Tratamiento de señales por transformación de Fourier fraccionaria. Aplicaciones a la holografía sintética y al filtrado óptico

por

Rafael Ángel Torres Amarís

Tesis realizada como requisito parcial para obtener el título de Doctor en Ciencias Naturales (Física)

en la

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales

28 de agosto de 2008

Tratamiento de señales por transformación de Fourier fraccionaria. Aplicaciones a la holografía sintética y al filtrado óptico

Codirección:

Yezid Torres Moreno

Pierre Pellat-Finet

en la

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales

28 de agosto de 2008

Declaración de Autoría

Yo, RAFAEL ÁNGEL TORRES AMARÍS, declaro que esta tesis titulada, “TRATAMIENTO DE SEÑALES POR TRANSFORMACIÓN DE FOURIER FRACCIONARIA. APLICACIONES A LA HOLOGRAFÍA SINTÉTICA Y AL FILTRADO ÓPTICO” y el trabajo presentado en este son de mí autoría. Yo confirmo que:

- Este trabajo fue realizado en su totalidad durante mi candidatura al título de doctor en esta Universidad
- Cuando he consultado la obra publicada de otros, siempre esta se ha atribuido a su autor claramente
- Cuando he citado la labor de los demás, la fuente siempre se da. Con la excepción de estos elementos, esta tesis es totalmente mi propio trabajo
- En caso de que la tesis se basa en el trabajo realizado por mí junto con otros, he dejado en claro exactamente que se hace por los demás y lo que yo he contribuido

Firma: ________________________________

Fecha: ________________________________

"Una máquina puede hacer el trabajo de varios hombres, pero ninguna puede hacer el trabajo, como éste, de un hombre brillante ."

Elbert Hubbard

Tratamiento de señales por transformación de Fourier fraccionaria. Aplicaciones a la holografía sintética y al filtrado óptico*

Autor: Rafael Ángel Torres Amarís**

Palabras Claves: transformación de Fourier fraccionaria, procesamiento de señales, holografía.

Resumen

La transformación de Fourier fraccionaria se muestra como una herramienta eficaz en el tratamiento de señales no estacionaria, resolviendo algunas deficiencias (por ser un tratamiento localizado en frecuencias) que presentan los métodos basados en la transformación de Fourier estándar. El tratamiento en *Ondeletas* toma ventaja de esto, frente al análisis de Fourier, por su utilidad en el tratamiento de señales no estacionarias.

En esta tesis se define, una operación de traslación (*operador traslación fraccionaria*), bajo la cual la transformación de Fourier fraccionaria es invariante en módulo. Se muestra, además, que con su ayuda se pueden adaptar buena parte de los elementos conocidos en el análisis de Fourier estándar al análisis de Fourier fraccionario. En particular, se adapta un teorema del muestreo fraccionario, para funciones cuyas transformadas de Fourier fraccionaria son de soporte compacto, y se definen los productos de convolución y correlación fraccionaria. Estos elementos se ilustran con aplicaciones en óptica: por una parte; la convolución y correlación fraccionaria al tratamiento análogo de la información, y por otra parte; el teorema del muestreo a la holografía digital y de aquí a la microscopía holográfica digital y a la holografía numérica.

De manera prospectiva se desarrollan algunos elementos para el análisis de procesos aleatorios, para los cuales se introducen los conceptos de *estacionariedad* y *ergodicidad* en un sentido fraccionario. Del mismo modo un teorema de Wiener-Kinchine fraccionario. A partir de lo anterior, se adapta un teorema del muestreo para procesos aleatorios, además del filtro de Wiener y algunos filtros diversos comunes en la literatura. El tratamiento aquí expuesto se ha desarrollado en un marco general, que le permite ser extendido a otros campos del conocimiento. Los elementos desarrollados conforman la base de un tratamiento de la información en dominios de Fourier fraccionarios.

---

*Tesis

**Facultad de Ciencias, Doctorado en Ciencias Naturales (Física), Pierre Pellat-Finet y Yezid Torres Moreno

Tratamiento de señales por transformación de Fourier fraccionaria. Aplicaciones a la holografía sintética y al filtrado óptico*

Author: Rafael Ángel Torres Amarís**
Key Words: Fractional Fourier transform, signals Proccesing, holography.

Abstract

The fractional Fourier transform is shown as an effective tool in the treatment of non-stationary signals, solving some shortcomings (frequencies located) of the present methods based on standard Fourier transformation. The treatment in Wavelets takes advantage of this, compared to Fourier analysis, because its usefulness in treating non-stationary signals.

In this thesis is defined, an new shift operation (fractional shift operator), under which the module of the fractional Fourier transform is invariant. Also is showed that can be adapted many of the known elements in the Fourier analysis to the fractional Fourier analysis. In particular, it adapts a fractional sampling theorem, for whose functions have fractional compact support, and the fractional convolution and fractional correlation products are defined. These elements are illustrated with applications in optics: the fractional convolution and fractional correlation to the information treatment, the fractional sampling theorem to digital holography and digital holographic microscopy.

The prospective develop of some elements for the analysis of random processes, for which the concepts of ergodicity and stationarity in a fractional sense is introduced. Similarly a Wiener-Kinchine fractional theorem. A fractional sampling theorem for random processes is adapted, in addition to the filter Wiener and various filters some common in the literature. The treatment here described has developed into a general framework, which allows it to be extended to other fields of knowledge. The elements developed form the basis of an information processing in fractional Fourier domains.

*Thesis

**Facultad de Ciencias, Doctorado en Ciencias Naturales (Física), Pierre Pellat-Finet y Yezid Torres Moreno

Agradecimientos

Esta tesis es el resultado de mi trabajo de investigación realizado al interior del Grupo de Óptica y Tratamiento de Señales de la Universidad Industrial de Santander, bajo la codirección de los Profesores Yezid Torres Moreno y Pierre Pellat-Finet.

Agradezco el apoyo financiero de COLCIENCIAS en la modalidad de créditos condonables para apoyo a los programas de Doctorados Nacionales, cuyo soporte económico me permitió una total dedicación a mi trabajo de investigación además de una pasantía doctoral en el extranjero (Université de Bretagne Sud, Francia).

Tengo que agradecer profundamente al Profesor Yezid Torres Moreno de quien recibí gran parte de mi formación en la línea de Óptica y me mostró la transformación de Fourier fraccionaria por primera vez, también por brindarme su confianza permitiéndome la libertad de seguir mis ideas a lo largo de mi investigacioń.

Al Profesor Pellat-Finet, quien fue uno de los fundadores de la óptica de Fourier fraccionaria y la trajo a Colombia en julio de 1999. Agradezco el entusiasmo con el cual siguió de cerca mi trabajo. De él recibí de primera mano su teoría (el método de Fourier fraccionario) lo que me ha impulsado a seguir en esta dirección. Además le guardo un gran respeto y admiración que se mezclan con el gusto compartido por el Cognac acompañado de un buen cigarro.

Le doy las gracias al profesor Kevin Heggarty de la *Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne*, quien me fabricó varios hologramas numéricos que calculé durante mi tesis.

Por último agradezco el apoyo de todos mis compañeros de la escuela de física, en especial a Zandra, Toño, Iño, Nando, los Nechos y Tito.

Índice general

Lista de Figuras

Simbolos

$\mathscr{F}$	transformación de Fourier
$\mathscr{F}_\alpha$	transformación de Fourier fraccionaria
$\mathscr{T}_\tau$	operador traslación
$\mathscr{T}_{\tau;\alpha}$	operador traslación fraccionaria
$W[f]$	distribución de Wigner de f
$\mathcal{R}_\alpha$	operador rotación de coordenadas
$\sqcup\!\sqcup_\tau$	función peinilla de Dirac
$\sqcup\!\sqcup_{\tau;\alpha}$	función peinilla de Dirac fraccionaria

A ma chérie Amèlie

Introducción

En gran parte, el desarrollo de la óptica se debió a que un fenómeno de difracción en el régimen de Fraunhofer se traduce matemáticamente por una transformación de Fourier [22]. Esto condujo al traslado de los elementos conocidos en el análisis de Fourier (que ya se encontraba muy desarrollado en el tratamiento de señales por sistemas lineales e invariantes a la traslación) a la óptica [24]. Además, se le dio una nueva interpretación del fenómeno de difracción, en donde a un punto del patrón de difracción se le asoció el concepto de frecuencia espacial del campo objeto. Esta asociación se tradujo en nuevas aplicaciones de la óptica que de otro modo habrían sido remotas. El término *Óptica de Fourier* no es sólo una forma de hablar, sino una consecuencia del isomorfismo existente entre el tratamiento de señales y la óptica.

La óptica se ve así beneficiada en gran medida del análisis de Fourier, siendo esta una de las herramientas más utilizadas en los tratamientos de las señales ópticas. Este beneficio se evidencia más aun en la llamada óptica difractiva, en donde los elementos ópticos que convencionalmente funcionan por refracción son reemplazados por elementos que funcionan por difracción, por ejemplo lentes y otros.

Como consecuencia de la comodidad que nos introduce el análisis de Fourier, en la óptica difractiva típicamente se trabaja en el régimen de Fraunhofer, a la cual se adapta muy bien la transformación de Fourier [22]. Sin embargo, en ciertas situaciones es necesario trabajar en el régimen de Fresnel y por comodidad, recurrir a la transformación de Fourier fraccionaria, dado que Pellat−Finet [48, 47] mostró que la transformación de Fourier fraccionaria es a la difracción de Fresnel lo que la transformación de Fourier estándar es a la difracción de Fraunhofer. Así, es permitido el traslado de los elementos del análisis de Fourier fraccionario a la óptica.

Con el fin de utilizar la transformación de Fourier fraccionaria como herramienta de cálculo en un análisis de Fourier, es de gran utilidad disponer de algunos teoremas, propiedades y operaciones básicas, en un marco general para así conjugarlos en un método del tratamiento de Fourier fraccionario, que permita aplicar este método en los campos donde ya es útil el tratamiento de Fourier estándar o convencional.

Algunos autores estudian esta transformación y sus propiedades con base en la transformación de Fourier estándar, dado que en el kernel de la transformación de Fourier fraccionaria se incluye el de la tranformación de Fourier [80, 77], esto se ha mostrado útil, por ejemplo, desde el punto de vista numérico [32, 15], pero conceptualmente oculta algunos elementos fundamentales que limitan tanto su entendimiento como su aplicación, de allí que nuestro desarrollo sea autocontenido, es decir, que todo se desarrolla con base en la transformación de Fourier fraccionaria propiamente.

En esta tesis se estudiarón y reformularón algunos de los elementos que se consideran básicos en el análisis de Fourier, conservando siempre como caso límite el tratamiento de Fourier estándar, para luego ser utilizados en algunos campos de intéres. Por lo tanto, obedeciendo a esto, la tesis se divide en tres partes.

En la primera parte se aborda el estudio de las propiedades, teoremas y operaciones básicas, comenzando con una breve descripción de la transformación de Fourier fraccionaria. El primer tratamiento se dirige al estudio de la *varianza* a la traslación de la transformación de Fourier fraccionaria, donde se define una nueva noción, llamada traslación fraccionaria, bajo la cual la transformación de Fourier fraccionaria recupera cierta invariancia. Esta noción conduce a un teorema de muestreo fraccionario, y a las definciones de nuevas operaciones de convolución y correlación fraccionarias, además de una nueva fórmula de interpolación.

La seguna parte hace un breve tratamiento de procesos aleatorios, definiendo las nociones de estacionariedad y ergodicidad en un sentido fraccionario, con esto se define la densidad espectral de potencia fraccionaria. Estos elementos permiten adaptar el teorema del muestreo fraccionario a señales aleatorias estacionarias y ergódicas en un sentido fraccionario. Aquí se desarrolla una técnica de filtrado para señales no estacionarias cuyo caso límite es un filtrado Wiener.

La tercera parte trata la aplicación en particular a la óptica, a la cual se adapta muy bien esta teoría, dada la relación que existe entre la transformación de Fourier fraccionaria y la difracción; lo que constituye la óptica de Fourier fraccionaria. Entre estas aplicaciones se encuentran el registro de un filtro complejo Vander Lugt fraccionario para convolución y correlación fraccionarias ópticas, y otras aplicaciones a la holografía numérica y holografía digital.

Parte I

Propiedades, teoremas y operaciones básicas

El descubrimiento de la transformación de Fourier fraccionaria despertó un gran interés en la busqueda de novedades que esta transformación podría ofrecer en los diferentes campos del conocimiento en los que ya era importante el análisis de Fourier. Resultando así un acelerado número de publicaciones alrededor de este tema, lo que brindó poco espacio al cuestionamiento crítico. Una buena síntesis de estos trabajos se pueden ver en [45].

Por el desacuerdo con parte de los desarrollos teóricos que hasta el momento se han dado y de algunos que no han sido abordados de forma pertinente, se hace indispensable el estudio de ciertos aspectos de la teoría bajo un punto de vista diferente e independiente de lo hecho hasta el momento. En general las diferencias se fundamentan en los métodos utilizados, por algunos autores, que en algunos casos no permiten evidenciar las características esenciales del dominio fraccionario, y en otros casos han sido infortunados conduciendo a errores. Por lo anterior, un método diferente aporta tanto nuevos resultados como nuevas interpretaciones, las cuales enriquecen una teoría y se traducen en nuevas aplicaciones.

En la presentación de lo que se llamará elementos básicos en el análisis de Fourier fraccionario, se tienen cuatro capítulos. El capítulo 1 hace una breve síntesis de la transformación de Fourier fraccionaria, además de su relación con la distribución de Wigner-Ville [72, 70, 18]. En el capítulo 2 se define el operador de traslación fraccionaria [65] con una ilustración en la distribución de Wigner-Ville, este operador juega un papel fundamental en todo el análisis de Fourier fraccionario. En el capítulo 3 se desarrolla un teorema del muestreo [67, 63] para funciones de $\alpha-$banda limitada (de banda limitada en el dominio fraccionario α), con una fórmula de interpolación. En el capítulo 4 se definen las operaciones de convolución y correlación fraccionarias [62, 64], las cuales muestran ser invariantes bajo una traslación fraccionaria.

Los teoremas y operaciones desarrollados en estos capítulos conforman los elementos básicos que permiten realizar los siguientes desarrollos teóricos y prácticos de la presente tesis.

Capítulo 1

Transformación de Fourier Fraccionaria

Parece que la noción de transformación de Fourier fraccionaria aparece por primera vez en un artículo de Wiener de 1929 [71], y luego de forma independiente con Condom en 1937 [20], Kober en 1938 [28] y Patterson en 1959 [46]. Debido a cierta complejidad en las definiciones, la Física tuvo que esperar hasta 1980, año en el que Victor Namias [42] propuso una nueva definición y desarrolla gran parte de sus propiedades, además de sus formas hiper−diferenciales. La transformación de Fourier fraccionaria mantuvo algunas inconsistencias matemáticas hasta 1987 donde Mc-Bride y Kerr [34] la trataron con todo el rigor matemático.

En este capítulo se muestran algunos elementos básicos de la transformación de Fourier fraccionaria, principalmente su definición en la forma dada por Namias, a partir de la cual se desarrolla la presente tesis.

1.1. Definición integral de la tranformación de Fourier fraccionaria

La transformada de Fourier fraccionaria de una función $f \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ se escribe

$$\mathscr{F}_\alpha[f](x_\alpha) = C_\alpha \mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2 \cot\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\pi x^2 \cot\alpha}\mathrm{e}^{i2\pi x x_\alpha/\operatorname{sen}\alpha} dx\,, \tag{1.1}$$

donde $C_\alpha = \frac{\mathrm{e}^{i\left(\mathbb{S}(\operatorname{sen}\alpha)\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sqrt{|\operatorname{sen}\alpha|}}$. La función $\mathbb{S}(\operatorname{sen}\alpha)$ representa el signo de $\operatorname{sen}\alpha$.

Hay dos posibles notaciones para el operador transformación de Fourier fraccionaria, ya sea $\mathscr{F}^a$ o por $\mathscr{F}_\alpha$, con $\alpha = a\frac{\pi}{2}$ el ángulo de la transformación y a la potencia de la transformación, en general se tomará la segunda por comodidad en algunas fórmulas. Por claridad algunas veces se escribe $\mathscr{F}_\alpha[f(x)](x_\alpha)$ en lugar de $\mathscr{F}_\alpha[f](x_\alpha)$, siendo x una variable muda, de este modo se define como:

$$f_\alpha = \mathscr{F}_\alpha[f(x)] = \mathscr{F}_\alpha[f]\,. \tag{1.2}$$

1.2. Rotaciones y proyecciones en el espacio de fase

1.2.1. La distribución de Wigner-Ville

La distribución de Wigner-Ville asociada a la función f, se define

$$W[f](x,y) = \int_{\mathbb{R}} f\left(x + \frac{\xi}{2}\right)\overline{f\left(x - \frac{\xi}{2}\right)}\mathrm{e}^{2i\pi\xi y}d\xi\,. \tag{1.3}$$

1.2.2. Rotación de la distribución de Wigner-Ville

Una de las más importantes propiedades de la transformación de Fourier fraccionaria es: la transformación de Fourier fraccionaria de una función corresponde a una rotación de la distribución de Wigner-Ville [38, 31, 40].

Si $W[f]$ denota la distribución de Wigner-Ville de f, entonces la distribución de Wigner-Ville de f_α, denotada por $W[f_\alpha]$, está dada por

$$W[\mathscr{F}_\alpha f](x,y) \equiv W[f](x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha, x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha)\,, \tag{1.4}$$

luego

$$W[\mathscr{F}_\alpha f] = \mathcal{R}_\alpha W[f]\,, \tag{1.5}$$

donde $\mathcal{R}_\alpha$ es el operador rotación de ángulo α.

Como ilustración se toma una distribución de Wigner-Ville con soporte compacto y se muestra gráficamente el efecto de la transformación de Fourier fraccionaria sobre la distribución de Wigner-Ville, ver figura 1.1.

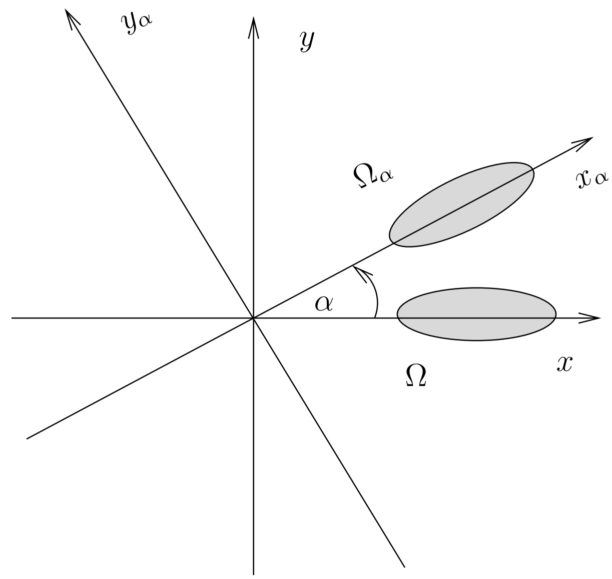

FIGURA 1.1: Efecto de la transformación de Fourier fraccionaria sobre la distribución de Wigner-Ville de una función: α es el ángulo de la transformación, Ω es el soporte de f y Ω_α es el soporte de f_α.

1.2.3. Proyecciones de la distribución de Wigner-Ville

Las distribuciones marginales, o proyección integral de la distribución de Wigner-Ville, ver figura 1.2, están dadas por

$$\int W[f](x,y)dy = |f(x)|^2 \,, \tag{1.6}$$

$$\int W[f](x,y)dx = |F(y)|^2 \,, \tag{1.7}$$

siendo $F(y)$ la transformada de Fourier de $f(x)$.

Dado que $W[f_\alpha]$ es simplemente $W[f]$ rotada en el sentido convencionalmente positivo por un ángulo α, la proyección integral de $W[f_\alpha]$ en el eje x es geométricamente idéntica a la proyección integral de $W[f]$ sobre un eje con ángulo α con el eje x.

En la figura 1.2 se nota que la distribución de Wigner es una distribución “espacio directo”-“espacio recíproco”, y así mismo también lo es la transformada de Fourier fraccionaria (ver almeida [6, 7]).

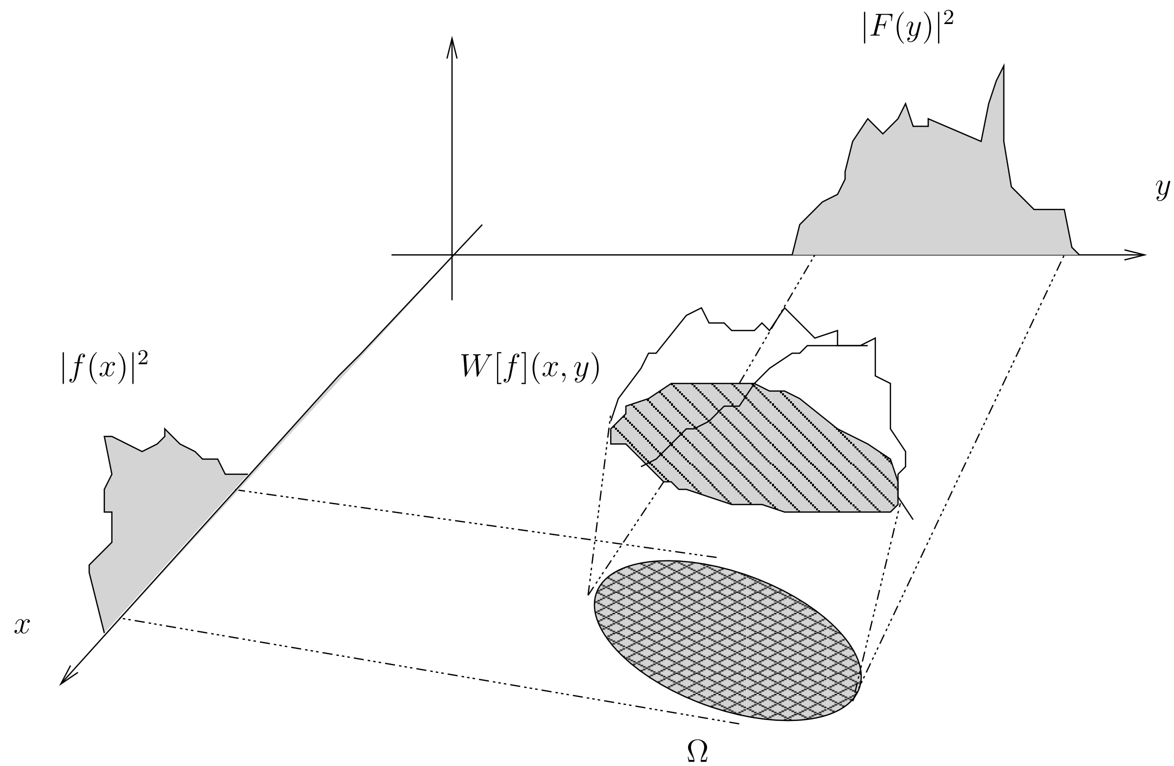

FIGURA 1.2: Proyecciones de la distribución de Wigner-Ville: Ω es el soporte de $W[f]$, $|f(x)|^2$ es la proyección integral de $W[f]$ sobre x y $|F(y)|^2$ es la proyección integral sobre y.

Capítulo 2

Operador de traslación fraccionaria

El operador traslación $\mathscr{T}_\tau[f](x) = f(x-\tau)$ juega un papel muy importante en el análisis de Fourier. Muchas de las principales propiedades de la transformación de Fourier son consecuencia de la invariancia a la traslación, en módulo, de esta transformación. Por lo tanto, aquí se define una noción de traslación fraccionaria [64, 65] con el fin de recuperar la invariancia a la traslación en la transformación de Fourier fraccionaria y, con esto, algunas propiedades fundamentales en el análisis de Fourier estándar (ver Bracewell [13]). Un estudio similar en algunos aspectos se encuentra en [1, 2, 3]; pero en estos no se busca la invariancia, tal como se ilustra en el presente capítulo.

2.1. Propiedades del operador de traslación

Para una función f cuya transformada de Fourier sea F, se cumple

$$\mathscr{F}\mathscr{T}_\tau[f](x') = F(x')\mathrm{e}^{i2\pi\tau x'}\,, \tag{2.1}$$

de modo que la transformada F no se traslada. Es en este sentido que se habla de invariancia a la traslación del módulo de la transformada de Fourier y es la propiedad que se desea conservar para un operador de traslación fraccionaria.

2.1.1. Compensación de un desplazamiento por modulación de fase

Se busca una operación de traslación tal que el módulo de la transformada de Fourier fraccionaria no se traslade. En las ecuaciones A.26 y A.27, se nota que la propiedad de traslación en la transformación de Fourier no se hereda para la transformación de Fourier fraccionaria, se ve que en ambos casos se presenta una traslación en la transformada, esto sugiere: una traslación puede ser compensada por una modulación de fase.

Si se tiene una traslación τ, y una modulación de fase $\mathrm{e}^{i2\pi(\nu x-\varphi)}$, entonces

$$\mathscr{F}_\alpha[f(x-\tau)\mathrm{e}^{i2\pi(\nu x-\varphi)}](x_a) = C_\alpha \mathrm{e}^{-i2\pi\varphi}\mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2 \cot\alpha}\int_{\mathbb{R}} f(x-\tau)\mathrm{e}^{i2\pi\nu x}\mathrm{e}^{-i\pi x^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{\frac{i2\pi x x_\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}\,dx\,, \tag{2.2}$$

con el cambio de variables $x-\tau = z$ y $dx = dz$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_\alpha[f(z)\mathrm{e}^{i2\pi(\nu(z+\tau)-\varphi)}](x_\alpha) = C_\alpha \mathrm{e}^{-i\pi\tau^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i2\pi\tau(\nu+\frac{x_\alpha}{\operatorname{sen}\alpha})}\mathrm{e}^{-i2\pi\varphi}\mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2\cot\alpha}\\ \int_{\mathbb{R}} f(z)\mathrm{e}^{-i\pi z^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i2\pi z\frac{x_\alpha+\nu\operatorname{sen}\alpha-\tau\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}\,dz\,.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Para $\nu = \tau\cot\alpha$ y $\varphi = \frac{\tau^2}{2}\cot\alpha$, se obtiene

$$\mathscr{F}_\alpha[f(x-\tau)\mathrm{e}^{i2\pi\tau(x-\frac{\tau}{2})\cot\alpha}](x_\alpha) = C_\alpha \mathrm{e}^{\frac{i2\pi\tau x_\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}\mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2\cot\alpha}\int_{\mathbb{R}} f(z)\mathrm{e}^{-i\pi z^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{\frac{i2\pi z x_\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}\,dz\,, \tag{2.4}$$

de forma compacta

$$\mathscr{F}_\alpha[f(x-\tau)\mathrm{e}^{i2\pi\tau(x-\frac{\tau}{2})\cot\alpha}](x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha)\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}\tau x_\alpha}\,. \tag{2.5}$$

Esta operación de traslación produce una invariancia por traslación en el mismo sentido dado para la transformación de Fourier estándar.

2.2. Traslación fraccionaria

Con base en la ecuación 2.5 se define una noción de traslación fraccionaria

$$\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f](x) = f(x-\tau)\mathrm{e}^{i2\pi\tau(x-\frac{\tau}{2})\cot\alpha}\,, \tag{2.6}$$

tal que

$$\mathscr{F}_\alpha\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f](x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha)\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}\tau x_\alpha}\,. \tag{2.7}$$

Este operador recupera una invariancia del módulo de la transformada de Fourier fraccionaria bajo una traslación fraccionaria, en el sentido que $|\mathscr{F}_\alpha\mathscr{T}_{\tau;\alpha}f| = |\mathscr{F}_\alpha f|$.

Para $\tau \in \mathbb{R}$ la ley de composición es

$$\mathscr{T}_{\tau;\alpha} \circ \mathscr{T}_{\tau';\alpha} = \mathscr{T}_{\tau+\tau';\alpha} \,. \tag{2.8}$$

En la prueba se toma $g = \mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f]$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathscr{T}_{\tau';\alpha}[g](x) &= g(x-\tau')\mathrm{e}^{2i\pi\tau'(x-\tau'/2)\cot\alpha} \\
&= f(x-\tau-\tau')\mathrm{e}^{2i\pi\tau(x-\tau'-\tau/2)\cot\alpha}\mathrm{e}^{2i\pi\tau'(x-\tau'/2)\cot\alpha} \\
&= f(x-(\tau+\tau'))\mathrm{e}^{2i\pi(\tau+\tau')[x-(\tau+\tau')/2]\cot\alpha} \\
&= \mathscr{T}_{\tau+\tau';\alpha}[f](x)\,,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

con lo que se completa la prueba.

2.2.1. Grupo traslación fraccionaria

Para este operador se verifica

- Clausura
$$\mathscr{T}_{\tau_1;\alpha}\mathscr{T}_{\tau_2;\alpha} = \mathscr{T}_{\tau_1+\tau_2;\alpha} \,. \tag{2.10}$$
- Asociativa
$$\mathscr{T}_{\tau_1;\alpha}(\mathscr{T}_{\tau_2;\alpha}\mathscr{T}_{\tau_3;\alpha}) = (\mathscr{T}_{\tau_1;\alpha}\mathscr{T}_{\tau_2;\alpha})\mathscr{T}_{\tau_3;\alpha} \,. \tag{2.11}$$
- Identidad
$$\mathscr{T}_{0;\alpha} = \mathcal{I} \,. \tag{2.12}$$
- Inversa
$$\mathscr{T}^{-1}_{\tau;\alpha} = \mathscr{T}_{-\tau;\alpha} \,, \tag{2.13}$$
tal que
$$\mathscr{T}^{-1}_{\tau;\alpha}\mathscr{T}_{\tau;\alpha} = \mathcal{I} \,. \tag{2.14}$$

Por lo tanto, este operador forma un grupo continuo de transformaciones; el grupo de traslaciones fraccionarias $\mathbf{T}(\alpha)$, que además, dado que

$$\mathscr{T}_{\tau_1;\alpha}\mathscr{T}_{\tau_2;\alpha} = \mathscr{T}_{\tau_1+\tau_2;\alpha} = \mathscr{T}_{\tau_2+\tau_1;\alpha} = \mathscr{T}_{\tau_2;\alpha}\mathscr{T}_{\tau_1;\alpha} \,, \tag{2.15}$$

constituye un grupo **abeliano**. Para $\alpha = \pi/2$ tenemos la traslación estándar, que conforma un subgrupo $\mathbf{T}(\pi/\mathbf{2})$, tal que $\mathbf{T}(\pi/\mathbf{2}) \subseteq \mathbf{T}(\alpha)$.

2.2.2. Traslación fraccionaria como un operador unitario

La operación de traslación fraccionaria se escribe

$$\begin{aligned} \mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f](x) &= f(x-\tau)\mathrm{e}^{i2\pi\tau(x-\frac{\tau}{2})\cot\alpha} \\ &= \int_{\infty}^{\infty} K_\tau(x,u)f(u)du\,, \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde $K_\tau(x,u)$ es el kernel de la transformación, con

$$K_\tau(x,u) = \delta(x-\tau-u)\mathrm{e}^{i2\pi u(x-u)\cot\alpha}\mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}\,. \tag{2.17}$$

La adjunta conjugada de 2.17 es

$$\overline{K_\tau(u,x)} = \delta(u-\tau-x)\mathrm{e}^{-i2\pi x(u-x)\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i\pi\tau^2\cot\alpha}\,, \tag{2.18}$$

así

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{K_\tau(u,x)}f(u)du &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(u-\tau-x)\mathrm{e}^{-i2\pi x(u-x)\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i\pi\tau^2\cot\alpha}du \\ &= f(x+\tau)\mathrm{e}^{-i2\pi\tau(x+\frac{\tau}{2})\cot\alpha} \\ &= \mathscr{T}_{-\tau;\alpha}[f](x)\,, \end{aligned} \tag{2.19}$$

con esto, en virtud de la ecuación 2.13, se tiene que el operador traslación fraccionaria es un operador unitario.

2.2.3. Sistemas lineales invariantes bajo traslación

La teoría de sistemas hace un tratamiento general, en el cual todo sistema que cumpla la propiedad de linealidad e invariancia a la traslación se le puede aplicar el análisis de Fourier. Esto se desprende del hecho de que las funciones propias de estos sistemas son las funciones armónicas. Así, un sistema

$\mathcal{S}$ lineal e invariante a la traslación se caracteriza por su respuesta *percusional* h, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{S}[f(x)] &= \mathcal{S}\left[\int_R f(x')\delta(x-x')dx'\right] \\ &= \int_R f(x')\mathcal{S}[\delta(x-x')]dx' \\ &= \int_R f(x')\mathscr{T}_{x'}[h](x)dx' \\ &= \int_R f(x')h(x-x')dx' \,. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Bajo la hipótesis que la "invariancia" a la traslación se presente en la forma de una traslación fraccionaria ($\alpha-$traslación), tales sistemas los podemos caracterizar en la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathcal{S}[f](x) &= \int_R f(x')\mathscr{T}_{x';\alpha}[h](x)\mathrm{e}^{-i\pi x'^2 \cot\alpha}dx' \\ &= \int_R f(x')h(x-x')\mathrm{e}^{i2\pi x'(x-x')\cot\alpha}dx' \,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Se verá en el capítulo 9 que los sistemas ópticos que trabajan en el régimen de Fresnel se pueden tratar bajo este modelo.

2.2.4. Funciones propias y valores propios del operador $\mathscr{T}_{\tau;\alpha}$

Se encuentra que el operador traslación fraccionaria actuando sobre las funciones

$$\psi_{x';\alpha}(x) = \mathrm{e}^{i\pi x'^2 \cot\alpha}\mathrm{e}^{i\pi x^2 \cot\alpha}\mathrm{e}^{-i2\pi x x'/\operatorname{sen}\alpha}\,, \tag{2.22}$$

que son el kernel de la tranformación de Fourier fraccionaria, da como resultado

$$\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[\psi_{x';\alpha}](x) = \mathrm{e}^{i2\pi\tau x'/\operatorname{sen}\alpha}\psi_{x';\alpha}(x)\,. \tag{2.23}$$

De esta forma el kernel de la transformación de Fourier fraccionaria son las funciones propias del operador traslación fraccionaria con valores propios $\lambda = \exp(i2\pi\tau x'/\operatorname{sen}\alpha)$.

2.3. Efectos sobre la distribución de Wigner-Ville

Siempre es interesante ver cuál es el efecto de las transformaciones sobre una función en la distibución de Wigner-Ville, dado que en esa representación las operaciones tienen una interpretación geométrica. Como se ha visto, la transformación de Fourier fraccionaria representa una rotación de la distibución de Wigner-Ville. Por tanto, interesa ver que significa una traslación fraccionaria en la distibución de Wigner-Ville.

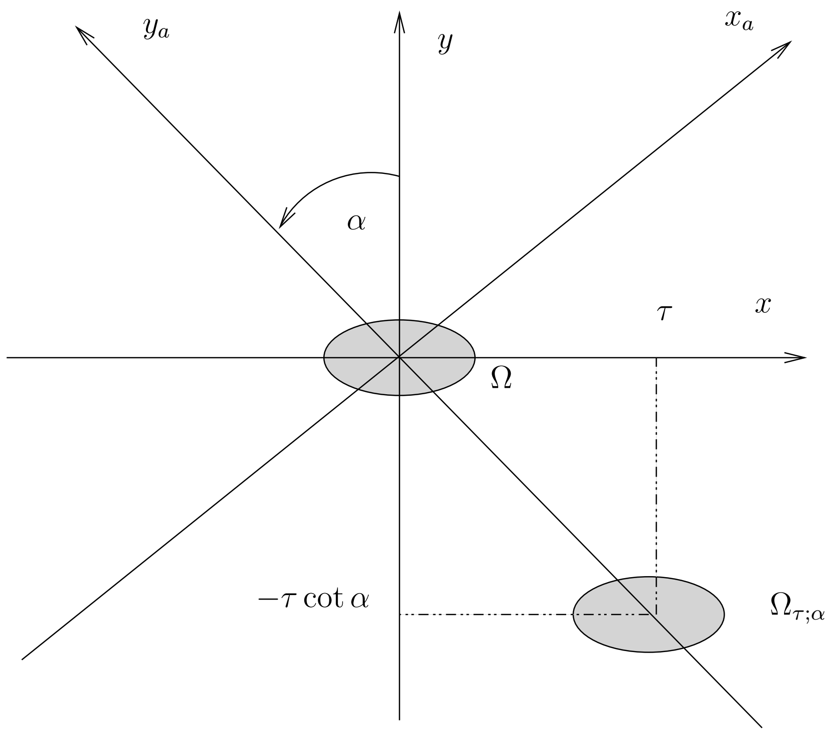

FIGURA 2.1: El efecto de la traslación fraccionaria sobre la distibución de Wigner-Ville de una función: Ω es el soporte de $W[f]$, $\Omega_{\tau;\alpha}$ es el soporte de $W[\mathscr{T}_{\tau;\alpha} f]$

Sea f una función con una distibución de Wigner-Ville $W[f]$, entonces la distibución de Wigner-Ville de $\mathscr{T}_{\tau;\alpha} f$ está dada por

$$\begin{aligned} W[\mathscr{T}_{\tau;\alpha} f](x,y) &= \int_R \mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f]\left(x+\frac{\xi}{2}\right)\overline{\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f]\left(x-\frac{\xi}{2}\right)}\mathrm{e}^{i2\pi\xi y} d\xi \\ &= \int_R f\left(x-\tau+\frac{\xi}{2}\right)\overline{f\left(x-\tau-\frac{\xi}{2}\right)}\mathrm{e}^{2i\pi(y+\tau\cot\alpha)\xi} d\xi\,, \end{aligned} \tag{2.24}$$

de aquí se tiene

$$W[\mathscr{T}_{\tau;\alpha} f](x,y) = W[f](x-\tau, y+\tau\cot\alpha)\,. \tag{2.25}$$

Para ilustrar la operación, se supone $W[f]$ con soporte compacto Ω, entonces el soporte $\Omega_{\tau;\alpha}$ de $W[\mathscr{T}_{\tau;\alpha}f]$ se deduce de Ω por una traslación $(\tau, -\tau\cot\alpha)$, ver figura 2.1.

2.4. Conclusiones sobre el operador de traslación fraccionaria

Se definió un operador de traslación fraccionaria el cual mostró ser una traslación en ejes oblicuos de la distibución de Wigner-Ville de una señal. Se mostró que este operador conforma un grupo continuo de transformaciones y, bajo el cual, la transformación de Fourier fraccionaria es invariante en módulo, tal que

$$|\mathscr{F}_\alpha \mathscr{T}_{\tau;\alpha} f| = |\mathscr{F}_\alpha f| \,. \tag{2.26}$$

Además se probó que es un operador unitario, lo cual es muy útil desde el punto de vista formal, así

$$\langle \mathscr{T}_{\tau;\alpha} f, \mathscr{T}_{\tau;\alpha} g\rangle = \langle f, g\rangle \,, \tag{2.27}$$

en general

$$\langle \mathscr{T}_{\tau_1;\alpha} f, \mathscr{T}_{\tau_2;\alpha} g\rangle = \langle f, \mathscr{T}_{\tau_2-\tau_1;\alpha} g\rangle \,. \tag{2.28}$$

Es posible que algunos sistemas lineales presenten una "invariancia" a la traslación en la forma de una traslación fraccionaria, estos sistema tienen como funciones propias las funciones

$$\psi_{x';\alpha}(x) = \mathrm{e}^{i\pi x'^2 \cot\alpha} \mathrm{e}^{i\pi x^2 \cot\alpha} \mathrm{e}^{-i2\pi x x'/\operatorname{sen}\alpha} \,, \tag{2.29}$$

que son el kernel de la transformación de Fourier fraccionaria.

Capítulo 3

Muestreo de señales con soporte compacto en dominios de Fourier fraccionarios

Como ya se ha sugerido, la invariancia en módulo de la transformación de Fourier fraccionaria bajo una operación de traslación fraccionaria, permitirá adaptar al tratamiento de Fourier fraccionario los métodos conocidos en el tratamiento de Fourier. De este modo, aquí se muestra como el operador traslación fraccionaria facilita la prueba de un teorema del muestreo [67, 63, 65] para funciones que son de α-banda limitada. Este teorema para $\alpha = \pi/2$ se reduce al teorema de Shannon−Whittaker.

Un teorema del muestreo para la transformación de Fourier fraccionaria ha sido investigado en varias oportunidades [16, 77, 82], en todos los casos las investigaciones se han desarrollado con base en el teorema de Shannon-Whittaker, es decir, usando la transformación de Fourier estándar. Como se ha mencionado, tal enfoque oculta las características del dominio fraccionario, lo que dificulta el estudio de las posibles aplicaciones que de aquí se puedan generar. Con la intención de clarificar un teorema del muestreo y su utilización, se desarrolla el mismo en un enfoque autocontenido en el sentido que todos los cálculos se desarrollan con base en la transformación de Fourier fraccionaria y no en la transformación de Fourier.

3.1. Teorema del muestreo

De la ecuación 2.7 se tiene

$$\mathscr{F}_{-\alpha}\mathscr{T}_{\tau,-\alpha}[f_\alpha](x) = f(x)\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}\tau x}\,. \tag{3.1}$$

Bajo la hipótesis que f_α tenga soporte compacto confinado en el intervalo $[-B/2, B/2]$. La función f_α puede ser replicada utilizando el operador traslación fraccionaria

$$S_\alpha(x_\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathscr{T}_{nB,-\alpha}[f_\alpha](x_\alpha)\,. \tag{3.2}$$

La función S_α es un infinito conjunto de réplicas de f_α (seudo-periódicas), ver figura 3.1.

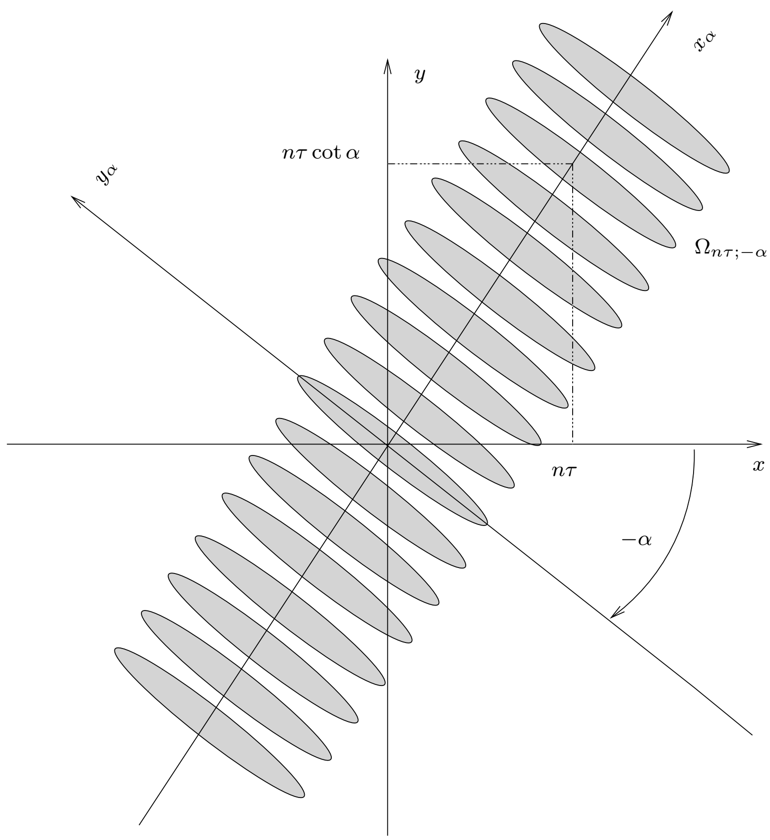

FIGURA 3.1: Distribución de Wigner-Ville $W[S_\alpha]$, con $\Omega_{n\tau;-\alpha}$ el soporte de la n-ésima réplica.

La transformada de Fourier fraccionaria de orden $-\alpha$ de S_α está dada por

$$\mathscr{F}_{-\alpha}[S_\alpha](x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_{-\alpha}[\mathscr{T}_{nB,-\alpha} f_\alpha](x)\,, \tag{3.3}$$

por la ecuación 3.1 y la fórmula de Poisson (ver capitulo 9 de [56]), se tiene

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_{-\alpha}[S_\alpha](x) &= f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i2\pi nBx/\operatorname{sen}\alpha} \\ &= f(x) ш_{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}}(x) \,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

La función $ш_{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}}$ es una función peinilla de Dirac, definida como

$$ш_{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}}(x) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right) , \tag{3.5}$$

donde el paso de la peinilla está dado por $\operatorname{sen}\alpha/B$. Entonces la función f puede ser recuperada a partir de sus muestras ya que $S_\alpha(x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha)$ para $x_\alpha \in [-B/2, B/2]$.

Teorema 3.1.1 (Muestreo). Sea f una función tal que su transformada de Fourier fraccionaria de orden α tiene soporte compacto, confinado en el intervalo $[-B/2, B/2]$, entonces f puede ser muestreada y reconstruida perfectamente si las muestras se toman a una rata $\eta \leq \operatorname{sen}\alpha/B$.

3.2. Fórmula de interpolación

El espectro fraccionario de orden α se recupera multiplicando S_α por una función rectángulo $Rect_B$ definida por $Rect_B(x_\alpha) = 1$ si $|x_\alpha| \leq B/2$ y $Rect_B(x_\alpha) = 0$ si $|x_\alpha| > B/2$. Entonces $f_\alpha = S_\alpha Rect_B$.

Si se tiene

$$\widehat{f}(x) = f(x) ш_{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}}(x) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right) \delta\left(x - n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right) , \tag{3.6}$$

tal que según la ecuación 3.4, aplicando $\mathscr{F}_\alpha$, se tiene que

$$\begin{aligned} S_\alpha(x_\alpha) &= \mathscr{F}_\alpha \widehat{f}(x_\alpha) \\ &= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right) \mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2 \cot\alpha} \mathrm{e}^{-i\pi \frac{n^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{B^2}} \mathrm{e}^{i2\pi\frac{n x_\alpha}{B}} \,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

En general, el filtro $Rect_B$ se usa para separar cualquiera de las réplicas que conforman la función S_α. Para realizar esto se utiliza una función rectángulo desplazado a la posición mB, siendo m un entero que identifica la réplica a filtrar, así

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_{-\alpha}\left[S_\alpha(x_\alpha)Rect_B(x_\alpha - mB)\right] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right) \mathrm{e}^{-i\pi\frac{n^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}} \\ &\times \left[\mathrm{e}^{i\pi x^2\cot\alpha}\int Rect_B(x_\alpha - mB)\mathrm{e}^{i2\pi\frac{nx_\alpha}{B}}\mathrm{e}^{-i2\pi\frac{xx_\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}dx_\alpha\right],\end{aligned} \tag{3.8}$$

utilizando a la ecuación 3.2 se tiene que

$$f(x) = \mathrm{e}^{i\pi x^2\cot\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)\mathrm{e}^{-i\pi\frac{n^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x\pi B}{\operatorname{sen}\alpha} - n\pi\right)}{\frac{x\pi B}{\operatorname{sen}\alpha} - n\pi}. \tag{3.9}$$

Esta es la fórmula de interpolación que permite recuperar f a partir de sus muestras. Obsérvese que si $\alpha = \pi/2$ se reduce a la fórmula de Shannon.

3.3. Estudio sobre el soporte de las funciones

Sea f de α-banda limitada, es decir, f_α tiene soporte compacto, entonces $f_{\alpha-\pi/2}$ se extiende en todo el espacio dado que $f_\alpha = \mathscr{F}[f_{\alpha-\pi/2}]$. Por lo tanto si se hace $\mathscr{F}_\gamma[f_{\alpha-\pi/2}] = \mathscr{F}_\beta[f]$ con $\gamma = \beta-\alpha+\pi/2$, definiendo

$$g(x_\beta) = \int f_{\alpha-\pi/2}(x_{\alpha-\pi/2})\mathrm{e}^{i\frac{2\pi x_{\alpha-\pi/2}x_\beta}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha+\pi/2)}}dx_{\alpha-\pi/2}\,, \tag{3.10}$$

y

$$h(x_\beta) = \frac{\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi x_\beta^2}{\operatorname{sen}(2\beta-2\alpha+\pi)}}}{\sqrt{\cot(\beta-\alpha+\pi/2)}}\,, \tag{3.11}$$

entonces se puede escribir

$$\mathscr{F}_\beta[f](x_\beta) = C_\beta\mathrm{e}^{i\pi/4}\mathrm{e}^{-i\pi x_\beta^2\cot(\beta-\alpha+\pi/2)}[g*h](x_\beta)\,, \tag{3.12}$$

donde $\beta = b\pi/2$ y $\alpha = a\pi/2$ y el símbolo $*$ representa la convolución estándar. Se nota que el resultado de esa convolución es una función de soporte compacto sólo para $b = a \pm 2k$, siendo k un entero, donde

$$\delta(x_\beta) = \lim_{b\to a\pm 2k}\frac{\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi x_\beta^2}{\operatorname{sen}(2\beta-2\alpha+\pi)}}}{\sqrt{\cot(\beta-\alpha+\pi/2)}}\,, \tag{3.13}$$

es una distribución de Dirac, y

$$\lim_{b\to a\pm 2k} g(x_\beta) = f_{\alpha\pm k\pi}\,, \tag{3.14}$$

la cual tiene soporte compacto.

Teorema 3.3.1. Sea f una función cuya transformada de Fourier fraccionaria de orden α es de soporte compacto, entonces no existe otro orden $\beta \neq \alpha \pm k\pi$ para el cual también sea de soporte compacto, con k un entero.

De esto resulta que funciones α-banda limitada con $0 < \alpha < \pi/2$, se extienden en todo el espacio tanto en el dominio directo como en el dominio de Fourier, por lo cual para estas funciones no es aplicable el teorema del muestreo de Shannon-Whittaker directamente.

3.4. Conclusiones sobre el teorema del muestreo fraccionario

Se mostró para funciones de α-banda limitada un teorema de muestreo, cuya fórmula de interpolación está dada por

$$f(x) = \mathrm{e}^{i\pi x^2 \cot\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right) \mathrm{e}^{-i\pi \frac{n^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{B^2}} \frac{\operatorname{sen}(\frac{x\pi B}{\operatorname{sen}\alpha} - n\pi)}{\frac{x\pi B}{\operatorname{sen}\alpha} - n\pi}\,, \tag{3.15}$$

cuyo caso particular con $\alpha = \pi/2$ es el teorema del muestreo de Shannon-Whittaker.

En este tratamiento el operador traslación fraccionaria juega un papel fundamental. La transformada de Fourier fraccionaria de orden α de una función $\alpha-$trasladada se encuentra centrada y modulada linealmente en fase en la forma

$$\mathscr{F}_{-\alpha}\mathscr{T}_{\tau,-\alpha}[f_\alpha](x) = f(x)\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}\tau x}\,, \tag{3.16}$$

esta fase lineal es la responsable del muestreo cuando se tienen replicas $\alpha-$trasladadas, como se puede ver en la ecuación 3.4.

Capítulo 4

Convolución y Correlación

La convolución y la correlación juegan un papel fundamental en todo el análisis de Fourier (ver por ejemplo J. Max [33]), de allí que sea necesario su estudio y adaptación al análisis de Fourier fraccionario. Para la transformación de Fourier fraccionaria se han extendido las propiedades y operaciones definidas para la transformación de Fourier estándar. Se han hecho varios trabajos para definir los productos de correlación y convolución fraccionarias, dando como resultado varias definiciones alternativas [81, 39, 41, 35, 8, 4], las cuales no obedecen a muchas de las propiedades que han hecho de la convolución una de las principales operaciones en el análisis de Fourier.

Desalentadores resultados simulados y experimentales [57, 35, 9] han conducido al desinterés de los investigadores en este tema, dándolo casi por cerrado injustamente.

En este capítulo se muestran las definiciones para la convolución y correlación fraccionaria. No sólo se busca que estas definiciones tengan como caso límite el tratamiento estándar, si no que además se puedan escribir como una integral sencilla, como se conoce para el caso estándar (ver ecuaciones B.2 y B.3).

La forma integral se busca con el fin de entender bien que significa esta operación y de este modo buscar su *invariancia* a la traslación. Se verá que esta operación guarda una invariancia bajo una traslación fraccionaria [62, 64].

4.1. Convolución fraccionaria

Se define la convolución fraccionaria $f \overset{\alpha}{*} g$ de orden α mediante

$$[f \overset{\alpha}{*} g] = \mathscr{F}_{-\alpha}[\mathscr{F}_\alpha[f]\mathscr{F}_\alpha[g]] \,. \tag{4.1}$$

Se nota que $f \overset{\pi/2}{*} g = f * g$ y $f \overset{0}{*} g = fg$. Parece natural introducir esta definición con la intensión de garantizar que se siga cumpliendo el teorema de la convolución

$$\mathscr{F}_\alpha[f \overset{\alpha}{*} g] = \mathscr{F}_\alpha[f]\mathscr{F}_\alpha[g] \,. \tag{4.2}$$

Son varios los trabajos que la muestran como definición de convolución fraccionaria, pero aquí se se tomará una versión modificada que pueda expresarse por una integral sencilla, como sucede para la convolución estándar (ver ecuación B.2). Se mostrará que esta definición de la ecuación 4.1 no tiene una forma integral simple, es decir, que no se puede expresar bajo un solo signo de integración, lo cual es ciertamente incómodo si se quiere que tal operación tenga como caso límite la convolución estándar o convencional.

4.1.1. Seudo-generalización

Se encuentra en la literatura algunas definiciones de la convolución fraccionaria presentadas como el caso general. Se encuentra por ejemplo una definición compuesta de tres parámetros

$$f *_\alpha^{\beta,\gamma} g = \mathscr{F}_{-\alpha}\left[\mathscr{F}_\beta[f]\,\mathscr{F}_\gamma[g]\right] \,. \tag{4.3}$$

A continuación utilizaremos la misma notación. Pero es pertinente resaltar que no se trata realmente de una extensión de la noción de convolución fraccionaria ya que esta última se puede llevar a la forma que se ha definido en (4.1). Así

$$\begin{aligned} f *_\alpha^{\beta,\beta} g &= \mathscr{F}_{-\alpha}\left[\mathscr{F}_\beta[f]\,\mathscr{F}_\beta[g]\right] \\ &= \mathscr{F}_{-\alpha+\beta}\left\{\mathscr{F}_{-\beta}\left[\mathscr{F}_\beta[f]\,\mathscr{F}_\beta[g]\right]\right\} \\ &= \mathscr{F}_{-\alpha+\beta}[f *^\beta g] \,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

De la misma manera

$$\begin{aligned} f *_{\alpha}^{\alpha,\beta} g &= \mathscr{F}_{-\alpha}\left[\mathscr{F}_{\alpha}[f]\,\mathscr{F}_{\beta}[g]\right] \\ &= \mathscr{F}_{-\alpha}\left\{\mathscr{F}_{\alpha}[f]\,\mathscr{F}_{\alpha}\left[\mathscr{F}_{\beta-\alpha}[g]\right]\right\} \\ &= f *^{\alpha} \mathscr{F}_{\beta-\alpha}[g]\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Así se llega a la definición compuesta con un solo orden fraccionario. En general todos los casos se pueden llevar a esta forma, por lo que parece lógico, tomar esta definición como el caso general de convolución fraccionaria.

4.1.2. Definición integral de la convolución fraccionaria

El principal inconveniente que presenta esta definición está asociado con la variancia a la traslación [35, 9], cuya propiedad ha encontrado algunas aplicaciones [9, 79, 35], pero en general su aplicación se ve limitada, sobre todo en el campo del reconocimiento de formas.

Esta definición, ecuación 4.1, es demasiado abstracta y se hace necesario encontrar una forma integral para la convolución fraccionaria que permita una mejor interpretación de esta operación. Esto lo hacemos con base en el hecho que en la convolución estándar (ver apéndice B) se entiende mejor su invariancia a la traslación en su forma integral B.2 y B.3.

Se toma la definición 4.1

$$[f \overset{\alpha}{*} g](x) = \mathscr{F}_{-\alpha}\left[\mathscr{F}_{\alpha}[f](x_{\alpha})\;\mathscr{F}_{\alpha}[g](x_{\alpha})\right](x)\,, \tag{4.6}$$

la transformada de Fourier fraccionaria de esta es

$$\mathscr{F}_{\alpha}[f \overset{\alpha}{*} g](x_{\alpha}) = \mathscr{F}_{\alpha}[f](x_{\alpha})\;\mathscr{F}_{\alpha}[g](x_{\alpha})\,, \tag{4.7}$$

en forma integral

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_{\alpha}[f \overset{\alpha}{*} g](x_{\alpha}) &= C_{\alpha}\mathscr{F}_{\alpha}[g](x_{\alpha})[\mathrm{e}^{-i\pi x_{\alpha}^{2}\cot\alpha}\int f(u)\mathrm{e}^{-i\pi u^{2}\cot\alpha}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}ux_{\alpha}}du] \\ &= C_{\alpha}\mathrm{e}^{-i\pi x_{\alpha}^{2}\cot\alpha}\int f(u)\mathrm{e}^{-i\pi u^{2}\cot\alpha}\mathscr{F}_{\alpha}[g](x_{\alpha})\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}ux_{\alpha}}du\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

De la ecuación 2.7 se tiene

$$\mathscr{F}_\alpha[g](x_\alpha)\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}ux_\alpha} = \mathscr{F}_\alpha[\mathscr{T}_{\alpha;u}g](x_\alpha)\,, \tag{4.9}$$

reemplazando ésta en la ecuación 4.8, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_\alpha[f \overset{\alpha}{*} g](x_\alpha) &= C_\alpha \mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2\cot\alpha}\int f(u)\mathrm{e}^{-i\pi u^2\cot\alpha}\mathscr{F}_\alpha[g(x-u)\mathrm{e}^{-i\pi u^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i2\pi ux\cot\alpha}](x_\alpha)du \\
&= C_\alpha \mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2\cot\alpha}\int f(u)\mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2\cot\alpha} \\
&\times \int g(x-u)\mathrm{e}^{-i2\pi u^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i2\pi ux\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i\pi x^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}xx_\alpha}dxdu\,,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

lo cual se puede escribir apropiadamente de la siguiente forma

$$\mathscr{F}_\alpha[f \overset{\alpha}{*} g](x_\alpha) = \underline{\mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2\cot\alpha}}\mathscr{F}_\alpha\left[\int f(u)g(x-u)\mathrm{e}^{-i2\pi u^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i2\pi xu\cot\alpha}du\right](x_\alpha)\,. \tag{4.11}$$

Como se puede apreciar, el factor de fase cuadrático, subrayado, no permite escribir tal definición de la ecuación 4.1 como una integral simple, de aquí se hace necesario definir una nueva noción de convolución fraccionaria. Entonces se concluye que

$$h(x) = \int f(u)g(x-u)\mathrm{e}^{-i2\pi u^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i2\pi xu\cot\alpha}du\,, \tag{4.12}$$

es una buena candidata para ser una nueva definición de convolución fraccionaria, lo cual nos conduce a redefinir la convolución fraccionaria de la ecuación 4.1 según

$$[f *_\alpha g](x) = \mathscr{F}_{-\alpha}\left[\mathscr{F}_\alpha[f](x_\alpha)\ \mathscr{F}_\alpha[g](x_\alpha)\mathrm{e}^{i\pi x_\alpha^2\cot\alpha}\right](x)\,. \tag{4.13}$$

Ya con esta nueva definición y repitiendo todo el proceso anterior se llega a la definición integral de la convolución fraccionaria

$$[f *_\alpha g](x) = \int f(u)g(x-u)\mathrm{e}^{i2\pi u(x-u)\cot\alpha}du\,. \tag{4.14}$$

Este producto de convolución fraccionaria se reduce a la convolución estándar para $\alpha = \pi/2$.

4.2. Correlación fraccionaria

Similarmente para la correlación fraccionaria se define

$$[f \overset{\alpha}{\circledast} g](x) = \mathscr{F}_{-\alpha}\left[\mathscr{F}_\alpha[f](x_\alpha)\,\overline{\mathscr{F}_\alpha[g](x_\alpha)}\right](x)\,, \tag{4.15}$$

pero a partir de la ecuación 4.13, se introduce un nuevo producto de correlación fraccionaria

$$[f \circledast_\alpha g](x) = \mathscr{F}_{-\alpha}\left[\mathscr{F}_\alpha[f](x_\alpha)\,\overline{\mathscr{F}_\alpha[g](x_\alpha)}\mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2\cot\alpha}\right](x)\,, \tag{4.16}$$

y en su forma integral se tiene

$$[f \circledast_\alpha g](x) = \int f(u)\overline{g(u-x)}\mathrm{e}^{-i2\pi x(u-x)\cot\alpha}du\,. \tag{4.17}$$

Para mostrar que las ecuaciones 4.16 y 4.17 son equivalentes, se parte de

$$\mathscr{F}_\alpha[f \overset{\alpha}{\circledast} g](x_\alpha) = \overline{\mathscr{F}_\alpha[g](x_\alpha)}C_\alpha\mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2\cot\alpha}\int_R f(u)\mathrm{e}^{-i\pi u^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{2i\pi u x_\alpha/\operatorname{sen}\alpha}du\,. \tag{4.18}$$

Utilizando la ecuación 2.7 se tiene

$$\overline{\mathscr{F}_\alpha\mathscr{T}_{-u;\alpha}[g](x_\alpha)} = \overline{\mathscr{F}_\alpha[g](x_\alpha)}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}ux_\alpha}\,, \tag{4.19}$$

remplazando la ecuación 4.19 en 4.18

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_\alpha[f \overset{\alpha}{\circledast} g](x_\alpha) &= C_\alpha\mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2\cot\alpha}\int_R f(u)\mathrm{e}^{-i\pi u^2\cot\alpha}\overline{\mathscr{F}_\alpha\mathscr{T}_{-u;\alpha}[g](x_\alpha)}du \\
&= |C_\alpha|^2\int_R f(u)\mathrm{e}^{-i\pi u^2\cot\alpha} \\
&\times \int_R \overline{g(x+u)}\mathrm{e}^{2i\pi u(x+\frac{u}{2})\cot\alpha}\mathrm{e}^{i\pi x^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}xx_\alpha}dxdu \\
&= |C_\alpha|^2\iint_R f(u)\overline{g(x+u)}\mathrm{e}^{2i\pi ux\cot\alpha}\mathrm{e}^{i\pi x^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}xx_\alpha}dudx\,.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Como x es una variable muda se puede cambiar x por $-x$ e invertir los límites de la integral, luego

$$\mathscr{F}_\alpha[f \overset{\alpha}{\circledast} g](x_\alpha) = \mathrm{e}^{i\pi x_\alpha^2\cot\alpha}\overline{C_\alpha}\mathscr{F}_\alpha\left[\int_R f(u)\overline{g(u-x)}\mathrm{e}^{-2i\pi x(u-x)\cot\alpha}du\right](x_\alpha)\,, \tag{4.21}$$

de esta manera utilizando las ecuaciones 4.15 y 4.17 se tiene

$$\mathscr{F}_\alpha[f \circledast_\alpha g](x_\alpha) = \mathscr{F}_\alpha[f](x_\alpha)\, \overline{\mathscr{F}_\alpha[g](x_\alpha)} \mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2 \cot\alpha}\,, \tag{4.22}$$

y con esto se completa la prueba.

Se muestra que:

$$\begin{aligned}
[f *_\alpha g](x)\Big|_{\alpha=\pi/2} &= [g * f](x)\,, && (4.23)\\
[f *_\alpha g](x)\Big|_{\alpha=0} &= f(x)g(x)\delta(x)\,, && (4.24)\\
[f *_\alpha g](x) &= [g *^\alpha f](x)\,, && (4.25)\\
[f *_\alpha \delta](x) &= f(x)\,, && (4.26)\\
[f *_\alpha \delta_\xi](x) &= f(x-\xi)\mathrm{e}^{i2\pi\xi(x-\xi)\cot\alpha}\,, && (4.27)\\
[f \circledast_\alpha f](0) &= [f \circledast f](0) = \int |f(u)|^2 du\,, && (4.28)\\
[f \circledast_\alpha g](x)\Big|_{\alpha=\pi/2} &= [g \circledast f](x)\,, && (4.29)\\
[f \circledast_\alpha g](x)\Big|_{\alpha=0} &= f(x)\overline{g(x)}\delta(x)\,. && (4.30)
\end{aligned}$$

4.3. Efectos de la traslación fraccionaria sobre la convolución y correlación fraccionaria

Como es ya conocido, el operador de traslación puede ser definido con base en el producto de convolución. Para el caso fraccionario se verifica que el operador traslación fraccionario se puede definir con base en el producto de convolución fraccionario de una función por una distribución de Dirac, así

$$\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f] = (f *_\alpha \delta_\tau)\mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}\,, \tag{4.31}$$

para $\alpha = \pi/2$ se tiene el operador de traslación estándar.

4.3.1. Traslación fraccionaria y convolución

Aquí se estudia el efecto del operador traslación fraccionaria sobre el producto de convolución fraccionaria de dos funciones.

Se remarca que la ecuación 4.14 se puede escribir

$$f *_\alpha g(x) = \int_R f(u)\mathscr{T}_{u;\alpha}[g](x)\mathrm{e}^{-i\pi u^2 \cot\alpha} du\,. \tag{4.32}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}(f *_\alpha g)(x-\tau) &= \int_R f(u)g(x-\tau-u)\mathrm{e}^{2i\pi u(x-\tau-u)\cot\alpha} du \\ &= \int_R f(u-\tau)\mathrm{e}^{-2i\pi\tau(x-u)\cot\alpha} g(x-u)\mathrm{e}^{2i\pi u(x-u)\cot\alpha} du\,,\end{aligned} \tag{4.33}$$

y entonces

$$(f *_\alpha g)(x-\tau)\mathrm{e}^{2i\pi\tau x\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i\pi\tau^2\cot\alpha} = \int_R f(u-\tau)\mathrm{e}^{2i\pi\tau(u-\tau/2)\cot\alpha} g(x-u)\mathrm{e}^{2i\pi u(x-u)\cot\alpha} du\,, \tag{4.34}$$

que es

$$\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f *_\alpha g](x) = \int_R \mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f](u)\mathscr{T}_{u;\alpha}[g](x)\mathrm{e}^{-i\pi u^2\cot\alpha}\,. \tag{4.35}$$

Por otra parte, de la ecuación 4.32 se tiene

$$\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f *_\alpha g](x) = \int_R f(u)\mathscr{T}_{\tau+u;\alpha}[g](x)\mathrm{e}^{-i\pi u^2\cot\alpha}\,. \tag{4.36}$$

Las ecuaciones 4.35 y 4.36, expresan la propiedad de invariancia del producto de convolución fraccionario bajo el grupo de traslaciones fraccionarias, la cual se sintetiza por

$$\mathscr{T}_{\tau;\alpha}(f *_\alpha g) = (\mathscr{T}_{\tau;\alpha} f) *_\alpha g = f *_\alpha (\mathscr{T}_{\tau;\alpha} g)\,. \tag{4.37}$$

4.3.2. Traslación fraccionaria y correlación

Aquí se estudia el efecto del operador traslación fraccionaria sobre el producto de correlación fraccionaria.

Se remarca que la ecuación 4.17 se puede escribir

$$f \circledast_\alpha g(x) = \int_R f(u)\overline{\mathscr{T}_{x;\alpha}[g](u)}\mathrm{e}^{i\pi x^2\cot\alpha} du\,. \tag{4.38}$$

De acuerdo a la ecuación 4.17 se tiene

$$\begin{aligned} (f \circledast_\alpha g)(x-\tau) &= \int_R f(u)\overline{g(u-x+\tau)}\mathrm{e}^{-2i\pi(x-\tau)(u-x+\tau)\cot\alpha}du \\ &= \int_R f(u-\tau)\mathrm{e}^{2i\pi\tau(u-x)\cot\alpha}\overline{g(u-x)}\mathrm{e}^{-2i\pi x(u-x)\cot\alpha}du\,, \end{aligned} \tag{4.39}$$

y entonces

$$(f \circledast_\alpha g)(x-\tau)\mathrm{e}^{2i\pi\tau x\cot\alpha} = \int_R f(u-\tau)\mathrm{e}^{2i\pi\tau u\cot\alpha}\overline{g(u-x)}\mathrm{e}^{-2i\pi x(u-x)\cot\alpha}\,, \tag{4.40}$$

lo cual se puede escribir

$$\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f \circledast_\alpha g](x) = \int_R \mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f](u)\overline{\mathscr{T}_{x;\alpha}[g](u)}\mathrm{e}^{i\pi x^2\cot\alpha}\,. \tag{4.41}$$

Por otra parte de la ecuación 4.38

$$(f \circledast_\alpha g)(x-\tau) = \int_R f(u)\mathscr{T}_{x-\tau;\alpha}[g](u)\mathrm{e}^{i\pi(x-\tau)^2\cot\alpha}du\,, \tag{4.42}$$

de aquí se tiene

$$\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f \circledast_\alpha g](x) = \int_R f(u)\overline{\mathscr{T}_{x-\tau;\alpha}[g](u)}\mathrm{e}^{i\pi x^2\cot\alpha}\,. \tag{4.43}$$

Las ecuaciones 4.41 y 4.43, expresan la propiedad de invariancia del producto de correlación fraccionario bajo el grupo de traslaciones fraccionarias, la cual se sintetiza por

$$\mathscr{T}_{\tau;\alpha}(f \circledast_\alpha g) = (\mathscr{T}_{\tau;\alpha}f) \circledast_\alpha g = f \circledast_\alpha (\mathscr{T}_{-\tau;\alpha}g)\,. \tag{4.44}$$

4.3.2.1. Resultados simulados

Se ilustra la invariancia a la traslación para la correlación fraccionaria. Se calcula $h = f \circledast_\alpha g$ para $f = \mathscr{T}_{a;\alpha}[Rect_T]$ y $g = \mathscr{T}_{b;\alpha}[Rect_T]$. Como f y g son versiones $\alpha-$trasladadas de $Rect_T$, ellas incluyen un factor de fase cuadrático, por eso se muestran en la los gráficos $|f|$ y $|g|$. Los resultados simulados en la figura 4.2 fueron hechos para $\alpha = 0{,}6\pi/2$. La figura 4.2(a) $a = b = 0$. En las figuras 4.2(b), (c) y (d) son calculadas para $a = 0$ y $b = 0{,}2$, $b = 0{,}4$ y $b = 0{,}6$ respectivamente. Como $a = 0$ para todas, la función de correlación se encuentra siempre en la posición de g; esto ilustra claramente la invariancia a la traslación de la correlación fraccionaria bajo una operación de traslación fraccionaria, en cada caso la función $|h|$ conserva su forma.

La figura 4.1(a) representa la correlación fraccionaria de orden $\alpha = 0{,}6\pi/2$ para $a = -0{,}2$ y $b = 0{,}4$ la función de correlación se localiza en $x = b - a = 0{,}6$.

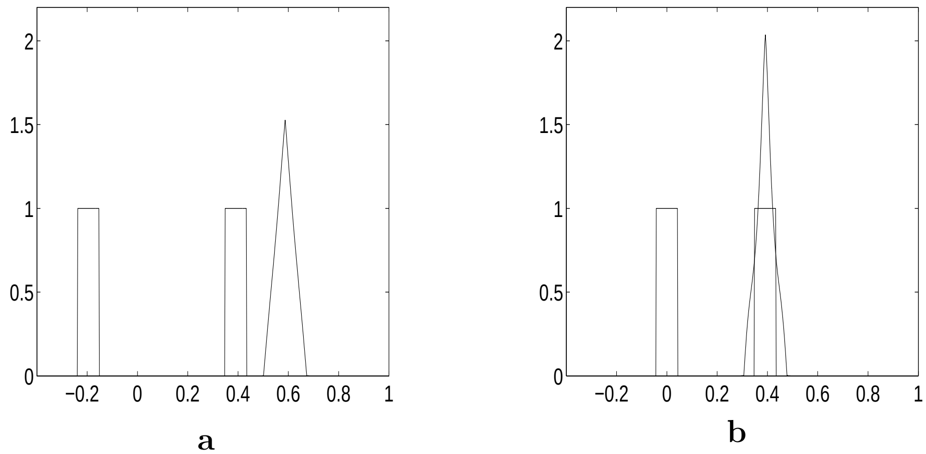

FIGURA 4.1: (a) Correlación fraccionaria de orden $\alpha = 0{,}6\pi/2$ de dos rectángulos trasladados. (b) Correlación fraccionaria de orden $\alpha = 0{,}3\pi/2$.

La figura 4.1(b) corresponde a la correlación fraccionaria de orden $\alpha = 0{,}3\pi/2$ de f y g para $a = 0$ y $b = 0{,}4$ el máximo de la función de correlación es más alto y su cintura es más estrecha que en la figura 4.2(c), conservándose la energía.

4.4. Aplicación al teorema del muestreo en dominios fraccionarios

Con el propósito de verificar la consistencia del sistema de operaciones y teoremas aqui desarrollados, se presenta una prueba del teorema del muestreo fracionario con base en el producto de convoución fraccionaria.

Se define la función peinilla de Dirac fraccionaria ($\sqcup\!\sqcup_{\tau;\alpha}$), la cual está dada por

$$\sqcup\!\sqcup_{\tau;\alpha} = \frac{\tau}{|\operatorname{sen}\alpha|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n\tau} \mathrm{e}^{i\pi(n\tau)^2 \cot\alpha} \,. \tag{4.45}$$

Para $\alpha = \pi/2$ $\sqcup\!\sqcup_{\tau;\pi/2}(x) = \sqcup\!\sqcup_{\tau}(x)$ es una peinilla de Dirac convencional como la mostrada en la ecuación 3.5.

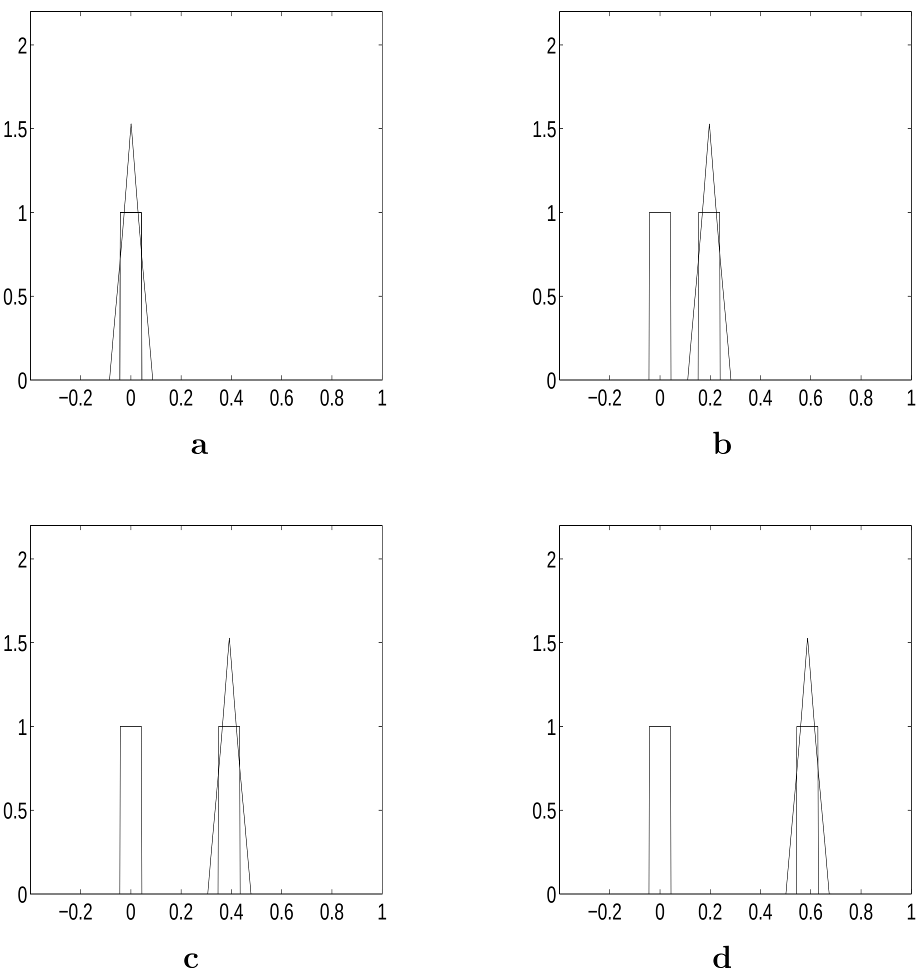

FIGURA 4.2: Ilustración de la invariancia a la traslación de la correlación fraccionaria. La correlación fraccionaria de orden $\alpha = 0{,}6\pi/2$, entre una función rectángulo en el origen y otra trasladada "fraccionariamente". (a) $b = 0$ (autocorrelación fraccionaria). (b) $b = 0{,}2$. (c) $b = 0{,}4$. (d) $b = 0{,}6$. La función de correlación está siempre ubicada en b

Una propiedad importante de esta peinilla de Dirac fraccionaria es

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_\alpha \sqcup\!\sqcup_{\tau;\alpha}(x_\alpha) &= \frac{\tau}{|\operatorname{sen}\alpha|}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\pi(n\tau)^2\cot\alpha}\mathscr{F}_\alpha\delta_{n\tau}(x_\alpha) \\ &= C_\alpha\frac{\tau}{|\operatorname{sen}\alpha|}\mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2\cot\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{2i\pi n\tau x_\alpha/\operatorname{sen}\alpha}\,, \end{aligned} \tag{4.46}$$

utilizando la fórmula de Poisson

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_\alpha[\sqcup\!\sqcup_{\tau;\alpha}](x_\alpha) &= C_\alpha\mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2\cot\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x_\alpha - n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\tau}) \\ &= C_\alpha\tau\sqcup\!\sqcup_{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\tau};-\alpha}(x_\alpha)\,, \end{aligned} \tag{4.47}$$

así, la transformada de Fourier fraccionaria de una peinilla fraccionaria de paso τ es otra peinilla fraccionaria de paso $\operatorname{sen}\alpha/\tau$.

Con ayuda de las ecuaciones 4.45 y 4.31 se puede escribir 3.2 en la forma

$$S_\alpha(x_\alpha) = \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{B} \sqcup\!\sqcup_{B;-\alpha} *_{-\alpha} f_\alpha(x_\alpha)\,, \tag{4.48}$$

la función S_α es un conjunto infinito de réplicas de f_α. La transformada de Fourier fraccionaria de orden $-\alpha$ de S_α es

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_{-\alpha}[S_\alpha](x) &= \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{B} f(x)\mathscr{F}_{-\alpha}[\sqcup\!\sqcup_{B;-\alpha}](x)\mathrm{e}^{-i\pi x^2\cot\alpha} \\ &= C_{-\alpha} f(x)\sqcup\!\sqcup_{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B};\alpha}(x)\mathrm{e}^{-i\pi x^2\cot\alpha} \\ &= C_{-\alpha}\frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{B} f(x)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x - n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})\,. \end{aligned} \tag{4.49}$$

La función $\mathscr{F}_{-\alpha}[S_\alpha]$ es una versión muestreada de f, el paso de muestreo es $\operatorname{sen}\alpha/B$. Entonces la función f puede ser recuperada a partir de sus muestras ya que por 4.48 $S_\alpha(x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha)$ para $x_\alpha \in [-B/2, B/2]$.

Una expresión explícita del teorema del muestreo fraccionario se puede obtener como sigue. Se define la función utilizada en el filtrado como $R_B(x_\alpha) = Rect_B(x_\alpha)\mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2\cot\alpha}$ y la función de interpolación $r_B = \mathscr{F}_{-\alpha}R_B$, entonces

$$\begin{aligned} r_B(x) &= C_\alpha \mathrm{e}^{i\pi x^2\cot\alpha}\int_R Rect_B(x_\alpha)\mathrm{e}^{-2i\pi x x_\alpha/\operatorname{sen}\alpha}dx_a \\ &= C_\alpha\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi B x}{\operatorname{sen}\alpha})}{\frac{\pi x}{\operatorname{sen}\alpha}}\mathrm{e}^{i\pi x^2\cot\alpha}\,. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Usando 4.49y $C_{-\alpha}C_\alpha = 1/|\operatorname{sen}\alpha|$, la fórmula de interpolación está dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= (\mathscr{F}_{-\alpha}[S_\alpha] *_\alpha r_B)(x) \\ &= C_{-\alpha}C_\alpha\frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{B}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})\int_R \delta(u - n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})\mathrm{e}^{i\pi(x-u)^2\cot\alpha}\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi B(x-u)}{\operatorname{sen}\alpha})}{\frac{\pi(x-u)}{\operatorname{sen}\alpha}}\mathrm{e}^{2i\pi u(x-u)\cot\alpha}du \\ &= \mathrm{e}^{i\pi x^2\cot\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi B x}{\operatorname{sen}\alpha} - n\pi)}{\frac{\pi B x}{\operatorname{sen}\alpha} - n\pi}\mathrm{e}^{-i\pi(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})^2\cot\alpha}\,. \end{aligned} \tag{4.51}$$

4.5. Conclusiones sobre los productos de convolución y correlación fraccionaria

Se define la noción de convolución fraccionaria

$$\begin{aligned}[f *_\alpha g](x) &= \mathscr{F}_{-\alpha}\left[\mathscr{F}_\alpha[f](x_\alpha)\ \mathscr{F}_\alpha[g](x_\alpha)\mathrm{e}^{i\pi x_\alpha^2 \cot\alpha}\right](x) \\ &= \int_R f(u)g(x-u)\mathrm{e}^{i2\pi u(x-u)\cot\alpha}du \\ &= \int_R f(u)\mathscr{T}_{u;\alpha}[g](x)\mathrm{e}^{-i\pi u^2\cot\alpha}du\,. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Esta definición resulta como una necesidad, luego de que se exija una formulación integral del producto de convolución fraccionario, dado que se prueba que la definición 4.1 presenta inconvenientes en este propósito. Como es conocido para el caso estándar, a partir del producto de convolución fraccionario, se define el producto de correlación fraccionario

$$\begin{aligned}[f \circledast_\alpha g](x) &= \mathscr{F}_{-\alpha}\left[\mathscr{F}_\alpha[f](x_\alpha)\ \overline{\mathscr{F}_\alpha[g](x_\alpha)}\mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2 \cot\alpha}\right](x) \\ &= \int_R f(u)\overline{g(u-x)}\mathrm{e}^{-i2\pi x(u-x)\cot\alpha}du \\ &= \int_R f(u)\overline{\mathscr{T}_{x;\alpha}[g](u)}\mathrm{e}^{i\pi x^2\cot\alpha}du\,. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Nuevamente el operador de traslación fraccionaria es fundamental, los productos de convolución y correlación fraccionarios son invariantes bajo una traslación fraccionaria, lo cual se sintetiza en

$$\mathscr{T}_{\tau;\alpha}(f *_\alpha g) = (\mathscr{T}_{\tau;\alpha}f) *_\alpha g = f *_\alpha (\mathscr{T}_{\tau;\alpha}g)\,, \tag{4.54}$$

$$\mathscr{T}_{\tau;\alpha}(f \circledast_\alpha g) = (\mathscr{T}_{\tau;\alpha}f) \circledast_\alpha g = f \circledast_\alpha (\mathscr{T}_{-\tau;\alpha}g)\,. \tag{4.55}$$

Estos resultados fueron ilustrados por simulaciones computacionales (ver figuras 4.1, 4.2).

Con este producto de convolución fraccionario se sintetizan varios elementos, como la definición del operador de traslación fraccionario, el cual se presenta como

$$\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[f] = (f *_\alpha \delta_\tau)\mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}\,, \tag{4.56}$$

y de aquí se define la peinilla de Dirac fraccionaria

$$\sqcup\!\sqcup_{\tau;\alpha} = \frac{\tau}{|\operatorname{sen}\alpha|} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{n\tau} \mathrm{e}^{i\pi(n\tau)^2 \cot\alpha}\,, \tag{4.57}$$

la cual cumple

$$\mathscr{F}_\alpha[\sqcup\!\sqcup_{\tau;\alpha}](x_\alpha) = C_\alpha \tau \sqcup\!\sqcup_{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\tau};-\alpha}(x_\alpha)\,. \tag{4.58}$$

El teorema del muestreo que se desarrolla de una forma simple con base en la noción de convolución fraccionaria por una peinilla de Dirac fraccionaria, así

$$C_{-\alpha} f(x) \sqcup\!\sqcup_{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B};\alpha}(x) \mathrm{e}^{-i\pi x^2 \cot\alpha} \overset{\alpha}{\rightleftharpoons} \frac{|\operatorname{sen}\alpha|}{B} \sqcup\!\sqcup_{B;-\alpha} *_{-\alpha} f_\alpha(x_\alpha)\,, \tag{4.59}$$

conforman un par de Fourier fraccionario.

Parte II

Tratamiento de señales aleatorias (prospectivo)

Típicamente en la detección de señales se desea recuperar una información que porta la misma, la cual ha sido corrompida por la transmisión en un canal ruidoso. Además la señal al ser *a priori* desconocida puede ser vista también como un ruido. Esto conduce al problema de separar un ruido de otro ruido, y al modelo de las señales por funciones aleatorias, cuyo formalismo es también aplicable en el caso de señales deterministas.

En el tratamiento de fenómenos espacio−temporales es útil llevar el problema a un espacio de variables reducidas. La función $f(t)$, del tiempo, se escala tal que $f'(t') = f(t/\Lambda)$, donde t' es una variable adimensional y Λ es un factor de escala que tiene dimensiones de segundos. Así, el tratamiento que sigue es en variables reducidas, pero se seguirá escribiendo t en lugar de t' para aliviar la notación y recordar que se trata de una variable asociada al tiempo.

Con el propósito de formalizar las bases para un tratamiento de señales aleatorias, mediante un análisis de Fourier fraccionario, se tratan algunos elementos que se consideran básicos en tales tratamientos (ver [33]). En el capítulo 5 se desarrollan algunos conceptos básicos de funciones aleatorias, para luego en el capítulo 6 deducir un teorema del muestreo para señales aleatorias de α-banda limitada. Por último en el capítulo 7 se hace un estudio del filtrado de señales aleatorias, proponiéndose una técnica con base en la convolución y correlación fraccionaria.

Capítulo 5

Funciones aleatorias

Las funciones aleatorias son una herramienta importante en el análisis de procesos aleatorios [68,55]. En el tratamiento de estas funciones, la teoría de probabilidades juega un papel fundamental, esta disciplina trata con rigor la noción de variable aleatoria, donde tales variables toman valores que dependen de elementos no predecibles: “el azar”.

En este capítulo se exponen brevemente algunos elementos fundamentales de probabilidad en una forma estándar, para luego extenderlos a nociones es un sentido fraccionario, con la intención de formular las bases de un tratamiento de señales aleatorias por transformación de Fourier fraccionaria.

5.1. Espacio de probabilidad

Se define espacio de probabilidad como la tripla $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ con Ω el espacio de puntos ω, $\mathscr{F}$ un σ-álgebra de subconjuntos de Ω y P una medida de probabilidad definida sobre los conjuntos de $\mathscr{F}$ (ver $[37, 68, 56]$), tal que

1. $0 \leq P \leq 1$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Dado cualquier colección numerable de conjuntos disyuntos $A_1, A_2, \ldots, \in \mathscr{F}$ entonces

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)\,. \tag{5.1}$$

De esta forma, los elementos de $\mathscr{F}$ son llamados eventos o conjuntos medibles.

5.2. Señal aleatoria

Dado un fenómeno aleatorio, cuyas realizaciones $\omega \in \Omega$; con Ω el conjunto de posibles realizaciones del fenómeno aleatorio o estados accesibles al fenómeno aleatorio; se le asocie una función $X(\omega, y)$: esta función se le llamará "función aleatoria".

En particular para un proceso aleatorio, el tratamiento se adapta al estudio de señales aleatorias, así a una señal aleatoria le podemos asociar la función aleatoria $X(\omega, t)$, de modo que a un instante dado $t = t_0$ se tiene una variable aleatoria $X(\omega, t_0) = x_{t_0}(\omega)$, y para una relalización de la función aleatoria $\omega = \omega_0$, tenemos una función determinista del tiempo $X(\omega_0, t) = x_{\omega_0}(t)$.

La función de distribución de primer orden de X es dada por

$$F_X(x_1; t_1) = P\{X(\omega, t_1) \leq x_1\}\,, \tag{5.2}$$

para el segundo orden

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(\omega, t_1) \leq x_1, X(\omega, t_2) \leq x_2\}\,, \tag{5.3}$$

para la distribución de n-ésimo orden

$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = P\{X(\omega, t_1) \leq x_1, \ldots, X(\omega, t_n) \leq x_n\}\,. \tag{5.4}$$

La densidad de probabilidad de n-ésimo orden se escribe

$$P_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}\,. \tag{5.5}$$

Para describir completamente las propiedades estadísticas de la función X se hace necesario conoser todas las distribuciones con $n \to \infty$. En la práctica, afortunadamente, típicamente es suficiente con una estadística de segundo orden y en algunos casos de cuarto orden.

Sea $P_X(x; t)$ la densidad de probabilidad de primer orden de la función aleatoria $X(\omega, t)$, se define el valor esperado o promedio estadístico como

$$E\left\{X(t)\right\} = \int x P_X(x; t) dx\,, \tag{5.6}$$

el cual es en general función del tiempo.

5.3. Estacionariedad y Ergodicidad

5.3.1. Proceso estacionario

Un proceso se dice estacionario si todos sus momentos

$$p_n(t) = E\left\{|X(t)|^n\right\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x|^n P_X(x;t)dx\,, \tag{5.7}$$

son independientes de t, es decir, $p_1(t) = m_1,\ p_2(t) = m_2,\ \ldots,\ p_n(t) = m_n,\ \ldots$, constantes.

Se puede definir los momentos cruzados, por ejemplo

$$C_X(t_1,t_2) = E\left\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\right\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x_1\overline{x_2}P_X(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2\,, \tag{5.8}$$

llamada covarianza, la cual puede ser interpretada como una medida de la interdependencia entre $X(t_1)$ y $X(t_2)$, dado que si son estadísticamente independientes, se tiene

$$E\left\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\right\} = E\left\{X(t_1)\right\} E\left\{\overline{X(t_2)}\right\}\,. \tag{5.9}$$

Por lo general en la práctica sólo basta con limitarse a la estacionariedad de segundo orden (estacionariedad en el sentido amplio), la cual queda

- i
$$E\left\{X(t)\right\} \quad \text{no depende de } t.$$
- ii
$$E\left\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\right\} \quad \text{depende solo de } \tau = t_1 - t_2\,.$$

En lo que sigue se hablará sólo a estacionariedad simplemente, pero limitándose al segundo orden.

Para procesos estacionarios se define la función de autocorrelación estadística por

$$\Gamma_X(\tau) \triangleq E\left\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\right\}\,. \tag{5.10}$$

5.3.2. Procesos ergódicos

En la práctica es mucho más cómodo realizar promedios temporales que promedios de estadísticos. El promedio temporal de la función aleatoria $X(\omega, t) = x_\omega(t)$ para un valor fijo de ω, se define por

$$\langle x_\omega(t) \rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_\omega(t) dt \,. \tag{5.11}$$

Si el límite existe, en general $\langle x_\omega(t) \rangle$ es una variable aleatoria, consecuentemente, se puede calcular su promedio estadístico

$$E\left\{\langle x_\omega(t) \rangle\right\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E\left\{X(t)\right\} dt \,. \tag{5.12}$$

Si además $X(\omega, t)$ es un proceso estacionario, entonces se tiene

$$E\left\{\langle x_\omega(t) \rangle\right\} = E\left\{X(t)\right\} \,. \tag{5.13}$$

Para

$$\Omega' = \left\{\omega : \langle x_\omega(t) \rangle = E\left\{X(t)\right\}\right\} \in \mathscr{F} \,, \tag{5.14}$$

el proceso se dice ergódico en la media, si $P(\Omega') = 1$, es decir que $P(\Omega \Delta \Omega') = 0$, donde $\Omega\Delta\Omega' = (\Omega \cup \Omega') - (\Omega \cap \Omega')$ es el conjunto diferencia simétrica de Ω y Ω'.

Se define la función de autocorrelación temporal para la realización ω del proceso aleatorio

$$\Gamma_\omega(\tau) \triangleq \left\langle x_\omega(t)\overline{x_\omega(t-\tau)} \right\rangle = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_\omega(t)\overline{x_\omega(t-\tau)} dt \,. \tag{5.15}$$

Si el límite existe, entonces $\Gamma_\omega(\tau)$ es una variable aleatoria y su promedio estadístico es

$$E\left\{\Gamma_\omega(\tau)\right\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E\left\{X(t)\overline{X(t-\tau)}\right\} dt \,. \tag{5.16}$$

Si $X(t)$ es un proceso estacionario, entonces se tiene

$$E\left\{\Gamma_\omega(\tau)\right\} = E\left\{X(t)\overline{X(t-\tau)}\right\} \,. \tag{5.17}$$

Sea

$$\Omega' = \left\{\omega : \Gamma_\omega(\tau) = E\left\{X(t)\overline{X(t-\tau)}\right\}\right\} \in \mathscr{F} \,, \tag{5.18}$$

el proceso se dice ergódico en la autocorrelación, si $P\left(\Omega'\right) = 1$.

5.3.3. Estacionariedad y ergodicidad en el sentido fraccionario

Sea un proceso aleatorio cuya función se escribe

$$X'(\omega,t) = X(\omega,t)\mathrm{e}^{-i\phi(\omega,t)}\,, \tag{5.19}$$

donde $\phi(\omega,t)$ es una función aleatoria. Un caso particular, cuyo interés se justificará más adelante, es

$$X'(\omega,t) = X(\omega,t)\mathrm{e}^{-i2\pi\nu(\omega,t)t}\,, \tag{5.20}$$

así $\nu(\omega,t)$ es una función aleatoria. Si $\nu(\omega,t) = \frac{1}{2}t\cot\alpha_\omega$, se tiene

$$X'(\omega,t) = X(\omega,t)\mathrm{e}^{-i\pi t^2\cot\alpha_\omega}\,, \tag{5.21}$$

siendo α_ω una variable aleatoria, pero que seguiremos escribiendo solomente α para aliviar la notación.

La función de autocorrelación estadística de X' esta dada por

$$E\left\{X'(t_1)\overline{X'(t_2)}\right\} = E\left\{X(t_1)\overline{X(t_2)}\mathrm{e}^{-i\pi t_1^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i\pi t_2^2\cot\alpha}\right\}\,, \tag{5.22}$$

con $t = t_1$ y $\tau = t_1 - t_2$ tenemos

$$\begin{aligned} E\left\{X'(t)\overline{X'(t-\tau)}\right\} &= E\left\{X(t)\overline{X(t-\tau)}\mathrm{e}^{-i2\pi\tau(t-\tau)\cot\alpha}\right\} \\ &= E\left\{X(t)\overline{\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[X](t)}\mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}\right\}\,, \end{aligned} \tag{5.23}$$

si el proceso X' es estacionario, entonces

$$\left[X \circledast_\alpha X\right](\tau) = E\left\{X(t)\overline{\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[X](t)}\mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}\right\}\,. \tag{5.24}$$

Notese que si X' es estacionaria, entonces X no lo es, así se puede decir que X es estacionaria en un sentido fraccionario. Por la ecuación 4.38 se llamará a esta ecuación (5.24) autocorrelación estadística fraccionaria.

Se define la función de autocorrelación temporal fraccionaria

$$\left[X \circledast_\alpha X\right]_\omega(\tau) = \left\langle X(t)\overline{\mathscr{T}_{\tau;\alpha}\left[X\right](t)}\mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}\right\rangle = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_\omega(t)\overline{\mathscr{T}_{\tau;\alpha}\left[x_\omega\right](t)}\mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}dt\,. \tag{5.25}$$

El proceso se dice ergódico en la autocorrelación fraccionaria si

$$P(\Omega' = \{\omega : [X \circledast_\alpha X] = [X \circledast_\alpha X]_\omega\}) = 1\,, \tag{5.26}$$

con $\alpha_\omega = \alpha$, así la función de autocorrelación temporal es determinista para $\omega \in \Omega'$.

5.4. Densidad espectral de potencia fraccionaria y teorema de Wiener-Kinchine fraccionario

5.4.1. Ergodicidad de la densidad espectral de potencia fraccionaria

Cuando se trata con procesos aleatorios, se asume que la función $X_\omega(t)$ existe para todo t. En general, no son integrables y por lo tanto no existe su transformada de Fourier y por la misma razón tampoco existe la transformada de Fourier fraccionaria. Sin embargo se interesa conservar una noción de espectro que se adapte a estas señales. Estas señales son en general de energía infinita, tal que

$$\mathscr{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |x_\omega(t)|^2 dt = \infty\,, \tag{5.27}$$

de aquí que se defina la potencia media por

$$0 < \mathscr{P}_\omega = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x_\omega(t)|^2 dt < \infty\,, \tag{5.28}$$

bajo la hipotesis que la integral converga. Para estas señales se define la densidad espectral de potencia fraccionaria de una realización x_ω por

$$S^\alpha_{x_\omega}(\nu_\alpha) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left| e^{i\pi\nu_\alpha^2 \cot\alpha} \int_{-T/2}^{T/2} x_\omega(t) e^{i\pi t^2 \cot\alpha} e^{i2\pi\nu_\alpha t/\operatorname{sen}\alpha} dt \right|^2 . \tag{5.29}$$

Si este límite converge para $\omega \in \Omega' \in \mathscr{F}$ con $P(\Omega') = 1$, entonces se puede definir la densidad espectral de potencia fraccionaria de la señal por

$$S^\alpha_X(\nu_\alpha) = E\left\{S^\alpha_{x_\omega}(\nu_\alpha)|\Omega'\right\}\,, \tag{5.30}$$

donde esta notación indica que el promedio se hace sobre los $\omega \in \Omega'$. Un proceso aleatorio $X_\omega(t)$ es ergódico en densidad espectral de potencia fraccionaria si

$$\Omega'' = \{\omega : S_X^\alpha(\nu_\alpha) = S_{x_\omega}^\alpha(\nu_\alpha)\}\,, \tag{5.31}$$

tiene una probabilidad $P(\Omega'') = 1$, tal que $P(\Omega'\Delta\Omega'') = 0$.

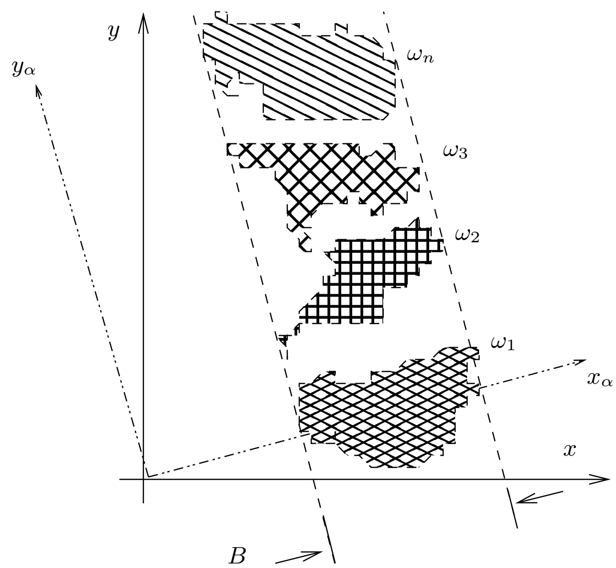

Figura 5.1: Distribuciónes de Wigner de $[X \circledast_\alpha X]_\omega$ de una señal aleatoria ergódica en el sentido fraccionario, donde ω_n es el correspondiente soporte de la n-ésima realización de la señal

En la figura 5.1 es claro que estas señales no son ergódicas en el sentido convencional, dado que su densidad espectral de potencia estándar, que corresponde a la proyección integral sobre el eje y, tienen soporte que depende de la realización ω_n.

5.4.2. Teorema de Wiener-Kinchine fraccionario

Utilizando la ecuación 5.25 se tiene

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_\alpha\left[X \circledast_\alpha X\right]_\omega(\nu_\alpha) &= \mathrm{e}^{-i\pi\nu_\alpha^2\cot\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_\omega(t)\overline{\mathscr{T}_{\tau;\alpha}\left[x_\omega\right](t)}\mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}dt \\
&\times\ \mathrm{e}^{-i\pi\tau^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i2\pi\nu_\alpha\tau/\operatorname{sen}\alpha}d\tau \\
&= \mathrm{e}^{-i\pi\nu_\alpha^2\cot\alpha}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\iint_{-T/2}^{T/2} x_\omega(t)\overline{\mathscr{T}_{\tau;\alpha}\left[x_\omega\right](t)} \\
&\times\ \mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i\pi\tau^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i2\pi\nu_\alpha\tau/\operatorname{sen}\alpha}dtd\tau\,,
\end{aligned} \tag{5.32}$$

luego de un procedimiento similar al hecho en la correlación para señales deterministas, se tiene

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_\alpha \left[X \circledast_\alpha X\right]_\omega (\nu_\alpha) &= \mathrm{e}^{-i\pi\nu_\alpha \cot\alpha} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left| e^{i\pi\nu_\alpha^2 \cot\alpha} \int_{-T/2}^{T/2} x_\omega(t) e^{i\pi t^2 \cot\alpha} e^{i2\pi\nu_\alpha t/\operatorname{sen}\alpha} dt \right|^2 \\ &= S_x^\alpha(\nu_\alpha) \mathrm{e}^{-i\pi\nu_\alpha \cot\alpha}, \end{aligned} \tag{5.33}$$

así, si la señal es ergódica en autocorrelación fraccionaria, entonces

$$\mathscr{F}_\alpha \left[X \circledast_\alpha X\right] (\nu_\alpha) \mathrm{e}^{i\pi\nu_\alpha \cot\alpha} = S_X^\alpha(\nu_\alpha)\,. \tag{5.34}$$

5.5. Conclusiones

Se introduce la noción de estacionariedad en el sentido fraccionario

$$\left[X \circledast_\alpha X\right](t, t-\tau) = \left[X \circledast_\alpha X\right](\tau)\,. \tag{5.35}$$

Se introduce el concepto de ergodicidad en autocorrelación fraccionaria, con esto se justifica

$$\left[X \circledast_\alpha X\right] = \left[X \circledast_\alpha X\right]_\omega\,, \tag{5.36}$$

salvo para un subconjunto de medida cero. Además se introduce el concepto de ergodicidad en densidad espectral de potencia fraccionaria, así se tiene

$$S_X^\alpha(\nu_\alpha) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left| e^{i\pi\nu_\alpha^2 \cot\alpha} \int_{-T/2}^{T/2} x_\omega(t) e^{i\pi t^2 \cot\alpha} e^{i2\pi\nu_\alpha t/\operatorname{sen}\alpha} dt \right|^2\,, \tag{5.37}$$

salvo para un subconjunto de medida cero.

Por intermedio de un teorema de “Wiener-Kinchine”, se puede escribir

$$\mathscr{F}_\alpha \left[X \circledast_\alpha X\right] (\nu_\alpha) \mathrm{e}^{i\pi\nu_\alpha \cot\alpha} = S_X^\alpha(\nu_\alpha)\,, \tag{5.38}$$

donde $[X \circledast_\alpha X]$ es la función de autocorrelación y S_X^α la densidad espectral de potencia.

Capítulo 6

Teorema del muestreo fraccionario para funciones aleatorias

Se trata de encontrar un teorema de muestreo para señales aleatorias estacionarias y ergódicas en autocorrelación fraccionaria. Como la función $[X \circledast_\alpha X](t)$ es determinista (ver sección 5.3.3), le podemos aplicar el teorema del muestreo para señales deterministas, bajo la hipotesis que tenga un densidad espectral de potencia fraccionaria con α-banda limitada.

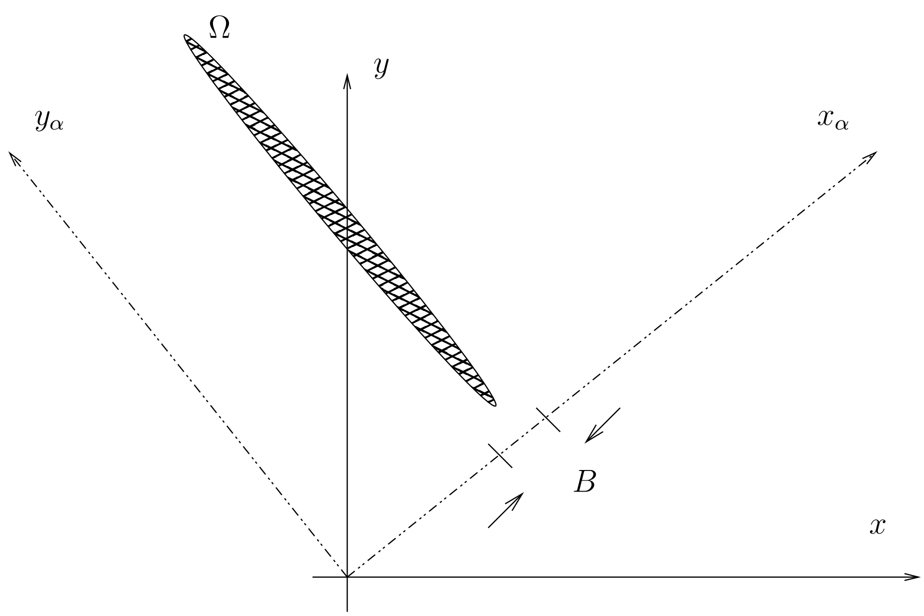

FIGURA 6.1: Ilustración de la distribución de Wigner de la función de autocorrelación fraccionaria de una señal con densidad espectral de potencia de α-banda limitada

Así, partiendo del teorema del muestreo para la función de autocorrelación fraccionaria se busca deducir un teorema del muestreo para la función aleatoria propiamente.

6.1. Teorema del muestreo fraccionario para funciones aleatorias

Sea $X_\omega(t)$ un proceso aleatorio estacionario y ergódico en autocorrelación fraccionaria con una densidad espectral de potencia fraccionaria de α-banda limitada tal que $S_X^\alpha(\nu_\alpha) \neq 0$ para $\nu_\alpha \in [-B/2, B/2]$ (ver figura 6.1). Por el teorema de Wiener-Kinchine fraccionario (sección 5.4), la densidad espectral de potencia fraccionaria y la función de autocorrelación fraccionaria forman un par de Fourier fraccionario. Por el teorema del muestreo (ecuación 3.9)

$$[X \circledast_\alpha X](t) = \mathrm{e}^{i\pi t^2 \cot\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [X \circledast_\alpha X]\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right) \mathrm{e}^{-i\pi \frac{n^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{B^2}} sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}t - n\right] . \tag{6.1}$$

Para $[X \circledast_\alpha X](t-\tau)$ con τ arbitrario, se tiene

$$[X \circledast_\alpha X](t-\tau) = \mathrm{e}^{i\pi (t-\tau)^2 \cot\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [X \circledast_\alpha X]\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B} - \tau\right) \mathrm{e}^{-i\pi (\frac{n \operatorname{sen}\alpha}{B} - \tau)^2 \cot\alpha} sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}t - n\right] \tag{6.2}$$

cambiando $t-\tau$ por t se llega a

$$[X \circledast_\alpha X](t) = \mathrm{e}^{i\pi t^2 \cot\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [X \circledast_\alpha X]\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B} - \tau\right) \mathrm{e}^{-i\pi (\frac{n \operatorname{sen}\alpha}{B} - \tau)^2 \cot\alpha} sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}(t+\tau) - n\right] . \tag{6.3}$$

Para $t = 0$, se tiene

$$[X \circledast_\alpha X](0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [X \circledast_\alpha X]\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B} - \tau\right) \mathrm{e}^{-i\pi (\frac{n \operatorname{sen}\alpha}{B} - \tau)^2 \cot\alpha} sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}\tau - n\right] . \tag{6.4}$$

De la ecuación 5.24 se tiene

$$[X \circledast_\alpha X](0) = E\left\{X(t)\overline{X(t)}\right\} . \tag{6.5}$$

De las ecuaciones 4.41 y 4.43 se escribe

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[X \circledast_\alpha X]\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right) &= E\left\{\mathscr{T}_{\tau;\alpha}[X](t)\overline{\mathscr{T}_{n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B};\alpha}[X](t)}\mathrm{e}^{i\pi n^2 \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}}\right\} \\ &= E\left\{X(t)\overline{\mathscr{T}_{n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}-\tau;\alpha}[X](t)}\mathrm{e}^{i\pi n^2 \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}}\right\} ,\end{aligned} \tag{6.6}$$

de aquí

$$[X \circledast_\alpha X]\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}-\tau\right) = E\left\{X(t)\overline{\mathscr{T}_{n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}-\tau;\alpha}[X](t)}\mathrm{e}^{i\pi\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)^2\cot\alpha}\right\}\mathrm{e}^{-i2\pi\tau\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}-\tau/2\right)\cot\alpha}. \quad (6.7)$$

Reemplazando las ecuaciones 6.5 y 6.7 en 6.4 se llega a

$$E\left\{\left[\overline{X(t)} - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{\mathscr{T}_{n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}-\tau;\alpha}\left[X\right](t)}\mathrm{e}^{i\pi n^2\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}} \times \mathrm{e}^{-i2\pi\tau n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\cot\alpha}\mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i\pi(\frac{n\operatorname{sen}\alpha}{B}-\tau)^2\cot\alpha} sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}\tau-n\right]\right]X(t)\right\} = 0\,, \quad (6.8)$$

luego

$$\hat{X}(t) = \mathrm{e}^{-i\pi\tau^2\cot\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(-n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}+t+\tau)\mathrm{e}^{-i\pi n^2\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}}\mathrm{e}^{i2\pi n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}(t+\tau)\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i2\pi t\tau\cot\alpha} sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}\tau-n\right]. \quad (6.9)$$

De 6.4 se nota la independencia de τ, por lo tanto se puede escoger de forma apropiada $\tau = -t$, entonces

$$\hat{X}(t) = \mathrm{e}^{i\pi t^2\cot\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)\mathrm{e}^{-i\pi\frac{n^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}} sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}t-n\right]. \quad (6.10)$$

Las muestras $X\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)$ son variables aleatorias y, con esto, en lugar de una formula de interpolación se tiene un estimador de X.

Teorema 6.1.1. Sea $X(t)$ un proceso aleatorio estacionario, ergódico en correlación fraccionaria y una densidad espectral de potencia de α-banda limitada, tal que $S_X^\alpha(\nu_\alpha) \neq 0$ para $\nu_\alpha \in [-B/2, B/2]$. Entonces

$$\hat{X}(t) = \mathrm{e}^{i\pi t^2\cot\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)\mathrm{e}^{-i\pi\frac{n^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}} sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}t-n\right]. \quad (6.11)$$

6.2. Media cuadrática

Se mostrará que este teorema 6.1.1, se cumple en el sentido de una media cuadrática. Se toma

$$\begin{aligned} E\left\{|X-\hat{X}|^2\right\} &= E\left\{\left[X-\hat{X}\right]\left[\overline{X}-\overline{\hat{X}}\right]\right\} \\ &= E\left\{\left[X-\hat{X}\right]\overline{X}\right\} - E\left\{\left[X-\hat{X}\right]\overline{\hat{X}}\right\}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

por la ecuación 6.8, el primer término de la ecuación 6.12 es

$$E\left\{\left[X-\hat{X}\right]\overline{X}\right\}=0\,. \tag{6.13}$$

Para $E\left\{\left[X-\hat{X}\right]\overline{\hat{X}}\right\}$, se parte de 6.2 con $\tau=m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}$

$$\begin{aligned}\left[X\circledast_\alpha X\right](\tau-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}) &= \mathrm{e}^{i\pi(\tau-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})^2\cot\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[X\circledast_\alpha X\right]\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)\\ &\times\mathrm{e}^{-i\pi(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})^2\cot\alpha}sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}\tau-n\right]\,.\end{aligned} \tag{6.14}$$

Por otra parte aplicando el operador de traslación fraccionaria (ver ecuación 2.6) sobre $[X\circledast_\alpha X]$, se tiene

$$\left[X\circledast_\alpha X\right]\left(\tau-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)=\mathscr{T}_{m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}}\left[X\circledast_\alpha X\right](\tau)\mathrm{e}^{-i2\pi m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\left(\tau-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2B}\right)\cot\alpha}\,. \tag{6.15}$$

Luego de igualar las ecuaciones 6.14 y 6.15 se obtiene

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_{m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}}\left[X\circledast_\alpha X\right](\tau)\mathrm{e}^{-i2\pi m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\left(\tau-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2B}\right)\cot\alpha} &= \mathrm{e}^{i\pi(\tau-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})^2\cot\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[X\circledast_\alpha X\right]\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)\\ &\times\mathrm{e}^{-i\pi(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})^2\cot\alpha}sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}\tau-n\right]\,,\end{aligned} \tag{6.16}$$

con esto y utilizando la ecuación 4.43, se llega a

$$\begin{aligned}&\Bigg[E\left\{X(t)\overline{\mathscr{T}_{\tau-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B};\alpha}\left[X\right](t)}\mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}\right\}\mathrm{e}^{-i2\pi\tau m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\cot\alpha}\mathrm{e}^{i\pi\frac{m^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}}\\ &-\mathrm{e}^{i\pi(\tau-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})^2\cot\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}E\left\{\mathscr{T}_{m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B};\alpha}\left[X\right](t)\overline{\mathscr{T}_{n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B};\alpha}\left[X\right](t)}\mathrm{e}^{i\pi\frac{n^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}\cot\alpha}\right\}\\ &\times\mathrm{e}^{-i2\pi\frac{mn\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}}\mathrm{e}^{i\pi\frac{m^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}}\mathrm{e}^{-i\pi\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)^2\cot\alpha}sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}\tau-n\right]\Bigg]=0\,,\end{aligned} \tag{6.17}$$

de aquí

$$\begin{aligned}&\Bigg[E\left\{X(t)\overline{X(t-\tau+m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})}\mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i2\pi t\left(\tau-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)\cot\alpha}\mathrm{e}^{i\pi\left(\tau-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)^2\cot\alpha}\right\}\mathrm{e}^{-i2\pi m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}(\tau-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2B})\cot\alpha}\\ &-\sum_{n=-\infty}^{\infty}E\left\{X\left(t-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)\overline{X\left(t-n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)}\mathrm{e}^{i2\pi m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\left(t-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2B}\right)\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i2\pi n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\left(t-n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2B}\right)\cot\alpha}\right\}\\ &\times sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}\tau-n\right]\mathrm{e}^{i\pi(\tau-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})^2\cot\alpha}\Bigg]=0\,.\end{aligned} \tag{6.18}$$

Por lo tanto

$$\Bigg[E\Bigg\{X(t)\overline{X(t-\tau+m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})}\mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i\pi\frac{m^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}}\mathrm{e}^{i2\pi m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}(t-\tau)\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i2\pi\tau t\cot\alpha}$$
$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(t-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)\overline{X\left(t-n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)}\mathrm{e}^{i2\pi m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\left(t-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2B}\right)\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i2\pi n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\left(t-n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2B}\right)\cot\alpha}\Bigg\}$$
$$\times sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}\tau-n\right]\Bigg]=0\,, \tag{6.19}$$

multiplicando por $sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}\tau-m\right]$ y sumando en m, por la ecuación 6.9 se tiene

$$E\Bigg\{\Bigg[\quad X(t)\overline{\hat{X}(t)}-\mathrm{e}^{-i\pi\tau^2\cot\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{X\left(t-n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)}\mathrm{e}^{i\pi\left(t-n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)^2\cot\alpha}sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}\tau-n\right]$$
$$\times\mathrm{e}^{i\pi\tau^2\cot\alpha}\sum_{m=-\infty}^{\infty}X\left(t-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)\mathrm{e}^{-i\pi\left(t-m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)^2\cot\alpha}sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}\tau-m\right]\Bigg]\Bigg\}=0\,. \tag{6.20}$$

Se prueba que

$$\overline{\mathscr{T}_{t;\alpha}\left[\hat{X}\right](\tau)}=\mathrm{e}^{-i\pi\tau^2\cot\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{X\left(t-n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)}\mathrm{e}^{i\pi\left(t-n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)^2\cot\alpha}sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}\tau-n\right]\,, \tag{6.21}$$

con esto, reemplazando en la ecuación 6.20 se llega a

$$E\left\{\left[X(t)\overline{\hat{X}(t)}-\mathscr{T}_{t;\alpha}\left[\hat{X}\right](\tau)\overline{\mathscr{T}_{t;\alpha}\left[\hat{X}\right](\tau)}\right]\right\}=0\,. \tag{6.22}$$

Por la sección 2.2.2 se tiene

$$E\left\{\mathscr{T}_{t;\alpha}\left[\hat{X}\right](\tau)\overline{\mathscr{T}_{t;\alpha}\left[\hat{X}\right](\tau)}\right\}=E\left\{\hat{X}\overline{\hat{X}}\right\}\,. \tag{6.23}$$

Con esto se tiene que

$$E\left\{[X(t)-\hat{X}(t)]\overline{\hat{X}(t)}\right\}=0\,, \tag{6.24}$$

lo cual prueba finalmente que

$$E\left\{\left|X(t)-\mathrm{e}^{i\pi t^2\cot\alpha}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right)\mathrm{e}^{-i\pi\frac{n^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}}sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}t-n\right]\right|^2\right\}=0\,. \tag{6.25}$$

Así, se prueba que el teorema del muestreo fraccionario para procesos aleatorios se cumple en el sentido de la media cuadrática, así $\hat{X}$ converge hacia X en la media cuadrática.

6.3. Conclusiones

Para procesos aleatorios ergódicos en autocorrelación, que tengan densidades espectrales de potencia con soporte compacto, sus realizaciones se hacen a lo largo de una banda oblicua en la representación de Wigner. Esto permite deducir un teorema del muestreo fraccionario para estas señales aleatorias, en cuyo caso la fórmula de interpolación se convierte en un estimador de la señal de la forma

$$\hat{X}(t) = \mathrm{e}^{i\pi t^2 \cot\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right) \mathrm{e}^{-i\pi\frac{n^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}} sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}t - n\right], \tag{6.26}$$

el cual converge en la media cuadrática hacia la señal propiamente, tal que

$$E\left\{\left|X(t) - \mathrm{e}^{i\pi t^2 \cot\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\right) \mathrm{e}^{-i\pi\frac{n^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{B^2}} sinc\left[\frac{B}{\operatorname{sen}\alpha}t - n\right]\right|^2\right\} = 0\,. \tag{6.27}$$

Capítulo 7

Aplicaciones de la transformación de Fourier fraccionaria a la extracción y estimación de señales

En muchos casos interesa "rescatar" una señal que se encuentra embebida en un ruido, y se busca la manera óptima de hacerlo.

La señal recibida $X_\omega(t)$, es registrada en un intervalo de tiempo $t \in [t_i, t_f]$. El problema consiste en determinar el estimador $\hat{Y}$, que minimice el error cuadrático medio, entre la señal con ruido $X_\omega = S_\omega + B_\omega$ y la señal que se quiere extraer Y.

Cuando t esta fuera del intervalo, se habla de predicción. Sí $t < t_i$, entonces $\hat{Y}$ es un predictor hacia atrás(*backward predictor*). Sí $t > t_f$ se habla de un predictor hacia adelante(*forward predictor*). Cuando $t \in [t_i, t_f]$ el problema es referido como *smoothing*

El filtro óptimo de Wiener fraccionario ha sido tratado por [78,30,29], en estos trabajos no se llegan a las expresiones explicitas ni para la ecuación de Wiener-Hopf ni para el filtro y el error. Aquí se hace uso de las definiciones de correlación y convolución fraccionaria para llegar a estas expresiones explicitas, además que es indispensable contar con la noción de ergodicidad en correlación fraccionaria para procesos aleatorios.

7.1. Filtro de Wiener fraccionario

Sea X_ω una señal registrada en el intervalo de tiempo $\xi \in [t_i, t_f]$, la cual porta la información S_ω distorsionada por el ruido aditivo B_ω, tal que $X_\omega = S_\omega + B_\omega$. Se propone un modelo para filtrar la información contenida en X_ω, con base en convolución y correlación fraccionaria. Así, se propone buscar el filtro, de respuesta percusional h, que aplicado a X_ω, en general, minimice el error cuadrático medio entre $[X_\omega *_\alpha h]$ y Y_ω, entonces

$$z^2(\alpha) = E\{|\,[X_\omega *_\alpha h]\,(t) - Y_\omega(t)|^2\}\,, \tag{7.1}$$

es la cantidad a minimizar. Definimos $z^2(\alpha) = E_1 + E_2 + E_3$, donde

$$\begin{aligned}
E_1 &= E\left\{\left|\int_{t_i}^{t_f} h(\theta)x_\omega(t-\theta)\mathrm{e}^{2i\pi\theta(t-\theta)\cot\alpha}d\theta\right|^2\right\} \qquad (7.2)\\
&= E\left\{\iint_{t_i}^{t_f} h(\theta)\overline{h(\sigma)}x_\omega(t-\theta)\mathrm{e}^{2i\pi\theta(t-\theta)\cot\alpha}\overline{x_\omega(t-\sigma)}\mathrm{e}^{-2i\pi\sigma(t-\sigma)\cot\alpha}d\sigma d\theta\right\}\\
&= \iint_{t_i}^{t_f} h(\theta)\overline{h(\sigma)}E\left\{X_\omega(t-\theta)\mathrm{e}^{2i\pi\theta(t-\theta)\cot\alpha}\overline{X_\omega(t-\sigma)}\mathrm{e}^{-2i\pi\sigma(t-\sigma)\cot\alpha}\right\}d\sigma d\theta\\
&= \iint_{t_i}^{t_f} h(\theta)\overline{h(\sigma)}E\left\{\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X_\omega](t)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}\overline{\mathcal{T}_{\sigma;\alpha}[X_\omega](t)}\mathrm{e}^{i\pi\sigma^2\cot\alpha}\right\}d\sigma d\theta\,,
\end{aligned}$$

por las ecuaciones 4.41 y 5.24 se tiene

$$\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma) = E\left\{\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X_\omega](t)\overline{\mathcal{T}_{\sigma;\alpha}[X_\omega](t)}\mathrm{e}^{i\pi\sigma^2\cot\alpha}\right\}\,, \tag{7.3}$$

entonces

$$E_1 = \iint_{t_i}^{t_f} h(\theta)\overline{h(\sigma)}\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\sigma d\theta\,. \tag{7.4}$$

Para E_2, utilizando las ecuaciones 4.28 y 4.38, se escribe

$$E_2 = E\{|Y_\omega(t)|^2\} = [Y \circledast_\alpha Y](0)\,. \tag{7.5}$$

Por último para E_3 se tiene

$$\begin{aligned} E_3 &= -2Real\left\{E\left\{Y_\omega(t)\int\limits_{t_i}^{t_f}\overline{h(\sigma)x_\omega(t-\sigma)}\mathrm{e}^{-2i\pi\sigma(t-\sigma)\cot\alpha}d\sigma\right\}\right\} \\ &= -2Real\left\{\int\limits_{t_i}^{t_f}\overline{h(\sigma)}E\left\{Y_\omega(t)\overline{X_\omega(t-\sigma)}\mathrm{e}^{-2i\pi\sigma(t-\sigma)\cot\alpha}\right\}d\sigma\right\} \\ &= -2Real\left\{\int\limits_{t_i}^{t_f}\overline{h(\sigma)}[Y\circledast_\alpha X](\sigma)d\sigma\right\}, \end{aligned} \tag{7.6}$$

con

$$[Y\circledast_\alpha X](\sigma) = E\left\{Y_\omega(t)\overline{\mathcal{T}_{\sigma;\alpha}[X_\omega](t)}\mathrm{e}^{i\pi\sigma^2\cot\alpha}\right\}, \tag{7.7}$$

entonces

$$\begin{aligned} z^2(\alpha) &= \iint_{t_i}^{t_f} h(\theta)\overline{h(\sigma)}\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X\circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\sigma d\theta \\ &\quad -2Real\left\{\int\limits_{t_i}^{t_f}\overline{h(\sigma)}[Y\circledast_\alpha X](\sigma)d\sigma\right\} + [Y\circledast_\alpha Y](0). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Para minimizar esta integral se utiliza el cálculo variacional, se trata de encontrar una función h que extreme la integral

$$I = \int\limits_A^B f(h,h';x)dx\,, \tag{7.9}$$

con $h' = \frac{dh}{dx}$. Se define $h(x,\lambda) = h(x) + \lambda\phi(x)$, con $\phi(A) = \phi(B) = 0$ una función suave y λ real, luego

$$J = \int\limits_A^B f(h+\lambda\phi, h'+\lambda\phi'; x)dx = I + \Delta I\,, \tag{7.10}$$

con

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}J(\lambda)\bigg|_{\lambda=0} = 0\,. \tag{7.11}$$

Se define

$$
\begin{aligned}
z'^2(\alpha,\lambda) &= z^2(\alpha,\lambda) + \Delta z^2(\alpha,\lambda) \qquad (7.12)\\
&= \iint_{t_i}^{t_f} h(\theta,\lambda)\overline{h(\sigma,\lambda)}\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\sigma d\theta \\
&\quad -2Real\left\{\int_{t_i}^{t_f}\overline{h(\sigma,\lambda)}[Y \circledast_\alpha X](\sigma)d\sigma\right\} + [Y \circledast_\alpha Y](0)\\
&= \iint_{t_i}^{t_f} h(\theta)\overline{h(\sigma)}\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\sigma d\theta \\
&\quad -2Real\left\{\int_{t_i}^{t_f}\overline{h(\sigma)}[Y \circledast_\alpha X](\sigma)d\sigma\right\} + [Y \circledast_\alpha Y](0)\\
&\quad +\lambda\iint_{t_i}^{t_f} h(\theta)\overline{\phi(\sigma)}\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta d\sigma\\
&\quad +\lambda\iint_{t_i}^{t_f} \overline{h(\sigma)}\phi(\theta)\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta d\sigma\\
&\quad +\lambda^2\iint_{t_i}^{t_f} \overline{\phi(\sigma)}\phi(\theta)\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta d\sigma\\
&\quad -2Real\left\{\lambda\int_{t_i}^{t_f}\overline{\phi(\sigma)}[Y \circledast_\alpha X](\sigma)d\sigma\right\}, \qquad (7.13)
\end{aligned}
$$

dado que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma) &= E\left\{\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X_\omega](t)\overline{\mathcal{T}_{\sigma;\alpha}[X_\omega](t)}\mathrm{e}^{i\pi\sigma^2\cot\alpha}\right\}\\
&= \overline{\mathcal{T}_{\sigma;\alpha}\left[X \circledast_\alpha X\right](\theta)}\mathrm{e}^{i\pi\theta^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i\pi\sigma^2\cot\alpha}, \qquad (7.14)
\end{aligned}
$$

entonces se tiene

$$
\begin{aligned}
\iint_{t_i}^{t_f}\overline{h(\sigma)}\phi(\theta)\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta d\sigma &= \iint_{t_i}^{t_f}\overline{h(\sigma)}\phi(\theta)\overline{\mathcal{T}_{\sigma;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\theta)}\mathrm{e}^{i\pi\sigma^2\cot\alpha}d\theta d\sigma\\
&= \iint_{t_i}^{t_f}\overline{h(\theta)}\phi(\sigma)\overline{\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)}\mathrm{e}^{i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta d\sigma\,. \qquad (7.15)
\end{aligned}
$$

Reemplazando la ecuación 7.15 en la ecuación 7.13, se llega a

$$\begin{aligned}
\Delta z^2(\alpha,\lambda) &= \lambda \iint_{t_i}^{t_f} h(\theta)\overline{\phi(\sigma)}\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta d\sigma \\
&\quad +\lambda \iint_{t_i}^{t_f} \overline{h(\theta)}\phi(\sigma)\overline{\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)}\mathrm{e}^{i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta d\sigma \\
&\quad +\lambda^2 \iint_{t_i}^{t_f} \phi(\sigma)\phi(\theta)\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta d\sigma \\
&\quad -2\lambda Real\left\{\int_{t_i}^{t_f} \overline{\phi(\sigma)}[Y \circledast_\alpha X](\sigma)d\sigma\right\}, \qquad (7.16)
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}\Delta z^2(\alpha,\lambda)\bigg|_{\lambda=0} &= \iint_{t_i}^{t_f} h(\theta)\overline{\phi(\sigma)}\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta d\sigma \\
&\quad + \iint_{t_i}^{t_f} \overline{h(\theta)}\phi(\sigma)\overline{\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)}\mathrm{e}^{i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta d\sigma \\
&\quad -2Real\left\{\int_{t_i}^{t_f} \overline{\phi(\sigma)}[Y \circledast_\alpha X](\sigma)d\sigma\right\} \\
&= Real\left\{\int_{t_i}^{t_f} \overline{\phi(\sigma)}\left[\int_{t_i}^{t_f} h(\theta)\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta - [Y \circledast_\alpha X](\sigma)\right]d\sigma\right\} = 0\,,
\end{aligned} \qquad (7.17)$$

como ϕ es en general diferente de cero, entonces

$$[Y \circledast_\alpha X](\sigma) = \int_{t_i}^{t_f} h(\theta)\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta\,. \qquad (7.18)$$

Esta ecuación tiene como caso particular la ecuación de Wiener-Hopf para $\alpha = \pi/2$. El parámetro α permite implementar una técnica de filtrado adaptativo.

7.1.1. Principio de ortogonalidad

La condición de ortogonalidad se puede deducir a partir de la ecuación 7.18, la cual queda

$$E\left\{\left[y_\omega(t)-\int_{t_i}^{t_f} h(\theta)\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[x_\omega](t)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta\right]\overline{\mathcal{T}_{\sigma;\alpha}[x_\omega](t)}\mathrm{e}^{i\pi\sigma^2\cot\alpha}\right\}=0\,. \tag{7.19}$$

El error queda así definido por

$$\begin{aligned}\varepsilon_\omega^\alpha &= y_\omega(t)-\int_{t_i}^{t_f} h(\theta)\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[x_\omega](t)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta\\ &= y_\omega-\hat{y}_\omega^\alpha\,.\end{aligned} \tag{7.20}$$

Dada la independencia de σ en la ecuación 7.19, permite escribir

$$E\left\{\left[y_\omega(t)-\int_{t_i}^{t_f} h(\theta)\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[x_\omega](t)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha}d\theta\right]\overline{\int_{t_i}^{t_f} h(\sigma)\mathcal{T}_{\sigma;\alpha}[x_\omega](t)\mathrm{e}^{-i\pi\sigma^2\cot\alpha}d\sigma}\right\}=0\,, \tag{7.21}$$

con esto se muestra que $\varepsilon_\omega^\alpha$ no es ortogonal a X_ω, como dice el "principio de ortogonalidad", sino que este es un caso particular cuando $\hat{Y}_\omega^\alpha$ y X_ω son colineales, por tanto el principio de ortogonalidad queda

$$E\left\{\varepsilon_\omega^\alpha\,\overline{\hat{y}_\omega^\alpha}\right\}=0\,. \tag{7.22}$$

El hecho que al estimador se le permita incluir rotaciones, con respecto a X_ω, permite que el estimado sea de menor error cuadrático medio que el hallado por estimadores colineales a X_ω (ver figura 7.1).

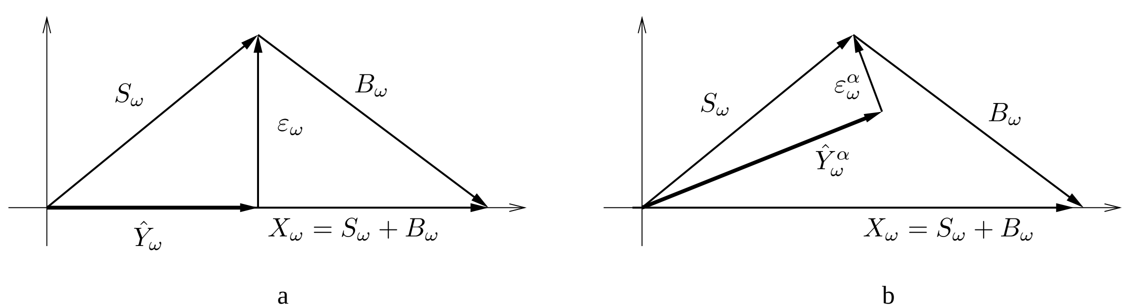

FIGURA 7.1: a) Estimador colineal a X_ω. b) Estimadores con rotación.

Este proceso permite encontrar los ejes para los cuales lo que se considera señal Y_ω y error ε_ω son ortogonales y por tanto optimiza su separación.

7.2. Cálculo del filtro no causal

En la ecuación 7.18 por transformación de Fourier fraccionaria de orden α se tiene

$$S^\alpha_{YX}(\nu_\alpha)\mathrm{e}^{-i\pi\nu_\alpha^2 \cot\alpha} = H^\alpha(\nu_\alpha)S^\alpha_X(\nu_\alpha)\,, \tag{7.23}$$

luego

$$H^\alpha = \frac{S^\alpha_{YX}(\nu_\alpha)}{S^\alpha_X(\nu_\alpha)}\mathrm{e}^{-i\pi\nu_\alpha^2 \cot\alpha}\,. \tag{7.24}$$

Como caso particular, si la señal deseada $Y_\omega = S_\omega$ y además S_ω y B_ω no están correlacionados, entonces

$$H^\alpha = \frac{S^\alpha_S(\nu_\alpha)}{S^\alpha_S(\nu_\alpha) + S^\alpha_B(\nu_\alpha)}\mathrm{e}^{-i\pi\nu_\alpha^2 \cot\alpha}\,. \tag{7.25}$$

7.2.1. Cálculo del error cuadrático medio

Se escribe la ecuación 7.8 en la forma

$$\begin{aligned} z^2(\alpha) &= E_1 + E_2 + E_3 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(\sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2\cot\alpha} d\theta d\sigma \\ &\quad -2Real\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(\sigma)}[Y \circledast_\alpha X](\sigma)d\sigma\right\} + [Y \circledast_\alpha Y](0)\,, \end{aligned} \tag{7.26}$$

reemplazando aquí la ecuación 7.18, se tiene

$$z^2(\alpha) = [Y \circledast_\alpha Y](0) - Real\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(\sigma)}[Y \circledast_\alpha X](\sigma)d\sigma\right\}\,. \tag{7.27}$$

Por el teorema de Parseval fraccionario (ver ecuación A.25)

$$\begin{aligned} z^2(\alpha) &= Real\left\{\int_{-\infty}^{\infty} S_Y^\alpha(\nu_\alpha)d\nu_\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} H^\alpha(\nu_\alpha)S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)\mathrm{e}^{i\pi\nu_\alpha^2\cot\alpha}d\nu_\alpha\right\} \\ &= Real\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_Y^\alpha(\nu_\alpha) - H^\alpha(\nu_\alpha)S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)\mathrm{e}^{i\pi\nu_\alpha^2\cot\alpha}\right]d\nu_\alpha\right\}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Si se reemplaza la función de transferencia óptima de la ecuación 7.25 en la ecuación 7.28, entonces se tiene

$$E\left\{|\varepsilon_\omega^\alpha|^2\right\} = Real\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[S_Y^\alpha(\nu_\alpha) - \frac{S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)}{S_X^\alpha(\nu_\alpha)}S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)\right]d\nu_\alpha\right\} \tag{7.29}$$

$$= Real\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{S_Y^\alpha(\nu_\alpha)S_X^\alpha(\nu_\alpha) - S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)}{S_X^\alpha(\nu_\alpha)}\right]d\nu_\alpha\right\}, \tag{7.30}$$

para $Y_\omega = S_\omega$, con S_ω y B_ω no correlacionados, entonces

$$E\left\{|\varepsilon_\omega^\alpha|^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{S_S^\alpha(\nu_\alpha)S_B^\alpha(\nu_\alpha)}{S_S^\alpha(\nu_\alpha) + S_B^\alpha(\nu_\alpha)}\right]d\nu_\alpha\,. \tag{7.31}$$

Este resultado es de gran utilidad e importancia, se nota que si la señal S_ω y el ruido B_ω son tales que sus densidades espectrales fraccionarias no tengan soporte común, conducirá a un error de estimación igual a cero, la señal y el ruido serán separados con un simple filtro pasa banda fraccionario.

Si por el contrario la señal y el ruido ocupan el mismo espectro fraccionario, en este caso, el filtro aquí propuesto permitirá una estimación de la señal.

Dado que, en general, el producto $S_S^\alpha(\nu_\alpha)S_B^\alpha(\nu_\alpha)$ es diferente de cero, el error no será nulo, pero por otra parte este producto no es necesariamente mínimo para el dominio de Fourier (ver figura 7.2). Así, este tratamiento consigue un filtrado de menor error cuadrático medio, con relación al filtrado de Wiener estándar, y eso es debido principalmente al hecho que el estimado presenta rotaciones y por lo tanto se filtra en ejes oblicuos de una representación de Wigner de la señal.

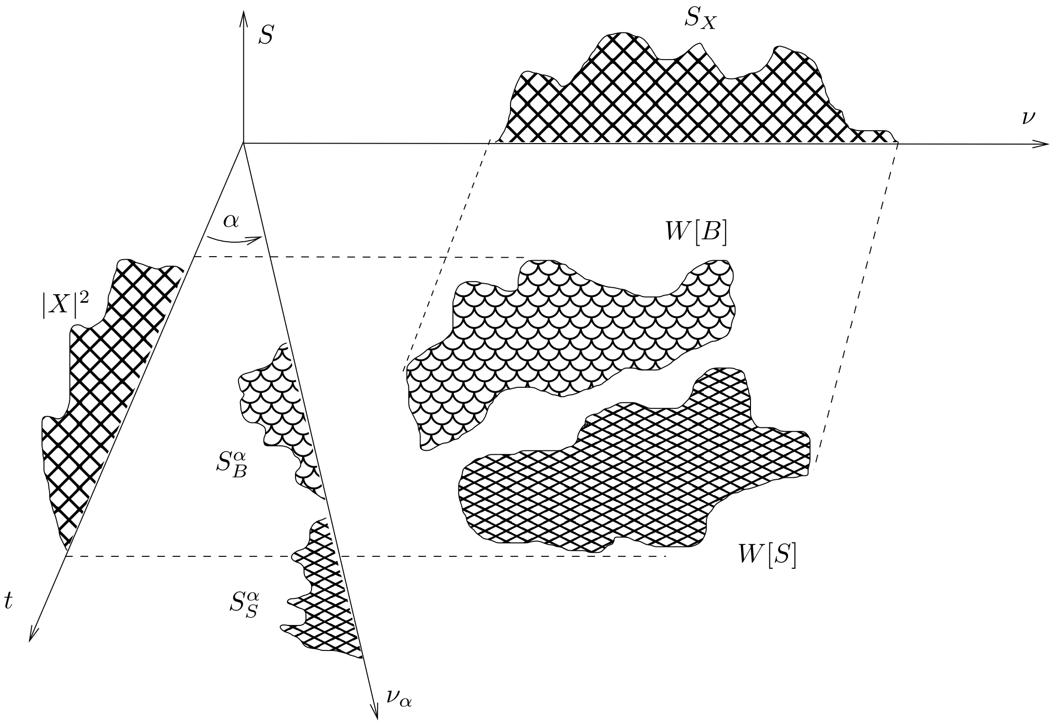

FIGURA 7.2: Distribuciones de Wigner del ruido $W[B]$ y la señal W[S].

7.2.1.1. Filtro adaptativo

La dependencia del filtro con el orden fraccionario α lo convierte en un filtro adaptativo y por consiguiente lo hace ideal para señales no estacionarias. Aquí el parámetro α es una función del tiempo, adaptandose a la estadística de la señal.

Dado que el orden α permanece como un parámetro adaptativo, este mismo permite encontrar la solución de mínimo error de forma recursiva, lo que constituye una mejora significativa al tratamiento de Wiener estándar.

En términos generales el error mínimo se dá cuando el parámetro α alcanza un valor α_{min} tal que

$$\left.\frac{\partial z^2}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_{min}} = 0\,. \tag{7.32}$$

7.3. Cálculo del filtro causal

Para el filtro causal $h(t) = 0$ para $t < 0$. Se asume que el proceso X_ω se le conoce toda la historia hasta el tiempo t, donde se busca estimar otro proceso, Y_ω, por una transformación lineal de X_ω, tal que

$$\begin{aligned}\hat{y}_\omega^\alpha(t) &= \int\limits_{-\infty}^{t} x_\omega(\xi)\mathcal{T}_{\xi;\alpha}[h](t)\mathrm{e}^{-i\pi\xi^2\cot\alpha}d\xi \\ &= \int\limits_{0}^{\infty} h(\xi)\mathcal{T}_{\xi;\alpha}[x_\omega](t)\mathrm{e}^{-i\pi\xi^2\cot\alpha}d\xi\,. \end{aligned} \tag{7.33}$$

El principio de ortogonalidad requiere que el error $\varepsilon_\omega^\alpha = y_\omega - \hat{y}_\omega^\alpha$ sea ortogonal a $\overline{\mathcal{T}_{\lambda;\alpha}[x_\omega](t)}\mathrm{e}^{i\pi\lambda^2\cot\alpha}$, entonces

$$E\left\{\left[y_\omega(t) - \int\limits_{0}^{\infty} h(\xi)\mathcal{T}_{\xi;\alpha}[x_\omega](t)\mathrm{e}^{-i\pi\xi^2\cot\alpha}d\xi\right]\overline{\mathcal{T}_{\lambda;\alpha}[x_\omega](t)}\mathrm{e}^{i\pi\lambda^2\cot\alpha}\right\} = 0\,,\quad \lambda \geq 0\,. \tag{7.34}$$

Para procesos no estacionarios el parámetro α juega el papel de elemento adaptativo y mantiene al filtro invariante en el tiempo, tal que se puede escribir

$$[Y \circledast_\alpha X](\lambda) = \int\limits_{0}^{\infty} h(\xi)\mathcal{T}_{\xi;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\lambda)\mathrm{e}^{-i\pi\xi^2\cot\alpha}d\xi\,,\ \text{ para todo }\ \lambda \geq 0\,. \tag{7.35}$$

La ecuación 7.35 se puede escribir de la siguiente forma

$$[Y \circledast_\alpha X](\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\mathcal{T}_{\xi;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\lambda)\mathrm{e}^{-i\pi\xi^2\cot\alpha}d\xi\,,\ \text{ para todo }\ \lambda \geq 0\,, \tag{7.36}$$

la cual es solo válida para $\lambda \geq 0$, tal que

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\mathcal{T}_{\xi;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\lambda)\mathrm{e}^{-i\pi\xi^2\cot\alpha}d\xi \neq [Y \circledast_\alpha X](\lambda)\,,\ \text{ para }\ \lambda < 0\,. \tag{7.37}$$

Esto no permite proceder de forma análoga a lo hecho para el filtro no causal, entonces la estrategia consiste en plantear una integral que sea válida para $-\infty < \lambda < \infty$. Se define

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\mathcal{T}_{\xi;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\lambda)\mathrm{e}^{-i\pi\xi^2\cot\alpha}d\xi - [Y \circledast_\alpha X](\lambda) = a(\lambda)\,,\ \text{ para todo }\ \lambda\,, \tag{7.38}$$

donde $a(\lambda) = 0$ para $\lambda \geq 0$, y

$$a(\lambda) = \mathrm{e}^{i\pi\lambda^2 \cot\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} A^\alpha(\nu_\alpha) \mathrm{e}^{i\pi\nu_\alpha^2 \cot\alpha} \mathrm{e}^{-i2\pi\nu_\alpha\lambda/\operatorname{sen}\alpha} d\nu_\alpha\,, \quad \text{para} \;\; \lambda < 0\,. \tag{7.39}$$

Aquí se asumirá que S_X^α a igual que en el tratamiento estándar es una función racional y que puede ser factorizada en

$$S_X^\alpha(\nu_\alpha) = S_X^{\alpha\,+}(\nu_\alpha) S_X^{\alpha\,-}(\nu_\alpha)\,, \tag{7.40}$$

con $S_X^{\alpha\,+}$ y su conjugado $S_X^{\alpha\,-}$, la factorización espectral fraccionaria de S_X^α.

La condición de causalidad se da como $[X \circledast_\alpha X](t) \neq 0$ para $t > 0$, con esto

$$\begin{aligned} [X \circledast_\alpha X](t) &= \mathcal{F}_{-\alpha}\left[S_X^\alpha(\nu_\alpha)\mathrm{e}^{-i\pi\nu_\alpha^2\cot\alpha}\right](t) \\ &= \mathrm{e}^{i\pi t^2 \cot\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} S_X^\alpha(\nu_\alpha) \mathrm{e}^{-i2\pi\nu_\alpha t/\operatorname{sen}\alpha} d\nu_\alpha\,, \end{aligned} \tag{7.41}$$

la cual pasamos al plano complejo, y se evalúa

$$\int_{C_{cerrada}} S_X^\alpha(s_\alpha)\mathrm{e}^{-s_\alpha t} ds_\alpha\,, \quad \text{con} \;\; s_\alpha = \sigma_\alpha + i2\pi\nu_\alpha/\operatorname{sen}\alpha\,, \tag{7.42}$$

donde ahora es claro que se puede hacer un diagrama, S, de polos y ceros, para S_X^α.

$S_X^{\alpha\,+}$ tiene todos sus polos y ceros en el lado izquierdo del plano S, $S_X^{\alpha\,-}$ tiene todos sus polos y ceros en el lado derecho y A^α tiene todos sus polos en el lado derecho. La transformada de Fourier fraccionaria de orden α de la ecuación 7.38 es

$$H^\alpha(\nu_\alpha)S_X^\alpha(\nu_\alpha) - S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)\mathrm{e}^{-i\pi\nu_\alpha^2\cot\alpha} = A^\alpha(\nu_\alpha)\,, \tag{7.43}$$

y por la factorización espectral fraccionaria

$$H^\alpha(\nu_\alpha)S_X^{\alpha\,+}(\nu_\alpha)S_X^{\alpha\,-}(\nu_\alpha) - S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)\mathrm{e}^{-i\pi\nu_\alpha^2\cot\alpha} = A^\alpha(\nu_\alpha)\,, \tag{7.44}$$

dividiendo por $S_X^{\alpha\,-}(\nu_\alpha)$, se tiene

$$H^\alpha(\nu_\alpha)S_X^{\alpha\,+}(\nu_\alpha) - \frac{S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)}{S_X^{\alpha\,-}(\nu_\alpha)}\mathrm{e}^{-i\pi\nu_\alpha^2\cot\alpha} = \frac{A^\alpha(\nu_\alpha)}{S_X^{\alpha\,-}(\nu_\alpha)}\,. \tag{7.45}$$

Se toma las partes que cumplen la condición de causalidad, la cual corresponde al lado izquierdo del plano S, se tiene

$$H^\alpha(\nu_\alpha)S_X^{\alpha\,+}(\nu_\alpha) - \left[\frac{S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)}{S_X^{\alpha\,-}(\nu_\alpha)}\right]^+ \mathrm{e}^{-i\pi\nu_\alpha^2\cot\alpha} = 0\,, \tag{7.46}$$

debido a que $A^\alpha/S_X^{\alpha\,-}$ tiene todos sus polos en el lado derecho del plano S, el filtro óptimo causal es

$$H^\alpha(\nu_\alpha) = \left[\frac{S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)}{S_X^{\alpha\,-}(\nu_\alpha)}\right]^+ \frac{\mathrm{e}^{-i\pi\nu_\alpha^2\cot\alpha}}{S_X^{\alpha\,+}(\nu_\alpha)}\,, \tag{7.47}$$

luego

$$h(t) = \mathrm{e}^{i\pi t^2\cot\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)}{S_X^{\alpha\,-}(\nu_\alpha)}\right]^+ \frac{\mathrm{e}^{-i2\pi\nu_\alpha t/\operatorname{sen}\alpha}}{S_X^{\alpha\,+}(\nu_\alpha)}d\nu_\alpha\,. \tag{7.48}$$

7.3.1. Error cuadrático mínimo

Se toma la ecuación 7.30 y se reemplaza el filtro óptimo causal (ecuación 7.47)

$$z^2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[S_Y^\alpha(\nu_\alpha) - \left[\frac{S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)}{S_X^{\alpha\,-}(\nu_\alpha)}\right]^+ \frac{S_{YX}^\alpha(\nu_\alpha)}{S_X^{\alpha\,+}(\nu_\alpha)}\right]d\nu_\alpha\,, \tag{7.49}$$

la cual será mínimo para $\alpha = \alpha_{min}$ tal que $\partial z^2/\partial\alpha\big|_{\alpha_{min}} = 0$.

7.4. Filtros diversos

En el caso en que $X = [Y *_\alpha D]+B$, así la señal deseada Y además de ruido aditivo B, se encuentra distorsionada por D, de esta manera el filtro no causal está dado por

$$H^\alpha(\nu_\alpha) = \frac{1}{D^\alpha(\nu_\alpha)}\frac{S_D^\alpha(\nu_\alpha)}{S_D^\alpha(\nu_\alpha) + \frac{S_B^\alpha(\nu_\alpha)}{S_Y^\alpha(\nu_\alpha)}}\,, \tag{7.50}$$

donde $D^\alpha = \mathcal{F}_\alpha\,[D]$.

7.4.1. Filtro paramétrico fraccionario

Este filtro no causal permite definir un filtro paramétrico no causal dado por

$$H_{\gamma}^{\alpha}(\nu_{\alpha}) = \frac{1}{D^{\alpha}(\nu_{\alpha})} \frac{S_D^{\alpha}(\nu_{\alpha})}{S_D^{\alpha}(\nu_{\alpha}) + \gamma \frac{S_B^{\alpha}(\nu_{\alpha})}{S_Y^{\alpha}(\nu_{\alpha})}} \,, \tag{7.51}$$

aquí si

$\gamma = 0,$ filtro inverso fraccionario;

$\gamma = 1,$ filtro óptimo fraccionario;

$0 < \gamma < 1,$ filtro paramétrico fraccionario.

7.4.2. Filtro de promedio geométrico fraccionario

Se define un filtro de promedio geométrico fraccionario dado por

$$H_s^{\alpha} = \frac{1}{[D^{\alpha}(\nu_{\alpha})]^s} \left[\frac{\overline{D^{\alpha}(\nu_{\alpha})}}{S_D^{\alpha}(\nu_{\alpha}) + \frac{S_B^{\alpha}(\nu_{\alpha})}{S_Y^{\alpha}(\nu_{\alpha})}} \right]^{1-s} \,, \tag{7.52}$$

aquí si

$s = 1,$ filtro inverso fraccionario;

$s = 0,$ filtro óptimo fraccionario;

$s = 0{,}5$ filtro de Canon fraccionario.

7.5. Conclusiones

Se propone un estimador de una señal con base en la convolución fraccionaria, dado por

$$\hat{Y}_{\omega}(t) = [X_{\omega} *_{\alpha} h]\,(t)\,, \tag{7.53}$$

aquí se busca la función h que minimice

$$z^2(\alpha) = E\{|\,[X_{\omega} *_{\alpha} h]\,(t) - Y_{\omega}(t)|^2\}\,, \tag{7.54}$$

se llega a la condición

$$[Y \circledast_\alpha X](\sigma) = \int_{t_i}^{t_f} h(\theta)\mathcal{T}_{\theta;\alpha}[X \circledast_\alpha X](\sigma)\mathrm{e}^{-i\pi\theta^2 \cot\alpha} d\theta\,, \tag{7.55}$$

cuyo caso particular para $\alpha = \pi/2$ es la ecuación de Wiener-Hopf. A partir de esta ecuación se deducen diferentes filtros, entre ellos se destaca el filtro de Wiener fraccionario.

El orden α permite rotaciones del estimador con la condición de ortogonalidad

$$E\left\{\varepsilon_\omega^\alpha\, \overline{\hat{y}_\omega^\alpha}\right\} = 0\,, \tag{7.56}$$

con esto, el tratamiento es adaptativo, lo cual le permite ser aplicado a señales no estacionarias, donde para cada realización es necesario adaptar el parámetro α_ω que permita una óptima separación de los espectros fraccionarios (ver figura 7.2).

Parte III

La transformación de Fourier fraccionaria en óptica

Parece que la transformación de Fourier fraccionaria aparece por primera vez en óptica con Khare(1974) [27], quien usó este concepto en el análisis de imágenes desfocalizadas en un sistema óptico. Luego de Khare, la transformación de Fourier fraccionaria reaparece en la óptica con Mendlovic y Ozaktas [36, 44], en la propagación de la luz en medios de gradiente de índice. Luego en el espacio libre con los llamados sistemas Lohmann [31], se mostraban sistemas para realizar transformaciones de Fourier fraccionaria ópticamente, lo cual llevó a la óptica de Fourier fraccionaria [43].

Un punto de vista diferente y de mucho interés para la óptica fue el de Pellat-Finet [48,47,50], aquí se muestra que no hace falta hablar de sistemas ópticos particulares para obtener una transformada de Fourier fraccionaria ópticamente, sino que el fenómeno de difracción de Fresnel se traduce matemáticamente por una transformación de Fourier fraccionaria. Así que sólo hace falta que esté presente el fenómeno de difracción para que se tenga una transformación de Fourier fraccionaria óptica. Desde este enfoque es natural hablar de la óptica de Fourier fraccionaria, en el marco de una teoría escalar de la difracción. Bajo este punto de vista se estudia la formación de imagénes [54] y se define una noción de espectro angular esférico [52, 51], la cual mostró ser útil para resolver algunas inconsistencias que presenta el espectro angular clásico.

En esta tercera parte de la tesis se presentan aplicaciones a la óptica de los elementos teóricos mostrados en la primera parte, de allí que a este tratamiento se le denomine óptica de Fourier fraccionaria. Así, que en el capítulo 8 se hace una corta presentación de la teoría de Pellat-Finet, y se describe el fenómeno de difracción por una transformación de Fourier fraccionaria. Con la adaptación de la transformación de Fourier fraccionaria al fenómeno de difracción; en el capítulo 9 se desarrolla una aplicación de la convolución y correlación fraccionaria a la óptica de Fourier; en el capítulo 10 se hace una aplicación del teorema del muestreo, a la holografía digital y a la microscopía de super-resolución; en el capítulo 11 se hace una aplicación a la holografía numérica.

Capítulo 8

La transformación de Fourier fraccionaria y la difracción

Aquí se muestra bajo que condiciones un fenómeno de difracción de Fresnel puede ser traducido matemáticamente por una transformación de Fourier fraccionaria [48, 47, 50], adaptando la transformación de Fourier fraccionaria a la teoría de la difracción metaxial de Bonnet [10, 12, 11].

8.1. Difracción Metaxial

La doctrina de la óptica metaxial de Bonnet, a la cual se adapta muy bien la óptica de Fourier fraccionaria, se apoya en una teoría escalar de la difracción y trata la transferencia del campo electromagnético entre emisores y receptores esféricos [49].

La transferencia del campo $U_A(\mathbf{r})$, entre un emisor monocromático esférico $\mathcal{A}$ de radio de curvatura R_A y longitud de onda λ y un receptor esférico $\mathcal{F}$ de radio de curvatura $-R_A$, ver figura 8.1, está dada por

$$U_F(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda R_A} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left[\frac{2i\pi\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}{\lambda R_A}\right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}\,, \tag{8.1}$$

además de un factor de fase $\Phi = \exp(-2i\pi R_A/\lambda)$, que corresponde al retardo en la fase asociado a la propagación desde $\mathcal{A}$ hasta $\mathcal{F}$, el cual no se escribe por tratarse de un campo monocromático, lo que permite eleminar Φ mediante un traslado del origen del tiempo. Entonces la transferencia del campo se efectúa por medio de una transformación de Fourier óptica y se dice que $\mathcal{F}$ es la esfera de Fourier de $\mathcal{A}$, cuya situación corresponde a un fenómeno de difracción de Fraunhofer.

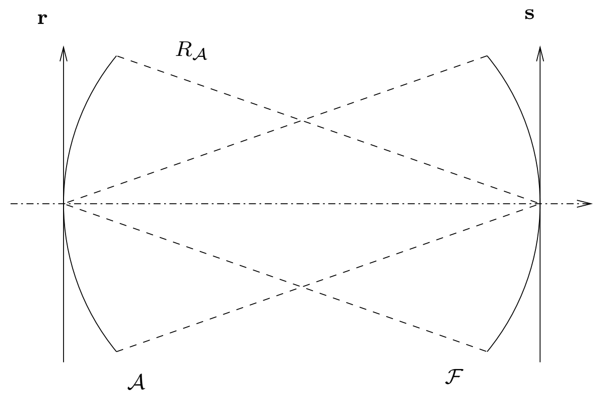

FIGURA 8.1: Difracción de Fraunhofer. La amplitud del campo sobre $\mathcal{F}$ es la transformada de Fourier óptica del campo sobre $\mathcal{A}$.

En esta aproximación la transferencia del campo $U_A(\mathbf{r})$, desde un emisor monocromático esférico $\mathcal{A}$ de radio de curvatura R_A y longitud de onda λ, hasta un receptor esférico tangente $\mathcal{B}$ de radio de curvatura R_B, ver figura 8.2, está dada por

$$U_B(\mathbf{r}) = U_A(\mathbf{r}) \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right) r^2\right], \tag{8.2}$$

entonces se dice que la transferencia del campo desde el emisor $\mathcal{A}$ al receptor $\mathcal{B}$ se hace mediante una transparencia de curvatura.

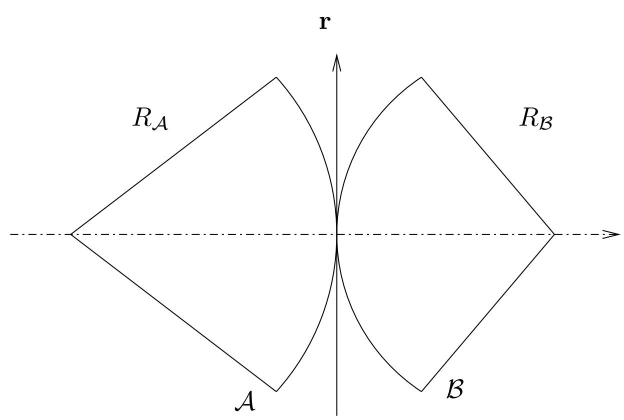

FIGURA 8.2: Transparencia de curvatura de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

Con base en estos dos casos simples, se puede escribir la transferencia general del campo $U_A(\mathbf{r})$, ver figura 8.3. La transferencia se da entre un emisor $\mathcal{A}$ monocromático de radio de curvatura R_A

y un receptor $\mathcal{B}$ de radio de curvatura R_B, separados una distancia D en la forma

$$\begin{aligned} U_B(\mathbf{s}) &= \frac{i}{\lambda D} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{R_B}+\frac{1}{D}\right)s^2\right] \\ &\times \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{D}-\frac{1}{R_A}\right)r^2\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda D}\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}\right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}\,. \end{aligned} \tag{8.3}$$

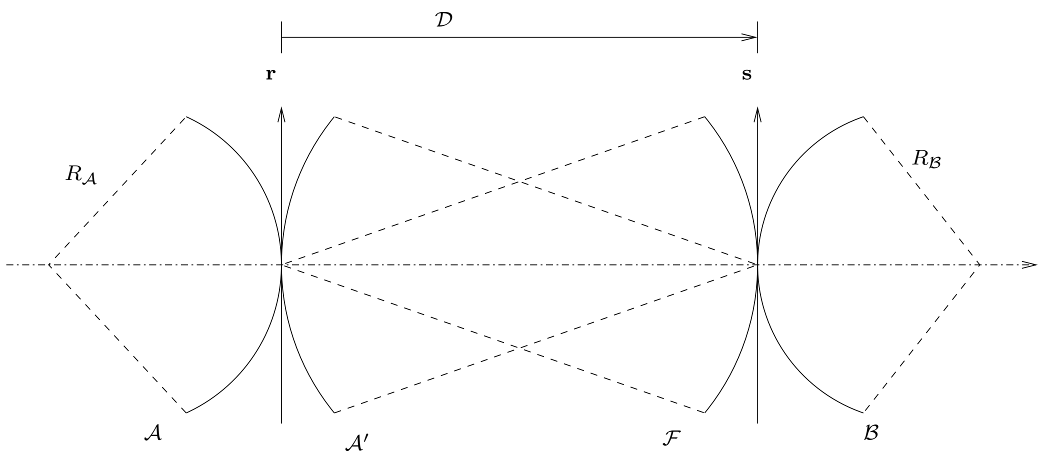

FIGURA 8.3: Transferencia del campo de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

8.2. Imagen coherente en sistemas centrados

Sea $\mathcal{S}$ un sistema centrado de foco objeto F y foco imagen F', y sea $\mathcal{A}$ un emisor esférico de vértice V y centro C. Sea $\mathcal{A}'$ de vértice V' y centro C' (ver figura 8.4).

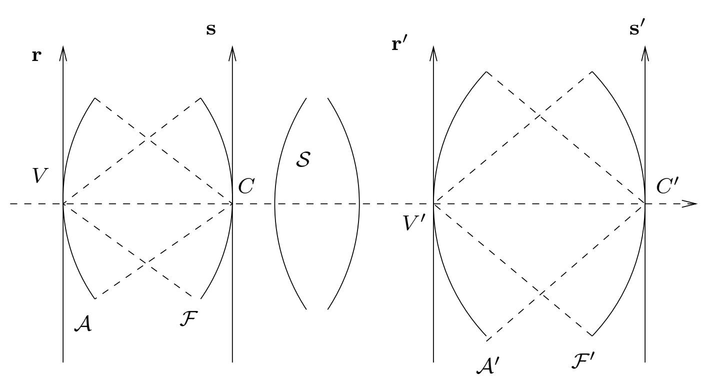

FIGURA 8.4: Imagen coherente por un sistema centrado $\mathcal{S}$.

Se enuncia el siguiente teorema:

Teorema 8.2.1 (imagen coherente. G. Bonnet). La amplitud del campo sobre la esfera $\mathcal{A}'$ es la imagen coherente de la amplitud del campo sobre la esfera $\mathcal{A}$ a través de un sistema óptico centrado si, y solamente si, el vértice V' y centro de curvatura C' de $\mathcal{A}'$ son las imágenes paraxiales respectivas del vértice V y centro C de curvatura de $\mathcal{A}$. Si g_v es el aumento lateral en los vértices, las amplitudes de los campos son sobre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son tales que

$$U_{\mathcal{A}'}(\mathbf{r}') = \frac{1}{g_v} U_{\mathcal{A}} \left(\frac{\mathbf{r}'}{g_v} \right) . \tag{8.4}$$

Luego, también la amplitud del campo sobre $\mathcal{F}'$ es la imagen coherente de la amplitud del campo sobre $\mathcal{F}$.

8.3. Difracción y transformación de Fourier fraccionaria

En difracción la transformación de Fourier fraccionaria que nos interesa es una versión bidimensional de orden α de la función $f(\vec{\rho})$, tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha[f](\vec{\sigma}) &= \frac{ie^{-i\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha} \exp\left[-i\pi\sigma^2 \cot\alpha\right] \\ &\times \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-i\pi\rho^2 \cot\alpha\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\operatorname{sen}\alpha} \vec{\rho}\cdot\vec{\sigma}\right] f(\vec{\rho}) d\vec{\rho} . \end{aligned} \tag{8.5}$$

La analogía entre las ecuaciones 8.3 y 8.5 parece inmediata, y la idea de Pellat-Finet fue encontrar el valor adecuado de α, además de las variables reducidas apropiadas.

Se define el parámetro μ, tal que

$$\mu = \frac{D}{R_A} . \tag{8.6}$$

Sea ε un número real, diferente de 0, tal que $\varepsilon R_A > 0$. Sea α en el intervalo $[-\pi, \pi]$, tal que

$$\cot\alpha = \varepsilon \frac{1-\mu}{\mu} , \quad \alpha D \geq 0 , \tag{8.7}$$

de aquí

$$\mu = \frac{\varepsilon \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha + \varepsilon \operatorname{sen}\alpha} , \tag{8.8}$$

y

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \varepsilon^2(1-\mu)^2} . \tag{8.9}$$

Con las siguientes variables reducidas

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\varepsilon R_A}}\vec{r}, \qquad \vec{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\varepsilon R_A}}(\cos\alpha + \varepsilon \operatorname{sen}\alpha)\vec{s}, \tag{8.10}$$

y las amplitudes reducidas

$$V_A(\vec{\rho}) = U_A\left(\sqrt{\lambda\varepsilon R_A}\vec{\rho}\right), \qquad V_B(\vec{\sigma}) = U_B\left(\sqrt{\lambda\varepsilon R_A}\frac{\vec{\sigma}}{\cos\alpha + \varepsilon \operatorname{sen}\alpha}\right). \tag{8.11}$$

Observando el campo sobre un receptor $\mathcal{B}$ cuyo radio de curvatura R_B esté dado por

$$R_B = \frac{\mu^2 + \varepsilon^2(1-\mu)^2}{-\mu + \varepsilon^2(1-\mu)}R_A = \frac{D^2 + \varepsilon^2(R_A - D)^2}{-D + \varepsilon^2(R_A - D)}, \tag{8.12}$$

se tiene

$$V_B(\vec{\sigma}) = \mathrm{e}^{i\alpha}(\cos\alpha + \varepsilon \operatorname{sen}\alpha)\mathscr{F}_\alpha[V_A](\vec{\sigma}), \tag{8.13}$$

así la amplitud del campo sobre el receptor $\mathcal{B}$ está relacionada con la amplitud de campo sobre $\mathcal{A}$ por una transformación de Fourier fraccionaria. En general el orden de la transformación puede ser complejo [53].

Existen varias formas de relacionar las ecuaciones 8.3 y 8.5 por ejemplo [31, 5], pero la asociación de Pella-Finet además cumple el principio de Huygens [23].

8.4. Expresión de la difracción de Fresnel a través de un sistema centrado por una transformación de Fourier fraccionaria

Este cálculo tiene por objeto, describir la difracción del campo que se halla sobre una superficie $\mathcal{A}$ al propagarse hasta la superficie $\mathcal{B}$, cuando el campo pasa a través de un sistema centrado (ver figura 8.5). Como caso particular de sistema centrado se tomó una lente delgada, pero esto no limita el tratamiento sólo lentes delgadas.

En el tratamiento el emisor $\mathcal{A}$ y el receptor $\mathcal{B}$ pueden ser en general esféricos, pero aquí se estudiará el caso particular donde son planos.

La lente $\mathcal{L}_2$ de foco imagen F' adapta las curvaturas. Esta adaptación de las curvaturas consiste en el hecho que en el espacio imagen los campos sobre $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{F}'$ conforman un sistema confocal (ver

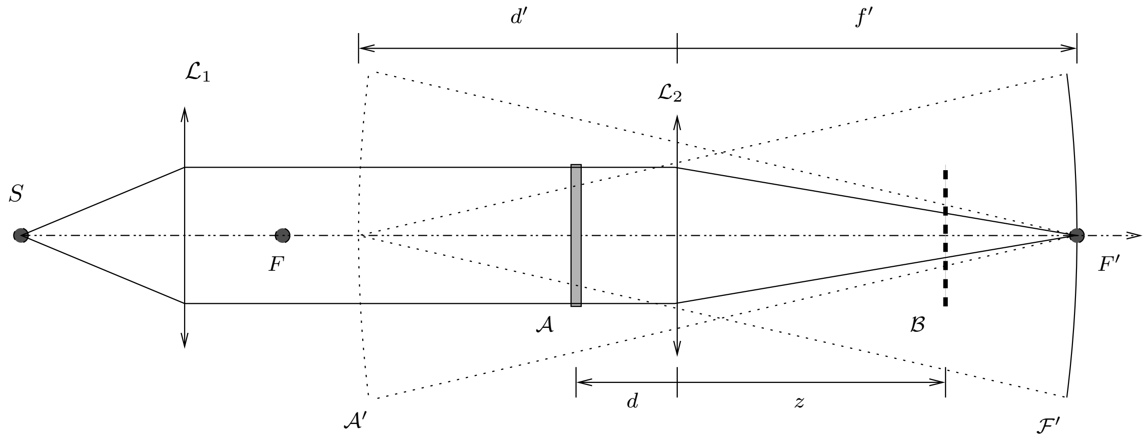

FIGURA 8.5: Propagación del campo a través de un sistema centrado.

figura 8.4) cuyas curvaturas son adaptadas por la lente $\mathcal{L}_2$, para así utilizar el método general de Pellat-Finet(ver sección §8.3) en la descripción de la difracción.

En la figura 8.5 se muestra el emisor $\mathcal{A}$ y se quiere determinar el campo sobre $\mathcal{B}$, para esto lo primero que se hace es encontrar la imagen coherente de $U_{\mathcal{A}}$, la cual se llamará $U_{\mathcal{A}'}$, dado que se encuentra sobre la superficie esférica $\mathcal{A}'$, así

$$U_{\mathcal{A}'}(\mathbf{r}') = \frac{1}{g_v} U_{\mathcal{A}}(\frac{\mathbf{r}'}{g_v}), \tag{8.14}$$

donde el aumento

$$g_v = \frac{d'}{d} = \frac{f'}{f'+d}, \tag{8.15}$$

f' es la distancia focal imagen de la lente $\mathcal{L}_2$.

Dado que el emisor $\mathcal{A}$ es plano, su esfera de Fourier $\mathcal{F}$ se encuentra en $-\infty$, por lo tanto la imagen de $\mathcal{F}$ se encuentra en el foco F', así $\mathcal{F}'$ es la esfera de Fourier de $\mathcal{A}'$ con

$$R_{\mathcal{A}'} = f' - d' = \frac{f'^2}{f'+d}. \tag{8.16}$$

De esta manera el sistema óptico conformado por el emisor $\mathcal{A}$, la lente $\mathcal{L}_2$ y el receptor $\mathcal{F}'$, es equivalente, luego de la lente, al sistema óptico conformado por el emisor $\mathcal{A}'$ y el receptor $\mathcal{F}'$, por lo cual el campo puede ser descrito, luego de la lente, por cualquiera de los dos sistemas.

Por esto, el problema se planteará con base en el esquema de la figura 8.6. Se tiene un emisor esférico $\mathcal{A}'$ y se desea estudiar el campo sobre el receptor $\mathcal{B}$, teniendo presente que los sistemas solo son equivalentes a partir de la distancia $-d'$ desde el vértice V', es decir, $D \geq -d'$. El campo sobre

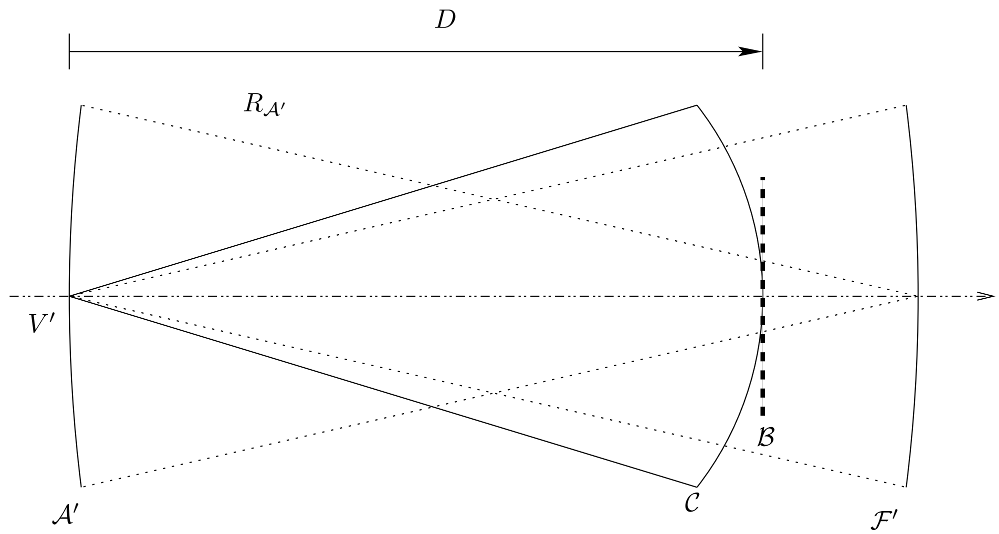

FIGURA 8.6: Sistema equivalente en el espacio imagen. Difracción entre el emisor esférico $\mathcal{A}'$ y el receptor $\mathcal{B}$.

la esfera cardinal, $\mathcal{C}$, a la distancia

$$D = z - d' = z - \frac{df'}{f' + d}\,, \tag{8.17}$$

para $z \geq 0$ está dado por

$$\begin{aligned} U_C(\vec{s}) &= \frac{i}{\lambda D}\int_{R^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_{\mathcal{A}'}}\right) r'^2\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda D}\vec{r}' \cdot \vec{s}\right] U_{\mathcal{A}'}(\vec{r}')d\vec{r}' \\ &= \frac{i}{g_v \lambda D}\int_{R^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_{\mathcal{A}'}}\right) r'^2\right] \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda D}\vec{r}' \cdot \vec{s}\right] U_{\mathcal{A}}\left(\frac{\vec{r}'}{g_v}\right) d\vec{r}'\,, \end{aligned} \tag{8.18}$$

con el siguiente cambio de variables $\vec{r} = \vec{r}'/g_v$ se tiene

$$U_C(\vec{s}) = \frac{ig_v}{\lambda D}\int_{R^2} \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_{\mathcal{A}'}}\right) g_v^2 r^2\right] \exp\left[\frac{2i\pi g_v}{\lambda D}\vec{r} \cdot \vec{s}\right] U_{\mathcal{A}}(\mathbf{r})d\vec{r}. \tag{8.19}$$

Se utiliza el parámetro μ, tal que

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{D}{R_{\mathcal{A}'}} \\ &= \frac{zf' - df' + zd}{f'^2}\,, \end{aligned} \tag{8.20}$$

con esto

$$U_C(\vec{s}) = \frac{ig_v}{\lambda\mu R_{\mathcal{A}'}}\int_{R^2}\exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda R_{\mathcal{A}'}}g_v^2\left(\frac{1-\mu}{\mu}\right)r^2\right]\exp\left[\frac{2i\pi g_v}{\mu\lambda R_{\mathcal{A}'}}\vec{r}\cdot\vec{s}\right]U_{\mathcal{A}}(\vec{r})d\vec{r}\,. \tag{8.21}$$

Se define

$$\cot\alpha' = g_v^2\varepsilon\frac{1-\mu}{\mu}\,, \tag{8.22}$$

se utiliza α' para evidenciar el papel que juega el teorema del escalamiento A.28, donde $\cot\alpha' = g_v^2\cot\alpha$. Luego

$$\mu = \frac{g_v^2\varepsilon\operatorname{sen}\alpha'}{\cos\alpha' + g_v^2\varepsilon\operatorname{sen}\alpha'}\,, \tag{8.23}$$

y

$$\operatorname{sen}^2\alpha' = \frac{\mu^2}{\mu^2 + g_v^4\varepsilon^2(1-\mu)^2}\,. \tag{8.24}$$

Se utilizan las variables reducidas

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\varepsilon R_{\mathcal{A}'}}}\vec{r},\quad \vec{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\varepsilon R_{\mathcal{A}'}}}\frac{\cos\alpha' + g_v^2\varepsilon\operatorname{sen}\alpha'}{g_v}\vec{s}, \tag{8.25}$$

con las amplitudes reducidas

$$V_{\mathcal{A}}(\vec{\rho}) = U_{\mathcal{A}}(\sqrt{\lambda\varepsilon R_{\mathcal{A}'}}\vec{\rho})\,, \tag{8.26}$$

$$V_C(\vec{\sigma}) = U_C\left(\sqrt{\lambda\varepsilon R_{\mathcal{A}'}}\frac{g_v\vec{\sigma}}{\cos\alpha' + g_v^2\varepsilon\operatorname{sen}\alpha'}\right)\,. \tag{8.27}$$

Así la Ecuación 8.21 se escribe

$$V_C(\vec{\sigma}) = \frac{i(\cos\alpha' + g_v^2\varepsilon\operatorname{sen}\alpha')}{g_v^2\operatorname{sen}\alpha'}\int_{R^2}\exp\left[-i\pi\rho^2\cot\alpha'\right]\exp\left[\frac{2i\pi\vec{\sigma}\cdot\vec{\rho}}{\operatorname{sen}\alpha'}\right]V_A(\vec{\rho})d\vec{\rho}\,. \tag{8.28}$$

Se tendrá una transformación de Fourier fraccionaria si se observa el campo sobre la esfera $\mathcal{B}$ tangente a $\mathcal{C}$ de radio de curvatura R_B, tal que

$$\exp\left[-i\pi\sigma^2\cot\alpha'\right] = \exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda R_{\mathcal{A}'}}\frac{g_v^4\varepsilon^2(1-\mu)}{\mu\left[\mu^2 + g_v^4\varepsilon^2(1-\mu)^2\right]}s^2\right]\,, \tag{8.29}$$

entonces

$$\frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} = \frac{g_v^4\varepsilon^2(1-\mu)}{R_{\mathcal{A}'}\mu\left[\mu^2 + g_v^4\varepsilon^2(1-\mu)^2\right]}\,, \tag{8.30}$$

luego se tiene

$$R_B = \frac{\mu^2 + g_v^4\varepsilon^2(1-\mu)^2}{-\mu + g_v^4\varepsilon^2(1-\mu)}R_{\mathcal{A}'}\,, \tag{8.31}$$

con esto y con la amplitud reducida en $\mathcal{B}$

$$V_B(\vec{\sigma}) = U_B\left(\sqrt{\lambda\varepsilon R_{\mathcal{A}'}}\frac{g_v\vec{\sigma}}{\cos\alpha' + g_v^2\varepsilon\operatorname{sen}\alpha'}\right)\,. \tag{8.32}$$

El campo sobre $\mathcal{B}$ es

$$V_B(\vec{\sigma}) = B_{\alpha'}\mathscr{F}_{\alpha'}[V_{\mathcal{A}}](\vec{\sigma})\,, \tag{8.33}$$

con

$$B_{\alpha'} = \mathrm{e}^{i\alpha'}\frac{\cos\alpha' + g_v^2\varepsilon\operatorname{sen}\alpha'}{g_v^2}\,. \tag{8.34}$$

8.4.1. Casos particulares de interés especial

- Para $z = f'$ en 8.20, se tiene $\mu = 1$, con esto $\alpha' = \pi/2$ y $R_B = -R_{\mathcal{A}'}$, entonces $U_{\mathcal{B}}(\vec{s}) = \widehat{U}_{\mathcal{A}}(\frac{g_v}{\lambda R_{\mathcal{A}'}}\vec{s})$ con $\frac{g_v}{R_{\mathcal{A}'}} = \frac{1}{f'}\ \forall\ d$.
- Para $d = 0$ en 8.15, se toma $\lim_{d\to 0} g_v = 1$, se tiene el objeto contra la lente, donde es más evidente el papel de la lente como elemento de adaptación de las curvaturas, dado que de 8.16 $R_{\mathcal{A}'} = f'$ con $d' = 0$.
- Para $d = -f'/2$ el campo sobre $\mathcal{F}'$ tiene un radio de curvatura $R_{\mathcal{B}} = -2f'$.
- Un caso patológico se da para $d = -f'$, con esto la imagen se encuentra en $-\infty$, y se indetermina $R_{\mathcal{A}'}$, por lo cual se toma el límite

$$\lim_{d\to -f'}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_{\mathcal{A}'}}\right)g_v^2 = \frac{1}{f'} - \frac{1}{f'\frac{f'}{z}}\,,$$

  y

$$\lim_{d\to -f'}\frac{g_v}{D} = \frac{1}{f'}\,.$$

  así con $\nu = \frac{f'}{z}$ escribimos 8.19

$$U_z(\vec{s}) = \frac{i}{\lambda f'}\int_{R^2}\exp\left[-\frac{i\pi}{\lambda f'}\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)r^2\right]\exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda f'}\vec{r}\cdot\vec{s}\right]U_{\mathcal{A}}(\vec{r})d\vec{r}\,. \tag{8.35}$$

- Para $\mathcal{B}$ plano

$$\varepsilon^2 = \frac{\mu}{g_v^4(1-\mu)} \quad \text{y} \quad \cot\alpha' = \mathbb{S}(\varepsilon)\sqrt{\frac{(1-\mu)}{\mu}}\,, \tag{8.36}$$

  donde $\mathbb{S}(\varepsilon)$ es el signo de ε.

Capítulo 9

Convolución y correlación fraccionarias ópticas

La óptica de Fourier es una consecuencia directa de la relación que existe entre el fenómeno de difracción en el régimen de Fraunhofer y la transformación de Fourier, de esto toma ventaja la óptica para trasladar los elementos del análisis de Fourier al tratamiento óptico de la información. De forma análoga el fenómeno de difracción en el régimen de Fresnel se traduce matemáticamente por una transformación de Fourier fraccionaria, lo cual hace posible trasladar los elementos del análisis de Fourier fraccionario al tratamiento óptico de la información.

En este capítulo se proponen unas configuraciones ópticas para realizar las operaciones de convolución y correlación fraccionarias ópticamente, con el propósito de desarrollar algunos elementos para el tratamiento óptico de señales.

9.1. Convolución y correlación fraccionaria óptica

9.1.1. Sistema 1: Transformaciones sucesivas

Se identifican en las definiciones 4.13 y 4.16 un término de fase cuadrático, el cual puede ser interpretado como una curvatura en el filtro tanto para la convolución como para la correlación. En la práctica en lugar de utilizar filtros curvos se adaptan las curvaturas mediante el uso de una lente convergente para la convolución y otra divergente para la correlación.

9.1.1.1. Filtros complejos

Se propone una técnica para el registro del filtro con base en el sistema óptico de la figura 8.5, donde la curvatura en los filtros de convolución y correlación fraccionarias queda codificado mediante el uso de un haz referencia esférico. En la figura 9.1 la lente $\mathcal{L}_2$ de focal f_2' adapta las curvaturas para poder expresar la trasferencia del campo desde el plano objeto $\mathcal{O}$ hasta el plano $\mathcal{P}$ por una transformación de Fourier fraccionaria de orden α.

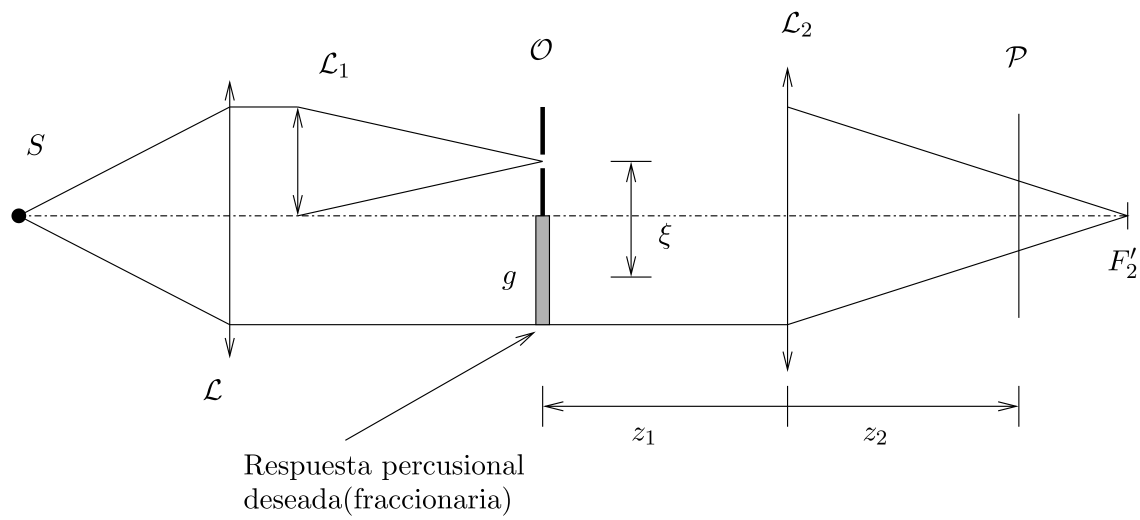

FIGURA 9.1: Arreglo óptico para el registro holográfico del filtro acompañado del factor de fase cuadrático apropiado. El campo sobre $\mathcal{P}$ está dado por $V_{\mathcal{P}} = B_\alpha \mathscr{F}_\alpha[V_{\mathcal{O}}]$

En la figura 9.1 se hace la transformación de Fourier fraccionaria óptica conjunta tanto de la fuente puntual $A\delta_\xi$, como de la respuesta percusional fraccionaria g. En el plano de salida $\mathcal{P}$ se tiene

$$V_{\mathcal{P}}(\sigma) = B_\alpha[g_\alpha(\sigma) + C_\alpha A \exp\left(-i\pi\xi^2 \cot\alpha\right) \exp\left(-i\pi\sigma^2 \cot\alpha\right) \exp\left(i2\pi\xi\sigma/\operatorname{sen}\alpha\right)], \tag{9.1}$$

de modo que la intensidad de la luz incidente sobre el medio de registro, puede ser escrito en la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\sigma) &= |B_\alpha|^2 |g_\alpha(\sigma) + C_\alpha A \mathrm{e}^{-i\pi\xi^2\cot\alpha} \mathrm{e}^{-i\pi\sigma^2\cot\alpha} \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}\xi\sigma}|^2 \\
&= |B_\alpha|^2 |C_\alpha|^2 |A|^2 + |B_\alpha|^2 |g_\alpha(\sigma)|^2 \\
&+ |B_\alpha|^2 C_\alpha A \overline{g_\alpha(\sigma)} \mathrm{e}^{-i\pi\xi^2\cot\alpha} \mathrm{e}^{-i\pi\sigma^2\cot\alpha} \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}\xi\sigma} \\
&+ |B_\alpha|^2 \overline{C_\alpha A} g_\alpha(\sigma) \mathrm{e}^{i\pi\xi^2\cot\alpha} \mathrm{e}^{i\pi\sigma^2\cot\alpha} \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}\xi\sigma},
\end{aligned} \tag{9.2}$$

así la transmitancia de la película de registro tiene la forma $t_A(\sigma) \propto \mathcal{I}(\sigma)$.

La figura 9.2, muestra un esquema que realiza dos transformaciones de Fourier fraccionarias ópticas sucesivas. En la figura 9.2(a), el primer sistema está compuesto por el plano de entrada $\mathcal{A}$, la lente $\mathcal{L}_2$ y el plano de salida $\mathcal{B}$. En este sistema la propagación del campo desde el plano $\mathcal{A}$ hasta el plano $\mathcal{B}$ se expresa por una transformación de Fourier fraccionaria de orden α, utilizando 8.20 y 8.36 se tiene

$$\cot\alpha = \sqrt{\frac{1-\mu}{\mu}} \quad \text{para} \quad \mu = \frac{z_2 f_2' - z_1 f_2' + z_1 z_2}{f_2'^2}\,. \tag{9.3}$$

Para que el orden α sea igual al empleado en el registro de la respuesta percusional de la figura 9.1 las distancias z_1 y z_2 deben ser las mismas y la lente $\mathcal{L}_2$ de la figura 9.1 igual a la lente $\mathcal{L}_2$ de la figura 9.2, entonces la amplitud reducida del campo en el plano $\mathcal{B}$ es la transformada de Fourier fraccionaria óptica $B_\alpha \mathscr{F}_\alpha[f]$ de la amplitud reducida f que se encuentra sobre el plano $\mathcal{A}$.

En el segundo sistema óptico de la figura 9.2(a), compuesto por el plano de entrada $\mathcal{B}$, la lente $\mathcal{L}_3$ y el plano se salida $\mathcal{C}$, se introduce el filtro complejo t_A en el plano $\mathcal{B}$, así en la entrada de este sistema se tiene el producto $B_\alpha \mathscr{F}_\alpha[f] t_A$, y efectúa la transformación de Fourier fraccionaria de orden α', con

$$\cot\alpha' = \mathbb{S}(\varepsilon')\sqrt{\frac{1-\mu'}{\mu'}} \quad \text{para} \quad \mu' = \frac{z_2' f_3' - z_1' f_3' + z_1' z_2'}{f_3'^2}\,. \tag{9.4}$$

Para tener una convolución fraccionaria se necesita que el segundo sistema efectúe una transformación de Fourier fraccionaria de orden $-\alpha$. En el caso estándar el problema se resuelve fácilmente dado que dos transformaciones de Fourier sucesivas obedecen a una operación de paridad (ver apéndice A ecuación A.18). Aquí el problema se resuelve con base en el concepto de imagen coherente, donde la distancia z_1' se escoge tal que la esfera $\mathcal{B}'$, imagen coherente del plano $\mathcal{B}$, esté luego de su esfera de Fourier $\mathcal{H}'$, así $\varepsilon R_{\mathcal{A}'} > 0$ y $\varepsilon' R_{\mathcal{B}'} > 0$, con esto $\mathbb{S}(\varepsilon') = -\mathbb{S}(\varepsilon)$ y así $\mathbb{S}(\alpha') = -\mathbb{S}(\alpha)$.

En la figura 9.2b se muestra que el primer sistema es equivalente a la propagación desde el emisor esférico $\mathcal{A}'$ hasta el receptor esférico $\mathcal{F}'$, y el segundo sistema es equivalente a la propagación desde el emisor esférico $\mathcal{B}'$ hasta el receptor esférico $\mathcal{H}'$, así en el primero se tiene una difracción real y en el segundo se tiene una difracción virtual.

Para tener sobre el plano $\mathcal{C}$ una convolución fraccionaria, se debe cumplir que $\alpha' = -\alpha$ y las variables reducidas en $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ en la misma escala. Aquí para simplificar los cálculos se tomarán todas las focales iguales, pero no es condición necesaria, entonces:

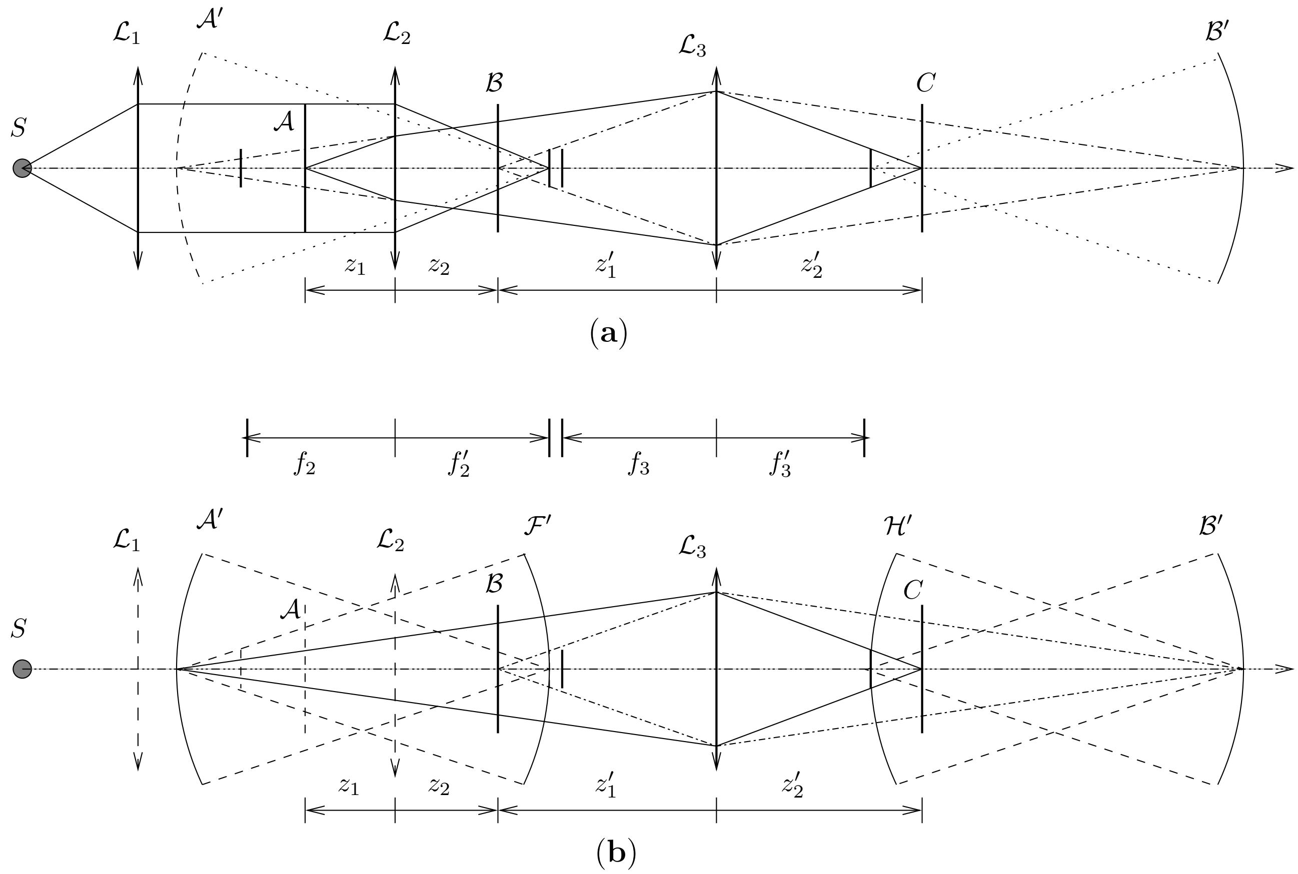

FIGURA 9.2: Esquema óptico para la convolución fraccionaria: (a) Sistema óptico, compuesto de dos transformaciones sucesivas, la primera entre los planos $\mathcal{A}$ y el plano $\mathcal{B}$, y la segunda entre los planos $\mathcal{B}$ y C. (b) Sistema equivalente. El plano C es la imagen coherente $\mathcal{A}'$, y $\mathcal{B}'$ es la imagen coherente de $\mathcal{B}$.

1. $g_v' = -g_v$, donde g_v es el aumento del primer sistema compuesto por la lente $\mathcal{L}_2$, y g_v' es el aumento del segundo sistema compuesto por la lente $\mathcal{L}_3$. Esto implica por 8.15 que

$$\frac{f'}{f' - z_1'} = \frac{-f'}{f' - z_1}\,, \tag{9.5}$$

entonces

$$z_1' = -2f' - z_1\,. \tag{9.6}$$

2. $\mu' = \mu$, usando las ecuaciones 9.3 y 9.4 se llega a

$$z_2 f' - z_1 f' + z_2 z_1 = z_2' f' - z_1' f' + z_2' z_1'\,, \tag{9.7}$$

por 9.6 se tiene

$$z_2 f' - z_1 f' + z_2 z_1 = z_2' f' + 2f'^2 + z_1 f' - 2z_2' f' - z_2' z_1\,, \tag{9.8}$$

de aquí

$$z_2' = 2f' - z_2\,. \tag{9.9}$$

Bajo estas condiciones de 8.36 tenemos $|\varepsilon'| = |\varepsilon|$ y con esto

$$g_v'^2\varepsilon'\frac{1-\mu'}{\mu'} = -g_v^2\varepsilon\frac{1-\mu}{\mu}\,. \tag{9.10}$$

La salida en $\mathcal{C}$ está dada por

$$C(\rho) = B_{-\alpha}\mathscr{F}_{-\alpha}[f_\alpha(\sigma)t_A(\sigma)](\rho)\,, \tag{9.11}$$

reemplazando aquí t_A por lo obtenido en la ecuación 9.2, se encuentra que C está compuesta de tres elementos, un orden central

$$C_0(\rho) = B_{-\alpha}\mathscr{F}_{-\alpha}[|B_\alpha|^2|C_\alpha|^2|A|^2 + |B_\alpha|^2|g_\alpha(\sigma)|^2](\rho)\,, \tag{9.12}$$

y por los siguientes a cada lado

$$\begin{aligned} C_1(\rho) &= B_{-\alpha}\mathscr{F}_{-\alpha}\left[|B_\alpha|^2C_\alpha A f_\alpha(\sigma)\overline{g_\alpha(\sigma)}\mathrm{e}^{-i\pi\xi^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i\pi\sigma^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}\xi\sigma}\right]\,, \\ &\propto \mathscr{T}_{\xi;\alpha}[f \circledast_\alpha g](\rho)\mathrm{e}^{-i\pi\xi^2\cot\alpha}\,, \end{aligned} \tag{9.13}$$

y

$$\begin{aligned} C_{-1}(\rho) &= B_{-\alpha}\mathscr{F}_{-\alpha}\left[|B_\alpha|^2\overline{C_\alpha A}f_\alpha(\sigma)g_\alpha(\sigma)\mathrm{e}^{i\pi\xi^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{i\pi\sigma^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}\xi\sigma}\right]\,, \\ &\propto \mathscr{T}_{-\xi;\alpha}[f *_\alpha g](\rho)\mathrm{e}^{i\pi\xi^2\cot\alpha}\,. \end{aligned} \tag{9.14}$$

El resultado final es una convolución fraccionaria en $\rho = -\xi$, y una correlación fraccionaria en $\rho = \xi$.

9.1.2. Sistema 2: transformación conjunta

Otra configuración óptica de gran interés es la llamada Correlación fraccionaria por transformación de Fourier fraccionaria conjunta, tal configuración se muestra en la figura9.3. El biprisma produce las frecuencias espaciales $\mathbf{F}_\pm = \pm\frac{\operatorname{sen}\theta}{\lambda}$. Para poder escribir el campo sobre el plano $\mathcal{A}$ en la forma

$$h(\rho) = \mathscr{T}_{\xi;\alpha}[f](\rho) + \mathscr{T}_{-\xi;\alpha}[g](\rho)\,, \tag{9.15}$$

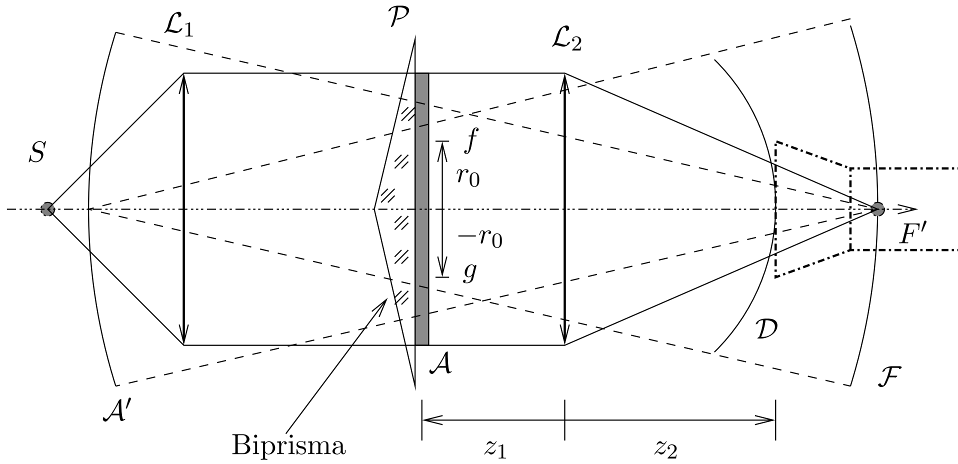

FIGURA 9.3: Configuración óptica para el correlador fraccionario de transformación conjunta

se debe adaptar la posición z_1 del biprisma utilizado, tal que

$$\begin{aligned} \exp\left[\pm 2i\pi\frac{\operatorname{sen}\theta}{\lambda}r\right] &= \exp\left(\pm 2i\pi\xi\rho\cot\alpha\right) \\ &= \exp\left[\pm 2i\pi\frac{r_0 g_v^2}{\lambda R_{\mathcal{A}'}}\frac{1-\mu}{\mu}r\right], \end{aligned} \tag{9.16}$$

entonces

$$\begin{aligned} \pm\, r_0\frac{g_v^2}{R_{\mathcal{A}'}}\frac{1-\mu}{\mu} &= \pm r_0\frac{f'-z_2}{z_2 f' + z_1 z_2 - z_1 f'} \\ &= \pm\operatorname{sen}\theta\,. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Bajo estas condiciones, la propagación hasta la esfera $\mathcal{D}$ se expresa como una transformación de Fourier fraccionaria de orden α de h, tal que

$$\mathcal{F}_\alpha[h](\sigma) = f_\alpha(\sigma)\exp\left[i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}\xi\sigma\right]\mathrm{e}^{-i\pi\xi^2\cot\alpha} + g_\alpha(\sigma)\exp\left[-i\frac{2\pi}{\operatorname{sen}\alpha}\xi\sigma\right]\mathrm{e}^{-i\pi\xi^2\cot\alpha}, \tag{9.18}$$

Si en el plano de salida se tiene un detector cuadrático, entonces lo detectado es proporcional a

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{D}}(\sigma) &\propto |f_\alpha(\sigma)|^2 + |g_\alpha(\sigma)|^2 + f_\alpha(\sigma)\overline{g_\alpha(\sigma)}\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{\operatorname{sen}\alpha}\xi\sigma} \\ &+ g_\alpha(\sigma)\overline{f_\alpha(\sigma)}\mathrm{e}^{-i\frac{4\pi}{\operatorname{sen}\alpha}\xi\sigma}, \end{aligned} \tag{9.19}$$

Si el detector cuadrático es una cámara CCD, hay que garantizar que se cumple el teorema del muestreo para el sensor, como se verá en el capítulo 10. Se multiplica digitalmente lo registrado por $\exp\left(-i\pi\sigma^2\cot\alpha\right)$, y se calcula la transformada de Fourier fraccionaria de orden $-\alpha$, resultando

$$
\begin{aligned}
C_0(\rho) &= f \circledast_\alpha f(\rho) + g \circledast_\alpha g(\rho)\,, && (9.20)\\
C_1(\rho) &= \mathscr{T}_{2\xi;\alpha}[f \circledast_\alpha g](\rho)\,, && (9.21)\\
C_{-1}(\rho) &= \mathscr{T}_{-2\xi;\alpha}[g \circledast_\alpha f](\rho)\,. && (9.22)
\end{aligned}
$$

Este resultado consiste de dos términos laterales correspondientes a correlaciones fraccionarias cruzadas, trasladadas en $\rho = \pm 2\xi$.

9.2. Conclusiones de las aplicaciones a la óptica de la convolución y correlación fraccionaria

Los factores de fase que se introducen en las ecuaciones 4.13 y 4.16 se interpretan como curvaturas en los filtros ópticos tanto para correlación como para convolución fraccionarias ópticas. Estas curvaturas son codificadas mediante el empleo de filtros complejos, registrados holográficamente con una onda referencia esférica (ver figura 9.1). Para el registro del filtro se diseñó un sistema óptico que adapta tanto el campo como la onda esférica de referencia, nótese que si las distancias z_1 y z_2 son iguales a la focal, el sistema se convierte en un sistema Vander Lugt y $\alpha = \pi/2$.

La longitud del correlador, que corresponde a la suma

$$L = z_2 - z_1 - z_1' + z_2'\,, \qquad (9.23)$$

por la las relaciones 9.6 y 9.9 se tiene

$$
\begin{aligned}
L &= z_2 - z_1 + 2f' + z_1 + 2f' - z_2\\
&= 4f'\,. && (9.24)
\end{aligned}
$$

Esto nos muestra que el correlador fraccionario óptico de transformaciones sucesivas también es un sistema $4f'$ como lo es el correlador estándar óptico, además que también realiza tanto convolución fraccionaria como correlación fraccionaria.

Se ilustró un sistema para correlación fraccionaria por transformación de Fourier fraccionaria conjunta, donde las fases lineales de la ecuación 9.15 son adaptadas mediante el uso de un biprisma de Fresnel.

Capítulo 10

Aplicaciones del teorema del muestreo en óptica

En la actualidad, para muchas aplicaciones, hay un gran interés en sustituir los medios de registro analógicos, tales como películas fotográficas, cristales fotorrefractivos, entre otros, por medios de registros digitalizadores tales como cámaras CCDs [58]. De este modo, es común hablar de pérdida de resolución en el registro pero ganancia de flexibilidad y tratamientos en tiempo real.

Aquí se muestra que bajo ciertas condiciones, teóricamente no hay pérdida de resolución en la digitalización, de tal forma que un medio de registro análogo puede ser sustituido por uno digitalizador, si la distancia interpíxel cumple el teorema del muestreo con respecto al campo a registrar.

10.1. Holografía digital

El interés es reconstruir digitalmente un objeto, a partir de un holograma que ha sido registrado por un detector cuadrático, por ejemplo en *particle field holography* [69, 17]. Una cámara puede ser utilizada como un detector en tiempo real en lugar de un medio análogo convencional [58, 60, 59]. Estos sistemas híbridos análogo-digital han cobrado mucho interés, dando como resultado un gran número de aplicaciones ópticas en metrología, en el cual se combinan la precisión de la óptica y la versatilidad de lo digital al lado de la potencia de cálculo de los ordenadores modernos.

Como el detector CCD es discreto, la irradianza del campo registrado es muestreada acorde a la distancia interpíxel. El arreglo óptico propuesto está esquematizado en la figura 10.1. Generalmente

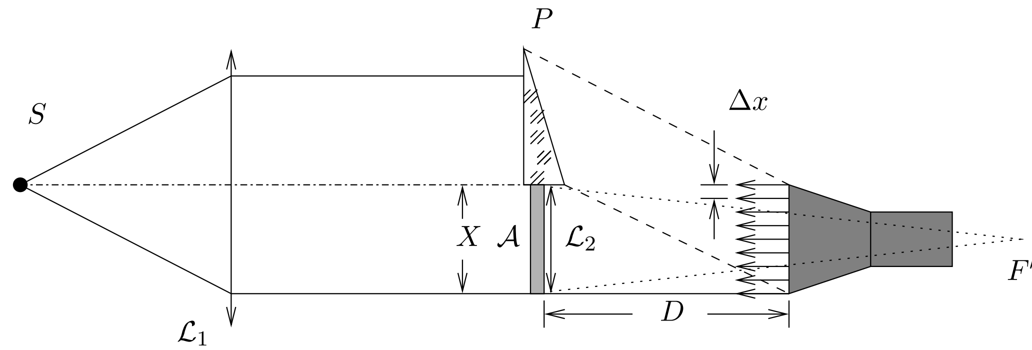

FIGURA 10.1: Arreglo óptico para el registro holográfico de un patrón de difracción de Fresnel

un haz referencia es adicionado para guardar la información contenida en la fase del campo difractado, de modo que el ángulo del haz de referencia es escogido para que genere sobre el detector una frecuencia espacial que corresponde a la distancia interpíxel. En estas condiciones, se tendrá un correcto registro de la portadora, pero no es este el campo que se desea registrar, así que esta condición no es suficiente, pero sí necesaria, de aquí que el registro debe ser adaptado a la rata de muestreo del campo objeto. Una solución es fabricar sensores de alta resolución, estos encarecen los sistemas e incrementan el número de datos y así el costo computacional [26, 25].

Aquí se propone una solución con base en el teorema del muestreo fraccionario. El problema puede ser expuesto como sigue(se hará un desarrollo unidimensional): dado que típicamente se desea observar un objeto con dimensiones finitas por ejemplo de tamaño X y se utiliza una cámara CCD de distancia interpíxel Δx, ¿cuál debe ser la distancia D entre el objeto y la cámara CCD, bajo la cual el campo difractado es adecuadamente muestreado por la cámara?

El análisis se basa en la relación entre la difracción de Fresnel y la transformación de Fourier fraccionaria [48,47]. Para esto se utilizan las variables reducidas como se utilizan en la teoría escalar de la difracción. Si $\vec{r}$ es la variable espacial sobre el plano objeto y $\vec{s}$ sobre el detector (sobre el cual el patrón de difracción de Fresnel es observado) a la distancia D (ver figura 10.1), las variables escaladas sobre el objeto $\mathcal{A}'$ (la imagen coherente de $\mathcal{A}$) y el receptor $\mathcal{D}$ son respectivamente

$$\vec{\rho} = \vec{r}/\sqrt{\lambda\varepsilon R_{\mathcal{A}'}}\,, \qquad \vec{\sigma} = (\cos\alpha + \varepsilon \operatorname{sen}\alpha)\vec{s}/\sqrt{\lambda\varepsilon R_{\mathcal{A}'}}\,, \tag{10.1}$$

donde λ es la longitud de onda. $R_{\mathcal{A}'}$ es el radio de curvatura de $\mathcal{A}'$, que en este caso coincide con la focal de $\mathcal{L}_2$, así $R_{\mathcal{A}'} = f'$, α el orden fraccionario asociado al fenómeno de difracción de Fresnel en consideración y ε un parámetro auxiliar que para el receptor plano es

$$\varepsilon^2 = \frac{1-\mu}{\mu}\,. \tag{10.2}$$

El tamaño escalado del objeto T y la distancia interpíxel escalada $\Delta\sigma$ del sensor son respectivamente

$$T = X/\sqrt{\lambda\varepsilon R_{\mathcal{A}'}}\,, \qquad\qquad \Delta\sigma = (\cos\alpha + \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\alpha)\Delta x/\sqrt{\lambda\varepsilon R_{\mathcal{A}'}}\,. \tag{10.3}$$

La CCD cumple el teorema del muestreo para el campo difractado si

$$\Delta\sigma \leq \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{T}\,, \tag{10.4}$$

entonces

$$\frac{(\cos\alpha + \varepsilon\,\mathrm{sen}\,\alpha)\Delta x}{\sqrt{\lambda\varepsilon R_{\mathcal{A}'}}} \leq \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\sqrt{\lambda\varepsilon R_{\mathcal{A}'}}}{X}\,, \tag{10.5}$$

por la ecuación 8.8

$$\Delta x \leq \frac{\lambda\mu R_{\mathcal{A}'}}{X}\,, \tag{10.6}$$

de la ecuación 8.20 tenemos $\mu R_{\mathcal{A}'} = D$ y finalmente se obtiene

$$D \geq \frac{\Delta x X}{\lambda}\,. \tag{10.7}$$

Si X, Δx y D satisfacen la ecuación 10.7, el campo difractado detectado es muestreado por la CCD a la rata apropiada, lo cual permitiría interpolar el campo difractado desde sus muestras además de una perfecta restitución digital del campo objeto (superresolución).

Es importante notar que el resultado es independiente de $R_{\mathcal{A}'}$ o en este caso de la focal f'.

Ley 10.1.1. La rata del muestreo de un campo objeto $U_{\mathcal{A}}$ con soporte compacto, que se difracta al propagarse una distancia D, es independiente del radio de curvatura del campo objeto.

10.2. Técnica de microscopía

Con base en el procedimiento anterior, se puede elaborar una técnica de microscopía de superresolución, dado que en teoría la restitución del campo objeto puede ser sin límite de resolución. Aquí se propone la implementación práctica de tal técnica teniendo en cuenta las limitantes físicas y como afectan la resolución final del método.

Una primera observación es la siguiente, típicamente en los sistemas de microscopía el sensor CCD es ubicado en el plano imagen, eso involucra dos inconvenientes:

- Como se mostró, la CCD cumple el teorema del muestreo para una distancia que no es necesariamente en el plano imagen.

- Según el teorema del muestreo fraccionario 3.1.1, si el objeto es de soporte compacto y así también su imagen, entonces la rata de muestreo es $\Delta x = 0$, lo que significa que se deben tomar todos los puntos del campo imagen para no perder información.

De este modo se puede afirmar que el plano imagen es el lugar menos apropiado para hacer un registro digital adecuado con un sensor discreto.

En teoría hay dos limitantes a la hora de llevar a cabo el método descrito en la sección anterior :

1. El tamaño finito del sensor.

2. El tamaño de los píxeles.

Las dos deben ser tratadas independientemente, pero aquí se supondrá que el segundo caso puede ser despreciado, es decir, se suponen píxeles lo suficientemente pequeños de tal forma que se pueden modelizar con muy buena aproximación por distribuciones de Dirac.

El efecto de las dimensiones finitas del sensor es la de filtrar componentes "frecuenciales" del espectro fraccionario, dado que por el teorema 3.3.1 el campo se extiende en todo el espacio para todo $D \neq 0$, entonces la limitante en resolución en los registros digitales no es el muestreo del sensor si no sus dimensiones finitas, lo cual cambia drásticamente su tratamiento.

Dado un campo objeto de amplitud reducida $V_{\mathcal{A}}(\rho)$ y la amplitud reducida del patrón de difracción $V_{\mathcal{B}}(\sigma)$ a la distancia D, tal que

$$V_{\mathcal{B}}(\sigma) = \mathrm{e}^{i\alpha}(\cos\alpha + \varepsilon \operatorname{sen}\alpha)\mathscr{F}_{\alpha}[V_{\mathcal{A}}](\sigma)\,, \tag{10.8}$$

si $V_{\mathcal{A}}$ tiene soporte compacto contenido en $[-T/2, T/2]$, entonces $V_{\mathcal{B}}$ puede ser muestreada a una rata menor o igual a $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{T}$ y recuperada a partir de sus muestras. Por otra parte el efecto de la cámara CCD puede ser modelizado por la función $\sqcup\!\sqcup_{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{T}}(\sigma)Rect(\sigma/\varsigma)$, donde ς está asociado al tamaño S del sensor CCD. De esta forma el campo registrado se escribe

$$\widehat{V}_{\mathcal{B}}(\sigma) = V_{\mathcal{B}}(\sigma)\sqcup\!\sqcup_{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{T}}(\sigma)Rect(\sigma/\varsigma)\,. \tag{10.9}$$

Llamando $I_{\varsigma;\alpha} = Rect(\sigma/\varsigma)\exp\left(-i\pi\sigma^2\cot\alpha\right)$, tal que

$$y(\rho) = \mathscr{F}_{-\alpha}[I_{\varsigma;\alpha}](\rho) = C_{-\alpha}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\varsigma\rho}{\operatorname{sen}\alpha}\right)}{\frac{\pi\varsigma\rho}{\operatorname{sen}\alpha}}\mathrm{e}^{i\pi\rho^2\cot\alpha}\,. \tag{10.10}$$

Se define $S_{\mathcal{A}}$, las réplicas fraccionarias de $V_{\mathcal{A}}$, como

$$S_{\mathcal{A}}(\rho) = \mathscr{F}_{-\alpha}[V_{\mathcal{B}} \sqcup\!\sqcup_{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{T}}](\rho) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathscr{T}_{\alpha,nT}[V_{\mathcal{A}}](\rho)\,. \tag{10.11}$$

Utilizando las ecuaciones 10.10 y 10.11 en 10.9, se tiene

$$\widehat{V}_{\mathcal{B}}(\sigma) = \mathscr{F}_{\alpha}[S_{\mathcal{A}}](\sigma)\mathscr{F}_{\alpha}[y](\sigma)\mathrm{e}^{i\pi\sigma^2\cot\alpha}\,. \tag{10.12}$$

Para obtener la imagen de $V_{\mathcal{A}}$ se calcula la transformada de Fourier fraccionaria de orden $-\alpha$ del campo registrado $\widehat{V}_{\mathcal{B}}$, así

$$\begin{aligned}
\widehat{V}_{\mathcal{A}}(\rho) &= \mathscr{F}_{-\alpha}[\mathscr{F}_{\alpha}[S_{\mathcal{A}}](\sigma)\mathscr{F}_{\alpha}[y](\sigma)\mathrm{e}^{i\pi\sigma^2\cot\alpha}](\rho) \\
&= [S_{\mathcal{A}} *_{\alpha} y]\,(\rho) \\
&= \int_R S_{\mathcal{A}}(\varrho)y(\rho-\varrho)\mathrm{e}^{-2i\pi\varrho^2\cot\alpha}\mathrm{e}^{2i\pi\varrho\rho\cot\alpha}d\varrho \\
&= \mathrm{e}^{i\pi\rho^2\cot\alpha}\int_R S_{\mathcal{A}}(\varrho)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\varsigma}{\operatorname{sen}\alpha}(\rho-\varrho)\right)}{\frac{\pi\varsigma}{\operatorname{sen}\alpha}(\rho-\varrho)}\mathrm{e}^{-i\pi\varrho^2\cot\alpha}d\varrho\,.
\end{aligned} \tag{10.13}$$

Ahora es claro el papel que juega las dimensiones finitas de la cámara CCD. En la restitución, un punto del campo objeto es transformado en la función y (ver ecuación 10.13). Un criterio clásico para la resolución es tomar el primer cruce por cero de esta función, entonces dos puntos en el plano objeto serán resueltos por el sistema si su separación ρ_0 está dada por

$$\rho_0 \geq \operatorname{sen}\alpha/\varsigma \tag{10.14}$$

por 10.1 se tiene

$$\frac{r_0}{\sqrt{\lambda\varepsilon R_{\mathcal{A}}}} \geq \frac{\sqrt{\lambda\varepsilon R_{\mathcal{A}}}\operatorname{sen}\alpha}{S(\cos\alpha+\varepsilon\operatorname{sen}\alpha)}\,, \tag{10.15}$$

luego

$$r_0 \geq \frac{\lambda D}{S}\,, \tag{10.16}$$

donde S es el tamaño del sensor CCD y r_0 la distancia entre los puntos objetos.

Así para reducir el filtrado habría que aumentar S el tamaño del sensor, o reducir α el orden fraccionario, que como ε está fijo (ecuación 10.2) por ser plano el receptor, equivale a reducir D la distancia entre el objeto y la cámara, en conclusión tenemos que entre más cerca podamos ubicar la cámara CCD al objeto, menor filtrado se tendrá. Combinando las ecuaciones 10.7 y 10.16 se tiene

$$\frac{Sr_0}{\lambda} \geq D \geq \frac{\Delta x X}{\lambda}\,. \tag{10.17}$$

10.2.1. Superresolución

Para resolver detalles más finos de un objeto, el método puede ser empleado en un modo de superresolución, el cual consiste en lo siguiente: como se mostró, la cámara CCD produce un muestreo más un filtrado $⨿⨿_{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{T}}(\sigma)Rect(\sigma/\varsigma)$, y para reducir el filtrado introducido por la cámara dada, se tendría que reducir la distancia entre la cámara y el objeto, pero a distancias $D' < D$ la distancia interpíxel no satisface más la ecuación 10.7, y por esto habría un muestreo deficiente

$$\Delta x > \frac{D'\lambda}{X}\,, \tag{10.18}$$

de esta manera se plantea un compromiso entre la deficiencia en el muestreo y la distancia de observación D para los detalles que se desean resolver.

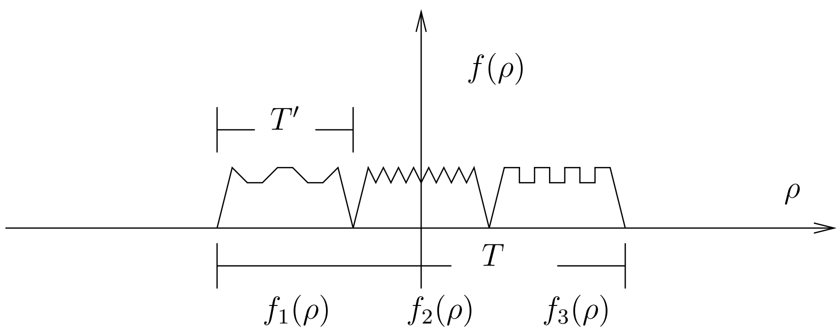

FIGURA 10.2: Objeto f compuesto de tres estructuras f_1, f_2 y f_2.

Sea un campo objeto f (ver figura 10.2), su transformada de Fourier fraccionaria $\mathscr{F}_\alpha[f]$ puede ser muestreada a la rata $\operatorname{sen}\alpha/T$ y de esta forma, tanto el campo objeto f como su transformada pueden ser recuperadas de forma óptima según el teorema del muestreo. Si la rata de muestreo es $\operatorname{sen}\alpha/T'$, con $T' < T$, entonces, no se podrá recuperar f.

De este modo $\mathscr{F}_{-\alpha}[\mathscr{F}_\alpha[f]⨿⨿_{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{T'}}](\rho) = f_2(\rho)$ para $\rho \in [-T'/2, T'/2]$, como se ilustra en la figura 10.3. Así para una distancia $D' < D$

$$\Delta x = \frac{D'\lambda}{X'}\,, \tag{10.19}$$

el sensor puede resolver solamente el campo objeto f_2, es decir que se disminuye el campo de observación, pero se mejora la resolución del sistema, dado que de 10.16 $r'_0 = \frac{\lambda D'}{S} < \frac{\lambda D}{S}$, es a lo que se llama modo en superresolución.

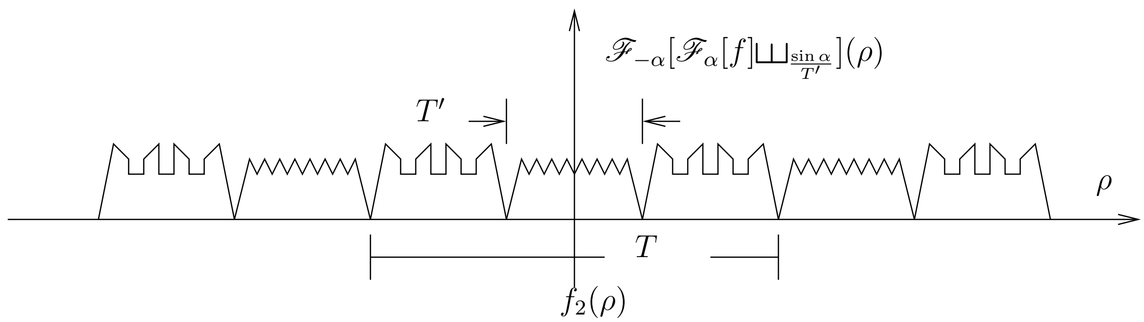

FIGURA 10.3: Réplicas solapadas de f.

10.3. Conclusiones

Se mostró que al reemplazar un medio de registro analógico, tal como películas fotográficas, por medios de registro digitalizadores como cámaras CCD, no necesariamente penaliza la detección, en el sentido que el muestreo producido por la cámara puede adaptarse para que se cumpla el teorema del muestreo en el registro del campo. Esto se consigue adaptando las condiciones de registro, de manera que se cumpla

$$D = \frac{\Delta x X}{\lambda}\,. \tag{10.20}$$

Debido a que la cámara, además de un muestreo hace un filtrado, en el cual un punto del campo objeto se convierte en la función

$$y(\rho) = \mathscr{F}_{-\alpha}[I_{\varsigma;\alpha}](\rho) = C_{-\alpha}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\varsigma\rho}{\operatorname{sen}\alpha}\right)}{\frac{\pi\varsigma\rho}{\operatorname{sen}\alpha}}\mathrm{e}^{i\pi\rho^2\cot\alpha}\,, \tag{10.21}$$

la resolución está dada por

$$r_0 \geq \frac{\lambda D}{S}\,, \tag{10.22}$$

donde S es el tamaño del sensor CCD y r_0 la distancia entre los puntos objetos.

Se puede guardar un compromiso entre la resolución y la rata de muestreo apropiada tal que se puede implementar una técnica de superresolución, con

$$\frac{Sr_0}{\lambda} \geq D \geq \frac{\Delta x X}{\lambda}\,, \tag{10.23}$$

y resolver dos puntos del campo objeto que están separados una distancia $r_0' < r_0$.

Capítulo 11

Holografía numérica por transformación de Fourier fraccionaria

Una de las aplicaciones de la óptica difractiva es el diseño de elementos que por difracción efectúan alguna función en reemplazo de elementos que trabajan típicamente por refracción.

En particular interesa calcular elementos difractivos holográficos que generan una figura de difracción volumétrica, esto obliga a abandonar el régimen de Fraunhofer y es necesario pasar al régimen de Fresnel.

Dada la relación entre el fenómeno de difracción y la transformación de Fourier fraccionaria, permite utilizar esta transformación como herramienta de cálculo de hologramas numéricos diseñados para generar un patrón de difracción deseado [61, 66]. Para esto, se hace necesario muestrear tanto el holograma como el del patrón de difracción para luego ser interpolados mediante el teorema del muestreo fraccionario.

Se buscan hologramas de solo fase dada la alta eficiencia de difracción y la técnica utilizada se basa en algoritmos iterativos que son reconocidos de gran calidad y de rápida convergencia [74, 73].

11.1. Algoritmo de cálculo de hologramas

Los hologramas aquí calculados permiten obtener dos figuras de difracción predeterminadas en dos planos diferentes. Hologramas con más de un plano de difracción ya son conocidos en la literatura [21], pero nuestro método de cálculo está más ligado al fenómeno de propagación del campo

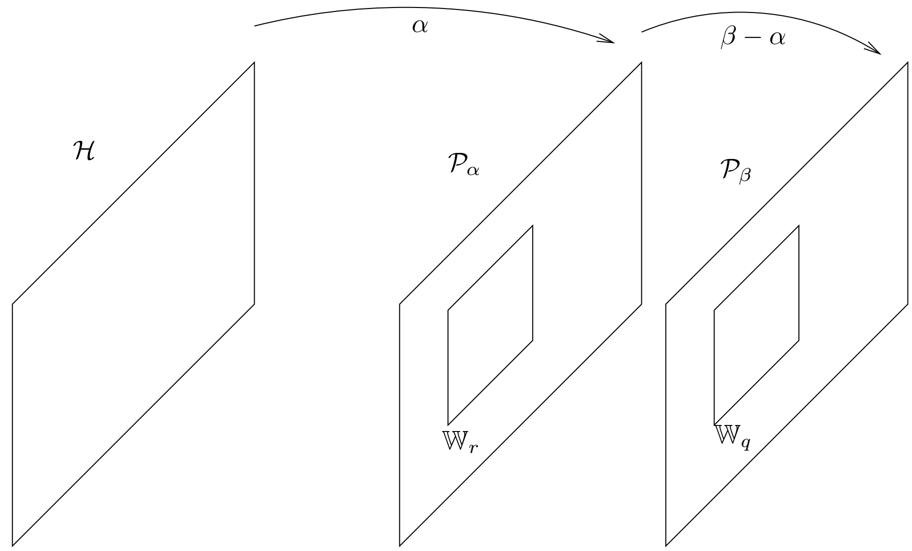

FIGURA 11.1: Planos $\mathcal{H}$, $\mathcal{P}_\alpha$ y $\mathcal{P}_\beta$. Las zonas $\mathbb{W}_r$ y $\mathbb{W}_q$ son ilustradas por los recuadros en $\mathcal{P}_\alpha$ y $\mathcal{P}_\beta$ respectivamente.

electromagnético. A partir del holograma se genera la primera figura de difracción acompañada de una fase cuyo papel es el de "transformar" esta figura en una segunda figura que aparece en un segundo plano de difracción, con esto una figura se transforma en otra por la sola propagación del campo electromagnético.

Sean $\mathcal{P}_\alpha$ y $\mathcal{P}_\beta$ dos planos. El parámetro α es el orden de la transformación de Fourier fraccionaria que expresa la transferencia del campo del plano del holograma $\mathcal{H}$ al plano de observación $\mathcal{P}_\alpha$ y β es el orden de la transformación de Fourier fraccionaria correspondiente a la transferencia de $\mathcal{H}$ a $\mathcal{P}_\beta$ (figura 11.1).

Se desea obtener las distribuciones de intensidad $h_1(\vec{r})$ en el plano $\mathcal{P}_\alpha$, donde $\vec{r} = (x_\alpha, y_\alpha)$ y $h_2(\vec{q})$ en el plano $\mathcal{P}_\beta$, donde $\vec{q} = (x_\beta, y_\beta)$. Para pasar de una función g_j^α a una función g_j^β, se utiliza una transformación de Fourier fraccionaria de orden $\beta - \alpha$ que expresa la difracción de $\mathcal{P}_\alpha$ a $\mathcal{P}_\beta$.

Se define las funciones g^α y g^β por

$$g^\alpha(\vec{r}) = \sqrt{h_1(\vec{r})}\,, \tag{11.1}$$

$$g^\beta(\vec{q}) = \sqrt{h_2(\vec{q})}\,, \tag{11.2}$$

El algoritmo utilizado, desarrollado en la tesis de maestría en física [61], es el siguiente :

1. Se parte de una función g_1^α definida por:

$$g_1^\alpha(\vec{r}) = g^\alpha(\vec{r}) \quad \text{si} \;\; \vec{r} \in \mathbb{W}_r\,, \tag{11.3}$$

$$g_1^\alpha(\vec{r}) = 0 \quad \text{si} \;\; \vec{r} \notin \mathbb{W}_r\,, \tag{11.4}$$

donde $\mathbb{W}_r$ es la parte útil del plano $\mathcal{P}_\alpha$.

2. Se calcula la transformada de Fourier de orden $\beta - \alpha$ de $g_1^\alpha(\vec{r})$. Se obtiene una función $\mathscr{F}_{\beta-\alpha}[g_1^\alpha](\vec{q})$. Se denota por ϕ_1 la fase de la función $\mathscr{F}_{\beta-\alpha}[g_1^\alpha](\vec{q})$.

3. Se define entonces la función g_1^β por

$$g_1^\beta(\vec{q}) = g^\beta(\vec{q})\,\mathrm{e}^{i\phi_1(\vec{q})} \quad \text{si} \;\; \vec{q} \in \mathbb{W}_q\,, \tag{11.5}$$

$$g_1^\beta(\vec{q}) = \mathscr{F}_{\beta-\alpha}[g_1^\alpha](\vec{q}) \quad \text{si} \;\; \vec{q} \notin \mathbb{W}_q\,, \tag{11.6}$$

donde $\mathbb{W}_q$ es la parte útil del plano $\mathcal{P}_\beta$.

4. Se calcula la transformada de Fourier fraccionaria de orden $-\beta$ de g_1^β, que se denota como $\mathscr{F}_{-\beta}[g_1^\beta](\vec{s})$.

5. La función $\mathscr{F}_{-\beta}[g_1^\beta](\vec{s})$, donde $\vec{s} = (x, y)$, es una función de valores complejos, de la que se utiliza sólo la fase; es decir, que sí

$$\mathscr{F}_{-\beta}[g_1^\beta](\vec{s}) = |\mathscr{F}_{-\beta}[g_1^\beta](\vec{s})|\,\mathrm{e}^{i\varphi_1(\vec{s})}\,, \tag{11.7}$$

entonces se define la función $f_1^\dagger$ por

$$f_1^\dagger(\vec{s}) = \mathrm{e}^{i\varphi_1(\vec{s})}\,. \tag{11.8}$$

6. Se introduce la función f_1 que es entonces la versión cuantizada de $f_1^\dagger$.

7. Se calcula $\mathscr{F}_\alpha[f_1](\vec{r})$ (transformada de Fourier fraccionaria de orden α de f_1). Se denota por ψ_1 la fase de la función $\mathscr{F}_\alpha[f_1](\vec{r})$.

8. Se define entonces la función g_2^α por

$$g_2^\alpha(\vec{r}) = g^\alpha(\vec{r})\,\mathrm{e}^{i\psi_1(\vec{r})} \quad \text{si} \;\; \vec{r} \in \mathbb{W}_r\,, \tag{11.9}$$

$$g_2^\alpha(\vec{r}) = \mathscr{F}_\alpha[f_1](\vec{r}) \quad \text{si} \;\; \vec{r} \notin \mathbb{W}_r\,. \tag{11.10}$$

Este algoritmo genera tres funciones : (g_j^{α}), (g_j^{β}) y (f_j). Si c_1 es el nivel de ruido aceptado en $\mathcal{P}_\alpha$ y c_2 el aceptado en $\mathcal{P}_\beta$, se detiene el cálculo cuando j alcanza el valor J tal que

$$\int_{\mathbb{W}_r} |h_1 - |\mathscr{F}_\alpha[f_J]|^2|^2 d\vec{r} \leq c_1 \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{W}_q} |h_2 - |\mathscr{F}_\beta[f_J]|^2|^2 d\vec{q} \leq c_2 \,. \tag{11.11}$$

La cuantización consiste en pasar desde la función de fase continua $f_j^{\dagger}$ a la función de fase cuantizada f_j en Z niveles de fase, donde el paso de cuantización es $\Delta = 2\pi/Z$. Entonces

$$f_j(\vec{r}) \in \{-\pi + \Delta, -\pi + 2\Delta, \cdots, \pi\} \,. \tag{11.12}$$

11.2. Resultados simulados

Para el cálculo de hologramas se tomaron los retratos de Huygens y Fresnel para h_1 y h_2 respectivamente. El resultado para un holograma de fase cuantizada binaria 0 o π, se muestra en la figura 11.2.

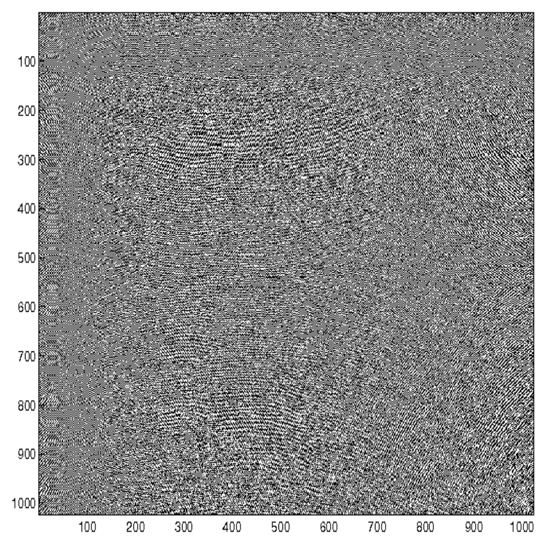

FIGURA 11.2: Holograma binario (niveles de fase 0 y π).

La figura 11.3 muestra lo que se obtiene en los dos planos $\mathcal{P}_\alpha$ y $\mathcal{P}_\beta$. Tratándose aquí de simulaciones numéricas.

El ruido que aparece en estas simulaciones es de origen numérico, es decir, que el algoritmo se detiene para valores de c_1 y c_2 que son diferentes de cero, este error puede reducirse significativamente, ya

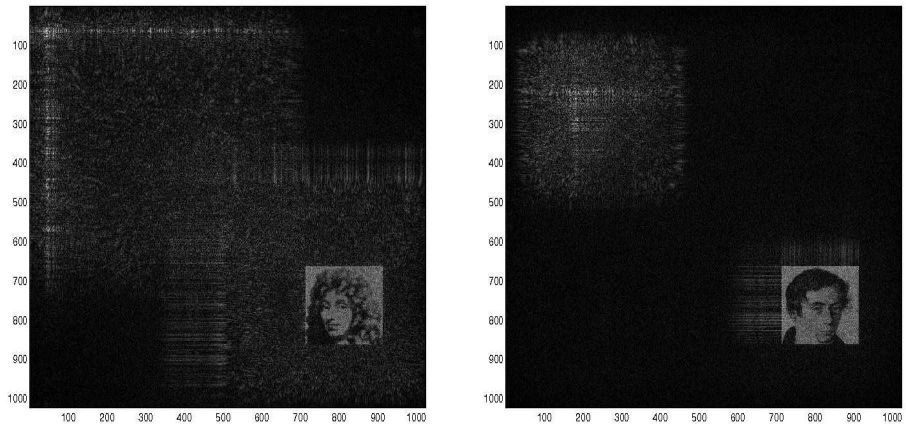

FIGURA 11.3: La imagen a la izquierda corresponde a $\beta = 0,6\pi/2$ y la imagen a la derecha $\beta = 0,9\pi/2$.

sea, permitiendo un tiempo de cálculo mayor o, mejor, mediante la implementación de técnicas de optimización [73].

11.3. Resultados experimentales

Los hologramas se realizaron en la *École Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne* y se observaron resultados físicos que concordaron con las simulaciones. Las restituciones ópticas fueron realizadas y registradas mediante una cámara CCD(ver figura 11.4).

FIGURA 11.4: Resultados experimentales. En el plano de difracción $\mathcal{P}_\alpha$ se tiene la imagen de Fresnel, y en $\mathcal{P}_\beta$ la imagen de Huygens.

El algoritmo desarrollado genera un holograma f_J. Este holograma por difracción en el régimen de Fresnel genera la primera figura de difracción $|g_J^\alpha(\vec{r})|^2 \approx h_1$ para $\vec{r} \in \mathbb{W}_r$ en el plano $\mathcal{P}_\alpha$, así la función de fase ψ_J y el módulo del campo $|g_J^\alpha(\vec{r})|$ son tales que por difracción produce $|g_J^\beta(\vec{q})|^2 \approx h_2$ para $\vec{q} \in \mathbb{W}_q$ en el plano $\mathcal{P}_\beta$.

En la figura 11.5 se muestran los registros, mediante el uso de una CCD, plano a plano entre $\mathcal{P}_\alpha$ donde se tiene $|g_J^\alpha(\vec{r})|^2$ hasta el plano $\mathcal{P}_\beta$ donde se tiene $|g_J^\beta(\vec{r})|^2$, con esto se aprecia como la sola propagación transforma una imagen en la otra.

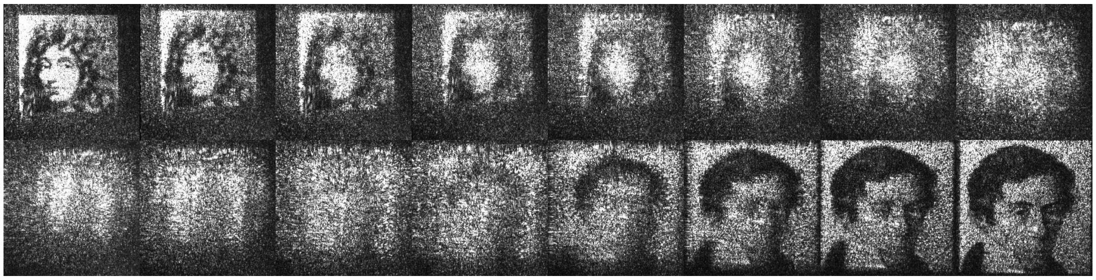

FIGURA 11.5: Difracción desde el plano $\mathcal{P}_\alpha$ hasta el plano $\mathcal{P}_\beta$.

En las restituciones ópticas aparece un ruido adicional al ruido numérico, este ruido adicional es producido por la coherencia espacial del campo difractado sumada a la fase que acompaña al patrón de difracción, la cual es vista como aleatoria [14, 74], produciendoce así speckle.

11.3.1. Réplicas del patrón de difracción

Aquí se muestra como el modelo teórico concuerda con la restitución óptica. Dado que los hologramas numéricos luego de su fabricación están pixelizados, esto equivale a un muestreo del campo objeto, luego su patrón de difracción de Fresnel debe estar compuesto de réplicas tal como lo expresa la ecuación 3.2.

FIGURA 11.6: Réplicas en el patrón de difracción de Fresnel.

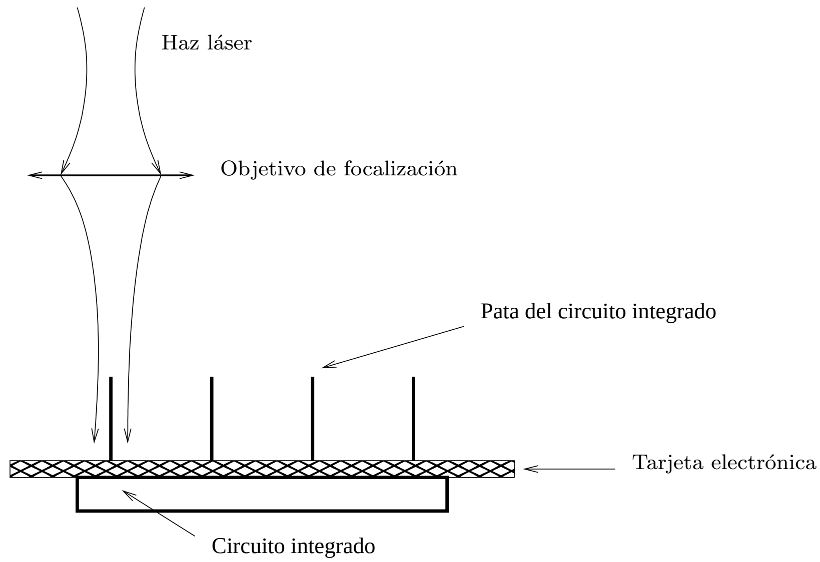

FIGURA 11.7: Principio del haz para soldadura láser. El haz ilumina la soldadura en pequeña zona en torno a la pata. Si la mancha es anular, el haz sólo ilumina la superficie alrededor de la pata.

Para registrar varios órdenes de difracción es necesario el empleo de una lente de pequeña longitud focal para reducir las dimensiones del patrón de difracción pero el ruido tipo speckle es más importante. La figura 11.5 muestra total concordancia con los calculos teóricos del capítulo 3.

11.4. Puesta en forma de la mancha focal de un robot de soldadura láser

La industria electrónica utiliza robots para soldar las "patas" de los componentes electrónicos, como los circuitos integrados de tarjetas electrónicas. El haz de luz de un diodo láser de potencia (alrededor de 30 W), se centra en la pata y soldadura en una pequeña área en la base de la pata (ver Figura 11.7); la absorción de la luz por la soldadura la derrite soldando la pata a la tarjeta. En este proceso, es necesario ajustar el poder de la luz y el tamaño de la mancha, tan exactamente como sea posible para no dañar la tarjeta o los componentes electrónicos.

En los sistemas existentes, el perfil del haz es gaussiano, en la medida en que el haz del láser de diodo es Gaussiano. La iluminación es en el eje de la pata, así la mayor parte del flujo luminoso calienta la pata, mientras que sería conveniente realizar una pequeña zona de calor alrededor de la base de la pata. Para ello sería necesario un zona focal anular. Esto se hace posible mediante los componentes difractivos realizados bajo este trabajo.

Varios componentes calculados han sido producidos y están ilustrados por las figuras 11.8. Los hologramas se realizaron en la *École Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne* y en la figura 11.9 se muestra un reconstrucción del difusor mediante un perfilómetro. La figura

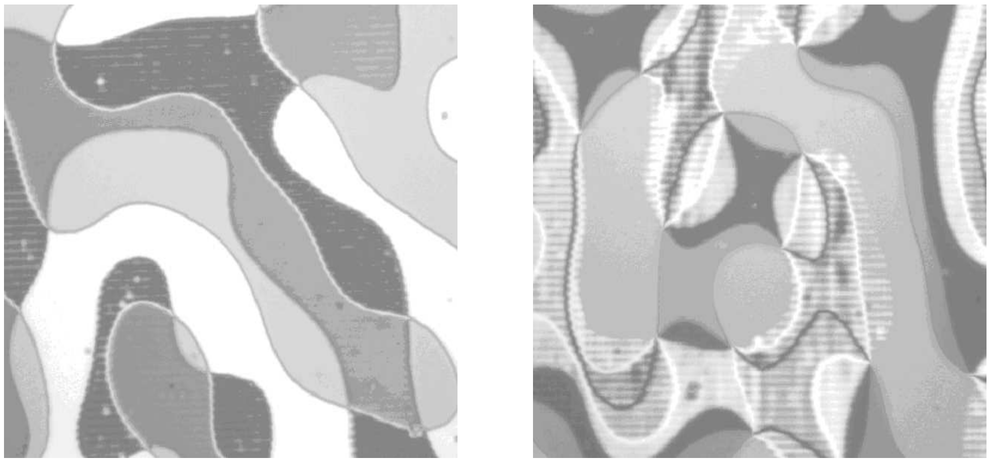

Figura 11.8: Componentes difractivos a cuatro niveles de fase (a la izquierda) y ocho niveles (a la derecha) calculados para funcionar en el régimen de Fresnel. (Imágenes proporcionadas por un microscopio de interferometría de luz blanca, los diferentes niveles de gris indican diferentes niveles de la fase).

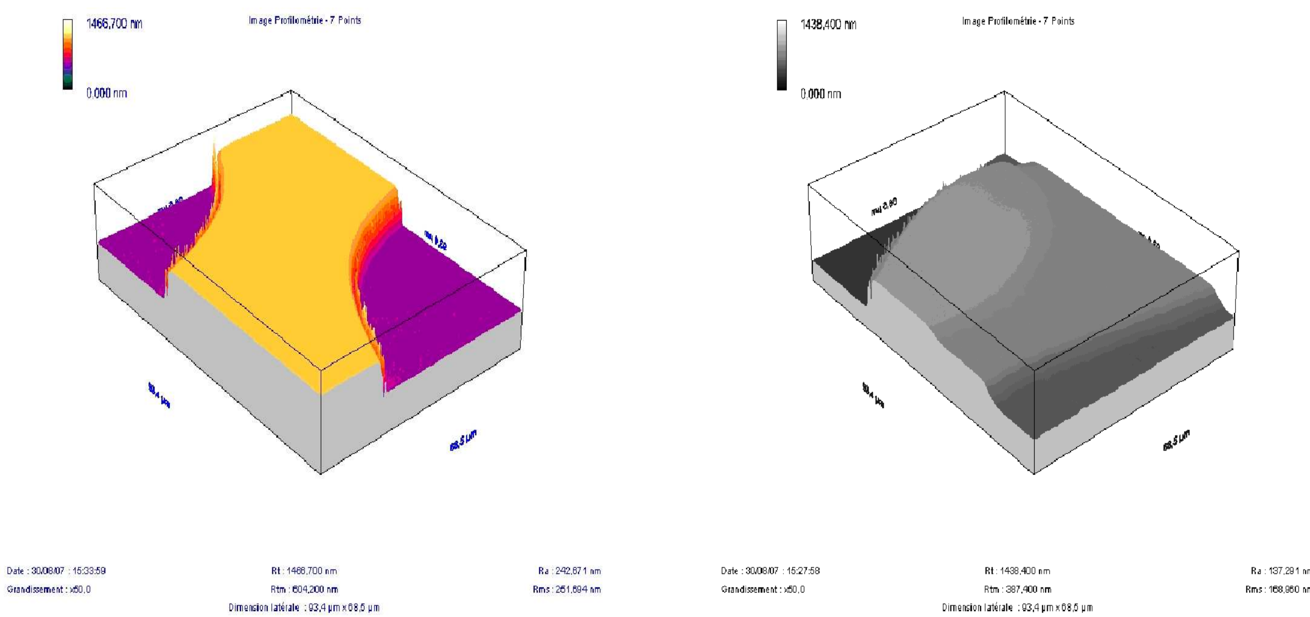

Figura 11.9: Perfil de un componente difractivo a dos niveles (a la izquierda), a cuatro niveles fase (a la derecha).

de difracción de estos elementos es un anillo (véanse las figura 11.10). En cualquier caso, hay un

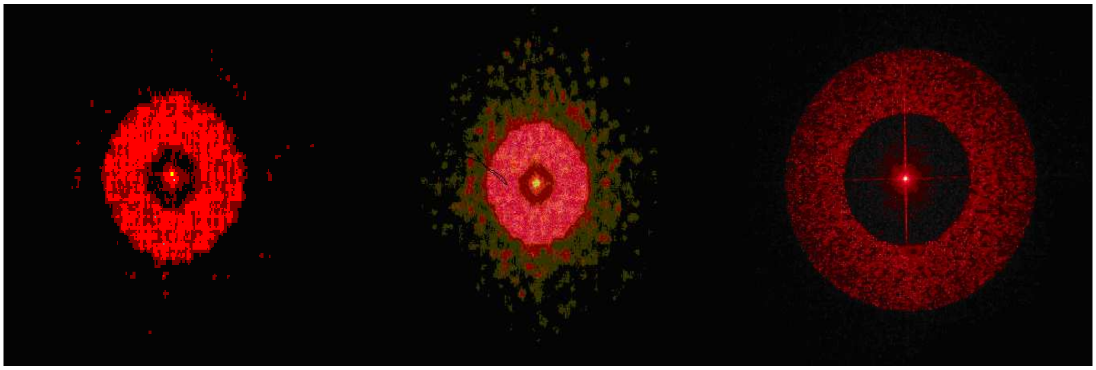

FIGURA 11.10: Figuras de difracción de diferentes elementos fabricados para un radio interno de $1mm$. y radio externo de $2mm$.

punto brillante en el centro del campo. "Este es el orden 0 de difracción", que en la práctica es difícil de eliminar. Sin embargo, para la aplicación aquí prevista (soldadura láser), el punto central del campo no es un problema; mejor: es útil. Su presencia nos permite calentar la punta de la pata que desea soldar para obtener un mejor fijado del material de soldadura.

11.5. Ruido presente en la restitución óptica del holograma

Los hologramas luego de fabricados presentan dos tipo de ruido:

1. Ruido numérico.
2. Ruido óptico (coherente).

El primero es debido a que el algoritmo se detiene para valores de errores $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$; y esto es precisamente porque el error sólo puede ser cero si la solución analítica existe, lo cual en principio no se puede garantizar; y por otra parte porque los métodos de cálculo son aproximaciones numéricas del fenómeno físico, así sólo se pude esperar $|g_J^{\alpha}(\vec{r})|^2 \approx h_1$ para $\vec{r} \in \mathbb{W}_r$ y $|g_J^{\beta}(\vec{q})|^2 \approx h_2$ para $\vec{q} \in \mathbb{W}_q$. Este tipo de error puede reducirse considerablemente introduciendo mejoras en los métodos y técnicas utilizados, lo cual no hizo parte de este trabajo pero que será tomado en cuenta para posteriores trabajos.

El segundo origen de error es debido a que en todo el proceso, se ha buscado obtener una distribución de intensidad en un plano dado. Sin embargo los hologramas numéricos, una vez realizados, funcionan en óptica coherente, en el sentido de que este es el campo que es difractado. Resulta de ésto un grado de libertad en el campo difractado ya que sólo nos interesa la intensidad, y la fase del campo para esta clase de aplicaciones no es importante. Más precisamente, los algoritmos utilizados atribuyen a la fase del campo difractado valores que vemos como aleatorios [14]. Esto facilita el cálculo del campo pero introduce *speckle* en la figura de difracción.

Se proponen dos posibles soluciones para reducir el ruido coherente o *speckle* en los hologramas "fraccionarios",*, una primera técnica basada en la aleatoriedad de la fase que acompaña el patrón de difracción y una segunda técnica basada en el teorema del muestreo fraccionario.

11.5.1. Técnica de reducción del speckle por fases descorrelacionadas

Para tal problema se ha encontrado una solución. Su principio reposa en el hecho de que en el cálculo de un holograma numérico por los algoritmos mencionados, la fase ψ_J del campo difractado es aleatoria. Si se hacen dos cálculos sucesivos, se obtienen soluciones pero las funciones de fases son diferentes. En otros términos, se obtienen dos funciones f_J diferentes. La idea consiste entonces en calcular varias funciones de transmisión del holograma y desplazados sobre la pupila del holograma

$$F_J(\vec{s}) = \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} f_J^{(n)}(\vec{r})\,, \tag{11.13}$$

tal que la transformada de Fourier fraccionaria de orden α está dada por

$$\begin{aligned} G_J^{\alpha}(\vec{r}) &= \sum_{n=1}^{m} \mathscr{F}_{\alpha}[f_J^{(n)}](\vec{r}) \\ &= \sum_{n=1}^{m} g_J^{\alpha(n)}(\vec{r}) \\ &= \sum_{n=1}^{m} |g_J^{\alpha(n)}(\vec{r})|\mathrm{e}^{i\psi_J^{(n)}(\vec{r})}\,. \end{aligned} \tag{11.14}$$

Si el algoritmo es de mínimo error, es decir, que $c_1 \approx 0$, entonces podemos hacer $|g_J^{\alpha(1)}(\vec{r})| = |g_J^{\alpha(2)}(\vec{r})| = \ldots |g_J^{\alpha}(\vec{r})|$ para $\vec{r} \in \mathbb{W}_r$ y con esto

$$E\left\{G_J^{\alpha}(\vec{r})\right\} = |g_J^{\alpha}(\vec{r})| E\left\{\sum_{n=1}^{m} \mathrm{e}^{i\psi_J^{(n)}(\vec{r})}\right\} \quad \text{para} \quad \vec{r} \in \mathbb{W}_r\,. \tag{11.15}$$

*Designamos por este término los hologramas que se han calculado por los algoritmos que funcionan en el régimen de Fresnel.

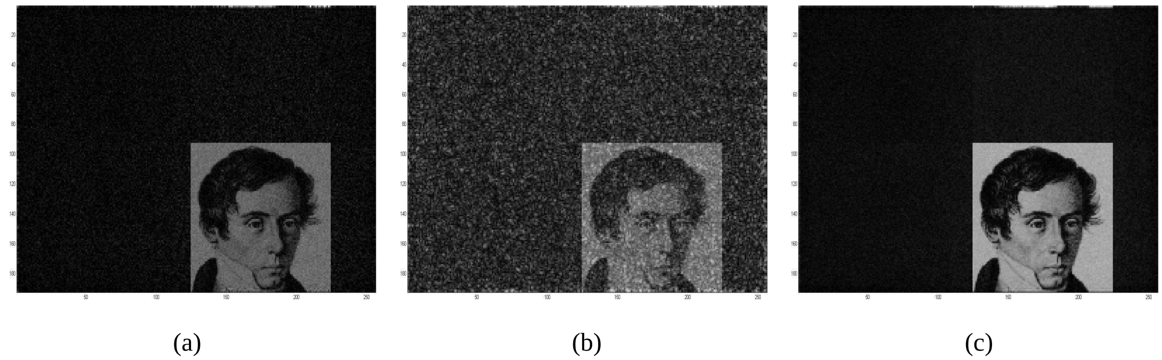

FIGURA 11.11: Corrección de speckle. a) Resultado esperado, b) restitución con speckle y c) reducción del speckle por hologramas descorrelacionados (16 hologramas).

Cada una de estas funciones genera la misma distribución de intensidad en el plano $\mathcal{P}_\alpha$, pero los campos difractados difieren entre ellos por las funciones de fases aleatorias $\psi_J^{(n)}$ y, por hipótesis están descorrelacionadas, en promedio se compensan, resultando

$$E\left\{G_J^\alpha(\vec{r})\right\} \approx k|g_J^\alpha(\vec{r})|\,, \tag{11.16}$$

donde $E\left\{\sum_{n=1}^{m} \mathrm{e}^{i\psi_J^{(n)}(\vec{r})}\right\} \approx k$ una constante, resultando en una reducción del speckle (ver figura 11.11).

11.5.2. Técnica de reducción de speckle por réplicas fraccionarias

Otra solución a la reducción del speckle se basa en una técnica ya conosida para hologramas de Fourier [75, 76] que puede ser implementada con base en el teorema del muestreo fraccionario. Se replica el holograma utilizando el operador traslación fraccionaria a la función de transmisión calculada f_J(el análisis se hará unidimensional por simplicidad en la notación), de este modo tenemos

$$S(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathscr{T}_{nB,\alpha}[f_J](s)\,. \tag{11.17}$$

De eso resulta un muestreo en el plano de Fresnel $\mathcal{P}_\alpha$, tal que

$$\mathscr{F}_\alpha[S](r) = g_J^\alpha(s)\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(s - n\frac{\operatorname{sen}\alpha}{B})\,. \tag{11.18}$$

Las réplicas son hechas de modo que la rata de muestreo en el patrón de difracción coincida con la pixelización de los calculos númericos, así solo son restituidos los puntos del campo que corresponden a los utilizados en el algoritmo, de este modo no hay degradación en la figura de difracción pero sí una reducción del speckle, el cual en muy alta probabilidad se encontrará entre las distribuciones de Dirac donde la restitución del campo es nula.

11.6. Conclusiones

Con base en el hecho de que la transformación de Fourier fraccionaria traduce matemáticamente el fenómeno de difracción, se puede utilizar esta transformación como una herramienta de cálculo en procesos en los cuales interviene tal fenómeno.

Se ve que el patrón de difracción de un objeto muestreado, tal como lo hologramas aquí presentados, están compuestos por réplicas (ver figura 11.6), efecto que está en concordancia con la ecuación 3.2, cuyas réplicas pueden ser representadas por una operación de traslación fraccionaria.

Se propone una solución al problema de la puesta en forma de la mancha focal de un haz láser cuyo perfil es tipo gaussiano. A partir de este campo, luego que es modulado por un difusor holográfico, se genera un patrón de difracción con forma de anillo, para luego ser aplicado en un sistema de soldadura láser.

Debido a que el campo utilizado para la restitución óptica de los hologramas es coherente, esta restitución se verá distorsionada con respecto a las restituciones numéricas por la presencia de un ruido tipo speckle. Para reducir esta distorsión se proponen dos soluciones, una técnica que utiliza hologramas descorrelacionados y otra técnica que adapta una ya conocida para hologramas de Fourier [75]. Estas técnicas no han sido implementadas aún y se espera su inclusión en trabajos posteriores.

Conclusiones generales

El operador de traslación fraccionaria constituye uno de los elementos claves en el tratamiento de señales por transformación de Fourier fraccionaria, a partir de cual se obtuvo buena parte de los resultados teóricos de esta tesis. Se espera que sea útil en la caracterización de sistemas que presenten “invariancia” a la traslación en la forma de una traslación fraccionaria.

Se mostró un teorema de muestreo para funciones de α-banda limitada, del cual el teorema del muestreo de Shannon-Whittaker es un caso particular para $\alpha = \pi/2$. Con este teorema se amplia el rango de acción del análisis armónico a un más amplio conjunto de funciones que tengan soporte compacto en algún dominio fraccionario de Fourier.

Se define la noción de convolución fraccionaria $[f *_\alpha g]$. Esta definición resulta como una necesidad, luego de que se exija una formulación integral del producto de convolución fraccionario. A partir del producto de convolución fraccionario, se define el producto de correlación fraccionario $[f \circledast_\alpha g]$. Los productos de convolución y correlación fraccionarios son invariantes bajo una traslación fraccionaria. Es posible que algunos instrumentos de medida presenten una distorsión en la forma de una convolución fraccionaria como se mostró para la holografía digital. Es importante notar que la ecuación 10.13 representa el efecto del instrumento sobre la medida del campo, lo cual significa que la convolución fraccionaria constituye un buen modelo del proceso de medida en tales situaciones.

Se define la peinilla de Dirac fraccionaria $\sqcup\!\sqcup_{\tau;\alpha}$ la cual cumple $\mathscr{F}_\alpha[\sqcup\!\sqcup_{\tau;\alpha}] = C_\alpha \tau \sqcup\!\sqcup_{\frac{\sin\alpha}{\tau};-\alpha}$, con esto el teorema del muestreo fraccionario, se escribe

$$C_{-\alpha} f(x) \sqcup\!\sqcup_{\frac{\sin\alpha}{B};\alpha}(x) \mathrm{e}^{-i\pi x^2 \cot\alpha} \overset{\alpha}{\rightleftharpoons} \frac{|\sin\alpha|}{B} \sqcup\!\sqcup_{B;-\alpha} *_{-\alpha} f_\alpha(x_\alpha)\,.$$

Hay buenos indicios que indican que esta Peinilla fraccionaria, además de simplificar varios tratamientos, permitirá llegar en forma correcta a un tratamiento discreto para funciones seudo-periódicas.

Se introduce la noción de estacionariedad en el sentido fraccionario, donde si una función aleatoria X_ω es estacionaria en un sentido fraccionario, entonces no es estacionaria en el sentido estándar, así escribimos $[X \circledast_\alpha X](t, t-\tau) = [X \circledast_\alpha X](\tau)$. Se introduce el concepto de ergodicidad en autocorrelación fraccionaria, es decir, $P(\{\omega : [X \circledast_\alpha X] = [X \circledast_\alpha X]_\omega\}) = 1$. Además se introduce el concepto de ergodicidad en densidad espectral de potencia fraccionaria, así se tiene $P(\{\omega : S_X^\alpha = S_\omega^\alpha\}) = 1$. Por intermedio de un teorema de Wiener-Kinchine fraccionario, podemos escribir

$$\mathscr{F}_\alpha [X \circledast_\alpha X] (\nu_\alpha) \mathrm{e}^{i\pi\nu_\alpha \cot\alpha} = S_X^\alpha(\nu_\alpha) \,.$$

Como el operador Traslación Fraccionario es una transformación unitaria hay la posibilidad que esté asociado a una transformación métricamente transitiva que preserve la medida (transformación ergódica), y así poder hacer uso del Teorema Ergódico de Birkhoff para formalizar la noción de ergodicidad en el sentido fraccionario.

Se muestra un teorema del muestreo fraccionario para señales aleatorias ergódicos en autocorrelación, que tengan densidades espectrales de potencia con $\alpha-$banda limitada, en cuyo caso la fórmula de interpolación se convierte en un estimador de la señal de la forma

$$\hat{X}_\omega(t) = \mathrm{e}^{i\pi t^2 \cot\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_\omega \left(n \frac{\sin\alpha}{B} \right) \mathrm{e}^{-i\pi \frac{n^2 \sin\alpha\cos\alpha}{B^2}} sinc \left[\frac{B}{\sin\alpha} t - n \right] .$$

Este teorema es de gran utilidad practica, dado que en la naturaleza son muy contados los procesos deterministas, mientras que los aleatorios son innumerables y es allí donde un muestreo para estos procesos es indispensable.

Se propone un estimador de una señal con base en la convolución fraccionaria, dado por $\hat{Y}_\omega = [X_\omega *_\alpha h]$ Se encuentra una ecuación integral dada por

$$[Y \circledast_\alpha X](\sigma) = \int_{t_i}^{t_f} h(\theta) \mathcal{T}_{\theta;\alpha} [X \circledast_\alpha X](\sigma) \mathrm{e}^{-i\pi\theta^2 \cot\alpha} d\theta \,,$$

cuyo caso particular para $\alpha = \pi/2$ es la ecuación de Wiener-Hopf. El tratamiento es adaptativo, lo cual le permite ser aplicado a señales no estacionarias, donde para cada realización es necesario adaptar el parámetro α_ω que permita una óptima separación de los espectros fraccionarios.

Se muestra un esquema óptico para el registro de filtros complejos, registrados holográficamente con una onda referencia esférica, cuyo caso particular para $\alpha = \pi/2$ es el sistema Vander Lugt. Se ilustró un sistema para correlación fraccionaria por transformación de Fourier fraccionaria conjunta, donde las fases son adaptadas mediante el uso de un biprisma de Fresnel. Estos dos sistemas conforman las bases para el tratamiento análogo coherente de las señales ópticas, al igual que en los casos estándar, se espera que resulten aplicaciones en el tratamiento de la información.

Se mostró como se puede adaptar una cámara para que se cumpla el teorema del muestreo en el registro del campo, y además produzca un bajo filtrado de las componentes del “espectro” fraccionario, resultando

$$\frac{Sr_0}{\lambda} \geq D \geq \frac{\Delta x X}{\lambda}\,.$$

Así se guarda un compromiso entre la resolución y la rata de muestreo, que permite implementar una técnica de super-resolución.

Como la transformación de Fourier fraccionaria traduce matemáticamente el fenómeno de difracción, podemos utilizar esta transformación como una herramienta de cálculo en procesos en los cuales interviene tal fenómeno. Los resultados experimentales que se obtienen a partir de hologramas calculados haciendo uso de esta técnica, mostraron concordancia con las predicciones teóricas, lo que posibilita su utilización en diversas aplicaciones, por ejemplo, en la soldadura láser como lo hecho aquí.

Para reducir la distorsión que se produce por la presencia de speckle, se proponen dos soluciones, una técnica que utiliza hologramas descorrelacionados y otra técnica que adapta una ya conocida para hologramas de Fourier. Estas técnicas no han sido implementadas aun y se espera su inclusión en trabajos posteriores. Es importante notar que antes de este trabajo no se conosen técnicas de reducción de speckle para hologramas de Fresnel, lo cual es uno de los aportes prácticos de esta tesis.

Apéndice A

Transformación de Fourier fraccionaria

A.1. Base Hermite-Gauss

La base llamada Hermite-Gauss es una base Hilbertiana de $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ dada por

$$\mathcal{H}_n(x) = \left(\frac{\kappa^2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\kappa^2 x^2/2} H_n(\kappa x)\,, \tag{A.1}$$

donde

$$H_n(\sqrt{2\pi}x) = (-1)^n \mathrm{e}^{2\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n} \mathrm{e}^{-2\pi x^2}\,, \tag{A.2}$$

son los polinomios de Hermite.

El principal interés de esta base se desprende del hecho que son funciones propias del operador transformación de Fourier $\mathscr{F}$, lo cual es evidente si se reconocen como solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + 4\pi^2 \left(\frac{2n+1}{2\pi} - x^2\right) f(x) = 0\,, \tag{A.3}$$

asociada con el oscilador armónico mecánico cuántico o en la propagación de la luz en medios de gradiente de índice cuadráticos. La transformada de Fourier de esta ecuación es

$$\frac{d^2 F(\nu)}{d\nu^2} + 4\pi^2 \left(\frac{2n+1}{2\pi} - \nu^2\right) F(\nu) = 0\,. \tag{A.4}$$

Una consecuencia muy importante de este resultado es que será muy fácil calcular una transformada de Fourier de una función $f(x)$ representada en la base Hermite-Gauss:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{H}_n(x) \xrightarrow{\mathscr{F}} \hat{f}(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{in\frac{\pi}{2}} c_n \mathcal{H}_n(\nu) \,, \tag{A.5}$$

lo cual es muy útil, particularmente en mecánica cuántica.

A.2. Transformación de Fourier fraccionaria

Para encontrar la transformación de Fourier fraccionaria Namias debió considerar $\mathscr{F}$ como un operador diferencial lineal

$$\mathscr{F}_{\pi/2}|\mathcal{H}_n(x)\rangle = \mathrm{e}^{in\frac{\pi}{2}}|\mathcal{H}_n(x)\rangle \,. \tag{A.6}$$

El problema ahora es construir un operador que satisfaga la ecuación de valores propios

$$\mathscr{F}_{\alpha}|\mathcal{H}_n(x)\rangle = \mathrm{e}^{in\alpha}|\mathcal{H}_n(x)\rangle \,. \tag{A.7}$$

Este operador $\mathscr{F}_{\alpha}$ se puede representar en la forma $\mathrm{e}^{i\alpha\mathcal{N}}$ tal que

$$\mathrm{e}^{i\alpha\mathcal{N}}|\mathcal{H}_n(x)\rangle = \mathrm{e}^{in\alpha}|\mathcal{H}_n(x)\rangle \,, \tag{A.8}$$

donde $\mathcal{N}$ es el operador número, tal que

$$\mathcal{N}|\mathcal{H}_n(x)\rangle = n|\mathcal{H}_n(x)\rangle \,, \tag{A.9}$$

dado por

$$\mathcal{N} = \mathscr{A}^{\dagger}\mathscr{A} \,, \tag{A.10}$$

y los operadores $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A}^{\dagger}$ son los operadores aniquilación y creación respectivamente.

Definiendo los operadores multiplicación de coordenadas y el operador diferenciación (Cohen-Tannoudji, Diu y Laloë 1977 :149) [19]

$$(\mathcal{U}f)(u) = uf(u) \,, \tag{A.11}$$

$$(\mathcal{D}f)(u) = (i2\pi)^{-1}\frac{df(u)}{du} \,. \tag{A.12}$$

Se prueba que el conmutador $[\mathcal{U}, \mathcal{D}] = \frac{i}{2\pi}\mathcal{I}$. Con base en estos se puede escribir

$$\mathscr{A} \equiv \sqrt{2\pi}\frac{\mathcal{U} + i\mathcal{D}}{\sqrt{2}}\,, \tag{A.13}$$

$$\mathscr{A}^\dagger \equiv \sqrt{2\pi}\frac{\mathcal{U} - i\mathcal{D}}{\sqrt{2}}\,, \tag{A.14}$$

por lo tanto

$$\mathcal{N} = \mathscr{A}^\dagger\mathscr{A} = \pi(\mathcal{U}^2 + \mathcal{D}^2) - \frac{1}{2}\,. \tag{A.15}$$

Con lo cual, si $\alpha = a\frac{\pi}{2}$, se tiene $\mathscr{F}^a = \mathrm{e}^{ia\frac{\pi}{2}\mathcal{N}}$. En este tratamiento la potencia a de la transformación no se limita a los números fraccionarios, en general podría ser visto como un hipercomplejo (ver Pellat-Finet [53]), pero aquí se limitará a los reales, por tanto

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}^1\,, \tag{A.16}$$

$$\mathcal{I} = \mathscr{F}^0 = \mathcal{F}^4\,, \tag{A.17}$$

$$\mathcal{P} = \mathscr{F}^2\,, \tag{A.18}$$

$$\mathscr{F}^a\mathscr{F}^b = \mathscr{F}^{a+b}\,. \tag{A.19}$$

A.2.1. Representación Integral

La forma diferencial es muy útil para encontrar un buen número de propiedades, pero a su vez no es práctica para el cálculo de transformaciones, así que una forma integral se hace necesaria para realizar los cálculos.

Toda función $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ se puede desarrollar de la siguiente forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{H}_n(x) \quad \textit{donde} \quad a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}_n(x) f(x) dx\,, \tag{A.20}$$

entonces su transformada es

$$\mathscr{F}_\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{in\alpha}\mathcal{H}_n(x)\,. \tag{A.21}$$

Insertando a_n de la ecuación A.20 en la ecuación A.21 y usando la fórmula de Melher basada en la representación integral de los polinomios de Hermite

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{in\alpha}}{2^n n!} H_n(\sqrt{2\pi}x) H_n(\sqrt{2\pi}x') = (1 - \mathrm{e}^{i2\alpha})^{-1/2} \exp\left[\frac{4\pi x x' \mathrm{e}^{i\alpha} - \mathrm{e}^{i2\alpha} 2\pi(x^2 + x'^2)}{1 - \mathrm{e}^{i2\alpha}}\right]. \tag{A.22}$$

En la ecuación A.21 con $\kappa = \sqrt{2\pi}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_\alpha f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{in\alpha} \mathcal{H}_n(x') \mathcal{H}_n(x) f(x') dx' \\
&= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \mathrm{e}^{-\pi(x'^2+x^2)} f(x') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{in\alpha}}{2^n n!} H_n(\sqrt{2\pi}x') H_n(\sqrt{2\pi}x) \\
&= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\pi(x'^2+x^2)}}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{i2\alpha}}} f(x') \exp\left[\frac{4\pi x x' \mathrm{e}^{i\alpha} - 2\pi \mathrm{e}^{i2\alpha}(x^2+x'^2)}{1-\mathrm{e}^{i2\alpha}}\right] dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\pi(x'^2+x^2)} \mathrm{e}^{-i\alpha/2} \mathrm{e}^{-i\pi/4}}{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}} f(x') \exp\left[\frac{i2\pi x x' - i\pi \mathrm{e}^{i\alpha}(x^2+x'^2)}{\operatorname{sen}\alpha}\right] dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha/2} \mathrm{e}^{-i\pi/4}}{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}} f(x') \exp\left[\frac{i2\pi x x' - i\pi \cos\alpha (x^2+x'^2)}{\operatorname{sen}\alpha}\right] dx' \,, \qquad \text{(A.23)}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\mathscr{F}_\alpha f(x) = C_\alpha \mathrm{e}^{-i\pi x'^2 \cot\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \mathrm{e}^{-i\pi x^2 \cot\alpha} \mathrm{e}^{i2\pi x x'/\operatorname{sen}\alpha} dx' \,, \qquad \text{(A.24)}
$$

donde la función $C_\alpha = \frac{\mathrm{e}^{i\left(sgn(\operatorname{sen}\alpha)\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}}{\sqrt{|\operatorname{sen}\alpha|}}$ la introdujo McBride [34], así la inversa se obtiene cambiando α por $-\alpha$ en la ecuación A.24.

A.2.2. Propiedades

- Teorema de Parseval:

$$
\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(x_\alpha) \overline{g_\alpha(x_\alpha)} dx_\alpha \,. \qquad \text{(A.25)}
$$

- Teorema de la traslación:

$$
\mathscr{F}_\alpha[f(x-\zeta)](x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha - \zeta\cos\alpha) \mathrm{e}^{-i\pi \operatorname{sen}\alpha(\zeta^2\cos\alpha - 2x_a\zeta)} \,. \qquad \text{(A.26)}
$$

- Teorema de la modulación:

$$
\mathscr{F}_\alpha[f(x)\mathrm{e}^{-i2\pi\nu x}](x_\alpha) = f_\alpha(x_\alpha - \nu\operatorname{sen}\alpha) \mathrm{e}^{i\pi\cos\alpha(\nu^2\operatorname{sen}\alpha - 2x_a\nu)} \,. \qquad \text{(A.27)}
$$

- Teorema del escalamiento:

$$
\mathscr{F}_\alpha[f(x/c)](x_\alpha) = \sqrt{\cos\alpha'/\cos\alpha}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}i(\alpha-\alpha')} \mathrm{e}^{-i\pi x_\alpha^2 \cot\alpha\left(1-\frac{\cos^2\alpha'}{\cos^2\alpha}\right)} f_{\alpha'}\left(x_\alpha \frac{c\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\alpha}\right) \,, \qquad \text{(A.28)}
$$

  donde $\cot\alpha' = c^2\cot\alpha$.

Apéndice B

Convolución y correlación

Se denota $\mathcal{T}_\tau[f]$ la función f trasladada por τ ($\tau \in R$) definida por

$$\mathcal{T}_\tau[f](x) = f(x-\tau)\,. \tag{B.1}$$

El operador $\mathcal{T}_\tau$ es el operador de traslación. Este operador compone de la siguiente forma $\mathcal{T}_\tau \circ \mathcal{T}_{\tau'} = \mathcal{T}_{\tau+\tau'}$, y forma un grupo conmutativo.

El producto de convolución de f y g es definido por

$$(f * g)(x) = \int_R f(u)g(x-u)du\,, \tag{B.2}$$

que es

$$(f * g)(x) = \int_R f(u)\mathcal{T}_u[g](x)du\,. \tag{B.3}$$

El producto de correlación es definido

$$(f \circledast g)(x) = \int_R f(u)\overline{g(x-u)}du\,, \tag{B.4}$$

donde $\overline{g(x)}$ es el complejo conjugado de $g(x)$. La ecuación B.4 se puede escribir como

$$(f \circledast g)(x) = \int_R f(u)\overline{\mathcal{T}_x[g](u)}du\,. \tag{B.5}$$

El producto de correlación puede ser deducido del producto de convolución por $f \circledast g = f * \overline{\mathcal{P}[g]}$. Comparando B.3 y B.5, vemos que se diferencian en un complejo conjugado, pero además, la traslación es en la variable de integración u para la convolución, y en la variable de salida x para la correlación.

La *invariancia* a la traslación del producto de convolución se escribe

$$\mathcal{T}_\tau[f * g] = (\mathcal{T}_\tau[f] * g) = (f * \mathcal{T}_\tau[g])\,, \tag{B.6}$$

la cual usando B.2 y B.3 se puede escribir

$$\mathcal{T}_\tau[f * g](x) = \int_R \mathcal{T}_\tau[f](u)\mathcal{T}_u[g](x)du = \int_R f(u)\mathcal{T}_{\tau+u}[g](x)du\,. \tag{B.7}$$

Para la correlación se tiene similarmente

$$\mathcal{T}_\tau[f \circledast g](x) = \int_R \mathcal{T}_\tau[f](u)\overline{\mathcal{T}_x[g](u)}du = \int_R f(u)\overline{\mathcal{T}_{u-\tau}[g](x)}du\,. \tag{B.8}$$

Bibliografía

[1] O. Akay. Linear fractional shift invariant (lfsi) systems. En "Proceedings. Seventh International Symposium on Signal Processing and Its Applications, 2003.", páginas 585–588 (2003).

[2] O. Akay y G.F. Boudreaux-Bartels. Linear fractionally invariant systems: fractional filtering and correlation via fractional operators. En "Conference Record of the Thirty-First Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers, 1997."

[3] O. Akay y G.F. Boudreaux-Bartels. Unitary and hermitian fractional operators and their relation to the fractional fourier transform. *IEEE Signal Processing Letters* **5**, 312 – 314 (1998).

[4] O. Akay y G.F. Boudreaux-Bartels. Fractional convolution and correlation via operator methods and application to detection of linear fm signals. *IEEE Trans Signal Processing* **49**, 979–993 (2001).

[5] T. Alieva, V. Lopez, F. Agullo-Lopez y L. B. Almeida. The fractional fourier transform in optical propagation problems. *Journal of Modern Optics* **41**, 1037–1044 (may 1994).

[6] L.B. Almeida. An introduction to the angular fourier transform. En "Proc 1993 IEEE Int Conf Acoustics, Speech, Signal Processing, IEEE Piscataway", páginas 257–260 (1990).

[7] L.B. Almeida. The fractional fourier transform and time-frequency representations. *IEEE Trans Signal Process* **42**, 3084–3091 (1994).

[8] L.B. Almeida. Product and convolution theorems for the fractional fourier transform. *IEEE Signal Process. Lett.* **4**, 15–17 (1997).

[9] Y. Bitran, Z. Zalevsky, D. Mendlovic y R. Dorsch. Fractional correlation operation: performance analysis. *Appl. Opt* **35**, 297–303 (1996).

[10] G. Bonnet. "Introduction à lóptique métaxiale". D.C.A.N. Toulon (1976).

[11] G. Bonnet. Introduction à lóptique métaxiale. deuxième partie: systèmes dioptriques centrés (non diaphragmés et non aberrants). En "Ann. Télécomm.", tomo 33, páginas 225–243. (1978).

[12] G. Bonnet. Introduction à lóptique métaxiale. première partie: difraction métaxiale dans un espace homogène: trilogie structurale, dioptre sphérique. En "Ann. Télécomm.", tomo 33, páginas 143–165. (1978).

[13] R.N. Bracewell. "The Fourier Transform and Its Applications". McGraw-Hill, second edición (1986).

[14] R. Bräuer, F. Wyrowski y O. Bryngdahl. Diffusers in digital holography. *Journal of the Optical Society of America A* **8**, 572–578 (mar 1991).

[15] Ç. Candan, A. Kutay y H. Ozaktas. The discrete fractional fourier transform. *IEEE Trans. Signal Process.* **48**, 1329–1337 (2000).

[16] Ç. Candan y H. Ozaktas. Sampling and series expansion theorems for fractional fourier end other transforms. *Signal Process.* **83**, 2455–2457 (2003).

[17] S. Coëtmellec, C. Buraga-Lefebvre, D. Lebrun y C. Özkul. Application of in-line digital holography to multiple plane velocimetry. *Measurement Science and Technology* **12**, 1392–1397 (sep 2001).

[18] L. Cohen. "Time-Frequency analysis". Prentice Hall, NJ (1995).

[19] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë. "Quantum Mechanics". Wiley (1977).

[20] E.U. Condom. Immersion of the fourier transform in a continous group of functional transformations. *Proc. Nat. Acad. Sc. USA* **23**, 158–164 (1937).

[21] R. Dorsch, A. Lohmann y S. Sinzinger. Fresnel ping-pong algorithm for two-plane computer-generated hologram display. *Appl. Opt* **33**, 869–875 (1994).

[22] P.M. Duffieux. "LÍntégrale de Fourier et ses Applications a lÓptique". Masson et Cie (1970).

[23] É. Fogret y P. Pellat-Finet. Agreement of fractional fourier optics with the huygens fresnel principle. *Optics Communications* **272**, 281–288 (apr 2007).

[24] Joseph W. Goodman. "Introduction to Fourier Optics". McGraw-Hill, Inc., segunda edición (1998).

[25] M. Jacquot y P. Sandoz. Sampling of two-dimensional images: prevention from spectrum overlap and ghost detection. *Optical Engineering* **43**, 214–223 (jan 2004).

[26] M. Jacquot, P. Sandoz y G. Tribillon. High resolution digital holography. *Optics Communications* **190**, 87–94 (apr 2001).

[27] R. Khare. Fractional fourier analysis of defocuced images. *Opt. Comm* **12**, 386–388 (1974).

[28] H. Kober. Wurzeln aus der hankel-, fourier- und aus anderen stetigen transformationen. *Quart J Math (Oxford)* **10**, 45–59 (1939).

[29] M.A. Kutay, H.M. Ozaktas, O. Arikan y L. Onural. Optimal filtering in fractional fourier domains. tomo 45, páginas 1129–1143 (1997).

[30] M.A. Kutay, H.M. Ozaktas, L. Onural y O. Arikan. Optimal filtering in fractional fourier domains. En "International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1995. ICASSP-95.", tomo 2.

[31] A. W. Lohmann. Image rotation, wigner rotation, and the fractional fourier transform. *Journal of the Optical Society of America A* **10**, 2181–2186 (oct 1993).

[32] F. Marinho y L. Bernando. Numerical calculation of fractional fourier transform with a single fast-fourier transform algorithm. *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 2111–2116 (1998).

[33] J. Max. "Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques". MASSON, tercera edición (1981).

[34] A.C. McBride y F. H. Kerr. On namias's fractional fourier transforms. *IMA J. Appl. Maths* **39**, 159–175 (1987).

[35] D. Mendlovic, Y. Bitran, R. Dorsch y A.W. Lohmann. Optical fractional correlation: experimental results. *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 1665–1670 (1995).

[36] D. Mendlovic y H. M. Ozaktas. Fractional fourier transform and their optical implemantation: I. *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 1875–1881 (1993).

[37] M. Muñoz y L. Blanco. "Intoruducción a la Teoría *avanzada* de la *Probabilidad*". Universidad Nacional de Colombia-UNIBIBLOS, Bogotá (2002).

[38] D. Mustard. The fractional fourier transform and the wigner distribution. *School of Mathematics Preprint AM89/6, The university of New South Wales, Kensington, Australia* (1989).

[39] D. Mustard. Fractional convolution. *School of Mathematics Preprint AM90/26, The university of New South Wales, Kensington, Australia* (1990).

[40] D. Mustard. The fractional fourier transform and the wigner distribution. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **38**, 209–219 (1996).

[41] D. Mustard. Fractional convolution. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **40**, 257–265 (1998).

[42] Victor Namias. The fractional fourier tranform and it's aplication to quantum mechanics. *J. Inst. Maths Its Appl* **25**, 241–265 (1980).

[43] H. Ozaktas y D. Mendlovic. Fractional fourier optics. *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 743–751 (1995).

[44] H.M. Ozaktas y D. Mendlovic. Fractional fourier transform and their optical implemantation: Ii. *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 2522–2531 (1993).

[45] H.M. Ozaktas, Z. Zalevsky y M.A. Kutay. "The fractional Fourier transform". Jhon Wiley & Son, LTD. (2001).

[46] A.L. Patterson. Function spaces between crystal space and fourier-transform space. *Zeits. Kristal* **112**, 22–32 (1959).

[47] P. Pellat-Finet. Fresnel diffraction and the fractional-order fourier transform. *Optics Letters* **19**, 1388–1390 (sep 1994).

[48] P. Pellat-Finet. Transfert du champ électromagnétique par diffraction et transformation de fourier fractionnaire. *C. R. Acad. Sci* **320**, 91–97 (1995).

[49] P. Pellat-Finet. "Lecciones de óptica de Fourier". División Editorial y de Publicacioness UIS (2004).

[50] P. Pellat-Finet y G. Bonnet. Fractional order fourier transform and fourier optics. *Optics Communications* **111**, 141–154 (sep 1994).

[51] P. Pellat-Finet y P.-E. Durand. La notion de spectre angulaire sphérique. *Comptes Rendus Physique* **7**, 457–463 (apr 2006).

[52] P. Pellat-Finet, P.-E. Durand y É. Fogret. Spherical angular spectrum and the fractional order fourier transform. *Optics Letters* **31**, 3429–3431 (dec 2006).

[53] P. Pellat-Finet y É. Fogret. Complex order fractional fourier transforms and their use in diffraction theory. application to optical resonators. *Optics Communications* **258**, 103–113 (feb 2006).

[54] P. Pellat-Finet y Y. Torres. Image formation with coherent light: the fractional fourier transform approach. *Journal of Modern Optics* **44**, 1581–1594 (aug 1997).

[55] B. Picinbono. "Signaux Aléatoires", tomo 1 y 2. Dunod, Paris (1995).

[56] F. Roddier. "Distributions et Transformation de Fourier". Ediscience (1971).

[57] J. E. Rueda, M. Tebaldi, S. Granieri y N. Bolognini. Implementation of a photorefractive correlator based on a fake zoom lens. *Optik* **113**, 309–313 (2002).

[58] U. Schnars y W. P. Juptner. Direct recording of holograms by a ccd target and numerical reconstruction. *Appl. Opt* **33**, 179–181 (1994).

[59] U. Schnars y W. P. O. Jüptner. Review article: Digital recording and numerical reconstruction of holograms. *Measurement Science and Technology* **13**, 85–+ (sep 2002).

[60] U. Schnars, T. M. Kreis y W. P. Jueptner. Digital recording and numerical reconstruction of holograms: reduction of the spatial frequency spectrum. *Optical Engineering* **35**, 977–982 (apr 1996).

[61] R. Torres. Holografía numérica por transformación de fourier fraccional. Proyecto Fin de Carrera, Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia (2003).

[62] R. Torres, Z. Lizarazo, Y. Torres y M. Lasprilla. Filtro vander lugt para dominios de fourier fraccional: holograma de fourier fraccional. *Revista de la Sociedad Colombiana de Física* **38**(4), 1587–1590 (2006).

[63] R. Torres, P. Pellat-Finet y Y. Torres. Sampling theorem for fractional bandlimited signals: A self-contained proof. application to digital holography. *IEEE Sign Proc Lett.* **13**(11), 676–679 (2006).

[64] R. Torres, P. Pellat-Finet y Y. Torres. Fractional convolution, fractional correlation and their traslation invariance properties. *Soumis à Signal Processing. An International Journal of the European Association for Signal Processing (EURASIP)* (2008).

[65] R. Torres, P. Pellat-Finet y Y. Torres. Fractional shifting and sampling in the fractional domain. application to digital holography. En "6th Iberoamerican Meeting on Optics

and 9th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Their Applications", tomo 992 de "Presented at the Institute of Physics (IOP) Conference", páginas 168–173. N.U. Wetter and J. Frejlich (April 2008).

[66] R. Torres, P. Pellat-Finet y Y. M. Torres Moreno. Numerical holography computing by using the fractional fourier transform: a ping-pong-pang algorithm. En "5th Iberoamerican Meeting on Optics and 8th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Their Applications", tomo 5622 de "Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference", páginas 1457–1462. A. Marcano O. and J. L. Paz (oct 2004).

[67] R. Torres, P. Pellat-Finet y Y. M. Torres Moreno. Sampling theorem in fractional fourier domains. En "5th Iberoamerican Meeting on Optics and 8th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Their Applications", tomo 5622 de "Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference", páginas 1188–1192. A. Marcano O. and J. L. Paz (oct 2004).

[68] A. Tortrat. "Calcul des Probabilités et Intoroduction aux Processus Aléatoires". MASSON et C^{ie}, Paris (1971).

[69] C. S. Vikram. "Particle Field Holography". Particle Field Holography, by Chandra S. Vikram and Foreword by B. J. Thompson, pp. 285. ISBN 0521018307. Cambridge, UK: Cambridge University Press, August 2005. (aug 2005).

[70] J. Ville. "Théorie et applications de la notion de signal analytique", tomo 2A de "Câbles Transmiss", páginas 61–74. (1948).

[71] N. Wiener. Hermitian polynomials and fourier analysis. *J. Math. Phys* **8**, 70–73 (1929).

[72] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev* **40**, 749–759 (1932).

[73] F. Wyrowski. Diffractive optical elements: iterative calculation of quantized, blazed phase structures. *Journal of the Optical Society of America A* **7**, 961–969 (jun 1990).

[74] F. Wyrowski y O. Bryngdahl. Iterative fourier-transform algorithm applied to computer holography. *Journal of the Optical Society of America A* **5**, 1058–1065 (jul 1988).

[75] F. Wyrowski y O. Bryngdahl. Speckle-free reconstruction in digital holography. *Journal of the Optical Society of America A* **6**, 1171–1174 (aug 1989).

[76] F. Wyrowski, R. Hauck y O. Bryngdahl. Computer-generated holography: hologram repetition and phase manipulations. *Journal of the Optical Society of America A* **4**, 694–698 (apr 1987).

[77] X-G. Xia. On bandlimited signal with fractional fourier transform. *IEEE Signal Process. Lett* **3**, 72–74 (1996).

[78] Z. Zalevsky y D. Mendlovic. Fractional wiener filter. *Appl. Opt* **35**, 3930–3936 (1996).

[79] Z. Zalevsky, D. Mendlovic y J.H. Caufield. Fractional correlator with real-time control of the space invariant property. *Appl. Opt* **36**, 2370–2375 (1997).

[80] A.I. Zayed. On the relationship between the fourier and fractional fourier transform. *IEEE Signal Process. Lett* **3**, 310–311 (1996).

[81] A.I. Zayed. A convolution and product theorem for the fractional fourier transform. *IEEE Signal Process. Lett* **6**, 101–103 (1998).

[82] A.I. Zayed. New sampling formulae for the fractional fourier transform. *Signal Process.* **77**, 111–114 (1999).