DEFICIENCIAS MATEMÁTICAS QUE AFECTAN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DE UNA UNIVERSIDAD PRIVADA

ANA DULCELINA LÓPEZ RUEDA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2005

DEFICIENCIAS MATEMÁTICAS QUE AFECTAN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DE UNA UNIVERSIDAD PRIVADA

ANA DULCELINA LÓPEZ RUEDA

Trabajo de Tesis

Directora
Aura Luz Castro de Pico
Mgr. Educación - Investigación

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS
ESCUELA DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA
BUCARAMANGA
2005

AGRADECIMIENTOS

A la Coordinadora de la Maestría y Directora del Proyecto, Mg. Aura Luz Castro de Pico quien supo interpretar mis propósitos y con su vasta experiencia en investigación, me orientó y condujo a la realización de este trabajo.

Al grupo de docentes y estudiantes adscritos a la Escuela de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Bucaramanga, que contribuyeron con sus voces, expresiones y desempeños en las diferentes pruebas aplicadas; elementos que me permitieron indagar y profundizar en el tema central de la investigación.

A mi familia y amigos, quienes estuvieron presentes todo el tiempo ofreciéndome su apoyo y animándome a concretar mis ideales.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	18
1. APROXIMACIÓN A LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA	20
1.1 DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	20
1.2 JUSTIIFICACIÓN	23
1.3 OBJETIVOS	25
1.3.1 Objetivo General	25
1.3.2 Objetivos Específicos	25
1.4 ANTECEDENTES	25
1.5 ESTADO DEL ARTE	35
1.6 RECONOCIMIENTO Y DIMENSIONAMIENTO DEL CONTEXTO	46
1.6.1 Carácter	46
1.6.2 Proyecto Educativo Institucional (PEI)	47
1.6.3 Algunos conceptos fundamentales en la UNAB	47

Pág.

1.6.4 Programas Académicos 50

1.6.5 Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería 51

1.6.6 Propósitos de formación de los diferentes Programas de Ingeniería de la UNAB. 51

1.6.7 Departamento de Matemática y Ciencias Básicas 52

2. SUSTENTO TEÓRICO 54

2.1 EL APRENDIZAJE DESDE EL COGNITIVISMO 55

2.2 LA DIDÁCTICA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS 80

3. PROCESO METODOLÓGICO 88

3.1 POBLACIÓN 89

3.2 MUESTRA 89

3.3 PROCESO DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN 90

3.4 PROCESO DE ANÁLISIS 94

4. HALLAZGOS 96

CONCLUSIONES 168

	Pág.
RECOMENDACIONES	171
BIBLIOGRAFÍA	175
ANEXOS	180

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Promedios y desviaciones estándar nacionales por grado, año 2002	32
Tabla 2. Resultados del puntaje en el Núcleo Común y por Grado de profundización en la prueba de Matemática, año 2003.	33
Tabla 3. Tabulación por subcategoría de los juicios de valor obtenidos por los estudiantes en cada paso básico del desarrollo de la Prueba.	113

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Figura 1. Distribución porcentual de los resultados de la Prueba según el desempeño de los estudiantes en cada paso establecido/juicio de valor. 112

Figura 2. Distribución porcentual del consolidado en subcategorías, de los juicios de valor obtenidos por los estudiantes en cada paso básico del desarrollo de la Prueba. 114

Figura 3. Representación gráfica de los puntajes obtenidos en cada subcategoría según juicios de valor a los ítems de la Prueba. 116

Figura 4. Distribución porcentual por categoría evaluada en la Prueba con relación a los juicios valorativos obtenidos. 118

Figura 5. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Factorización de Polinomios. 120

Figura 6. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Operaciones con Fraccionarios 122

Figura 7. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Aplicación de Algoritmos 124

Figura 8. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Operaciones entre conjuntos y aplicabilidad de la cardinalidad 126

Pág.

Figura 9. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Solución de ecuaciones lineales y cuadráticas; aplicación de la fórmula cuadrática. 128

Figura 10. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Teorema de Pitágoras 131

Figura 11. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Cuadrado de la suma de un binomio 132

Figura 12. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Relaciones e identidades trigonométricas. 134

Figura 13. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Conjunto de Números Complejos 135

Figura 14. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Solución de inecuaciones lineales 136

Figura 15. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Propiedades de las operaciones en los Números Reales 137

Figura 16. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en 7elación con la subcategoría Relaciones Reales 139

Figura 17. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Identificación de Datos 141

Pág.

Figura 18. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Identificación de Variables. 142

Figura 19. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Planteamiento del Modelo Matemático 143

Figura 20. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Operaciones Lógicas 145

Figura 21. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Operaciones Geométricas 147

Figura 22. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Operaciones Algebraicas 148

LISTA DE CUADROS

Pág.

Cuadro 1. Distribución de los ítems de la prueba según el concepto de precálculo, habilidad u operación, relacionados. 93

LISTA DE ANEXOS

Pág.

Anexo A. Prueba de reconocimiento de conceptos de precálculo. 180

Anexo B. Prueba piloto para el reconocimiento de conceptos de precálculo 182

Anexo C. Desarrollo de la prueba de reconocimiento de conceptos de precálculo, señalización de conceptos y elementos del proceso. 184

Anexo D. Aspectos significativos en relación con la enseñanza, aprendizaje y dominio de la Matemática en la voz de un grupo de estudiantes que tomaron Cálculo Diferencial en la UNAB en el I semestre de 2004. 191

Anexo E. Aspectos significativos en relación con la enseñanza, aprendizaje y dominio de la Matemática en la voz de un grupo de profesores del Departamento de Matemática de la UNAB. 197

Anexo F. Juicios de valor (por estudiante) en cada uno de los pasos mínimos en el desarrollo de la Prueba de reconocimiento de elementos básicos de Precálculo. 204

Anexo G. Tabulación de los Juicios de valor asignados para cada paso del desarrollo de la Prueba. 206

RESUMEN

TÍTULO[*]. DEFICIENCIAS MATEMÁTICAS QUE AFECTAN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DE UNA UNIVERSIDAD PRIVADA

AUTORA. Ana Dulcelina López Rueda[**]

PALABRAS CLAVES. Didáctica de la Matemática, Aprendizaje Significativo, Deficiencias Matemáticas, Competencias Matemáticas.

DESCRIPCIÓN CONTENIDO. Los bajos resultados académicos en Matemática tanto de lo(a)s estudiantes que ingresan a las carreras de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Bucaramanga (UNAB) como de lo(a)s estudiantes de Básica/Media en las pruebas aplicadas por el Estado, llevaron a plantear la necesidad de identificar las deficiencias matemáticas en los estudiantes de recién ingreso a ingeniería de la UNAB en relación con conocimientos, habilidades y operaciones básicas. Analizar esta situación, permitirá a la Universidad diseñar e implementar estrategias para favorecer procesos de aprendizaje que desarrollan pensamiento científico, reducir índices de deserción y/o repitencia, posicionarse en las pruebas de Estado; a los profesores implementar propuestas pedagógico-didácticas; a los estudiantes generar procesos metacognitivos que favorezcan el acceso a este conocimiento.

La investigación se fundamentó teóricamente en la Teoría Cognitiva tomando como base explicaciones de Jean Piaget, Lev Vygotsky y David Ausubel. Fue de tipo descriptivo con enfoque cualitativo; permitió indagar no sólo deficiencias sino el sentir de los estudiantes ante la Matemática.

Los hallazgos permitieron concluir que lo(a)s estudiantes tienen una auto-percepción negativa en cuanto al dominio de conceptos básicos requeridos para aprender Cálculo Diferencial, condición que atribuyen a factores internos como falta de estudio, desconcentración, desmotivación o, ausencia de métodos de estudio adecuados; a factores externos como falta de tiempo, deficiente preparación del colegio, políticas educativas gubernamentales sobre evaluación y al profesor quien como mediador de procesos de aprendizaje es fuente de experiencias positivas o negativas para el estudiante. En relación con los vacíos, se encontró la marcada

[*] Tesis

[**] Facultad de Ciencias Humanas. Escuela de Educación. Maestría en Pedagogía. Asesora: Mg. Aura Luz Castro de Pico.

tendencia a cometer errores en: retención y memorización de reglas (faltó precisión); operaciones con expresiones/fracciones numéricas/algebraicas (aplicación inadecuada); empleo de algoritmos (hicieron mezclas); identificación y manejo de operaciones básicas en los reales (aplicación inadecuada de propiedades); definición de relaciones trigonométricas (planteamientos inadecuados); diagramación y solución de problemas (identificación/ubicación inapropiada de datos/variables o confundieron modelos matemáticos) y finalmente a nivel socioafectivo se captó principalmente, desatención y poca recursividad (faltó aplicación de reversibilidad para confirmar resultados).

Finalmente, se hicieron algunas recomendaciones enfocadas principalmente con la oportunidad que la universidad debe brindar para la constitución de colectivos de investigación que conlleven al mejoramiento de la enseñanza de esta área

SUMMARY

TITLE[*]. MATHEMATICAL DEFICIENCIES OF ENGINEERING STUDENTS OF A PRIVATE UNIVERSITY THAT AFFECT LEARNING DIFFERENTIAL CALCULUS

AUTHOR. Ana Dulcelina López Rueda[**]

KEY WORDS. Mathematics Didactics, Significant Learning, Mathematical Deficiencies, Mathematical competences.

CONTENT DESCRIPTION. As a consequence of the low academic achievements in Mathematics of students who choose careers of Engineering at “Universidad Autónoma de Bucaramanga” (UNAB) and the results of the students who take the mandatory Government test of “Básica/Media”, the necessity arose to identify mathematical deficiencies of students who beging engineering programs at the UNAB in relation with basic knowledge, abilities, and operations. The analysis of this situation allows the University to design and implement strategies favoring learning processes which develop scientific thought, reduce dropouts and/or repetition rates, and improve its rank in Government tests when compared with other universities; the analysis also allows the professors to implement pedagogical-didactic proposals; and finally, the analysis allows the students to generate metacognitive processes favoring access to this knowledge.

The investigation is based theoretically on the Cognitive Theory using the explanations given by Jean Piaget, Lev Vygotsky and David Ausubel. It is a descriptive, qualitative approach; it allows to investigate deficiencies as well as the feelings of the students towards Mathematics.

The results conclude that the students have a negative self-perception concerning the dominion of basic concepts required to learn Differential calculus. This condition is attributed by the students to internal factors such as: lack of study, lack of concentration, lack of motivation, and absence of suitable study methods, and to external factors such as: lack of time, inappropriate preparation of the school, governmental educative policies on evaluation, and the professor who is as a mediator of the learning processes and as a source of positive or negative experiences for

[*] Thesis

[**] Ability of Human Sciences. School of Education. Master in Pedagogy. It advises: Mg. aura Luz Castro de Pico.

the student. In relation with deficiencies, there is a noticeable tendency to make errors in: retention and memorization of rules (it lacked precision); operations with numerical/algebraic expressions/fractions (inadequate application); use of algorithms (they made mixtures); identification and handling of basic operations with real numbers (inadequate application of properties); definition of trigonometric relations (inadequate expositions); layout and solution of problems (unsuitable identification/ubication of datas/variables or confused mathematical models), and at a socioaffective level, students are inattention and posses little resourcefulness (it lacked application of reversibility to confirm results).

Finally, some recommendations are made focused mainly on the opportunity that the university must provide for constituting investigation groups that will entail improvements in the education of Mathematics.

INTRODUCCIÓN

El mejoramiento de la calidad de la educación superior supone un necesario proceso de revisión constante de las prácticas de estudiantes y profesores como aprendices y enseñantes de los diferentes saberes y disciplinas. Es por ello que al hacer un análisis de la formación matemática que recibe el ingeniero, es indispensable hacer una mirada hacia su formación inicial para determinar si al llegar a la Universidad los estudiantes han desarrollado las competencias básicas para aprender y entender los contenidos de las nuevas asignaturas relacionadas con Matemáticas que los diferentes currículos universitarios contemplan.

Los resultados de la Prueba Saber y el Examen de Estado para el ingreso a la Universidad, así como la alta deserción y repitencia de las diferentes asignaturas del área de Matemática, parecen constituirse en una evidencia que puede estar mostrando que los estudiantes llegan a la Universidad sin las competencias necesarias para los aprendizajes posteriores de la Matemática. Es por ello que la presente investigación pretende identificar las deficiencias matemáticas que afectan el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Bucaramanga (UNAB). Ello le permitirá a la Universidad favorecer los procesos de aprendizaje que apuntan al desarrollo del pensamiento científico de sus estudiantes, la implementación de nuevas propuestas pedagógicas y didácticas por parte de los profesores, el avance hacia la reducción de los índices de deserción y repitencia, un posible posicionamiento de la Universidad en las pruebas realizadas por el Estado y un reconocimiento por parte del mismo estudiante de sus falencias, lo que contribuirá a que desarrolle nuevas y mejores herramientas para acceder al conocimiento.

El trabajo contempla los siguientes capítulos:

PRIMERO. Se describe, formula y justifica el problema de investigación así como los objetivos de la misma; se exponen las acciones que algunas universidades colombianas han diseñado para solucionar problemas como el que se trata en este trabajo; se hace alusión a estudios realizados por organismos como la UNESCO sobre deficiencia en competencias básicas en el área de matemática y se muestran los resultados nacionales de las diferentes Pruebas que el Estado ha aplicado para medir la calidad de la educación. Así mismo, se exponen los elementos que constituyen los antecedentes del problema, el Estado del Arte y una reseña sobre la UNAB, contexto en el que se desarrolla la investigación.

SEGUNDO. Se desarrolla el supuesto teórico que ilumina el trabajo y permite la comprensión y valoración de los hallazgos; este sustento teórico parte de la Teoría Cognitiva desde los planteamientos de Piaget, Vygotsky y Ausubel.

TERCERO. Se presenta la metodología que direccionó la investigación y las actividades, técnicas e instrumentos seleccionados para la recolección de la información; finalmente se menciona cómo se validó la información obtenida.

CUARTO. Se muestran los hallazgos y la contrastación de los datos desde diferentes fuentes; se hace la interpretación y análisis de la información obtenida a partir del trabajo de campo.

Finalmente, se presentan las conclusiones obtenidas del proceso de indagación, interpretación y análisis de los resultados y se plantean algunas recomendaciones.

1. APROXIMACIÓN A LA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

1.1 DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La matemática como objeto de conocimiento que se hace visible en la naturaleza y a la cual el mundo de hoy le exige su participación en todas las situaciones económicas y sociales, necesita ser abordada con una metodología que haga de ésta, una actividad de aprendizaje real y significativa. Se requiere que los sistemas educativos y el grupo de profesores formadores en esta rama del saber, ofrezcan una formación matemática coherente, sólida y enfocada de tal modo que se minimicen las posibles dificultades que presentan los estudiantes de todos los niveles de formación.

La Matemática es una de las áreas de conocimiento a la que más relevancia se le ha dado en los currículos de Educación Básica, Media y Universitaria; constituye una de las bases fundamentales para la comprensión de contenidos de Ciencias Naturales y Ciencias Sociales. En los lineamientos curriculares planteados por el MEN se considera a la matemática "como una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona privilegios y ventajas... son un cuerpo de conocimientos dinámico que está en continua expansión, que se encarga del estudio y desarrollo de los objetos que han sido llamados matemáticos y que se refieren a características de objetos a-temporales y a-espaciales."[1].

En las universidades la Matemática es parte esencial de la formación en la mayoría de las carreras profesionales; de hecho casi todos los planes de estudio contemplan en sus primeros semestres el desarrollo de asignaturas relacionadas con esta área de conocimiento, llámense Fundamentos de Matemática, Algebra,

[1] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Matemáticas. Lineamientos curriculares. 1998. Bogotá: MEN. p. 14

Cálculo I, II, III ó IV, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo en Varias Variables, Ecuaciones Diferenciales, Matemática aplicada....

Ha habido una constante preocupación en el país por los resultados obtenidos por los estudiantes en el área de Matemática. En el año 2002 se aplicó la Prueba Saber[2] para evaluar competencias en Lengua Castellana y Matemática en los grados de 5° y 9° de la Básica con la pretensión de reconocer fortalezas y debilidades académicas en estas áreas. Ha sido preocupante constatar que en Matemática el promedio está por debajo de lo que se considera aprobado y que los niños y niñas de Colombia no están desarrollando satisfactoriamente esta área del conocimiento.

De igual forma, los resultados del examen de Estado para ingreso a la Educación Superior[3] realizado en el 2003, reflejan que el desempeño promedio de los estudiantes en Matemática en la prueba de núcleo común, concentra el mayor porcentaje de evaluados por debajo del 60% de aprobación y en la de profundización, el 80% sólo alcanza el nivel I en la escala de valoración.

Lo anterior significa que los requerimientos mínimos en el área de Matemática no están siendo alcanzados por la mayoría de los estudiantes colombianos, lo que ha de ser motivo de reflexión pedagógica para la Educación Básica y Media y ha de constituir un reto a la Educación Superior, quien es la encargada de recibir en sus aulas a estos estudiantes. No obstante, las universidades esperan que los estudiantes que llegan a cursar carreras de Ingeniería, posean las competencias mínimas en Química, Física y Matemática. Sin embargo, dada la deserción temprana y los bajos porcentajes de promoción, surgen inquietudes sobre la calidad de las competencias logradas en los niveles de escolaridad anteriores al

[2] MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. SABER 2002-2003. Resultados de la Evaluación en Colombia. En: Revolución Educativa, Colombia Aprende. Bogotá: ICFES, 2003.

[3] MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL ¿Qué evalúan las pruebas?. En: Revolución Educativa, Colombia Aprende. Bogotá: ICFES, 2003. p.6.

universitario, situación que se ha agudizado a partir de políticas públicas en educación, expresadas en las distintas reglamentaciones nacionales con relación a la promoción automática, los porcentajes mínimos de repitencia y el sistema de evaluación, entre otros.

Esta situación ha sido objeto de análisis y reflexión en el Departamento de Matemática en la Universidad Autónoma de Bucaramanga dado que los informes sobre deserción, repitencia y promedios presentados por las diferentes Facultades en relación con las asignaturas de esta área del conocimiento, están mostrando una situación anómala que es necesario corregir. Ha sido petición de los Decanos que el Departamento revise a su interior los contenidos, metodología, estrategias pedagógicas y recursos que se están utilizando, con el ánimo de procurar la sostenibilidad de los estudiantes en la Universidad, sin el deterioro de la exigencia y nivel académico y profesional de los mismos.

Frente a estos hechos se generan algunos interrogantes: ¿En qué están fallando los estudiantes que ingresan a Ingeniería?, ¿Cómo debe orientarse la enseñanza de la matemática para que resulte una actividad que desarrolle competencias básicas en el manejo de conceptos matemáticos?, ¿Cómo reconocer en los estudiantes los conocimientos y habilidades básicas para acceder a los nuevos aprendizajes?, ¿Qué estrategias de enseñanza deben implementarse para disminuir los altos índices de deserción en los niveles básicos de la formación universitaria y cuya responsabilidad recae principalmente en la matemática?, ¿Cómo se ha de articular el desarrollo de competencias en el nivel de la educación básica y media, con el nivel universitario?. Estos interrogantes tienen su fundamento en la preocupación de los maestros tanto por entender a sus estudiantes como por el deseo de obtener mejores desempeños de su acción en el aula al igual que por reducir la frustración que causa la poca efectividad de los procesos de aprendizaje en la actualidad. Estos interrogantes -entre otros-, conducen a desarrollar un trabajo investigativo que dé cuenta de las deficiencias de los estudiantes en el área de Matemática, que sirva como fundamento a los maestros y a las universidades para el planteamiento de propuestas pedagógicas que contribuyan a mejorar esa situación. Por ello el problema central de la investigación es:

¿Cuáles son las deficiencias matemáticas que afectan el aprendizaje del Cálculo Diferencial en estudiantes de ingeniería de la UNAB?

Para concretar el proyecto de investigación, se formularon las siguientes preguntas directrices que orientaron el estudio y análisis del problema:

- ¿Cómo perciben los estudiantes su experiencia matemática en los diferentes ámbitos escolares?.

- Cuál es el "sentir" de los estudiantes ante la matemática?

- ¿Cuál es el nivel de suficiencia matemática de los estudiantes de Ingeniería que cursan la asignatura de Cálculo Diferencial?.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Las universidades del presente siglo tienen el desafío de "desarrollar un proyecto que dinamice los procesos pedagógicos en Ciencias Básicas, que permita organizar, reorganizar y repensar el andamiaje de la formación integral del Ingeniero, de acuerdo con sus particularidades y sin perder de vista que la esencia de su ser académico está en la física, la matemática y las humanidades"[4]. Para ello se necesita que la Universidad genere las condiciones adecuadas de tal forma que sea consciente de las fortalezas y debilidades de sus docentes y estudiantes para lograr procesos de calidad y la construcción de una sociedad del

[4] LÓPEZ RODRÍGUEZ, Edgar. Las ciencias básicas y sus deficiencias en el ciclo básico. En : REUNIÓN NACIONAL DE FACULTADES DE INGENIERÍA. (XXIII : 2003 : Cartagena). La dimensión social en las Facultades de Ingeniería, Bogotá : ACOFI , 2003. Tomo II, p. 79-84.

conocimiento. Indagar sobre las deficiencias matemáticas que afectan el aprendizaje del Cálculo Diferencial, es importante por cuanto permitirá además de identificar tales deficiencias, encontrar posibles razones que puedan justificar la dificultad en la profundización y ampliación de los conocimientos relacionados. Igualmente, de este proceso se espera no sólo descubrir las temáticas fundamentales en los que hay deficiencias sino también, aquellas que obstaculizan la ampliación a los nuevos aprendizajes, los conceptos y subconceptos existentes o inexistentes y la forma como los jerarquizan o relacionan.

Conceptuar alrededor de esta temática de investigación será de impacto en la UNAB puesto que al favorecer los procesos de aprendizaje, se espera el cumplimiento de objetivos en cuanto a la formación de pensamiento científico, así como la disminución en los índices de deserción y repitencia, el posicionamiento en las Pruebas del Estado y el avance en los respectivos planes de estudios. Para la Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería y en particular para el Departamento de Ciencias Básicas, será un aporte importante porque le permitirá al Comité Curricular de la UNAB hacer propuestas de implementación y desarrollar un plan de mejoramiento que contemple los diferentes sectores que intervienen en el proceso de aprendizaje.

Identificar las deficiencias matemáticas que los estudiantes presentan al iniciar el estudio del Cálculo en la Universidad, permitirá a los docentes proponer procesos de enseñanza que apunten al logro de aprendizajes significativos, de tal modo que los resultados del proceso sean más satisfactorios que los actuales y se propicie la comunidad académica que se desea formar. Para los estudiantes será relevante, dado que al reconocer las propias dificultades, se incentivarán a buscar apoyo y valorar la influencia favorable que tiene el dominio de los preconceptos, lo que contribuirá a desarrollar nuevas y mejores herramientas para acceder al conocimiento.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General. Identificar las deficiencias matemáticas que afectan el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes de ingeniería de la UNAB.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Identificar las percepciones de los estudiantes y profesores de la asignatura Cálculo Diferencial en relación al ser y sentir ante la Matemática.

- Determinar el nivel de suficiencia matemática conceptual y operatoria de los estudiantes de Ingeniería que cursan la asignatura de Cálculo Diferencial.

1.4 ANTECEDENTES

El desempeño académico de los estudiantes de Ingeniería en Ciencias Básicas y especialmente en el área de Matemática, ha sido y sigue siendo tema de conversación en los diferentes escenarios de la vida escolar nacional e internacional, de una parte por su importancia en la formación intelectual y de otra, por la dificultad para su aprendizaje y las consecuencias manifestadas en la deserción y/o promoción.

Se tiene conocimiento de algunas Universidades que para fortalecer el ciclo básico de Ingeniería contemplan en su plan de estudios asignaturas denominadas Matemática Remedial, Matemática Cero, Matemática Introductoria, Física Elemental, Introducción a la Física, cursos preuniversitarios o al menos, un Semestre Cero que desarrolle tres niveles de trabajo en Matemáticas, Física y Humanidades.

Algunas han sido las decisiones asumidas por diferentes universidades, como estrategias de choque diseñadas y aplicadas, para afrontar dificultades en relación con el aprendizaje de las ciencias básicas y así fortalecer las competencias de los estudiantes. Vale la pena mencionar las acciones desarrolladas por algunas **universidades colombianas** en tal sentido:

- **Facultad de Ingeniería de la Universidad de los Andes**. Esta Universidad, ofrece cursos complementarios de precálculo para nivelar a los estudiantes. Sin embargo, reconoce que se obtienen mejores resultados a través de experiencias vivenciales bien diseñadas. Así, de una parte ofrece a los profesores el curso Taller en Docencia y de otra, ha considerado fundamental hacer alianza con la escuela primaria y secundaria, dado que la responsabilidad de formación no empieza con los nuevos estudiantes de primer semestre, sino mucho antes. Por eso, la Facultad de Ingeniería lidera el proyecto de Pequeños Científicos, como parte de las acciones encaminadas a cumplir con su misión.

Pequeños Científicos es una estrategia de aprendizaje que busca una nueva valoración de la ciencia como quehacer infantil y de su enseñanza como deber de la escuela primaria; su objetivo es una aproximación progresiva a las nociones, conceptos y al quehacer científicos. El modelo, contempla el acompañamiento de estudiantes universitarios y/o la visita de científicos a las aulas de clase[5].

- **Facultad de Ingeniería de la Universidad de Antioquia.** En su nuevo plan de estudios incluye la metodología de Proyectos de Aula donde se propone solucionar situaciones complejas cercanas a la realidad de la profesión. Se busca aplicar estrategias didácticas complementarias a la clase magistral tradicional como el aprendizaje basado en problemas y el uso de nuevas tecnologías en la enseñanza. En clase, se ofrecen problemas con distinto grado de dificultad –los cuales tienen un reconocimiento al momento de la evaluación- comenzando con

---

[5] HERNÁNDEZ, José; DUQUEM, Mauricio y BELTRÁN, Elsa María. La Proyección Social de los Estudiantes de Ingeniería: Contribuciones a la Educación Básica en Ciencias. En : REUNIÓN NACIONAL DE FACULTADES DE INGENIERÍA. (XXIII : 2003 : Cartagena). La dimensión social en las Facultades de Ingeniería, Bogotá : ACOFI, 2003. Tomo II, p. 73-77.

planteamientos concretos y lógicos que requieren la aplicación de una ecuación para su solución; luego se dan otros, con supuestos adicionales o nuevos parámetros que requieren dos o más procedimientos para ser resueltos. Este método, obliga a los estudiantes a responsabilizarse por los resultados de su aprendizaje, a trabajar por fuera del aula, a realizar un acompañamiento individual y a fortalecer la discusión en los grupos de trabajo. El docente es guía y acompañante activo en el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes[6].

- **Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica de Colombia.** Esta Facultad con la participación activa de los profesores, logró consolidar grupos de estudiantes que lograran mejores resultados desde su formación básica y a partir de las condiciones mínimas en el saber y saber hacer. Generaron líneas de desarrollo del pensamiento para: utilizar la lectura comprensiva y la escritura con sentido e interpretar y expresar situaciones de la realidad; argumentar y explicar procesos algebraicos, analíticos y geométricos; adquirir, organizar y procesar la información para establecer conclusiones y proponer alternativas de solución a problemas propuestos; utilizar el conocimiento para interpretar y modelar matemáticamente situaciones y utilizar herramientas informáticas y tecnológicas para hacer más eficiente el manejo algorítmico[7].

- **Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito de Bogotá.** Con el ánimo de formar ingenieros con capacidad de responder a las demandas del desempeño profesional de la ingeniería y a los retos impuestos al desarrollo del país y de la región, esta institución se propuso generar y aplicar nuevas estrategias pedagógicas en algunos cursos de matemática de los programas de pregrado. Estas estrategias están relacionadas con la resolución de problemas en un ambiente de aprendizaje como el laboratorio y favorecen los propósitos de

---

[6] CAÑÓN B., Julio E. Acompañamiento en el Aula: Experimento de lo Simple a lo Complejo. En : REUNIÓN NACIONAL DE FACULTADES DE INGENIERÍA. (XXIII : 2003 : Cartagena). La dimensión social en las Facultades de Ingeniería, Bogotá : ACOFI , 2003. Tomo I, p. 9-12.

[7] LÓPEZ RODRÍGUEZ, Op. Cit., p. 79-84.

formación como: lograr un dominio adecuado del lenguaje de la ciencia, desarrollar destrezas cognitivas y experimentales y desarrollar habilidades para razonar científicamente y resolver problemas.

Lo anterior, implicó incorporar al proceso de formación de ingenieros, algunos elementos propios de la formación científica tales como el pensamiento crítico, creativo y complejo, además de garantizar durante el proceso, un dominio adecuado del lenguaje de la ciencia y la tecnología. Fue necesario trabajar en tres ámbitos de formación: los contenidos verbales (conceptos, teorías, modelos), procedimentales (habilidades, destrezas, competencias) y los actitudinales (prácticas, normas, valores, códigos éticos)[8].

Así mismo, diferentes **organismos educativos nacionales e internacionales**, preocupados por elevar la calidad de la educación, han realizado estudios de diagnóstico o de evaluación que evidencian deficiencias en el manejo de las competencias básicas en el área de Matemática. Vale la pena mencionar algunos de éstos:

- En el año 2003, la Secretaría de Educación de Bogotá, aplicó pruebas de competencias básicas en la Institución Educativa Manuelita Sáenz. Los resultados globales de cada prueba, comparados con una base de datos de años anteriores de evaluaciones aplicadas a los mismos grados, quinto, séptimo y noveno, arrojaron la siguiente conclusión: a medida que se avanzó en el proceso, los porcentajes de estudiantes que se superan son menores y con tendencias cada vez más preocupantes e índices demasiado bajos, con media aritmética de 16.63 sobre 25 preguntas, para la prueba de quinto de primaria; 6.81 para el grado séptimo y 4.36 en el grado noveno sobre 21 preguntas. Estas pruebas fueron las

---

[8] GUERRERO USEDA, María Eugenia. Resolución de problemas y laboratorios: Estrategias para formar ingenieros con perfil investigativo. En : REUNIÓN NACIONAL DE FACULTADES DE INGENIERÍA. (XXIII : 2003 : Cartagena). La dimensión social en las Facultades de Ingeniería, Bogotá : ACOFI , 2003. Tomo II, p. 157-161.

mismas que se aplicaron en octubre de 1999 a todo el Distrito Capital, con resultados semejantes[9].

- El Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE) de la Oficina Regional de UNESCO para América Latina y el Caribe desde 1997 viene realizando actividades de evaluación de la Educación. En el año 2002, el LLECE[10] presenta los resultados del "Estudio Cualitativo de Escuelas con resultados destacables" en siete de los trece países latinoamericanos que participaron en el "Primer Estudio Internacional Comparativo sobre Lenguaje, Matemática y Factores Asociados para alumnos de Tercer y Cuarto Grado de la Educación Básica" realizado en 1998 y cuyo informe técnico se presentó en el año 2001. Inicialmente, el estudio tuvo un carácter cuantitativo.

La información se obtuvo a partir de la aplicación de pruebas estandarizadas en Lenguaje y Matemática, acompañadas de cuestionarios que recogieron información del alumno, tutores o padres, docentes, directores y escuelas. Los datos fueron analizados estadísticamente y los resultados permitieron identificar niveles de logro académico, desagregados por país y estratos. Con la información recogida a través de los cuestionarios se detectaron escuelas que pueden definirse como destacables en sus resultados académicos. Estas escuelas son aquellas cuyos alumnos obtuvieron un rendimiento en matemática por encima del que era posible esperar según el nivel educativo de los padres. Por eso, con el propósito de ampliar la información obtenida en ese "Primer Estudio Internacional Comparativo", se llevó a cabo el "Estudio Cualitativo de Escuelas con resultados destacables", indagando en profundidad sobre los factores que inciden en los resultados de los alumnos. Los países que participaron en el estudio fueron Argentina, Bolivia, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba y Venezuela.

---

[9] Ibid., p. 81.

[10] UNESCO. Estudio cualitativo de escuelas con resultados destacables en siete países latinoamericanos. Santiago de Chile: Unesco, (sep. 2002); p.7-31.

En Colombia se seleccionaron cinco instituciones tanto urbanas como rurales así: Bogotá (2), Córdoba (2) y Tuluá (1), cuatro oficiales y una privada. Se observaron clases de matemática y de Español. Se aplicaron entrevistas a estudiantes, padres de familia, docentes y directivos y se trabajó con grupos focales, de cada una de las Instituciones. De la información obtenida, se encontraron como factores positivos, entre otros:

- Las tareas en grupo son de las actividades más agradables para los niños y los ejercicios y dictados ayudan a entender y a tener la mente más abierta para saber contestar.

- Al inicio de cada clase los profesores revisan los procesos de aprendizaje en los estudiantes, evidenciando los vacíos.

- Manejo flexible del tiempo. Los niños no se sienten presionados por el tiempo sino que van a su ritmo. Las clases más atractivas son Inglés, Ciencias Naturales y Matemáticas y las actividades que más disfrutan son la lectura y escritura de fábulas al igual que los ejercicios de matemáticas, especialmente los difíciles porque los ponen a pensar y se divierten desarrollándolos.

- Apoyo individual a los alumnos. No obstante, independientemente de la metodología de enseñanza que se emplee, su éxito depende de la motivación del estudiante.

- Las escuelas con resultados destacables son aquellas que innovan y cuyas normas regulan la convivencia social y el trabajo estudiantil en la búsqueda de no penalizar sino formar y construir.

- Los docentes organizan con creatividad las clases, fragmentando los temas de acuerdo a las necesidades del grupo.

- El error en el salón de clase se considera como una oportunidad más de conocimiento... Los estudiantes ven los errores como una herramienta para el aprendizaje, en la medida en que logran evidenciar un proceso mental errado del cual se aprende.

- Los programas responden a la realidad. Las actividades que se realizan durante las salidas a los diferentes centros, parques y museos, favorecen el rendimiento académico.

- **Resultados de las Pruebas Saber en Colombia, año 2002**. Estas pruebas evaluaron las competencias en lenguaje y matemáticas de los estudiantes que estaban en el nivel de educación básica, en los grados 3° y 9° y en algunos departamentos 5° y 7°. Se pretendía reconocer fortalezas y debilidades académicas en estas áreas del conocimiento y sobre esta base definir nuevas políticas para cualificar la educación.

> Durante muchos años se han identificado dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como la desmotivación hacia el aprendizaje, las altas tasas de mortalidad académica, la apatía, la repitencia, la deserción y la creencia de que a un buen profesor de matemática no le aprueban la materia un número significativo de estudiantes. Además, existe la tendencia, un tanto generalizada, de considerar la matemática como algo inalcanzable e incomprensible, limitándose por esto su estudio, muchas veces, a la mecanización y a la memoria, y no a la comprensión de sus conceptos. Estas dificultades, entre otras, han generado diferentes estudios e investigaciones sobre lo que "debería" ser o sobre cómo hacer matemática en la escuela, interrogantes de los que se encarga actualmente la educación matemática[11].

En la Tabla 1 se presentan los resultados de la prueba de matemática en la cual se refleja el desempeño promedio general de los grupos de estudiantes en la prueba y su respectiva homogeneidad.

Los datos permiten concluir que el promedio está por debajo de lo que se considera aprobado, es decir, se evidencia claramente cómo los niños y niñas de Colombia no están desarrollando satisfactoriamente las competencias básicas en esta área del conocimiento.

Igualmente, se observa que no hubo diferencia significativa entre grados y tampoco muestra alta competencia frente a las exigencias de la evaluación; la dispersión también referencia la heterogeneidad en el desempeño de la población.

---

[11] MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. SABER 2002-2003. Op. cit. p. 14.

Tabla 1. Promedios y desviaciones estándar nacionales por grado, año 2002

GRADO	PROMEDIO	DESVIACIÓN	POBLACIÓN
3	49.03	11.37	237.794
5	52.82	9.59	672.517
7	54.95	6.72	112.114
9	57.23	6.15	357.315

Fuente. ICFES (2003). Prueba Saber 2002-2003

Igualmente, se observa que no hubo diferencia significativa entre grados y tampoco muestra alta competencia frente a las exigencias de la evaluación; la dispersión también referencia la heterogeneidad en el desempeño de la población.

- **Resultados del Examen de Estado para ingreso a la educación superior**. Tiene como propósitos servir como criterio para el ingreso a la Educación Superior, apoyar los procesos de autoevaluación y mejoramiento de las instituciones y para revisar las competencias básicas en cada una de las áreas evaluadas.

> La evaluación por competencias en matemáticas considera tres aspectos fundamentales: el conocimiento matemático escolar (conceptos y procedimientos adquiridos en la educación básica y media), las situaciones matematizables (situaciones-problema que exigen el uso del conocimiento matemático para interpretar, argumentar y proponer) y la comunicación matemática (formas de representación propias en las matemáticas escolares y ligadas a los diferentes conceptos)[12].

En la Tabla 2 se presentan los resultados de la prueba de matemática de septiembre del 2003, la cual refleja el desempeño promedio general de los grupos de estudiantes en la evaluación de competencias básicas, en los temas que los estudiantes de la educación básica y media del país deben manejar; también se

[12] MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL ¿Qué evalúan las pruebas?. Op. cit. p. 6

muestra el componente de profundización que involucra problemas que exigen al estudiante mayor nivel de coherencia y pertinencia.

Tabla 2. Resultados del puntaje en el Núcleo Común y por Grado de profundización en la prueba de Matemática, año 2003

NÚCLEO COMÚN		PROFUNDIZACIÓN	
RANGO	PORCENTAJE	GRADO	PORCENTAJE
0-30	1.63	BÁSICO	31.93
31—45	72.54	I	50.99
46—60	25.55	II	15.99
61 o más	0.28	III	0.48

Fuente. ICFES. Resultados del Examen de Estado de Septiembre del 2003

Los datos reflejan que el desempeño promedio de los estudiantes en Matemática, en la prueba del núcleo común concentra el mayor porcentaje de evaluados por debajo del 60% de aprobación, y en la de profundización sobre el 80% apenas alcanza el nivel I en la escala de valoración. Esto significa que los requerimientos mínimos no están siendo alcanzados por la mayoría de los estudiantes colombianos, quienes fueron evaluados desde las competencias básicas.

- **Examen de Estado de Calidad Superior, ECAES**. Es una prueba académica de carácter oficial obligatoria para comprobar el grado de desarrollo de las competencias de los estudiantes que cursan el último año de los programas académicos de pregrado que ofrecen las instituciones de educación superior. Esta prueba es parte del conjunto de instrumentos que el Gobierno Nacional dispone para evaluar la calidad del servicio educativo, sus procesos y acciones. Sirve de fuente de información en la construcción de indicadores de evaluación, cualificación de los procesos institucionales, formulación de políticas y procesos de toma de decisiones en todos los órdenes y componentes del sistema educativo.[13] Por lo tanto, las Universidades deben responder al país y a cada uno de sus egresados con programas cualificados y en los que sus prácticas pedagógicas favorezcan procesos de aprendizaje hacia el perfil requerido.

El Decreto 1781 del 2003, reglamenta los ECAES los cuales deben comprender aquellas áreas y componentes fundamentales del saber que identifican la formación de cada profesión, disciplina u ocupación. Los Decretos 792, 917 y 2802 del 2001 establecen el marco básico de las áreas del conocimiento y competencias que deben integrar los programas académicos de pregrado en Ingenierías, Ciencias de la Salud y Derecho. Así mismo el Decreto 792, estableció que los programas deben poseer la fundamentación teórica y metodológica de la ingeniería, basada en los conocimientos de las ciencias naturales y las matemáticas así como en la conceptualización, diseño, experimentación y práctica de las ciencias propias de cada campo. Identifica 25 programas académicos, 14 de los cuales son de Ingeniería[14].

Para el caso de la Universidad Autónoma de Bucaramanga, sólo aparece en el listado Ingeniería de Sistemas. Para los otros programas de ingeniería que ofrece y dado que es obligación someterse a esta prueba, el Icfes determinó que los Decanos deben comparar los planes de estudio e inscribir sus estudiantes en aquella Ingeniería que más se acerque al perfil propuesto.

Es de anotar que tanto las Pruebas Saber como el Examen Icfes, evalúan respectivamente los conocimientos y habilidades fundamentales adquiridos por los estudiantes a través de su desarrollo escolar en los niveles preescolar, básica primaria, básica secundaria y media. Estos, se constituyen en los aprendizajes previos con los cuales inician su educación superior. Tampoco se ha de

[13] MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. (2003) ECAES 2003. Resultados de la Evaluación en Colombia. En: Revolución Educativa, Colombia Aprende. Bogotá: ICFES, 2003. p.9.

[14] Ibid., p. 10-11.

desconocer que las universidades más destacadas del país, utilizan las Pruebas de Estado entre otros requisitos, para la selección y admisión de los estudiantes a los Programas que ofrecen; de los resultados, toman los puntajes de las áreas fundamentales para el programa al que aspira cada estudiante.

1.5 ESTADO DEL ARTE

El aprendizaje y enseñanza de la Matemática es motivo de investigación a nivel nacional e internacional, objeto común en Congresos y Seminarios, punto de discusión en encuentros formales e informales de expertos, estudiantes y padres de familia, entre otros.

A continuación se presentan algunas investigaciones que tanto a nivel internacional como nacional se han desarrollado y dan sustento a la presente investigación:

- **A nivel Internacional:**

• Como parte del macroproyecto "Análisis de factores que inciden en el rendimiento académico y desgranamiento de alumnos de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (FACENA)", de la Universidad Nacional del Nordeste, se desarrolló entre otros en el 2001 un proyecto de investigación"[15] que utilizó diversas pruebas para identificar en los estudiantes la conceptualización realizada acerca de la estructura de los conjuntos numéricos. Manejar inadecuadamente estos conceptos, es uno de los factores que inciden en el bajo rendimiento académico debido a que son **conocimientos matemáticos necesarios y básicos** para cursar las materias de la carrera seleccionada; el

[15] PORCEL, Eduardo y RAMÍREZ, María Gloria. Determinación y análisis de las principales deficiencias en la identificación de números pertenecientes a los distintos conjuntos numéricos: N, Z, Q, I o R, en alumnos ingresantes a FACENA en 2001. [online]. Corrientes (Argentina): UNNE, (sep. 2002). p. 1. Disponible en WWW: <http://www.unne.edu.ar/cyt/2002/09-Educacion/D-011.html>.

primer cuatrimestre del primer año es donde ocurre la mayor deserción y pérdida en todas las carreras de dicha Facultad.

Se encontró que menos del 18% de la población en estudio respondió correctamente a las pruebas diagnósticas y el 82% restante evidencia insuficiencia de conocimientos acerca de los distintos conjuntos numéricos, debido a que un alto porcentaje visualiza a los conjuntos numéricos como disyuntos. También, en el cruce de variables se reforzó la idea de la incidencia de las distintas representaciones como un obstáculo a la correcta identificación de los números, señalando la confusión entre objeto/representación y representación/definición[16].

- El curso de Matemáticas I (Cálculo) que se imparte tanto en el Instituto Tecnológico como en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Baja California en Mexicali, es uno de los que presenta un alto porcentaje de reprobación y repercute de manera importante en la deserción escolar. La mayoría de los profesores que desarrollan este curso, concuerdan en que el alumno presenta deficiencias con respecto a **los conocimientos teórico-básicos previos** de Algebra, como manejo inadecuado para manipular polinomios, operaciones fundamentales, factorización. Esta premisa junto con la afirmación de que el alumno no dedica tiempo extraclase a la materia y que le es difícil consultar libros de cálculo, aduciendo que no los entiende, llevó a plantear en el 2003, la investigación[17] en la cual se analizó si el dominio del lenguaje matemático que los alumnos tienen, incide en una mayor comprensión y retención de conceptos matemáticos, es decir, si dicho dominio influye en su **estructura cognoscitiva previa** y en la representación que éstos se forman de los objetos de estudio. Se analizó la capacidad del estudiante para la traslación (traducción) entre los

[16] Ibid., p. 4.

[17] RIVERA, Ruth Elba et al. Estudio del dominio del lenguaje algebraico que prevalece entre alumnos de nuevo ingreso, a la Universidad Autónoma de Baja California−Instituto Tecnológico de Mexicali. [online]. Mexicali (México): UABC, dic. 2003. p. 1-2. Disponible en WWW: <http://www.mat.uson.mx/semana/Memorias/ruth.html>.

registros de expresiones verbales o escritas (lenguaje proposicional) y su representación al lenguaje algebraico (uso de símbolos matemáticos). En la etapa diagnóstica concluyeron que un 66% de la muestra presentan dificultades en la transcripción de lenguaje natural a lenguaje simbólico y que hay confusión entre el reconocimiento de la prioridad de las operaciones o el orden en el que están expresadas verbalmente las mismas[18].

- La profesora peruana Emma Blacker B., diseñó un sistema para la enseñanza de la matemática, al que llamó "Nuevo Sistema Psicopedagógico para el Aprendizaje de la Matemática"[19] (NUFRAC) que integra los diferentes niveles de enseñanza y se caracteriza porque da oportunidad al alumno de aprender a razonar, descubrir, elaborar y aplicar los conceptos y nociones matemáticas que logra desarrollar con una metodología lúdica. Este Nuevo Sistema, es producto de 20 años de investigación, experimentación y aplicación y nace a raíz de la observación de dificultades en el aprendizaje de la Matemática e inquietudes como: ¿Por qué siendo las estructuras de la mente tan similares a las estructuras matemáticas (como lo descubrió Jean Piaget), su aprendizaje no desarrolla la lógica ni la creatividad (como lo demuestran los exámenes de ingreso a la universidad) y sobre todo causa tantas dificultades y fobias en el educando (informadas por los docentes)?. A partir de sus investigaciones quiso conocer qué inquieta el pensamiento del educando, cómo procesa las ideas y por qué medios logra la asimilación del conocimiento.

En ese proceso de indagación y experimentación identificó cinco dificultades o problemas como causas que originan las deficiencias en el aprendizaje y en el desarrollo lógico del educando, indicando su respectiva solución[20]:

---

[18] Ibid., p. 4.

[19] BLACKER, Emma. Nuevo sistema para el aprendizaje de la Matemática. [online]. (Perú): Sector Matemática.2002.p.1.Disponible en WWW: <http://www.mat.uson.mx/semana/Memorias/ruth.html>.

[20] Ibid., p. 7-23.

¨ **Problema de tipo psico-pedagógico.** El profesor no logra desarrollar el razonamiento ni estimular el pensamiento lógico y la creatividad, debido a que desconoce la manera como piensan y razonan sus alumnos evolutivamente y los obligan a razonar como adultos.

Solución. Programa de Razonamiento lógico. Busca estimular el pensamiento lógico y la creatividad, ofrece actividades específicas ejercitando habilidades, aptitudes y actitudes en cursos-talleres.

¨ **Problema de tipo metodológico**. Los alumnos aprenden esta asignatura de diversas formas en cada uno de los niveles de enseñanza; algunos temas desde diferentes concepciones y definiciones recibiéndolos incluso fragmentados y sin relación entre ellos. Estas inconexiones en la metodología y en algunos conceptos impide que el alumno desarrolle su lógica y razonamiento, porque desconoce el por qué de los diferentes procesos. Aprende un contenido de una forma y debe re-aprenderlo de otra forma en el siguiente nivel. No hay secuencia lógica y coherente de temas que se relacionan matemáticamente.

Solución. La activación de un "Laboratorio de Matemática" cuya principal actividad consista en la aplicación del método científico a través de la observación, manipulación, construcción y comprobación de cada uno de los contenidos matemáticos. El docente debe plantearle al estudiante una situación problema donde pueda manipular, observar, analizar, formular hipótesis, reflexionar, experimentar, medir, comprobar, verificar y explicar los procesos y procedimientos utilizados para solucionarla y ha de guiarlo en sus experiencias para que sea capaz de manejar datos que le permitan extraer información matemática de conceptos, principios, axiomas, leyes, propiedades y algoritmos operacionales, que finalmente le comunicará en sus propias palabras. Con certeza se logra en el alumno la adquisición y desarrollo de aptitudes de observación, análisis, reflexión, criticidad y creación, esenciales en el trabajo racional y científico que requiere toda persona para actuar en una realidad determinada.

¨ **Problema: Fragmentación del universo matemático.** EL alumno concibe la matemática como un universo cuyos temas son totalmente fragmentados, separados y sin relación. Por ejemplo, si en álgebra el alumno resuelve los problemas con procesos aritméticos, el docente no los acepta porque los procesos deben ser algebraicos. En otros aspectos, desconoce la relación existente entre los datos expresados con un símbolo y los datos numéricos. No puede extraer la información contenida en la expresión matemática. No hay comprensión de la información expresada en el lenguaje matemático. Opera con los símbolos mecánicamente y no es capaz de fundamentar en forma lógica y secuencial los procesos realizados, ni describir la información contenida en ellos, sólo memoriza el algoritmo del proceso aplicado en la solución del mismo. A veces sus esfuerzos para comprender los conceptos nuevos se ven truncados por el avance tan veloz que realiza el docente con los temas siguientes; así dicho estudiante es evaluado en su habilidad de reproducir lo que recibió en clase, si dicha reproducción es exacta a lo que el docente expuso y realizó, recibirá notas excelentes.

Solución. Presentar la matemática como un universo integrado de tal modo que una situación física determinada (estructurada a base de elementos concretos diversos) sea parecida desde diferentes perspectivas al aplicar sobre ella diversas relaciones lógicas, cada una de las cuales da origen a un área diferente de la matemática, perteneciente al mismo Universo. Se presenta al alumno una serie de datos (conceptos, axiomas o elementos concretos), que debe relacionar en forma lógica para extraer de ellos una información coherente que debe explicarla con sus palabras y traducirla al lenguaje propio de la matemática a través de algoritmos o secuencia debidamente estructuradas. Se trata de informatizar la matemática.

¨ **Problema de tipo Formativo.** Como la matemática se considera dentro del área científica, sus contenidos no ayudan al docente a desarrollar aptitudes, motivar y promover valores morales o éticos.

Solución. El docente puede motivar al educando hacia la práctica de los valores morales o éticos:

Ø **En el área personal**. Para que descubra en su propia persona, habilidades y limitaciones al realizar actividades que ejercitan y desarrollan la concentración, discriminación y deducción, la invención, creatividad y síntesis, el razonamiento, discernimiento y la inducción, el análisis, la lógica y la memoria. También para que descubra el mundo exterior mediante acciones de observación, manipulación, interpretación, medición, comparación y demostración o de generalización, comprobación, experimentación, formulación de hipótesis y aplicación. E igualmente para que aprenda a tomar decisiones óptimas en la solución de sus dificultades, organice las actividades sin la constante ayuda del docente, obtenga conclusiones válidas y demuestre hábitos de reflexión y pensar creativos.

Ø **En el área moral**, para que realice esfuerzos por mejorar y superar sus deficiencias, se valore a sí mismo y a los demás en sus habilidades y destrezas, sea solidario, respete la diferencia, busque constantemente la verdad objetiva y fundamentada de ideas, hechos, acciones y consecuencias de sus propios actos, evite subjetividades, sea libre para opinar y elegir la mejor solución sin imposiciones del exterior y sienta gozo en el trabajo y esfuerzo realizado.

Ø **En el área social**, para que se autocritique, trabaje con los demás en armonía, libertad y justicia, acepte críticas constructivas con permeabilidad y tolerancia, defienda y sostenga sus ideas en forma racional, lógica y públicamente, acepte sus limitaciones, errores y defectos, sienta amor y gozo por el esfuerzo y trabajo científico realizado.

¨ **Problema de tipo Tecnológico**. Para los docentes es difícil preparar y construir material concreto para cada una de las nociones matemáticas y como según Piaget, ésta es una acción mental que se ejerce sobre los objetos, se debería tener objetos concretos para visualizar todos los contenidos matemáticos.

Solución. En la actualidad existen muchos materiales adecuados para la enseñanza de conceptos matemáticos. Por ejemplo: Los bloques lógicos y los bloques multibásicos de Zoltan Dienes, las regletas de Cusinaire, la mini-computadora de Papy entre otros. Combinando las diferentes ideas y con el fin de solucionar el problema, se creó un material concreto denominado DIVERTIMAT debidamente estructurado y sistematizado científicamente, llevando al plano concreto manipulativo todas las nociones del universo matemático. Este equipo, permite la integración de los contenidos, el desarrollo del razonamiento, creatividad e iniciativa del educando, así como el manejo coherente de información y su traducción al lenguaje matemático.

- **A nivel Nacional**

Pedro Gómez[*][21], afirma que la educación matemática es una disciplina naciente en Colombia y a partir de la realización de un curso sobre Metodología de la Investigación en Educación Matemática, se pudo establecer que más de 40 personas o grupos están trabajando en diversas investigaciones, relacionadas especialmente con innovación curricular, actualización de docentes de secundaria, diseños didácticos para el aula, pensamiento matemático de profesores y alumnos e historia y enseñanza de la Matemática.

---

[*] Profesor de la Universidad de los Andes, Colombia.

[21] GÓMEZ, Pedro. Educación Matemática en Colombia. [online]. Bogotá : Comité Interamericano de Educación Matemática. En : Boletín informativo No. 2 (sep. 1994), p. 1. Disponible en WWW: <http://www.furb.br/ciaem/boletins/1994_setembro.html>.

En 1993 se creó la Red Nacional de Investigadores en Educación Matemática con la participación de la mayoría de los investigadores del país. Algunas de las universidades que tienen actividad en esta área del conocimiento son: Universidad Nacional de Colombia, Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Javeriana, Universidad Distrital de Bogotá, Universidad del Valle, Universidad Industrial de Santander y la Universidad de los Andes.

La Universidad de los Andes, fundó en 1988 "la empresa docente" como un centro de investigación y desarrollo en docencia de las matemáticas. Esta "empresa" que inicialmente revertía sus estudios al claustro, se proyectó a las demás instituciones con los resultados y propuestas de mejoramiento para problemáticas comunes y apoyo a los profesores en formación, coordinación y seguimiento. Hoy es realidad cada uno de sus proyectos iniciales:

- Club de Educación Matemática, Club EMA. Busca la interacción con colegas en el campo de lo académico, la reflexión, la participación en investigaciones, y el intercambio permanente en temas relacionados con la profesión.

- MEN-EMA. Esta es una experiencia piloto en la que se han involucrado diez colegios oficiales, contribuyendo a mejorar la calidad de la educación matemática a nivel nacional.

- Centro Andino de Información en Educación Matemática. Es una entidad que busca satisfacer necesidades bibliográficas tanto de los profesores de matemáticas como de los investigadores en educación matemática.

- Calculadoras gráficas. Este es un programa de investigación que involucra cinco proyectos. Cada uno de ellos tiene como propósito estudiar la influencia que tiene el empleo de calculadoras gráficas en algún aspecto específico relacionado con el aprendizaje o la enseñanza de la matemática en un curso de precálculo a nivel universitario. Los aspectos son: aprendizaje, creencias de los profesores, actitudes de los estudiantes, diseño curricular y desarrollo curricular.

- Brecha. Este es un proyecto interinstitucional de investigación en el que participan varios colegios y universidades del país alrededor de diversos aspectos de la brecha entre las matemáticas escolares y las matemáticas universitarias. "una empresa docente" coordina el proyecto y explora el perfil del estudiante que la Universidad de los Andes espera recibir. Durante el primer año de funcionamiento del Club, hubo 90 instituciones afiliadas y a través de ellas, 350 profesores de matemáticas asociados.[22]

En la indagación sobre investigaciones en matemática, relacionadas con las deficiencias y con la influencia de los presaberes o conocimientos previos necesarios en la adquisición de los nuevos aprendizajes en la educación superior, se encontró que las investigaciones recientes se refieren a la construcción de un concepto específico bajo la metodología de investigación-acción, al diseño de metodologías para la formación de conceptos en grados y niveles de enseñanza determinados, en cómo preparar a los futuros profesores de matemática, en la utilización de tecnologías como herramientas para verificar y validar fórmulas, procedimientos, resultados y representaciones difícilmente observables con la enseñanza tradicional y a la propuesta de resolución de problemas como oportunidad para que los estudiantes desarrollen habilidades y estrategias propias del quehacer matemático.

- La Universidad Nacional de Colombia en convenio con el ICFES (107/2002), realizó el estado del arte[23] del “Estudio de la deserción estudiantil en la educación en Colombia”. Dicho estudio pretendía a partir del diagnóstico de las causas de la deserción de los estudiantes de educación superior, fijar nuevos lineamientos y políticas que procuraran la retención de los mismos, por parte de las instituciones universitarias. En ese documento, se mencionan las siguientes investigaciones que están relacionadas con los propósitos de este trabajo:

♦ Osorio, Ana; Jaramillo, Catalina; Jaramillo, Alberto**.** Deserción estudiantil en los programas de pregrado 1995-1998. Oficina de Planeación Integral. Universidad EAFIT, Medellín, 1999. Este estudio concluyó que: La mayoría de desertores presentó sólo un episodio de

[22] Ibid. 2-3.

[23] UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA. Documento del Estado del Arte: Estudio de la deserción estudiantil en la educación en Colombia. Bogotá: UNC, 2002. p. 44, 56 y 62

> deserción, si bien se encontraron casos de estudiantes que salieron hasta cuatro y cinco veces de un mismo programa. La deserción -académica como no académica- se concentró en los primeros niveles de los programas y se hizo menor en los niveles posteriores. Entre las materias reprobadas con mayor frecuencia -durante el último episodio de deserción- por los estudiantes retirados por bajo rendimiento académico, se encuentran Álgebra y Trigonometría, y **Cálculo Diferencial**, las cuales aparecieron en los registros de todas las carreras, luego de examinar las hojas de vida de los desertores...
>
> ♦ Pinzón, Myriam. Enfoques de aprendizaje y rendimiento académico en estudiantes de la Universidad Nacional. Tesis de pregrado de Psicología, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1991. Muestra que el estudiante llega a la universidad sin estar preparado para enfrentar una situación académica y unas condiciones de enseñanza diferentes a las del bachillerato... existen condiciones por parte del alumno, que afectan su proceso de apropiación del conocimiento y es claro que en el bajo rendimiento entran en juego factores como pobres habilidades de estudio, cuestiones motivacionales, desinterés por el aprendizaje, el análisis y la crítica y actitudes negativas hacia el estudio.

- A partir de los resultados obtenidos en Matemáticas I y II durante los semestres I y II de 1997, 1998 y 1999 por parte de los estudiantes de Contaduría de la Universidad De La Salle, según los cuales en promedio el 75.5% de los estudiantes obtuvieron notas finales entre 0 y 3.5 y el 24.5% entre 3.6 y 5, se planteó una investigación[24] para determinar las causas de dichas **deficiencias**.

Uno de los objetivos específicos fue "Evaluar los **conocimientos previos en matemática** que tienen los alumnos que ingresan a la Facultad de Contaduría e igualmente a los de II semestre"

> Los resultados del diagnóstico permitieron proponer soluciones factibles de implementación y que pueden constituirse en el punto de partida del proceso de cambio, de una enseñanza tradicional de las matemáticas a una enseñanza de las matemáticas bajo los lineamientos de una nueva visión, acorde con los procesos de cambio formulados por la comunidad académica internacional y con los procesos de acreditación,

[24] GARZÓN, Ana Josefina, LÓPEZ, Gladys Carmenza. La aplicación de la matemática al campo de la contaduría Pública. Diagnóstico y análisis del proceso enseñanza-aprendizaje. En : II Simposio de Investigación y Actividades Investigativas Año 2001. Bogotá: Unisalle (sep. 2001), p. 51.

interdisciplinariedad y transdisciplinariedad en los que actualmente participa la Facultad de Contaduría[25].

- Los profesores Ignacio Camacho Rivas y Diana de la Ossa Hurtado, de la Universidad Autónoma del Caribe, presentaron la propuesta de investigación “Identificación de habilidades en el área de matemáticas de los estudiantes que ingresan a primer semestre en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Caribe para el diseño y creación de un software multimedia de nivelación”. La propuesta pretende ofrecer una solución a la problemática que plantean los profesores sobre las dificultades de algunos estudiantes en las asignaturas de matemática, señalando que los estudiantes que ingresan a los programas de la facultad presentan deficiencias en los conocimientos y habilidades requeridos para iniciar una carrera de Ingeniería. Esa dificultad que se percibe en el proceso de aprendizaje en asignaturas del área de matemáticas, se presenta tanto en primer semestre como en semestres superiores, llevando al estudiante con falencias en esta área a tener un bajo rendimiento académico, lo cual se traduce en pérdida de la asignatura o del semestre. Por ello, se propusieron realizar un estudio que permitiera no solo cuantificar el número de estudiantes que ingresan con deficiencias, sino también especificar qué conocimientos deben reforzarse y a partir de esto, diseñar un programa de multimedia que permita a dichos jóvenes nivelarse en el área de matemáticas y continuar su carrera teniendo bases sólidas en el área de las ciencias básicas.[26]

- La investigación “La resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje significativo de los conceptos densidad, masa y volumen por los y las

[25] Ibid., p. 52

[26] CAMACHO, I y DE LA OSSA, D. Propuesta de Investigación: Identificación de habilidades en el área de matemáticas de los estudiantes que ingresan a primer semestre en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Caribe para el diseño y creación de un software multimedia de nivelación [online]. (Colombia): UAC, dic. 2003. p.1-2. Disponible en WWW: http://investigaciones.uac.edu.co/docs/nivelacion.doc.

estudiantes de educación media”[27] se presenta como ejemplo de los muchos trabajos que se han propuesto para mejorar los procesos de enseñanza en el aula, hacia la consecución de aprendizajes significativos, por parte de los estudiantes. Con esta investigación, se diseñó una propuesta metodológica como programa-guía de actividades para ofrecer a los estudiantes de décimo grado en Física, la posibilidad de apropiarse del conocimiento científico, específicamente en los temas de densidad, masa y volumen permitiéndoles el desarrollo de las competencias necesarias para la resolución de problemas en este campo. Los estudiantes lograron manejar un lenguaje científico y una argumentación coherente y específica para los conceptos trabajados, la metodología favoreció el desarrollo de habilidades de carácter comunicativo, lingüístico, científico expresados en la argumentación y propuestas planteadas en el proceso de resolución de problemas.

1.6 RECONOCIMIENTO Y DIMENSIONAMIENTO DEL CONTEXTO

Este trabajo de investigación se desarrolla en la Universidad Autónoma de Bucaramanga (UNAB) en la Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería y cuya temática central corresponde al Departamento de Matemática.

1.6.1 Carácter[28]. La UNAB se define como una institución universitaria de carácter privado, dedicada al servicio de la Educación Superior, sin ánimo de lucro y tiene como propósitos el engrandecimiento del ser humano a partir del ejercicio de principios democráticos y liberales y el mejoramiento regional y nacional; desarrolla sus actividades académicas y administrativas cumpliendo los lineamientos y las disposiciones legales vigentes de acuerdo con la Constitución

[27] PELUFFO SUÁREZ, Gladys. La resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje significativo de los conceptos densidad, masa y volumen por los y las estudiantes de educación media. Bucaramanga, 2000. Tesis (Maestría en Pedagogía). Universidad Industrial de Santander. Escuela de Educación.

[28] UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA. Proyecto Educativo Institucional. Bucaramanga : UNAB, 1999. p. 5.

Nacional de 1991 y la Ley de Educación Superior, Ley 30 de 1992. Define su misión y visión así:

> **- Misión.** La UNAB es una comunidad educativa creada en 1952, organizada según las leyes colombianas como corporación civil, privada y de utilidad común, sin ánimo de lucro, fundada en principios democráticos, que propende por la tolerancia, el respeto por las creencias y derechos de los demás, la cátedra libre y la libertad de expresión. Su objeto es la formación integral de la persona, la reafirmación de la nacionalidad en un contexto global, y el cultivo de los valores lógicos, éticos y estéticos, mediante la promoción de la cultura, el pensamiento científico y la investigación, la protección y el aprovechamiento de los recursos naturales y el desarrollo de las actividades y habilidades para el trabajo productivo que contribuya al progreso nacional y regional.

> **- Visión**. La Universidad Autónoma de Bucaramanga es una institución educativa, privada, que se proyecta internacionalmente en el siglo XXI como líder en la formación integral de ciudadanos, profesionales y dirigentes con espíritu emprendedor, y comprometidos con su propio desarrollo y el de su país[29].

1.6.2 Proyecto Educativo Institucional (PEI)[30]. El PEI de la UNAB, está orientado por una dinámica centrada en la educación, con horizonte de sentido y se ha construido sobre las conquistas a través de su historia pero con la mirada en la innovación, mostrando la Institución como una entidad que mantiene coherencia y consistencia en sus actuaciones; "apunta hacia la formación, porque sus acciones educativas están encaminadas a favorecer que cada uno de sus actores despliegue su esencia".

1.6.3 Algunos conceptos fundamentales en la UNAB[31]

- **Educación.** Se entiende como la acción que pretende llevar a las personas a los umbrales de la autonomía para posibilitar su formación.

---

[29] Ibid., p. 6.

[30] Ibid., p. 7.

[31] Ibid., p. 7-10.

- **Autonomía.** Es pensar por sí mismo, expresar lo pensado y actuar en coherencia. Esto garantiza la identidad del sujeto.

- **Diferencia entre educación y formación.** La educación es una fuerza exterior al sujeto y la formación es el resultado de las propias elaboraciones del sujeto con aquello que su educador le ha proporcionado.

- **Desarrollo Humano**. La persona es la esencia del ser humano y se va ganando mediante conquistas parciales. Es un proceso de formación que nunca termina.

- **Persona.** Es un ser que busca ser más, que se mueve entre el acto y la potencia. Posee varias dimensiones y está llamada a crecer en todas y cada una de ellas.

- **Dimensión Afectiva.** La persona se reconoce en la interrelación con otros. Este primer reconocimiento constituye su autoestima.

- **Dimensión Intelectual.** Está constituida por redes ordenadas de conceptos debidamente jerarquizados para interpretar el mundo y continuar fortaleciendo sus operaciones intelectuales.

- **Dimensión Moral.** La persona organiza una jerarquía de valores y construye una forma característica de relacionarse con los demás.

- **Dimensión Física-Sensible.** La persona, a través de su relación con los demás, con el ejercicio de los sentidos y con sus representaciones define un estilo particular de asumir la información y situarse en él.

- **Desarrollo Estético**. Es la articulación de las dimensiones de la persona.

- **Competencia**. Es la aptitud de la persona para lograr la armonía estética de sus dimensiones.

- **Competencia de Entrada.** Es la etapa del reconocimiento de la historia del estudiante que ingresa y diseña con él su proyecto de vida.

- **Competencia Ser Ciudadano.** Corresponde a la primera parte de los planes de estudio. Las asignaturas buscan responder a preguntas que tienen que ver con la identidad: ¿Quién soy?, ¿Qué hace que yo sea yo y no otra persona?, ¿Qué es ser el profesional que quiero ser?, ¿Qué es la UNAB?.

- **Competencia Ser Científico.** Busca que cada estudiante sea apto para abordar las cuestiones propias de la disciplina elegida. Las asignaturas responden a preguntas como : ¿Qué tipo de disciplina es la que estudio?, ¿Cuál es su estatuto epistemológico?, ¿Qué estudia mi disciplina que no estudien otras?, ¿Cuáles son sus métodos propios?, ¿Qué tanta autonomía tiene mi disciplina frente a las otras?.

- **Competencia Ser Profesional.** Propicia el hacer concreto de la persona. Las asignaturas responden a preguntas como: ¿Cómo se hace lo que he aprendido? ,¿Cómo llevo a la práctica el conocimiento conquistado?, ¿Cómo debo ejercer mi profesión?.

- **Competencia Ser Investigador.** Busca que el profesional afine su capacidad de problematizar y crear de tal forma que contribuya a los desarrollos de su disciplina y a la cualificación de las prácticas que realiza. Es propia de los estudios de postgrado.

- **Currículo**. Hace referencia a todos los espacios que generen acciones educativas.

- **Areas.** Son los espacios curriculares donde los saberes pertinentes se organizan de manera sistemática y ordenada.

1.6.4 Programas Académicos. Actualmente la UNAB, ofrece 19 programas de pregrado agrupados en Escuelas: Ciencias Naturales e Ingeniería, Ciencias Sociales, Humanidades y Artes, Ciencias Económicas y Administrativas, Ciencias Jurídicas y Políticas, Ciencias Biológicas y de la Salud.

La Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería cuenta con los siguientes Programas de Ingeniería: de Mercados, de Sistemas, en Energía, Financiera y Mecatrónica.

En el I semestre académico del 2004, reportó una matrícula de 5782* estudiantes inscritos en Pregrado, así:

Escuela de Ciencias Económicas y Administrativas	1226 estudiantes
Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería	**1761** estudiantes
Escuela de Ciencias Sociales, Humanidades y Artes	1134 estudiantes
Escuela de Ciencias Jurídicas y Políticas	1043 estudiantes
Escuela de Ciencias Biológicas y de la Salud	618 estudiantes

El 30.46% del total de inscritos corresponde a los Programas de Ingeniería. Estos, se discriminan a su vez así:

Ingeniería de Sistemas	298	corresponde al	16.92%
Ingeniería en Energía	46	corresponde al	2.61%
Ingeniería Mecatrónica	222	corresponde al	12.61%
Ingeniería Financiera	836	corresponde al	47.47%
Ingeniería de Mercados	359	corresponde al	20.39%

* Fuente: Sistema Cosmos. [online] UNAB. (Marzo, 2004). Disponible en WWW: <http://www.unab.edu.co>.

1.6.5 Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería*. Administrativamente, la Escuela es responsable de la formación en las Ciencias Básicas de la Ingeniería, de los núcleos que relacionan al estudiante con el ser, saber y el quehacer del Ingeniero y realiza supervisión académica sobre los estudios específicos de cada uno de los cinco programas que administra y que definen el título que recibe el futuro ingeniero. La Escuela define su misión y visión así:

- **Misión**. Propiciar la formación integral de personas en programas de pregrado y postgrado en las áreas de ciencias naturales e ingeniería mediante la construcción, el desarrollo y la aplicación del conocimiento, como aporte al progreso regional y nacional.

- **Visión.** La Escuela en el 2006 se caracterizará porque su desarrollo planificado en coherencia con el PEI-UNAB, le habrá permitido poner en vigencia programas de ingeniería innovadores y fundamentados en la calidad de sus profesores e investigadores, preparados en su mayoría en los niveles de maestría y doctorado y mantener una estructura curricular basada en las ciencias básicas y aplicadas de la ingeniería. La sustentabilidad y el respeto del ambiente serán principios inherentes a este proceso.

1.6.6 Propósitos de formación de los diferentes Programas de Ingeniería de la UNAB. La Universidad Autónoma de Bucaramanga busca formar profesionales**

- En **Ingeniería de Sistemas**, con conocimientos, habilidades, aptitudes y actitudes que le permitan desempeñarse en las siguientes áreas: ingeniería de software, telecomunicaciones y telemática, sistemas de información, gestión tecnológica, modelos y simulación, investigación de operaciones, bases de datos, inteligencia artificial, redes de computadoras, sistemas distribuidos, hardware de computadoras, evaluación de proyectos de informática, aprendizaje organizacional, desarrollo sostenible.

* UNAB. Documento Institucional, 2002

** UNAB. [online]. (Marzo, 2004). Disponible en WWW: <http://www.unab.edu.co

- En **Ingeniería en Energía**, competentes en la creación, diseño, estructuración, desarrollo, optimización y auditoría de los diferentes procesos y productos relacionados con los recursos energéticos que involucran la innovación tecnológica y la dimensión medioambiental. Busca la formación de un ingeniero ético, comprometido con su realidad, capaz de gestionar nacional e internacionalmente la transformación, transporte, distribución, comercialización y aprovechamiento racional y eficiente de la energía, dentro de criterios tecnológicos, económicos y ambientales acordes con el desarrollo de la sociedad.

- En **Ingeniería Mecatrónica**, capaces de concebir, desarrollar, optimizar y automatizar procesos de alta tecnología y equipos dotados de inteligencia en un contexto de innovación tecnológica y respeto por la dimensión medioambiental, para mejorar la productividad y competitividad de las organizaciones, capaces de construir, optimizar, automatizar y desarrollar equipos, procesos y productos para el mejoramiento empresarial.

- En **Ingeniería de Mercados**, capaces de investigar, interpretar, planear y diseñar soluciones a los problemas del mercado, determinar procesos sistemáticos que conduzcan a la solidez de las interacciones planteadas por el marketing, mediante el sustento de las disciplinas de la ingeniería para la construcción, preservación y difusión del conocimiento, con el propósito de fomentar la participación activa de sus actores en el mejoramiento de los elementos que intervienen en su práctica.

- En **Ingeniería Financiera**, capaces de diseñar, desarrollar e implementar procesos e instrumentos financieros innovadores, de formular soluciones creativas a problemas de las finanzas, dentro de la disciplina de la ingeniería con pensamiento global, con las habilidades y destrezas necesarias para el desarrollo de modelos financieros que respondan a la realidad económica de las empresas y sistemas empresariales, de entender las necesidades propias de las organizaciones y, alrededor de ellas diseñar, implementar y validar nuevas soluciones en el ámbito financiero.

1.6.7 Departamento de Matemática y Ciencias Básicas.[32] Fue creado mediante Resolución 243 del 2 de Mayo de 2003 y congrega a los profesores de Matemática, Física y Química; tiene como objetivo desarrollar de actividades de

---

[32] UNAB. Documentos Institucionales. Resolución 243 (2 de mayo de 2003).

investigación de la escuela y de docencia institucional en las áreas que lo constituyen. El Departamento define su misión y visión así:

- **Misión.** Es una unidad académica de la UNAB, adscrita a la Escuela de Ciencias Naturales e Ingeniería, comprometida con la generación y desarrollo de conocimientos, prestación de servicios docentes de alto nivel de Matemática y Ciencias Naturales para todos los planes de carreras que administra la Universidad.

- **Visión.** En el 2006, será una unidad académica de prestación de servicios de docencia, investigación y proyección social y científica a los programas de la Universidad y a las instituciones externas a la UNAB que así lo requieran en las disciplinas de las Ciencias Naturales y Matemática.

2. SUSTENTO TEÓRICO

La Ciencia Cognitiva desde sus planteamientos teóricos ofrece un sustento conceptual a la presente investigación, razón por la cual se hace un análisis de los principios y los aportes de los diferentes autores.

A partir de los años setenta, el paradigma conductista comenzó a declinar para dar paso a una nueva orientación cuyo objeto de estudio es la MENTE y la forma como ésta funciona; el interés de la Psicología se centró entonces en la variedad de procesos cognitivos básicos y en las estructuras de conocimiento, lo que ha dado origen a la ciencia cognitiva.

El paradigma cognitivo plantea interrogantes como los siguientes: ¿Cómo las representaciones mentales guían los actos internos y externos del sujeto?, ¿Cómo se elaboran dichas representaciones?, ¿Qué tipo de procesos cognitivos y estructuras mentales intervienen en la elaboración de las representaciones mentales y en la regulación de las conductas?. Como se observa, se da prioridad al SUJETO en el "acto de conocimiento", considerándolo como un agente activo cuyas acciones dependen de las representaciones que ha elaborado como producto de sus relaciones previas con el entorno físico y social; el sujeto no es una "tabula rasa" sino un sujeto que organiza su sistema cognitivo mediante el procesamiento de la información. Es así que, para la Teoría Cognitiva, el conocimiento es el resultado de la interacción entre el sujeto (provisto de sus estructuras cognitivas) y sus experiencias sensoriales; el sujeto es activo frente al objeto de conocimiento[33]. Cuando el sujeto presenta deficiencias conceptuales o

---

[33] MORENO, ARMELLA, Luis. Y WALDEGG, Guillermina. Fundamentación cognitiva del currículo de Matemáticas. En : SEMINARIO NACIONAL DE FORMACIÓN DE DOCENTES: USO DE NUEVAS TECNOLOGÍAS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS. (2000 : Bogotá). Memorias del Primer Seminario Nacional de Formación de Docentes en el Uso de la Tecnología. Bogotá: MEN, 2001.p.44.

en sus habilidades y operaciones requeridas para lograr nuevos aprendizajes, es porque su sistema cognitivo no ha sido organizado adecuadamente.

2.1 EL APRENDIZAJE DESDE EL COGNITIVISMO

Dentro del paradigma cognitivo se destacan diferentes autores que han aportado elementos que son significativos para esta investigación:

- **Jean Piaget[*].** Su investigación, se focalizó en la generación y desarrollo cognitivo del ser humano, con la temática fundamental "la génesis y el desarrollo del conocimiento". Su obra repercutió en el ámbito pedagógico por cuanto sus estudios fueron y son aplicados en la praxis de la educación. Plantea que "el conocimiento no se adquiere solamente por interiorización del entorno social, sino que predomina la construcción realizada por parte del sujeto[34]".

Al respecto Carretero[35] interpreta a Piaget en los siguientes términos:

> El individuo —tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos—, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre esos dos factores... el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una *construcción* del ser humano que la realiza con los *esquemas* que ya posee... la cual depende de la representación inicial que se tenga de la nueva información y de la representación de los diferentes elementos que están presentes.
>
> Así, un esquema es una representación de una situación concreta o de un concepto, que permite manejarlos internamente y enfrentarse a situaciones iguales o parecidas en la realidad. Los esquemas pueden ser muy simples o muy complejos y muy generales o muy especializados.

---

[*] 1896-1980, Biólogo y psicólogo suizo. Precursor de la actual "Revolución Cognitiva" con su énfasis en los procesos mentales.

[34] ARANCIBIA, Violeta; HERRERA, Paulina y STRASSER, Katherine. Psicología de la Educación. 2 ed. México : Alfaomega, 2001. p. 76.

[35] CARRETERO, Mario. Constructivismo y Educación. 1997. México: Progreso, 1997. p. 48-50.

Piaget, trabajó la relación entre el tipo de actividad interna del niño y su percepción del mundo exterior. Conservó y aclaró conceptos como: la idea de esquema, de reacción circular, de asimilación y acomodación, de estadio evolutivo y de tipos de lógica cualitativamente distintos e introdujo conceptos nuevos como: la idea de estructura lógica, de una invariante cuya construcción permite dicha estructura, de la reconstrucción cíclica de estructuras a niveles superiores, de equilibración y de abstracción reflexiva (en oposición a la empírica). Percibió en el niño, un joven científico que construye modelos del mundo cada vez más refinados mediante la aplicación de estructuras lógicas cada vez más complejas[36].

En Piaget, el desarrollo cognitivo comienza con la capacidad innata para adaptarse al entorno y ocurre en una serie de etapas cualitativamente diferentes:

- **Sensoriomotora** (desde el nacimiento hasta los dos años). El bebé es capaz (gradualmente) de organizar las actividades relacionadas con su entorno a través de la actividad sensorial y motora.

- **Preoperacional** (2-7 años). El niño desarrolla un sistema de imágenes y utiliza los símbolos para representar personas, lugares y eventos. El lenguaje y el juego simbólico son manifestaciones importantes de esta etapa. El pensamiento aún no es lógico.

- **Operaciones Concretas** (7-11 años). El niño puede solucionar los problemas de una manera lógica si están enfocados en el aquí y el ahora, pero no puede pensar en forma abstracta.

- **Operaciones Formales** (Desde los 11 años hasta la adultez). La persona puede pensar en forma abstracta, manejar situaciones hipotéticas y pensar acerca de las posibilidades[37].

- Concepto de operación. En el trabajo matemático, el desarrollo de operaciones representa en alto porcentaje, la actividad de la persona. Los diferentes conceptos

---

[36] CASE, Robbie. El desarrollo intelectual del nacimiento a la edad madura. Cognición y desarrollo humano. España: Paidós, 1989. p. 51.

[37] PAPALIA, Diane; WENDKOS, Sally y DUSKIN, Ruth. Desarrollo Humano. 8 ed. Bogotá : McGraw-Hill. 2001, p.32.

que se revisan, requieren ciertos procedimientos para establecer relaciones entre dos o más elementos y otro, que es considerado como resultado. Es decir, las operaciones permiten transformar unos elementos en otros. Además, hay operaciones de distintos órdenes: lógicas, aritméticas, geométricas, temporales, mecánicas y físicas, entre otras. “Una operación es una acción interiorizada que se ha vuelto reversible y se coordina con otras formando estructuras operatorias de conjunto[38]”.

- Concepto de operaciones concretas. Para Piaget, son "aquellas que se ocupan de objetos manipulables (manipulaciones efectivas o imaginables inmediatamente) por oposición a las operaciones que versan sobre hipótesis o enunciados simplemente verbales[39]”. Son operaciones concretas, por ejemplo, las operaciones de medición, clasificación, seriación y las de tipo aritmético. De ahí, que el maestro del nivel primario debe proporcionar al estudiante toda clase de experiencias que le obliguen a manipular objetos, presentes o ausentes, de forma orientada, para que obtenga en su momento, por ejemplo, las nociones de medición del espacio, tiempo, velocidad, la noción de número, conservación de la materia, peso y volumen.

> Las operaciones concretas no se refieren más que a la realidad en sí misma y, especialmente, a los objetos tangibles que pueden ser manipulados y sometidos a experiencias efectivas. Cuando el pensamiento del niño se aleja de lo real, es simplemente que sustituye los objetos ausentes por su representación más o menos viva, pero esta representación va acompañada de creencia y equivale a lo real.[40]

- Concepto de operaciones formales. Son “aquellas que suponen una nueva y última forma de equilibrio donde el sujeto se vuelve capaz de razonar y deducir no solamente sobre objetos manipulables, sino que es capaz de una lógica y de un

---

[38] PIAGET, J. Seis estudios de psicología. 2 ed. Barcelona: Seix Barral. 1968. p. 113.

[39] PIAGET, J. et al. Los estadios en la psicología del niño. Buenos Aires: Nueva Visión. 1971. P. 46

[40] PIAGET, J, Seis estudios de psicología. Op. cit., p. 95-96.

razonamiento deductivo sobre una hipótesis, sobre proposiciones[41]", es decir, el estudiante que llega a la secundaria y ha superado la fase de las operaciones concretas, se dispone a pasar de la manipulación de objetos reales presentes o ausentes, a una nueva fase que requiere diferenciar lo real de lo posible; Es en esta etapa en la que aparecen nuevos conceptos como proporcionalidad y combinatoria. Al respecto Flavell, comenta:

> El adolescente, al comenzar la consideración de un problema, trata de prever todas las relaciones que podrían tener validez respecto de los datos, y luego intenta determinar mediante una combinación de la experimentación y el análisis lógico, cuál de estas relaciones posibles tiene validez real... manipula en su razonamiento, afirmaciones o enunciados que contienen los datos de la realidad. Toma los 'resultados' de las operaciones concretas, los moldean en la forma de proposiciones, y luego procede a seguir operando con ellos, estableciendo diversos tipos de vínculos lógicos entre ellos (implicación, conjunción, identidad, disyunción, etc.). Las operaciones formales, pues, son en realidad operaciones realizadas sobre los resultados de operaciones (concretas) anteriores.[42]".

Es interesante ver cómo el estudiante universitario requiere haber transitado por las etapas de las operaciones concretas y formales a través de un proceso lógico y concatenado, apropiado. Cuando este tránsito no se da apropiadamente, se constituye muy posiblemente en frustración posterior, obligándolo a reconsiderar su proceso de aprendizaje y revisar aquello que no le permite comprender lo actual. Al respecto Richmond cita a Piaget, "antes o después tienen que volver sobre sus pasos, pues si se construyen concatenaciones excesivamente complicadas, las variantes no analizadas en un momento dado reaparecen más tarde como factores de perturbación[43]".

---

[41] PIAGET, J. Estudios de psicología genética. Buenos Aires: Emercé. 1973. p. 28.

[42] FLAVELL, J. La psicología evolutiva de Jean Piaget. México: Paidós. 1991. p. 224-225

[43] RICHMOND, P. Introducción a Piaget. 2 ed. Madrid: Fundamentos, Madrid. 1972. p. 83.

- **Concepto de Reversibilidad.** Piaget, determina que la reversibilidad y los procesos de análisis y síntesis, contribuyen a la formación del pensamiento operatorio. "Toda la evolución del pensamiento estará dominada por un paso general de las regulaciones a la reversibilidad interiorizada u operatoria, es decir, a la reversibilidad propiamente dicha[44]".

La reversibilidad, es la capacidad que adquiere el niño en el nivel de las operaciones concretas de realizar una operación inversa a otra dada, o de concebir que, con esa inversión, puede llegar al mismo punto de partida. Esta concepción, se mantiene a lo largo de todas las conceptualizaciones que se desarrollan en matemática; para un concepto, operación o procedimiento hay otro concepto, operación o procedimiento que significa lo inverso o lo recíproco. Por lo tanto, la reversibilidad, se presenta bajo dos formas: la inversión o negación (N) de la lógica de clases y la reciprocidad o simetría (R) de la lógica de relaciones.

- **Reversibilidad como inversión**. Cuando "una operación es reversible, significa que toda operación corresponde a una operación inversa: ejemplo, la suma y la resta lógicas o aritméticas[45]" Este hecho permite definir en el conjunto de los naturales (por ejemplo), la propiedad invertiva para la suma, mediante la cual se obtiene el módulo al operar una cantidad con su expresión inversa u opuesta: $A + (-A) = 0$. Mucho más adelante, se llega a encontrar cómo la integración es una operación inversa de la diferenciación. Esta noción se maneja cuando ya se ha alcanzado la etapa de las operaciones formales.

- **Reversibilidad como reciprocidad**. "Su característica es que la operación de partida, compuesta con su recíproca, concluye en una equivalencia. Las expresiones se relacionan entre sí; por ejemplo si A es menor o igual que B, y B

---

[44] PIAGET, J y INHELDER, B. Psicología del niño. 8 ed. Madrid: Morata, 1978. p. 30.

[45] PIAGET, J. Seis estudios de psicología, Op. cit., p. 172.

es mayor o igual que A, entonces A=B”[46]. Resultados de este tipo, se plantean en teoremas para las diferentes teorías que constituyen la matemática y que se derivan de sus definiciones, axiomas o postulados.

> Pero lo hermoso del nuevo sistema que se impone entonces, y que demuestra su carácter de síntesis o de conclusión (esperando, naturalmente, ser integrado en sistemas más amplios), es que no hay ahí simple yuxtaposición de las inversiones y de las reciprocidades, sino fusión operatoria en un todo único, en el sentido de que cada operación será, en adelante, 'a la vez', la inversa de otra y la recíproca de una tercera, lo que da cuatro transformaciones: directa, inversa, recíproca e inversa de la recíproca, siendo esta última al mismo tiempo correlativa (o dual) de la primera.[47]

La idea expuesta por Piaget, sintetiza la importancia dada por él al concepto de reversibilidad: “decir que hay una marcha hacia el equilibrio significa que el desarrollo intelectual se caracteriza por una reversibilidad creciente. La reversibilidad es el carácter más aparente del acto de la inteligencia que es capaz de desvíos y de idas y vueltas. Esta reversibilidad aumenta pues, regularmente, nivel por nivel[48]”.

Piaget se refirió a algunos factores que influyen en el ritmo del desarrollo al que progresa el niño a lo largo de los cuatro estadios o etapas del desarrollo intelectual: la maduración, la experiencia física, la experiencia social y la propia actividad coordinadora interna del niño. Esta última, está dominada por su interés en alcanzar el equilibrio. Si las estructuras cognitivas fueran entidades relativamente específicas o si su construcción sólo dependiera de acontecimientos externos, el proceso de equilibración podría avanzar con relativa rapidez.

> El objetivo de Piaget va más allá de la mera descripción de las acciones observadas en los niños; su propósito es explicar, aunque no causalmente, por qué los niños en una determinada etapa son capaces

[46] PIAGET, J y INHELDER. Op. Cit p. 137-138.

[47] Ibid., p. 138-139.

[48] PIAGET, J. El Estructuralismo. Buenos Aires: Proteo, 1968. p. 65.

> de realizar ciertas acciones y sin embargo cometen 'errores' al realizar otras. La respuesta a esta cuestión, Piaget la ofrece en la tesis que pasa a convertirse en uno de los principios más importantes de la teoría: las acciones de los niños (y también la de los adultos) no se presentan en forma caótica, inconexa y desordenada, sino que evidencian 'formas de organización' distintas para cada periodo de desarrollo. Estas formas de organización de las acciones son pensadas por Piaget como 'estructuras de conjunto' que al organizar las acciones les otorgan significados integrándolas en un todo coordinado y estructurado[49].

Por ello, Case[50], interpretando a Piaget, concluyó que el ritmo de desarrollo es, por necesidad lento, debido a que las estructuras cognitivas poseen una amplia generalidad y han de ser abstraídas de manera reflexiva, de las propias operaciones del niño con relación a su mundo. Es decir, las operaciones mentales evolucionan desde la actividad sensorial y motora hasta el pensamiento lógico abstracto. Ese desarrollo gradual ocurre a través de tres principios interrelacionados:

- **Organización.** Se refiere a la integración del conocimiento en un sistema para hacer que el entorno tenga sentido. Mientras ocurre el proceso de aprendizaje se crean estructuras cognitivas cada vez más complejas y se generan formas de pensamiento con imágenes cada vez más exactas de la realidad. Estas estructuras o esquemas, se constituyen en patrones organizados del comportamiento que la persona utiliza para pensar y actuar en una situación dada.[51]

- **Adaptación**. Ocurre cuando el sujeto demuestra cómo maneja la nueva información dando la impresión de entrar en conflicto con lo que ya se conoce[52].

---

[49] CASTORINA, J. y PALAU, G, Introducción a la lógica operatoria de Piaget. Barcelona: Paidós, 1981, p. 11.

[50] CASE, Op. cit., p.50.

[51] PAPALIA, Op. cit., p.38.

[52] Ibid., p. 38.

Richmond[53] encuentra diferencias entre adaptación y organización; mientras la primera es un proceso de relación externa con el medio, la segunda es el proceso de relación interna del todo con sus partes.

De ahí, la tendencia del ser humano de adaptarse y organizarse al medio. Para esto, utiliza las estructuras que ha construido durante su propio desarrollo y de las cuales se espera que se vayan perfeccionando.

En el trabajo matemático, el estudiante frente a una problemática expuesta, generalmente recurre a ese bagaje de conceptos, teorías, operaciones y procedimientos que ha logrado adquirir y organizar, buscando siempre la forma adecuada y apropiada para solucionar la situación planteada. La función de adaptación se refleja cuando encuentra la teoría subyacente básica y sabe a dónde tiene que llegar; y la función organizativa se da cuando combina teorías, algoritmos, propiedades y procedimientos (herramientas que tiene en su estructura) de la forma adecuada relacionando las variables y los datos respectivamente. No obstante, puede ocurrir que en un momento determinado no se sepa qué hacer y entonces de manera desordenada e indiscriminada, aplique teorías, pruebe procedimientos y algoritmos, etc., buscando qué o cuál de todos esos elementos dan solución al problema. De todas maneras, sea que lo haga de una manera u otra, la mente recurre a las viejas estructuras.

Según Piaget, la adaptación sucede a través de procesos complementarios: asimilación y acomodación; es decir, la mente acepta información nueva y la incorpora a las estructuras cognitivas existentes y a su vez, cambia estructuras propias para incluir el conocimiento nuevo.

- **Asimilación**. Se da cuando un sujeto al enfrentarse con una situación nueva, trata de manejarla con base en los esquemas que ya posee y que le parecen

[53] RICHMOND, P. Op. Cit. p. 114.

apropiados para esa situación; en palabras del propio Piaget, “la inteligencia es asimilación en la medida en que incorpora todos los datos de la experiencia dentro de su nuevo marco, es decir, implica incorporar los datos y las personas a la actividad propia del sujeto para asimilar el mundo exterior a las estructuras ya construidas[54]”.

♦ **Acomodación**. Consiste en “reajustar las estructuras ya construidas, en función de las transformaciones sufridas, y por consiguiente, acomodarlas a los objetos externos[55]”.

Estos dos conceptos son básicos para el aprendizaje dado que permiten que los esquemas del sujeto se encuentren siempre adaptados al ambiente y en continuo crecimiento. Cuando el sujeto aprende, lo hace modificando activamente sus esquemas, a través de las experiencias, o bien transfiriendo esquemas ya existentes a situaciones nuevas, por lo cual la naturaleza del aprendizaje va a depender de lo que el sujeto ya posee.[56]

El organismo siempre tiende a buscar el equilibrio entre los elementos cognitivos propios y entre éstos y su mundo exterior; por ello generalmente se da una dinámica en la que se pasa de la asimilación a la acomodación, lo que se denomina Equilibración que se da cuando el sujeto es capaz de manejar nuevas experiencias dentro de sus estructuras existentes pero organizando nuevos patrones mentales para dar coherencia a su mundo percibido.

Por lo tanto, es importante tener en cuenta que un concepto desarrollado por un docente en una clase, llega a cada estudiante según la estructura cognitiva que éste posea; esto es, habrá tantas interpretaciones como estudiantes existan en el

---

[54] PIAGET, J. Seis estudios de psicología, Op. cit., p. 18.

[55] Ibid., p. 18.

[56] ARANCIBIA, Op. Cit., p. 78.

aula. Así, el proceso cognitivo es de carácter individual. Cada persona acomoda y reacomoda en su red cognitiva los datos que recibe. Este proceso ocurre a su vez de manera diferente según la etapa de vida en que ella se encuentre.

v **Lev Semenovich Vygotsky*.** Considera al sujeto como el resultado del proceso histórico y social. Ese mundo social, influye en el sujeto a través de otros sujetos, de los objetos socioculturales y de las prácticas que han sido creadas por generaciones. “Los niños aprenden mediante la interacción social. Adquieren las habilidades cognitivas como parte de su inducción a un modo de vida. Las actividades compartidas ayudan a los niños a interiorizar las formas de pensamiento y comportamiento de su sociedad y a convertirlas en propias[57]”.

Como representante de la teoría socio-cultural, es de interés para esta investigación porque su visión acerca de la ocurrencia del aprendizaje por relación e interacción, le da a ésta un carácter de mediación, condición que se recomienda en el estudio de la matemática.

En Vygotsky, son fundamentales los siguientes conceptos:

- **Funciones mentales inferiores**. Son funciones naturales que están determinadas genéticamente. Limitan el comportamiento a una reacción o respuesta al ambiente. La conducta es impulsiva.[58]

- **Funciones mentales superiores**. Son funciones que se adquieren y se desarrollan a través de la interacción social y están determinadas por la forma de

---

* 1896-1934. Psicólogo ruso. Destacado proponente de la perspectiva contextual

[57] PAPALIA, Op. cit., p. 45.

[58] ROMO PEDRAZA, Abel. El enfoque sociocultural del aprendizaje de Vygotsky. [online]. México. En: Monografías.com (marzo 22, 2002). p. 2. Disponible en WWW: <http://www.monografias.com/trabajos10/gotsky/gotsky.shtml>.

ser de esa sociedad, esto es, son mediadas culturalmente. En la interacción con los demás se adquiere conciencia de sí mismo, se aprende el uso de los símbolos que, a su vez, permiten al sujeto pensar en formas cada vez más complejas. A mayor interacción social, mayor conocimiento, más posibilidades de actuar[59].

A partir de lo anterior, cada una de las personas que interactúan con el sujeto, influyen en su desarrollo y por ende en la imagen de mundo que adquiere. Así, la familia y luego la escuela y en ésta los compañeros y maestros, necesariamente le impulsan a solucionar los problemas en la forma como ha visto hacerlo o como conclusión de sus propias acciones; por lo tanto el concepto de **mediación** es determinante en la teoría de Vygotsky por cuanto resalta que la cultura a la que pertenece, es el principal factor de estructuración del comportamiento del individuo.

- **Habilidades psicológicas**. Estas, en un primer momento se manifiestan en el ámbito social y, después en el ámbito individual. La atención, la memoria, la formulación de conceptos son primero un fenómeno social y después, progresivamente, se transforman en una propiedad individual. Esto es, en un primer momento el sujeto, depende de otros y en un segundo momento, a través de la interiorización, aprende actuar por si mismo asumiendo la responsabilidad de sus actuaciones.[60]

En la medida en que las personas toman posición frente a las posiciones de otros, de una manera argumentada y tomando la debida distancia, reflejan un avance en su actividad intelectual y amplían la diferencia con otras personas que estando en el mismo círculo, no han logrado los aprendizajes por la falta de toma de conciencia de su propio proceso.

---

[59] Ibid., p. 2.

[60] Ibid., p. 4.

- **Herramientas psicológicas**. Sirven de puente entre las funciones mentales inferiores y las superiores y entre las habilidades sociales y las personales. Median los pensamientos, sentimientos y conductas; es decir, el pensar, sentir y actuar depende del uso de estas herramientas. Los símbolos, las obras de arte, la escritura, los diagramas, los mapas, los dibujos, los signos y los sistemas numéricos, son herramientas psicológicas. El lenguaje se usa como medio de comunicación entre los individuos en las interacciones sociales y progresivamente, se convierte en una habilidad personal, la cual posibilita cobrar conciencia de uno mismo y ejercitar el control voluntario de las acciones, afirmar o negar.[61]

- **Zona de desarrollo próximo**. Es la posibilidad de los individuos de aprender en el ambiente social, en el ejercicio de interacción con otros. Es la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con un compañero más capaz. El estado del desarrollo mental de un niño puede determinarse únicamente si se lleva a cabo una clasificación de sus dos niveles: del nivel real del desarrollo y de la zona de desarrollo potencial.[62]

De lo anterior se deduce que para Vygotsky, es notable la contribución de un adulto en el proceso de aprendizaje del sujeto, de tal forma que se aprende solamente con la ayuda de los demás. El nivel de desarrollo y aprendizaje que el individuo puede alcanzar con la ayuda, guía o colaboración de los adultos o de sus compañeros siempre será mayor que el nivel que pueda alcanzar por si sólo, por lo tanto el desarrollo cognitivo completo requiere de la interacción social[63]. Su idea es vigente por ejemplo en Colombia, dado que el sistema educativo, exige la presencia en las decisiones institucionales de todos los sectores de la sociedad

[61] Ibid., p. 6.

[62] VYGOTSKY, L. S. Pensamiento y lenguaje, Buenos Aires: Pléyade, 1985. p. 133.

[63] ROMO PEDRAZA, Op. cit., p. 5.

debido a que reconoce la influencia de éstos en el desarrollo de los estudiantes. De cierta manera responsabiliza del aprendizaje a los maestros, padres, compañeros y demás personas que interactúan con el estudiante. Sin embargo, considera que el efecto de esa interacción es el que en forma progresiva, la persona asume la responsabilidad de construir su conocimiento y guiar su propio comportamiento; progresa por la apropiación de la cultura que adquiere por la interacción y de la cual aprende a descubrir su entorno y a apropiarse de los códigos que el medio le enseña a descifrar e interpretar.

- **David Ausubel*.** Es el teórico que enfatiza sobre la importancia de los conocimientos previos en la construcción de nuevos aprendizajes. Considera a dichos conocimientos como ”objetos” que deben estar encajados y con significado en la estructura cognitiva, esto es, que estén debidamente organizados y relacionados con otros conceptos, a los que pueda categorizar sin dificultad alguna. Su teoría es importante abordarla en esta investigación debido a que muchas de las deficiencias en matemática están relacionadas con aprendizajes anteriores y con la forma memorística o mecánica como se asumen.

Centra toda su atención en el aprendizaje tal como ocurre en la vida cotidiana, en el aula escolar, “parte de la premisa de que existe una estructura en la cual se integra y procesa la información.... Esta estructura cognoscitiva es, entonces, una estructura jerárquica de conceptos, producto de la experiencia del individuo.[64]”. De ahí que su aporte fundamental, radica en la forma como concibe el aprendizaje, al cual considera como una actividad significativa para el que aprende y en ese proceso de significación existe una relación directa entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el alumno. Recomienda conocer al estudiante para que todas las actividades de enseñanza se diseñen con base en

---

* 1918. Psicólogo estadounidense. Creador de la teoría del aprendizaje significativo, que responde a una concepción cognitiva del aprendizaje. Actualmente, vive en Ontario (Canadá).

[64] ARANCIBIA, Op. cit., p. 85.

lo que el alumno ya sabe, “si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio, enunciaría éste: **el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese en consecuencia**[65]".

Este principio, “ofrece un sólido fundamento intelectual para la creación de acontecimientos nuevos en la enseñanza y el aprendizaje escolar que nos puede llevar, en las próximas décadas, a practicar una educación de más calidad[66]”. Por lo tanto, el aprendizaje en la enseñanza tradicional resulta muy poco eficaz cuando se insiste solamente en la repetición mecánica de elementos que el alumno no puede relacionar en su estructura con otros elementos. Esta apreciación podría ser una explicación del bajo rendimiento de los estudiantes en una disciplina cuando todos sus elementos teóricos y prácticos, han sido enfocados solamente desde la repetición mecánica.

En su teoría se identifican los siguientes conceptos:

- Aprendizaje significativo. Ausubel, asume el aprendizaje significativo como **“**el mecanismo humano, por excelencia, para adquirir y almacenar la inmensa cantidad de ideas e informaciones representadas en cualquier campo de conocimiento[67]**”**.

Se trata del proceso que relaciona aspectos relevantes de la estructura cognitiva que posee el que aprende, con la nueva información.

> Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno

---

[65] AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J.D. y HANESIAN, H. Psicología educativa. México: trillas, 1983. p.151.

[66] NOVAK, J. y GOWIN, B. Aprendiendo a Aprender. Barcelona: Marínez Roca, 1988. p. 32.

[67] AUSUBEL, D.P. The psychology of meaningful verbal learning. New York:Gruneand Stratton, p.58.

> ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se debe entender que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición[68].

Utiliza las expresiones 'no arbitrario y sustancial': lo no arbitrario hace referencia a que el material potencialmente significativo se relaciona no con cualquier aspecto de la estructura cognitiva sino con los conocimientos específicamente relevantes. Y lo sustancial, es porque lo central del nuevo conocimiento o de las nuevas ideas, es lo que incorpora a la estructura cognitiva. Además, resalta que los conceptos o proposiciones pueden expresarse de diferentes maneras y con el mismo significado aunque se haga a través de distintos signos o grupos de signos. Por lo tanto, este aprendizaje ocurre cuando se establece un enlace con significado, entre lo nuevo y las ideas pertinentes para la nueva información, que ya existen en la estructura cognitiva de quien aprende.

"En este sentido, Ausubel ve el almacenamiento de información en el cerebro humano como un proceso altamente organizado, en el cual se forma una jerarquía conceptual donde los elementos más específicos del conocimiento se anclan a conocimientos más generales e inclusivos (asimilación)[69] ".

- **Tipos de aprendizaje significativo**

- **Aprendizaje de representaciones**. Tipo básico de aprendizaje significativo, del cual dependen los demás. Ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios (generalmente palabras) con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y significan para el alumno cualquier significado al que sus referentes aluden.[70]

---

[68] AUSUBEL, et. al . Psicología educativa. Op. cit. p.18.

[69] ARANCIBIA, Op. cit., p. 85.

[70] AUSUBEL, et. al . Psicología educativa. Op. cit., p. 46.

Las palabras solas (símbolos convencionales o que la sociedad les ha dado un determinado significado para los objetos, situaciones o eventos que representan) de cualquier idioma, requieren ser aprendidas. Este proceso en Ausubel, es el aprendizaje de representaciones, "las palabras nuevas vienen a significar para el sujeto las mismas cosas que los referentes o a producir el mismo contenido cognoscitivo diferenciado de éstos[71]".

Debido a que es un aprendizaje básico, éste ocurre generalmente en el niño y se evidencia, cuando él da un significado a la palabra que representa 'algo' que percibe en un momento determinado, pero a diferencia de la asociación, será significativo, en el momento en que establezca una relación con el contenido relevante que existe en su estructura cognitiva.

- **Aprendizaje de conceptos.** "Los conceptos son objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterio comunes y que están diseñados en cualquier cultura mediante algún símbolo o signo aceptado. El aprendizaje de éstos, es un caso especial del aprendizaje representacional, pues los conceptos también se representan por símbolos individuales. Sin embargo, en este caso son representaciones genéricas o categoriales. Es preciso distinguir entre aprender qué concepto está representado por una palabra dada y, aprender el significado del concepto[72].

Es interesante ver cómo a pesar de las diferencias interculturales, se ha logrado desde un lenguaje universal, dar uniformidad en la denominación y significado de las propiedades físicas, funcionales y de relaciones comunes a los objetos, acontecimientos y/o situaciones del mundo real, facilitando las relaciones interpersonales y el intercambio cultural y científico entre los pueblos.

---

[71] Ibid., p. 52.

[72] Ibid., p. 88.

> La realidad objetiva denotada por un concepto determina en gran medida su utilidad tanto en la estructura del conocimiento como en actividades de aprendizaje, de resolución de problemas y de comunicación... En términos psicológicos, los conceptos son reales en cuanto a que pueden ser adquiridos, percibidos, entendidos y manipulados como si disfrutaran de existencia independiente por su propio derecho y, percibidos y comprendidos tanto denotativamente como en razón de sus funciones sintácticas, casi de la misma manera de una cultura a otra[73].

Para Ausubel, los conceptos se adquieren a través de los procesos de **formación** y de **asimilación.** Los conceptos se **forman** en las personas desde niños y sus características se adquieren a través de la experiencia directa, en sucesivas etapas de formulación y prueba de hipótesis; los símbolos que se utilizan, sirven como significantes para el concepto cultural, esto es, se establece una equivalencia entre el símbolo y los atributos de criterios comunes. Por esto, los niños aprenden un determinado concepto a través de varios encuentros con su referente y los de otros niños. Igualmente, los conceptos se **asimilan** cuando la nueva información se vincula con aspectos relevantes y modifica a los pre-existentes en la estructura cognitiva, es decir, cuando este proceso de interacción modifica no solo el significado de la nueva información sino también el significado del concepto o proposición que ya se posee[74].

- **Aprendizaje de proposiciones.** Este tipo de aprendizaje, exige captar el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones, y no lo que representan las palabras, combinadas o aisladas. Por lo tanto, implica la combinación y relación de varias palabras como referentes unitarios que luego se combinan en tal forma, que la idea resultante no es la suma de los significados de las palabras que la componen, sino un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognoscitiva.[75]

---

[73] Ibid., p. 89.

[74] Ibid., p. 120.

[75] Ibid., p. 61.

Para la Matemática es muy importante este tipo de aprendizaje dado que la teoría matemática, está constituida por definiciones, teoremas, corolarios, postulados, proposiciones, modelos, operaciones, procedimientos, entre otros, proporcionando cantidad de elementos que ejemplifican el aprendizaje de proposiciones.

> Las matemáticas no son, un conjunto de elementos sin cohesión interna. Su aprendizaje asigna una secuencia temporal específica, donde unos conceptos se articulan sobre el conocimiento de otros, de manera que, en algunas ocasiones, esa necesidad lleva a realizar una instrucción tangencial de aspectos necesarios para la comprensión de aquéllos. La naturaleza del proceso de su construcción obliga a volver periódicamente sobre los mismos contenidos con niveles de complejidad, abstracción y formalización crecientes.[76]

Por ejemplo, la convergencia o divergencia de una serie por utilización de la Prueba de la integral, se puede determinar mediante la aplicación del siguiente resultado:[77]

> Suponga que *f* es una función continua, positiva y decreciente en [1, ∞) y sea $a_n = f(n)$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si la integral impropia:
>
> $$\int_1^{\infty} f(x)dx \quad \text{es convergente}$$

Para aplicar la Prueba, es necesario reconocer los elementos teóricos subyacentes a cada uno de los conceptos relacionados: función, cuándo una función es continua, positiva y decreciente, reconocer un intervalo, saber cuándo una integral es impropia y cómo se resuelve y finalmente identificar la función para aplicar alguno de los métodos de integración. No obstante, aunque se debe

[76] SANCHEZ HUETE, J. y FERNANDEZ BRAVO, J. La enseñanza de la matemática: Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas. Alcalá: CCS, 2003. p. 18.

[77] STEWART, J. Cálculo Multivariable. 4 ed. México: Thomson, 2002. p. 715.

reconocer y aplicar los elementos que constituyen la Prueba, no resulta ser una suma de conceptos, sino que cada uno es condición necesaria de tal modo que con uno sólo de estos que no se cumpla, la prueba no tiene aplicabilidad para el caso que se está analizando.

Para Ausubel, el aprendizaje de proposiciones puede ser:

- **Aprendizaje subordinado o inclusivo**. Ausubel, afirma que existe una relación subordinada del material nuevo con la estructura cognoscitiva "cuando la información nueva frecuentemente se vincula o afianza con los aspectos pertinentes de la estructura existente en el individuo, cuando el material de aprendizaje ejemplifica o apoya una idea existente en la estructura cognoscitiva o si es una extensión, elaboración, modificación o limitación de proposiciones previamente aprendidas[78]"

Por ejemplo, en Matemática, resolver una ecuación de segundo grado consiste en hallar los valores de la variable que satisface la igualdad. Para buscar la solución se puede intentar con el método que usa factorización; esto significa que se debe reconocer en la expresión dada si puede hacerlo a través de este método y luego actuar.

- **Aprendizaje superordinado**. Se refiere a los aprendizajes que ocurren cuando una proposición nueva se relaciona con ideas subordinadas específicas que se encuentran en la estructura cognoscitiva y a la vez con los contenidos pertinentes en dicha estructura a la que puede incluirse; tiene lugar en el curso del razonamiento inductivo o cuando el material expuesto es organizado inductivamente o implica la síntesis de ideas componentes[79].

---

[78] AUSUBEL, et. al. Op. cit., p. 62.

[79] Ibid., p. 63.

Por ejemplo, en Matemática, el Conjunto de los Números Reales R se define como la unión de los conjuntos numéricos de los Racionales Q e Irracionales Q' y por las características de los elementos de cada uno de éstos, se determina con claridad que no existen elementos comunes a ambos conjuntos, lo cual indica que Q y Q' son Conjuntos Disyuntos por cuando su intersección es vacía. Son subyacentes las operaciones y propiedades que se verifican en cada uno de los conjuntos numéricos al igual que su representación gráfica y simbólica y que es relevante conocer para reconocer la estructura del nuevo conjunto numérico.

♦ **Aprendizaje combinatorio.** "Cuando una proposición potencialmente significativa no se puede relacionar con ideas superordinadas o subordinadas específicas de la estructura cognoscitiva del alumno, pero es relacionable con un fundamento amplio de contenidos generalmente relevantes de tal estructura[80]". El ejemplo de la integral mostrado anteriormente es una de las tantas situaciones en matemática, que se relacionan con este tipo de aprendizaje.

- **Conceptos integradores**. Llamados también ideas pertinentes de afianzamiento. Son las entidades del conocimiento específico que existen en la estructura cognoscitiva de quien aprende y a la cual se enlazan los conocimientos nuevos siendo imprescindibles para que se produzca el aprendizaje significativo. Facilitan que las nuevas ideas, conceptos y proposiciones sean aprendidos significativamente siempre y cuando otras ideas, conceptos o proposiciones también importantes, sean claros y estén disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras. El aprendizaje mecánico puede ser necesario en algunos casos. La nueva información es almacenada arbitrariamente, sin interactuar con conocimientos pre-existentes. Este aprendizaje se produce hasta que algunos elementos de conocimientos pertinentes a nuevas informaciones en esa misma área, existan en la estructura cognoscitiva y puedan servir de conceptos integradores aunque sean

[80] Ibid., p. 47.

poco elaborados. Ahí, se relacionan los conceptos aislados que se habían aprendido mecánicamente, enriqueciendo y desarrollando los conceptos integradores, los cuales servirán de enlace a nueva información haciendo posteriormente la relación, significativa.[81]

En Ausubel, los principios de diferenciación progresiva y reconciliación integradora dan viabilidad a la ocurrencia del aprendizaje significativo. Se habla de diferenciación progresiva, cuando reiteradamente se modifican los conceptos integradores que existen en la estructura cognoscitiva de quien aprende por subordinación, y se habla de reconciliación progresiva si las nuevas informaciones se adquieren por aprendizajes supraordinados o combinatorios.

- **Diferenciación progresiva.** En Ausubel los conceptos siempre se están aprendiendo, modificando o haciendo más explícitos e inclusivos a medida que se van diferenciando progresivamente; la organización de los contenidos para un área determinada del saber, en la mente del individuo tiende a ser una estructura jerárquica en la que las ideas más inclusivas se sitúan en la cima y progresivamente incluyen proposiciones, conceptos y datos menos inclusivos y menos diferenciados. Así, cuando la materia de estudio está programada de acuerdo con este principio, las ideas más generales e inclusivas de la disciplina 'en estudio' se presentan primero, y luego se diferencian progresivamente en función de los detalles y la especificidad.[82]

- **Reconciliación integradora.** Este principio, establece que existe una mejora en el aprendizaje significativo cuando el que aprende reconoce nuevas relaciones o vínculos conceptuales entre conjuntos relacionados de conceptos o proposiciones; éste se aplica cuando al preparar material de enseñanza, no se separan las ideas o temas particulares en capítulos o subcapítulos,

[81] Ibid., p. 157.

[82] Ibid., p. 173.

presentándolos sólo en el lugar que les corresponde. Igualmente, se aplica cuando los materiales afines se presentan en serie, pero sin que la comprensión del material de la segunda parte presuponga la comprensión del material de la primera; las tareas de aprendizaje sucesivas no dependen inherentemente unas de otras.[83]

Los conceptos de diferenciación progresiva y reconciliación integradora pueden ser aprovechados en el campo educativo, puesto que la diferenciación progresiva puede provocarse, presentando al inicio del proceso educativo las ideas más generales e inclusivas que serán enseñadas para diferenciarlas paulatinamente en términos de detalle y especificidad; después se exploran las relaciones entre los conceptos para resaltar las diferencias y similitudes relevantes y luego reconciliar las incongruencias reales o aparentes que resulten.

- **Papel de la estructura cognoscitiva preexistente.** Para Ausubel, reconocer la estructura de conocimientos existentes en el momento del aprendizaje, es el factor cognoscitivo más importante en el proceso de enseñanza. Puede deducirse la responsabilidad de los maestros al enfocar sus estrategias de enseñanza, las cuales deben responder a los conceptos que realmente manejan los estudiantes con el propósito de anticipar efectividad en el desempeño frente a los mismos.

> La estructura cognoscitiva, tanto en términos del contenido sustancial de la estructura del conocimiento de un individuo como sus propiedades principales de organización dentro de un campo específico de estudio, en un momento dado, es el factor principal que influye en el aprendizaje y la retención significativos dentro de este mismo campo.[84]

Los elementos previos deben cumplir seis propiedades al enfrentarse con nuevos aprendizajes: Deben ser **claros y estables** para garantizar que el aprendizaje del material nuevo sea significativo y permanezca en la memoria, **generales e**

[83] Ibid., p. 176.

[84] Ibid., p. 151.

inclusivos para que sirvan de “puente cognoscitivo o ideas de anclaje”, facilitando la vinculación del nuevo material de aprendizaje con los elementos pertinentes y a disposición del alumno en su estructura cognoscitiva, presentar **cohesión** interna y ser **discriminados** para garantizar que las nuevas ideas que van a aprenderse, tengan potencialidades de retención a largo plazo[85].

Igualmente, Ausubel determina que al manipular deliberadamente (en forma sustancial o programática) los atributos de los elementos previos con fines pedagógicos, se puede influir en el establecimiento de la estructura cognoscitiva pertinente a una determinada área del saber. Desde lo **sustancial,** si se emplean aquellos conceptos y proposiciones unificadores inclusivos de la disciplina y **programáticamente,** si se usan métodos apropiados de presentación y organización de los contenidos así como de la evaluación del aprendizaje significativo de los mismos y por manipulación adecuada de las variables cognoscitivas, motivacionales, personales y sociales. [86]

Otro concepto asociado a Ausubel y sobre el cual fundamenta su teoría es el de los conocimientos previos.

- Conocimientos e ideas previos. Son las nociones que los estudiantes traen consigo antes del aprendizaje formal de una determinada materia. Todas aquellas concepciones que tienen los estudiantes, con anterioridad a cualquier tipo de enseñanza, sea básica o superior.[87]

Cuando el material de aprendizaje se relaciona con la estructura cognitiva no como resultado de la adquisición de significados para el sujeto, el aprendizaje

---

[85] Ibid., p. 153.

[86] Ibid., p. 171.

[87] PERALES PALACIOS, Francisco y CAÑAL DE LEÓN, Pedro. Didáctica de las ciencias experimentales: Teoría y práctica de la enseñanza de las ciencias. España: Marfil, 2000. p. 365.

entonces es mecánico o automático. Por lo tanto, el conocimiento que se transmite en cualquier situación de aprendizaje debe estar estructurado no sólo en sí mismo, sino con respecto al conocimiento que ya posee el alumno, aunque la capacidad cognitiva de los alumnos cambie con la edad e implique el uso de esquemas y estructuras de conocimiento diferentes de las que antes utilizaba. En cualquier nivel educativo es preciso tener en cuenta lo que el alumno ya sabe sobre lo que se le va a enseñar. No obstante, con mucha frecuencia, los contenidos de la enseñanza se organizan teniendo en cuenta exclusivamente el punto de vista de la disciplina, por lo que unos temas o cuestiones preceden a otros como si todos ellos tuvieran la misma dificultad para el alumno[88]. Esto implica que los docentes para la organización de los contenidos deben tener en cuenta definitivamente los conocimientos previos del alumno.

> La mayor parte de los profesores sabe que antes de empezar a enseñar un nuevo tema es importante tener alguna idea acerca de lo que sus alumnos ya saben (o entienden erróneamente) sobre ese tema. En términos ausbelianos, un profesor necesita conocer qué conceptos relevantes pueden servir de marco para la inclusión de nuevos contenidos. Un mapa conceptual es una herramienta sencilla para averiguar en dónde se encuentran los alumnos[89].

Por ejemplo, cuando se dan fórmulas como elementos para después repetir en situaciones semejantes, la nueva información es incorporada a la estructura cognitiva de manera literal y arbitraria puesto que consta de puras asociaciones arbitrarias, así el alumno carece de los conocimientos previos relevantes y necesarios para hacer que la tarea de aprendizaje sea potencialmente significativa.

> Resulta fundamental para el profesor no sólo conocer las representaciones que poseen los alumnos sobre lo que se les va a enseñar, sino también analizar el proceso de interacción entre el

---

[88] CARRETERO, Mario. Op. cit. p. 42.

[89] NOVAK, J. y GOWIN Op. cit., p. 126.

> conocimiento nuevo y el que ya poseen. De esta manera, no es tan importante el producto final que emite el alumno como el proceso que le lleva a dar una determinada respuesta. Por ejemplo, esto puede aplicarse a las situaciones de examen o evaluación. A menudo, los profesores sólo prestamos atención a las respuestas correctas de los alumnos. De hecho, son éstas las que utilizamos para otorgar una calificación en términos cuantitativos. Sin embargo, no solemos considerar los errores, que son precisamente los que nos informan sobre cómo se está reelaborando el conocimiento que ya se posee a partir de la nueva información que se recibe. Efectivamente, la mayoría de los profesores sabemos que los errores que cometen los alumnos tienen una clara regularidad y se deben a procesos de comprensión inadecuada que se suceden curso tras curso[90].

Generalmente, la forma de conocer las ideas previas de los estudiantes es a través de las respuestas que dan a cuestiones planteadas. Sin embargo, esa tarea no puede ser solamente mediante preguntas directas y demasiado amplias, porque se obtendría respuestas que han sido memorizadas anteriormente o respuestas evasivas como: ‘no sé o no me acuerdo’[91].

Frente a esta realidad, mal haría un profesor que llegue el primer día de clase y sin más preámbulos que un saludo, más o menos cordial, comience con la exposición de contenidos. Debe tener claros los objetivos; si estos buscan que los estudiantes se aprendan todos los contenidos de forma memorística y repetitiva, no hace falta saber cuáles son los conocimientos previos del alumno, pero si lo que se pretende es que los alumnos comprendan, entiendan y apliquen los nuevos contenidos, entonces se hace inevitable la interacción motivada de esos nuevos conocimientos y los conocimientos previos relacionados. Por lo tanto, es importante considerar que cuando un alumno intenta comprender algo, necesita activar una idea o conocimiento previo que le sirva para organizarlo y darle sentido.

---

[90] CARRETERO, Mario. Op. cit. p. 61.

[91] PERALES PALACIOS, Francisco y CAÑAL DE LEÓN, Pedro, Op. cit., 368.

Perales y Canal de León[92] identifican algunas características de las ideas previas de los alumnos al acercarse significativamente a nuevos aprendizajes:

- Las nociones o esquemas se movilizan en el transcurso de la actividad de representación.

- A medida que se construye el conocimiento se adquiere la capacidad explicativa, debido a que se utilizan esquemas con un grado de consistencia y estabilidad.

- Las representaciones se elaboran a lo largo de la vida del individuo a través de la acción cultural de los padres y familiares, la escuela, medios de comunicación y más tarde por la actividad social y profesional en el adulto.

- Las respuestas se van dando con cierta rapidez y seguridad.

- Se encuentra paralelismo en la generación de determinados conceptos científicos y las ideas que los alumnos logran en su propio desarrollo cognitivo.

2.2 LA DIDÁCTICA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

El sistema educativo ha de ser coherente con el desarrollo científico y tecnológico de una sociedad para que los estudiantes puedan enfrentarse a la resolución de problemas, no sólo en el ámbito escolar sino en su futuro laboral, en donde conjuguen la creatividad y la innovación. Al respecto Moreno y Waldegg[93], afirman que las estructuras curriculares deben fortalecer los procesos de generalización, sistematización y abstracción, lo cual significa que la consecución de los objetivos no depende de la distribución de los contenidos temáticos, sino de planes de

[92] Ibid., p. 371.

[93] MORENO Op. Cit., p.40.

acción para el desarrollo de competencias. En estas condiciones, la escuela ya no es sólo el lugar de transmisión de conocimientos sino que contribuye a dar significado a la avalancha de informaciones en ocasiones dispersas e incompletas, integrándolas en el marco de ese saber científico requerido.

Confirmando lo anteriormente expuesto, Pozo[94] interpreta la misión de cada uno de los niveles de enseñanza en relación con el desarrollo de la ciencia. Resalta que la educación primaria debería basarse en las características psicológicas de los estudiantes y desarrollar primero formas de pensamiento, próximas al conocimiento científico y en el siguiente nivel completar esa "alfabetización científica" a partir de la lógica del discurso científico. Esto es, la escuela debe fomentar ante todo la construcción de conocimientos por parte de los alumnos, en lugar de simplemente repetir los ya elaborados.

Novak[95], relaciona el aprendizaje con la experiencia y lo entiende como la capacidad que tienen las personas para representar lo que perciben en los acontecimientos u objetos que les rodean, mediante símbolos orales o escritos. También reconoce que el diálogo o el intercambio a través de la discusión o negociación es necesario para aprender el significado de cualquier conocimiento; aunque el aprendizaje sea una actividad de carácter individual son los significados los que sí se pueden compartir, discutir, negociar y convenir.

Al respecto, Coll[96] reconoce que el aprendizaje no es un asunto de transmisión y acumulación de conocimientos, sino un proceso activo del alumno que logra ensamblar, extender, restaurar e interpretar y por lo tanto construir conocimiento, desde los recursos de la experiencia y la información que recibe así como también

---

[94] POZO, Juan Ignacio. La Psicología Cognitiva y la Educación Científica. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid. 2001. p.3.

[95] NOVAK, J y GOWIN, Op. cit., p. 37.

[96] COLL, César. Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento. Argentina: Paidós, 1991. p.140.

que al manipular activamente la información pensando y actuando sobre ella, con seguridad el estudiante logra un aprendizaje eficaz. Desde esta perspectiva, una teoría de la educación debe propiciar que los estudiantes piensen, sientan y actúen para lograr los aprendizajes en forma significativa, considerando que el aprendizaje que lleva a cabo el alumno no puede entenderse únicamente a partir de un análisis externo y objetivo de lo que se le enseña o de cómo se le enseña, sino que también tenga en cuenta, las interpretaciones subjetivas que el propio alumno construye al respecto.

Una de las estrategias para lograr dichos propósitos puede ser mediante propuestas de discusiones en grupo, debido a que el alumno aprende de forma más eficaz cuando lo hace en un contexto de colaboración e intercambio con sus compañeros; la argumentación en la discrepancia entre alumnos que poseen distintos grados de conocimiento sobre un tema conlleva a observar diferencias y semejanzas y obtener con ello conclusiones importantes.

La información que aprendemos con un significado, como parte de una organización de conocimientos más amplia, se recuerda mejor que los datos que adquirimos aisladamente. Un proceso de adquisición muy eficaz es relacionar una nueva información con representaciones ya contenidas en la memoria en lugar de adquirirlo como un elemento de información independiente. El tránsito de la información desde la memoria de corto plazo a la memoria permanente, está mediado por un conjunto de procesos de adquisición. Por ejemplo en Matemática, para hallar el dominio y el rango de una Relación Real dada, se requiere recordar y efectuar correctamente cómo se resuelven inecuaciones (lineales, cuadráticas, racionales, irracionales –cada una tiene su propio manejo conceptual-). Si el estudiante no recuerda total o parcialmente cómo hacerlo, no desarrollará la tarea en forma eficaz. Otro concepto matemático que permanentemente se aplica es el manejo de fraccionarios. Se espera que los estudiantes realicen correctamente todas las situaciones donde se utilice la aplicación de las operaciones y sus propiedades relacionadas con fracciones. Este concepto se utiliza desde cuarto de primaria (que es donde se introduce el tema) hasta el último nivel académico (y técnico) que realice en su vida. Si este concepto no se aprendió correctamente, lo más probable es que este "error conceptual" permanezca por siempre hasta tanto no realice un ejercicio de interiorización y nuevamente el proceso de significación; posiblemente, deberá trabajarlo desde lo concreto.

En el campo de la Didáctica de la Matemática desde una perspectiva cognitiva, las recientes investigaciones se orientan a identificar cómo el estudiante recoge, procesa e interpreta la información que recibe por diversas vías y en particular dentro del contexto escolar; esto es, hay interés por "demostrar que el aprendizaje y la práctica de las matemáticas siempre han tenido lugar dentro de contextos sociales, esto es, no son actividades individuales o aisladas de los contextos socioculturales en los que tienen lugar[97]". Queda la tarea de conectar en forma significativa el conocimiento informal de los estudiantes y los fragmentos de conocimiento matemático que poseen, para que posteriormente sean aplicados, transferidos o contextualizados en nuevas situaciones.

Para el estudiante de Ingeniería, la matemática es una herramienta de cálculo que le permite modelar y resolver problemas, desarrollar el pensamiento lógico y la capacidad de razonar, así como también es un lenguaje universal capaz de contribuir al conocimiento y desarrollo de otras disciplinas propias de su perfil profesional. El ingeniero, requerirá trabajar con gráficos, debido a que los usan para representar el comportamiento de diversas magnitudes y fenómenos, tener habilidad para emplear tablas y expresar en lenguaje matemático los fenómenos y procesos de la realidad e igualmente interpretar los resultados obtenidos, identificando las limitaciones que corresponda.

Por esto, se requiere que el profesor de matemática tenga en cuenta: la propia Matemática, el conocimiento del perfil del estudiante, la didáctica de la matemática

[97] MORENO A. Op. Cit., p. 58.

y las nuevas tecnologías de la informática y las comunicaciones, porque de esta forma, puede mostrar el papel de la matemática en la carrera y su articulación lógica con las demás disciplinas; las herramientas que utilizará, las notaciones y los métodos. Por esto, se busca implementar estrategias pedagógicas de carácter participativo, como el método de discusión (discusión plenaria y en grupos pequeños), el método problémico (exposición problémica, conversación heurística, búsqueda parcial y método investigativo), la técnica de la rejilla y el Aprendizaje en parejas, para que el proceso sea activo, de construcción, deconstrucción y reconstrucción del conocimiento, mediante la solución colectiva de tareas docentes, intercambio y confrontación de ideas, opiniones y experiencias entre estudiantes y profesores. El profesor, no traslada los conocimientos al estudiante de forma acabada, sino que lo conduce a buscar vías y medios para la solución de tareas, hasta llegar a la adquisición de nuevos conocimientos y desarrollar métodos de acción. Se deduce la necesidad de perfeccionar los métodos de enseñanza y aprendizaje de manera que el proceso de instrucción trasmita lo mismo en menos tiempo, sin sacrificar la amplitud, la profundidad y la calidad de la enseñanza.[98]

> La enseñanza de la matemática debe contribuir a que el estudiante de ingeniería se desarrolle con una visión del mundo que favorezca la formación de un pensamiento productivo, creador y científico. El propio contenido de la matemática como disciplina de estudio, los principios de su estructuración, la metodología de introducción de nuevos conceptos, teoremas y procedimientos, son elementos que pueden y deben influir positivamente en este sentido[99].

Teniendo en cuenta lo anterior, se requiere como requisitos mínimos para aprender matemáticas:

---

[98] DEIROS, Beatriz, CALDERÓN, Margarita y HERNÁNDEZ, Lourdes. [online]. Apuntes sobre didáctica de la matemática para ingeniería. (oct. 2004) p. 13 y 17. Disponible en WWW: <www.monografias.com/trabajos11/monogrr/monogrr.shtml>.

[99] Ibid., p. 27.

- **Retención y memorización.** Estos procesos serán óptimos si lo que se ha aprendido es significativo en relación con la estructura de conocimientos ya existente en la mente de quien aprende. La simbología matemática y los respectivos signos son básicos para expresar axiomas, teoremas, postulados y demostraciones a través de un lenguaje universal; se requiere entonces, de la memorización y retención para adquirir dicho lenguaje. Las estrategias (nemofichas, mapas,...) sugeridas por el profesor establecerán la diferencia de ese proceso e incluso pueden superarlo, aunque cada persona aporte su propia estructura a aquello que tiene que ser aprendido.

- **Empleo de algoritmos.** Las operaciones básicas y la solución de ecuaciones son algunos ejemplos que requieren el uso de algoritmos; la práctica favorece que en los desarrollos se obvien algunos pasos de dichos procesos.

- **Aprendizaje de conceptos**. La construcción de nuevos conceptos se basa en aspectos previamente comprendidos. Es natural que en matemáticas se enseñen los conceptos a través del uso de ejemplos y contraejemplos para facilitar su comprensión. Esto permite afirmar que en ocasiones las definiciones son muy densas y con el fin de hacerlas más concretas se utilizan los ejemplos y contrastes. Sin embargo, muchos conceptos sólo debieran definirse en el nivel que se considera es el apropiado para visualizarlas, puesto que "se puede aprender matemáticas sin tener una definición completamente estricta de ciertos conceptos, dado que nuestros conceptos crecen y se desarrollan a lo largo de los años[100]".

Piaget hace referencia al efecto que tienen los vacíos conceptuales en el aprendizaje de nuevos conceptos. Si los conceptos no han quedado aprehendidos genera conflictos e impide el proceso de aprendizaje en forma significativa "Una

[100] ORTON, A. Didáctica de las Matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula. 1990, Marid: Morata. p. 48.

laguna, se convierte en perturbación cuando para la solución de un problema concreto me falta una información indispensable[101]".

- **Resolución de problemas.** "Se conciben como generadoras de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar una solución a una situación nueva… Así, la resolución de problemas puede considerarse como la verdadera esencia de las matemáticas[102]".

La solución de problemas se ha utilizado en algunos casos como herramienta para aplicar en una tarea específica, un concepto matemático que se ha teorizado y en donde el estudiante mecaniza una serie de algoritmos. En cierto modo, esos problemas han invitado al estudiante a dar una respuesta de forma mecánica, limitándole las posibilidades de crear nuevas estrategias de solución. En otros casos, los problemas se han asumido como una actividad que involucra procesos cognitivos como la visualización, la asociación, la abstracción, la comprensión, la manipulación, el razonamiento, el análisis, la síntesis y la generalización. Al respecto, algunos estudios sobre la forma en que los estudiantes resuelven problemas, han demostrado que la reflexión que éste hace de sus propias acciones ligadas a este proceso, posibilita la modificación de sus estructuras cognitivas.

> Resolver problemas no se reduce a usar la matemática conocida, requiere de una gran dosis de creatividad y reelaboración de hechos, conceptos y relaciones, en el sentido más real del término. RESOLUCION DE PROBLEMAS es CREAR Y CONSTRUIR matemática. Memorizar y repetir todas las reglas deductivas que operan en un sistema formal fuertemente estructurado constituye a veces una derivación del comportamiento real del matemático. Confundir los procesos de

[101] PIAGET, Jean. Introducción a la epistemología genética. Tomo1. El pensamiento matemático. México: Paidós, 1991, Col. Psicología evolutiva. Trad. María Teresa Cevasco y Víctor Fischman. p. 70.

[102] Ibid., p. 51.

producción y elaboración del conocimiento matemático con sus resultados cristalizados es un error frecuente en nuestra enseñanza; por ello, la resolución de problemas constituye no sólo una buena estrategia metodológica sino que supone una forma de aproximación más real al trabajo en matemática[103].

Si el trabajo, se orienta por este enfoque, con certeza se contribuirá a que el estudiante aparte de desarrollar procesos cognitivos, construya significados sobre y desde la matemática, en la medida que los use y los relacione con situaciones de su diario vivir.

Así, el enfoque de formulación y resolución de problemas, facilitará la conceptualización matemática; con ello el estudiante puede estructurar conocimientos y desarrollar procesos que coadyuven a la construcción de su pensamiento matemático.

---

[103] KILPATRICK, Jeremy; GÓMEZ, Pedro y RICO, Luis. "Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia". México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995. p. 15.

3. PROCESO METODOLÓGICO

La presente investigación es de tipo **descriptivo** por cuanto “busca conocer situaciones, costumbres y actitudes predominantes... describir fenómenos mediante la descripción exacta de las actividades, objetos, procesos y personas... e identificar las relaciones que existen entre dos o más variables[104]”, para este caso, identificar y describir las deficiencias en Matemáticas que afectan significativamente el aprendizaje del Cálculo Diferencial en los estudiantes que ingresan a los Programas de Ingeniería de la UNAB. La investigación descriptiva es uno de los tipos más usados en todas las ciencias para estudiar un fenómeno que no ha sido explicado, de tal manera que a partir de observaciones se logre describir más exacta y detalladamente dicho fenómeno.

Su enfoque es **cualitativo** dado que no se centra exclusivamente en datos estadísticos sino en la interpretación de la información desde los participantes; buscó comprender su forma de actuar a partir de la descripción e interpretación de su realidad en torno al problema de estudio, explora de manera sistemática los conocimientos y valores que compartían los individuos desde su contexto de ocurrencia y se trabajó de manera inductiva como lo plantean Bonilla y Rodríguez[105].

---

[104] VAN DALLEN, D.B. y MEYER, W.J. Manual de técnicas de la investigación educacional. Argentina: Paidós, 1971. P. 226.

[105] BONILLA, Elssy y RODRÍGUEZ, Penélope. Más allá del dilema de los métodos. Bogotá : Universidad de los Andes, 1997. P. 42.

3.1 POBLACIÓN

La investigación se realizó en una universidad privada de estrato alto; la población está constituida por los estudiantes de Ingeniería que tomaron la asignatura Cálculo Diferencial en el primer semestre de 2004, cuyo número ascendió a 131 estudiantes distribuidos de la siguiente forma:

PROGRAMA DE INGENIERÍA	CANTIDAD	HOMBRES	MUJERES
Sistemas	33	25	8
Mecatrónica	28	23	5
Financiera	45	15	30
Mercados	17	7	10
En Energía	8	4	4
TOTAL	**131**	**74**	**57**

Las edades de los participantes estuvieron entre 17-20 años.

3.2 MUESTRA

La muestra fue de carácter intencional, procurando que ella representara de la mejor manera posible las características de la población. Se tomó un grupo por conveniencia, por cuanto se facilitaba el proceso de investigación dado que la investigadora dirigía la asignatura. El grupo seleccionado contó con 20 estudiantes distribuidos así:

PROGRAMA DE INGENIERIA	CANTIDAD	HOMBRES	MUJERES
Sistemas	6	4	2
Mecatrónica	6	5	1
Financiera	5	2	3
Mercados	1	0	1
En Energía	2	2	0
TOTAL	**20**	**13**	**7**

Estos estudiantes realizaron sus estudios de secundaria en colegios del área metropolitana de Bucaramanga y otras ciudades y municipios como Aguachica, Barrancabermeja, Bogotá, Cúcuta, Duitama, El Socorro, Magangué, Málaga, Ocaña y San Gil; estudiaron en jornada diurna y bajo la modalidad presencial. De Bucaramanga provenían de colegios como: San Pedro Claver, Agustiniano, Santísima Trinidad, La Merced, New Cambridge, La Presentación, El Rosario, Santa Teresita, Instituto Técnico Dámaso Zapata, Instituto Tecnológico Eloy Valenzuela, El Pilar y Santa María Goretti, entre otros.

3.3 PROCESO DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Se realizó una indagación al grupo, para identificar sus percepciones frente a su trabajo matemático tanto en las instituciones de básica y media como en su primer contacto con la universidad. Esta exploración se hizo mediante **grupos de discusión**, que es "una estrategia de investigación que se nutre de las técnicas de conversación, de la entrevista grupal en grupos focales y de la entrevista en profundidad, conservando una identidad propia... es un marco para captar las representaciones ideológicas, valores, formaciones imaginarias y afectivas dominantes en un determinado grupo. Es una estrategia de investigación social que trabaja con el habla[106]". Los criterios sobre los cuales giró la discusión fueron los siguientes:

- Percepción y sentir ante los resultados obtenidos en Matemática.
- Experiencias que favorecieron o desfavorecieron el aprendizaje de la Matemática.
- Valoración de las estrategias metodológicas utilizadas por los profesores de bachillerato para la enseñanza de la Matemática.
- Utilidad de la Matemática para el ingeniero.

---

[106] GALEANO M., María E. y VÉLEZ R., Olga L. Estado del arte sobre fuentes documentales en investigación cualitativa. Medellín: Universidad de Antioquia, 2002. P. 22

De la misma forma, se realizó un estudio sistemático de los resultados de la aplicación de una prueba de reconocimiento de conceptos de precálculo, para identificar los principales vacíos o dificultades que presentaban los estudiantes de recién ingreso a la asignatura de Cálculo Diferencial, mediante la aplicación de un cuestionario (Ver Anexo A). Esta prueba se elaboró tomando como aspectos fundamentales los **conocimientos básicos**, las **habilidades** y las **operaciones** que los estudiantes deben dominar para acceder a los nuevos aprendizajes en Cálculo Diferencial. Estos aspectos de estudio, fueron determinados por el grupo de profesores que dictaban la asignatura de Cálculo Diferencial y desde los prerrequisitos contemplados en el programa de la misma asignatura.

La revisión final de la prueba la hicieron tres docentes quienes en el momento dictaban Cálculo Diferencial; así mismo fue aplicada a cinco estudiantes de otro grupo con el propósito de detectar el grado de comprensión de cada pregunta, el lenguaje utilizado y las condiciones de aplicación (con o sin calculadora, tiempo requerido, instrucciones). Después de esta prueba piloto (Ver Anexo B) se hicieron algunas adecuaciones (se suprimieron dos ejercicios y dos situaciones, dado que algunos de sus elementos ya habían sido contemplados y en su lugar se amplió el punto de relación de conceptos con el fin de indagar un poco más sobre Relaciones Reales, temática sobre la cual se definen las funciones que corresponde al primer capítulo a tratar en la asignatura) quedando el instrumento definitivo.

Es importante destacar que a partir de la construcción de la prueba se diseñó el patrón de respuestas el cual sirvió como criterio para comparar los resultados obtenidos por los estudiantes. En el desarrollo de la prueba, cada ejercicio, problema o ítem es resuelto ‘paso a paso’ (número mínimo de ejecución) para lo cual se describe a qué conocimiento, habilidad u operación fundamental corresponde cada ítem y que era lo esperado como mínimo en el desempeño de los estudiantes; se resalta que un mismo conocimiento, habilidad u operación puede estar contenido en varios ítems de la prueba; a cada paso se asignó un símbolo que lo identificaba para efectos de tabulación. (Ver Anexo C).

Los conocimientos básicos, las habilidades requeridas en la solución de problemas y las operaciones fundamentales sobre los cuales se construyó la prueba se observan en el Cuadro 1 el cual presenta cada subcategoría –su sigla o símbolo identificador- y la codificación de los elementos básicos al desarrollar cada ejercicio o situación propuestos en la prueba, así:

- Número romano, indica el consecutivo del ítem o pregunta
- Letra minúscula, es la subdivisión del ítem o pregunta, la cual se utiliza en las preguntas que proponen varios ejercicios.
- Número natural, representa cada uno de los pasos básicos a seguir para la resolución del problema.

Ejemplo: **Ib3,** es el código que se asignó al paso que corresponde a la pregunta **I** (Factorizar completamente), ejercicio **b** ($2x^2+5x+3$) y paso **3** (identificación de la operación para simplificar)

Los juicios de valor se establecieron teniendo en cuenta los siguientes criterios:

S: “Lo hizo correctamente”	Cuando el estudiante procede o aplica la regla, teorema, o propiedad en forma adecuada.
N: “Es incorrecto”	Cuando procede o aplica erróneamente la regla, teorema, o propiedad elegidas.
R: “Tiene la idea pero no es correcto, finalmente”	Cuando inicia adecuadamente pero comete error de procedimiento o aplicación incorrecta de la regla, teorema, o propiedad elegidas
B: “No contestó”	Cuando deja en blanco

Cuadro 1. Distribución de los ítems de la prueba según el concepto de precálculo, habilidad u operación, relacionados.

SUBCATEGORÍAS		SIGLA	CODIFICACIÓN
CONCEPTO	Factorización de polinomios	FACT	Ia1, Ia3, Ia4, Ia5, Ib1, Ib2, Ic1, Ic2, II1
	Operaciones con fraccionarios	FRAC	Ib3, II2, II3
	Aplicación de algoritmos	ALGO	Ib4, II3, II4, II5, IIIa3, IIIb6, IVa3
	Operaciones entre Conjuntos y aplicación de la cardinalidad en la Teoría de Conjuntos	CONJ	IIIa1, IIIa2, IIIa3, IVb6
	Solución de ecuaciones lineales y cuadráticas. Fórmula cuadrática	ECUA	IIIb7, IIId4, Iva1, V7, V9
	Teorema de Pitágoras	PITAG	IIIb4
	Productos Notables	NOTA	IIIb5
	Relaciones e identidades trigonométricas.	TRIG	IIIc4, IIId3
	Conjunto de los Números Complejos	COMP	IVa3
	Solución de inecuaciones lineales	INEC	IVb1, IVb2, IVb4, IVb5, V3
	Relaciones reales	RELA	V4, V6, V8, V10, V11, V12
	Propiedades en los Números Reales	PROP	Ia2, II4, Ivb3
HABILIDAD	Identificación de datos	DATO	IIIa2, IIIb3, IIIc3, IIId2
	Identificación de variables	VARI	IIIb2, IIIc2, IIId2
	Planteamiento del modelo matemático	MODE	IIIb4, IIIc4, IIId3
OPERACIÓN	Operaciones Lógicas	LOGI	IIIa3, IVb2, IVb6
	Operaciones Aritméticas	ARIT	IIIa2, IIIb6, IVa3
	Operaciones Geométricas	GEOM	IIIb1, IIIc1, IIId1, V1, V2, V5, V13
	Operaciones Algebraicas	ALGE	Ia2, Ia3, Ia4, Ia5, Ib2, Ib4, Ic2, II1, II3, II4, II5, IIIb5, IIIb6, IIIc4, IVb1, IVb2, IVb3, IVb4, IVb5, IVb6.

Finalmente, con el fin de profundizar en el análisis de las deficiencias matemáticas, se revisó el proceso seguido por seis estudiantes para el desarrollo de algunos ejercicios de la prueba; también se les entrevistó para conocer de su propia voz su experiencia matemática previa. De la misma forma se realizó entrevista a los profesores de Matemática del Departamento que dictan o han trabajado con la asignatura Cálculo Diferencial con el fin de contrastar la información.

3.4 PROCESO DE ANÁLISIS

El análisis realizado en el presente estudio enfatizó esencialmente en dos procesos: en el **análisis exploratorio** que consistió en recoger los datos obtenidos en el desarrollo de grupos de discusión y de entrevistas a estudiantes y profesores; estos datos se registraron a través de notas de campo y hojas de resúmenes, lo que permitió indagar acerca de las percepciones de los estudiantes en relación con la Matemática. De otra parte en el **examen del proceso y resultados de una prueba** cuya aplicación permitió detectar las fortalezas y debilidades que muestran los estudiantes en cuanto a conocimientos, habilidades y operaciones requeridos para el aprendizaje del Cálculo Diferencial. Para categorizar la información se hizo un ordenamiento de la misma con el fin de tener una visión de conjunto que asegurara el proceso de categorización. Inicialmente se realizó el proceso de pre-categorización a partir del material protocolar o primario (Ver Anexos D y E); posteriormente se llevó a cabo el proceso de categorización descriptiva teniendo en cuenta los testimonios y el proceso desarrollado en la prueba aplicada. Las categorías se señalan en vivo, es decir, como categorías culturales por cuanto retomaron los mismos testimonios de los participantes en la investigación; finalmente se determinaron las categorías Núcleo, alrededor de las cuales se realizó la interpretación; éstas fueron:

- Autopercepciones frente al conocimiento matemático

- Sentir frente a la Matemática
- El profesor como favorecedor u obstaculizador del aprendizaje de la matemática.
- Utilidad de la matemática para el ingeniero
- Deficiencias matemáticas en relación con conocimientos, habilidades y operaciones básicas.

La validez de la investigación se hizo mediante la **triangulación** contrastando la información obtenida de diferentes fuentes: estudiantes y profesores y a través de la utilización de diferentes técnicas: grupo de discusión, notas de campo, entrevista y prueba de reconocimiento de conceptos de precálculo,. Así mismo, se contrastó hasta qué punto las conclusiones obtenidas en la investigación se aproximan a los resultados de otras investigaciones que tratan sobre el mismo tópico.

4. HALLAZGOS

El proceso de interacción desarrollado con los estudiantes que participaron en el estudio se convirtió en una posibilidad para construir en el aula un espacio de participación y de reflexión en torno a algunos aspectos significativos para ellos en relación con la enseñanza, el aprendizaje y el dominio de la matemática. Este proceso también se desarrolló con algunos profesores quienes a su vez confirman o explican el sentir de los estudiantes (en los anexos D y E se registran las percepciones de estudiantes y profesores).

Después de hacer un análisis exploratorio para reducir datos, establecer patrones, identificar pre-categorías, así como establecer relaciones entre ellas, mediante la aplicación de técnicas e instrumentos de recolección de datos, se identificaron las siguientes categorías Núcleo:

- Autopercepción frente al conocimiento matemático
- Sentir frente a la Matemática
- El profesor como favorecedor u obstaculizador del aprendizaje de la Matemática.
- Utilidad de la matemática para el ingeniero
- Deficiencias matemáticas en relación con conocimientos, habilidades y operaciones básicas.

Autopercepción frente al manejo de conocimientos matemáticos

“No se qué me pasa si yo creo que entiendo”

Desde esta categoría, se hace una interpretación de la imagen que tiene el estudiante en relación con su competencia en el manejo de los elementos básicos de la matemática (ver Anexo D). Se observa que un reducido grupo de estudiantes **sienten que están bien:** “.. me siento bien conmigo mismo”, “... me siento bien porque entiendo”, “muy bien”, “cada día aprendo más”, *“me sentí bien… con buenas bases” (dice un estudiante al finalizar el curso de Cálculo Diferencial)*; pero para la mayoría la situación no es la misma porque sienten que están “**mal ... muy mal**” pues “tengo muchas dudas”, “no sé qué me pasa, “me va muy mal”, “... me confundo demasiado y cuando algo no me sale me desespero”, “tengo pésimas bases…”, “no tengo bases fuertes para el ritmo..”.

De la misma manera para otros su situación la consideran como regular pues “no todas las veces puedo despejar las dudas en clase”, “... pero me considero buena en esta área, me gusta”, “considero que tengo los procedimientos y las reglas aunque las cascaritas me confunden”.

Estas tres situaciones son justificadas por los estudiantes de diversas maneras:

“Sé matemática porque me esfuerzo para entenderla”; aquí se capta un **sentido de responsabilidad por parte de los estudiantes** para quienes estar bien en Matemática, es una situación que es consecuencia de **sus propias actuaciones** y no de factores externos: “estudio lo suficiente”, reviso apuntes”, “confío en mi forma de estudiar”, “... refuerzo con libros y cuando no entiendo algo me las ingenio para que el profesor me vuelva a explicar”, “... *estudio todos los días, siempre reviso lo que hicimos en clase y todo lo que no logro entender lo pregunto, me busco los medios, aprovecho las horas de consulta, de otros profesores, los libros, lo que sea pero no me quedo con dudas. Me aterra pensar en que se llegue el día del previo y yo no haya abarcado todo el tema con tranquilidad*”. Los estudiantes, revelan cómo en el proceso de aprendizaje, su disposición, su interés, su atención, son factores importantes para que dicho proceso se desarrolle con normalidad. Esa disposición se traduce en **actitudes, sentimientos, motivos y dedicación** lo que los lleva a un **buen nivel de aprendizaje,** por lo que se califican como competentes para manejar los nuevos conocimientos a los que se enfrentan; si ellos perciben que el resultado de su aprendizaje es significativo, tendrán razones suficientes para buscarle sentido a esos aprendizajes y para sentir seguridad en lo que saben; esta situación va acompañada de satisfacción personal.

El éxito o fracaso de los estudiantes puede estar determinado por la **imagen** que los mismos tienen de sus capacidades; al respecto se comparte con Papalia:

> Los estudiantes que creen que pueden dominar el material académico y regular su propio aprendizaje, tienen más probabilidad de intentar tener éxito y de lograrlo que aquellos que no creen en su propia capacidad. Los estudiantes autorregulados se interesan en aprender, establecen objetivos exigentes y emplean estrategias apropiadas para lograrlos. Se esfuerzan mucho, persisten en las dificultades y buscan ayuda cuando es necesario. Los estudiantes que no creen en su capacidad para conseguir el éxito tienden a frustrarse y deprimirse, sentimientos que les dificulta alcanzar el éxito.[107]

Por su parte los profesores (ver Anexo E) señalan que los estudiantes con sus actitudes muestran su disponibilidad o no para el aprendizaje de la matemática, pues "uno encuentra estudiantes muy responsables que asumen su proceso de aprendizaje de manera activa; éstos generalmente tienen facilidades para la comprensión de los temas y poseen los requisitos básicos para la adquisición del nuevo aprendizaje". Comentan que "así como hay estudiantes muy responsables …quienes están en el cuento, participan y necesitan menos tiempo para entrar a aplicar los pormenores de los conceptos, se encuentran otros que viven preocupados por otras cosas, ejemplo: el celular, la siguiente clase, el amigo del lado, el del pasillo…" o "como vienen con la mentalidad de las recuperaciones, método de evaluación del bachillerato donde para las dificultades presentadas hay nuevas y muchas oportunidades de reposición, creen que la universidad es igual… cada actividad de evaluación es parte de la valoración, además de que es irrepetible".

---

[107] PAPALIA, Op. cit., p. 434

"… **no sé por qué me pasa si yo creo que entiendo**": La mayoría de los estudiantes hace una reflexión y una autoevaluación acerca de lo que les está sucediendo al aprender matemática y son conscientes de que **hay vacíos en matemática,** situación que **depende de ellos mismos** y en otros casos de factores externos pero que también pueden estar bajo su control. Por una parte, la culpa de su bajo nivel se debe más que todo a **aspectos personales** "no estudio lo suficiente", o "no tengo seguridad en lo que realizo" o "no tengo tiempo para estudiar" y "no le pongo todas las ganas", "no sé qué me pasa, yo estudio .. me va mal; claro que después de que los solucionan me doy cuenta que me faltó muchísimo estudio"; también asignan razones de sus vacíos a la **desconcentración,** pues "me distraigo" y "me falta atención", o "hago procesos incompletos" y por ello "cometo pequeños errores", "creo que me falta mirar bien", "me va super bien, los errores son por falta de atención". Al respecto los profesores señalan que "los procesos matemáticos exigen un alto nivel de seguimiento que puede darse mejor cuando hay concentración en el momento del aprendizaje", "..se encuentran deficiencias en los **procesos aritméticos y algebraicos",** "normalmente el estudiante no relaciona la ecuación de la recta con conceptos físicos como son el movimiento uniforme, ya que para él $y= mx +b$ no es lo mismo que $x = v. t$, sabiendo que en el movimiento la velocidad es una constante (comenta la profesora de Física), "no saben factorizar, iterar, interpolar, cometen muchos errores en operaciones matemáticas, son desatentos, quieren tener todos los datos para reemplazar en las fórmulas, no analizan datos ni resultados para dar conclusiones", "cometen errores porque no manejan unidades, signos, variables, mezclan unidades, algunos no despejan correctamente fórmulas".

Otro aspecto que se destaca se relaciona con la **falta de metodología de estudio** "ahora me doy cuenta que copié mal y a pesar de que me esforcé, estudié sobre los errores" o "generalmente en el desarrollo de ejercicios me como pasos, me confundo y me voy por lo más complicado al resolverlos". Hay quien reconoce: "no siempre estudio como es debido, siempre me coge el tarde... creo que voy a perder la materia”. Los estudiantes reconocen que existen vacíos, los que se deben a que ellos mismos están fallando; comprenden que la Matemática debe ser suficientemente atendida, requiere estudio permanente y a su vez sospechan que sus resultados están estrechamente relacionados con la preparación para la misma. Otras veces los estudiantes exteriorizan pretextos y disculpas haciendo ver que sus resultados en Matemática no dependen de ellos mismos sino de otros factores externos a ellos como **el tiempo:** “no tengo tiempo para estudiar”, “el trabajo no me permite dedicarme tanto a estudiar matemática”.

Otro factor externo que incide en los vacíos que se presentan en el manejo de conocimientos matemáticos es la **preparación brindada por los colegios en los que estudiaron su Básica y Media:** al respecto mencionan: “me hace falta preparación” pues “tengo muchas dudas”, “me falta firmeza en los conceptos del bachillerato”; se llegó a afirmar: “he aprendido en dos semestres más que, en todo el bachillerato” (lo dice un estudiante repitente), “los temas que estamos tratando son totalmente nuevos para mí y a la hora de hacer ejercicios me confundo”, “En mi colegio hay una materia que se llama aptitud matemática. Al comienzo del mes cada profesora entrega un calendario con un ejercicio para cada día (para cada grado con un respectivo nivel), uno los va resolviendo y en una determinada clase la profesora resuelve dudas.. todas nos **preocupábamos** en **hacer**los y **saber**los **hacer.”.**

Este aspecto está muy relacionado con el **manejo de conocimientos, habilidades y operaciones básicas** que han debido ser adquiridos y desarrollados a lo largo de su preparación en básica primaria, secundaria y media; un estudiante reconoce en sus compañeros exitosos que “...ellos tenían claridad en los procesos, leían el enunciado y ya sabían qué tenían que hacer, en cambio yo dudaba mucho. Algunas veces también tenía dificultades con el lenguaje técnico, yo no sabía qué significaban ciertos símbolos, tampoco me sabía algunas fórmulas que ahora entiendo que es necesario sabérselas porque de lo contrario siempre toca estar retrocediendo en los apuntes; esa es otra **ventaja** de ellos, no necesitan mirar sino que de una vez van diciendo qué dicen, por ejemplo: ahí se aplica tal teorema, eso se hace por este camino, hasta recuerdan ejemplos parecidos hechos en clase y enseguida los encuentran". Los estudiantes reconocen que el nivel de dominio de los conocimientos y el saber operar con ellos, les facilita los nuevos aprendizajes que están adquiriendo en la Universidad; es decir, se reconoce implícitamente el valor de los conocimientos previos para el logro de aprendizajes significativos, como lo planteara David Ausubel.

Al respecto los profesores consideran que "hay los dos contrastes: llegan alumnos muy buenos y otros con muchas dificultades, en conceptos básicos mínimos, a veces pareciera como si lo que se vio en el bachillerato se hubiera perdido, ...todo hay que explicarles", "muchos aún creen estar en el colegio; para algunas actividades que se desarrollan en el colegio se les puede dar mas tiempo, ellos esperan que se den más oportunidades y el espacio lo utilizan diferente, no lo aprovechan y una falla es esa: el no ubicarse rápidamente en este nuevo contexto que es la universidad". Por su parte los profesores frente a esas dificultades que los estudiantes manifiestan, plantean lo siguiente: "…le digo al alumno qué se necesita para el desarrollo de cada unidad temática, qué conceptos se requieren como soporte... hago preguntas o planteo algunas situaciones para detectar las fortalezas y cuando observo serias dificultades, dispongo de un tiempo para hacer una retroalimentación".

El papel que juega el nivel educativo anterior a la universidad es considerado también como fundamental para los aprendizajes posteriores, dado que el currículo que allí se desarrolla contempla las bases matemáticas o conocimientos previos que los estudiantes deben adquirir para estar en capacidad de desenvolverse en el trabajo matemático que exigen las diferentes asignaturas del área en la Universidad; se evidencia que tanto profesores como estudiantes consideran esta variable como uno de los factores que determinan nivel de competencia matemática para el Cálculo Diferencial.

Sentir ante la Matemática

“Siempre he amado la matemática … es como un juego con números”

La identificación de esta categoría, ha permitido ahondar en elementos afectivos y actitudinales que merecen un análisis e interpretación para entender una de las causas que hace que los estudiantes puedan sentir **aceptación o rechazo** hacia la Matemática, factor que generalmente es determinante en el aprendizaje de esta asignatura y en el desarrollo de competencias básicas en los estudiantes.

Los estudiantes destacaron la **motivación, el interés y el gusto,** como aspectos que les ha permitido avanzar o estancarse en el aprendizaje de la Matemática “me va mal porque no le pongo todas las ganas” o “siempre he amado las matemáticas, es como un juego de números” (afirma una estudiante a quien le ha ido bien) o “me gusta la exigencia, me ha motivado a estudiar más”, “me gustan”. Los estudiantes también manifiestan **estados de ánimo** que son frecuentes cuando se encuentran en situaciones relacionadas con el aprendizaje de la Matemática “me siento triste porque mi rendimiento es regular” o “cuando algo no me sale me desespero y me sale todo al revés”.

Tener motivación es tener impulsos que lleven a la persona a actuar de determinada manera, los que están ligados tanto a lo cognitivo como a lo afectivo; los resultados del aprendizaje, los valores personales, las expectativas, los gustos son motivos intrínsecos que han aflorado como elementos generadores de motivación para el aprendizaje, en este caso de la Matemática. Al respecto Pozo afirma que “la motivación ante una tarea es siempre el producto del *valor* que se le concede a un resultado por la expectativa de alcanzarlo .... si un resultado no nos interesa, no nos esforzaremos en alcanzarlo[108]”; cada estudiante vive su propio

[108] POZO, Juan Ignacio. Aprendices y maestros. Madrid: Alianza, 1996. p. 176.

mundo y sus motivos pueden decrecer o aumentar, “yo me siento bien frente al tema, lo que pasa es que me desconcentro pero realmente yo sé”.

Cuando al estudiante le agrada la matemática es posible que los resultados sean positivos lo que **eleva su autoimagen,** como lo afirma un estudiante “me siento bien conmigo mismo y tengo seguridad en lo que realizo”. Así mismo alguno reconoce que aunque le ha ido bien y se siente bien “creo que puedo dar más”. Los estudiantes que consideran que obtienen buenos resultados en matemática muestran confianza en sí mismos y relacionan este hecho con sus hábitos de estudio, con su dedicación y con su elevada autoestima, lo que les da el impulso suficiente para desarrollar las situaciones que se propongan, “confío en mi forma de estudiar”, “tengo seguridad en lo que realizo”, “realmente yo sé”, “siento que me sé desenvolver en todo, “me siento contento porque entiendo y confío en mi forma de estudiar”. Los profesores también hacen hincapié en la importancia de la motivación al comentar: “un estudiante motivado no se vence ante el primer traspié”. Un número reducido de estudiantes se refiere explícitamente a su **baja motivación hacia la matemática**, bien sea porque se les dificulta o porque definitivamente no les gusta: “a mí no me gusta la matemática”; lo que coincide con las opiniones de algunos profesores al afirmar: “el estudiante no ha valorado el aprendizaje matemático y por lo tanto llega con muchas carencias en el área”. Al hablar de sus experiencias en la secundaria y media, los estudiantes que consideran que les ha ido bien, también se refieren a **aspectos afectivos “**el trabajo en álgebra fue muy rico... aprendí” o “recuerdo la alegría con que llegaba a clase mi profesor”, lo que puede evidenciar la relación entre esas experiencias positivas y el nivel de logro considerado por el estudiante.

Se hace referencia también a las experiencias con sus compañeros o profesores que pueden **generar actitudes** negativas hacia la matemática “los estudiantes de los cursos superiores lo predisponen a uno con los temas... se la pasan diciendo que son muy difíciles”; por ser las actitudes anticipadoras de comportamientos, juegan un papel fundamental para el logro de los aprendizajes. Es el caso “el profesor de octavo me hizo cogerle rabia a las matemáticas... no se le podía preguntar porque uno salía regañado" o también "las clases fueron muy aburridas... no me gustan".

El profesor como favorecedor u obstaculizador del aprendizaje de la Matemática

".. recuerdo que un profesor del colegio un día me dijo: fíjese en lo que escribe y hace, porque esa laguna que está mostrando, puede convertírsele en mares"

Es una categoría que surge en relación con las dos anteriores. Los vacíos que los mismos estudiantes reconocen tener, están relacionados con las experiencias especialmente en clase, con sus profesores, con sus compañeros o consigo mismo.

La mayoría de los participantes en la investigación señala **al profesor como la mayor fuente de experiencias positivas o negativas** y por tanto, uno de los principales responsables de sus logros o fracasos. Este resultado se evidencia a través de opiniones sobre la metodología utilizada por ellos, preparación de clases, responsabilidad y la actitud hacia la asignatura y a los propios estudiantes. Es de anotar que implícitamente la falta de un mayor grado de profundidad en el desarrollo de los contenidos durante el Bachillerato, incide negativamente en el aprendizaje de la matemática. Las siguientes apreciaciones muestran las consecuencias positivas o negativas de la forma como se abordaron los contenidos básicos en el Bachillerato:

Positivamente: "No recuerdo cómo me enseñaron los enteros y los fraccionarios, pero nunca tuve problemas", "en décimo y undécimo aprendí agilidad de análisis y además la profesora fue excelente y nos dio buenas bases para la universidad.

Por lo mismo me está yendo muy bien en este primer semestre", "el profesor lo eximía a uno de los previos si en clase se destacaba".

Negativamente: "Faltó mucha explicación, no se profundizaba", "las clases de once, eran un pasatiempo, ahora me doy cuenta de los grandes vacíos que tengo", "la profesora nos hacía recuperación de todo y varias veces hasta que pasáramos, era una locha", "la actitud del profesor me hizo cogerle rabia a la matemática en un tiempo", "faltó profundización en los temas", "considero que salí mal preparado del colegio", "no me enseñaron cómo facilitar los procesos".

En relación con la **metodología** empleada, los estudiantes recuerdan estrategias como: explicaciones en detalle, propuestas de guías, talleres y juegos didácticos e inclusive, algunos trucos para memorizar fórmulas o datos, los cuales según ellos fueron facilitadores del proceso de aprendizaje de la Matemática, pues "todo era muy masticadito, ... hacía buenos ejemplos", "al principio era todo rápido y aunque fue duro, después me dí cuenta que desarrollé mucha agilidad para pensar y analizar", "... la retahila que me enseñaron para aprender los signos de las funciones trigonométricas en los cuadrantes -todos somos tomadores de café-", "dejaba guías", "el curso progresó mucho con todo lo que se inventaba la profesora", "las derivadas nos las explicó tan fácil que yo las veo como un juego", "nos ponía ejercicios y nos daba puntos por hacerlos" y "los trucos para solucionar de manera más fácil algunos conceptos", "*la profesora nos daba un calendario mensual… debíamos hacer un ejercicio cada día. Ahora comprendo que fue un buen ejercicio, porque nos obligó a tener contacto con la matemática todos los días", "... para mí es clave la explicación del profesor porque él nos da el resumen y además nos coloca ejercicios diferentes a los libros y por ejemplo .. nos señala esos pequeños detalles que si uno no los sabe, no es capaz de desarrollar ciertos problemas, ... me acuerdo la primera clase en la que nos dijo que era importante anotar al margen, al lado, donde sea, esos elementos adicionales que se dicen y que no se escriben y mucho menos los encuentra en los libros, porque al fin y al cabo son el fruto de la experiencia.... pues yo seguí el consejo.."* No obstante, es de anotar que algunos no recuerdan estrategias interesantes por cuanto ven que todas las clases de matemáticas son iguales de “aburridas y monótonas”; al respecto Pozo manifiesta “la rutina y el aburrimiento son los mayores enemigos de la atención, proceso importante para un aprendizaje eficaz[109]”

Cabe acotar que así como los estudiantes le dan gran valor a su parte **actitudinal y afectiva**, también reconocen en el profesor este elemento, al resaltar “la alegría con la que llegaba el profesor a clase”, o por el contrario “fueron muy aburridos, siempre lo mismo” o “me hizo cogerle rabia a la materia”.

Así mismo es importante para ellos en el profesor el **compromiso asumido frente a su asignatura y a sus estudiantes** al señalar “la profesora fue excelente y nos dio buenas bases para la universidad”, “*en undécimo, el profesor no nos valía si no dábamos la razón de cada paso que hiciéramos. Eso hace que todo se haga con un sentido”,* “Lo que un profesor nos dijo, que nuestro problema con la matemática eran las bases tan flojas, que repasáramos lo que no entendiéramos, hoy veo que era cierto”, por el contrario evidencian que “faltó mucha explicación, no se profundizaba ...mi profesora “era una locha” o “la falta de conciencia de los profesores en reconocer que no a todas las personas se nos facilita esta materia”.

Los profesores reconocen su compromiso como orientadores del aprendizaje de los estudiantes cuando expresan “yo hago siempre lo siguiente: le digo al alumno qué se necesita para el desarrollo de cada unidad temática, qué conceptos se requieren como soporte.... Hago preguntas o planteo algunas situaciones para detectar las fortalezas y cuando observo serias dificultades, dispongo de un tiempo para hacer una retroalimentación”, “al iniciar el semestre... hago un mínimo repaso de los conocimientos que se consideran básicos en la asignatura; y durante el semestre a medida que se van necesitando los conceptos se van recordando”, “*los profesores debieran darse cuenta cuáles estudiantes vienen con*

[109] Ibid., p. 184.

deficiencia del bachillerato y reforzarles, que les dé talleres extras.... Es compromiso tanto del profesor como de la Universidad ayudar a esos estudiantes con dificultades, a coger el ritmo", "..yo esperaría un profesor muy comprometido a hacer su labor docente que implica la capacitación, preparación de sus clases, talleres, que los lleve al computador, que evalúe en forma completa de tal modo que el estudiante analice, compare, desarrolle, ..."

Un hecho que llama poderosamente la atención es la poca referencia que los estudiantes hacen al **dominio del tema** por parte del profesor. En contadas ocasiones aparece este aspecto pero relacionado con la poca profundización, más no con el dominio de los conocimientos básicos por parte del profesor "las clases de once eran un pasatiempo... " , "faltó profundización en los temas y las confusiones hace que se les aplique la ley más conocida como machetazo" haciendo referencia a la **evaluación,** temática que también es escasa en la discusión.

Con frecuencia algunos estudiantes asignan la responsabilidad de estos vacíos a la **forma de evaluar el profesor** "hay cáscaras que al final me confunden" como también, "no todas las veces se da la oportunidad de despejar las dudas en la clase", "claro que si me califican sólo la respuesta... me va mal, pero si me tienen en cuenta los procedimientos me va mejor"; esta situación tiene mucho que ver con las **políticas educativas** en relación con los logros "mi profesora de Matemática nos hacía recuperación de todo y varias veces, hasta que pasáramos; era una locha" o "de noveno en adelante no le ponía demasiada atención; entonces no me fue muy bien pero con los de los logros y las recuperaciones tenía que pasar" lo que muestra el reconocimiento de las debilidades de las mismas políticas educativas y de su forma de implementación por parte de instituciones y profesores y las consecuencias negativas para los estudiantes en el aprendizaje de fundamentos matemáticos.

Al respecto, los profesores entrevistados confirman tales apreciaciones aduciendo que así como ingresan estudiantes con un buen nivel en el manejo de los conocimientos matemáticos básicos hay otros con grandes deficiencias; por lo general a estos últimos hay que explicarles hasta el más mínimo detalle puesto que “creo que la reforma del bachillerato tiene influencia en los estudiantes, llegan con mucha dependencia del docente, como sin espíritu de profundización en los contenidos...”, “los estudiantes vienen con la mentalidad de las recuperaciones, método de evaluación del bachillerato de reposición, en cambio en la universidad cada actividad de evaluación es parte de la valoración... y además es irrepetible”.

El énfasis en el **desarrollo de las habilidades y operaciones** Matemáticas es otro tópico que los estudiantes valoran en el profesor “en undécimo aprendí agilidad de análisis ... la profesora fue excelente y nos dio buenas bases para la Universidad” o por el contrario “no me enseñaron como facilitar los procesos”. Uno de los grandes propósitos del estudio de las Matemáticas es el desarrollo de las **habilidades para plantear y resolver problemas** por lo cual se pretende encontrar una respuesta a un interrogante, a partir de información suministrada y al conjunto de operaciones numéricas, algebraicas, geométricas o métricas según se requiera.

Es también necesario manejar el código de signos y símbolos propios de la Matemática; al respecto los profesores también manifiestan que resolver problemas “es lo que menos les gusta a los estudiantes porque exige otros procesos de pensamiento como el análisis, interpretación y búsqueda de diferentes alternativas, la comprensión de la solución...pareciera que están acostumbrados a sólo hacer operaciones... esperan que el docente les analice el problema y les deje planteado el modelo (función o ecuación correspondiente)..”, “no comparan porque no profundizan en el tema, mientras que se tengan conceptos superficiales no se puede comparar...”, “a ellos el análisis les cuesta más trabajo y a veces piden más ayuda en la ubicación del problema. Cuando se da la explicación en otras palabras ahí si entienden, puede ser el lenguaje, cuando se da ayuda en la explicación del problema captan más y finalmente los resuelven pero si se les deja solos no son capaces. Tal vez la interpretación del lenguaje sea el problema".

Otro aspecto que se resalta es el **Colegio o Institución Educativa, como facilitador u obstaculizador del aprendizaje de la Matemática**. Al respecto señalan: "salí mal preparado del colegio" o "el colegio me ayudó mucho, salí bien preparada", "cuando salí del colegio me sentía bien en matemática, porque en el colegio siempre me fue bien..",…, "fue un problema haber cursado cada grado en un colegio diferente", "*en el colegio faltó profundizar en muchos temas, allá yo entregaba los trabajos como fuera, me los copiaba de los compañeros, como era por logros entonces nos daban facilidades, aquí en la universidad es distinto*" (dice una estudiante que repite la materia)*".* Los profesores también coinciden al afirmar que "a veces pareciera que lo que se vio en Bachillerato se hubiera perdido" o "noto con preocupación que cada vez los estudiantes llegan a la Universidad con altas deficiencias de pensamiento lógico y pocas habilidades matemáticas" o "el estudiante promedio que ingresa a la Unab, durante su bachillerato no ha valorado el aprendizaje matemático de ese nivel y por lo tanto llega con muchas carencias en el área".

Al relievar el papel del profesor de la forma como lo han hecho, los estudiantes están valorando su **función mediadora** como elemento básico para el aprendizaje, tal como lo ha planteado Vygotsky con su concepto de zona de desarrollo próximo que asume la participación y guía de otra persona para el desarrollo del aprendiz.

utilidad de la Matemática para el ingeniero

“creo que siempre voy a utilizar la Matemática”

Es una categoría que se evidencia a lo largo del proceso de discusión; la reflexión sobre el "para qué le sirve la Matemática" fue producto del análisis de su “conocer” y “sentir” y su relación con el “para qué”, aspecto valorado por la mayoría de los estudiantes, independientemente de su percepción de desempeño; ellos consideran a la Matemática como **área básica en su formación como futuro ingeniero** “creo que siempre voy a utilizar la Matemática”... “me da seguridad de lo que soy (ingeniero) cuando ejerza mi profesión” y “porque es parte de mi formación”.

Otros piensan que la Matemática está relacionada con el **desarrollo cognitivo** por cuanto “sirve para analizar las cosas desde otro punto de vista” y para lograr un razonamiento lógico y “ayuda a abrir la mente para pensar fuera de lo común”.

Algunos la consideran como una **disciplina mental** que por procesos de transferencia permite el desarrollo de otras capacidades “ayudan a ejercitar la memoria” o “soy de los que piensa que la Matemática ayuda a desarrollar el cerebro”. También le asignan **una aplicación inmediata** por cuanto su valor se evidencia en otras actividades o aprendizajes de tipo académico “lo que estamos viendo en Matemática ahora sí lo entiendo en Economía” y más aún, consideran que se puede **aplicar en la cotidianidad de la vida: “**creo que es una forma en la cual se puede aplicar la vida” porque “se trata de saber leer, comprender y aplicar lo que uno aprende para desenvolverse en la vida”. Esta percepción va mucho más allá de la inmediatez por cuanto se traspasa el plano de la información para llegar al **plano de la formación** de la persona como ser humano: “es una ganancia personal”; “proporciona orden y objetividad a todas nuestras acciones como futuros ingenieros" además "me aporta destreza, observación, seguridad, tranquilidad".

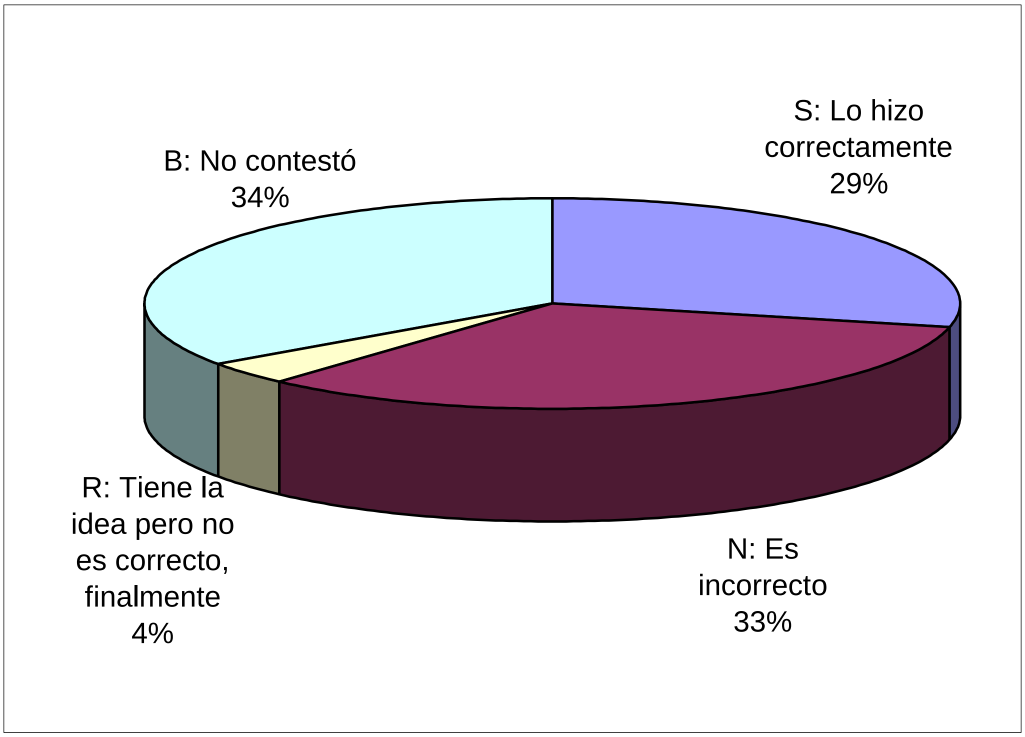
Finalmente, un reducido grupo cree que la Matemática **es sólo un requisito académico que no tiene aplicabilidad en el campo laboral** "no creo que vaya a necesitar aplicar límites y derivadas" u otras expresiones como "me toca verlos porque es un requisito"; en el mismo sentido "no creo que sean tan fundamentales esos conceptos".

Deficiencias Matemáticas en relación con conocimientos, habilidades y operaciones básicas

"…salí mal preparado del colegio. No me enseñaron cómo facilitar los procesos… por eso tengo vacíos en Matemática"

Las constantes inquietudes de los estudiantes en relación con sus vacíos en Matemática giran alrededor de expresiones como: "para mí todo lo que estamos desarrollando es complicado", "... me ha dado muy duro", "aunque fui excelente en el colegio, siento que he perdido el tiempo estudiado atrás", "hay algunos temas que en el colegio no los vimos", así como las constantes referencias de los profesores en torno a la falta de preparación matemática: los estudiantes "llegan con muchas carencias en el área" o "llegan con mucha dependencia del docente, como sin espíritu de profundización en los contenidos" o también "tienen grandes dificultades porque no poseen los conocimientos básicos" o porque "tampoco han alcanzado el desarrollo del pensamiento lógico", lo cual se evidenció en los resultados de la prueba (ver Anexos F y G). Estos resultados muestran que tan sólo el 29% de los pasos básicos establecidos en la misma, fueron desarrollados por los estudiantes en forma correcta, lo cual significa que el 71% restante de pasos o fueron desarrollados incorrectamente o iniciaron bien el ejercicio pero por alguna causa lo abandonaron y finalmente no los contestaron. (Ver figura1).

Figura 1. Distribución porcentual de los resultados de la Prueba según el desempeño de los estudiantes en cada paso establecido/juicios de valor.



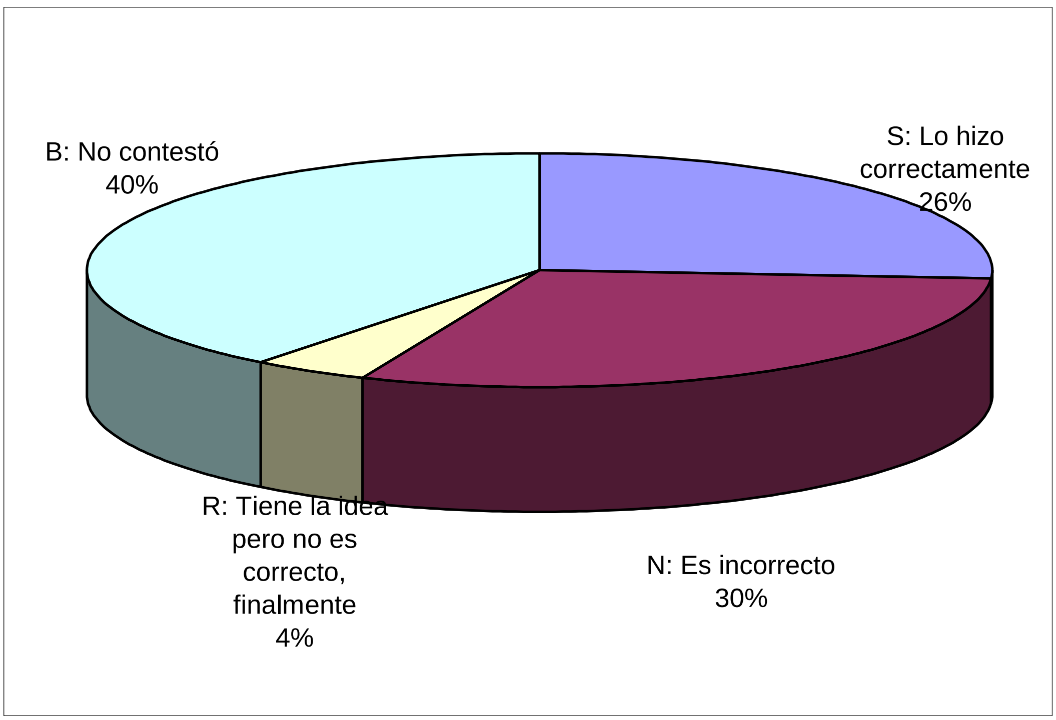
A partir de la identificación de los pasos básicos del desarrollo de cada punto de la prueba (Ia1, Ia2, …. V13), se tomaron las puntuaciones de los juicios de valor para cada uno de esos ítem generando un **consolidado** que discrimina la participación por subcategoría según se haya desarrollado cada ítem de manera **correcta, incorrecta, tiene la idea pero no es correcto, finalmente ó no contestó**; esta puntuación por subcategoría de los resultados obtenidos por los estudiantes se presenta en la Tabla 3.

Tabla 3. Tabulación por subcategoría de los juicios de valor obtenidos por los estudiantes en cada paso básico del desarrollo de la Prueba.

SUBCATEGORÍAS		SIGLA	DOMINIO	DEFICIENCIA			TOTAL
			S	N	R	B	
CONCEPTO	Factorización de polinomios.	FACT	61	43	11	45	160
	Operaciones con fraccionarios.	FRAC	20	20	3	17	60
	Aplicación de algoritmos.	ALGO	20	54	5	61	140
	Operaciones entre Conjuntos; aplicación de la cardinalidad en la Teoría de Conjuntos.	CONJ	9	15	3	53	80
	Solución de ecuaciones lineales y cuadráticas; aplicación de la fórmula cuadrática.	ECUA	15	48	1	36	100
	Teorema de Pitágoras	PITAG	11	2	0	7	20
	Productos Notables	NOTA	3	8	1	8	20
	Relaciones e identidades trigonométricas.	TRIG	3	7	4	26	40
	Conjunto de los Números Complejos	COMP	2	6	1	11	20
	Solución de inecuaciones lineales.	INEC	38	19	1	42	100
	Relaciones reales.	RELA	38	76	0	6	120
	Propiedades en los Números Reales.	PROP	15	9	5	31	60
HABILIDAD	Identificación de datos.	DATO	22	10	3	45	80
	Identificación de variables.	VARI	19	14	3	24	60
	Planteamiento del modelo matemático.	MODE	14	9	4	33	60
OPERACIÓN	Operaciones lógicas.	LOGI	9	9	0	42	60
	Operaciones Aritméticas.	ARIT	3	18	4	35	60
	Operaciones Geométricas.	GEOM	55	55	6	24	140
	Operaciones Algebraicas	ALGE	108	116	20	156	400
TOTAL			465	538	75	702	1780

Los resultados generales muestran que los estudiantes dejaron en blanco un porcentaje importante (40%) de los pasos básicos del desarrollo de la Prueba y que el 34% fueron desarrollados incorrectamente; es decir los estudiantes en el 74% de las respuestas muestran dificultades o vacíos, lo que es muy significativo. Ver figura 2.

Figura 2. Distribución porcentual del consolidado en subcategorías, de los juicios de valor obtenidos por los estudiantes en cada paso básico del desarrollo de la Prueba.



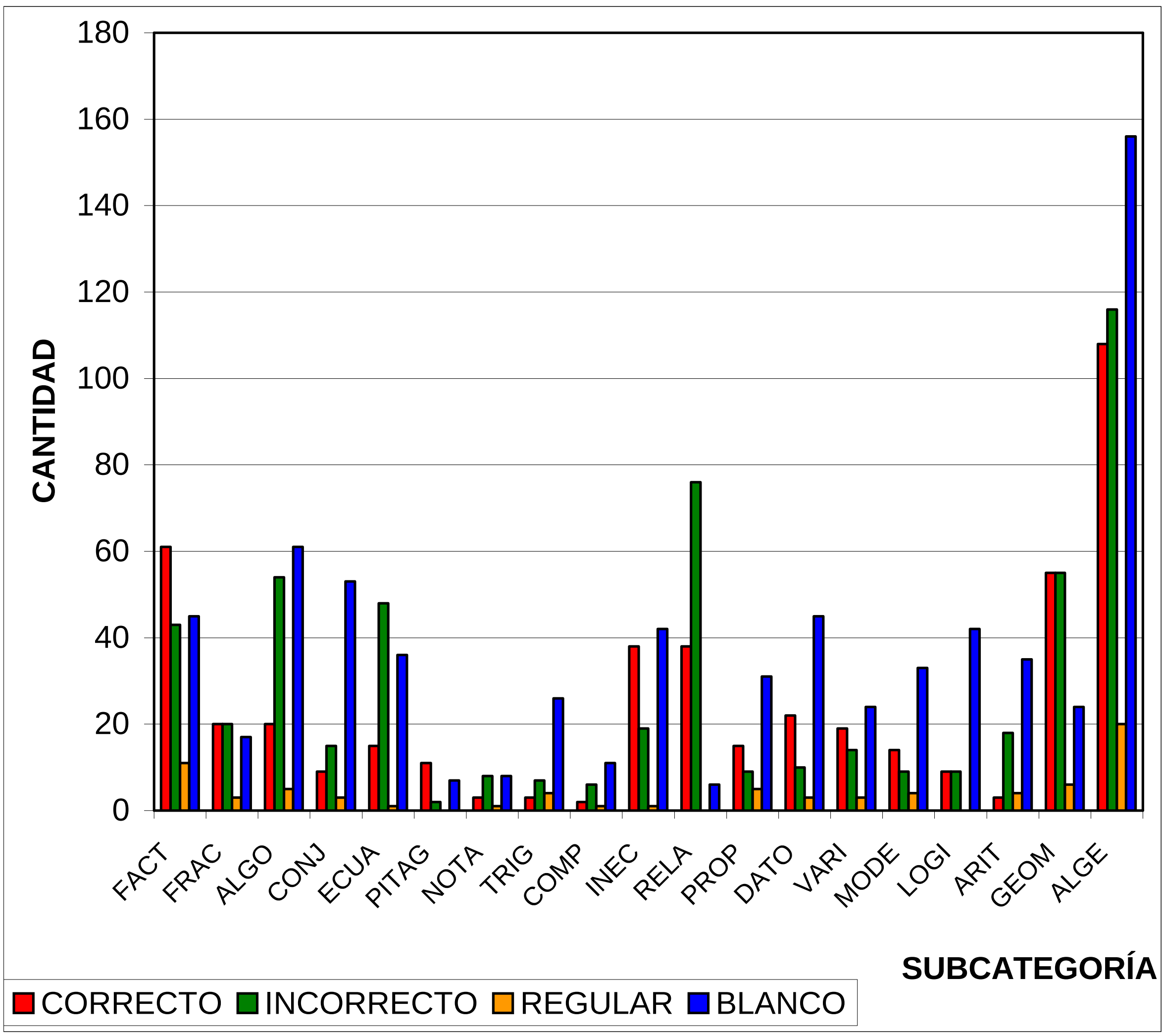
Estos resultados son desalentadores y confirman la gran preocupación manifiesta por los estudiantes quienes perciben que presentan deficiencias en su formación matemática, dado que no manejan algunos conceptos, carecen de ciertas habilidades requeridas para trabajar la matemática y se les dificulta realizar operaciones.

Al respecto consideran que los contenidos conceptuales de mayor dificultad son los relacionados con factorización, Identidades, potenciación, radicación, logaritmos, funciones reales y trigonométricas, expresiones algebraicas. En relación con dificultades al hacer operaciones destacan aquellas que implican el manejo de calculadora, simplificación, operaciones con reales en sus diversas expresiones (decimales, fracciones, raíces,...) y/o con expresiones algebraicas, despeje de incógnitas. En cuanto a sus habilidades matemáticas creen que presentan fallas en aquéllas relacionadas con graficación de funciones y su respectiva interpretación; consideran que su mayor debilidad radica en su poca capacidad para solucionar problemas, lo que implica no sólo seguir unos pasos sino especialmente "contextuar el problema" para entender que "es lo que deben hacer".

Esta carencia fue también descrita por los profesores al afirmar "les es más fácil resolverlos (los problemas) que hacer el planteamiento inicial para su análisis"; también coinciden los profesores con los estudiantes al considerar que la falla no está tanto en la parte operatoria como en el desarrollo de la capacidad de análisis e interpretación, manejo del pensamiento numérico y espacial, capacidad para inferir y transferir de una situación a otra, pensamiento lógico y apropiación del lenguaje matemático. En cuanto a operaciones, los profesores han observado que los estudiantes tienen dificultades en el manejo de operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación) en los Reales y la aplicación de sus propiedades, especialmente el manejo de los números fraccionarios, dificultades que se transfieren a las operaciones con expresiones algebraicas.

Al contrastar estos resultados con los obtenidos en cada subcategoría de la prueba (Ver figura 3) se evidencia que las respuestas que muestran falta de dominio por parte del estudiante en cada subcategoría (respuestas en blanco, respuestas incorrectas o se tiene idea pero finalmente queda incorrecto) tienen una mayor frecuencia que aquéllas que muestran que los estudiantes siguieron el proceso y dieron la respuesta correctamente, es decir, que tienen el dominio de la subcategoría.

Figura 3. Representación gráfica de los puntajes obtenidos en cada subcategoría según juicios de valor a los ítems de la Prueba.

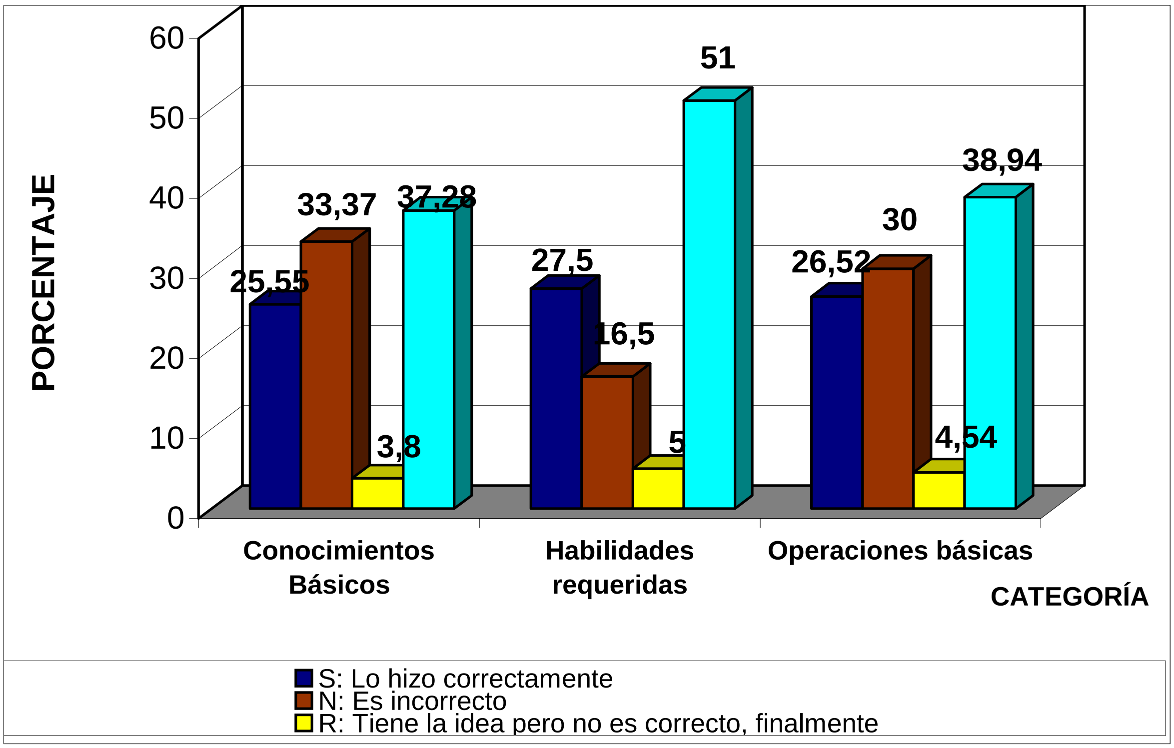


Al hacer un análisis de estos resultados podría pensarse, que quienes trabajaron en forma adecuada (comprendieron la pregunta, identificaron el concepto en relación con su teoría, teoremas, operaciones y propiedades y, obraron en consecuencia), mostraron manejo en la aplicación de conceptos relacionados con factorización, teorema de Pitágoras, inecuaciones, propiedades en los Reales, también que se aproximan al desarrollo de situaciones matemáticas puesto que tienen habilidad para identificar datos, variables y definir el modelo involucrado en los problemas; en relación con quienes trabajaron en forma incorrecta (relacionaron la pregunta con conceptos diferentes a los implícitos) podría pensarse que su deficiencia está **relacionada con el empleo del modelo que no correspondía o que aplicaron un teorema, propiedad u operación en forma equivocada;** se encontró mayor porcentaje de error o desconocimiento en los **conceptos relacionados con conjuntos, ecuaciones, aplicación de algoritmos, productos notables, manejo de fórmula cuadrática, relaciones e identidades trigonométricas, números complejos, relaciones** y así mismo en cada una de las **operaciones lógicas, aritméticas, geométricas y algebraicas**. Aquí cabe recordar a Ausubel, quien asume que “los conceptos adquieren el carácter de realidad tan pronto como pueden ser adquiridos, percibidos, entendidos y manipulados”.

En la Figura 4 se muestra el nivel de acierto o desacierto general en los aspectos evaluados: conocimientos previos, habilidades requeridas y operaciones básicas según los juicios valorativos asignados a cada uno de los pasos definidos en el desarrollo de la prueba y que debían ser ejecutados por los estudiantes.

Los puntajes muestran que el 25.55% de los pasos que comprendía los ejercicios relacionados con los conocimientos previos fueron desarrollados correctamente o como se esperaba, al igual que el 27.50% correspondiente a habilidades requeridas y 26.52% de operaciones básicas; estos porcentajes evidencian que hay un porcentaje muy alto de desacierto en cada uno de las categorías evaluadas, debido a que las aproximaciones o los procesos trabajados con deficiencias no son aceptados como soluciones correctas.

Figura 4. Distribución porcentual por categoría evaluada en la Prueba con relación a los Juicios Valorativos obtenidos**.**



De las tres categorías se encontró que sobre **habilidades requeridas**, un 51% (porcentaje muy alto) de pasos no fueron trabajados por los estudiantes; en la prueba se refería a la capacidad de leer, interpretar y solucionar problemas matemáticos; dicha situación coincide con la opinión de los profesores "... noto con preocupación que cada vez los estudiantes llegan a la universidad con altas deficiencias de pensamiento lógico y pocas habilidades matemáticas"

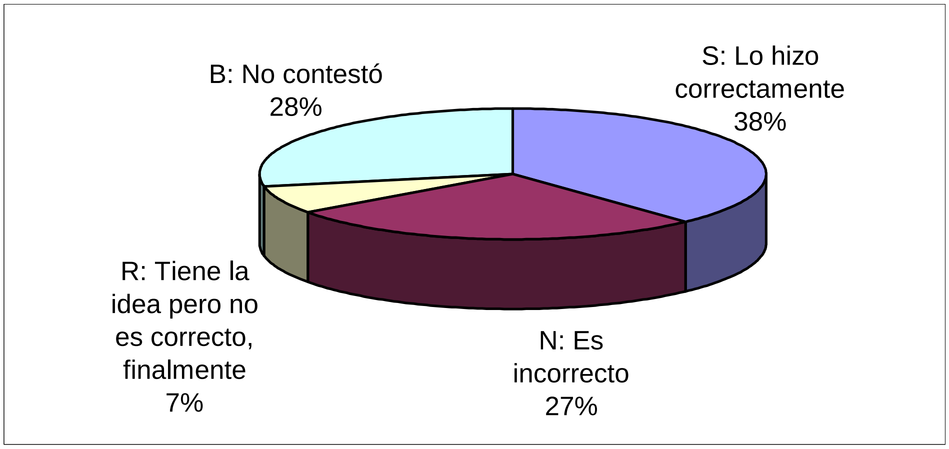
La acertividad estuvo relacionada en todos los casos con el momento de identificación; un estudiante al abordar un ejercicio o problema, por ejemplo, reconocía el caso de factorización a aplicar, o que se trataba de una suma de fracciones algebraicas, o que era necesario aplicar el Teorema de Pitágoras, o que era una ecuación cuadrática, o que era un caso para aplicar el teorema del coseno o determinada relación trigonométrica. Sin embargo luego falló en los pasos subsiguientes porque cometió algún error de tipo conceptual u operatorio, o no supo qué hacer; al respecto comentó: “no profe, no sé qué caso usar en el ejercicio, la verdad es que soy bueno en matemáticas y me gustan, lo que pasa es que salí egresado en el 2002 y además que temas que no vimos a profundidad, no piense que es que esto no me importa”.

Estos hallazgos obligan a profundizar en el análisis de cada subcategoría para hacer una revisión de los desarrollos realizados y con ello, develar las fortalezas y dificultades en el manejo de los conocimientos, habilidades y operaciones necesarias para el aprendizaje del Cálculo Diferencial**.**

Subcategoría: Factorización de polinomios. En la prueba había cuatro oportunidades para expresar polinomios como producto de factores; el primer punto pedía **factorizar completamente** y se daban tres polinomios cuya descomposición obedecía a procedimientos diferentes según las características de los términos del polinomio. El segundo punto pedía **simplificar**; en éste se daba una suma de fracciones algebraicas con diferente denominador el cual requiere sacar el mínimo común múltiplo, acción que parte de los factores que conforman cada denominador.

Al respecto, en la figura 5 se observa que los ítems relacionados con la factorización de polinomios fueron realizados correctamente tan sólo en un 38% de su existencia en la prueba, es decir, los estudiantes que los trabajaron diferenciaron cuándo existe factor común por agrupación de términos, diferencia de cuadrados o de cubos y trinomio de la forma $\mathbf{ax^2+bx+c}$**.**

Figura 5. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Factorización de Polinomios.



Así mismo, el 27% de otros procedimientos recibieron el juicio de R: “Tiene la idea pero no es correcto, finalmente” por planteamientos incompletos como:

$27am^2 - 12an^2 + 9bm^2 - 4bn^2 = a(27m^2 - 12n^2) + b(9m^2 - 4n^2)$ Aquí el estudiante aplica la **propiedad asociativa de la suma y factoriza** pero no continúa el proceso, quizá porque no observa paréntesis comunes pero si cada paréntesis lo hubiese factorizado nuevamente habría visto que sí existen factores comunes.

$27am^2 - 12an^2 + 9bm^2 - 4bn^2 = 3a(9m^2 - 4n^2) + b(9m^2 - 4n^2)$ a diferencia del estudiante anterior, éste continúa con un paso incorrecto al expresar el producto $(3a+b)(9m^2 - 4n^2)^2$. Si aplicara la reversibilidad vería que le daría un polinomio de grado cuatro en **m** cuando era solo de grado dos en esta letra.

$27am^2 - 12an^2 + 9bm^2 - 4bn^2 = 27am^2 + 9bm^2 - 12an^2 - 4bn^2 = (27am^2+9bm^2) - (12an^2+ 4bn^2) = 27m^2(a+3b) - 12n^2(a+3b)$, este estudiante aplica las propiedades conmutativa y asociativa de la suma y luego factoriza cada paréntesis en forma correcta, pero finaliza sumando los términos de los paréntesis expresando su respuesta como $(27m^2 - 12n^2)$**(2a+6b**), lo que indica que reconoce factor común en sus términos más no por agrupación de términos.

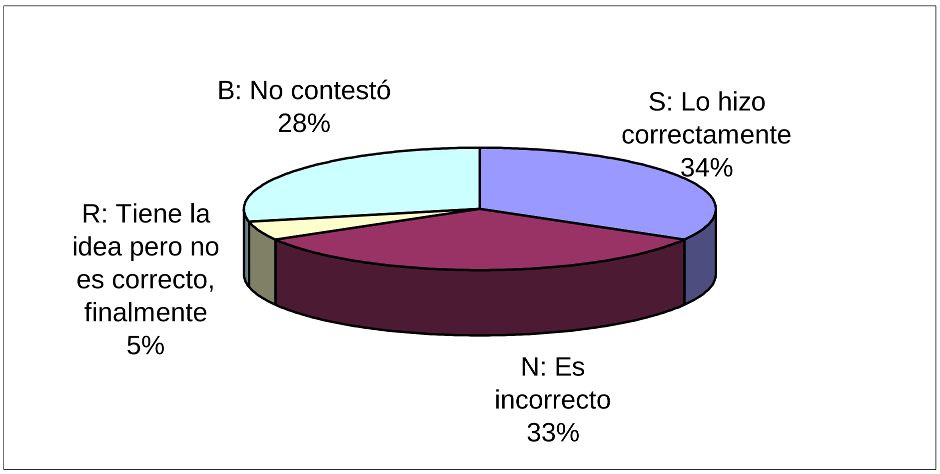
Un 27% de las respuestas relacionadas con factorización fueron calificadas con el juicio "N: Es incorrecto" por presentar desarrollos como: $2x^2 + 5x + 3 = x(2 + 5) + 3$, ó $x^3 - y^6 = (x - y^2)^3$; en el primer **caso pierde la noción de expresar un polinomio como producto de factores** y en el segundo aplica **el cubo de un binomio**, concepto que no corresponde a lo expresado y el cual al aplicarle la reversibilidad da un polinomio de cuatro términos y no de dos.

Es de resaltar que el 28% de dichos ítems fueron dejados en blanco; en algunos desarrollos aparece el polinomio y un espacio o un interrogante en otros. Finalmente, puede afirmarse que la mayoría de los estudiantes se quedó en el nivel de **identificación del caso de factorización** correspondiente para la expresión algebraica dada y que sólo dos estudiantes que representan el 10% del grupo hicieron la aplicación completa y correcta.

En general, se encontraron deficiencias al factorizar porque no **identificaron un polinomio como nuevo factor común** o lo extrajeron **aumentado** al sumar sus respectivos términos, o **confundieron el concepto de diferencia de cubos con el cubo de un binomio,** o el **de ecuación cuadrática con trinomio cuadrático.** También se detecta desatención al hacer un proceso y no revisar la situación inversa dado que al hacerlo hubiesen **descubierto la conservación del grado del polinomio,** o la aplicación incorrecta de la **reducción de términos semejantes o las operaciones básicas con expresiones algebraicas;** es decir, no se hizo proceso de comparación y/o de verificación. Esta deficiencia fue percibida por los estudiantes pues "se me dificulta factorizar..." y por los profesores "no comparan casi porque tienen los conceptos muy superficiales", "...al principio se detecta que las fallas están en factorización", "los estudiantes cometen muchos errores al factorizar"

Subcategoría: Operaciones con Fraccionarios. En la Prueba se planteó un ejercicio de suma de fracciones algebraicas cuyo desarrollo se fundamenta en las operaciones básicas con los fraccionarios. Ver resultados en la figura 6.

Figura 6. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Operaciones con Fraccionarios.



La mayoría de los estudiantes que desarrollaron la prueba trabajó erróneamente **los ejercicios relacionados con las operaciones básicas en los fraccionarios** pues hubo desarrollos como:

$$\frac{3x}{x^2+3x-10} - \frac{4}{x^2+4x-5} + \frac{4x-1}{x^2-3x+2} = \frac{3x}{(x+5)(x-2)} - \frac{4}{(x+5)(x-1)} + \frac{4x-1}{(x-2)(x-1)} = \frac{3x+4+4x-1}{(x+5)(x-2)(x-1)}$$

Aquí el estudiante, factoriza cada trinomio del denominador, halla el mínimo común múltiplo de los denominadores pero suma las fracciones operando los numeradores entre sí como si se tratara de fracciones homogéneas, descuidando que con denominadores diferentes existe el debido proceso para fracciones heterogéneas; comienza su desarrollo correctamente pero cuando debe aplicar la operación algebraica lo realiza de manera incorrecta. Por lo tanto, su respuesta no es válida. Es de destacar que sólo cuatro estudiantes que corresponden al 20% de los evaluados realizaron el ejercicio eficazmente, es decir**, factorizan, hallan el mínimo común múltiplo, aplican el algoritmo de la suma de fracciones heterogéneas, reducen términos semejantes y la fracción resultante a su más simple expresión**. Estos ítems conceptuales son justamente en los que fallan la mayoría de los estudiantes representados en el 80% incluyendo los que dejaron en blanco porque no supieron ni siquiera cómo comenzar. El siguiente desarrollo evidencia un estudiante descontextualizado en el tema:

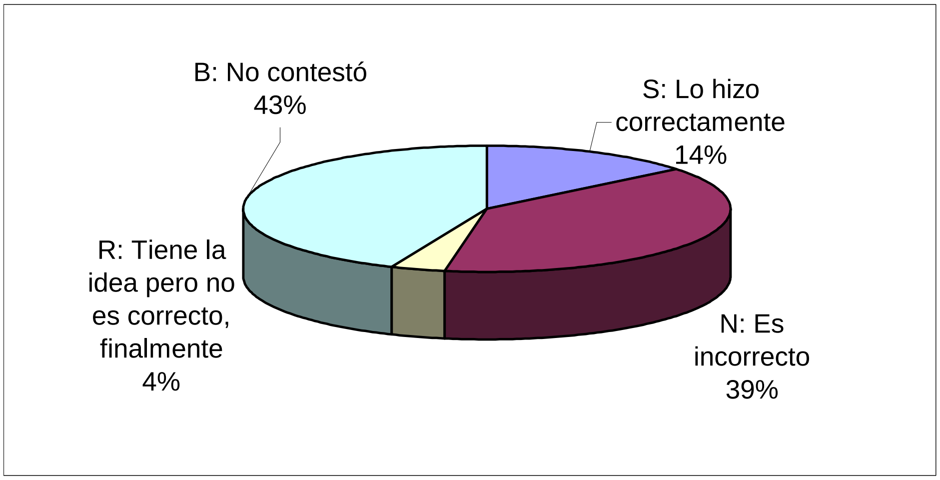
$$\frac{3x}{x^2+3x-10} = x^2 - 10$$

Simplifica 3x cuando esto se hace una vez hayan factores tanto en el numerador como en el denominador. Y luego, lleva al numerador las expresiones que le sobran.

Es así que, el manejo tanto conceptual como operativo en los fraccionarios, es uno de los vacíos que más se presenta en los estudiantes, tal como ellos lo plantean, “se me dificulta operar con fraccionarios, simplificar” o como lo manifiestan los profesores “detecto dificultades en manejo de operaciones como suma de fraccionarios, con simplificación,... “ “un estudiante de primaria al llegar al bachillerato con problemas por ejemplo sobre fraccionarios y no lo resuelve, llegará a la universidad con los mismos problemas..”.

Subcategoría: Aplicación de algoritmos. Era importante mirar este aspecto por cuanto el operar implica una secuencia lógica entre cada una de las acciones que se van desarrollando a medida que se resuelve un ejercicio matemático; los conceptos, teoremas y propiedades que se aplican deben tener una relación lógica y consecuente con el entorno en dónde se está haciendo la aplicación. Este aspecto se visualizaba en todos los casos donde se requería operar números, expresiones algebraicas, ángulos. Los resultados se muestran en la figura 7.

Figura 7. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Aplicación de Algoritmos.



La mayoría de los pasos de la Prueba (86%), relacionados con la **utilización del algoritmo respectivo para operar con números, expresiones algebraicas o ángulos**, fueron desarrollados en forma incorrecta o, no los supieron aplicar (43%), situación que llama mucho la atención pues pone en evidencia que se trata de una de las principales razones por las cuales los estudiantes fallan en la solución de ejercicios o situaciones matemáticas. Situaciones como los ejemplos explicados en las anteriores subcategorías también son ejemplos de la falencia en la utilización de algoritmos. Se deduce que no **se tiene claridad en la aplicación de los mismos para las operaciones básicas en los Reales** y que luego debieron abstraerse para expresiones y fracciones algebraicas. Nuevamente sólo dos estudiantes (10%) trabajaron correctamente la simplificación, suma de fraccionarios y las operaciones básicas relacionadas. Hechos como éstos, en que los estudiantes resuelven sin aplicar adecuadamente el algoritmo requerido que justifica el método de trabajo seguido, explica el por qué de sus desaciertos en el manejo de las operaciones básicas, como lo expresó un estudiante cuando se le preguntó ¿por qué su despeje en la ecuación 3x = 8 fue x= 8/(-3)? “porque el número 3 pasa al otro lado y pasar al otro lado es cambiar de signo”.

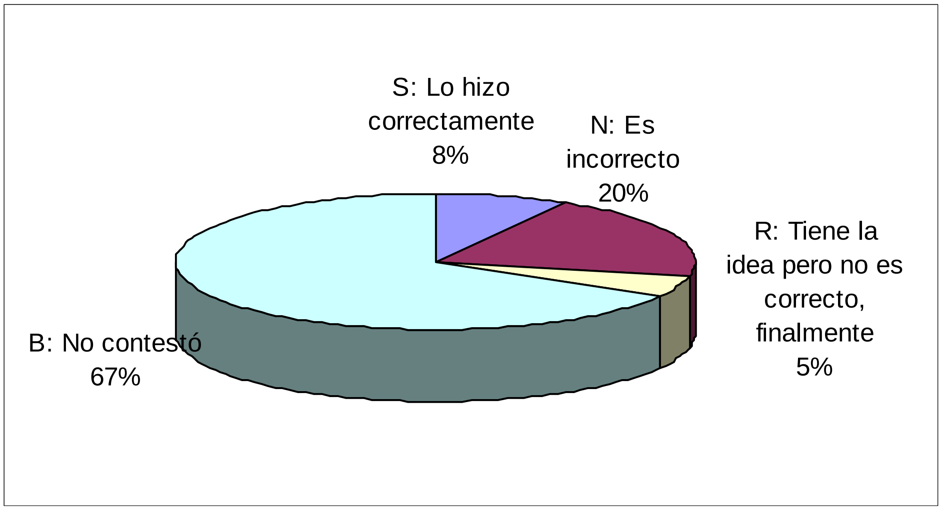
Una gran deficiencia como lo reconocen profesores y estudiantes es la **utilización de algoritmos y el desarrollo de operaciones básicas relacionadas**, “en el desarrollo de ejercicios me como pasos, me confundo y me voy por lo más complicado al resolverlos”, “cometen muchos errores en operaciones matemáticas, son desatentos”, “cuando necesitan aplicarlas (propiedades y fórmulas básicas) no pueden resolver nuevos ejercicios porque no las saben”, “ el que domina bien los algoritmos, por ejemplo si suma 5/8 con 3/8 y le da 2/3 él sabe que algo está mal...”

Subcategoría: Operaciones entre conjuntos y aplicación de la cardinalidad. La Prueba presentaba una situación matemática cuya solución a los interrogantes se facilitaba **aplicando el concepto de cardinalidad** y con éste la **teoría de conjuntos; la representación gráfica** de los datos **en diagramas de Venn,** conocer el **significado de los conectivos lógicos y las operaciones implícitas entre los conjuntos definidos,** se constituía en requisitos para responder las preguntas dadas en el enunciado. Al respecto Pimm[110], señala que “las gráficas son artefactos simbólicos y los alumnos tienen que aprender a leerlas e interpretarlas como tantos otros símbolos matemáticos”. No obstante, la gran mayoría de los estudiantes dejó en blanco este punto de la Prueba, como puede verse en la figura 8.

---

110 PIMM, D. El lenguaje matemático en el aula. Madrid : Morata, 1999. p. 145

Figura 8. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Operaciones entre conjuntos y aplicabilidad de la cardinalidad.



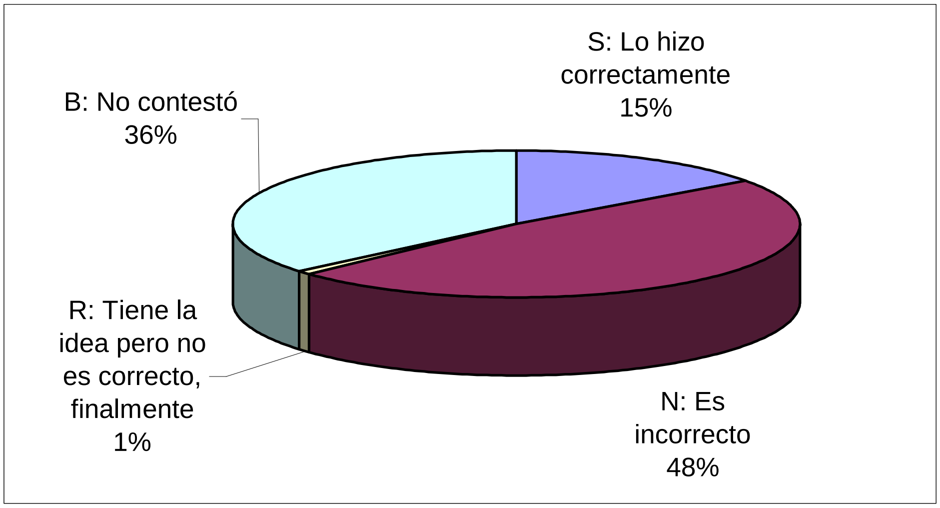
Cabe resaltar que solamente cinco estudiantes (25%), extrajeron los datos, identificaron los conjuntos e intentaron graficar (no ubicaron todos los datos correctamente); por ello ninguno pudo dar respuesta a las preguntas del problema. Un 25% de las respuestas fueron calificadas como regular (intentaron) o mal (incorrecto) pues utilizaron regla de tres, suma y resta de cantidades y unos pocos intentaron aplicar la cardinalidad a la teoría de conjuntos, acertando solamente en su reconocimiento. Ningún estudiante resolvió la situación dada en forma completa; sólo identificaron las operaciones entre conjuntos en términos de suma y resta (debía ser como unión o intersección o diferencia); en el 8% identificaron datos e intentaron graficarlos mientras que en el 67% no hubo respuesta; la mayoría de los estudiantes dejó en blanco este problema, “no sé qué hay que hacer en este caso... no sé cómo empezar” expresó un estudiante.

Es evidente que este grupo de estudiantes no ha trabajado **la aplicación de la cardinalidad en la solución de problemas relacionados con la teoría de conjuntos;** esta deficiencia tiene que ver con la posible dificultad que presenta el estudiante en la **utilización de la lógica para determinar la validez de argumentos** y en matemática, para **demostrar teoremas e inferir resultados y desarrollar habilidades como el razonamiento, la modelación, el planteamiento y solución de problemas y la comunicación**; habilidades que constituyen los procesos generales considerados como uno de los elementos de la estructura de la Matemática de acuerdo a los expertos del Ministerio de Educación Nacional. Los profesores se pronuncian "...lo que quieren es que se les entregue todo hecho, que no les toque pensar, ni buscar", "al leer los problemas por primera vez muchos no entienden qué es lo que se les está pidiendo", "el razonamiento es importante porque exige búsqueda de los caminos, permite descifrar el lenguaje y organizar las ideas y procesos que llevan a la solución de los problemas"

Vale la pena resaltar que la deficiencia encontrada en esta subcategoría fue la más identificada especialmente por los profesores y en segundo lugar por los estudiantes, lo que muestra coherencia en los hallazgos.

Subcategoría: Solución de ecuaciones lineales y cuadráticas; aplicación de la fórmula cuadrática. En la prueba hay cinco oportunidades para determinar la suficiencia de los estudiantes para solucionar ecuaciones. Se plantearon directamente las ecuaciones o el estudiante debía definirlas como ese modelo matemático que resolviera la situación planteada. Ver resultados en la figura 9.

Figura 9. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Solución de ecuaciones lineales y cuadráticas; aplicación de la fórmula cuadrática



Los datos muestran que sólo un 15% de los procesos relacionados con ecuaciones fueron abordados correctamente. En un 48% los estudiantes comenzaron solucionando las ecuaciones planteadas en forma adecuada pero pronto cometieron errores y no lograron avanzar eficazmente; aplican las **propiedades a la igualdad con desacierto, suman si deben multiplicar, o multiplican si deben sumar, despejan un término aunque la variable quede en otro.** La ecuación cuadrática puede resolverse por varias formas; una de ellas es por fórmula; entonces quienes lo hicieron en forma indebida fue porque **no recordaron la fórmula** o, porque **colocaron los componentes de la cuadrática en la posición equivocada** o, porque **hicieron reducción de términos que no eran semejantes** como si lo fueran**.** Su manejo podía verse a través de tres de los ejercicios propuestos pero había uno cuya aplicación era directa y de ahí se pudo inferir que se tienen las dificultades expuestas; es así que hubo un desarrollo como:

$-4x^2 + 7x - 25 = 0$;	"ecuación dada"
$-4x^2 + 7x = 25$;	"la igualdad es cierta, sin embargo se requiere manejar la ecuación como estaba, es decir, igual a cero"
$(-4x+7) = 25$;	"factoriza el binomio; su expresión es correcta, aunque no le va a servir dicho procedimiento"
$x= 25/(-4x+7)$;	"divide ambos miembros de la igualdad por el mismo factor para despejar, sin embargo la variable queda en ambos miembros".
$x+4x = 25/7$;	"hace transposición de términos de forma incorrecta"
$5x= 25/7$, $x= 5/7$	"no tiene sentido esta solución"

Aunque en los momentos iniciales sigue el proceso correcto, éste no es el algoritmo requerido para el desarrollo de una ecuación cuadrática, hay deficiencia en **despeje de incógnita, transposición de términos y en el número de raíces de una ecuación cuadrática.**

Otro estudiante muestra que tiene la idea de cómo resolver la ecuación porque intenta hallar el discriminante, sin embargo tampoco halla la respuesta porque no finaliza el ejercicio, plantea:

$-4x^2 + 7x - 25 = 0$;	"ecuación dada"
$b^2 - 4ac = 7^2 - 4(-4)(-25) = 49 -$	"no es capaz de seguir, abandona el ejercicio"

En este caso, dado el nivel del estudiante es preferible creer que no finalizó el ejercicio porque pensó que no lo estaba desarrollando correctamente.

Para otro estudiante y que muestra deficiencia en la **suma de expresiones algebraicas, reducción de términos semejantes y en la solución de una ecuación cúbica,** el proceso desarrollado fue $-4x^2 + 7x - 25 = 0$; $3x^3$ "reduce términos como si fueran semejantes y no lo son" = 25; $x^3 = 25/3$ y finaliza con $x = \sqrt{25/3}$ "despeja como raíz cuadrada y no cúbica".

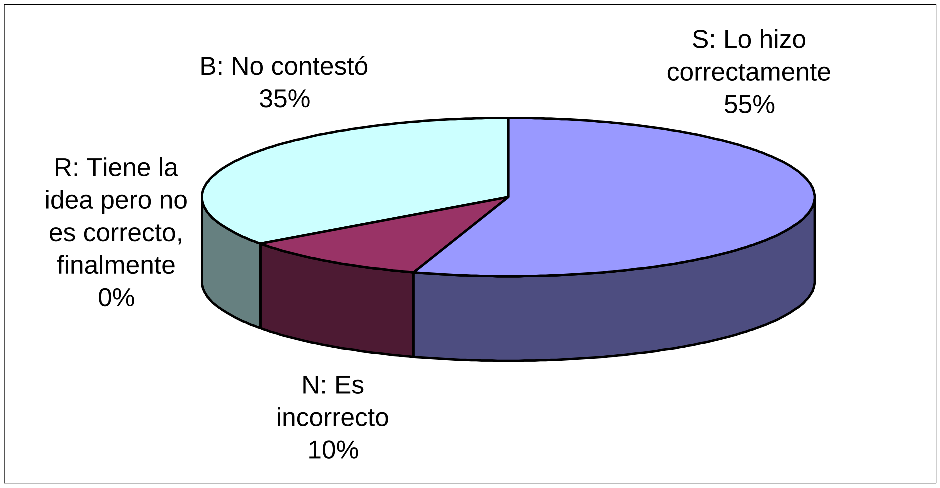
Uno de los problemas requería el planteamiento de una ecuación cuadrática; al respecto un estudiante después de que plantea el modelo y reduce términos semejantes para las variables, le da $2x^2 + 12x+36= 144^2$, continúa con la igualdad $2(x+6)2(x+6) = 144^2$ la cual no corresponde y después dice $2(x+6) = 144$, sacando raíz cuadrada a toda la ecuación; presenta deficiencia en **factorización y en la solución de la ecuación cuadrática.**

En definitiva el proceso para el desarrollo de ecuaciones **es deficiente,** se falla en la **aplicación de propiedades** cuando se tiene una igualdad**,** el **despeje de la variable,** no se tiene presente el número de raíces de una ecuación y en operaciones básicas entre expresiones algebraicas. Se observó que algunos trabajan sobre la base del “ensayo y error”.

Esta subcategoría es evidenciada como deficiencia en cuanto a contenidos conceptuales, pero especialmente en la habilidad para conducir el despeje de la variable o variables en forma correcta y aplicando las propiedades que se verifican en una igualdad.

Subcategoría: Teorema de Pitágoras. El reconocimiento de cuándo y cómo se aplica además de constituir el fundamento de la existencia de los números irracionales, es muy importante por cuanto a partir de su aplicación se introduce el concepto de razón trigonométrica y sobre ésta se inicia el estudio de la Trigonometría; la prueba requirió “solucionar las siguientes situaciones matemáticas”. Los datos del problema en relación con esta subcategoría, requerían su ubicación en un triángulo rectángulo cuyos catetos coincidían con las dimensiones solicitadas; por ello el estudiante debía interpretar el problema, graficarlo, ubicar los datos conocidos y desconocidos, plantear el modelo, que para el caso era el Teorema de Pitágoras. Los resultados se observan en la figura 10.

Figura 10. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Teorema de Pitágoras.



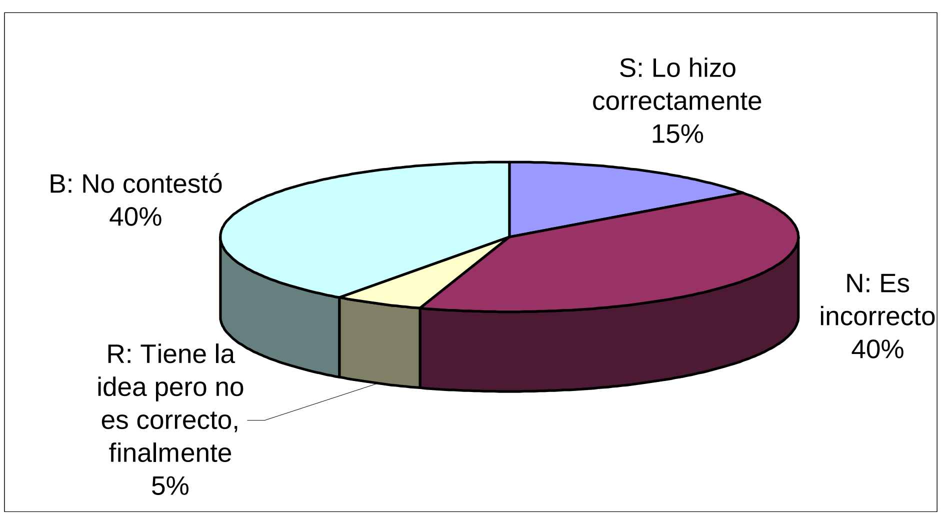
A partir de la gráfica puede verse que un porcentaje significativo (55%) de los estudiantes plantearon correctamente la aplicación del **Teorema de Pitágoras** como modelo matemático para la solución del problema dado, aunque solamente unos pocos hallaron la solución al problema porque como ya se dijo, **se falla en** la solución de ecuaciones**;** también se encontró que hubo algunos que aplicaron el Teorema incorrectamente porque tomaron uno de los catetos por hipotenusa, como si la diagonal no estableciera con claridad la diferencia entre hipotenusa y cateto y un 35% ni siquiera lo intentó. Es de resaltar que algunos manejan las letras a, b, c como si fueran variables fijas en el teorema, **no hacen la transferencia** necesaria para los nuevos datos**;** se aprendieron que el teorema dice $a^2=b^2+c^2$. Al respecto Pimm[111] plantea sobre el nivel de interpretación de las palabras en las clases de matemática, que "algunas confusiones pueden surgir cuando el alumno centra su atención preferente en los símbolos mismos, en vez de en lo que esos símbolos significan... los errores que se producen en álgebra ocurren precisamente porque ésta suele enfocarse de forma abstracta y manipulativa de símbolos, sin prestar atención a los posibles significados".

[111] Ibid, p. 47.

Se observa que la deficiencia hace referencia a contenidos conceptuales relacionados con un tema específico como es el teorema de Pitágoras pero también a la capacidad de transferencia y al uso del lenguaje matemático y su significado; este aspecto fue identificado como deficiencia por profesores y alumnos. Vale la pena destacar que es una de las subcategorías donde el número de respuestas correctas (55%) supera a las demás.

Subcategoría: Cuadrado de la suma de un binomio. Este conocimiento es de uso frecuente, no obstante la gran mayoría de los estudiantes lo aplicó en forma incorrecta, (sólo el 15% lo hizo correctamente); se evidencia que **no se tiene presente las características que debe cumplir el desarrollo del cuadrado de la suma de un binomio** o por lo menos **hacer el procedimiento de expresar el binomio como un producto y realizarlo para confirmar el resultado;** parece que el estudiante cree que el procedimiento que realiza es el correcto. Ver resultados en la figura 11.

Figura 11. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Cuadrado de la suma de un binomio

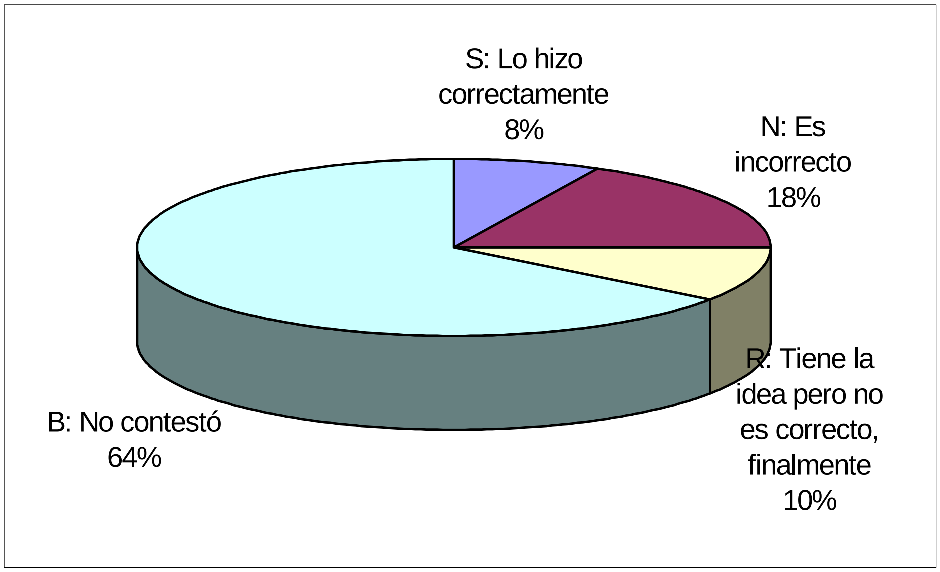


Los datos muestran que un porcentaje muy alto aplicó de manera incorrecta la regla para resolver el cuadrado de un binomio. Este concepto estaba ligado a la aplicación del Teorema de Pitágoras para solucionar un problema dado mencionado anteriormente y el cual fue en su mayoría bien planteado pero su solución no fue satisfactoria por **cuanto se falló en el desarrollo del cuadrado del binomio;** un porcentaje alto de estudiantes lo desarrollaron de manera incorrecta; algunos hicieron lo siguiente: $(x+6)^2 = x^2 + 36$, otros $(x+6)^2= x^2 + 2x + 12$, es decir, tomaron como 12 el cuadrado de 6; sólo cuatro estudiantes (20%) aplicaron correctamente este concepto algebraico y de un porcentaje alto no se pudo saber si lo manejaban o no porque **no plantearon el modelo que solucionaba el problema y sobre el cual se definía el binomio.**

La deficiencia se relaciona con la **capacidad de análisis,** subcategoría explicitada especialmente por los profesores como una de las deficiencias matemáticas de los estudiantes "analizar les cuesta trabajo, para todo piden ayuda y cuando se les da explicación ahí si entienden.."

Subcategoría: Relaciones e identidades trigonométricas. Para el desenvolvimiento de un estudiante en el Cálculo Diferencial esta subcategoría es muy importante y definitiva, se requiere que el estudiante tenga los **conocimientos sólidos y las habilidades requeridas en el manejo de los conceptos básicos de la Trigonometría.** En este caso se encontró que la gran mayoría de los estudiantes no resolvió los problemas que proponía la Prueba; sólo lo hicieron en el 8% de los ítems relacionados con el tema, porcentaje que corresponde a los momentos de identificación o ubicación. Ver resultados en la figura 12.

Figura 12. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Relaciones e identidades trigonométricas

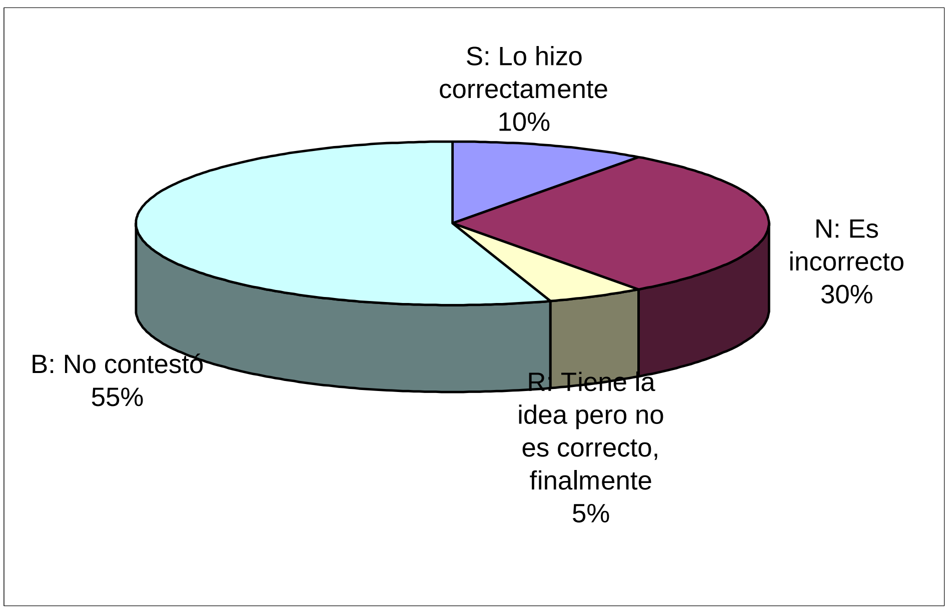


Para aplicar la relación trigonométrica el estudiante debía hacer la **representación gráfica del problema, ubicar datos e identificar variables** y **luego plantear el modelo trigonométrico;** sin embargo se encontró que algunos estudiantes no hicieron dicha representación, otros lo intentaron pero colocaron los datos en forma equivocada (el ángulo de 20° lo ubicaron donde quedaba el ángulo recto), uno de los problemas decía "a 254 m del pie del edificio se observa la parte superior..." hubo tres estudiantes que interpretaron el dato como la altura del edificio, otro habiendo colocado los datos correctamente, definió como **seno del ángulo a la razón entre opuesto y adyacente,** lo cual es incorrecto**.** En el segundo problema relacionado con trigonometría, la gráfica no representa un triángulo rectángulo (algunos lo vieron así), aquí había que aplicar **el teorema del coseno,** resultado que sólo fue utilizado por un estudiante e iniciado por otro. El hecho de que algunos dejaron el espacio o hicieron una figura que luego tacharon, en un porcentaje significativo, denota la deficiencia en el manejo de estos conceptos básicos y necesarios para el Cálculo Diferencial como en la

diagramación de problemas o, identificación de las cantidades dadas y las incógnitas (ubicación espacial) o, **simbolización de las cantidades desconocidas** o, planteamiento del modelo trigonométrico y su relación con otros modelos, es decir se evidencia deficiencias en la capacidad de análisis lo que confirma la percepción de estudiantes y profesores.

Subcategoría: Conjunto de Números Complejos. La prueba sólo requería el reconocimiento del número imaginario que resultaba al solucionar una ecuación cuadrática y cuyas soluciones no eran reales sino complejas. El estudiante debía resolver la cuadrática e identificar las soluciones. Ver Figura 13.

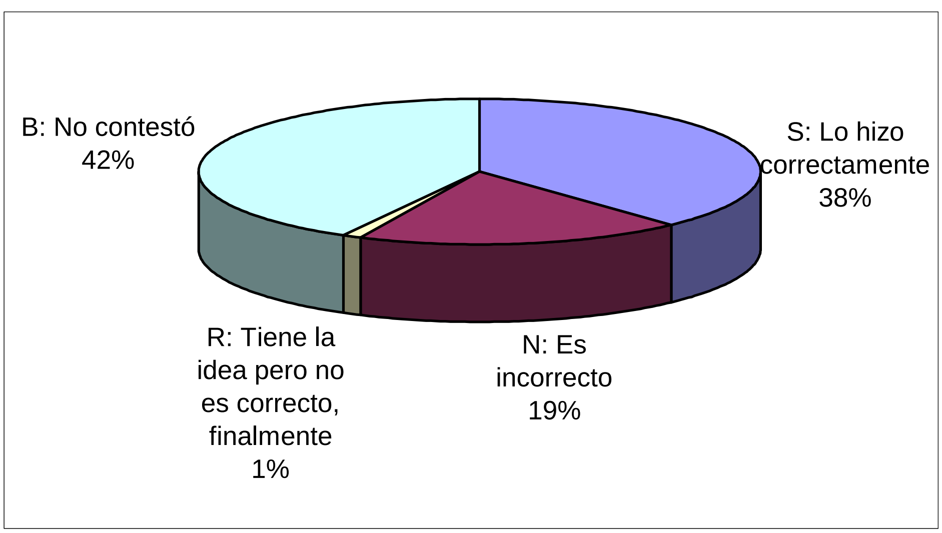
Figura 13. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Conjunto de Números Complejos



Los estudiantes que aplicaron correctamente la fórmula cuadrática para solucionar la ecuación dada, podían encontrarse con el subradical negativo y decidir sobre este número; por ello sólo el 10% identificó el número como un número imaginario, por cuanto **la raíz cuadrada de un número negativo no existe en los Reales,** este es un porcentaje muy significativo que representa a los estudiantes que pudieron realizar de manera correcta el ejercicio; el 30% habiendo aplicado correctamente la fórmula cuadrática y simplificado las expresiones, **multiplicaron el signo menos desde afuera del radical** convirtiendo el subradical en cantidad positiva dándoles un real, $\sqrt{(-a)} = \sqrt{a}$, lo cual es incorrecto; es de destacar que un porcentaje significativo (55%) dejó en blanco la solución de la ecuación, quizá porque al encontrarse con la raíz del negativo creyeron que no habían operado o aplicado la fórmula cuadrática correctamente. Por lo tanto, la **raíz par de un número negativo y la introducción de cantidades en un radical** son conceptos en los cuales los estudiantes presentan deficiencia.

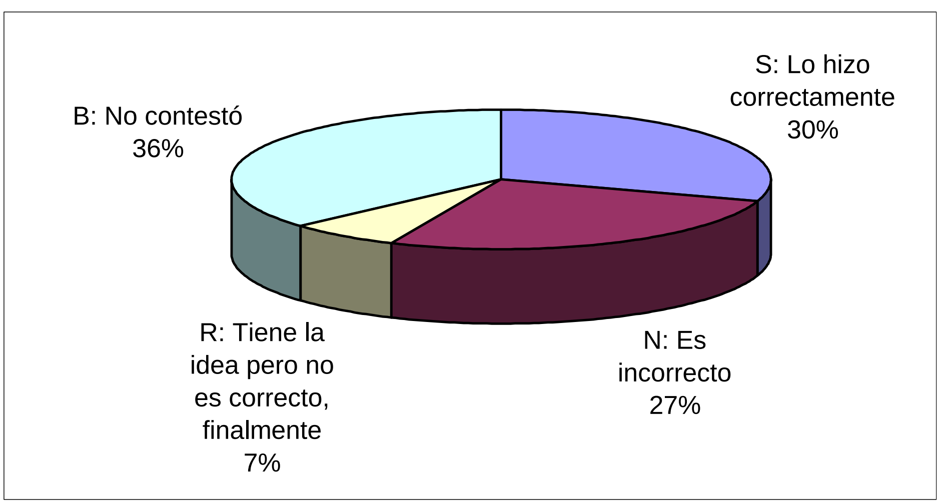
Subcategoría: Solución de inecuaciones lineales. La prueba planteaba resolver una inecuación lineal. Cabe aclarar que se había podido solicitar una inecuación con mayor grado de dificultad. Ver resultados en la figura 14.

Figura 14. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Solución de inecuaciones lineales



La inecuación fue abordada solamente por cuatro estudiantes; los pasos relacionados con este conocimiento fueron desarrollados sólo por dos estudiantes en forma correcta, esto es**, utilizaron la expresión lógica: “p Ù q”, solucionaron cada inecuación simple utilizando el algoritmo respectivo, aplicaron la operación de intersección entre las soluciones parciales y utilizaron la notación de intervalo para dar la solución a la inecuación dada.** Los otros dos estudiantes que trabajaron el ejercicio cometieron errores en el proceso, no separaron correctamente la proposición compuesta, no aplicaron las propiedades de las operaciones básicas como multiplicación y suma, no hicieron reducción de términos, no aplicaron las propiedades en las desigualdades, no despejaron la incógnita. o, no aplicaron correctamente la operación intersección entre los conjuntos solución parciales encontrados. Cabe destacar que el 42% de los pasos básicos para solucionar una inecuación lineal no fueron abordados y que corresponden a su vez al 80% de los estudiantes; si se considera este porcentaje más los que trabajaron en forma incorrecta se encuentra que la gran mayoría de los estudiantes no maneja dichos conocimientos, este porcentaje (90%) es altamente significativo para incursionar en el Cálculo Diferencial.

Figura 15. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Propiedades de las operaciones en los Números Reales



Aproximadamente la tercera parte de los estudiantes aplicó correctamente las propiedades asociativa, clausurativa y distributiva en los Reales. Sin embargo, fue mayor el porcentaje que lo intentó con errores como por ejemplo:

$49 - 4(-4)(-25) = 49 - 400 = 351$ La respuesta correcta es -351

No se tuvo en cuenta que el número negativo es mayor en valor absoluto que el número positivo y por lo tanto la suma es un número negativo; su deficiencia está en **suma de enteros positivos y negativos.**

$12^2 + 18^2 = 30^2$ Lo correcto es: $144 + 324 = 468$

Este estudiante halló el cuadrado de la suma de las bases, debió aplicar potenciación en cada sumando y luego hallar la suma; su deficiencia tiene que ver con **propiedades de la potenciación, suma de potencias y cuadrado de un binomio**.

$x - 9\,(4) = 4x - 32$ **Lo correcto es: $x - 36$**

Este estudiante utilizó la propiedad distributiva sin tener que hacerlo porque 4 sólo multiplica a 9 y no a (x-9), además 9.4 es 36 y no 32. Presenta deficiencia en el **reconocimiento de la expresión para aplicar la propiedad distributiva** y en **multiplicación de números reales**.

También hubo deficiencias al operar incorrectamente con expresiones algebraicas, por ejemplo:

$$\frac{3x}{x^2+3x-10} = x^2 - 10$$

Simplificó 3x cuando esto sólo puede hacerse si hay factores iguales en el numerador y denominador de una fracción, aquí hay sumandos iguales; su deficiencia está relacionada con **fracciones equivalentes y simplificación de fracciones.**

$$\frac{3x}{x^2+3x-10} = \frac{3x}{x^2} + \frac{3x}{3x} - \frac{3x}{10}$$

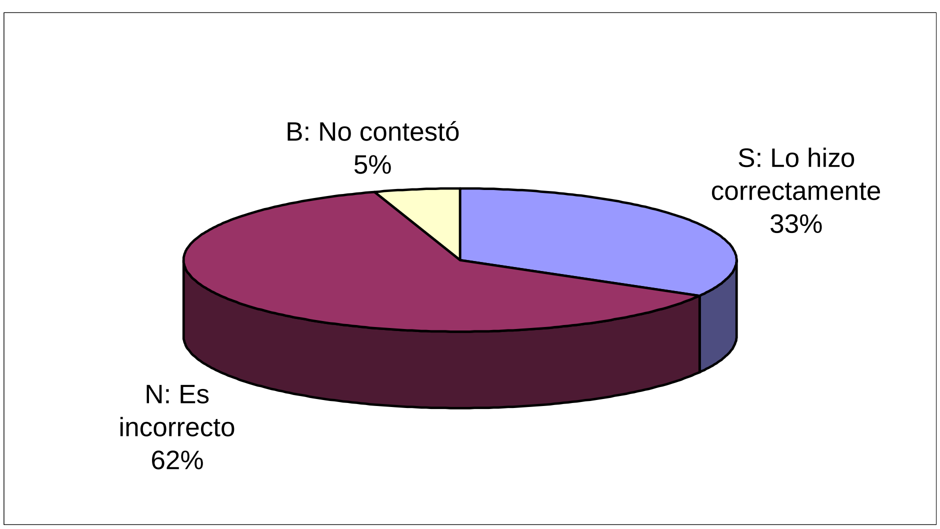
El estudiante separa la expresión por sumandos según los términos del denominador. Al aplicar la **reversibilidad** se encuentra que:

$$\frac{3x}{x^2} + \frac{3x}{3x} - \frac{3x}{10} = \frac{3}{x} + 1 - \frac{3x}{10} = \frac{10(3)+10x(1)-x(3x)}{10x} = \frac{30+10x-3x^2}{10x} \neq \frac{3x}{x^2+3x-10}$$

Nuevamente se observa que la falla está en el desarrollo **de operaciones con fracciones algebraicas**, aspecto que se ha identificado en otras subcategorías

Subcategoría: Relaciones Reales. Este conocimiento se trataba en la prueba a través del desarrollo de las ecuaciones, inecuaciones dadas o que debieron plantearse al solucionar los problemas y también desde el uso del concepto y elementos de una relación real. Los resultados se muestran en la figura 16.

Figura 16. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Relaciones Reales



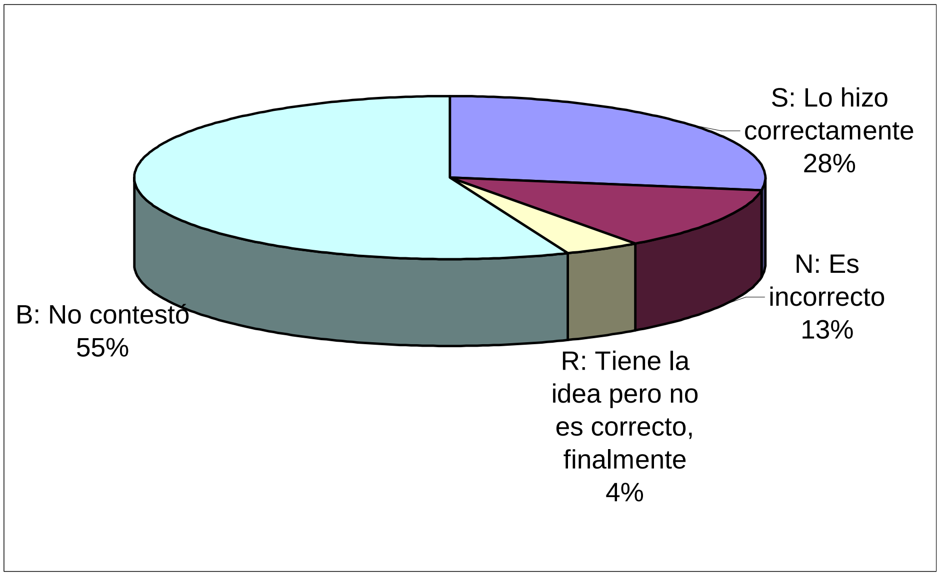
Los datos relacionados con ecuaciones e inecuaciones ya se analizaron anteriormente encontrándose deficiencias. Los elementos teóricos relacionados con Relaciones Reales, provenían de un ejercicio de apareamiento; este elemento teórico es básico para Cálculo Diferencial porque el programa (en la UNAB) comienza con el tema de funciones reales y éstas se fundamentan en el concepto de una relación real; se encontró un porcentaje muy alto de inconsistencia en las relaciones establecidas en dicho ejercicio de apareamiento. Por ejemplo, hubo estudiantes que identificaron correctamente cómo hallar el rango de una relación y luego indicaron en forma incorrecta cómo hallar el dominio, lo cual significa que no se tiene claridad en el tema sobre cómo hallar **el campo de extensión de una relación** real dada; también hubo quien expresara “reconozco algunas cosas pero no todas... no sé de qué se trata esto, qué es abscisas?”, esta pregunta indica que no se reconoce el término matemático **abscisa**.

Cabe destacar que este ejercicio de relación teórica fue uno de los más abordados por los estudiantes (quizá porque corresponde a una temática que se trata en el programa de Matemática de 11°), aunque el porcentaje de error fue muy alto.

El siguiente grupo de subcategorías está dentro de la **categoría “habilidades requeridas”** siendo la “Interpretación y análisis de problemas” uno de los prerrequisitos del Cálculo Diferencial en la UNAB desde esta categoría.

Subcategoría: Identificación de datos. Frente a un problema dado, se esperaba que los estudiantes interpretaran la información inicial y reconocieran el interrogante para luego solucionar la situación matemática dada, esto es, debían **contextualizar la situación.** Los teóricos recomiendan hacer una gráfica que represente los datos del problema, si es posible. En la figura 17 se representan los resultados para esta subcategoría.

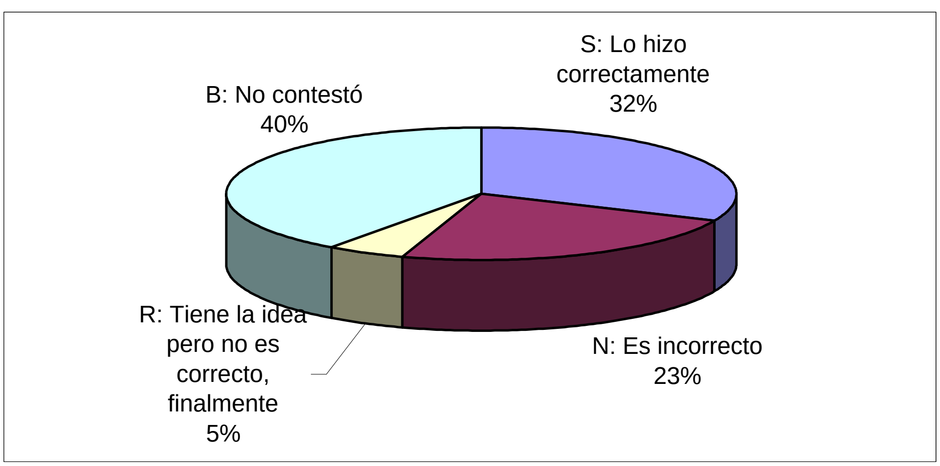
Figura 17. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Identificación de Datos



La prueba planteaba cuatro problemas, uno relacionado con la aplicación de la cardinalidad en la teoría de conjuntos (se analizó anteriormente y se concluyó que los estudiantes en su mayoría no supieron graficar el problema y por lo tanto tampoco solucionarlo), otro de aplicación del Teorema de Pitágoras (también se analizó anteriormente encontrándose que algunos lo tomaron –correcta o incorrectamente- como modelo matemático para dar solución al problema en relación) y finalmente, con el fin de identificar la habilidad para solucionar problemas, se plantearon dos problemas más; para este caso sobre solución de triángulos con la aplicación de las relaciones trigonométricas. Con relación a esta subcategoría se encontró que algunos de los que hicieron el listado de datos o no continuaron o, intentaron hacer su representación gráfica; de estos últimos algunos **no ubicaron correctamente los datos**, siendo ésta una deficiencia importante puesto que de esto depende la eficacia de la ejecución posterior. También se infiere **desatención** en algunos pues para el problema que decía "...a 254 m del pie del edificio se observa la parte superior..." señalaron el dato como la altura del edificio; otro estudiante utilizó erróneamente magnitudes al asignar por ejemplo a la “altura de la antena 16 grados”. Es de destacar que el 55% de los pasos relacionados con la **ubicación de datos** no fueron abordados por los estudiantes y más cuando de este momento inicial dependía la solución de los problemas dados; unos pocos hallaron la solución al problema porque como ya se dijo, se falla en la **solución de ecuaciones,** cuyo modelo matemático era clave para hallar la solución a los problemas planteados. La **desatención** es percibida por los profesores y estudiantes, registro que surgió y fue analizado en otra subcategoría.

Subcategoría: Identificación de Variables. Esta habilidad tiene relación estrecha con la anterior por cuanto hay datos conocidos y variables; el detalle está en reconocer la relación entre estos dos tipos de datos; **identificar el interrogante** completa la información para realizar el paso posterior que es el **planteamiento del modelo** que conducirá a su vez a la solución del **problema.** Si hubo o no identificación de variables se representa en la figura 18.

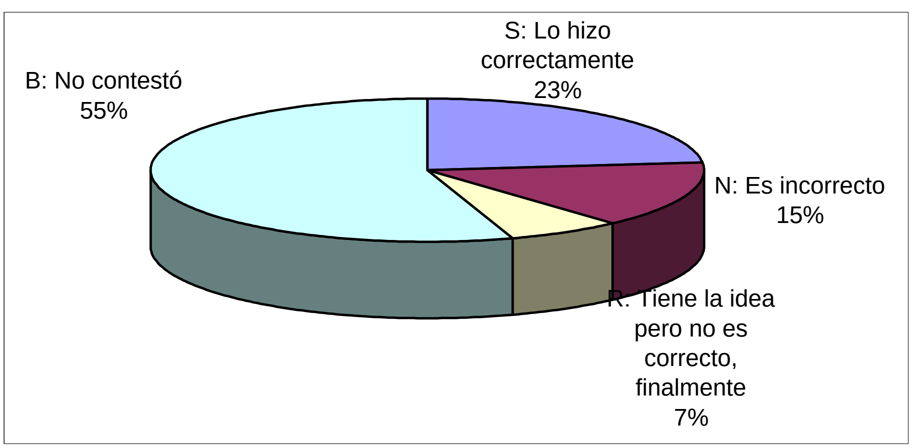
Figura 18. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Identificación de Variables



Los estudiantes que abordaron los problemas y sacaron el listado de datos, **no identificaron correctamente las variables involucradas en las situaciones planteadas**; solamente una tercera parte lo hicieron correctamente. Entre las dificultades encontradas están: **asignación de variables a magnitudes que no lo requerían, interpretación incorrecta de la participación de la variable en la magnitud relacionada** ("... tiene 6 pies más largo que de ancho" si x representa el largo un estudiante colocó al ancho 6+x y otro 6-x"). El 55% de los ítems asignados a esta subcategoría fueron abordados pero sólo el 32% se hicieron correctamente. De hecho, las fallas detectadas en estas dos últimas subcategorías permite inferir que a los estudiantes efectivamente se les **dificulta interpretar y analizar un problema,** deficiencia que los profesores y estudiantes perciben.

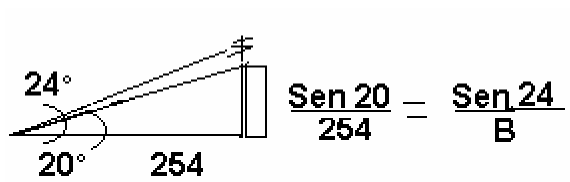
Subcategoría: Planteamiento del Modelo Matemático. Se trata de que el estudiante muestre su **habilidad para representar un concepto a través de una construcción teórica;** para las situaciones de la prueba se requería de ecuaciones como modelos matemáticos. En la figura 19 se representan los resultados.

Figura 19. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Planteamiento del Modelo Matemático



Es interesante comparar estos resultados con los de la representación de la subcategoría anterior; el porcentaje de abandono del problema aumentó notablemente, del 40% al 55%.

Aproximadamente la cuarta parte de los estudiantes acertaron con el modelo matemático requerido para solucionar los problemas planteados; sin embargo un 50% de los estudiantes por alguna razón ni siquiera lo intentaron (por desconocimiento o porque **no se superó el paso de identificación de variables**). Uno de los modelos calificado como "incorrecto" fue:



El estudiante no señala a qué llama B, y además utiliza el teorema del seno relacionando elementos de dos triángulos diferentes, lo cual es incorrecto

Otro caso fue el estudiante que ante un gráfico semejante, asignó ***h*** a la altura de la antena utilizando la relación trigonométrica para un triángulo que no es rectángulo.

$$tan 20 = \frac{h}{254}$$

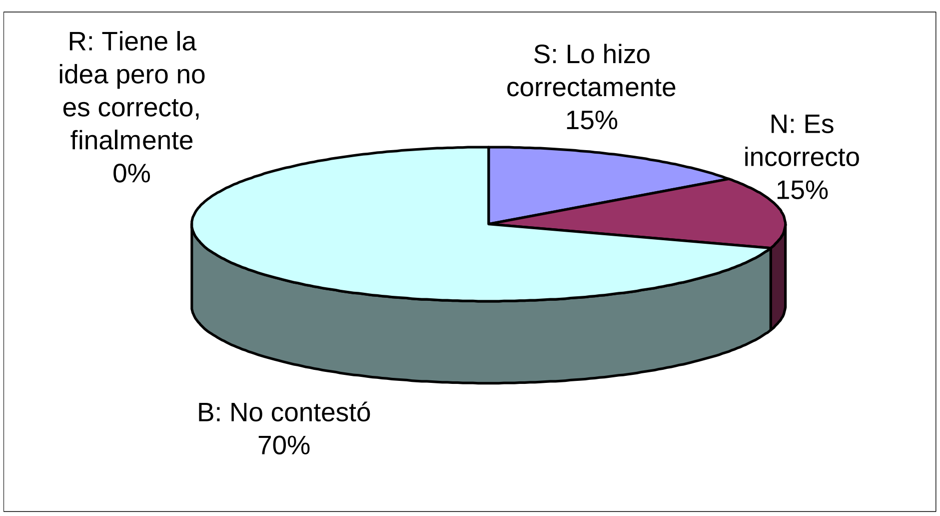
Aquí parte de **una relación definida incorrectamente**; debió asignar otra variable a la altura del edificio para que la relación trigonométrica quedara bien definida. Además como se asignan dos variables se requiere definir dos ecuaciones y así relacionar los datos del enunciado y la pregunta del problema.

En conclusión los estudiantes también presentan dificultades en las habilidades requeridas para **interpretar y analizar problemas**, desde la **identificación e interpretación de los datos del problema, diagramación, ubicación de los datos conocidos y desconocidos, asignación de variables, planteamiento del modelo matemático y su respectiva solución** hasta la **confrontación de respuestas con el enunciado del problema;** al tener en cuenta este último aspecto se sospecha que algo no se tuvo en cuenta o, que se incurrió en algún error en el desarrollo o, que el resultado sí es probable.

El siguiente grupo de subcategorías está dentro de la categoría **“operaciones básicas**” definidas como la “**aplicación correcta de los algoritmos requeridos en el manejo de operaciones con conjuntos numéricos y/o ecuaciones lineales de primer y segundo grado o inecuaciones lineales**”; es otro de los prerrequisitos para Cálculo Diferencial en la UNAB. Para identificar la competencia en el manejo de las operaciones básicas se partió de la siguiente clasificación:

Subcategoría: Operaciones Lógicas. Las preguntas relacionadas con la utilización de la Lógica fueron el problema sobre cardinalidad y la solución de la inecuación en la cual se aplicaba la intersección entre dos intervalos, esto es, se requería en ambos casos operar entre conjuntos; en el análisis de las subcategorías relacionadas se dijo que los estudiantes presentaban deficiencia en el manejo de estos conceptos. En la Figura 20 se aprecian los resultados.

Figura 20. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Operaciones Lógicas

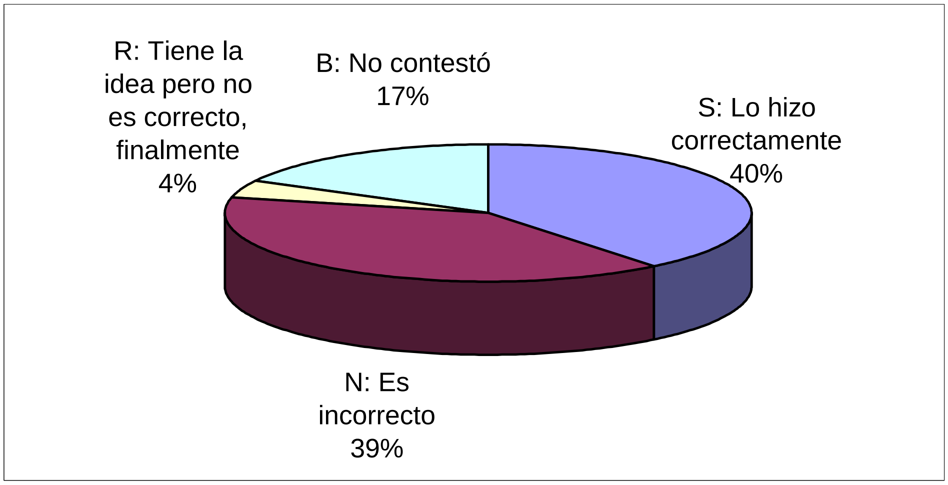


Es de destacar que en un alto porcentaje (70%) de los pasos relacionados con **operaciones de tipo lógico** no fueron abordados por los estudiantes; éstos **no pudieron o no supieron operar conjuntos,** pues la mayoría en el problema de cardinalidad como aplicación de la teoría de conjuntos, no graficaron la situación o lo hicieron en forma incorrecta y por lo tanto no pudieron hacer la interpretación de las proposiciones ni ubicar apropiadamente los datos dados en el enunciado; en relación con la inecuación, los estudiantes que aplicaron las operaciones algebraicas correctamente, debían intersectar los intervalos de solución parcial para dar el conjunto de números reales que constituían la solución de la inecuación, lo cual tampoco lo hicieron por el **uso indebido de la desigualdad "£" que implica intervalo cerrado** o de **"<" intervalo abierto.**

De la observación de los desarrollos de los estudiantes se infiere deficiencia en la **identificación y significado de los conectivos lógicos y su relación con las operaciones entre conjuntos, la correspondencia entre una desigualdad y la representación del intervalo respectivo, el significado de los símbolos "£, <" y finalmente operar con conjuntos.** Esta subcategoría implica análisis e interpretación, deficiencia que fue percibida por profesores y estudiantes.

Subcategoría: Operaciones Geométricas. La representación gráfica que los estudiantes hicieran de las situaciones matemáticas, permitirían detectar deficiencias en cuanto a **ubicación en contexto y la utilización de las unidades de medida.** Los problemas están relacionados con el cálculo de magnitudes. Los resultados pueden apreciarse en la figura 21.

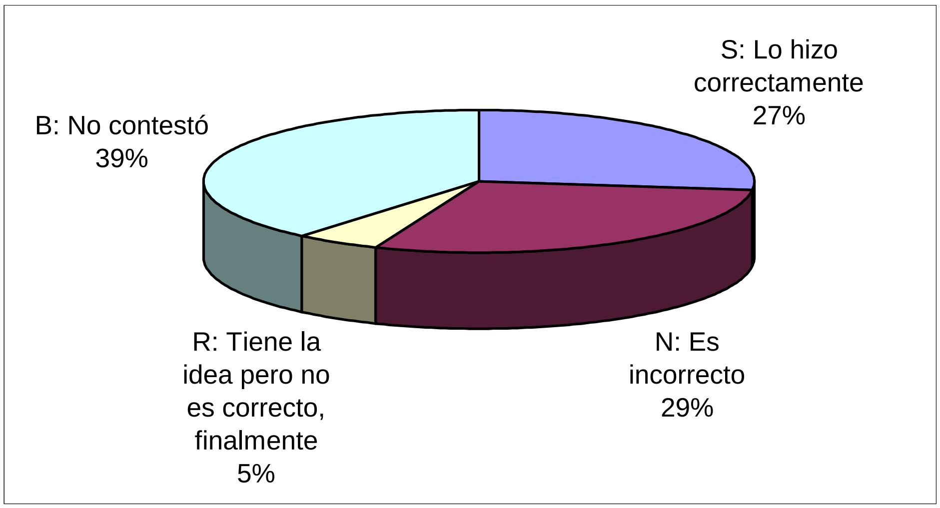
Figura 21. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Operaciones Geométricas



Aunque la gran mayoría de los estudiantes intentaron **representar gráficamente alguno de los problemas dados**, existe un porcentaje de error muy alto en dicha ejecución. Algunos estudiantes muestran su desorientación, como se mencionó anteriormente, pues se encontraron situaciones en las **cuales el gráfico no es la representación del enunciado del problema, los datos quedaron mal ubicados, no se definieron las variables o si lo hicieron, no se ubicaron correctamente o, las unidades de medida no se utilizaron como corresponde.** Pero vale la pena destacar que es una de las subcategorías cuyo número de respuestas correctas es alto comparativamente con otras subcategorías; esto se explica porque los estudiantes reconocen que la graficación de un problema es un buen inicio para solucionarlo. No obstante, el porcentaje de desacierto también es alto y, tanto estudiantes como profesores coinciden con estos resultados al percibir fallas en la graficación y ubicación inadecuada de los datos.

Subcategoría: Operaciones algebraicas. Partiendo de la base que desde hace años se tiene contacto con las operaciones aritméticas las cuales el álgebra trata de una manera general, es evidente que los estudiantes se han acostumbrado a la calculadora para hacer hasta las operaciones más sencillas. El porcentaje indica que sólo unos pocos aplicaron correctamente los algoritmos de las operaciones básicas. Ver resultados en la figura 22.

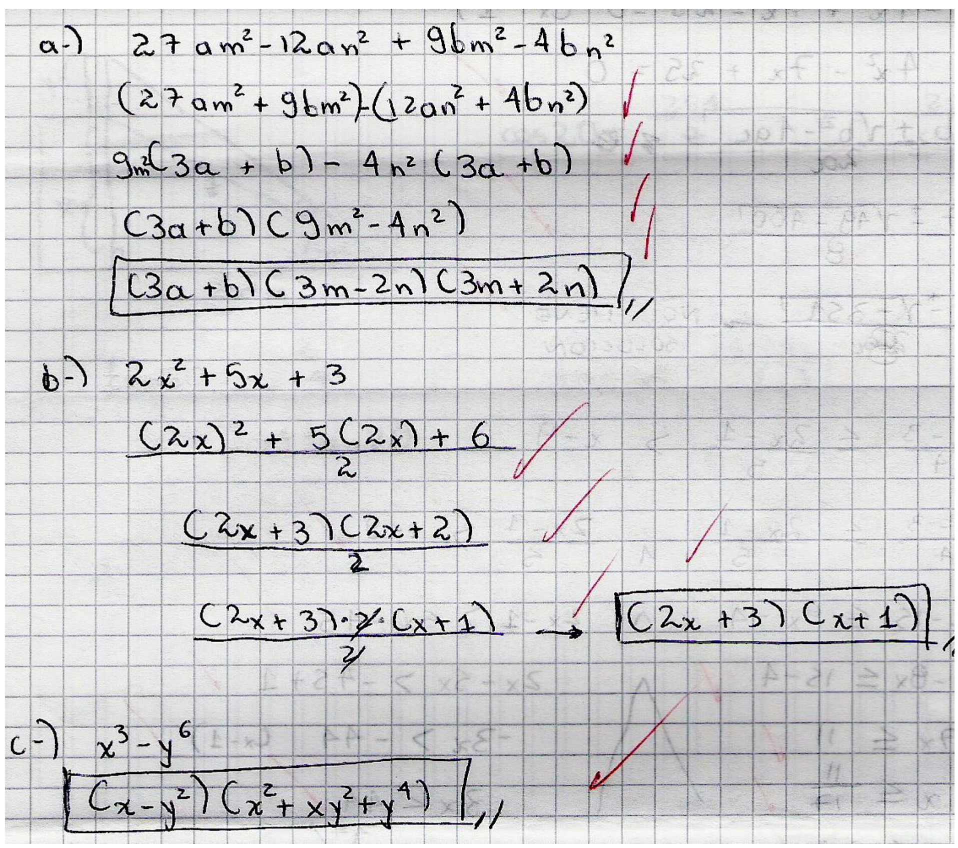
Figura 22. Representación gráfica de los resultados de la Prueba en relación con la subcategoría Operaciones Algebraicas



El 80% de los ítems de la prueba requería operaciones algebraicas; el hecho de que el 39% de los ítems básicos de la misma no fueran resueltos por los estudiantes, que el 29% se hicieran en forma incorrecta y que en un 5% se hubiese iniciado correctamente pero luego se cometieron errores, evidencia las deficiencias significativas que existen en el manejo de los conceptos básicos de precálculo; estas deficiencias se perciben en: **propiedades de las operaciones básicas en los Reales; términos semejantes; operaciones con expresiones y fracciones algebraicas incluyendo factorización de polinomios y cuadrado y cubo de binomios; fracciones algebraicas; ecuaciones e inecuaciones; transposición de términos; solución por fórmula de una ecuación cuadrática y propiedades de las desigualdades.**

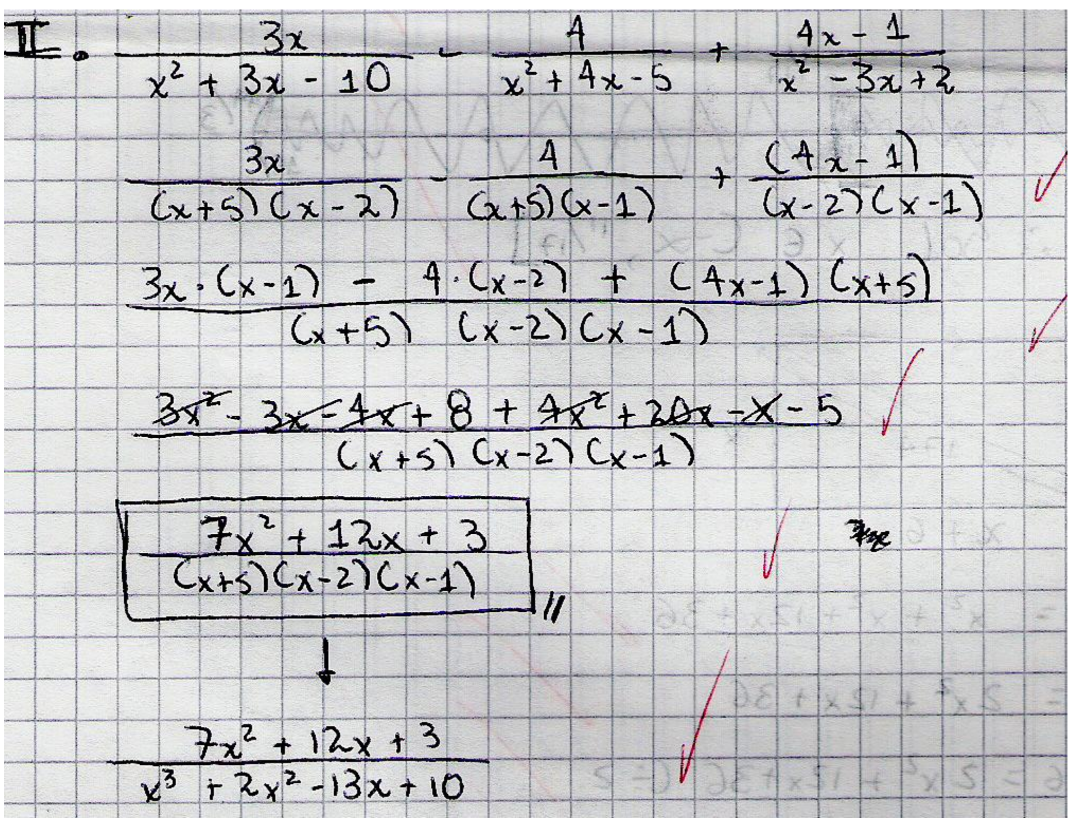
Con el fin de dar mayor validez a la interpretación y al análisis de estos resultados, se tomaron al azar ejercicios realizados correcta e incorrectamente por seis estudiantes, para analizarlos más a profundidad. Estos ítems correspondieron a varias subcategorías.

Registro Estudiante 1. Estos ejercicios corresponden al primer punto del cuestionario, para el cual se pedía factorizar completamente los polinomios dados. Este estudiante desarrolla los ejercicios a entera satisfacción como puede observarse:



En la parte a), el estudiante reconoce el caso de **factorización de un polinomio por agrupación de términos**, aplica la **propiedad asociativa de la suma en los Reales** fijándose en el cambio de signos cuando un paréntesis está precedido de menos y finalmente, factoriza el segundo paréntesis como **una diferencia de**

cuadrados; en la parte b), reconoce que se trata de **un polinomio de la forma ax²+bx+c** y lo factoriza correctamente, además lo **simplifica** expresando primero el numerador como factores y finalmente en la parte c), el estudiante factoriza correctamente la **diferencia de cubos** que existe, esto es, extrae las raíces cúbicas para formar un factor y aplica la respectiva regla para formar el otro factor. De la manera como este estudiante desarrolla los ejercicios se infiere que maneja la información sobre el conocimiento principal que es **expresar un polinomio como un producto de factores** a partir del reconocimiento de sus características individuales, también reconoce los conocimientos previos a éste como son **reducción de polinomios, operaciones básicas (y sus algoritmos) con expresiones algebraicas y operaciones con Números Reales.**



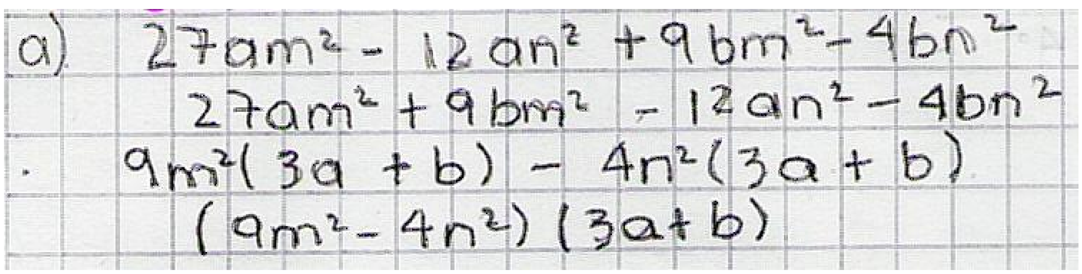
Observando el trabajo que realiza en el segundo punto “simplificar”, el estudiante muestra su competencia en el manejo de **operaciones con fracciones algebraicas:** requirió de la **factorización**, la cual ejecuta correctamente, **identificó el común denominador** para la suma de fraccionarios con distinto denominador, aplicó la **propiedad distributiva** y **redujo términos semejantes**; es decir, maneja sin dificultad alguna “**suma de fracciones algebraicas**”. Por lo tanto, se infiere que este estudiante reconoce y maneja las **operaciones básicas con expresiones algebraicas**.

En síntesis, el desempeño del estudiante en estos dos puntos de la prueba permite inferir que maneja los conocimientos, habilidades y las operaciones básicas en relación con dos conceptos importantes del Algebra **expresiones y fracciones algebraicas.** Estos implican conocimientos específicos *o conceptos integradores* en términos de Ausubel y que evidentemente el estudiante también reconoce, como **factorización de polinomios, reducción de términos algoritmos y operaciones (con sus respectivas propiedades) básicas en los Reales**; la mayoría de los estudiantes que desarrollaron la prueba muestran deficiencia en el manejo de estos elementos teóricos, dificultades percibidas tanto por profesores como por estudiantes.

Los profesores de Matemáticas en la Universidad, “desean” siempre encontrarse con estudiantes que tengan dominio en procesos básicos como el que este estudiante registra. Al respecto, un profesor manifiesta que “un estudiante que se desempeña muy bien en matemática es aquel que trae excelentes bases en operaciones básicas de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación, logaritmación con sus propiedades y sobre todo en fraccionarios, que simplifique perfectamente, factorice completamente..., que tenga facilidad para interpretar problemas, sepa lo que hay que hacer, ... , tenga claridad en esas operaciones básicas que uno no debiera en este nivel universitario desarrollar en clase; se debiera poder partir de nuevos conceptos bajo la suposición que lo básico ya lo posee, con un estudiante así uno no tiene que devolverse para nada, mientras que con los otros tiene que explicárseles todo, cómo se suma, etc.”

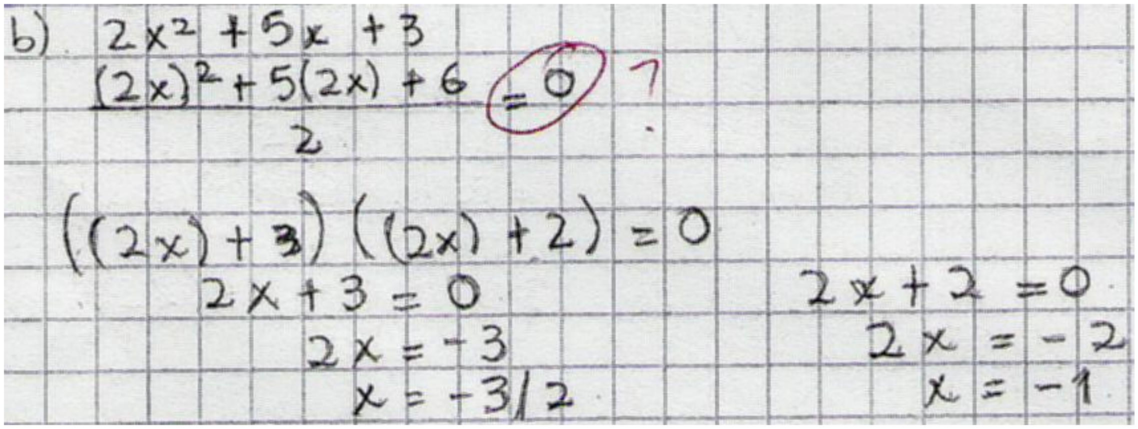
A continuación se examinan los procesos de otros estudiantes acerca del dominio de los dos conceptos y subconceptos identificados en el Estudiante 1, con el propósito de contrastar deficiencias y/o fortalezas.

Registro Estudiante 2.



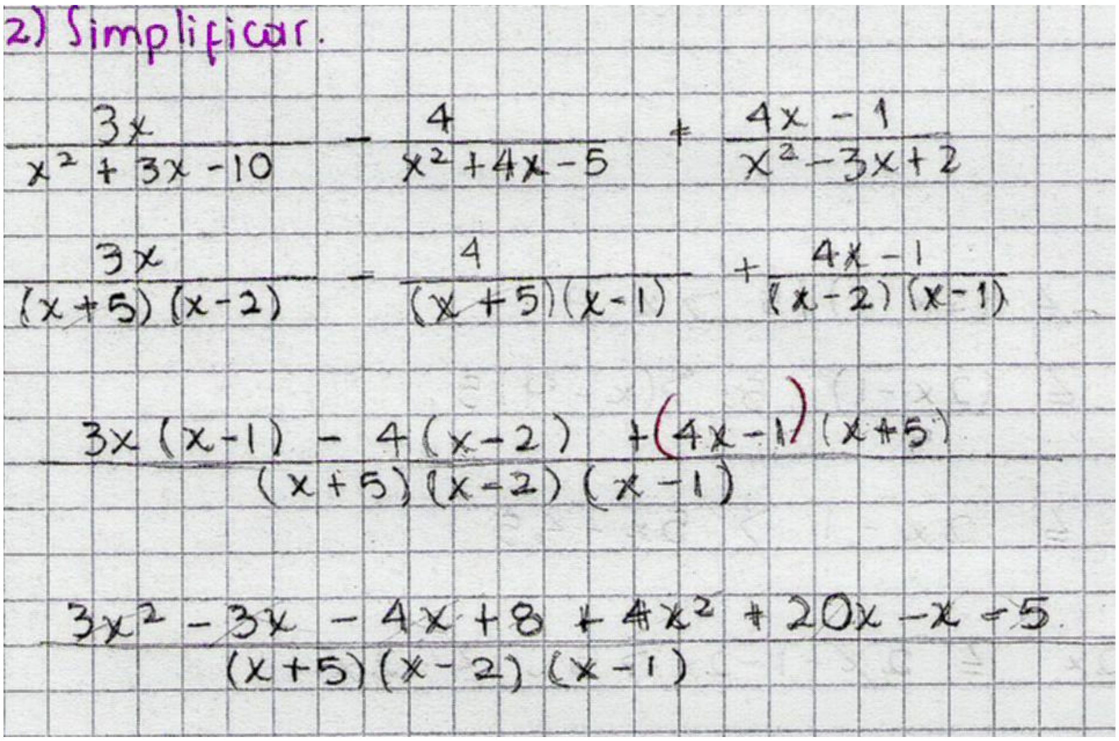
Le faltó finalizar con “(3m-4n)(3m+4n)(3a+b)”

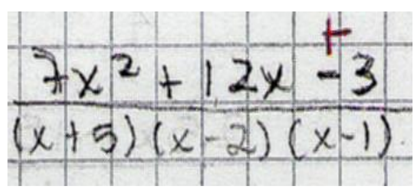
Este estudiante reconoce el caso de **factorización de un polinomio por agrupación de términos**, aplica la **propiedad asociativa de la suma en los Reales,** tiene en cuenta el cambio de signos cuando un paréntesis está precedido de (-), pero al final **no reconoce que existe la posibilidad de factorizar nuevamente;** es decir, no entrega el polinomio factorizado completamente. Al respecto, pueden considerarse las siguientes razones que explicarían por qué el estudiante **no factorizó completamente:** pudo ser por **desatención** al enunciado que decía “completamente” o, porque no descubrió la existencia de una **diferencia de cuadrados** en el paréntesis ($9m^2-4n^2$).



En este ejercicio el estudiante reconoce que se trata de un polinomio de la forma ax^2+bx+c y lo factoriza de manera correcta pero luego iguala a cero sin razón alguna y lo maneja como una ecuación hallando valores para la incógnita, dejándolo finalmente así expresado; es decir, **no analiza el hecho de que debe llevar la expresión a un producto de factores**; a partir de esto podría afirmarse que el **estudiante no tiene claridad en el concepto de factorización** como el ejercicio de “expresar un polinomio como un producto de factores” cuando se trata de un trinomio con esa característica. Así mismo, se presupone que el estudiante asocia el manejo del trinomio ax^2+bx+c con la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$; esto es, hay desvío de información. Al respecto, se recuerda de Piaget que cuando no se analizan (en su momento) las variantes en la construcción de un concepto (para el caso existe diferencia entre polinomio cuadrático y ecuación cuadrática), pueden éstas más tarde convertirse en factores de perturbación.

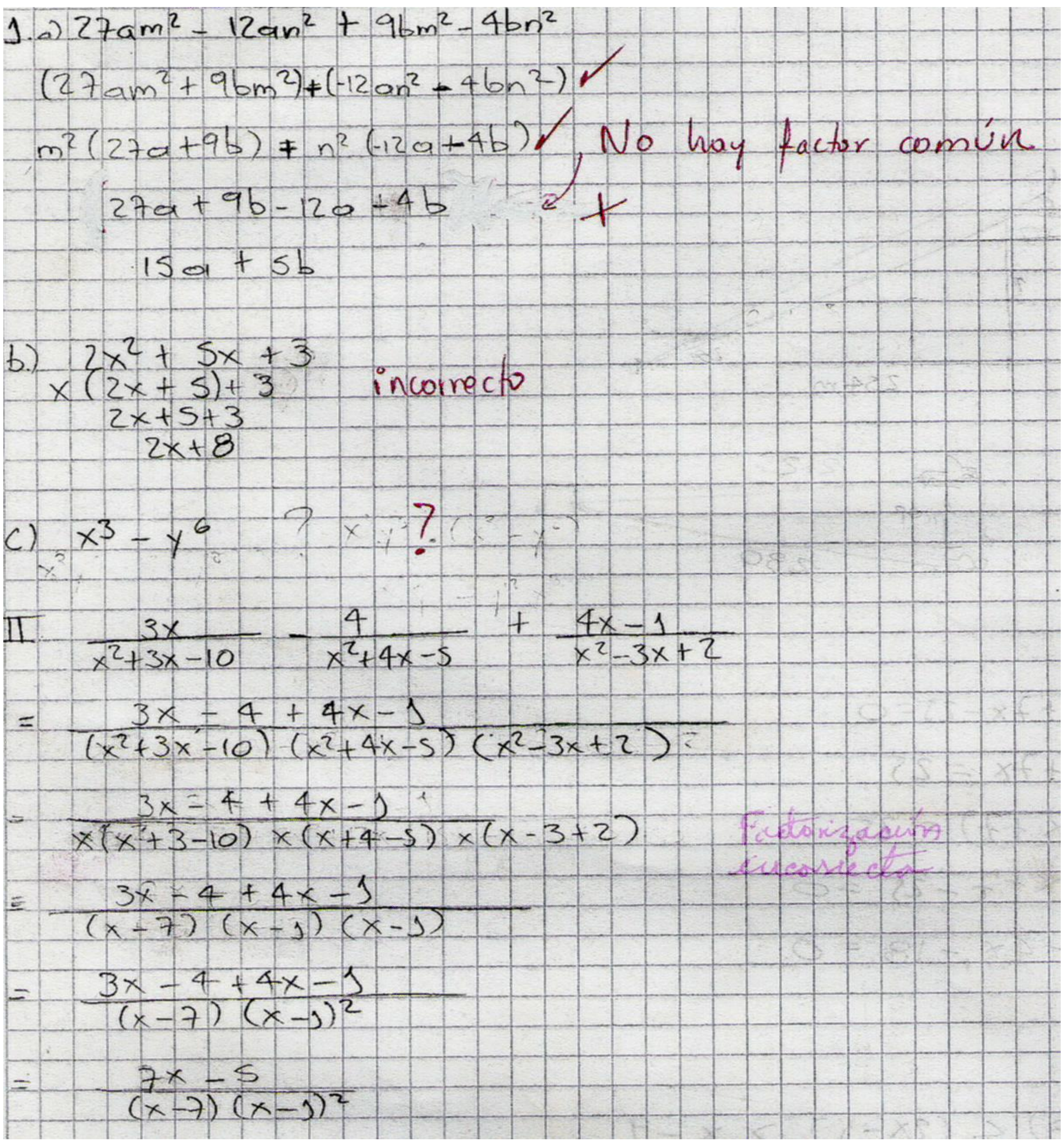
Sin embargo, en el siguiente ejercicio de **simplificación de fracciones algebraicas**, el estudiante reconoce un trinomio de la forma x^2+bx+c lo factoriza correctamente pero no lo maneja como al trinomio anterior cuya única diferencia es que x^2 tiene coeficiente diferente de 1. Es de destacar en este caso, cómo ese procedimiento que le ayuda a resolver problemas algebraicos con características comunes, pero en esencia y contextos diferentes, le conducen a errores de carácter conceptual; esto indica como lo plantea Ausubel que no hubo *aprendizaje* *significativo* porque debiera estarse en capacidad de reconocer nuevas relaciones o vínculos conceptuales entre los conjuntos de conceptos que se relacionan.





Examinando el procedimiento que efectúa el estudiante en este ejercicio 2), podría calificársele como **competente para factorizar polinomios** y también para **operar con fracciones algebraicas**, pues factorizó correctamente los denominadores, identificó el común denominador para la suma de fraccionarios, sumó, aplicó la propiedad distributiva indicada en el numerador como debería ser (no estaba indicada y por eso se le hizo corrección) y luego finalizó con la reducción de términos semejantes sumando (8-5=-3). Si la evaluación estuviera fundamentada sobre el concepto de “es válido si la respuesta está respaldada del procedimiento correcto” este caso no tendría validez; sin embargo en el contexto de la evaluación por competencias se aprecian sus fortalezas y debilidades como se anotó anteriormente.

Registro Estudiante 3.



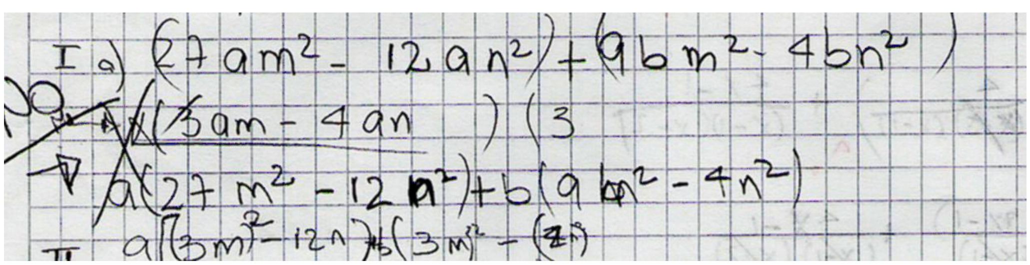
Este estudiante en el ejercicio Ia) comienza aplicando la **propiedad asociativa**, reconoce que se trata de un **polinomio con factor común por agrupación de términos** (por la intención que se observa en el tercer renglón); factorizó cada paréntesis pero luego toma las expresiones que agrupó y las suma; es decir, se **descontextualiza del significado de la factorización** “expresar como un producto de factores”. En el ejercicio 1b) factoriza los dos primeros términos porque tienen algo en común y después suma el paréntesis con el término aislado que había quedado; en este caso parece que el estudiante también está **descontextualizado frente a la exigencia de la escritura en matemática y el uso de los signos de agrupación**, dado que al aplicar la propiedad distributiva (acción reversible) se daría cuenta que el número 3 no es parte de los dos primeros términos; en el ejercicio c) **no supo qué aplicar**.

El proceso que siguió el estudiante para factorizar, permite inferir que **no tiene claridad sobre este concepto** porque **no busca llevar la expresión a un producto de factores**, **tampoco se devuelve en el proceso al observar que su agrupación inicial no le condujo a una nueva posibilidad de hacerlo y no reconoce las características de las diferentes situaciones de polinomios, ve factor común en todos los términos cuando éste no existe**, deficiencia que se observa en el desarrollo del ejercicio II. En este ejercicio no reconoce que se trata de **fracciones algebraicas con distinto denominador,** ni que los fraccionarios reales se suman como lo hizo allí, pues sumó numeradores y multiplicó los denominadores, lo cual indica que **mezcla procedimientos.** Este estudiante debe hacer un trabajo de reconocimiento y aprendizaje de los elementos básicos del álgebra, porque evidencia errores conceptuales muy marcados que siempre le impedirán acceder a nuevos aprendizajes puesto que parte de bases que no son sólidas y además incorrectas.

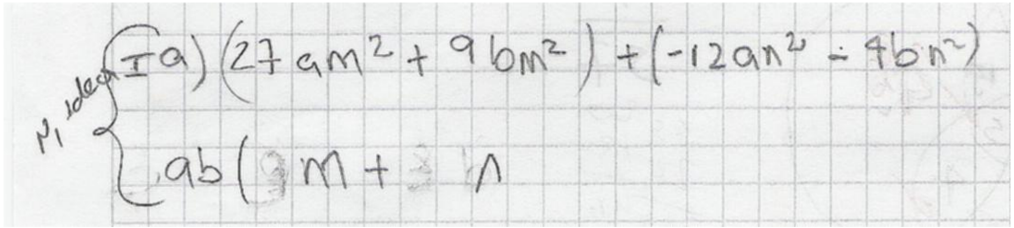
Estas deficiencias son percibidas por profesores y estudiantes, pues “la mayoría de los estudiantes presentan dificultades en suma de fraccionarios, operaciones con números racionales, siendo elementos básicos, les toca siempre con calculadora en mano y lo que tiene que ver con simplificación les cuesta mucho trabajo...” “...llegan alumnos muy buenos y otros con muchas dificultades, en conceptos básicos mínimos como manejo de fracciones, aplicación de propiedades”.

Registro Estudiante 4. Por la forma como este estudiante desarrolla los ejercicios se infiere que muestra dificultades importantes en el manejo de los conocimientos previos relacionados con: **factorización de polinomios, operaciones con fraccionarios, aplicación de algoritmos, operaciones con expresiones algebraicas, productos notables, simplificación de fracciones, descomposición de un número y valor posicional de sus cifras**.

El estudiante comienza el ejercicio aplicando al polinomio la propiedad asociativa, lo cual puede interpretarse que él considera que este polinomio corresponde al caso de factor común por agrupación de términos, aplica la propiedad pero no sacan como factor común el **máximo común divisor** y por ello no llega a obtener el factor común para la nueva expresión; frente a este hecho desiste, lo tacha y escribe NO.



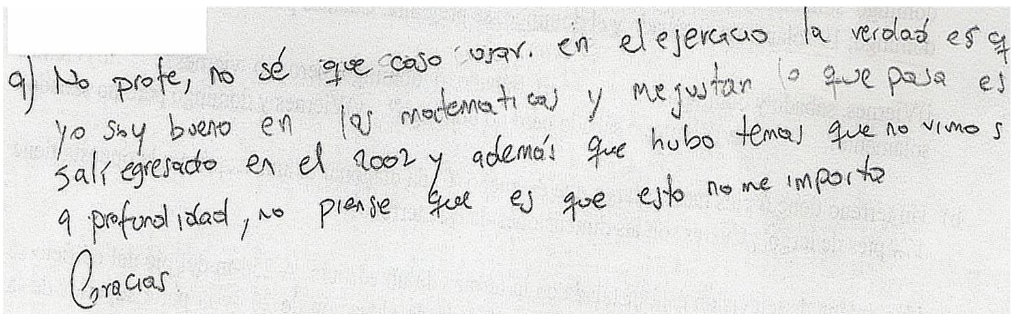
Sin embargo no se desanima, retoma nuevamente el ejercicio, ahora lo asocia de otra forma pero tampoco encuentra el factor común, lo señala y escribe “Ni idea”.



M_1 idea I a) $(27am^2+9bm^2)+(-12an^2-4bn^2)$

$ab(3m+3n$

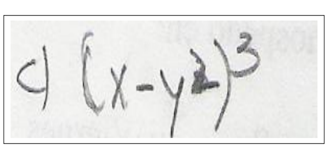
Seguramente piensa que puede hacer el ejercicio, se da cuenta que no sabe cómo realizarlo y decide escribirle a la profesora para disculparse.



9) No profe, no sé que caso usar. en el ejercicio la verdad es q
yo soy bueno en las matematicas y me gustan lo que pasa es
salí egresado en el 2002 y además que hubo temas que no vimos
a profundidad, no piense que es que esto no me importo
Gracias.

Esta actitud del estudiante de probar procedimientos mirando cuál de todos le funciona, en términos de Vygotsky equivale a una conducta impulsiva porque simplemente **responde al medio;** por lo tanto, se espera que los estudiantes universitarios en esta área del conocimiento, realicen **procedimientos que sean producto de un aprendizaje interiorizado y obviamente mediado.**

En el ejercicio Ic), factoriza el polinomio como si fuera el **cubo de un binomio,** si él después de tener ese resultado hubiera aplicado la reversibilidad se hubiese dado cuenta que no eran expresiones equivalentes; el estudiante confunde el **cubo de un binomio** con la **diferencia de cubos.**

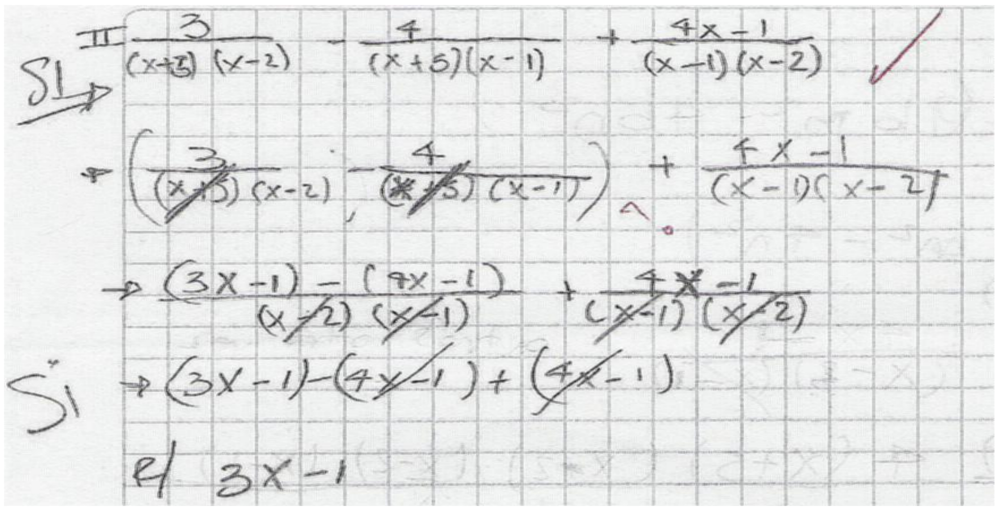


c) $(x-y^2)^3$

$(x-2y)^3 = x^3 - 6x^2.y+12.xy^2 - 8y^3$ la cual es muy diferente a:

$x^3 - y^6 = (x - y^2)(x^2+xy^2+y^4)$ Esto era lo que debía contestar

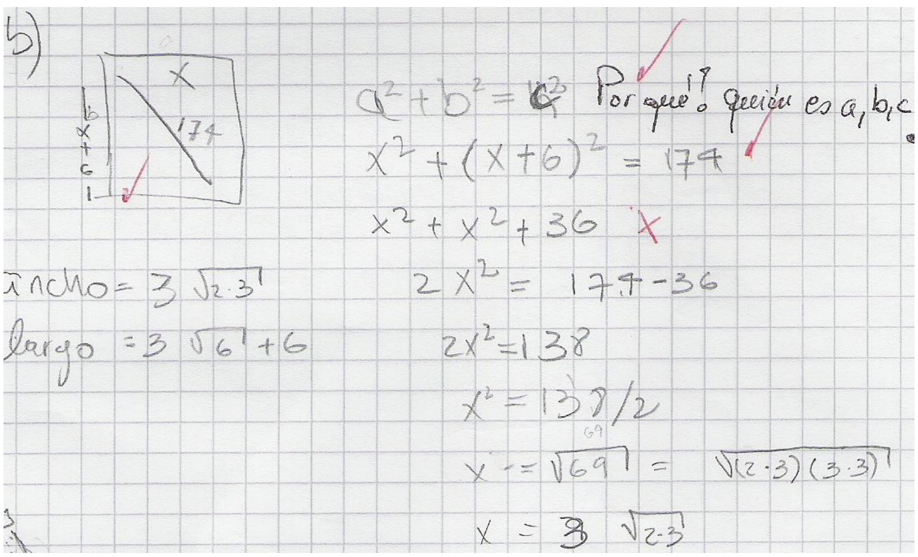
Con respecto al punto II, el estudiante hace la factorización de los denominadores en forma correcta pero en el segundo paso simplifica dos factores que figuran ambos como denominador, procedimiento que no es correcto, la **simplificación de expresiones** se realiza cuando hay multiplicación y además se requiere que la operación conduzca a fracciones equivalentes.



La simplificación se realiza en la misma fracción y se modifica tanto el numerador como el denominador; el estudiante continúa con ese error, saca común denominador para los dos primeros sumandos y luego multiplica el numerador solamente por el primer término del factor que pasa a multiplicar –otro error-, después vuelve y simplifica como antes en forma incorrecta.

Con relación a esta competencia se identifican deficiencias significativas en el manejo de **operaciones con expresiones y fracciones algebraicas y los conceptos subyacentes como factorización, operaciones básicas, aplicación de la agrupación de términos, simplificación, aplicación de propiedades en las operaciones.** Se infiere que los conceptos de álgebra no han sido asimilados en forma significativa, debido a que busca por azar desarrollar los ejercicios sin aplicarle la **reversibilidad** a cada paso dado por lo menos para confirmar la validez del mismo.

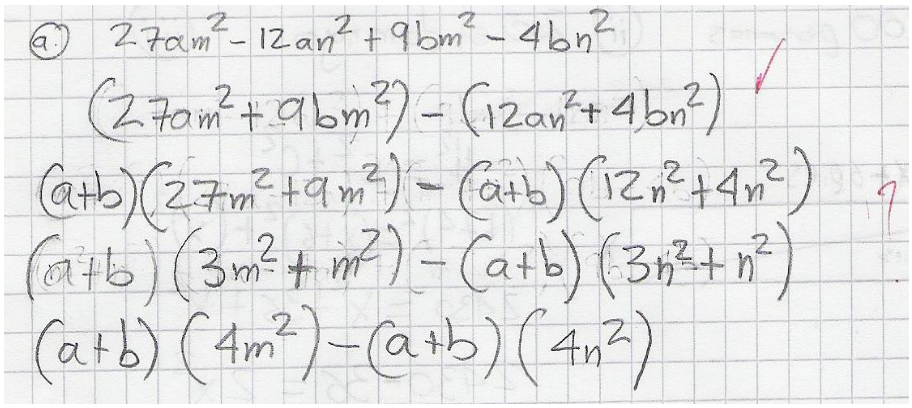
Al revisar en el mismo estudiante su competencia métrica, geométrica y con ello la referencia que tiene del **Teorema de Pitágoras**, se observa que en el ejercicio IIIb) **representa gráficamente el enunciado del problema, coloca los datos, plantea el modelo** [Teorema de Pitágoras, cabe resaltar que utiliza unas letras que no figuran en el gráfico, esto indica que él se aprendió el Teorema como si éste fuera equivalente a $a^2+b^2=c^2$] y luego **aplica en forma incorrecta el cuadrado de un binomio**, concepto relacionado con operaciones básicas sobre expresiones algebraicas.



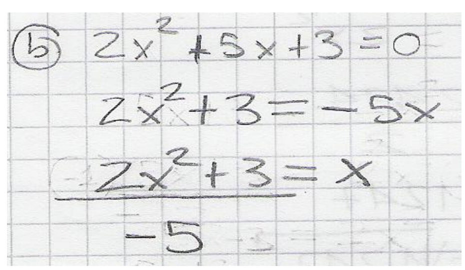
Otro detalle que se detecta en el proceso matemático de este estudiante es que hizo el despeje para x^2, simplificó la fracción 138/2 que es 69 y luego para extraerle la raíz cuadrada a este número, separó el 6 del 9, y los descompuso en factores primos y halló la raíz. Es decir hizo 69 igual a 54.

Estos desempeños muestran la gran deficiencia que tiene en el manejo de los **conceptos básicos de álgebra,** algunos de los cuales se vienen manejando paulatinamente desde 5° de primaria y si se observa el caso del 69 desde 1° donde se aprende a escribir y leer los números, a valorar la posición de las cifras y en 2° las tablas de multiplicar.

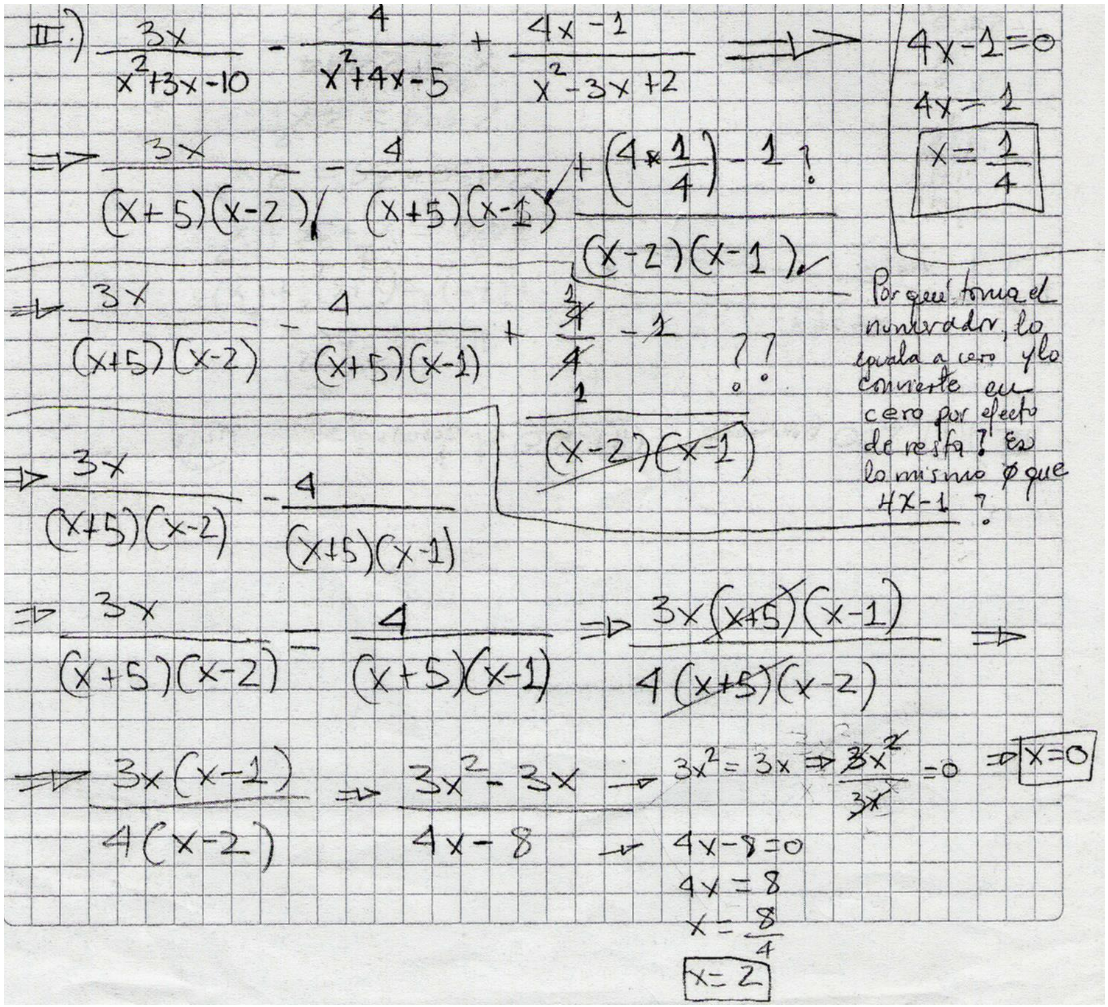
Registro Estudiante 5. Este estudiante en el ejercicio Ia) aplica la propiedad asociativa pero después a cada paréntesis le saca las mismas letras para que queden por dentro términos con la misma letra y pueda reducir; esto es totalmente incorrecto.



Al intentar factorizar el trinomio $2x^2 + 5x + 3$ presenta dos **errores conceptuales**, en principio al tomarlo como ecuación (que bien podría hallar las raíces y después expresar el producto de factores, pero aquí se ve que no es su intención) manipula en forma incorrecta la ecuación de segundo grado, despeja "x" quedando su valor con otra "x" condición que no lo hace desistir y buscar otra salida.



De los desarrollos de estos dos ejercicios, los cuales debían factorizarse, se infiere que el estudiante **no tiene la referencia de "expresar como producto de factores**" ni establece la diferencia entre **trinomio cuadrático y ecuación cuadrática,** ni sabe **cómo solucionar una ecuación cuadrática y cómo deben ser sus soluciones.**



II.) $\frac{3x}{x^2+3x-10} - \frac{4}{x^2+4x-5} + \frac{4x-1}{x^2-3x+2} \Longrightarrow$

$4x-1=0$

$4x=1$

$\boxed{x=\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow \frac{3x}{(x+5)(x-2)} - \frac{4}{(x+5)(x-1)} + \frac{\left(4 * \frac{1}{4}\right) - 1}{(x-2)(x-1)}$?

$\Rightarrow \frac{3x}{(x+5)(x-2)} - \frac{4}{(x+5)(x-1)} + \frac{\frac{4}{4} - 1}{(x-2)(x-1)}$??

Porqué toma el numerador, lo iguala a cero y lo convierte en cero por efecto de resta? Es lo mismo ϕ que $4x-1$?

$\Rightarrow \frac{3x}{(x+5)(x-2)} - \frac{4}{(x+5)(x-1)}$

$\Rightarrow \frac{3x}{(x+5)(x-2)} = \frac{4}{(x+5)(x-1)} \Rightarrow \frac{3x\cancel{(x+5)}(x-1)}{4\cancel{(x+5)}(x-2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3x(x-1)}{4(x-2)} \Rightarrow \frac{3x^2-3x}{4x-8} \rightarrow 3x^2 = 3x \Rightarrow \frac{3x^2}{3x} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

$\rightarrow 4x-8=0$

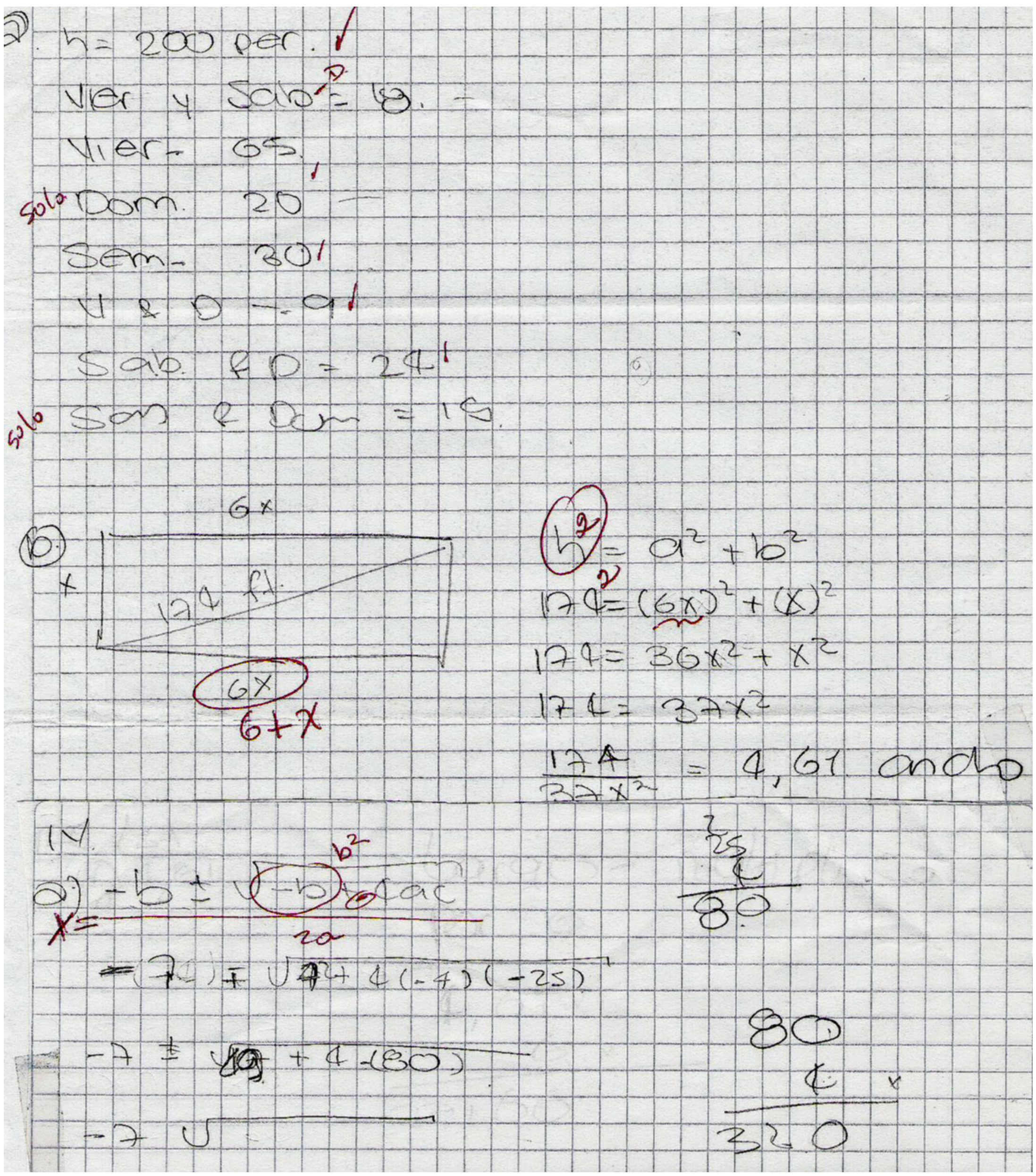
$4x=8$

$x=\frac{8}{4}$

$\boxed{x=2}$

En el punto II, asume la misma posición de tratar las expresiones –aunque lo haga incorrectamente- como si fueran ecuaciones. En el caso de la suma de fracciones algebraicas, factoriza correctamente los denominadores y luego toma el numerador de la última fracción porque contiene x, expresión que iguala a cero, despeja la variable y luego la reemplaza y lógicamente se le anula el último sumando. Trabaja después con los otros dos como si fueran iguales a cero. Hace transposición de términos y despeja variables. Se observa como lo plantea Piaget, que la organización de los conceptos los ha integrado con significado incorrecto y por lo tanto la relación que **hace no corresponde a la estructura matemática que se requiere, mezcla procedimientos, algoritmos y mueve elementos de un contexto a otro.**

Registro Estudiante 6. Este estudiante sólo revisó los puntos IIIa), b), Iva) y V‘. Se infiere que muestra dificultades importantes en el manejo de los conocimientos básicos relacionados con: **conjuntos y la aplicación de la cardinalidad, conceptos algebraicos: factorización de polinomios, operaciones con fraccionarios, aplicación de algoritmos, operaciones con expresiones algebraicas, simplificación de fracciones, relaciones reales y trigonométricas y solución de ecuaciones e inecuaciones.**


a) n = 200 per.
Vier y Sab = 18.
Vier- 65.
solo Dom. 20
Sem- 30
V & D - 9
Sab. & D = 24
solo Sem & Dom = 15.

b) 6x
x
174 ft.
6X
6+x

$h^2 = a^2 + b^2$
$174 = (6x)^2 + (x)^2$
$174 = 36x^2 + x^2$
$174 = 37x^2$
$\frac{174}{37x^2} = 4{,}61$ ancho

IV
a) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$= -(7) \pm \sqrt{49 + 4(-4)(-25)}$
$-7 \pm \sqrt{49 + 4(80)}$
$-7 \sqrt{}$

25 × 4 = 80
80 × 4 = 320

En el ejercicio IIIa) **extrae los datos del problema (en forma inexacta**) y no continúa, **no hace la representación gráfica de los conjuntos** que es de donde puede leer y dar solución a las preguntas, esto no se sabe si es porque no reconoce que se trata de un ejercicio de aplicación de la cardinalidad de un conjunto o por otra razón, no hay indicio de que hubiese empezado de alguna forma y borrado después. En el ejercicio IIIb) comete dos errores: asume la expresión "6 pies más de largo que de ancho" como 6x y luego detecta que su solución debe ser por el Teorema de Pitágoras pero **también lo aplica en forma incorrecta** "la hipotenusa es igual…", lo correcto es "el cuadrado de la hipotenusa es igual… ", igualmente en esta aplicación coloca las letras h, a y b para determinar los lados pero en el dibujo estas no aparecen. En el ejercicio Iva) reconoce que se trata de una ecuación cuadrática pero parte de una fórmula que no corresponde. Es decir, este estudiante presenta deficiencias en **diagramación de un problema según los datos del enunciado, ubicación de los datos en el gráfico, identificación de variables,** en este caso reconoció el modelo matemático que le correspondía pero lo escribió en forma incorrecta, lo cual significa que requiere ejercitarse en habilidades básicas relacionadas con la **resolución de problemas**; también muestra deficiencia en la **aplicación de la fórmula cuadrática.**

En síntesis, en esta quinta categoría: **deficiencias matemáticas en relación con conocimientos, habilidades y operaciones básicas**; se detectó a través de la prueba que en un 50% de las subcategorías analizadas, los estudiantes dejaron en *blanco* un porcentaje significativo de los pasos básicos para el desarrollo de los ejercicios o problemas dados; este hecho se destacó principalmente en los ejercicios relacionados con **lógica matemática y teoría de conjuntos** (70%), **relaciones e identidades trigonométricas** (64**%), identificación de datos y planteamiento del modelo** para resolver los problemas (55%), **reconocimiento de un número complejo** (55%), **aplicación de los algoritmos** en el desarrollo de operaciones reales (43%); así mismo se destaca que el mayor nivel de *acierto* estuvo cuando se requirió del **teorema de Pitágoras** (55%), seguido de la representación gráfica (40%) como estrategia inicial para solucionar un problema y solución de inecuaciones lineales (38%) e igualmente se resalta que el mayor nivel de ***desacierto*** o, de desarrollos calificados como incorrectos o, fallas y deficiencias significativas están relacionadas con los conocimientos sobre **relaciones reales** (62%), **solución de ecuaciones lineales y cuadráticas** (48%), **aplicación de algoritmos** (39%), con las habilidades que se requieren para **representar gráficamente un problema** (39%) y también con el manejo de **operaciones algebraicas** (29%).

Al contrastar los resultados obtenidos en cada subcategoría con el estudio a profundidad realizado al proceso seguido en el desarrollo de algunos ejercicios de la prueba se puede inferir que aquéllos estudiantes que traen ***los procesos, conocimientos y habilidades básicos*** y que además están **contextualizados,** no presentarán dificultades significativas para los nuevos aprendizajes debido a que presentan **suficiencia** en los elementos teóricos que fundamentan el avance del álgebra y geometría elementales al cálculo. **Reconocen** el campo del ejercicio del álgebra, la aritmética, la geometría, la trigonometría**,** poseen las **habilidades** para enfrentar y solucionar un problema de forma analítica con el modelo correspondiente y **operan** numérica y algebraicamente con la aplicación correcta de los algoritmos; es decir llegan a la universidad con la **información básica requerida** para acceder a las nuevas temáticas. Estos estudiantes en términos de Piaget, aplican la lógica y el razonamiento de tal forma que muestran no sólo que se encuentran en la etapa de las operaciones formales sino que poseen un pensamiento formal, pues manejan sistemas de referencia, operaciones y gráficas a nivel abstracto, aplican la reversibilidad porque dan cuenta de lo que hacen, cuentan con una organización mental bien estructurada de los conocimientos matemáticos que poseen; esta condición desafortunadamente no es la que se encuentra en la gran mayoría de los estudiantes que participaron en la investigación.

En general, de los resultados obtenidos se observa que los estudiantes presentan deficiencias en ***los requisitos mínimos para aprender matemáticas*** **como son:** ***retención y memorización*** relacionada en la prueba con el hecho de tener que recordar las reglas para **factorizar polinomios, elevar un binomio a una potencia dada, operar con expresiones y fracciones numéricas y algebraicas.** ***Empleo de algoritmos*** considerados como los procedimientos para efectuar operaciones lo que les permite realizar cálculos complicados a partir de las propiedades elementales. ***Aprendizaje de conceptos*** los cuales estaban relacionados en la prueba con la **identificación y manejo de operaciones básicas en los Reales, definición de relaciones e identidades trigonométricas.** Finalmente, ***resolución de*** *problemas,* habilidad que se referenciaba en las subcategorías **identificación de datos, identificación de variables y planteamiento del modelo,** aspectos en los cuales los estudiantes mostraron deficiencias tanto para diagramar el problema, relacionar datos conocidos y desconocidos como para definir el modelo matemático apropiado que condujera a su solución.

De igual forma el estudio muestra que los estudiantes no se sienten bien con sus resultados en esta área del conocimiento e identifican una serie de temáticas que debieron ser bien desarrolladas en el bachillerato y de las cuales consideran ellos que tienen serios vacíos; lo expresado por ellos concuerda con las deficiencias identificadas en la prueba aplicada.

Algunos reconocen su responsabilidad en su propio aprendizaje; otros señalan al profesor como principal responsable de su acción en el aula, del nivel de profundización o del grado de motivación hacia la materia; también identifican algunas razones por las cuales la matemática es importante en su ejercicio profesional como ingenieros. Tanto estudiantes como profesores son conscientes que el trabajo matemático desarrollado en el bachillerato tiene influencia significativa en futuros cursos de matemáticas; algunas respuestas indican que los profesores de Matemática no lograron despertar interés por esta asignatura al no cambiar el estilo de enseñanza y también surgieron algunas inquietudes como por ejemplo, la no coherencia entre el modelo de evaluación del colegio y la universidad, el tiempo con que debe contar un estudiante para abordar las asignaturas de su respectivo semestre, exigiéndole organización y racionalización del tiempo, aunque reconocen que se requiere un desarrollo intelectual adecuado que les facilite el aprendizaje de las temáticas.

La información obtenida corrobora lo hallado en el "Estudio cualitativo de Escuelas con resultados destacables" con relación a la influencia de factores como: actitud comprometida y creativa de los profesores con su labor docente, el manejo adecuado del tiempo, la actitud de automotivación de los estudiantes, la organización de los contenidos, inicio temático sobre el reconocimiento de presaberes y el avance solamente cuando ocurre el aprendizaje.

CONCLUSIONES

Los fundamentos matemáticos que los estudiantes adquieren en los ciclos educativos de Básica y Media se constituyen en un factor cognoscitivo fundamental para el aprendizaje del Cálculo Diferencial en la Universidad en términos de contenidos conceptuales, habilidades y operaciones, así como los factores socio-afectivos, dado que son elementos que les permiten establecer generalizaciones, abstracciones, aplicaciones y generar actitudes positivas para lograr eficiencia en su desempeño, acorde con las exigencias de las instituciones de Educación Superior. Tanto estudiantes como profesores reconocen la importancia y el papel que desempeña el dominio de los conocimientos básicos, el desarrollo de habilidades y operaciones matemáticas para enfrentarse con éxito a las tareas relacionadas con el aprendizaje del Cálculo Diferencial.

Los hallazgos reportados en el capítulo anterior permiten concluir que los estudiantes tienen una auto-percepción negativa en relación con el dominio que poseen de los conceptos básicos de la Matemática requeridos para el aprendizaje del Cálculo Diferencial, lo que atribuyen a factores que dependen por un lado, de ellos mismos como la falta de estudio, la desconcentración, la falta de metodología de estudio y de otro, a factores externos como el tiempo, la deficiente preparación brindada por los colegios y especialmente a las políticas educativas relacionadas con las formas de evaluación en las instituciones de Básica y media las que no son coherentes con la evaluación realizada en la Universidad.

Para los estudiantes es muy importante el papel que desempeña el profesor, quien se constituye en la mayor fuente de experiencias positivas o negativas en el aprendizaje de la Matemática. Se da un gran valor a la metodología que utiliza y reconocen que la parte actitudinal y afectiva del profesor así como el compromiso asumido frente a su asignatura y a sus estudiantes, es fundamental.

El “sentir hacia la Matemática” es un elemento que genera actitudes de aceptación o rechazo, motivación, interés y gusto o desmotivación, desinterés o disgusto, lo que a su vez les permite “aproximarse” o “retirarse” del objeto aceptado o rechazado, como es en este caso la Matemática. Los estudiantes “sienten” que las actitudes, motivaciones y autoimagen que han generado desde el colegio se han constituido en factores determinantes de su competencia matemática; de ahí la importancia dada al aspecto afectivo.

Vale la pena resaltar el hecho de que las percepciones tanto de estudiantes como de profesores en relación con las deficiencias matemáticas, fueron coherentes con los resultados de la prueba aplicada, la cual detectó vacíos en la retención y memorización de reglas; en operaciones con expresiones y fracciones numéricas y algebraicas; empleo de algoritmos (procedimientos para efectuar operaciones a partir de propiedades elementales); identificación y manejo de propiedades elementales); identificación y manejo de operaciones básicas en los reales; definición de relaciones e identidades trigonométricas; diagramación de un problema, identificación de datos y de variables, planteamiento del modelo (relacionar datos conocidos/desconocidos). Los estudiantes muestran una marcada tendencia a cometer errores similares relacionados con el manejo de las operaciones básicas entre expresiones numéricas y algebraicas, así como también en el planteamiento y solución de problemas, dado que no aplicaron adecuadamente las propiedades de las operaciones en los Reales, mezclaron algoritmos, no recordaron reglas precisas, identificaron y ubicaron de forma inapropiada los datos o variables relacionados en los problemas, confundieron los modelos matemáticos y a nivel socioafectivo se captó principalmente, desatención y poca recursividad en tanto que no aplicaron la propiedad de la reversibilidad para confirmar sus propios resultados.

Estos resultados se constituyen en insumos que permiten retroalimentar a los programas de ingeniería y especialmente al Departamento de Matemática, para que diseñe e implemente alternativas curriculares que propendan por la calidad académica en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática en la Universidad.

RECOMENDACIONES

- Con miras a lograr sus propósitos de formación y ante la realidad encontrada en relación con el bajo dominio de los conocimientos previos en matemática de los estudiantes que ingresan a los programas de ingeniería, la Universidad Autónoma de Bucaramanga en cabeza de la Escuela de Ingeniería, tiene el compromiso de revisar la actual estructura curricular para el área cuántica y considerar la posibilidad de ofrecer en el primer semestre un curso de precálculo de tal forma que los cursos de Cálculo se inicien a partir del segundo semestre.

- Es conveniente que el Departamento de Matemática de la Escuela de Ingeniería de la UNAB, genere espacios de reflexión al interior del colectivo de docentes sobre la metodología de enseñanza que se está aplicando, para que los estudiantes que ingresan a la universidad encuentren caminos que favorezcan la adquisición con significado de los nuevos aprendizajes matemáticos, en un ejercicio que mantenga el rigor conceptual y a su vez, se desarrolle la vida académica en un ambiente de crecimiento del estudiante en todas sus dimensiones.

- Se hace necesario que los docentes de Cálculo Diferencial, a partir de la conciencia que tienen de la condición de los estudiantes con relación a las deficiencias en matemáticas, modifiquen sus estrategias de enseñanza y dediquen un mayor espacio de tiempo al reconocimiento de fortalezas y debilidades para ofrecerles posteriormente alternativas de mejoramiento de forma tal que asuman su rol de mediadores en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Los resultados obtenidos en esta investigación se pueden constituir en la primera fase de una gran investigación realizada por el colectivo de profesores de Cálculo Diferencial, la cual ha de apuntar a generar una propuesta de investigación-acción que permita intervenir sobre la realidad para modificarla y mejorarla. Algunas estrategias que podrían ser tenidas en cuenta según lo indagado son las siguientes:

- Plantear proyectos de aula, que impliquen el análisis de situaciones con diferentes grados de dificultad, bajo la metodología de aprendizaje basado en problemas.

- Proponer una situación sencilla relacionada con conceptos básicos en cada clase o una por semana, de tal modo que los estudiantes hagan la práctica de identificar datos, variables, conceptos principales y secundarios, teoremas, operaciones y propiedades.

- Proponer actividades complementarias a las temáticas desarrolladas para que los estudiantes fortalezcan el aprendizaje y tengan más elementos teórico-prácticos en los cuales puedan apoyarse para su estudio.

- Invitar a alguna(s) de las sesiones de clase de Cálculo (durante el semestre) a los profesores de las asignaturas del área profesional que utilizan determinados conceptos matemáticos, para que a partir de su experiencia, los estudiantes visualicen la utilidad de aprender con solidez contenidos conceptuales y procedimentales.

- Proponer ejercicios básicos que promuevan la interpretación, el análisis, la síntesis y una posición crítica, mediante el desarrollo de las temáticas sobre el reconocimiento de los preconceptos; preguntas que inciten al estudiante a la conceptualización; contraste de los elementos teóricos en diferentes fuentes; la puesta en escena de ejemplos de la vida cotidiana donde se vea la aplicabilidad de los conceptos; la generación de espacios para la discusión y elaboración de conclusiones.

- Utilizar medios tecnológicos de tal modo que el estudiante trabaje la imaginación y la creatividad, mediante el desarrollo de algunos temas con material novedoso que invite al estudiante a proponer nuevos materiales; la generación de espacios para que los estudiantes diseñen materiales, mapas conceptuales, síntesis, gráficos, etc., que expliquen o sustenten los conceptos trabajados; organizar encuentros académicos como por ejemplo, concursos internos entre los estudiantes de los diferentes cursos de la misma asignatura, desarrollo de las pruebas que han sido aplicadas en las olimpiadas matemáticas en otras universidades o en los exámenes ECAES con el fin de que se complemente el trabajo de clase y mantengan presentes los conceptos desarrollados en los otros cursos de Cálculo.

- Fomentar el hábito por la lectura mediante actividades como revisión de antecedentes históricos de los principales conceptos matemáticos que se desarrollan en el curso; generación de espacios donde el estudiante reconozca la simbología matemática y su significado según el contexto; asignación a un estudiante por tema para que haga lectura previa del contenido y lo presente en clase, indicando la bibliografía abordada así como los conceptos comprendidos y no comprendidos.

- Aprovechar los talentos que favorezcan el enriquecimiento conceptual del grupo, de tal modo que esos estudiantes que se destacan colaboren con aquéllos estudiantes que presentan dificultades y así colaborar con su proceso de desarrollo, lo que puede optimizar su Zona de Desarrollo Próximo.

- Generar al interior del Departamento de Matemática nuevos temas de investigación que conlleven al mejoramiento de la enseñanza de las diferentes asignaturas de esta área; que responda por ejemplo a las siguientes preguntas:

♦ ¿Qué actividades de aula contribuirían a aprendizajes significativos de los estudiantes de la Unab en Matemática, como respuesta a las inquietudes del joven actual?.

- ¿Qué sentimientos de los estudiantes influyen significativamente en el aprendizaje de la matemática?

- ¿Qué manifestaciones de los estudiantes de V nivel de la UNAB indican madurez conceptual en matemática, como resultado de su proceso de aprendizaje a través de las diferentes asignaturas del área?

- ¿Existe diferencia significativa en el abordaje de conocimientos matemáticos entre los estudiantes de I y II nivel de Ingeniería y de otros Programas de la Unab?.

BIBLIOGRAFÍA

ARANCIBIA, Violeta; HERRERA, Paulina y STRASSER, Katherine. Psicología de la Educación. 2 ed. México: Alfaomega, 2001. 277 p.

AUSUBEL, D.P. The psychology of meaningful verbal learning. New York: Gruneand Stratton,

AUSUBEL, D., NOVAK, J y HANESUAN, H. Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. 2 ed. México: Trillas, 1983. 623 p.

AZCÁRATE, Pilar. Metodología de Enseñanza. En : Cuadernos de Pedagogía. No. 276. Valencia : Fontalba, 1999. 101 p.

BELTRAN, Y. El desarrollo moral y la formación universitaria. En: XVI Reunión Nacional de Facultades de Ingeniería. Educación en Ingeniería. ¿Cómo hacerla?. Cartagena, 1996. Bogotá: Acofi, 1996.

BLACKER, Emma. Nuevo sistema para el aprendizaje de la Matemática. [online]. (Perú): Sector Matemática. 2002. Disponible en WWW: <http://www.mat.uson.mx/semana/Memorias/ruth.html>

BONILLA, Elssy y RODRÍGUEZ, Penélope. Más allá del dilema de los métodos. Bogotá : Presencia, 1997. 220 p.

CAMACHO, I y DE LA OSSA, D. Propuesta de Investigación: Identificación de habilidades en el área de matemáticas de los estudiantes que ingresan a primer semestre en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Caribe para el diseño y creación de un software multimedia de nivelación [online]. (Colombia): UAC, dic. 2003. Disponible en WWW: <http://investigaciones.uac.edu.co>.

CAÑÓN B., Julio E. Acompañamiento en el Aula: Experimento de lo Simple a lo Complejo. En : REUNIÓN NACIONAL DE FACULTADES DE INGENIERÍA. (XXIII : 2003 : Cartagena). La dimensión social en las Facultades de Ingeniería, Bogotá : ACOFI , 2003. Tomo I.

CARRETERO, Mario. Constructivismo y educación. México: Progreso, 1997.144 p.

CASE, Robbie. El desarrollo intelectual del nacimiento a la edad madura. Cognición y desarrollo humano. España: Paidós, 1989. 538 p.

CASTORINA, J. y PALAU, G. Introducción a la lógica operatoria de Piaget. Barcelona: Paidós, 1981.

COLL, César. Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento. Argentina: Paidós, 1991. 208 p.

DE BONO, Edward. El pensamiento lateral. Manual de Creatividad. 3 ed. Barcelona: Paidós, 1993. 320 p

DEIROS, Beatriz, CALDERÓN, Margarita y HERNÁNDEZ, Lourdes. [online]. Apuntes sobre didáctica de la matemática para ingeniería. (oct. 2004). Disponible en WWW: <www.monografias.com/trabajos11/monogrr/monogrr.shtml>

DELORS, J. La educación encierra un tesoro. México: UNESCO, 1997.

FIERRO, C;. FORTOUL, B. y ROSAS, L. Transformando la práctica docente. México: Maestros y Enseñanza, Paidos, 1999. 248 p.

FLAVELL, John H. La psicología evolutiva de Jean Piaget. México: Paidós. Traducción Marie Therese Cevasco, 1995. 485 p.

GALEANO M., María E. y VÉLEZ R., Olga L. Estado del arte sobre fuentes documentales en investigación cualitativa. Medellín: Universidad de Antioquia, 2002.

GARDNER, Howard. Estructuras de la mente. La teoría de las inteligencias múltiples. 2 ed. México: Fondo de Cultura Económica, 1993. 448 p.

GARZÓN, Ana Josefina, LÓPEZ, Gladys Carmenza. La aplicación de la matemática al campo de la contaduría Pública. Diagnóstico y análisis del proceso enseñanza-aprendizaje. En : II Simposio de Investigación y Actividades Investigativas Año 2001. Bogotá: Unisalle (sep. 2001).

GÓMEZ, Pedro. Educación Matemática en Colombia. [online]. Bogotá : Comité Interamericano de Educación Matemática. En : Boletín informativo No. 2 (sep. 1994). Disponible en WWW: http://www.furb.br/ciaem/boletins/1994_setembro.html

GROSS, Richard D. La ciencia de la mente y la conducta. 2 ed. México: El Manual Moderno, 1998. 996 p.

GUERRERO USEDA, María Eugenia. Resolución de problemas y laboratorios: Estrategias para formar ingenieros con perfil investigativo. En : REUNIÓN NACIONAL DE FACULTADES DE INGENIERÍA. (XXIII : 2003 : Cartagena). La dimensión social en las Facultades de Ingeniería, Bogotá : ACOFI , 2003. Tomo II.

HERNÁNDEZ, José; DUQUEM, Mauricio y BELTRÁN, Elsa María. ,La Proyección Social de los Estudiantes de Ingeniería: Contribuciones a la Educación Básica en Ciencias. En : REUNIÓN NACIONAL DE FACULTADES DE INGENIERÍA.

(XXIII : 2003 : Cartagena). La dimensión social en las Facultades de Ingeniería, Bogotá : ACOFI , 2003. Tomo II.

KILPATRICK, Jeremy; GÓMEZ, Pedro y RICO, Luis. “Educación Matemática. errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia". México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

KORTHAGEN, Fred y KESSELS, Jos. Linking theory and practice: Chancing the pedagogy of teacher education. En : Educational Research. Vol. 28, No .4 (may. 1999).

LÓPEZ RODRÍGUEZ, Edgar. Las Ciencias Básicas y sus Deficiencias en el Ciclo Básico. En : REUNIÓN NACIONAL DE FACULTADES DE INGENIERÍA. (XXIII : 2003 : Cartagena). Educación en Ingeniería, ¿Cómo hacerla?. Bogotá : ACOFI , 2003.

LURIA, A.R, LEONTIEV, A.N. y VYGOTSKY, L.S. Psicología y Pedagogía. Madrid: Akal, 1986. 320 p.

MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. (2003) ECAES 2003. Resultados de la Evaluación en Colombia. En: Revolución Educativa, Colombia Aprende. Bogotá: Icfes, 2003.

_______. ¿Qué evalúan las pruebas?. En: Revolución Educativa, Colombia Aprende. Bogotá: Icfes, 2003

________. SABER 2002-2003. Resultados de la Evaluación en Colombia. En: Revolución Educativa, Colombia Aprende. Bogotá: Icfes, 2003

_______. Matemáticas. Lineamientos curriculares. 1998. Bogotá: MEN.

MONEREO, C. Estrategias de Enseñanza y Aprendizaje. Barcelona: Graó, 1998

MORENO, A. Luis y WALDEGG, Guillermina. Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. En : Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Año 2001. Bogotá: MEN (dic. 2001), 335p.

NOVAK, J. y GOWIN, B. Aprendiendo a Aprender. Barcelona: Marínez Roca, 1988.

ORTON, A. Didáctica de las Matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula. Madrid: Morata, 1990.

PIAGET, Jean. Introducción a la epistemología genética. Tomo1. El pensamiento matemático. México: Paidós, 1991, Col. Psicología evolutiva. Trad. María Teresa Cevasco y Víctor Fischman. 315 p.

_______. Psicología y epistemología. México: Artemisa, 1986. Col. Obras Maestras del pensamiento Contemporáneo. trad. Francisco J. Fernández Buey. 192 p.

_______. El Estructuralismo. Buenos Aires: Proteo, 1968.

________. Estudios de psicología genética. Buenos Aires: Emercé. 1973.

________ et al. Los estadios en la psicología del niño. Buenos Aires: Nueva Visión. 1971.

________. Seis estudios de psicología. 2 ed. Barcelona: Seix Barral. 1968. 227 p.

________ y INHELDER, B. Psicología del niño. 8 ed. Madrid: Morata, 1978.

PAPALIA, Diane; WENDKOS, Sally y DUSKIN, Ruth. Desarrollo Humano. 8 ed. Bogotá : McGraw-Hill, 2001. 800 p.

PERALES PALACIOS, Francisco y CAÑAL DE LEÓN, Pedro. Didáctica de las ciencias experimentales: Teoría y práctica de la enseñanza de las ciencias. España: Marfil, 2000. 365 p.

PELUFFO SUÁREZ, Gladys. La resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje significativo de los conceptos densidad, masa y volumen por los y las estudiantes de educación media. Bucaramanga, 2000. Tesis (Maestría en Pedagogía). Universidad Industrial de Santander. Escuela de Educación.

PIMM, D. El lenguaje matemático en el aula. Madrid : Morata, 1999. 303 p.

PORCEL, Eduardo y RAMÍREZ, María Gloria. Determinación y análisis de las principales deficiencias en la identificación de números pertenecientes a los distintos conjuntos numéricos: N, Z, Q, I o R, en alumnos ingresantes a FACENA en 2001. [online]. Corrientes (Argentina): UNNE, (sep. 2002). Disponible en WWW: <http://www.unne.edu.ar/cyt/2002/09-Educacion/D-011.html>.

POZO, Juan Ignacio. Aprendices y maestros. Madrid: Alianza, 1996

________. La Psicología Cognitiva y la Educación Científica. Madrid: Universidad Autónoma de Madrid. 2001.

RICHMOND, P. Introducción a Piaget. 2 ed. Madrid: Fundamentos, Madrid. 1972. 158 p.

RIVERA, Ruth Elba et al. Estudio del dominio del lenguaje algebraico que prevalece entre alumnos de nuevo ingreso, a la Universidad Autónoma de Baja California−Instituto Tecnológico de Mexicali. [online]. Mexicali (México): UABC, dic. 2003. Disponible en WWW: http://www.mat.uson.mx/semana/Memorias/ruth.html.

ROMO PEDRAZA, Abel. El enfoque sociocultural del aprendizaje de Vygotsky. [online]. México. En: Monografías.com (marzo 22, 2002). Disponible en WWW: <http://www.monografias.com/trabajos10/gotsky/gotsky.shtml>.

SANCHEZ HUETE, J. y FERNANDEZ BRAVO, J. La enseñanza de la matemática: Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas. Alcalá: CCS, 2003.

STEWART, J. Cálculo Multivariable. 4 ed. México: Thomson, 2002. 1151 p.

STILLINGS, Neil. Cognitive Science: an introduction. 2 ed. Cambridge: Press, 1995. 530 p.

STERNBERG, Beyond. Principles of Teaching for Successful Intelligence. En: Educational Psychologist, 1998.

VASCO, Carlos E. El papel del lenguaje en la construcción de las Matemáticas. En : SIMPOSIO LATINOAMERICANO DE DIDÁCTICA DE LAS DISCIPLINAS DE LA EDUCACIÓN BÁSICA. (1996 : Bogotá). La Didáctica de las disciplinas en la Educación Básica. Bogotá: Universidad Externado de Colombia, 1997. 198p.

UNESCO. Estudio cualitativo de escuelas con resultados destacables en siete países latinoamericanos. Santiago de Chile: Unesco, (sep. 2002).

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BUCARAMANGA. Proyecto Educativo Institucional. Bucaramanga : UNAB, 1999.

________. Documentos Institucionales. Resolución 243. UNAB: Bucaramanga.

________. [online]. (Marzo, 2004). Disponible en WWW: <http://www.unab.edu.co>.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA. Documento del Estado del Arte: Estudio de la deserción estudiantil en la educación en Colombia. Bogotá: UNC, 2002. 93p.

VYGOTSKY, L. S. Pensamiento y lenguaje, Buenos Aires: Pléyade, 1985.

Anexo A. Prueba de reconocimiento de conceptos de precálculo

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BUCARAMANGA- DIV. INGENIERÍAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y CIENCIAS NATURALES

RECONOCIMIENTO DE CONCEPTOS DE PRECÁLCULO

NOMBRE ___________________ CÓDIGO:_________ GRUPO: ___ Enero ___/2004

I- FACTORIZAR COMPLETAMENTE:

a) $27am^2 - 12an^2 + 9bm^2 - 4bn^2$ b) $2x^2 + 5x + 3$ c) $x^3 - y^6$

II- SIMPLIFICAR: $\dfrac{3x}{x^2 + 3x - 10} - \dfrac{4}{x^2 + 4x - 5} + \dfrac{4x - 1}{x^2 - 3x + 2}$

III- SOLUCIONAR LAS SIGUIENTES SITUACIONES MATEMÁTICAS

a) En un hotel de la ciudad se hospedaron el fin de semana 200 personas. El administrador reportó los datos así: El viernes y sábado pero no el domingo hospedó 18, hospedó 65 el viernes; 20 el domingo solamente; 30 entre semana; 9 el viernes y el domingo; 24 hospedó el sábado y el domingo; 19 solamente el sábado y el domingo, se pregunta: Cuántas personas hospedó en:

i)Viernes, sábado y domingo? ii) Sábado o domingo pero no viernes? iii)Viernes solamente? iv)Viernes o sábado pero no domingo? v)Viernes y domingo pero no sábado?

b) Un terreno tiene 6 pies más de largo que de ancho. Cada diagonal de una esquina a la opuesta tiene 174 pies de largo. ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?

c) Una antena de televisión está instalada en la terraza de un edificio. A 254 m del pie del edificio se observa la parte superior del edificio con un ángulo de elevación de 20° y la parte superior de la antena con un ángulo de elevación de 24°. Calcular la altura de la antena.

d) Dos remolcadores que están separados 120 pies tiran de una barcaza. Si la longitud de un cable es de 212 pies y la del otro es de 230 pies, determinar cuál es el ángulo que forman los cables.

IV- RESOLVER

a) $-4x^2 + 7x - 25 = 0$ b) $(5x - 3)/4 \quad \leq (2x - 1)/5 \; > \; x - 9$

V- COLOCAR EN EL PARENTESIS, EL NUMERO DE LA IZQUIERDA, QUE RELACIONE LOS ENUNCIADOS DADOS.

1. Relación real	( ) Puntos en el plano cartesiano
2. Análisis de los valores de y	( ) Eje de las abscisas
3. Subconjunto de un producto cartesiano, en el que sus parejas ordenadas cumplen una condición	( ) Cuando x ó y hacen parte de un radical
4. Cuando x ó y hacen parte del denominador de una fracción	( ) Procedimiento para hallar el rango
5. Parejas de números reales	( ) Puntos en el espacio tridimensional
6. Eje X	( ) Relación
7. Reales y puntos de una recta	( ) Ecuación con una incógnita
8. Valores de la variable independiente	( ) Correspondencia uno a uno
9. El subradical se hace mayor o igual a cero	( ) Se iguala a cero
10. Análisis de los valores de x	( ) Procedimiento para hallar el dominio
	( ) Dominio de una relación
	( ) $x^2+y^2=4$
	( ) Eje de las ordenadas

Anexo B. Prueba piloto para el reconocimiento de conceptos de precálculo

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BUCARAMANGA- DIV. INGENIERÍAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y CIENCIAS NATURALES

RECONOCIMIENTO DE CONCEPTOS DE PRECÁLCULO

NOMBRE __________________ CÓDIGO:_________ GRUPO: ___ Enero ___/2004

I- FACTORIZAR COMPLETAMENTE:

a) $27am^2 - 12an^2 + 9bm^2 - 4bn^2$ b) $x^2 - 16$ c) $2x^2 + 5x + 3$

d) $x^3 - y^6$ e) $x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 8x - 8$

II- SIMPLIFICAR: $\dfrac{3x}{x^2 + 3x - 10} - \dfrac{4}{x^2 + 4x - 5} + \dfrac{4x - 1}{x^2 - 3x + 2}$

III- SOLUCIONAR LAS SIGUIENTES SITUACIONES MATEMÁTICAS

a) un hotel de la ciudad se hospedaron el fin de semana 200 personas. El administrador reportó los datos así: El viernes y sábado pero no el domingo hospedó 18, hospedó 65 el viernes; 20 el domingo solamente; 30 entre semana; 9 el viernes y el domingo; 24 hospedó el sábado y el domingo; 19 solamente el sábado y el domingo, se pregunta: Cuántas personas hospedó en:

   i)Viernes, sábado y domingo? ii) Sábado o domingo pero no viernes?
   iii)Viernes solamente? iv)Viernes o sábado pero no domingo?
   v)Viernes y domingo pero no sábado?

b) Un grifo que arroja 100 litros por minuto llena una piscina en 7 horas 12 min. ¿Qué cantidad de agua debe arrojar el grifo por minuto para llenar la piscina en 12 horas?

c) Las dimensiones de una piscina son: 25 m de largo, 12 m de ancho y 1,5m de profundidad. ¿Cuántos m^3 de agua contiene la piscina si sólo se encuentra llena hasta la mitad?

d) Un terreno tiene 6 pies más de largo que de ancho. Cada diagonal de una esquina a la opuesta tiene 174 pies de largo. ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?

e) Una antena de televisión está instalada en la terraza de un edificio. A 254 m del pie del edificio se observa la parte superior del edificio con un ángulo de elevación de 20° y la parte superior de la antena con un ángulo de elevación de 24°. Calcular la altura de la antena.

f) Dos remolcadores que están separados 120 pies tiran de una barcaza. Si la longitud de un cable es de 212 pies y la del otro es de 230 pies, determinar cuál es el ángulo que forman los cables.

IV- RESOLVER

a) $-4x^2 + 7x - 25 = 0$ b) $(5x - 3)/4 \leq (2x - 1)/5 > x - 9$

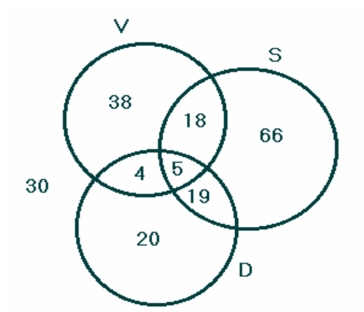
V- COLOCAR EN EL PARENTESIS, EL NUMERO DE LA IZQUIERDA, QUE RELACIONE LOS ENUNCIADOS DADOS.

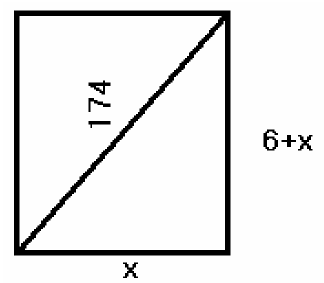
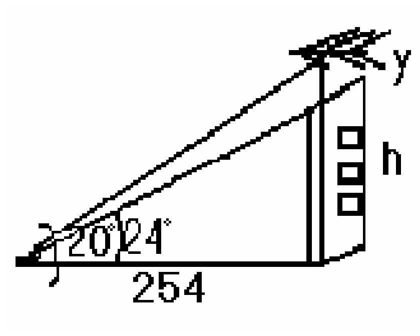
1. Relación real	( ) Puntos en el plano cartesiano
2. Subconjunto de un producto cartesiano, en el que sus parejas ordenadas cumplen Una condición	( ) Cuando x ó y hacen parte de un radical
3. Parejas de números reales	( ) Relación
4. Valores de la variable independiente	( )) Correspondencia uno a uno
5. Análisis de los valores de x	( ) Procedimiento para hallar el Dominio
	( ) Dominio de una relación
	( ) $x^2+y^2=4$

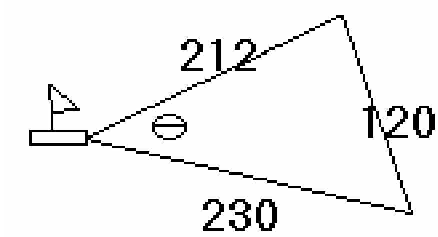
Anexo C. Desarrollo de la prueba de reconocimiento de conceptos de precálculo, señalización de conceptos y elementos del proceso

PROPUESTA Y DESARROLLO	CONCEPTO, HABILIDAD, OPERACIÓN	SIGLA	PREGUNTA
I- FACTORIZAR COMPLETAMENTE	*Proceso que consiste en expresar como producto una expresión algebraica.*		
a) $27am^2 - 12an^2 + 9bm^2 - 4bn^2$	1. Reconocimiento de caso: Factorización de un polinomio por agrupación de términos.	FACT	Ia1
$(27am^2 + 9bm^2) – (12an^2 + 4bn^2)$	2. Aplicación de propiedad asociativa de la suma en los Reales.	PROP ALGE	Ia2
$9m^2(3a + b) – 4n^2(3a + b)$	3. Aplicación de caso de factorización: un término como factor común.	FACT ALGE	Ia3
$(3a+b)(9m^2 - 4n^2)$	4. Aplicación de caso de factorización: paréntesis como factor común.	FACT ALGE	Ia4
$(3a+b)(3m – 2n)(3m + 2n)$	5. Aplicación de caso de factorización: diferencia de cuadrados.	FACT ALGE	Ia5
b) $2x^2 + 5x + 3$	1. Reconocimiento de caso: Factorización de un polinomio de la forma ax^2+bx+c	FACT	Ib1
$\frac{(2x+3)(2x+2)}{2}$	2. Factorización	FACT ALGE	Ib2
	3. Identificación de operación para simplificar	FRAC	Ib3

PROPUESTA Y DESARROLLO	CONCEPTO, HABILIDAD, OPERACIÓN	SIGLA	PREGUNTA
$(2x+3)(x+1)$	4.Simplificación	ALGE ALGO	Ib4
c) $x^3 – y^6$	1. Reconocimiento de caso: Factorización de un polinomio que es una diferencia de cubos.	FACT	Ic1
$(x-y^2)(x^2+xy^2+y^4)$	2. Factorización	FACT ALGE	Ic2
II- SIMPLIFICAR $\frac{3x}{x^2+3x-10} - \frac{4}{x^2+4x-5} + \frac{4x-1}{x^2-3x+2}$	*Proceso que conlleva a reducir una expresión a su forma más simple. Se da una suma de fracciones algebraicas con diferente denominador.*		
$\frac{3x}{(x+5)(x-2)} - \frac{4}{(x+5)(x-1)} + \frac{4x-1}{(x-2)(x-1)}$	1. Factorización de denominadores	FACT ALGE	II1
$(x+5)(x-2)(x-1)$	2. Identificación del común denominador	FRAC	II2
$\frac{3x\ (x-1) - 4(x-2) + (4x-1)(x+5)}{(x+5)(x-2)(x-1)}$	3. Realización de la suma	FRAC ALGE ALGO	II3
$\frac{3x^2-3x - 4x + 8 + 4x^2 + 20x - x - 5}{(x+5)(x-2)(x-1)}$	4. Aplicación de la propiedad distributiva	PROP ALGE ALGO	II4
$\frac{7x^2+12x+3}{(x+5)(x-2)(x-1)}$	5. Reducción de términos semejantes	ALGE ALGO	II5
III- SOLUCIONAR LAS SIGUIENTES SITUACIONES MATEMÁTICAS	*Una situación matemática se resuelve siguiendo el proceso: comprender el problema, dibujarlo en un diagrama si es posible, introducirle notaciones, plantear el modelo y solucionarlo.*		

PROPUESTA Y DESARROLLO	CONCEPTO, HABILIDAD, OPERACIÓN	SIGLA	PREGUNTA
a) En un hotel de la ciudad se hospedaron el fin de semana 200 personas. El administrador reportó los datos así: El viernes y sábado pero no el domingo hospedó 18, hospedó 65 el viernes; 20 el domingo solamente; 30 entre semana; 9 el viernes y el domingo; 24 hospedó el sábado y el domingo; 19 solamente el sábado y el domingo, se pregunta: Cuántas personas hospedó en: i) Viernes, sábado y domingo ii) Sábado o domingo pero no viernes? iii)Viernes solamente? iv)Viernes o sábado pero no domingo? v)Viernes y domingo pero no sábado?			
$\# U = 200$ $\# [(V\cap S) - D] = 18$ $\# V = 65$ # D “solamente” = 20 $\# (L\cup M\cup Mi\cup - J)=30$ $\# (V\cap D)=9$ $\# (S\cap D) =24$ $\# (S\cap D)$“solamente” =19	1. Expresión de las operaciones entre conjuntos, involucradas en el problema	CONJ CARD	IIIa1
	2. Representación gráfica y ubicación de los datos.	CONJ CARD ARIT DATO	IIIa2
i) $\# (V\cap S\cap D) = 5$ ii) $\#[(S\cup D) - V] = 66+19+20 = 105$ iii) “solo viernes” $[V-(S\cup D)] = 38$ iv) $\#[(V\cup S) - D] = 38+18+66 = 122$ v) $\#[(V\cap D) - S] = 4$	3. Simbolización de las preguntas y hallazgo de las respuestas	CONJ CARD ALGO LOGI	IIIa3
b. Un terreno tiene 6 pies más de largo que de ancho. Cada diagonal de una esquina a la opuesta tiene 174 pies de largo. ¿Cuáles son las dimensiones de este terreno?			

PROPUESTA Y DESARROLLO	CONCEPTO, HABILIDAD, OPERACIÓN	SIGLA	PREGUNTA
	1. Representación gráfica	GEOM	IIIb1
	2. Asignación de variables	VARI	IIIb2
	3. Ubicación de datos	DATO	IIIb3
$174^2 = x^2 + (6 + x)^2$	4. Aplicación del Teorema de Pitágoras	MODE PITAG	IIIb4
$174^2 = x^2 + 36 + 12x + x^2$	5. Solución del cuadrado de un binomio.	ALGE NOTA	IIIb5
$2x^2 + 12x - 30240 = 0$ $x^2 + 6x - 15120 = 0$	6. Reducción de términos semejantes y simplificación	ALGE ALGO ARIT	IIIb6
$x = \frac{-6\pm\sqrt{[36+4(1)(15120)]}}{2}$	7. Aplicación de la fórmula cuadrática	CUAD ECUA	IIIb7
b) Una antena de televisión está instalada en la terraza de un edificio. A 254 m del pie del edificio se observa la parte superior del edificio con un ángulo de elevación de 20° y la parte superior de la antena con un ángulo de elevación de 24°. Calcular la altura de la antena.			
	1. Representación gráfica del problema	GEOM	**IIIc1**
	2. Asignación de variables	VARI	IIIc2
	3. Ubicación de datos	DATO	IIIc3
T an 24 = $\frac{y+h}{254}$ tan 20 = $\frac{h}{254}$	Planteamiento de ecuaciones con aplicación de relaciones trigonométricas.	ALGE MODE TRIG	IIIc4

PROPUESTA Y DESARROLLO	CONCEPTO, HABILIDAD, OPERACIÓN	SIGLA	PREGUNTA
$254 \tan 24 = y + h$ $254 \tan 20 = h$ $254 \tan 24 - 254 \tan 20 = y$	5. Solución del sistema	ECUA ALGO	IIIc5
c) Dos remolcadores que están separados 120 pies tiran de una barcaza. Si la longitud de un cable es de 212 pies y la del otro es de 230 pies, determinar cuál es el ángulo que forman los cables.			
	1. Representación gráfica	GEOM	IIId1
	2. Asignación de variable y Ubicación de datos	VARI DATO	IIId2
$120^2 = 230^2 + 212^2 - 2(230)(212)\cos\theta$	3. Aplicación del Teorema del Coseno	MODE TRIG	IIId3
$\theta = \arc\cos \dfrac{(120^2 - 230^2 \;\; 212^2)}{2(230)(212)}$	4.Despeje de incógnita	ECUA	IIId4
IV- RESOLVER	*Se trata de encontrar la solución que satisfaga el enunciado. En este caso se pide el conjunto solución a una ecuación cuadrática y a una inecuación lineal.*		
a) $-4x^2 + 7x - 25 = 0$	1. Identificación como ecuación cuadrática	CUAD	IVa1
$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{[49 - 4(-4)(-25)]}}{-8}$	2. Aplicación de la fórmula cuadrática	ECUA CUAD	IVa2
$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{(-351)}}{-8}$	3. Resultado e identificación del número	COMP ALGO ARIT	IVa3

PROPUESTA Y DESARROLLO	CONCEPTO, HABILIDAD, OPERACIÓN	SIGLA	PREGUNTA
b) $(5x-3)/4 \le (2x-1)/5 > x-9$	1. Identificación como inecuación con doble desigualdad	INEC	**IVb1**
$(5x-3)/4 \le (2x-1)/5 \wedge (2x-1)/5 > x-9$	2. Separar las inecuaciones lineales en dos proposiciones simples.	INEC ALGE LOG	**IVb2**
$(25x-15 \le 8x-4) \wedge (2x-1 > 5x-45)$	3. Aplicación de propiedad de desigualdad	PROP ALGE	Ivb3
$17x \le 11 \wedge -3x > -44$	4. Transposición y reducción de términos	INEC ALGE	Ivb4
$x \le 11/17 \wedge x < 44/3$	5. Despeje de incógnita y aplicación de operación en lógica de proposiciones	INEC ALGE	Ivb5
$x < 11/17$ ó $(-\infty, 11/17)$	6. Solución por intersección de intervalos.	ALG LOG CONJ	Ivb6
V- COLOCAR EN EL PARENTESIS, EL NUMERO DE LA IZQUIERDA, QUE RELACIONE LOS ENUNCIADOS DADOS.	*Se dan dos columnas de enunciados y se trata de encontrar las expresiones que se relacionan.*		
1. Parejas de números reales: “Puntos en el plano cartesiano”	Representación gráfica en el plano. Cada punto se denota con un par ordenado de números reales.	GEOM	V1
2. Eje X “Eje de las abscisas”.	Reconocimiento de los elementos del plano R^2 y el nombre de los ejes que lo forman; el eje horizontal es llamado Eje de las abscisas.	GEOM	V2
3. El subradical se hace mayor o igual a cero “cuando x ó y hacen parte de un radical”.	Procedimiento para hallar el conjunto de valores de una variable cuando ésta aparece en el subradical.	INEC	V3

PROPUESTA Y DESARROLLO	CONCEPTO, HABILIDAD, OPERACIÓN	SIGLA	PREGUNTA
4. Análisis de los valores de Y “Procedimiento para hallar el rango”	Los valores de la variable “y” proporcionan el campo de extensión de esta variable en la relación dada y a este conjunto de valores se le llama rango.	RELA	V4
5. Puntos en el espacio tridimensional “En blanco”	Los puntos en el espacio tridimensional XYZ se representan con ternas de la forma (x,y,z)	GEOM	V5
6. Subconjunto de un producto cartesiano, en el que sus parejas cumplen una condición “Relación”	Identificación del concepto de una relación.	RELA	V6
7. Ecuación con una incógnita “Blanco”	Una ecuación es una igualdad con incógnitas.	ECUA	V7
8. Reales y puntos de una recta “correspondencia uno a uno”	A cada punto de la recta le corresponde un número real.	RELA	V8
9. Cuando x ó y hacen parte del denominador de una fracción “Se iguala a cero”	Procedimiento para encontrar los valores de la variable y ésta forma parte del denominador de la relación dada.	ECUA	V9
10. Análisis de los valores de x “Procedimiento para hallar el dominio”	Los valores de la variable “x” proporcionan el campo de extensión de esta variable en la relación dada y a este conjunto de valores se le llama dominio.	RELA	V10
11. Valores de la variable independiente “Dominio de una relación”	El Dominio de una relación es el conjunto de valores que la variable independiente puede tomar para que exista.	RELA	V11
12. $x^2+y^2=4$ “Relación real”	Identificación de un ejemplo de una relación que está definida en el campo de los Números reales	RELA	V12
13. Eje de las ordenadas “Blanco”	Reconocimiento de los ejes que forman el plano; el eje vertical es el Eje de las ordenadas.	GEOM	V13

Anexo D. Aspectos significativos en relación con la enseñanza, aprendizaje y dominio de la Matemática en la voz de un grupo de estudiantes que tomaron Cálculo Diferencial en la UNAB en el I semestre de 2004.

ASPECTO	CONCEPTOS
Sentimiento hacia la Matemática	**Me siento bien porque:** • Cada día aprendo más • Me siento bien conmigo • Estudio lo suficiente • Tengo seguridad en lo que realizo • Reviso los apuntes • Tomo nota de todo en clase • Refuerzo con libros • Cuando no entiendo algo me las ingenio porque el profesor vuelva a explicarme. • Pido nuevas explicaciones cuando no entiendo, los errores son por falta de atención • Entiendo muy bien • Siento que me sé desenvolver en todo • Me gustan las matemáticas • Me motiva la exigencia • Confío en mi forma de estudiar • Siempre he amado las matemáticas. Es como un juego con números. • Tranquilo. A medida que se iban desarrollando los temas, pude darme cuenta que en el colegio me enseñaron bien. • Con buenas bases. • Ahora que repito la materia, me siento más ubicada y más tranquila, tanta angustia el semestre pasado porque quería pasar como fuera, • Veo que fue mejor repetir, ahora entiendo de dónde salen las cosas • Pongo más cuidado y estudio más. • Soy consciente de las deficiencias que tengo y por eso me estoy preocupando por entender más.

<table>
<tr><th>ASPECTO</th><th>CONCEPTOS</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Sentimiento hacia la Matemática</td><td>Me siento regular porque:
No tengo tiempo para estudiar
Hay ‘cáscaras’ que al final me confunden
Cometo pequeños errores
Me desconcentro
Falta de estudio suficiente
Hago procesos incompletos
Me distraigo
Me falta preparación
Los temas son totalmente nuevos
Me falta atención
He aprendido en dos semestres más que en todo el bachillerato (Repitente).
Me falta un poco de tiempo extra
Tengo muchas dudas
No todas las veces se da la oportunidad de despejar las dudas en clase.</td></tr>
<tr><td>Me siento mal porque:
Copio mal y aunque me esfuerzo estudio sobre errores.
Tengo muchas dudas
Estudio pero a la hora de presentar el quiz me va mal.
Me falta firmeza en los conceptos del bachillerato
Me falta muchísimo estudio
Tengo grandes vacíos.
En el momento de la evaluación me bloqueo por completo, no sé qué pasa</td></tr>
<tr><td>Conceptos matemáticos en los que existen dificultades</td><td>Factorización
Resolver problemas
Sumas y restas con radicales
Simplificación
Graficación
Interpretar límites en gráficas.
Hacer operaciones sin calculadora
Trabajar con racionales
Graficación de Límites
Identidades
Logaritmos</td></tr>
</table>

ASPECTO	CONCEPTOS
Conceptos matemáticos en los que existen dificultades	• Funciones trigonométricas • Despeje de incógnita • Operaciones con fraccionarios • Potenciación • Funciones • Operaciones con enteros • Expresiones algebraicas • Decimales
Recuerdos positivos de la etapa del colegio cuyas experiencias favorecieron el aprendizaje de la Matemática	**Recuerdo:** • Metodología, dedicación, estímulos y actitudes de los profesores (claves para estudiar, consejos, emoción con la que llegaba a clase, forma de enseñar) • Esfuerzo del colegio • Método de estudio personal • En todos los años tuve buenas calificaciones. • Insistencia de que sabiendo la teoría se aprende la práctica.
Recuerdos negativos de la etapa del colegio cuyas experiencias obstaculizaron el aprendizaje de la Matemática.	**Recuerdo:** • Discriminación por parte de los profesores • Superficialidad en las explicaciones de los profesores • Facilismo y tranquilidad de los profesores • Actitud de los profesores • Haber estudiado en diferentes colegios • Distracción • Quedarse callado ante las incomprensiones • Método del profesor • Opiniones de los estudiantes de los cursos superiores porque lo predisponen a uno con los temas de Algebra por ejemplo. • Falta de suficientes explicaciones • Las clases de once, eran un pasatiempo • La profesora de Matemática “era una locha”. • Actitudes adversas generadas por los profesores • No poder preguntar • Preparación regular o mala por parte del colegio. • Falta de enseñanza de procesos.

<table>
<tr><th>ASPECTO</th><th>CONCEPTOS</th></tr>
<tr><td>Estrategias metodológicas (interesantes) empleadas por los profesores de Matemática en el colegio.</td><td>Recuerdo:
Explicaciones en detalle
Buenos ejemplos
Uso de guías y talleres
Propuesta de juegos como loterías
Propuesta para reforzar temas como el calendario matemático, concursos y estímulos.
Daban las fórmulas y trucos para facilitar operaciones
Rapidez de la profesora, desarrolló mucha agilidad para pensar y analizar.</td></tr>
<tr><td>Estrategias metodológicas (poco interesantes) empleadas por los profesores de Matemática en el colegio.</td><td>Recuerdo:
Siempre fueron muy aburridos era lo mismo
Clases monótonas, nada interesante, todos dictan de la misma forma genérica.</td></tr>
<tr><td>Utilidad de la Matemática para el Ingeniero</td><td>Sirve porque:
Aporta destreza, observación, seguridad, tranquilidad, orden, objetividad.
Ejercita la memoria, abre la mente
Se requiere creatividad
Permite analizar desde varios puntos de vista.
Exige razonamiento lógico
Se aplican en diferentes áreas y en toda la vida
Ayudan a desarrollar el cerebro.
No sirve porque:
No se aplica en el campo laboral, si al caso lo que tienen que ver con las operaciones básicas. No creo que vaya a necesitar aplicar límites y derivadas. Toca verlos porque es un requisito.</td></tr>
</table>

ASPECTO	CONCEPTOS
Posibles causas del buen o bajo rendimiento en Cálculo Diferencial: **Es Responsabilidad de:**	- Colegio de procedencia • Nivel de profundización • Temas desarrollados y no desarrollados • Materias de apoyo que el colegio define, como Aptitud Matemática. - Profesores • Nivel de exigencia • Explicaciones • Orientaciones • Metodología de trabajo - Sistema de evaluación • Calificación por logros • Actividades de recuperación - Estudiantes • Copia de talleres • Falta de atención • Vacíos importantes • Bases muy deficientes • Actitud en clase • Hábitos de estudio • Asistencia a clase • Grupo de estudio • Nivel de pensamiento lógico • Intereses • Falta de profundización y revisión de textos • Claridad en procesos • Manejo del lenguaje técnico • Procesos para manejar fórmulas
Requerimientos para que un estudiante sea exitoso	- Interés de cada uno - Sentirse contento con lo que está haciendo - Con mente abierta y sabiendo que se están construyendo las bases para entender los conocimientos futuros sobre todo los relacionados con la carrera. - Reforzar permanentemente - Contar con los conceptos fundamentales o básicos.

ASPECTO	CONCEPTOS
Requerimientos para que un estudiante sea exitoso	- Razonar con lógica y colocar atención - Establecer relaciones entre los conceptos que se tenían con los nuevos. - Pensamiento y memoria estructurada - Método de estudio (costumbres) - Reconocer el lenguaje técnico, la simbología y la relación entre la transcripción de un enunciado de lo literal a lo simbólico. - Inteligencia conceptual. - Tener gusto - Contar con hábitos de estudio: • Hacer todos los pasos (con sentido) que se requieren, la justificación indica que va bien y que en realidad entiende. • Revisar lo que se va desarrollando en clase para detectar dudas. • Estudiar todos los días, • Preguntar a tiempo lo que no se entiende • Aprovechar las horas de consulta de los profesores

Anexo E. Aspectos significativos en relación con la enseñanza, aprendizaje y dominio de la Matemática en la voz de un grupo de profesores del Departamento de Matemática de la UNAB.

ASPECTO	CONCEPTOS
Posibles causas del bajo rendimiento de los estudiantes en Cálculo Diferencial	• Desubicados espacialmente • Irresponsabilidad frente al compromiso adquirido • Creen estar en el colegio • No aprovechan el espacio • La forma de evaluación de la universidad choca con la del sistema de evaluación del bachillerato. • Bajo perfil que manejan de los conceptos de aritmética y álgebra. • No poseen conocimientos básicos • No han alcanzado el desarrollo de pensamiento lógico matemático que se requiere • Desinterés • No se esfuerzan • No asumen su responsabilidad. • Noto con preocupación que cada vez los estudiantes llegan a la Universidad con altas deficiencias de pensamiento lógico y pocas habilidades matemáticas. • Encuentro que hay deficiencia en los procesos aritméticos y algebraicos. • Normalmente el estudiante no relaciona conceptos matemáticos con conceptos físicos • Cometen muchos errores en operaciones matemáticas • Son desatentos • No les gusta memorizar • No recuerdan fórmulas básicas • Cuando necesitan aplicar lo básico no pueden porque no lo saben • Memorizan sólo lo que les gusta • Quieren es que se les entregue todo hecho, fácil, que no les toque pensar ni buscar, que sea todo suave. • No se apropian de los conceptos porque no estudian a conciencia

ASPECTO	CONCEPTOS
Posibles causas del bajo rendimiento de los estudiantes en Cálculo Diferencial	• Esperan que se les explique todo, que se les dé respuesta a sus problemas • El estudiante promedio que ingresa a la Unab, durante su bachillerato no ha valorado el aprendizaje matemático de ese nivel y por lo tanto llega con muchas carencias en el área. • La reforma del bachillerato • dependencia del docente • Sin espíritu de profundización en los contenidos • Dificultades en conceptos básicos mínimos • Pareciera que lo que se vio en el bachillerato se hubiera perdido, hay que explicarles todo • Vienen con la mentalidad de las recuperaciones • No siempre son capaces de convertir del lenguaje retórico al lenguaje matemática por desconocimiento de símbolos
Conocimientos básicos en los cuales se detectan dificultades	• Operaciones básicas con números racionales • Simplificación • Ubicación y graficación en el plano cartesiano • Despeje de variables • Manejo de algoritmos • Factorización • No manejan unidades, signos, variables, mezclan unidades, algunos no despejan correctamente fórmulas. • Manejo de la lógica matemática • Aplicación de las operaciones básicas en los reales y su transferencia a las expresiones algebraicas • Elementos básicos de trigonometría y analítica
Habilidades básicas en las cuales se detectan dificultades	• Análisis • Comparación • Uso del lenguaje técnico, apropiación del lenguaje y de la simbología • Interpretación y solución de problemas • Hacer el planteamiento inicial de un problema, ubicación de datos. • Argumentar de dónde salen las cosas • Iterar, interpolar

ASPECTO	CONCEPTOS
Habilidades básicas en las cuales se detectan dificultades	• Comprensión de lectura, algunos no entienden qué es lo que se pide, qué parámetros se dan, qué se va a obtener o de qué manera debe desarrollarse un problema. • Manejo de la calculadora y su respectivo cuestionamiento sobre los resultados que se encuentran • Quieren tener todos los datos para reemplazar en las fórmulas • No analizan datos ni resultados para dar conclusiones.
Condiciones que debe reunir un estudiante de ingeniería en la UNAB para que tenga un desempeño satisfactorio en Cálculo Diferencial	• Saber interpretar situaciones • Manejo del pensamiento numérico • Capaz de obtener conclusiones • Que pueda aplicar lo que acaba de entender o aprender a otras situaciones. • Manejo de conocimientos previos • Excelentes bases en operaciones básicas de suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación, logaritmación con sus propiedades • Factorice completamente • Interés por el estudio • Motivación personal • Deseos de progresar • Comparta con los compañeros • Participe en clase • Tenga método de estudio • Alta autoestima • Tener capacidad de análisis • Responsabilidad en el proceso de aprendizaje • Poseer los requisitos básicos para la adquisición de nuevos aprendizajes. • Porque su buen manejo facilitaría avanzar y no estar siempre retroalimentando, repitiendo conceptos simples que el alumno debería dominar dado que han sido tratados en cursos anteriores. • Manejo de conocimientos previos porque el Cálculo tiene sus cimientos en conceptos de geometría, aritmética y álgebra, sin los cuales es difícil comprender los nuevos conceptos.

ASPECTO	CONCEPTOS
Los profesores deben...	• Dar una aproximación al estudiante de los elementos conceptuales que requieren la aplicación posterior en otras áreas del conocimiento profesional. • Prepara sus clases • Tenga metodología • Revise opciones de aprendizaje de los estudiantes • Ofrezca recursos y diferentes alternativas de aprendizaje • Estimular al estudiante para que se esfuerce • Ofrezca talleres • Evalúe en forma completa • Fortalezca en los estudiantes habilidades como: análisis, comparación, relación, • Mostrarse las matemáticas como una herramienta que se necesita aplicar para la solución de cualquier problema.
Factores cognitivos que influyen en el aprendizaje del Cálculo Diferencial. **(Los profesores explican por qué son importantes)**	**Interés y motivación porque:** • Si el alumno no muestra interés no encuentra sentido • Es importante que haya gusto y deseo por aprender los nuevos conceptos matemáticos porque de lo contrario se hace difícil lograr la concentración. • Aprende sólo lo que quiera aprender. • Un estudiante motivado no se vence ante el primer traspiés. • La motivación en el estudiante es muy importante para que él encuentre sentido en el estudio de las matemáticas
	Atención porque: • Favorece en gran parte los resultados del proceso, aunque se encuentra uno con algunos preocupados por otras cosas, ej., el celular, la siguiente clase, el amigo del lado, el del pasillo,.. y quienes están en el cuento, participan y necesitan menos tiempo para entrar a aplicar los pormenores de los conceptos. • Los procesos matemáticos exigen un alto nivel de seguimiento que puede darse mejor cuando hay concentración en el momento del aprendizaje.

<table>
<tr><th>ASPECTO</th><th>CONCEPTOS</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Factores cognitivos que influyen en el aprendizaje del Cálculo Diferencial.

(Los profesores explican por qué son importantes)</td><td>• Debe mantenerla durante todo su proceso de aprendizaje.
• La motivación está ligada a la atención. Si yo como maestra logro motivar al estudiante para que aprenda matemáticas, el centrará su atención en todas las partes del proceso.</td></tr>
<tr><td>Lenguaje común porque:

• Se requiere para la buena toma de apuntes

Lenguaje técnico porque:

• Se requiere para entender lo que se está diciendo de una expresión matemática, aunque a veces pareciera que el estudiante no supiera lo mínimo del significado de las expresiones básicas y eso dificulta que nos entendamos, yo puedo estar hablando de funciones y él estar pensando en la función del cine o quien sabe qué.
• Es conveniente dominar el lenguaje matemático para poder relacionarlo con el lenguaje común. Aquí falla mucho el estudiante; en muchas ocasiones le falta rigurosidad en el lenguaje matemático y presenta deficiencias en llevar al lenguaje matemático una expresión del lenguaje coloquial
• Es importante que él entienda cómo expresar la solución de un problema presentándola en el correcto lenguaje matemático.
• En ocasiones hay simbología que el estudiante no reconoce y quizá podría ser que algunos docentes no les hacen énfasis en la importancia de los símbolos matemáticos para representar un problema y su solución.</td></tr>
<tr><td>Pensamiento – razonamiento porque:

• Se debe generar alguna una idea ante la pregunta del docente, razonar, pensar y buscar la solución.
• El aprendizaje de las matemáticas requiere del desarrollo de un pensamiento lógico</td></tr>
</table>

ASPECTO	CONCEPTOS
Factores cognitivos que influyen en el aprendizaje del Cálculo Diferencial. **(Los profesores explican por qué son importantes)**	• Es un elemento indispensable en la enseñanza de las matemáticas pues es este hecho el que permite descifrar el lenguaje matemático y organizar las ideas y procesos que llevan a la solución de los problemas. • Le exige la búsqueda de los caminos para poder desarrollar lo que ha pensado con anterioridad. En matemática es clave porque aquí tiene que descartar probabilidades en esa misma búsqueda
	Memoria porque: • Aunque no es el elemento central del proceso del aprendizaje de las matemáticas, hay situaciones que requieren de ella, como los algoritmos de los procesos. • Evidencia los elementos que posee y cómo los ha logrado estructurar.
	Inteligencia - creatividad porque: • Cada uno le coloca su propia forma de entender. Para mí es el toque personal que cada quien le da a un ejercicio • Es importante para el aprendizaje de la matemática porque si no se volvería muy repetitivo, querer hacer exactamente lo que el docente hizo, entonces no se buscan otras alternativas. • El estudiante de ingeniería requiere de imaginación más que nunca por su futura vida profesional. Uno les explica, pero ellos deben aprender a explorar y aplicar unos conceptos y procedimientos en otros contextos. • Permite relacionar conceptos ya vistos con nuevos conceptos, ver que una misma situación puede ser resuelta de diversas maneras y proponer alternativas de solución. • En la medida que se cultive, el estudiante puede ir accediendo a los nuevos aprendizajes con mayor facilidad • Permite conjugar los diversos conceptos matemáticos en la solución de problemas

ASPECTO	CONCEPTOS
Factores cognitivos que influyen en el aprendizaje del Cálculo Diferencial. **(Los profesores explican por qué son importantes)**	**Solución de problemas porque:** • Exige otros procesos de pensamiento como el análisis, interpretación y búsqueda de diferentes alternativas, la comprensión de la solución. • Es la meta hacia la que va dirigido el aprendizaje de cada nuevo concepto matemático. • Es donde el estudiante muestra lo que sabe hacer. Aunque pareciera que están acostumbrados a solo hacer operaciones, además que se les entregue explícitas. Esperan que el docente les analice el problema y les deje planteado el modelo (función o ecuación correspondiente).
Estrategias de los profesores al iniciar un semestre o unidad de aprendizaje	• Yo hago siempre lo siguiente: le digo al alumno qué se necesita para el desarrollo de cada unidad temática, se dice qué conceptos se requieren como soporte. • Hago preguntas o planteo algunas situaciones para detectar las fortalezas y cuando observo serias dificultades, dispongo de un tiempo para hacer una retroalimentación. • Tratar de partir siempre de lo mínimo que él tenga, sobre esto empezar a construir, tener en cuenta las bases y crear conciencia de que cada concepto no es aislado del anterior o del siguiente, cada uno es parte de otro. • Hago un mínimo repaso de los conocimientos que se consideran básicos en la asignatura; y durante el semestre a medida que se van necesitando los conceptos se van recordando. • Al inicio de la asignatura propongo un taller de repaso de aquellos temas que son necesarios para el desarrollo de todo el curso. Y durante el proceso de aprendizaje de cada nuevo tema, voy recordando lo necesario.

ANEXO F. Juicios de valor (por estudiante) en cada uno de los pasos mínimos básicos en el desarrollo de la Prueba de reconocimiento de elementos básicos de precálculo[*]

EST	Ia1	Ia2	Ia3	Ia4	Ia5	Ib1	Ib2	Ib3	Ib4	Ic1	Ic2	II1	II2	II3	II4	II5	IIIa1	IIIa2	IIIa3	IIIb1	IIIb2	IIIb3	IIIb4	IIIb5	IIIb6	IIIb7	IIIc1	IIIc2	IIIc3	IIIc4	IIIc5
1	B	B	B	B	B	N	N	N	N	B	B	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	S	S	S	B	B
2	N	N	N	N	N	S	S	N	N	N	N	S	B	B	B	B	S	R	N	S	N	S	S	N	N	N	N	N	N	N	N
3	S	N	N	N	N	S	N	N	N	B	B	R	S	N	N	N	N	N	B	S	N	N	S	N	N	N	S	R	S	N	N
4	S	S	S	N	N	S	N	B	B	N	N	S	N	N	N	N	S	R	N	S	S	S	S	N	N	N	R	N	B	B	B
5	S	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	N	B	B	B	B
6	S	S	S	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	S	B	B	S	S	S	S	N	N	N	R	N	N	N	N
7	S	S	S	N	N	R	N	N	N	B	B	S	S	S	N	N	S	R	N	S	S	S	S	S	N	N	B	B	B	B	B
8	S	S	S	S	B	B	B	B	B	B	B	S	S	B	B	B	B	B	B	R	R	B	N	B	B	B	S	N	B	B	B
9	N	R	R	R	R	B	B	B	B	B	B	R	R	R	R	R	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
10	N	R	R	R	R	N	R	R	R	S	R	S	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
11	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	B	B	B	S	S	S	S	S	B	B	S	S	S	N	B
12	S	S	S	R	N	S	S	S	S	B	B	S	S	S	S	S	B	B	B	S	S	S	B	B	B	B	S	N	S	N	N
13	S	S	S	N	B	N	B	B	B	S	S	S	S	S	N	N	N	N	N	S	S	S	S	R	N	N	B	B	B	B	B
14	S	S	S	S	B	S	S	S	S	S	N	S	S	S	S	B	B	B	B	S	N	B	B	B	B	B	S	R	N	N	N
15	S	S	S	S	B	S	S	S	S	N	N	S	S	N	N	N	B	B	B	S	S	S	S	N	N	N	S	B	B	B	B
16	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	N	B	B	S	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B
17	B	B	B	B	B	S	S	N	S	B	B	S	S	N	N	N	S	B	B	S	N	B	B	B	B	B	S	N	B	B	B
18	S	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	S	S	S	S	N	N	N	B	B	B	B	B
19	S	S	S	S	S	S	S	S	S	B	B	N	N	N	N	N	B	B	B	S	S	S	S	N	N	N	S	S	S	S	S
20	S	S	S	S	N	S	S	S	S	B	B	S	B	B	B	B	N	B	B	S	S	S	S	S	S	N	S	S	S	S	S

Nota: **Ia4** significa que es el punto **I** de la Prueba, ejercicio **a** y desarrollo del paso **4** básico; según el desempeño del estudiante fue catalogado con alguna de las letras **S, N, R** ó **B** según corresponda.

[*] Convenciones: S: “Lo hizo correctamente”, N: “Es incorrecto”, R: ”Tiene la idea pero no es correcto finalmente”, B: “ No contestó”

Hoja 2

EST	IIId1	IIId2	IIId3	IIId4	IVa1	IVa2	IVa3	IVb1	IVb2	IVb3	IVb4	IVb5	IVb6	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	V9	V10	V11	V13	V12
1	B	B	B	B	B	B	B	N	B	B	B	B	B	N	N	S	N	S	N	S	N	S	N	N	N	N
2	R	N	N	N	S	S	N	N	N	N	N	N	N	S	N	S	S	N	S	N	N	S	S	N	N	N
3	R	N	B	B	S	R	S	S	B	B	B	B	B	N	N	N	S	S	N	S	N	N	S	N	S	N
4	B	B	B	B	B	B	B	S	S	R	N	N	N	N	S	S	S	N	N	N	N	N	S	N	N	S
5	S	S	R	N	B	B	B	N	B	B	B	B	B	S	S	N	N	N	N	N	N	S	N	N	N	N
6	N	B	B	B	B	B	B	N	B	B	B	B	B	N	N	N	S	N	S	N	N	N	S	N	N	N
7	B	B	B	B	B	B	B	S	B	B	B	B	B	N	N	N	S	N	N	N	N	S	S	S	N	N
8	N	B	B	B	N	N	N	S	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
9	B	B	B	B	B	B	B	S	B	B	B	B	B	N	N	S	S	N	N	N	N	N	S	N	N	S
10	B	B	B	B	B	B	B	S	S	S	S	S	S	N	S	S	N	N	N	N	N	S	N	N	S	N
11	B	B	B	B	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	N	S	S	N	N	S	N	S	N
12	R	N	B	B	N	N	N	N	N	N	N	N	N	S	S	S	N	S	N	N	N	S	N	N	S	N
13	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	N	N	N	N	N	S	N	N	N	S	N	N	N
14	S	S	S	R	N	N	N	R	B	B	B	B	B	N	N	S	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
15	S	S	R	B	N	B	B	B	B	B	B	B	B	S	N	S	S	N	N	N	N	N	N	N	N	N
16	B	B	B	B	N	N	N	S	B	B	B	B	B	N	N	N	S	N	N	N	N	N	N	N	N	N
17	B	B	B	B	B	B	B	S	B	B	B	B	B	N	N	S	S	N	S	N	N	N	S	N	S	S
18	B	B	B	B	B	B	B	S	B	B	B	B	B	N	S	S	N	N	S	S	S	S	N	N	S	S
19	S	S	R	N	S	S	R	S	S	S	S	S	S	S	N	S	S	S	S	N	S	N	S	N	N	S
20	S	S	R	N	N	N	N	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	N	S	N	N	N	N	N	S	N

Anexo G. Tabulación de los Juicios de valor asignados en cada paso básico en el desarrollo de la Prueba de reconocimiento de elementos básicos de precálculo

No.	PREGUNTA	S Es correcto	N Es incorrecto	R Tiene idea	B Blanco	Total
1	**Ia1**	14	3	0	3	20
2	**Ia2**	11	4	2	3	20
3	**Ia3**	11	4	2	3	20
4	**Ia4**	6	8	3	3	20
5	**Ia5**	2	8	2	8	20
6	**Ib1**	10	5	1	4	20
7	**Ib2**	8	6	1	5	20
8	**Ib3**	6	7	1	6	20
9	**Ib4**	7	6	1	6	20
10	**Ic1**	4	5	0	11	20
11	**Ic2**	2	6	1	11	20
12	**II1**	12	4	2	2	20
13	**II2**	9	5	1	5	20
14	**II3**	5	8	1	6	20
15	**II4**	3	10	1	6	20
16	**II5**	2	10	1	7	20
17	**IIIa1**	5	6	0	9	20
18	**IIIa2**	0	2	3	15	20
19	**IIIa3**	0	4	0	16	20
20	**IIIb1**	15	0	1	4	20
21	**IIIb2**	10	5	1	4	20
22	**IIIb3**	11	2	0	7	20
23	**IIIb4**	11	2	0	7	20
24	**IIIb5**	3	8	1	8	20
25	**IIIb6**	1	10	0	9	20
26	**IIIb7**	0	11	0	9	20

No.	PREGUNTA	S Es correcto	N Es incorrecto	R Tiene idea	B Blanco	Total
27	**IIIc1**	10	2	2	6	20
28	**IIIc2**	4	6	2	8	20
29	**IIIc3**	6	3	0	11	20
30	**IIIc4**	2	6	0	12	20
31	**IIIc5**	2	5	0	13	20
32	**IIId1**	5	2	3	10	20
33	**IIId2**	5	3	0	12	20
34	**IIId3**	1	1	4	14	20
35	**IIId4**	0	4	1	15	20
36	**IVa1**	4	6	0	10	20
37	**IVa2**	3	5	1	11	20
38	**IVa3**	2	6	1	11	20
39	**IVb1**	12	5	1	2	20
40	**IVb2**	5	2	0	13	20
41	**IVb3**	4	2	1	13	20
42	**IVb4**	4	3	0	13	20
43	**IVb5**	4	3	0	13	20
44	**IVb6**	4	3	0	13	20
45	**V1**	7	12	X	1	20
46	**V2**	7	12	X	1	20
47	**V3**	13	6	X	1	20
48	**V4**	12	7	X	1	20
49	**V5**	4	15	X	1	20
50	**V6**	8	11	X	1	20
51	**V7**	4	15	X	1	20
52	**V8**	2	17	X	1	20
53	**V9**	7	12	X	1	20
54	**V10**	10	9	X	1	20
55	**V11**	1	18	X	1	20
56	**V12**	5	14	X	1	20
57	**V13**	7	12	X	1	20
TOTAL		**332**	**376**	**42**	**390**	**1140**