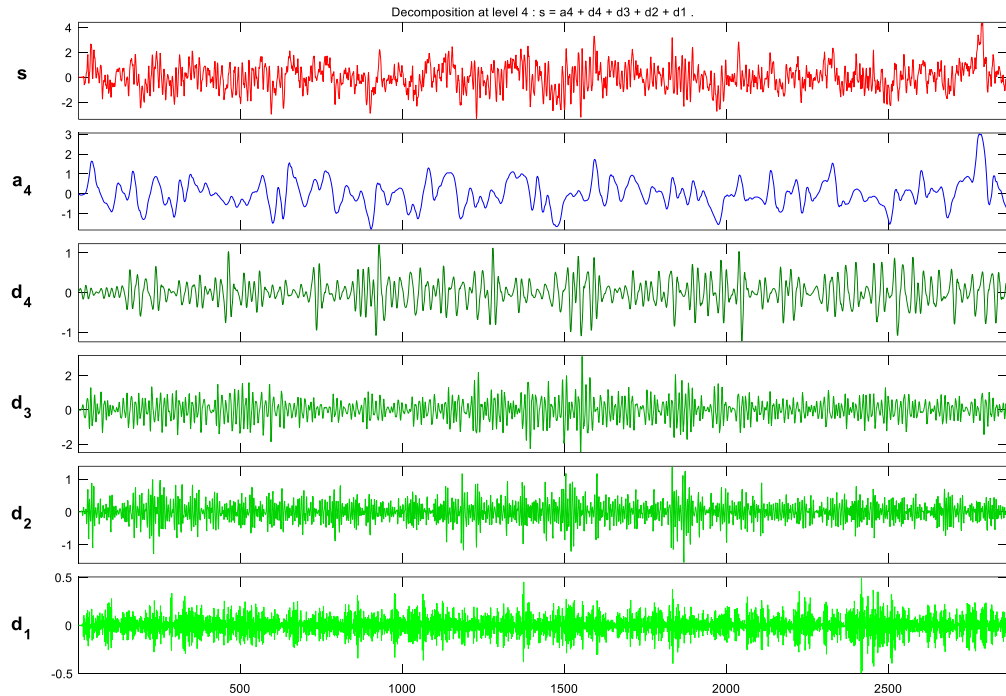
Las señales EEG presentan cinco sub-bandas clínicas de interés, cada una cubre un rango de frecuencias diferente con respecto a la otra, los rangos son los siguientes: delta (0.5-4 Hz), theta (4-7.5 Hz), alfa (8-13), beta (14-26 Hz) y gamma por encima de los 30 Hz. Sin embargo, cada una de estas también está asociada a una actividad cerebral o al desarrollo del mismo [15]. Frecuencias más altas

normalmente se consideran en estados de actividad inusual en el cerebro, por ejemplo, la epilepsia, cuando un paciente con epilepsia va a entrar en un episodio epiléptico o se encuentra adentro del mismo se presentan cambios de energía en la señal encefalografica de frecuencias bajas a altas aleatoriamente. Estas sub-bandas aportan mayor información sobre las actividades cerebrales y sus posibles problemas [1].

2.2 TRANSFORMADA WAVELET

Utilizando la transformada wavelet con onda madre Daubechies de cuarto orden se dividió la señal original del rango de 0-64 Hz en aproximaciones de las sub-bandas clínicas, estas fueron las siguientes: (0-4 Hz) se consideraron como delta, (4-8) theta, (8-16 Hz) como alfa, (16-32 Hz) beta y finalmente las gammas quienes tuvieron un rango de (32-64 Hz). El número de niveles de descomposición corresponde al nivel 4, esta decisión se tomó basado en las 5 sub-bandas de interés clínico. Esta división de sub-bandas resulta en los coeficientes de 5 señales distintas, se pueden ver en la Figura 5.

Figura 5, Descomposición Señales por medio de Daubechies nivel 4



Donde la señal S denomina la señal normal, a_4 denomina la señal Delta, d_4 es la señal Theta, d_3 es la señal Alfa, d_2 es la señal Beta y finalmente d_1 es la señal Gamma. La reconstrucción de la señal se realizó por medio de la transformada inversa de wavelet, de esta manera fue posible extraer de cada una de las aproximaciones de las sub-bandas clínicas las características de interés.

2.3 EXTRACCIÓN DE CARACTERÍSTICAS

En total se realizó la extracción de cuatro características a cada sub banda clínica excepto de las características fraccionarias las cuales se obtuvieron de la señal completa. La extracción de características se basó en cuatro dominios de interés: Tiempo, Frecuencia, tiempo-frecuencia y finalmente el dominio fraccionario.

2.3.1 Dominio del Tiempo. En el dominio del tiempo se extrajo la variación total de cada uno de los sub-segmentos, (2.1).

$$V_x = \frac{1}{N-1} \frac{\sum_{n=2}^N |X[n] - X[n-1]|}{(\max_x - \min_x)} \quad (2.1)$$

2.3.2 Dominio de la Frecuencia. Las señales EEG tienen en su naturaleza eventos con diferentes periodos de repetición, sin embargo, los eventos que ocurren en la frecuencia no se pueden captar en tiempo [16]. Es por esto que se realiza la transformada de Fourier (FFT *Fast Fourier Transform*) (2.2).

$$fft[w] = \sum_{n=1}^N x[n] e^{-iwn}, w = \frac{2\pi m}{N}, 0 \leq m \leq N-1 \quad (2.2)$$

Se utilizó la ventana de Hamming para evitar el manchado espectral justo antes de transformar por medio de la transformada de Fourier.

La Densidad Espectral de Potencia fue obtenida como una de las características más importantes en el análisis en el dominio de la frecuencia, con esta se representa la contribución individual de cada uno de los componentes de frecuencia en cada uno de los segmentos $x[n]$ [1]. La potencia se calculó en cada una de las sub bandas de los segmentos, se obtuvo a partir de la suma del valor absoluto de los coeficientes de la transformada de Fourier al cuadrado, dividido por el número de coeficientes (2.3).

$$RPow = \frac{1}{N} * \sum_{n=1}^N |C_n|^2 \quad (2.3)$$

2.3.3 Dominio del Tiempo-Frecuencia. Utilizar únicamente el dominio de la frecuencia o el tiempo en una señal no estacionaria representa un alto grado de pérdida de información, esto se puede evitar si se realiza el estudio en pequeñas ventanas secuenciales para formar sub segmentos estacionarios [1], puesto que la señal EEG no es estacionaria se pueden realizar la división en sub-segmentos y el procesamiento de la señal utilizando la transformada wavelet. Para la descomposición de la señal se eligió la transformada Wavelet Daubechies de cuarto orden [17]. Esta transformada wavelet tiene la ventaja de tener buenas propiedades de localización tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia [18]. Las características extraídas en el dominio del tiempo frecuencia fueron la desviación estándar y la potencia relativa de los coeficientes de la transformación de wavelet discreta en cada una de las sub-bandas [1].

2.3.4 Características Fraccionarias. Antes de llevar las señales al dominio fraccionario se normalizaron, se les aplicó el filtro de Hilbert y se filtraron a 60 Hz. Al transformar las señales al dominio fraccionario se les calculó la densidad espectral de potencia (P.S.D. por sus siglas en ingles).

Las características se extrajeron de la densidad espectral de potencia de cada señal en el dominio fraccionario y fueron los tres primeros momentos estadísticos conocidos como la media, la varianza y el sesgo.

La media se puede calcular mediante (2.4).

$$m_{1\alpha} = E\{x'\} = \bar{x} = \frac{1}{\|S_{\alpha}(x')\|^2} \sum_{i=1}^N \|S_{\alpha}(x')\|^2 \cdot x_i' \quad (2.4)$$

La varianza por (2.5).

$$m_{2\alpha} = E\{x'^2\} - (E\{x'\})^2 = \frac{1}{\|S_\alpha(x')\|^2} \sum_{i=1}^N \|S_\alpha(x_i')\|^2 \cdot x_i'^2 - (E\{x'\})^2 \quad (2.5)$$

Y para calcular el sesgo se usó la siguiente ecuación (2.6).

$$m_{3\alpha} = E\{(x' - \bar{x})^3\}$$

$$m_{3\alpha} = E\{x'^3\} - 3E\{x'^2\} \cdot \bar{x} - 3E\{x'\} \cdot \bar{x}^2 - \bar{x}^3$$

$$m_{3\alpha} = E\{x'^3\} - 3E\{x'^2\} \cdot \bar{x} - 3E\{x'\} \cdot \bar{x}^2 - \bar{x}^3$$

$$m_{3\alpha} = E\{x'^3\} - 3\bar{x}(E\{x'^2\} - E\{x'\} \cdot \bar{x}) - \bar{x}^3$$

$$m_{3\alpha} = E\{x'^3\} - 3\bar{x}(E\{x'^2\} - \bar{x}^2) - \bar{x}^3 \quad (2.6)$$

Teniendo en cuenta la definición de los dos primeros momentos calculados previamente $m_{1\alpha}$ y $m_{2\alpha}$, se transforman (2.7) y (2.8).

$$m_{3\alpha} = E\{x'^3\} - 3m_{2\alpha} \cdot m_{1\alpha} - m_{1\alpha}^3 \quad (2.7)$$

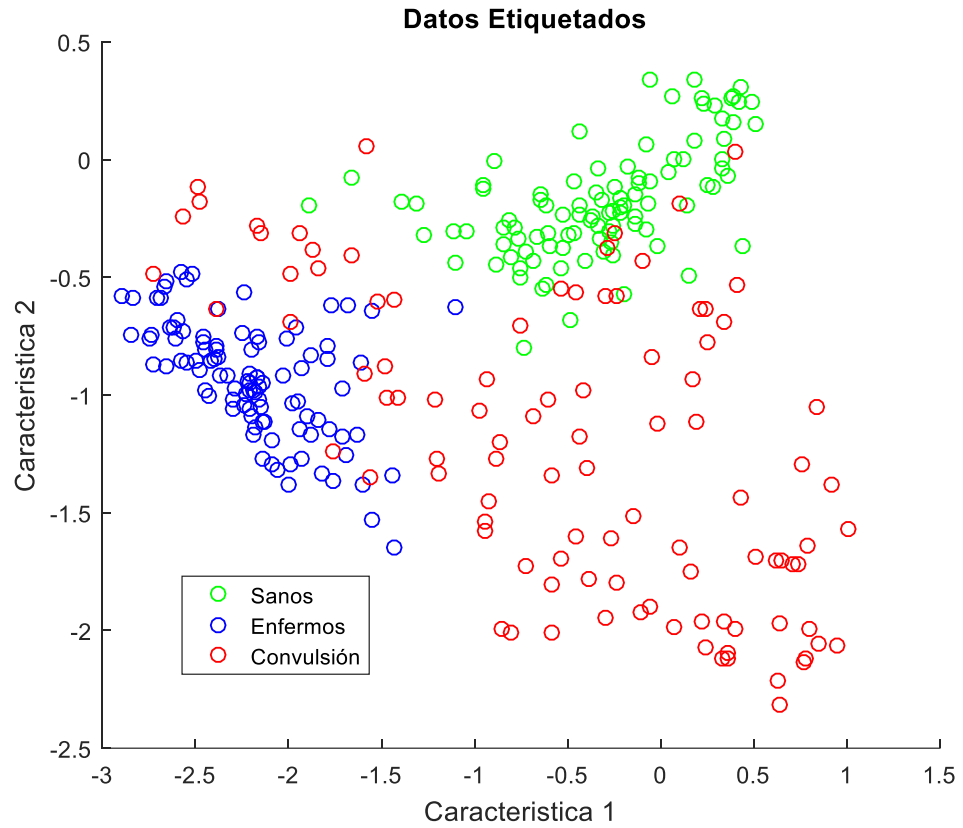
$$m_{3\alpha} = \frac{1}{\|S_\alpha(x')\|^2} \sum_{i=1}^N \|S_\alpha(x_i')\|^2 \cdot (x_i')^3 - 3m_{2\alpha} \cdot m_{1\alpha} - m_{1\alpha}^3 \quad (2.8)$$

Donde $\|S_\alpha(x')\|^2 = |f_\alpha(x')|^2$.

2.4 REDUCCIÓN DE ESPACIOS

La reducción de espacios se realizó basándose en el análisis de componentes principales (PCA) el cual busca reducir dimensionalmente un conjunto de datos por medio de los vectores propios y así obtener una aproximación en una dimensión menor con la mayor cantidad de información posible. Con una matriz de características lineales de dimensión $\mathbf{x}_{300 \times 20}$, se tomaron los tres valores propios más grandes y se realizó la transformación para obtener como resultado una matriz $\mathbf{y}_{300 \times 3}$. Se sumó la traza de los valores propios, independientemente se sumaron los tres valores propios más grandes para finalmente dividirlos entre la traza y así encontrar que el 98.86% de la información se encuentra aglomerado en los respectivos vectores propios de los tres valores propios más grandes.

Figura 6, Datos etiquetados tras la reducción de espacios dimensionales



La Figura 6 muestra el resultado de la reducción de espacios en 2 dimensiones. La etiqueta verde corresponde a los datos que pertenecen a los sujetos sanos, la azul a los sujetos enfermos y la roja a los datos de los sujetos que se encontraban en un episodio epiléptico.

2.5 ADICIÓN CARACTERÍSTICAS FRACCIONARIAS

Se realizó una exploración de los datos en los órdenes fraccionarios para asegurar que, en la reducción de espacios, la tendencia espacial de los datos pudiera mejorar el proceso de entrenamiento y clasificación, esto significó un proceso iterativo hasta encontrar un orden de interés, luego se indagó con más cifras significativas con el fin de lograr la mejor separabilidad posible entre las clases de los datos. El código de Matlab® usado para calcular la transformada de Fourier Fraccional permite los órdenes estandarizados de $-2 < \mathbf{a} < 2$.

Donde $\alpha = \mathbf{a} \frac{\pi}{2}$.

Se graficaron dos características fraccionarias para buscar un orden \mathbf{a} que mostrara los conjuntos de datos con la mejor separabilidad posible, tras obtener un orden fraccionario mediante la inspección visual se hicieron histogramas de cada característica fraccionaria extraída por separado para evaluar la separabilidad que aporta cada una de ellas en un futuro proceso de clasificación.

Las características fraccionarias se adicionaron a la matriz de características calculadas mediante el análisis lineal. De manera que la nueva dimensión de la matriz de características cambió a $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{23}]^T$ lo que se a su vez cambió los valores propios en la matriz de covarianza. Se hizo de nuevo la reducción de espacios $y = A^t x$ para obtener una matriz de dimensión de $\mathbf{y}_{300 \times 3}$.

Tras reducir la dimensión de las características, se realizó un barrido a través de los órdenes fraccionarios con el fin de evaluar la precisión del clasificador y mirar si existía un orden normalizado \mathbf{a} óptimo que mejorara la precisión del clasificador.

Esto se comprobó bajo la elección de un conjunto aleatorio de datos, el cual se puso a prueba la precisión de los clasificadores con y sin características fraccionarias.

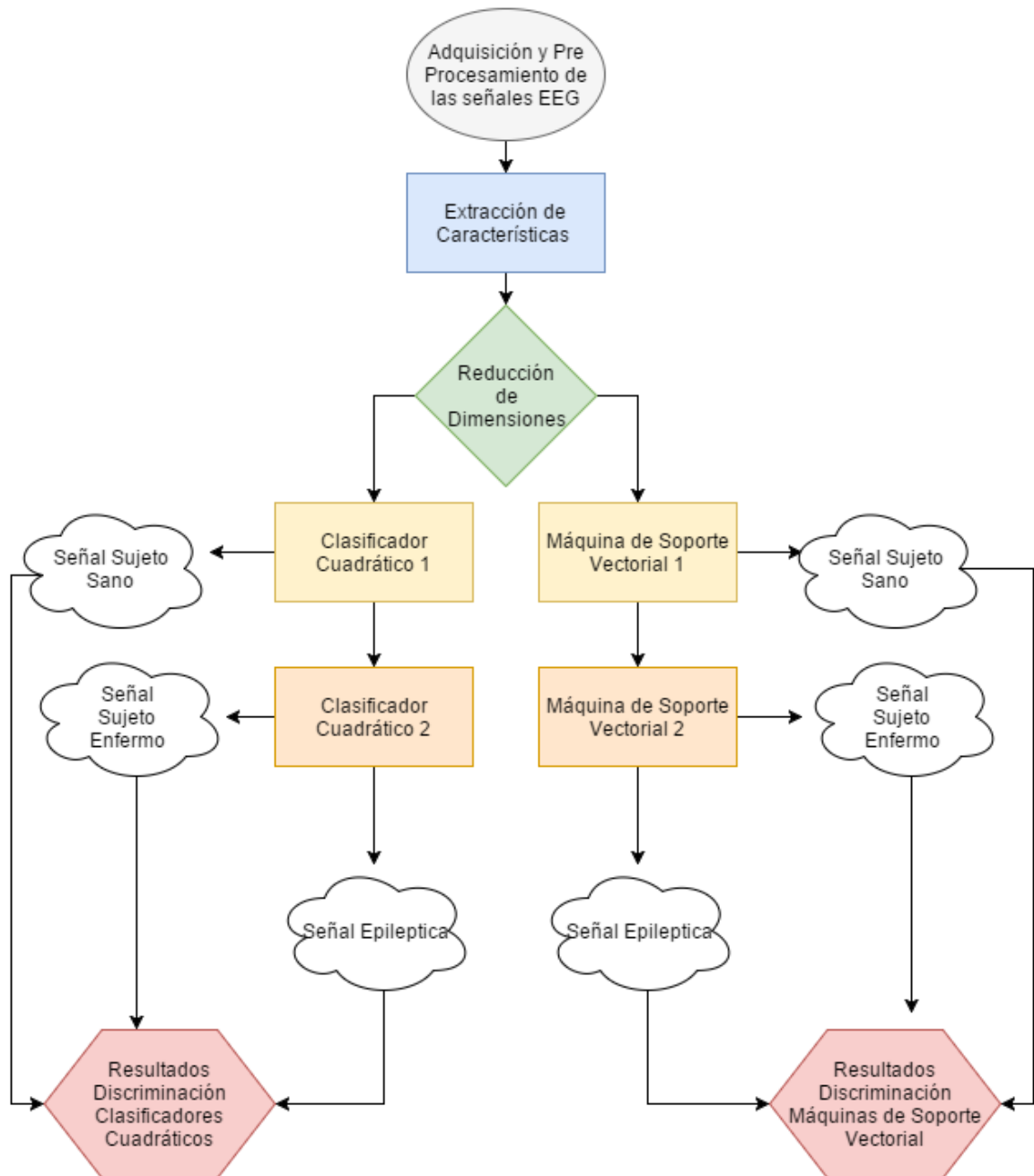
En resumen, se realizó una exploración de los órdenes fraccionarios basado en los siguientes itéales de análisis:

1. Basado solamente en los momentos estadísticos mediante la gráfica de dos características fraccionarias y mediante histogramas para revisar cada característica por separado.
2. Comparación directa de la precisión entre los clasificadores con y sin características fraccionarias.

2.6 ENTRENAMIENTO Y CLASIFICACIÓN

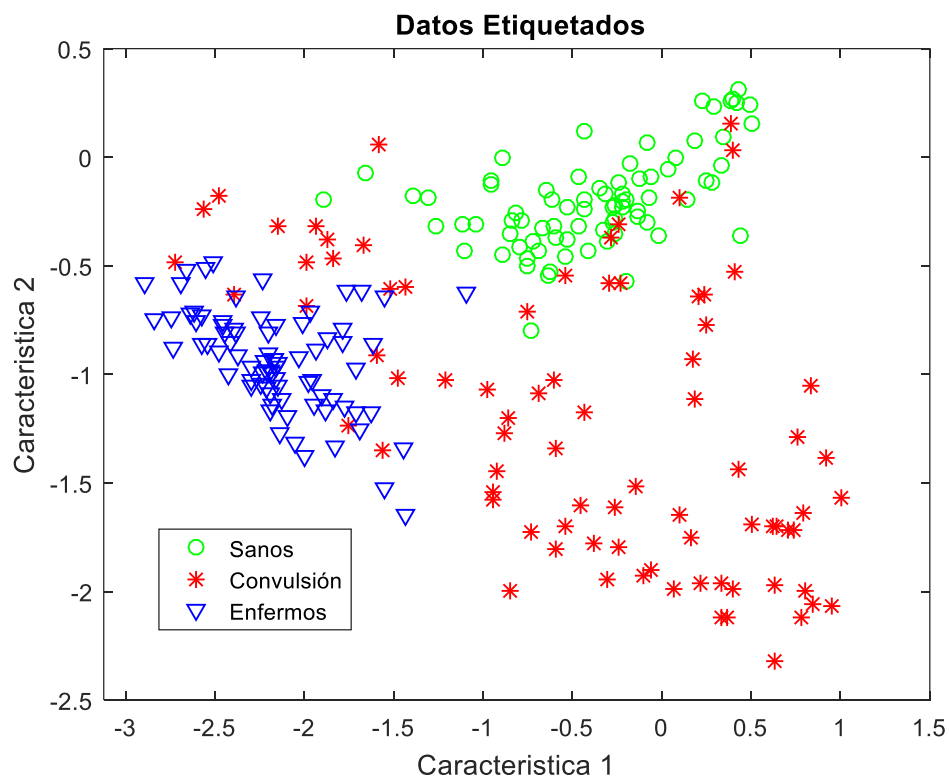
Se decidió entrenar dos clasificadores, cada uno con y sin las características fraccionales para comparar su precisión, esto se puede apreciar de forma más sencilla en la Figura 7.

Figura 7, Metodología de Clasificación



La idea de estos entrenamientos era evaluar hasta qué punto podían aportar las características fraccionarias una clasificación mejor. Los entrenamientos se llevaron a cabo utilizando el método de validación cruzada para cada clasificador utilizando un k-fold de 5, esto hizo que se utilizara 20 muestras de cada clase para validar y 80 para entrenar respectivamente, estas divisiones organizaron las muestras de manera aleatoria en cada prueba. En la Figura 8 se puede apreciar un conjunto de datos dentro de la metodología k-fold, listos para entrenamiento.

Figura 8, Datos para entrenamiento

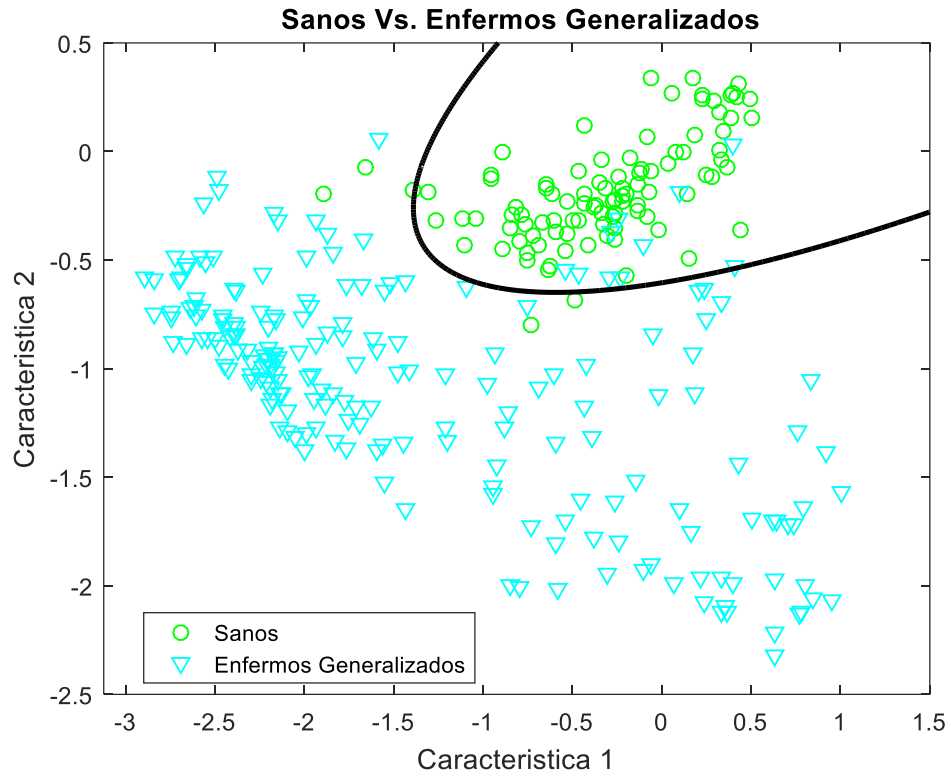


2.6.1 Clasificador Cuadrático. El clasificador cuadrático utilizó una clasificación en cascada, es decir que se utilizaron dos clasificadores cuadráticos, los cuales

discriminaron en primera instancia la unión de dos etiquetas frente a la otra y luego se discriminaron las dos etiquetas que se unieron en el primer clasificador.

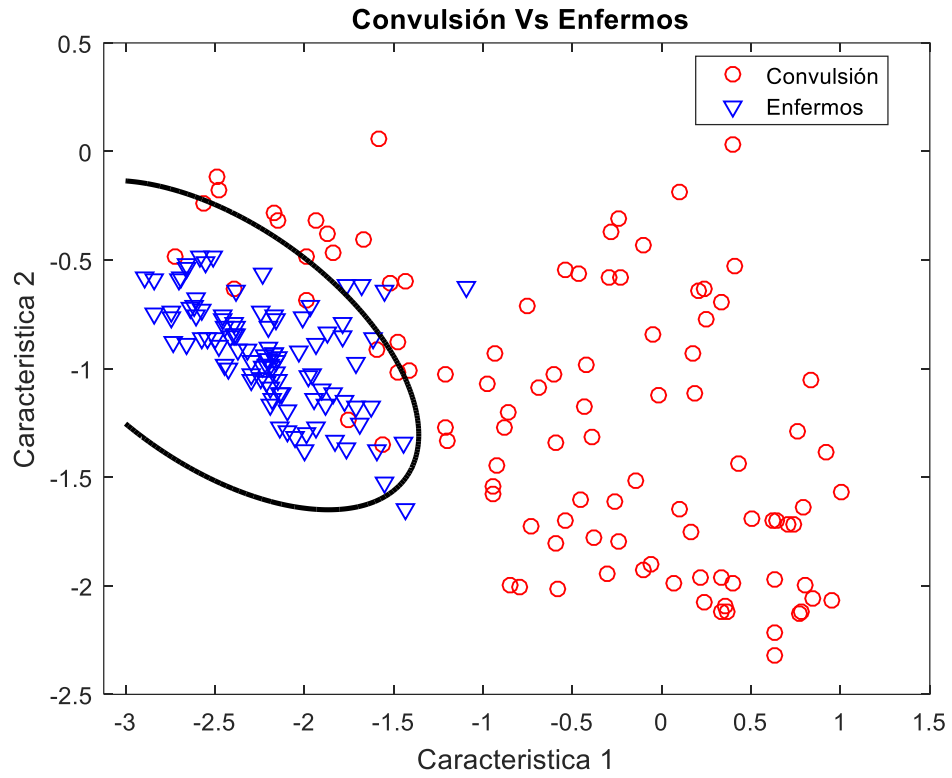
Puesto que visualmente se puede apreciar mayor separabilidad de los sujetos sanos con respecto a los enfermos y a los que se encuentran durante el episodio epiléptico, se decidió realizar la primera clasificación basada en un grupo de dos etiquetas de datos “enfermos generalizados” contra la etiqueta de sujetos sanos, esto se puede apreciar en la Figura 9.

Figura 9, Sanos contra Enfermos Generalizados



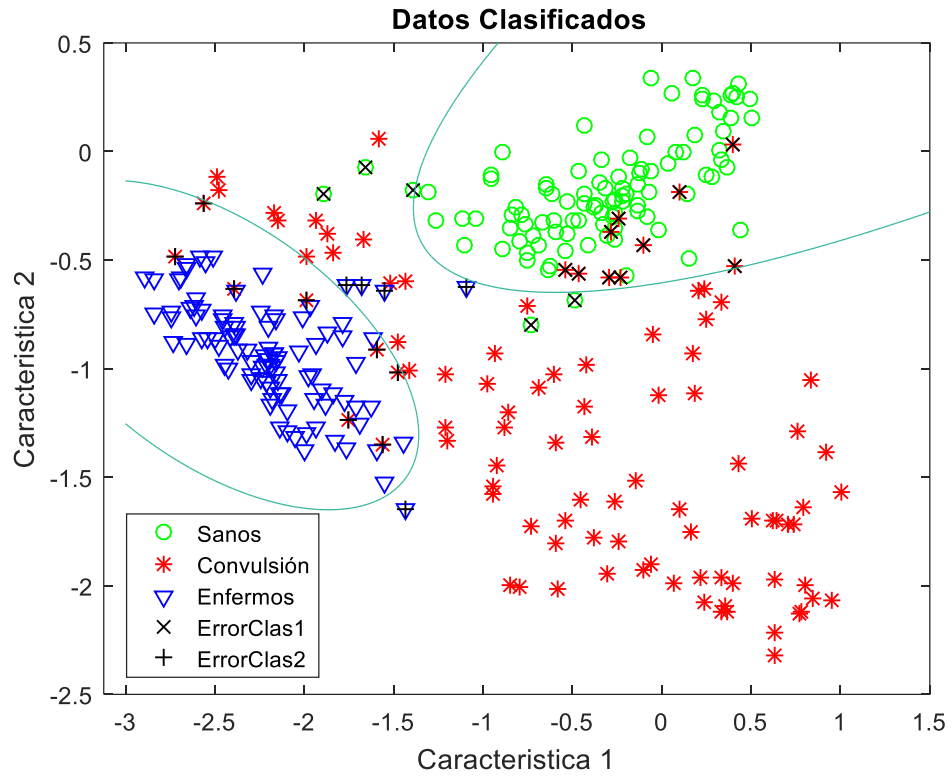
De esta manera solo quedó discriminar entre las etiquetas restantes teniendo en cuenta el error asociado a la primera clasificación. Puesto que la interacción entre la etiqueta de sujetos sanos tuvo relación con los datos pertenecientes a convulsión, los datos de la etiqueta sanos se tomaron como convulsión en la siguiente clasificación, de manera que solo quedó discriminar los datos restantes entre enfermos y pacientes en estado de convulsión lo cual se puede observar en la Figura 10.

Figura 10, Convulsión contra Enfermos



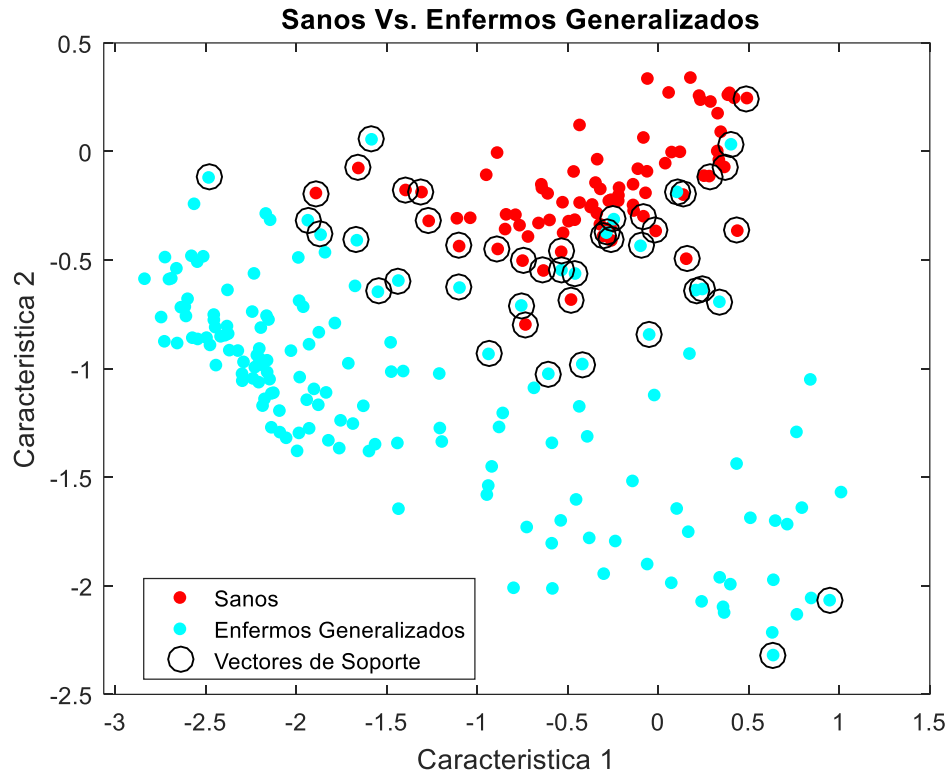
De manera general se muestra el funcionamiento de los clasificadores cuadráticos en cascada en la Figura 11. Donde se hace referencia a error clase 1 para el primer clasificador y error clase 2 para el segundo clasificador.

Figura 11, Funcionamiento Clasificador Cuadrático en cascada



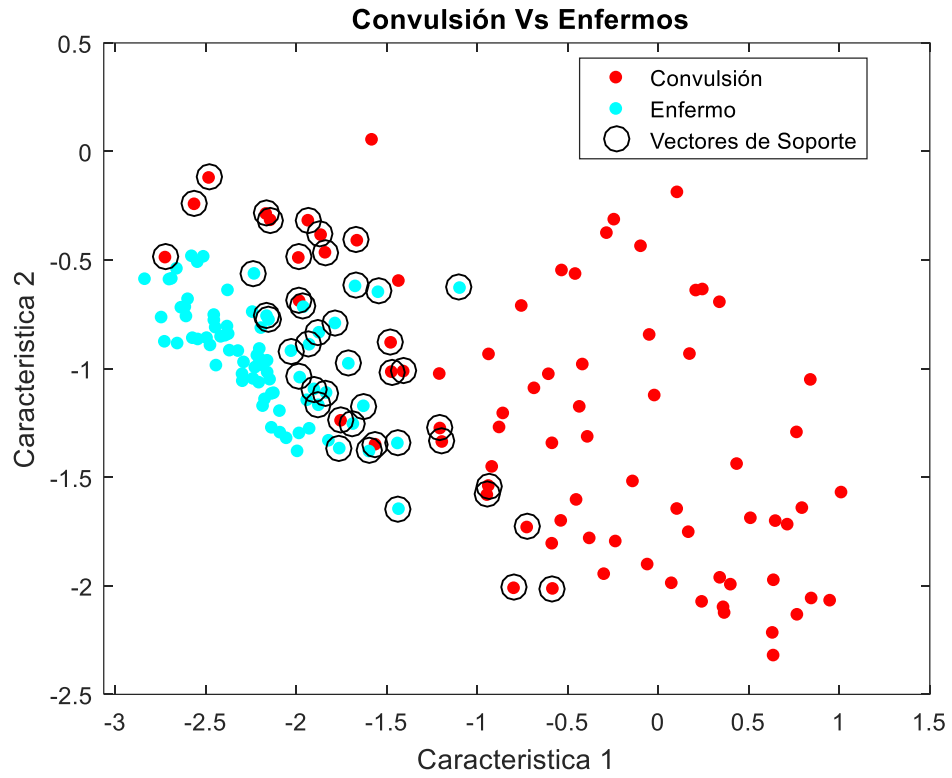
2.6.2 Máquina de Soporte Vectorial. La máquina de soporte vectorial se realizó utilizando la misma metodología que en el clasificador cuadrático, esto para hacer procesos comparativos de un clasificador contra el otro.

Figura 12, Máquina de Soporte Vectorial 1



La Figura 12 muestra el funcionamiento de la primera máquina de soporte vectorial, la cual genera una frontera de decisión discriminando la clase de enfermos generalizados contra los sanos.

Figura 13, Máquina de Soporte Vectorial 2



La Figura 13 muestra la segunda frontera de decisión marcada por la máquina de soporte vectorial que busca discriminar entre los pacientes enfermos y los que se encuentra en el episodio de epilepsia.

3 RESULTADOS

3.1 OBTENCIÓN DE CARACTERÍSTICAS

Se realizaron los cálculos sobre los conjuntos de datos para obtener las características lineales, encontradas bajos análisis de tiempo-frecuencia, como resultado se obtuvo una matriz de $\mathbf{x}_{300 \times 20}$ la cual se utilizó para la reducción de espacios. La Tabla 2 hace referencia a la media y a la desviación estándar de cada una de las características extraídas en su respectivo dominio de estudio.

Tabla 2, Resumen de las características lineales extraídas

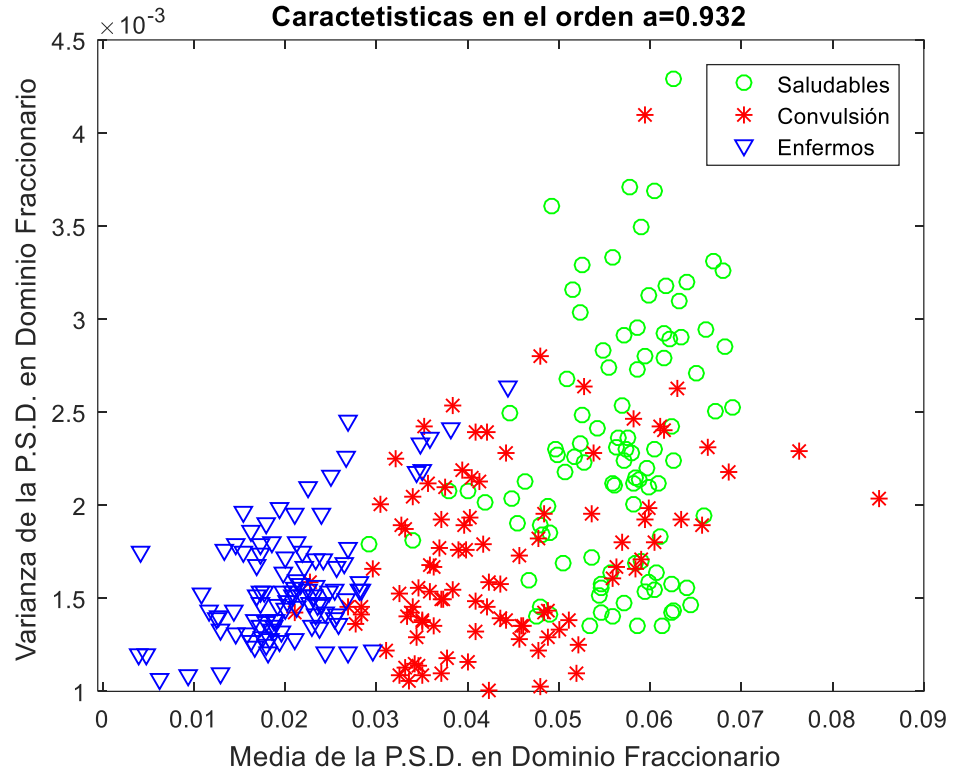
Índice	Característica	Sujetos Sanos		Sujetos Enfermos en estado normal		Sujetos Durante Epilepsia	
		μ	σ	μ	σ	μ	σ
X1	Variación Total Delta	0.0122	0.0019	0.0116	0.0016	0.164	0.0033
X2	Variación Total theta	0.0287	0.0043	0.0266	0.0042	0.0378	0.0108
X3	Variación Total Alfa	0.054	0.0087	0.043	0.0073	0.0541	0.0132
X4	Variación total Beta	0.0841	0.0106	0.0766	0.0195	0.0673	0.0207
X5	Variación Total Gamma	0.1546	0.0418	0.1514	0.038	0.1051	0.0382
X6	Potencia Relativa Delta	0.2187	0.1027	0.6712	0.1001	0.2543	0.2213
X7	Potencia Relativa Theta	0.1261	0.0339	0.195	0.061	0.3432	0.1696
X8	Potencia Relativa Alfa	0.468	0.1323	0.0992	0.0423	0.2719	0.095
X9	Potencia Relativa Beta	0.1687	0.0563	0.0298	0.0215	0.1203	0.0901
X10	Potencia Relativa Gamma	0.0186	0.0118	0.0049	0.0039	0.0103	0.0087

	Coef. Desv Estándar DWT						
X11	- Delta	1.8128	0.4093	3.2255	0.2425	1.8286	0.8271
	Coef. Desv Estándar DWT						
X12	- Theta	1.3903	0.1902	1.7205	0.2713	2.2275	0.6215
	Coef. Desv Estándar DWT						
X13	- Alfa	1.8976	0.2723	0.8643	0.1799	1.4361	0.269
	Coef. Desv Estándar DWT						
X14	- Beta	0.8058	0.1362	0.3273	0.105	0.6513	0.2289
	Coef. Desv Estándar DWT						
X15	- Gamma	0.1826	0.0587	0.0925	0.0337	0.1331	0.0522
	Potencia Relativa DWO						
X16	Delta	0.3417	0.1242	0.7237	0.0872	0.322	0.2407
	Potencia Relativa DWO						
X17	Theta	0.2006	0.048	0.2118	0.068	0.4432	0.203
	Potencia Relativa DWO						
X18	Alfa	0.3846	0.1332	0.0553	0.0269	0.188	0.0869
	Potencia Relativa DWO						
X19	Beta	0.0694	0.0253	0.0085	0.0068	0.049	0.0439
	Potencia Relativa DWO						
X20	Gamma	0.0038	0.0024	0.0007	0.0006	0.0019	0.002

3.2 CARACTERÍSTICAS FRACCIONARIAS

Se graficó la media y la varianza de la densidad espectral de potencia de cada señal en el dominio fraccionario sobre los órdenes estandarizados desde $\alpha=0$ hasta $\alpha=1$ con un paso de 0.1. Se adicionaron más cifras significativas sobre los órdenes entre $0.9 < \alpha < 1$ hasta llegar a un orden que ofreció una separabilidad de consideracion, como lo es el orden normalizado $\alpha= 0.932$ tal como lo muestra la :

Figura 14, Media y Varianza de la densidad espectral de potencia obtenida en el orden $\alpha=0.932$



Los histogramas de la media, la varianza y el sesgo de la densidad espectral de potencia de las señales en el dominio fraccionario son presentados en la Figura 15, Figura 16 y Figura 17 respectivamente:

Figura 15, Histograma de la media de la densidad espectral de potencia en el dominio fraccionario con orden $\alpha=0.932$

Histograma de la Media de la Densidad Espectral de Potencia en Dominio Fraccionario, orden 0.932

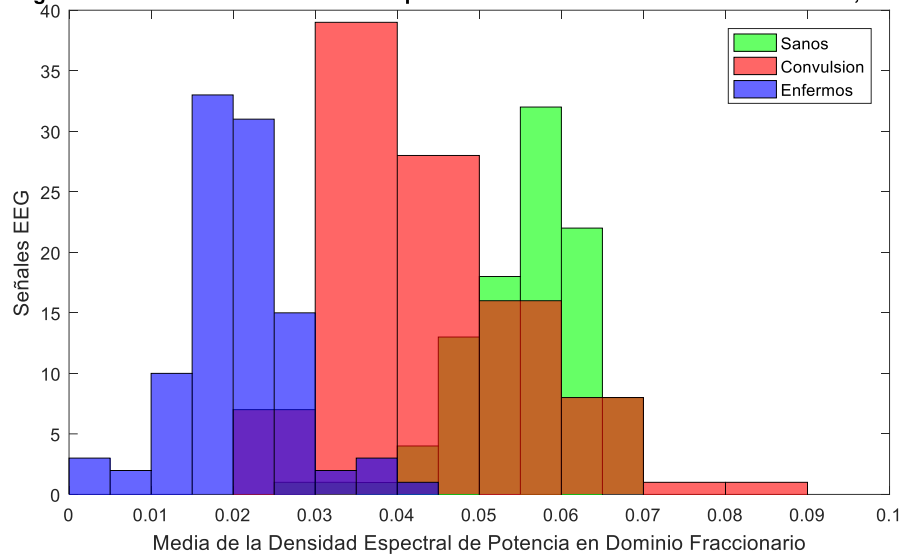


Figura 16, Histograma de la varianza de la densidad espectral de potencia en el dominio fraccionario con orden $\alpha=0.932$

Histograma de la Varianza de la Densidad Espectral de Potencia en Dominio Fraccionario, orden 0.932

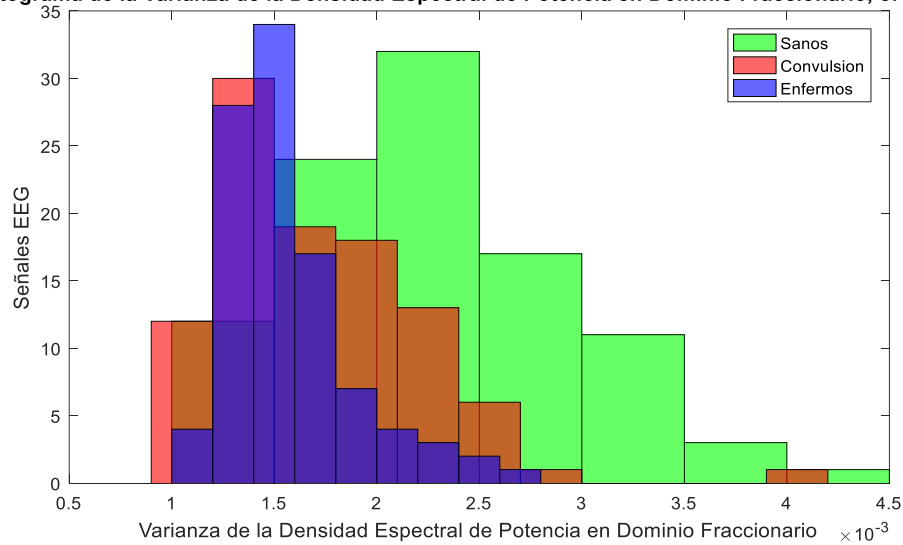
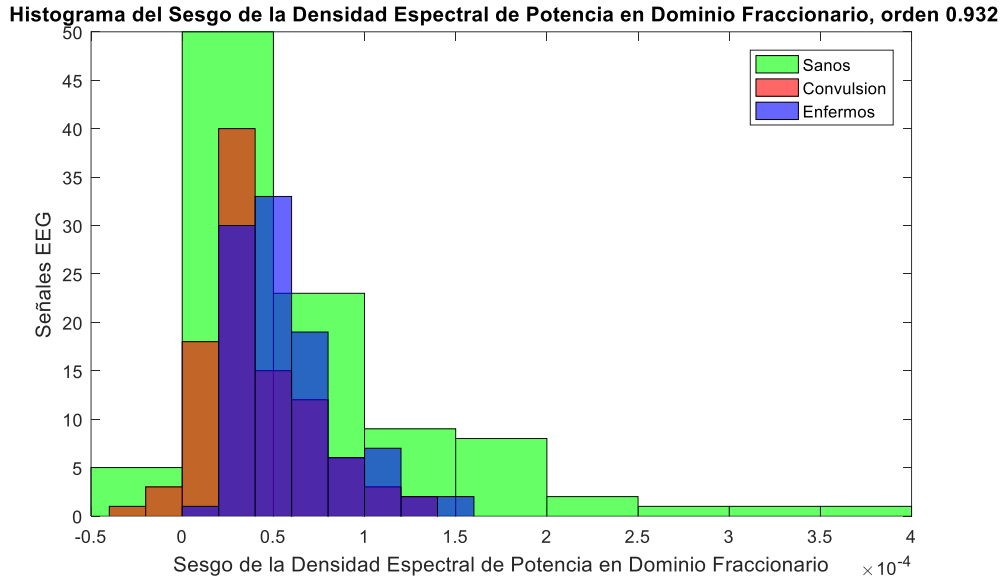


Figura 17, Histograma del sesgo de la densidad espectral de potencia en el dominio fraccionario con orden $\alpha=0.932$



Las gráficas anteriores resumen las variaciones que se presentaron al realizar la exploración sobre los órdenes fraccionarios, cuando se consideró el paso de 0.1 entre los órdenes se obtuvieron resultados similares en el rango total de $-2 < \alpha < 2$. Al estudiar otros órdenes fraccionarios con mayor cantidad de cifras significativas se encontraron pequeñas variaciones aleatorias en la posición de ciertos datos, sin embargo, esto no ofreció separabilidad mejor entre clases.

El orden $\alpha=0.932$ fue el orden que ofreció mejor separabilidad entre clases. Las características fraccionarias tienen la capacidad de separar los datos entre clases para una mejor discriminación si se busca el orden adecuado. Sin embargo, también se observa que para este caso en particular las características fraccionarias no aportan una separabilidad mayor entre clases, como se aprecia en la Figura 14 donde estas ayudan a discriminar entre las etiquetas de datos “Saludable”- “Enfermo” y “Enfermo-Convulsión”, pero no ayudan en el solapamiento entre las

clases “Saludable”-“Convulsión”. La tabla resume las características fraccionarias obtenidas en el orden $\alpha=0.932$:

Tabla 3, Características obtenidas en el dominio fraccionario con orden $\alpha=0.932$

X21	Media Dominio Fraccional ⁶	0.043	0.0182	0.0108	0.0228	0.0293	0.0264
	Variación Dominio						
X22	Fraccional ⁶	0.0418	0.003	0.0418	0.0039	0.00397	0.0032
	-						
X23	Sesgo Dominio Fraccional ⁶	0.0001	0.0011	0.0005	0.0015	0.0003	0.0014

Finalmente se adicionaron las características fraccionarias a las demás características halladas en el análisis lineal. Nuevamente se redujo la dimensión de espacios característicos mediante PCA, aglomerando un $98.82\pm 0.04\%$ de la varianza total en las tres primeras características más significativas.

Se adjuntan los índices de separabilidad obtenidos con las diferentes características para sustentar los resultados obtenidos después de la reducción de espacios, observe la Tabla 4.

⁶ Características calculadas para el orden normalizado $\alpha=0.932$

Tabla 4, Índices de Separabilidad

Características Analizadas	Dimensión		Índice de Separabilidad J	Varianza explicada [%]
	Antes	Después		
Dominio del Tiempo (X_{1-5})	5	3	2.7398	98.27
Incluyendo el Dominio de la Frecuencia (X_{1-10})	10	3	2.6900	98.06
Incluyendo el Dominio del tiempo-Frecuencia (X_{1-20})	20	3	12.0869	98.86
Incluyendo el Dominio Fraccionario (X_{1-23}) ⁷	23	3	14.991±3.5	98.82±0.04

3.3 ENTRAMIENTO CLASIFICADOR CUADRÁTICO

Se obtuvieron los coeficientes que definen las fronteras de decisión del primer clasificador cuadrático y se puede apreciar en la Tabla 5.

⁷ Características calculadas para el orden normalizado $a=0.932$

Tabla 5, Coeficientes Clasificador Cuadrático 1

Clasificador	Q			V	V _o
Sin características Fraccionarias	-1.7739	4.6263	-6.5621	1.5970	2.8004
	4.6263	-7.5980	-18.2368	2.4283	
	-12.2244	-19.7554	168.5915	-20.9890	
Con características Fraccionarias	-1.7734	-4.6249	6.5579	-1.6260	2.8500
	-4.6249	-7.6005	-18.2212	2.5188	
	6.5579	-18.2212	34.9069	-21.1024	

La Tabla 6 muestra los coeficientes que representan la frontera en el segundo clasificador cuadrático.

Tabla 6, Coeficientes Clasificadores Cuadráticos 2

Clasificador	Q			V	V _o
Sin Características Fraccionarias	6.4347	5.6953	-12.2244	30.5410	57.4781
	5.6935	12.0071	-19.7454	30.9413	
	-12.2244	-19.7454	168.5915	54.9292	
Con Características Fraccionarias	6.4364	-5.6945	12.2455	-30.5774	57.2774
	-5.6945	12.0046	-19.7479	-31.0127	
	12.2455	-19.7479	168.5622		

		54.0388	
--	--	---------	--

La matriz de confusión mostrada en la Tabla 7, muestra los aciertos y errores que cometió el clasificador cuadrático. La frontera de decisión entre clasificadores no se vio afectada de manera considerable al adjuntar características fraccionarias, los coeficientes que definen la función de evaluación de los clasificadores cuadráticos lo demuestra, los resultados son similares y gráficamente discriminan sobre áreas idénticas, no se hacen dos matrices de confusión puesto no tuvieron cambios considerables:

Tabla 7, Matriz de confusión del Clasificador Cuadrático

Clasificador cuadrático	Sano	Convulsión	Enfermo
Sano	20	0	0
Convulsión	4	16	0
Enfermo	0	2	18

3.4 ENTRENAMIENTO MÁQUINA DE SOPORTE VECTORIAL

La matriz de confusión para la máquina de soporte vectorial en la Tabla 8, muestra los errores y la precisión que tuvo el clasificador entrenado bajo la máquina de soporte vectorial, no se presenta sin características fraccionales puesto que tuvo el mismo resultado.

Tabla 8, Matriz de confusión de la Máquina de Soporte Vectorial

Máquina de soporte vectorial	Sanos	Convulsión	Enfermos
Sanos	20	0	0
Convulsión	0	19	1
Enfermos	1	1	18

3.5 RESULTADOS DE LA VALIDACIÓN CRUZADA

Utilizando una validación cruzada k-fold con partición de 5 se obtuvieron parámetros de rendimiento de los clasificadores, se computan en la Tabla 9 para el clasificador cuadrático y en la Tabla 10 para la máquina de soporte vectorial.

Tabla 9, Parámetros de rendimiento del clasificador cuadrático

Parámetros de rendimiento [%] del clasificador cuadrático			
Señal EEG	Sensibilidad	Especificidad	Exactitud
Sanos	98±2.7	89±3.4	92±2.6
Convulsión	87±6.5	94.5±3.3	
Enfermos	91±7.4	92.5±4.5	

Tabla 10, Parámetros de rendimiento de la máquina de soporte vectorial.

Parámetros de rendimiento [%] máquina de soporte vectorial			
Señal EEG	Sensibilidad	Especificidad	Exactitud
Sanos	98±4.5	91.5±4	93.6667±3.4
Convulsión	89±7.9	96±2.2	
Enfermos	94±5	93.5±5.8	

Se puede apreciar que la máquina de soporte vectorial presenta un promedio más alto de exactitud frente al clasificador cuadrático, pero sin ser muy distanciado uno del otro. Las dos técnicas superan el 90% de exactitud.

La hipótesis se basó en que al incluir las características fraccionarias a un conjunto de características tiempo-frecuencia estas podían mejorar la precisión de un clasificador. Infortunadamente los parámetros de rendimiento de los clasificadores con y sin características fraccionarias fue el mismo, porque las características fraccionarias no aportaron una mejora al índice de separabilidad entre clases, por lo cual las fronteras de decisión de los clasificadores no cambiaron considerablemente. En consecuencia, se obtuvieron las mismas matrices de confusión con la misma incertidumbre asociada a los parámetros de rendimiento.

4 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

4.1 CONCLUSIONES

En este proyecto de investigación se realizó la discriminación y detección de epilepsia basado en un conjunto específico de señales EEG bajo la metodología propuesta en la investigación de Gajic y colaboradores en [3], adicionando características asociadas al análisis de Fourier Fraccionario para verificar si estas ayudaban al proceso de clasificación. Se diseñaron 4 clasificadores utilizando 2 técnicas de clasificación distintas donde se utilizarán o no las características fraccionarias. Se obtuvo un desempeño por encima del 90% parte de los clasificadores, aunque no tuvieran las características no lineales presentadas en [3], y se evidenció que bajo la metodología presentada en [3] las características fraccionarias no presentaban un cambio considerable a las fronteras de decisión y por ende el desempeño de los clasificadores no cambiaba. Adicionalmente de manera más puntual se concluyó que:

- Las características extraídas a partir de la transformada fraccional de Fourier fraccional no aumentaron la precisión de los clasificadores, pero esto no quiere decir que las características no sirvan para clasificar señales EEG, solo que no mejoraron la distribución de los datos tras hacer de nuevo el análisis de componentes principales aun cuando se aglomeraba un 98.86% de la información con las características lineales calculadas.
- Como se mostró en el análisis de los momentos estadísticos por aparte, con un orden estandarizado de $\alpha=0.932$ logra una distribución de los datos que pueden ser favorables para hacer clasificación entre ciertas clases usando solo dichas características fraccionales.

- El orden estandarizado de $\alpha=0.932$ muestra que un conjunto de tres clases de datos se encuentra orientados sobre un ángulo α donde se pueden obtener cálculos optimizados para este tipo de señales no estacionarias.
- La descomposición por medio de wavelet permitió la extracción de características sobre una aproximación de las sub-bandas clínicas ayudando a realizar un estudio exhaustivo sobre los datos al extraer un mayor número de características y evaluarlas por medio del análisis de componentes principales para obtener mayor separabilidad entre datos y propiciando una clasificación más precisa.
- Se llevó a cabo la metodología mencionada en Gajic y colaboradores en [3] al hacer dos clasificadores cuadráticos en cascada y se concluyó que las características fraccionarias no mejoraron la precisión del clasificador.
- El entrenamiento de la máquina de soporte vectorial ayudó a complementar el estudio sobre la detección de epilepsia al agregar las características fraccionales y se evidenció que en esta técnica de clasificación tampoco se encontró una mejoría.
- Basado en los resultados obtenidos por el análisis de componentes principales se escogió la máquina de soporte vectorial como la mejor técnica de clasificación dado a la organización espacial de los datos con respecto a sus etiquetas.
- Las técnicas de clasificación obtuvieron un índice favorable con respecto a su precisión puesto que la máquina de soporte vectorial tuvo un $93.667\pm 3.4\%$ de precisión y el clasificador cuadrático un $92\pm 2.6\%$.

4.2 TRABAJOS FUTUROS

Se propone la reducción de espacios por medio de LDA utilizando la técnica de matrices de dispersión, sin embargo, se debe complementar la información de las características agregando características obtenidas a partir de un análisis no lineal como se realiza en [3].

La herramienta de desarrollo Matlab contiene una aplicación bajo una tool-box llamada "Statistics and Machine Learning Tool-box", la cual genera entrenamientos a clasificadores de manera automática y es capaz de medir su precisión. En esta se obtuvieron resultados por encima del 90%, sin embargo, dado a que su funcionamiento no encajaba la visión del proyecto se omitió. Se consideró también que debía haber un entrenamiento previo por parte de usuario a la hora de utilizar el clasificador que la tool-box entregaba, de manera que se propone realizar el debido estudio a dicha herramienta.

Los costos de errores en la clasificación no se tomaron en cuenta puesto que no existía una referencia médica con la competencia de sustentar el costo asociado a tener falsos positivos, es decir que un paciente fuera a tratamiento médico sin tener epilepsia o falsos negativos, es decir, pacientes que no fueron a tratamiento de epilepsia puesto que aparentemente diagnóstico no evaluó correctamente su estado.

Se propone utilizar otra metodología diferente a la mencionada en [3], puesto que sería anticipado descartar que las características obtenidas bajo el análisis de Fourier Fraccionario no pueden ayudar a la discriminación de epilepsia, de manera que se propone armar el proceso de clasificación con una cantidad menor de

características lineales y adicionalmente se propone no utilizar las divisiones de la señal en las bandas subclínicas, es decir, sobre las señales EEG completas.

REFERENCIAS

- [1] OMS, "Epilepsia". Organización Mundial de la Salud. (febrero 2016) Disponible en línea:
<http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs999/es/>.
- [2] GAJIC, D., DJUROVIC, Z., GLIGORIJEVIC, J., DI GENNARO, S., & SAVIC-GAJIC, I. Detection of epileptiform activity in EEG signals based on time-frequency and non-linear analysis. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 9 Marzo 2015, 1–16. doi:10.3389/fncom.2015.00038.
- [3] ANDRZEJAK, R., LEHNERTZ, K., MORMANN, F., RIEKE, C., DAVID, P., AND EL-GER, C. Indications of nonlinear deterministic and finite-dimensional structures in time series of brain electrical activity: Dependence on recording region and brain state. *Physical Review E* 64, 6 Nov. 2001, 061907.
- [4] CHINCHILLA ATENCIA, Lenin. Potencialidades de la teoría de Fourier fraccionaria en el procesamiento de señales EEG. Bucaramanga, 2015. Trabajo de investigación de Maestría en Ingeniería Electrónica. Universidad Industrial de Santander. Facultad de ingenierías fisicomecánicas. Escuela de ingeniería eléctrica, electrónica y de telecomunicaciones.
- [5] SCHULTZ, T. L. Technical Tips: MRI Compatible EEG Electrodes: Advantages, Disadvantages, and Financial Feasibility in a Clinical Setting. *The Neurodiagnostic Journal*, 52(1). 2012. Pag. 69–81. doi:10.1080/21646821.2012.11079844.
- [6] DUDA, R. O., HART, P. E., & STORK, D. G. *Pattern Classification*. New York: John Wiley, Section. 2000. <http://doi.org/10.1038/npp.2011.9> pg. 3-11.
- [7] BISHOP, C. M. *Pattern Recognition and Machine Learning*. *Pattern Recognition* (Vol. 4). 2006. Pag. 179-198. <http://doi.org/10.1117/1.2819119>.
- [8] BETANCOUR, G. LAS MÁQUINAS DE SOPORTE VECTORIAL (SVMs). *Scientia Et Technica*, (27). 2005. 67–72.
- [9] FUKUNAGA, K. *Introduction to Statistical Pattern Recognition*. *Pattern Recognition* (Vol. 22). 1990. [http://doi.org/10.1016/0098-3004\(96\)00017-9](http://doi.org/10.1016/0098-3004(96)00017-9).
- [10] FAWCETT, T. An introduction to ROC analysis Tom. *Pattern Recognition*, 27(6). 2006. 861–874. <https://doi.org/10.1016/j.patrec.2005.10.010>.
- [11] HEIJDEN, F., DUIN, R., RIDDER, D., & TAX, D. Classification, parameter estimation and state estimation. *John Willey & Sons*, 2004. 434 Pag, 399(6735), 423. <https://doi.org/10.1002/0470090154>.

- [12] FREUND, John. MILLER, Irwin. MILLER, Marylees. Estadística matemática con aplicaciones. Pearson Educación. 2000. 9701703898.
- [13] VEGA GARCÍA V. Aplicación De La Transformada Wavelet Discreta (Dwt) En La Detección E Identificación De Eventos De La Calidad De La Energía Eléctrica. Bucaramanga, 2004. Trabajo de investigación en Ingeniería Eléctrica. Universidad Industrial De Santander. Facultad de ingenierías físicas y mecánicas. Escuela de ingeniería eléctrica, electrónica y de telecomunicaciones.
- [14] DAUBECHIES, Ingrid. "TEN LECTURES ON WAVELETS", Philadelphia: SIAM. 1992. Pag. 357.
- [15] GUERRERO MOSQUERA, C., MALANDA TRIGUEROS, a., & NAVIA VAZQUEZ, A. EEG signal processing for epilepsy disease. 2012. Retrieved from <http://eprints.pascal-network.org/archive/00009086/>.
- [16] PROAKIS, J., and MANOLAKIS, D. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. 1996.
- [17] RAO, R., and BOPARDIKAR, A. *Wavelet Transforms: Introduction to Theory and Applications*. Boston, MA: Addison-Wesley Longman. 1998.
- [18] KALAYCI, T., and ÖZDAMAR, Ö. (1995). Wavelet preprocessing for automated neural network detection of EEG spikes. *IEEE Eng. Med. Biol.* 14. 1995. Pag. 160–166. doi: 10.1109/51.376754.

BIBLIOGRAFÍA

ADELI, H., GHOSH-DASTIDAR, S., & DADMEHR, N. A wavelet-chaos methodology for analysis of EEGs and EEG subbands to detect seizure and epilepsy. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 54(2). 2007. Pag. 205–211. <https://doi.org/10.1109/TBME.2006.886855>.

ANDRZEJAK, R., LEHNERTZ, K., MORMANN, F., RIEKE, C., DAVID, P., AND EL-GER, C. Indications of nonlinear deterministic and finite-dimensional structures in time series of brain electrical activity: Dependence on recording region and brain state. *Physical Review E* 64, 6 Nov. 2001, 061907.

BETANCOUR, G. LAS MÁQUINAS DE SOPORTE VECTORIAL (SVMs). *Scientia Et Technica*, (27). 2005. 67–72.

BISHOP, C. M. Pattern Recognition and Machine Learning. *Pattern Recognition* (Vol. 4). 2006. Pag. 179-198. <http://doi.org/10.1117/1.2819119>.

CHINCHILLA ATENCIA, Lenin. Convolución Fraccionaria: potencialidades en el tratamiento de señales no estacionarias. Bucaramanga, 2012. Trabajo de investigación en Ingeniería Electrónica. Universidad Industrial de Santander. Facultad de ingenierías fisicomecánicas. Escuela de ingeniería eléctrica, electrónica y de telecomunicaciones.

CHINCHILLA ATENCIA, Lenin. Potencialidades de la teoría de Fourier fraccionaria en el procesamiento de señales EEG. Bucaramanga, 2015. Trabajo de investigación de Maestría en Ingeniería Electrónica. Universidad Industrial de Santander. Facultad de ingenierías fisicomecánicas. Escuela de ingeniería eléctrica, electrónica y de telecomunicaciones.

DAUBECHIES, Ingrid. "TEN LECTURES ON WAVELETS", Philadelphia: SIAM. 1992. Pag. 357.

DUDA, R. O., HART, P. E., & STORK, D. G. Pattern Classification. New York: John Wiley, Section. 2000.
<http://doi.org/10.1038/npp.2011.9> pg. 3-11.

FAWCETT, T. An introduction to ROC analysis Tom. *Pattern Recognition*, 27(6). 2006. 861–874.
<https://doi.org/10.1016/j.patrec.2005.10.010>.

FREUND, John. MILLER, Irwin. MILLER, Marylees. Estadística matemática con aplicaciones. Pearson Educación. 2000. 9701703898.

FUKUNAGA, K. *Introduction to Statistical Pattern Recognition*. *Pattern Recognition* (Vol. 22). 1990.
[http://doi.org/10.1016/0098-3004\(96\)00017-9](http://doi.org/10.1016/0098-3004(96)00017-9).

GAJIC, D., DJUROVIC, Z., DI GENNARO, S., & GUSTAFSSON, F. Classification of Eeg Signals for Detection of Epileptic Seizures Based on Wavelets and Statistical Pattern Recognition. *Biomedical Engineering: Applications, Basis and Communications*, 26(2). 2014. 1450021. <https://doi.org/10.4015/S1016237214500215>.

GAJIC, D., DJUROVIC, Z., GLIGORIJEVIC, J., DI GENNARO, S., & SAVIC-GAJIC, I. Detection of epileptiform activity in EEG signals based on time-frequency and non-linear analysis. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 9 Marzo 2015, 1–16. doi:10.3389/fncom.2015.00038.

GUERRERO MOSQUERA, C., MALANDA TRIGUEROS, a., & NAVIA VAZQUEZ, A. EEG signal processing for epilepsy disease. 2012. Retrieved from <http://eprints.pascal-network.org/archive/00009086/>.

HEIJDEN, F., DUIN, R., RIDDER, D., & TAX, D. Classification, parameter estimation and state estimation. *John Willey & Sons*, 2004. 434 Pag, 399(6735), 423. <https://doi.org/10.1002/0470090154>.

KALAYCI, T., and ÖZDAMAR, Ö. (1995). Wavelet preprocessing for automated neural network detection of EEG spikes. *IEEE Eng. Med. Biol.* 14. 1995. Pag. 160–166. doi: 10.1109/51.376754.

KOHAVI, R. PROVOST, F.: Glossary of terms, *Machine Learning*, Vol. 30, No. 2/3. 1998. Pag. 271-274.

OMS, "Epilepsia". Organización Mundial de la Salud. (febrero 2016) Disponible en línea: <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs999/es/>.

PROAKIS, J., and MANOLAKIS, D. *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. 1996

RAO, R., and BOPARDIKAR, A. *Wavelet Transforms: Introduction to Theory and Applications*. Boston, MA: Addison-Wesley Longman. 1998.

SCHULTZ, T. L. Technical Tips: MRI Compatible EEG Electrodes: Advantages, Disadvantages, and Financial Feasibility in a Clinical Setting. *The Neurodiagnostic Journal*, 52(1). 2012. Pag. 69–81. doi:10.1080/21646821.2012.11079844.

VEGA GARCÍA V. Aplicación De La Transformada Wavelet Discreta (Dwt) En La Detección E Identificación De Eventos De La Calidad De La Energía Eléctrica. Bucaramanga, 2004. Trabajo de investigación en Ingeniería Eléctrica. Universidad Industrial De Santander. Facultad de ingenierías fisicomecánicas. Escuela de ingeniería eléctrica, electrónica y de telecomunicaciones.

WELCH, P. D. The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* AU-15. 1967. Pag. 70–73. doi: 10.1109/TAU.1967.1161901.