ASPECTOS HISTÓRICOS EPISTEMOLÓGICOS RELATIVOS AL CONCEPTO DE DETERMINANTE DE LEIBNIZ A CAUCHY

JOHN JAIRO ARIZA LÓPEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BUCARAMANGA

2017

ASPECTOS HISTÓRICOS EPISTEMOLÓGICOS RELATIVOS AL CONCEPTO DE DETERMINANTE DE LEIBNIZ A CAUCHY

JOHN JAIRO ARIZA LÓPEZ

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

DIRECTOR: MG. STERLING CASTAÑEDA JAIMES

CODIRECTOR: Dra. SOLANGE ROA FUENTES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BUCARAMANGA

2017

A mis padres.

AGRADECIMIENTOS

- A mi director de tesis, el profesor Sterling por sus valiosos aportes a esta investigación.

- A mi familia, en especial a Ana María, por su cariño y gran dedicación.

- A Nelly por las sugerencias y su constante apoyo a mis ideas sin importar cuales fueran.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE ESQUEMAS

ÍNDICE DE TABLAS

RESUMEN

TÍTULO: ASPECTOS HISTÓRICOS EPISTEMOLÓGICOS RELATIVOS AL CONCEPTO DE DETERMINANTE DE LEIBNIZ A CAUCHY[1]

AUTOR: John Jairo Ariza López[2]

PALABRAS CLAVE: epistemología, historia de las matemáticas, álgebra lineal, determinante

El estudio que aquí se presenta tuvo como objetivo el desarrollar un análisis histórico– epistemológico del concepto de determinante comprendiendo un periodo de tiempo desde el año 1693 hasta 1812, en esta línea de tiempo se analizarán las obras de grandes matemáticos de la época tales como: Leibniz, Cramer, Bézout, Lagrange, Gauss, Vandermonde y Cauchy. Con el fin de establecer cuáles fueron los principales aspectos históricos y epistemológicos que promovieron el origen, el desarrollo y la formalización del concepto de determinante, de ver cómo pasa de ser una herramienta utilizada en contextos de aplicación a ser un objeto matemático de estudio.

Después del análisis histórico- epistemológico se abrió paso a la revisión de algunos libros utilizados en los cursos de álgebra lineal I de la Universidad Industrial de Santander, esta revisión permitió comprender el tratamiento que se dio al concepto de determinante en los diversos textos y poderlo comparar con los contextos encontrados en el análisis histórico – epistemológico, también se identificó tres tipos de enfoques utilizados: combinatorio, inductivo y axiomático.

Con base en los resultados de la presente investigación se podrían plantear en futuras investigaciones, situaciones concretas que puedan ser desarrolladas en un curso de álgebra lineal I de la Universidad Industrial de Santander con miras a facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

[1] Proyecto de Grado

[2] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Mg. Sterling Castañeda Jaimes, Codirectora: Dra. Solange Roa Fuentes.

ABSTRACT

TITLE: HISTORICAL EPISTEMOLOGICAL ASPECTS RELATED TO THE CONCEPT OF DETERMINANT BY LEIBNIZ A CAUCHY[3]

AUTHOR: John Jairo Ariza López[4]

KEYWORDS: Epistemology, history of mathematics, linear algebra, determinant

The study presented in the next document has as objective to develop a historical epistemological analysis of the concept of determinant that took place in the period of time between 1693 and 1812, on this time interval will be analyzed the work of some of the most important mathematicians from that age, such as Leibniz, Cramer, Bézout, Lagrange, Gauss, Vandermonde and Cauchy. The aim of this study is to establish which were the main historical and epistemological aspects that promoted the origin, development and the concept of determinant formalization, all this to see how it moved from being a tool used in application contexts to being a mathematical subject of study.

After the historical and epistemological analysis was carried out a Bibliographic review of some books used during the courses of Algebra Lineal I in the Universidad Industrial de Santander; this review allowed to understand the treatment that was given to the concept of determinant in several texts and to be able to compare it with the contexts founded in the historical and epistemological analysis, also during this study were identify three kinds of approaches used: Combinatory, Inductive and Axiomatic.

Based on the results of this study might be considered in future investigations, specific situations that could be developed in an Algebra Lineal I courses in the Universidad Industrial de Santander in the interest to make easier the students learning.

---

[1] Graduation project

[2] Faculty of Science. Department of Mathematics. Director Mg. Sterling Castañeda Jaimes, Co-director: Dra. Solange Roa Fuentes.

INTRODUCCIÓN

Los cursos de álgebra lineal se encuentran presentes en la mayoría de programas de Ingenierías, licenciaturas en Matemáticas y Física. Son numerosas las investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que atraviesan los estudiantes para comprender los diferentes conceptos relativos al álgebra lineal, (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000a; Dorier et al, 2000b; Dubinsky, 2001; Dorier y Sierpinska, 2001; Dorier, 2002;). Los anteriores investigadores coinciden en que las dificultades radican en la construcción de diversos conceptos de álgebra lineal en los estudiantes recién ingresados a la universidad, estos se ven exigidos a construir conceptos con un lenguaje formal y abstracto, cuando su preferencia siempre se limita al trabajo con procedimientos mecánicos, lo que imposibilita la comprensión de los conceptos involucrados (Dubinsky, Dauterman, Leron y Zazkis, 1994).

Esta dificultad ha sido una problemática de interés dentro de la Matemática Educativa, ya que no son exclusivas de los individuos que abordan actualmente los conceptos básicos de Álgebra Lineal, sino que hace parte de obstáculos que surgieron en la construcción de los conceptos mismos. El estudio de aspectos históricos y epistemológicos de los objetos matemáticos, ampliará la mirada y podrá aportar elementos para repensar aspectos de orden curricular, matemático y/o didáctico (Gómez 2003; Arboleda 2011).

Con éste trabajo de investigación se analizará desde una mirada histórico-epistemológica, el desarrollo de la noción de determinante. Se busca con el análisis abarcar las ideas que se desarrollaron alrededor de dicha noción en el lapso de tiempo que va desde los trabajos de Leibniz (1693) hasta los de Cauchy (1812), ver como el determinante paso de una herramienta a ser un objeto de investigación, y cómo se consolidó como una teoría.

Sí se conoce los aspectos relativos a la construcción histórica-epistemológica de la noción de determinante, se podrá proponer herramientas puntúales para un curso de Álgebra Lineal. Esto es, proponer aspectos curriculares referentes al contenido y aspectos didácticos asociados con el diseño de situaciones que den lugar a ampliar y generar una nueva mirada del concepto de determinante, más allá de la aplicación de un algoritmo.

Esta idea surgió en el año 2014, él profesor Sterling Castañeda Jaimes impartía clases sobre la historia y epistemología de las Matemáticas, la visión y el tratamiento de los contenidos desde la parte histórica llevaron a sugerir esta investigación. Las ideas generales significativas son de J. Sterling y la Dra. Solange Roa; Sus orientaciones junto con las sugerencias y cursos impartidos a lo largo de la maestría ayudaron específicamente a lo relacionado con los análisis de libros de texto. Esta significativa ayuda, junto con la paciencia y la confianza puesta en el autor de esta obra, han sido indispensables para la finalización de esta investigación.

El presente estudio se centra en más de 7 autores cuyos trabajos determinan épocas de cambio en el desarrollo del concepto de determinante. El apartado histórico inicia con las primeras apariciones del concepto dado por Leibniz, la famosa regla de Cramer seguido por los aportes de Vandermonde, Bézout, Lagrange, Gauss, la época de Cauchy y la posterior divulgación de la teoría de determinantes con Spottiswoode.

El análisis histórico-epistemológico comprende la primera parte esencial del trabajo. Una segunda parte, el análisis y revisión de los libros de texto, está enfocado en cuatro libros que se usan como guía en los cursos de Álgebra Lineal I en la Universidad Industrial de Santander, se analiza el enfoque y el contenido en cuanto al concepto de determinante. La tercera parte consta de una reflexión suscitada tanto por el análisis historico- epistemológico como por el análisis de los libros de álgebra lineal actuales, también se cuenta con un apéndice dedicado a los aspectos biográficos de varios autores.

La hipótesis central del trabajo es: si conocemos aspectos relativos a la evolución histórica epistemológica de la construcción de la noción de determinante, de ver cómo pasa de herramienta a teoría, podremos proponer enfoques puntúales para un curso de Álgebra Lineal con características particulares. Esto es, proponer aspectos curriculares referentes al contenido y didácticos asociados con el diseño de situaciones que buscamos den lugar a la construcción del concepto de determinante, más allá de la aplicación de un algoritmo algebraico desprovisto de significado.

Nuestro aporte corresponderá a lo establecido en los siguientes tres objetivos.

Objetivos.

1. Realizar un estudio histórico-epistemológico relativo al concepto de determinante de Leibniz a Cauchy a partir del texto de Thomas Muir.

2. Identificar dentro del estudio histórico-epistemológico, los contextos que dieron lugar al concepto de determinante.

3. Revisar y analizar el enfoque de libros de texto usados como guía en cursos de álgebra lineal I de la UIS en torno al concepto de determinante.

JUSTIFICACIÓN

Se puede afirmar que los procesos históricos que se abordan en esta investigación pueden contribuir a una mayor comprensión del concepto de determinante, como herramienta (algoritmo) y a su vez como una teoría, como un objeto matemático. Asimismo, se espera que una comprensión del desarrollo histórico-epistemológico del concepto permita el diseño de estrategias que faciliten el proceso de enseñanza/aprendizaje en cursos universitarios.

En este sentido el uso de elementos históricos en la enseñanza de las matemáticas no es un hecho novedoso en sí mismo. A principios del siglo XX Andrew Wallis, promovía la lectura de clásicos matemáticos como Arquímedes, Euclides, Apolonio, Fermat, Descartes, entre otros. Leer sus originales, sostiene Wallis, es una fuente de ideas para los espíritus creativos tanto en matemáticas como en educación matemática.

La presencia cada vez más notoria de la historia y epistemología de la matemática en simposios, congresos y revistas especializadas, es un hecho innegable que puede estar relacionado con una transformación paradigmática de las ciencias sociales y humanas, entre ellas la historia y la educación (Gómez, 2003). Con respecto a la educación en matemáticas Arboleda (2001) advierte que a pesar de la que la tradición (principalmente positivista) invita a los educadores matemáticos a presentar los conceptos y teorías en el más estricto formalismo (método axiomático), despojados de todo lazo existente con los esfuerzos de los hombres que inventaron aquellos conceptos y teorías. El conocimiento en historia de la matemática puede, entonces, mejorar no solo la comprensión de los conceptos y teorías sino además fortalecer las habilidades de los matemáticos como profesores y profesionales.

Un profesor con una mirada enfocada en la historia y la epistemología de la matemática, a la hora de la enseñanza de un concepto como el de determinante, puede ofrecer a sus estudiantes algo más que una mera manera de manipular símbolos, de hacer cálculos, algo más que una técnica, ampliando la visión del estudiante acerca de las matemáticas.

Esta afirmación se sostiene en los argumentos de Arboleda (2011) con respecto a la necesidad de la formación histórica de los educadores matemáticos y de la inclusión de una perspectiva histórica en los cursos que imparten. Además de las observaciones hechas por el autor y sus colegas durante su práctica docente de la cual concluye que los estudiantes tienen dificultades para asimilar las nociones referentes al determinante (ejemplo: el signo $(-1)^{i+j}$), y que es necesario una nueva manera de abordar dicha situación en la Cátedra de Álgebra Lineal I en la cual ellos tienen su primera aproximación a este contenido.

En este sentido, una manera educada y diferente de lo hecho hasta el momento, de abordar un concepto como el de determinante, es acercándose a sus orígenes, su evolución, sus crisis, el contexto sociocultural, político, religioso y económico en el que se desarrolló el concepto, etc. Estos elementos, aunque aislados, se complementan cuando se tiene una mirada histórica y epistemológica en torno a la génesis de un concepto. Es por esto, que el objetivo general de la presente investigación es identificar los aspectos del desarrollo histórico-epistemológico del concepto de determinante que puedan facilitar el proceso de enseñanza/aprendizaje de la Cátedra de Álgebra Lineal I en la UIS.

Algunas investigaciones Históricas, Epistemológicas y Didácticas que refieren el problema de estudio.

El objetivo del apartado es mostrar una mirada general de las investigaciones en historia, epistemología y didáctica de las matemáticas, esta mirada se reduce a considerar solo el campo en el cual se basa nuestra investigación, el álgebra lineal.

Estas líneas de investigación (histórico, epistemológica y didáctica) han llevado a realizar numerosos trabajos, dentro de las que se encuentran aquellas que centran su interés en la parte histórica y/o epistemológica. Una de ellas es descrita por De la Torre (2001) y (2002), donde clasifica conflictos cognitivos específicamente relacionados con la identificación de los obstáculos epistemológicos, apoyandose en un estudio histórico de las diferentes nociones de continuidad, infinito e infinitesimal. Así como las investigaciones de De la Torre que identifican obstáculos epistemológicos en el contexto histórico, se hallan numerosas investigaciones, algunos ejemplos son los trabajos de García (1998), Ramírez (2009), Pereira (2010).

Los problemas didácticos también hacen surgir investigaciones como la de Aponte (2014), allí caracteriza a partir de un estudio histórico-epistemológico el proceso de consolidación del infinito cantoriano, con el fin de realizar una propuesta para los programas de teoría de conjuntos de la Universidad del Valle. En esta línea (Historia y didáctica) encontramos a Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011), esta investigación centra su mirada en la parte histórica y didáctica del infinito con un enfoque filosófico. Asimismo, Maz (2005), González (2002) ya fijan su mirada en los sistemas de representación y análisis de contenido, dando una gran relevancia a la parte histórico-epistemológica del concepto de estudio.

Es común encontrar trabajos en Matemática Educativa en los cuales el análisis histórico- epistemológico juega un papel fundamental. Es pertinente mencionar algunos trabajos en el álgebra lineal.

Luzardo y Peña (2006) es el principal referente que expone una aproximación al desarrollo histórico del álgebra lineal, tratan el origen del concepto de sistema de ecuaciones lineales y los métodos utilizados para sus soluciones, también tratan los inicios del concepto de matriz, determinante, rango y nulidad, forma canónica de Jordán, espacio vectorial, entre otros. Un trabajo similar es el desarrollado por Castro (1993), quien se centra principalmente en el concepto de Transformación lineal; allí el autor revisa el origen del concepto y sus antecedentes relacionados con la matriz. Lorente (s.f) hace un recorrido por la historia del álgebra y los textos más relevantes en el desarrollo histórico.

No obstante, no basta con conocer la forma como se desarrollaron los conceptos en determinada época, es oportuno ampliar la mirada más allá de lo histórico. Es así como la investigación debe además de la mirada histórica, recoger elementos adicionales que puedan aportar un plus al campo de la Educación Matemática. Tall (1989) indica que concebir una expresión algebraica como un objeto matemático, más que como un proceso, puede, manipulando algebraicamente, ser una fuente en conflicto, este interés se ve reflejado en Malisani (1999) da cuenta de estas dificultades y publica los diferentes obstáculos epistemológicos que surgen en la construcción del lenguaje algebraico.

Palarea y Socas (1994) consideran que identificar obstáculos epistemológicos en el aprendizaje del lenguaje algebraico, se queda corto ya que es necesario ver distintos enfoques del mismo problema sino además tener en cuenta lo didáctico y cognitivo. Toda esta problemática converge al trabajo que formaliza Neira (2007) donde se realiza un estudio de los obstáculos y dificultades detectadas en la transición del álgebra al cálculo.

Todo el recorrido da cuenta de algo importante, que no es suficiente con realizar un estudio histórico excluyendo a la parte epistemológica y didáctica. Es allí donde una investigación genera impacto, cuando esta misma aporta herramientas teóricas y metodológicas para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

A continuación, se enuncian algunos trabajos puntuales sobre el concepto de determinante.

Algunos trabajos sobre el concepto de determinante

El desarrollo de la teoría de los determinantes fue un desarrollo muy intenso hasta que las matrices se popularizaron en 1925, después de lo cual se consideró que los determinantes solo eran una parte muy pequeña del álgebra lineal. De hecho, algunos matemáticos han sugerido su desaparición[5]. Sin embargo, aún siguen siendo una pequeña pero esencial parte del álgebra lineal.

En aspectos históricos Sir Thomas Muir realiza una magnífica compilación de los determinantes desde sus orígenes en el mundo occidental en 1693 hasta 1920, en una serie de 5 volúmenes[6], reúne artículos, libros, capítulos, temas, o solo fragmentos de donde se usó algo relacionado con determinantes. Esta gran recopilación que suma más de 1000 páginas da cuenta del gran trabajo histórico que ha tenido el concepto. Farebrother, Jensen y Stya (2002) extiende el trabajo dejado por Muir y realiza una lista de 131 libros sobre determinantes publicados en el siglo XIX.

A partir de esas colecciones bibliográficas se observan trabajos de profundización de las matemáticas, a modo de ejemplo (relacionado a lo desarrollado por Hadamard en las obras de Muir): Brenner (1972) en su trabajo llamado *The Hadamard maximum determinant problem*, Dixon (1984) en su obra titulada *How good is Hadamard's inequality for determinants*, Hedayat y Wallis (1978) en *Hadamard matrices and their applications*.

Trabajos posteriores tratan sobre las problemáticas que surgen alrededor de la enseñanza del concepto de determinante Carlson, Johnson, Lay, Porte, Watkins y Watkins (1997) plasman en una publicación de 306 páginas una colección de artículos que discuten el contenido de los cursos de álgebra lineal y sus enfoques para la enseñanza. Los autores

[5] Podemos tomar como referencia al artículo "Down with determinats" de Sheldon Axler, esta obra muestra que el álgebra lineal se puede hacer mejor sin el concepto de determinante.

[6] Cinco tomos que son recopilados y editados en 1960.

abordan temas elementales, tales como reducción de filas adentrándose a temas más avanzados como métodos iterativos y pseudo-inversas. De estas discusiones brotan acuerdos que mencionan que el determinante no se debe tener en cuenta en los cursos de álgebra lineal. Axler (1995) está de acuerdo con esta premisa y en su artículo titulado D*own with determinants*, instiga a hacer álgebra lineal sin el uso de los determinantes. Aunque Axler hace reconocimiento a que los determinantes tienen un uso fundamental y es en la investigación, más adelante Tee (2004) en contraposición a Axler crea un artículo llamado *¡Vivan los determinantes!*, donde establece la necesidad de que los determinantes aparezcan como una parte pequeña pero esencial del álgebra lineal.

Básicamente los antecedentes específicos sobre los determinantes recaen en discusiones: Roth y Ames (2014) Scholtzová (2014), Yu Gang (2009) Zhu Xiao-chun (2010) Xian Feng (2000), estos trabajos analizan los alcances de la definición de determinante y los comparan con la definición clásica de determinante con base a la permutación y combinación, estableciendo una rica discusión en cuanto a la capacidad de los estudiantes de adquirir un razonamiento lógico en el álgebra lineal muy diferente de las visiones de De Carlson et al (1997), Axler (1995) y otros. Lo interesante de estos trabajos son las diferentes posturas en cómo se perciben los determinantes.

ASPECTOS CONCEPTUALES

En esta sección se presentan los aspectos generales que fundamentan la investigación histórica y su uso particular en el ámbito educativo como investigación histórica/epistemológica.

La investigación Histórica

El presente estudio se encuentra ubicado en el área de la investigación histórico-educativa más precisamente en la investigación histórico-epistemológica. Es pertinente definir esta área de conocimiento. Romero (2009) alerta sobre la necesidad de definir en primer lugar lo que se considera una investigación histórica ya que, en palabras del mencionado autor “(…) el oficio de historiador de la educación es, sin ninguna clase de complejos, oficio de historiador” (p. 1).

Para Febvre (1953) la historia es:

> “el estudio científicamente elaborado de las diversas creaciones de los hombres de otros tiempos, captadas en su fecha, en el marco de sociedades extremadamente variadas y, sin embargo, comparables unas a otras; actividades y creaciones con las que cubrieron la superficie de la tierra y la sucesión de las edades” (p. 40).

Señala el propio Febvre que esta hace referencia a dos aspectos importantes cada uno relevante por sí mismo e inseparables en la praxis: en primer lugar, el carácter científico de la investigación histórica y, en segundo lugar, el hombre como objeto de estudio de la historia.

Febvre plantea que, desde la ruptura de la historia con los planteamientos del positivismo, el accionar científico se trata de la posibilidad que tiene el historiador del plantearse problemas e hipótesis. Romero (2009) nos aclara que en este sentido los historiadores no pueden ser meros narradores de lo que creen que es una verdad absoluta del pasado. El resolver problemas y confirmar hipótesis le da a la historia un carácter dinámico, y permite al historiador ser un intérprete del pasado. El carácter científico de la historia trata entonces de crear nuevo conocimiento a partir del conocimiento pasado. Bien cabe aquí la cita de Febvre (1953) "todo hecho científico es *inventado* y no simplemente dado al sabio" (p. 88).

Por otra parte, Moradiellos (1994) señala que la necesidad que tiene la historia de producir conocimiento científico valido solo puede ser satisfecha cuando las narraciones e interpretaciones históricas son hechas sobre la base de pruebas fidedignas, válidas para el conocimiento científico.

En este sentido, alude al objeto de estudio de la ciencia, que no es, como puede pensar el lego, el *Pasado*. El Pasado “por definición, no existe, es tiempo finito, perfecto, acabado y como tal incognoscible científicamente” (Moradiellos, 1994, p. 7). El objeto de estudio de la historia es, como ya se mencionó anteriormente: el hombre. El hombre como totalidad, viviendo en una sociedad, sumergido en una cultura y ubicado en un tiempo particular. Al historiador le interesa quienes fueron los hombres del pasado, donde estuvieron, donde vivieron, que pensaron, que dijeron, que hicieron (Romero, 2009). Bien podría decirse que todo lo ya ocurrido en la vida de los hombres es objeto de estudio de la historia.

Romero (2009) llama la atención acerca del hecho de que, a pesar de la pretensión holística de la historia, sería una locura pretender abarcar, en cada estudio, todos los aspectos relevantes de la sociedad, la cultura y el momento histórico en que vivían los hombres. Y que no es una obligación, sino una necesidad, de cada historiador delimitar el foco de atención de cada investigación, de manera que se pueda abordar uno o más aspectos relevantes de la vida de los hombres sin olvidarse del resto.

En este estudio se abordó la construcción histórica del concepto del determinante, un concepto importante del álgebra y que encuentra un uso también en la geometría y en el cálculo. Que es producto del arduo trabajo de grandes hombres que se dedicaron (al menos durante una parte de su vida) en mente y cuerpo a la matemática, como lo fueron Leibniz, Maclaurin, Cramer, Gauss, Cauchy, entre otros.

Para poder estudiar el producto de la vida de los hombres en un pasado inaccesible los historiadores deben valerse de todo aquello que han dejado los hombres tras el paso de su vida, lo que Moradiellos (1994) llama reliquias *del pasado.* Con respecto a ellos Febvre (1953) señala que la historia puede hacerse con "todo aquello que es del hombre, depende del hombre, sirve al hombre, expresa al hombre, denota la presencia, la actividad, los gustos y las maneras de ser del hombre" (p. 232).

Con esto en mente, en el análisis del desarrollo histórico del concepto de determinante se revisaron, en este estudio, obras producidas por los autores que en antaño hablaron sobre el término en cuestión, textos como el *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, el *Mémoire sur I'elimination de Vandermonde* y demas son recopilados en una gran obra titulada *Theory of determinants in the historical order of development* de Thomas Muir. Por otra parte, y para responder al objetivo pedagógico de esta investigación, se revisaron materiales educativos utilizados en cursos universitarios de Álgebra Lineal, los cuales permitieron abordar desde un punto de vista histórico-epistemológico la enseñanza del concepto de determinante.

Siguiendo la clasificación planteada por Cardoso (2000) acerca de los tipos de documentos históricos utilizados, se podría decir que se utilizaron fuentes primarias, aquellas elaboradas por los participantes de la historia; y fuentes secundarias, aquellas que narran lo ocurrido desde el punto de vista de un observador.

Bloch (ce. Romero, 2009) afirma que una ciencia no solo está determinada por aspectos epistemológicos y ontológicos. Sino también por la naturaleza de sus métodos. Berrio (1976) describe las distintas fases que debe tener una investigación histórica en el ámbito educativo: la Heurística, la Crítica, la Hermenéutica y la Síntesis y exposición.

La primera fase, la heurística, se conforma por una serie de pasos que llevan al historiador al inicio de la investigación. En general, toda investigación comienza con una *situación*, un contexto que lleva al historiador, en este caso al historiador de la educación, a comenzar su investigación. La situación en sí puede ser cualquiera, bien puede ser para obtener un grado académico o para responder a solicitudes gubernamentales (Berrio, 1976).

Posteriormente, se debe escoger el fenómeno histórico a investigar. Klappenbach (2014) menciona que esto surge del investigador, de sus propias inquietudes y lagunas de conocimiento. Pero es necesario para tener éxito en esta tarea, que el historiador se embarque en un trabajo previo de revisión de la literatura y conozca los avances hechos en el tema hasta el momento (Berrio, 1976).

Klappenbach (2014) señala que no puede plantearse un problema de investigación, siquiera puede escogerse un tema de investigación, si no existe un conocimiento previo y robusto sobre el tema. Asimismo, Berrio (1976) señala que una vez hecha la revisión teórica previa puede pasarse a la delimitación del fenómeno y el planteamiento del problema. Finalmente, la fase heurística termina con la búsqueda, ubicación y selección de los documentos históricos a utilizar en la investigación.

Cardoso (2000) señala que este paso es indispensable y sin él no puede comenzar ninguna investigación científica histórica. En la opinión de este autor, el investigador debe, incluso antes de plantearse los problemas de su investigación, cerciorarse de la existencia de los documentos históricos necesarios para llevar a cabo el estudio, ya que sin estos es imposible cumplir con el criterio de viabilidad de las investigaciones científicas.

La segunda fase, la crítica, se conforma por los análisis de validez que debe hacerse a los documentos históricos seleccionados. Se plantea la necesidad de llevar a cabo una crítica externa, que trata de la comprobación de la autenticidad de los documentos; y una crítica interna, que trata de la exactitud de los documentos utilizados (Berrio,1976).

Cerciorarse de la validez de los documentos históricos utilizados, es crucial dentro de la metodología histórica, debido a que todo trabajo interpretativo posterior estará sujeto a la veracidad de los relatos contados por estos (Klappenbach, 2014).

La tercera fase es la hermenéutica. Berrio (1976) señala que un compendio de documentos históricos no es en sí mismo historia. Como ya se señaló anteriormente, la historia está hecha por hombres y no por sus cosas, a pesar de que unas nos refieran a los otros.

Es necesario en este punto, que el historiador de orden y sentido a los datos ya recogidos, que lo explique y los interprete en aras de lograr una reconstrucción histórica científica. De crear nuevo conocimiento a partir del conocimiento de los hombres del pasado (Romero, 2009).

La última fase de la investigación histórica es la exposición. Berrio (1976) afirma que esta fase trata de la redacción de los resultados de la investigación. Exige dar orden a todos los datos e interpretaciones establecidas. Asimismo, Klappenbach (2014) menciona que es el punto de culminación de la investigación y el momento en que esta se presta para la socialización académica, de ahí la necesidad de cuidar los aspectos estéticos de la obra, especialmente cuando se trata de un trabajo de investigación histórico.

Investigación histórico-epistemológica

La investigación histórico-epistemológica aparece entonces como un tipo de estudio particular que se encuentra al servicio de los educadores matemáticos. Filloy (ce. Gómez, 2003) señala que este es un tipo de análisis que toma elementos de la génesis histórica y de la epistemológica de los conceptos y teorías matemáticos, a través de la historia de las ideas, para mejorar la didáctica de las matemáticas.

Lakatos (1983) comparte varios aspectos de la noción de epistemología de otros filósofos famosos como Kuhn o Mardones. Señala que la epistemología está relacionada con el estudio de la génesis de las estructuras de los conocimientos científicos. Además, considera que existen factores externos e internos que hay que tener en cuenta en los análisis epistemológicos como lo son: el contexto cultural, social, político y económico (externos) y aquellos propios del objeto de estudio (internos).

En este sentido al afirmar que se hizo una investigación histórico/epistemológica se está afirmando que se llevó a cabo una reconstrucción del proceso de desarrollo de un conocimiento científico (en este caso los determinantes) desde una visión holística que busca incluir tanto los factores internos como externos y los hechos históricos que influyeron en el desarrollo de la noción de determinante.

También es importante destacar que esta labor se llevó a cabo con un fin educativo. En este sentido, Arboleda (2011) dice que la investigación histórica en educación no solo trata de la acción llevada a cabo por un educador o sobre un fenómeno propio de los sistemas educativos. Esta debe producir mejoras en la práctica pedagógica. Se espera que la investigación histórica brinde al educador una comprensión global de los factores que intervinieron en la confección de aquello que pretende enseñar.

El presente estudio se llevó a cabo precisamente con esta intención. Gómez (2003) afirma que el estudio histórico-epistemológico de los conceptos matemáticos fortalece al profesor en matemáticas al brindarle una comprensión de los cómo y qué de la construcción teoría e histórica de los conceptos.

Estudiar la génesis histórica de un concepto, afirma Gómez (2003), pone de manifiesto que el mismo, generalmente, ha pasado por una diversidad de transformaciones hasta llegar a ser lo que es hoy. Ha sido trabajado por estudiosos con variados puntos de vista y en distintos momentos históricos para la ciencia matemática; en un momento pudieron haber sido considerados correctos, luego ser rechazados o revisados nuevamente.

Por otra parte, el estudio epistemológico ayuda a establecer la configuración de los elementos que dan forma y significado a un determinado cuerpo teórico, analizando los diferentes sentidos que se le han atribuido y su adaptación para la resolución de distintos problemas (Gómez, 2003).

Esto se encuentra en concordancia con lo expuesto por Arboleda (2001) quien señala que para que la investigación histórica ayude al pedagogo en matemáticas esta debe cubrir los siguientes aspectos de un fenómeno: quién llevó a cabo los descubrimientos en primer lugar, en qué época, cuál era el contexto de la ciencia en ese momento[7] (en este caso la matemática) y los pormenores que llevaron a la construcción de los enunciados teóricos de interés (patrocinios que permitieron la investigación, intereses políticos y económicos, interés propios de quien lo postulo, azares que le permitieron llegar a su descubrimiento, contacto con colegas que le ayudaron en su trabajo) cada uno de los cuales se pretende abordar en la presente investigación.

Arboleda (2001) afirma que el sistema educativo ha propiciado históricamente la enseñanza y el aprendizaje de una matemática estrictamente formal[8]. Se les muestra a los alumnos conceptos, modelos y teorías como cosas acabadas y perfectas, que existen en un mundo independiente del hombre, o al menos independiente de los hombres que los crearon.

---

[7] La matemática en el siglo XVII era vista como un lenguaje al servicio de las (física) ciencias naturales, ya en el siglo XVIII siendo más independiente de la realidad era guiada por el principio de no contradicción. Por la no dependencia de la realidad surgen las geometrías no euclidianas.

[8] correspondería al enfoque axiomático de la función determinante.

Esto muchas veces forma parte de las dificultades que se presentan en el trabajo de enseñanza/aprendizaje de la matemática y no promueve valores científicos en el estudiante.

Dicho esto, vale la pena aclarar que el presente estudio se puede considerar una investigación histórico-epistemológica ya que tiene como objetivo general identificar los aspectos del desarrollo histórico/epistemológico del concepto de determinante que pueden facilitar el proceso de enseñanza/aprendizaje de la Cátedra de Álgebra Lineal I en la UIS.

Gómez (2003) expone que el investigador histórico-epistemológico puede valerse de distintos tipos de análisis para alcanzar sus metas, los cuales se han identificado como diferentes enfoques de estudio:

1. El enfoque de la enseñanza desde una perspectiva histórica

Un acercamiento a la investigación histórico – epistemológica, que busca llevar al aula episodios históricos o problemas del pasado para que los estudiantes los discutan o resuelvan.

2. *El enfoque del modelo teórico - local*

Un acercamiento, que ha logrado buenos resultados en el campo del álgebra elemental, es el que utiliza el análisis histórico – epistemológico para hacer un análisis de los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, luego lleva a cabo una prueba experimental de los hallazgos encontrados en el análisis del sistema educativo y finalmente vuelve al trabajo practico en las aulas (Filloy, ce. Gómez, 2003).

En este enfoque, el análisis histórico se aplica al componente formal del modelo de aprendizaje/enseñanza utilizado por el sistema educativo. Para lograr esto es prioritario tener un avanzado conocimiento de las matemáticas actuales.

3. El enfoque de la reproducción en los estudiantes de las etapas en la historia.

Este enfoque se sustenta en la creencia de que el desarrollo de una noción matemática atraviesa etapas bien definidas; etapas que los estudiantes también atraviesan en su proceso de aprendizaje. En esta corriente son elementos cruciales de la investigación, la determinación y caracterización de las etapas de la construcción de una teoría, así como los mecanismos que explican la transición de una a otra.

4. El enfoque socio cultural

El enfoque socio cultural pone su foco de atención en las relaciones entre lo histórico y lo social, en la mediación de la enseñanza. Parte de la idea de que el conocimiento está profundamente arraigado y conformado por su contexto socio cultural. Así, busca en el contexto las claves que dirigieron la actividad humana hacia la construcción de las teorías matemáticas, y en ellas las claves que encaminen el proceso de enseñanza/aprendizaje de la matemática.

5. El enfoque de los obstáculos epistemológicos

Desde este enfoque el investigador histórico-epistemológico intenta determinar concepciones y obstáculos ligados al desarrollo de una noción matemática, como una herramienta útil para el análisis didáctico de las concepciones y obstáculos que se pueden presentar en los alumnos. Se acepta que hay diferencias entre el desarrollo histórico de un concepto y su aprendizaje escolar, pero se considera que identificar obstáculos en la historia permite diseñar modelos didácticos que tengan en consideración todas las condiciones pertinentes para la construcción del conocimiento.

Cabe destacar que se entiende por obstáculo epistemológico aquellos hechos o ideas que han sido mal interpretadas en una época, derivando en problemas prácticos, metodológicos o teóricos; y que a la luz de los nuevos conocimientos que surgen con el tiempo, los primeros han podido ser reinterpretados (Bachelard, 1987).

6. El análisis de los libros de texto

El investigador en didáctica de las matemáticas, que lleva a cabo una investigación histórico-epistemológica, tiene en los libros de texto históricos una fuente privilegiada de información. El investigador puede buscar en ellos información sobre cómo se desarrollan los contenidos de enseñanza, los contenidos científicos, sus antecedentes y su proyección en el futuro. Puede indagar la importancia dada a uno u otro autor, a una u otra teoría, en las aulas de clases. Así como los aspectos filosóficos y epistemológicos abordados en el proceso de enseñanza/aprendizaje.

También puede buscar información sobre el desarrollo curricular y pedagógico: los contenidos seleccionados para la enseñanza; los aspectos conceptuales, actividades, problemas y ejercicios que se enfatizan; sus secuenciaciones, y, en definitiva, sus acercamientos metodológicos.

Este trabajo hizo uso de los dos últimos enfoques: el de los obstáculos epistemológicos al enfocarse a buscar estos obstáculos en la construcción histórica del concepto de determinante; y el de los libros de textos al buscar en los libros utilizados en la cátedra de Álgebra Lineal I de la UIS indicios de cuáles son los acercamientos metodológicos utilizados por los profesores en el tema de determinante. El enfoque N° 1 también podría formar parte de esta investigación puesto que se propone como sugerencias y resultados de las lecturas, dos talleres; Lagrange con el volumen de un tetraedro y Gauss con las formas cuadráticas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El concepto de determinante tiene aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas, por ejemplo, en geometría, cálculo, geometría diferencial etc. y como herramienta para resolver diversos problemas matemáticos. Actualmente el concepto es parte de la cotidianidad de los cursos universitarios de Álgebra Lineal.

El desarrollo histórico del concepto de determinante se ha dado a través de varios caminos. En el presente estudio se analizó aquellos caminos delineados por matemáticos de los siglos XVII, XVIII y XIX que dedicaron parte de su trabajo al concepto.

En este sentido, la revisión histórica del concepto de determinante realizada en el trabajo abarca los aportes hechos a lo largo de varios siglos, desde Leibniz en 1693 hasta

Cauchy en 1812, pasando por aquellos quienes también trabajaron en el concepto como, Cramer, Bézout, Gauss, entre otros.

Se buscó a través del análisis establecer cuáles fueron los principales aspectos históricos y epistemológicos que promovieron el origen, el desarrollo y la formalización del concepto de función determinante. Los resultados del análisis sirven como base para reflexionar sobre distintos aspectos del campo de la Matemática Educativa. Como el diseño de modelos didácticos que involucren todas las condiciones pertinentes en la construcción de conocimiento.

Es sabido que el Álgebra Lineal presenta un alto grado de dificultad para los estudiantes que recién ingresan a la universidad, dado que sus conceptos requieren de un tratamiento operativo y conceptual diferente al que hasta ese momento están acostumbrados (Dubinsky et al., 1994).

Identificar los obstáculos y las exigencias intelectuales que demandó la construcción del concepto, permitió caracterizar una serie de elementos que facilitan la enseñanza/aprendizaje del concepto en el marco de un curso universitario de Álgebra Lineal I (particularmente el ofrecido por la Universidad Industrial de Santander).

Se buscó por tanto aportar a la discusión que se da al interior de la comunidad académica en torno a los siguientes interrogantes:

- ¿Qué aportes puede ofrecer un estudio histórico/epistemológico del concepto de función determinante que faciliten la situación enseñanza/aprendizaje del concepto en un curso de álgebra lineal?
- ¿Cuáles fueron los principales aspectos histórico/epistemológicos que se dieron en el origen, desarrollo y consolidación de la teoría de determinantes?
- ¿Cómo se aborda la noción de determinante en los cursos de Álgebra Lineal I ofrecidos en la Universidad Industrial de Santander? ¿Qué enfoque?

El principal interés del autor, fue llevar a cabo un análisis histórico-epistemológico del concepto de función determinante, y con base en él realizar aportes a la didáctica de un curso de Álgebra Lineal de la Universidad Industrial de Santander, en cuanto a su contenido, método, aplicaciones y en general sobre los propósitos con los que se desarrolla este curso en los diferentes programas académicos universitarios. Con el fin de responder a las preguntas anteriores y a los intereses por los cuales se realizó esta investigación se plantearon los siguientes objetivos:

1. Realizar un estudio histórico-epistemológico relativo al concepto de determinante de Leibniz a Cauchy a partir del texto de Thomas Muir.

2. Identificar dentro del estudio histórico-epistemológico, los contextos que dieron lugar al concepto de determinante.

3. Revisar e identificar el enfoque de libros de texto usados como guía en cursos de álgebra lineal I de la UIS en torno al concepto de determinante.

Finalmente, y con base en los resultados del estudio se podrían plantear en futuras investigaciones, situaciones concretas que puedan ser desarrolladas en un curso de Álgebra Lineal I de la universidad industrial de Santander, con miras a facilitar el aprendizaje de los estudiantes de dichos cursos.

MÉTODO

Tipo de Estudio

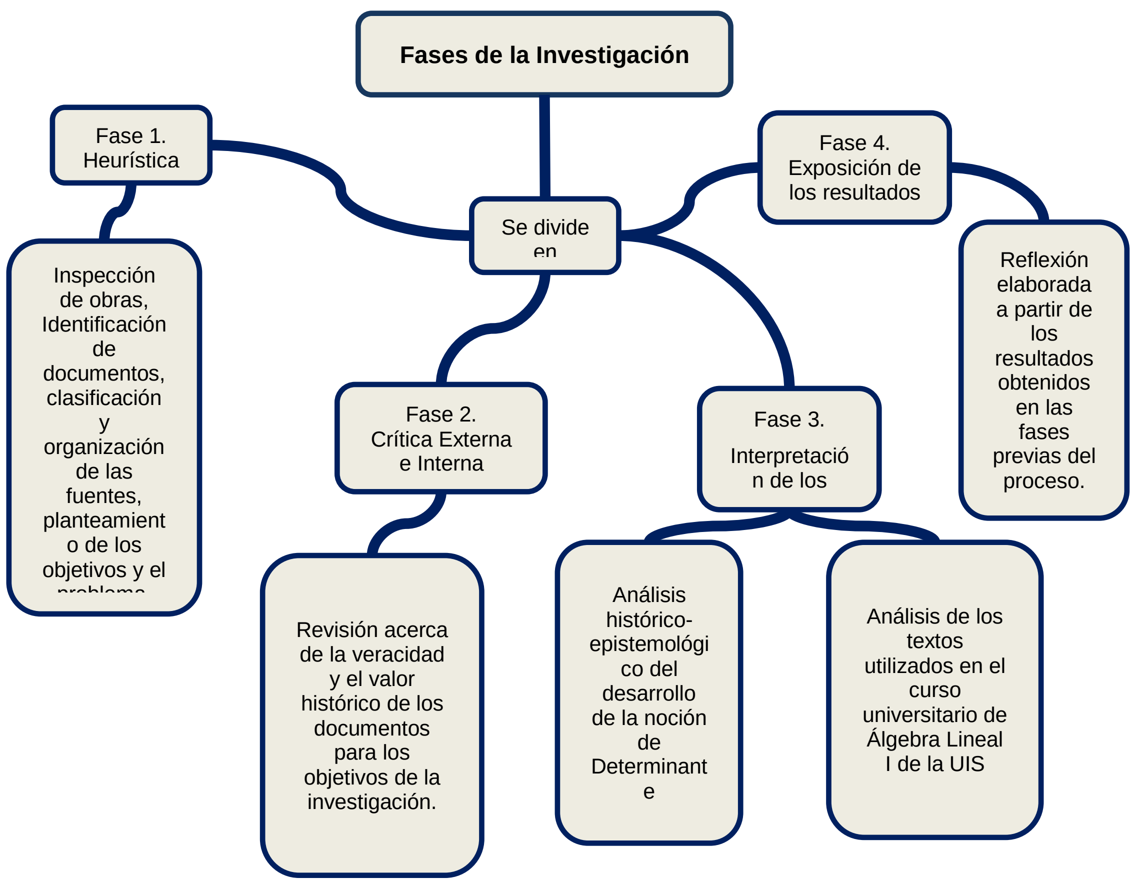
Según la clasificación de Bisquerra (1989) el estudio que se llevó a cabo puede clasificarse en diferentes maneras:

- Según el proceso formal, se utilizó el razonamiento hipotético-deductivo.
- Según el grado de abstracción, se trató de una investigación básica.
- Según la naturaleza de los datos, es una investigación cualitativa, dado que todos los datos son filtrados por los criterios del investigador.
- Según la manipulación de las variables, es una investigación descriptiva.
- Según la dimensión cronológica, es una investigación histórica. Describe fenómenos que acontecieron en el pasado.

- Según los objetivos, se describió y explicó la situación sometida a estudio.
- Según las fuentes, se trata de una investigación bibliográfica y metodológica, pues se realizó una búsqueda, recopilación, organización, valoración y crítica sobre un concepto.
- Según la temporalización, se trata de una investigación longitudinal puesto que se abarcan diferentes períodos de la enseñanza de las matemáticas.

Fases de la investigación

Siguiendo lo planteado por Berrio (1976) y Cardoso (2000) esta investigación fue un proceso de varias fases, tal como se observa a continuación en el esquema 1.



Esquema 1. Fases de la Investigación

Heurística

Tras una revisión inicial de la literatura se plantearon los problemas de investigación a resolver, los cuales se pueden encontrar en el apartado correspondiente.

Posteriormente se realizó un estudio bibliográfico basado principalmente en los cinco volúmenes de *The theory of determinants in the historical order of development* escritos por Thomas Muir, en su versión revisada y reimpresa de 1960; y en *Sir Thomas Muir and nineteenth-century books on determinants* de Farebrother et al. (2002). Con base en estas dos fuentes bibliográficas se buscó profundizar en el tema del determinante, así como identificar los documentos históricos escritos que posteriormente sirvieron de fuente primaria para la investigación.

Paralelamente se ubicaron los libros utilizados para la enseñanza del Álgebra Lineal hoy en día en la Universidad Industrial de Santander. Estos se obtuvieron a través de profesores que ejercen en la mencionada cátedra universitaria.

Crítica Externa e Interna

Siguiendo una clasificación planteada por Cardoso (2000) se puede decir que los documentos utilizados en esta investigación corresponden tanto a fuentes primarias como a fuentes secundarias.

Las fuentes primarias utilizadas para la investigación se pueden dividir en dos grupos: documentos históricos escritos y documentos de útiles escolares (Berrios, 1976). En cuanto a los documentos históricos escritos utilizados como fuentes primarias para la investigación se encuentran obras como: *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss o Theorie Générale des Equations Algebriques de Bézout. En la Tabla 1 se pueden observar todas las fuentes primarias que son documentos históricos escritos utilizados en la investigación.

Diversos historiadores, entre ellos los ya mencionados Thomas Muir (1960) y Farebrother (2002) otorgan la prioridad de autoría a quienes se proclaman como sus autores. Por lo que no se duda de su procedencia (crítica externa) ni de su valor para la actual investigación (crítica interna) en tanto todos ellos abordan el tema de los determinantes y forman parte de la historia de su desarrollo. Se tendrá en cuenta la tesis de doctorado de Álvarez (2013) titulada “introducción del álgebra lineal en España y Colombia durante la segunda mitad del siglo XIX y la primera del siglo XX, fundamental ya que sirvió como referencia y como base a esta investigación. También se tendrá en cuenta la Biblioteca Digital (Gallica), perteneciente a la Biblioteca Nacional de Francia la cual ofrece acceso a todos los documentos históricos originales de forma virtual. En cuanto a las obras realizadas por Leibniz se tendrán en cuenta la recopilación de los manuscritos realizada por Knobloch (1980) debido a que estas no fueron publicadas en su tiempo

Autor	**Titulo Original**	**Año de publicación**
Gottfried Leibniz (Knobloch, 1980)	*Der Beginn der determinanten theorie.*	1693
Gabriel Cramer	*Introduction á l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques.*	1750
Étienne Bézout	*Recherches sur le degré des équations résultantes de I'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d' employer pour trouver ces équations*	1764
Alexandre-Théophile Vandermonde	*Mémoire sur I'elimination*	1772
Joseph Louis de Lagrange	*Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice*	1773
Joseph Louis de Lagrange	*Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires*	1773

Étienne Bézout	*Théorie Générale des Equations Algébriques*	1779
Carl Friedrich Gauss	*Disquisitiones Arithmeticae*	1801
Augustin-Louis Cauchy	*Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtener que deux valeurs égaleset de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment.*	1812-1815

Tabla 1. Fuentes primarias del trabajo de investigación.

En cuanto a los libros de texto utilizados en la enseñanza del Álgebra Lineal I en la Universidad Industrial de Santander. Estos pueden considerarse fuentes primarias (Cardoso, 2000) y documentos de útiles escolares (Berrios, 1976).

Los libros fueron dados al autor de este estudio por profesores que ejercen en la mencionada cátedra universitaria, por lo que no se duda de su procedencia o su valor como documento histórico educativo. En la Tabla 2 se puede apreciar cuales fueron estos documentos.

Autor	**Titulo**	**Año publicación**
Howard Anton	Introducción al Álgebra Lineal, tercera edición	1976
Stanley Grossman	Álgebra Lineal, quinta edición.	1996
David Poole	Álgebra Lineal Una introducción moderna, tercera edición	2011
Rafael Isaacs, Sonia Sabogal	Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico	2009

Tabla 2. Fuentes primarias de los libros de álgebra lineal analizados.

Finalmente, se encuentra el uso de fuentes secundarias o indirectas, que son las fuentes de información que no fueron escritas o utilizadas por los actores del fenómeno histórico que se está investigando. Las fuentes de este tipo utilizadas en este estudio fueron, en general, libros de historia, compilaciones y enciclopedias bien sea en versiones físicas o virtuales. No se duda en ningún momento de su autoría o ubicación en el tiempo, información que por ley es reseñada en todos los tipos de publicación.

En cuanto al valor de estas fuentes, y debido a su condición de fuentes indirectas, no se puede tener una certeza total de la veracidad de sus afirmaciones. Sin embargo, y siguiendo las sugerencias de Cardoso (2000), la comparación y búsqueda de incongruencias entre diferentes fuentes que tratan el mismo tema puede brindar información con respecto a la veracidad de las mismas. En este sentido, los documentos históricos indirectos utilizados en esta investigación si bien se complementan entre sí, no poseen incongruencias ni entre ellos.

Interpretación de los datos

Esta fase se llevó a cabo en varios pasos. El primero de estos pasos está enmarcado en lo que Gómez (2003) denomina un enfoque de obstáculos epistemológicos dentro de la investigación histórica epistemológica. Esto implicó la realización de un riguroso análisis histórico-epistemológico del concepto del determinante. En el que se buscó encontrar la génesis del concepto logrando esbozar una imagen del proceso histórico, de su desarrollo donde se plasman los obstáculos epistemológicos a los que tuvieron que enfrentarse sus creadores.

La segunda parte de esta fase está enmarcada en lo que Gómez (2003) llama un análisis de los libros de texto que se realizó durante la investigación histórico-epistemológica. Con esto se buscó obtener una imagen de la situación histórica y la actual de la enseñanza del concepto de determinante, basándose en el enfoque que establecen los libros de texto utilizados en la UIS, los cuales fungen como documentos históricos educativos y son reflejo de las prácticas pedagógicas utilizadas actualmente (Berrio, 1976; Gómez, 2003).

Siguiendo a Cardoso (2000), ambos análisis se llevaron cabo de manera interpretativa (hermenéutica), es decir, se intentó reconstruir los hechos históricos entendiéndolos tal como los entendieron los actores, pero aprovechando la perspectiva que nos da estar en el presente para generar nuevos conocimientos.

Exposición de los resultados

Finalmente, se exponen de manera ordenada los resultados obtenidos en la fase 3 de la investigación. El producto de estos es una reflexión hecha dentro del marco de la Educación Matemática de las características del contexto en los que surge el concepto del determinante, su desarrollo, su actividad histórica y sus consecuencias didácticas en la actualidad.

ANÁLISIS HISTÓRICO - EPISTEMOLÓGICO.

Gottfried Wilhelm Leibniz

A Leibniz se le atribuye la primera referencia al método de los determinantes en el mundo occidental debido a sus resultados sobre sistemas lineales y eliminación, concibió el concepto de determinante antes de que fuera redescubierto por otros en el siglo XVIII y XIX

En la cuarta carta de la correspondencia entre Leibniz y L'Hôpital que data de 1693[9], Leibniz hace mención que en sus investigaciones algebraicas, él ocasionalmente usa números en lugar de letras. Tratando los números como si fueran letras, L'Hôpital cuestiona el método de Leibniz, mencionando en una carta posterior que no le es claro para él cómo los números

[9] Esto hace parte de una recopilación de la correspondencia entre Leibniz y L'Hôpital. Leibniz era considerado un escritor de cartas universal con más de 600 corresponsales, sus escritos iban desde aportaciones al cálculo diferencial, física, paradojas, números negativos, entre otros.

puedan convenientemente presentar resultados generales como las letras; es allí cuando Leibniz explica en una carta con fecha de 28 de abril de 1693.

Se presenta el problema de eliminar x e y de las ecuaciones:

$$a + bx + cy = 0$$
$$d + ex + fy = 0$$
$$g + hx + ky = 0$$

Leibniz dice que prefiere escribir 10 para a, 11 para b, 12 para c, y así sucesivamente:

$$10 + 11x + 12y = 0$$
$$20 + 21x + 22y = 0$$
$$30 + 31x + 32y = 0$$

Para Leibniz los números no indica cantidades, sino indican posición, tanto de la ecuación como la posición del término independiente. En la visión moderna lo escrito por Leibniz sería representado así:

$$a_{10} + a_{11}x + a_{12}y = 0$$
$$a_{20} + a_{21}x + a_{22}y = 0$$
$$a_{30} + a_{31}x + a_{32}y = 0$$

teniendo las ecuaciones escritas de esa forma Leibniz puede dar rápidamente el siguiente paso, el cual es formar todos los posibles productos cuyos factores son coeficientes de cada ecuación:

$$10 \cdot 21 \cdot 32\,, \qquad 10 \cdot 22 \cdot 31\,, \qquad 11 \cdot 20 \cdot 32$$
$$11 \cdot 22 \cdot 30\,, \qquad 12 \cdot 20 \cdot 31\,, \qquad 12 \cdot 21 \cdot 30$$

así, se tiene:

$$\begin{aligned} 10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 \\ = 10 \cdot 22 \cdot 31 + 11 \cdot 20 \cdot 32 + 12 \cdot 21 \cdot 30 \end{aligned}$$

haciendo los términos que tienen un único factor común diferente de signo, lo que es equivalente a escribir en términos de la notación moderna la solución de un determinante de orden 3.

Hasta aquí Leibniz hace referencia solo a la notación (coeficientes ij), el uso de números en lugar de letras por parte de Leibniz se dio a conocer al mundo en el *Acta Eruditorum* [10] en el año 1700, pero la aplicación particular de esta nueva "simbología" puesta en conexión con los determinantes no se había revelado aun. Es en un volumen publicado en 1693 donde aparece una construcción más detallada sobre el "resultante" (determinante) junto con la combinación de los signos (como se realiza comúnmente en la resolución del determinante).

Esta combinacion de signos generaría que Leibniz formara con el tiempo una regla de formación de los signos.

La regla de los signos:

La primera versión de la regla de signos, Leibniz escribe:

$$_{12}.2 +_{13}.3 +_{14}.4 - 119 = 0 \ \ proba : 24 + 39 + 56 \quad \text{a}equ.119$$

$$_{22}.2 +_{23}.3 +_{24}.4 - 119 = 0 \ \ proba : 44 + 69 + 96 \quad \text{a}equ.209$$

$$_{32}.2 +_{33}.3 +_{34}.4 - 119 = 0 \ \ proba : 64 + 99 + 136 \quad \text{a}equ.299$$

las constantes 119, 209, 299 a los que Leibniz se refiere son los valores numéricos de las cantidades anteriores, por lo tanto, las sumas permiten el funcionamiento continuo de sus cálculos. Leibniz escribe el valor de la incógnita 4 de la siguiente forma:

[10] Aunque Gerhardt, el editor, afirma que el manuscrito original del Leibniz no lleva fecha, y es muy probable que la fecha no sea más antigua de 1693.

$$4\ \mathrm{a}equ \qquad \frac{-_{12.23}299 + {}_{12.33}299 - {}_{22.33}299 \\ - {}_{13.22}\cdots + {}_{13.32}\cdots - {}_{23.32}\cdots}{-_{12.23}34 + {}_{12.33}24 - {}_{22.33}14 \\ - {}_{13.22}\cdots + {}_{13.32}\cdots - {}_{23.32}\cdots}$$

En términos modernos Leibniz desarrolló el numerador y el denominador para determinar la solución, tal como se presenta en una solución por Cramer. La solución es correcta y Cramer intenta generalizar la regla, pero no logra establecer una la ley de los signos, debido a que es correcta en el orden 2 y 3, pero al aumentar las ecuaciones ya pierde significado la alternación simple que Leibniz realizaba.

Luego surge una segunda versión de la ley de signos por parte de Leibniz pero esta vez, explica la regla utilizando coeficientes comunes. Knobloch (1980) menciona: "Les membres qui n'ont qu'un seul coefficient commun ou un nombre impair de tels coefficients ont des signes opposés. Ceux qui ont deux ou un nombre pair de coefficients communs ont le même signe"[11] (p.26).

Al parecer, la norma solo es válida en el caso de productos a base de tres factores. El cual un término siendo positivo o negativo, cambian de signo si el coeficiente es par y mantienen el signo si los coeficientes son impares[12]. Al igual que la primera versión esta regla solo puede aplicarse para el caso de dos o tres coeficientes diferentes, Knobloch (1980) da un ejemplo de esto al considerar tres (3) ecuaciones lineales con dos incógnitas X y Y, el cual vimos anteriormente:

$$+10.21.32 \ - \ 10.22.31 - 11.20.32 + 11.22.30 + 12.20.31 - 12.21.30 = 0$$

[11] Traducido significa "Los miembros que tienen sólo un factor común o un número impar de dichos coeficientes tienen signos opuestos. Los que tienen dos o un número par de coeficientes comunes tienen el mismo signo".

[12] Leibniz se refiere al término par o impar como el número de transposiciones (ciclos con solo dos elementos) posibles de los coeficientes no repetidos.

los términos $10.21.32$ y $-10.22.31$ tienen dos coeficientes diferentes 21.32 y 22.31. Por lo tanto, tienen signos opuestos, de hecho, el orden de los coeficientes derechos 1 y 2 se diferencian por tener una sola transposición. Los términos $10.21.32$ y $11.22.30$ tienen tres coeficientes diferentes, es decir no poseen ningún factor común, por lo tanto, los términos tienen el mismo signo. De hecho, el orden de los coeficientes derechos se diferencia por tener dos transposiciones: de $0.1.2$ a $2.1.0$ y $1.2.0$. La inducción engañosa es la más audaz debido que no hay dos factores comunes en el caso de producto de tres factores, si aumentamos los factores podemos establecer un contraejemplo con cuatro ecuaciones:

Si se considera los términos: $10.21.32.43$ y $12.23.30.41$ de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas x, y, z:

$$10 + 11x + 12y + 13z = 0$$
$$20 + 21x + 22y + 23z = 0$$
$$30 + 31x + 32y + 33z = 0$$
$$40 + 41x + 42y + 43z = 0$$

no hay coeficientes en común de los términos considerados, los coeficientes derechos se diferencian por tener dos transposiciones: $0.1.2.3$ a $2.1.0.3$ y finalmente $2.3.0.1$, al tener dos transposiciones según la regla, estos dos términos serían de signo contrario lo cual muestra un contraejemplo a dicha regla.

Leibniz continúa con su investigación planteando varias reglas con diversas transposiciones para los signos, incluso experimentó con diferentes notaciones para los coeficientes, "Sus manuscritos no publicados contienen más de 50 formas diferentes de escribir sistemas de coeficientes que trabajó durante un periodo de 50 años a partir de 1678" (Knobloch, 1980, p.27). Pero Leibniz no aplica de manera general todo su desarrollo acerca de determinantes[13].

[13] Leibniz utilizaba el término "resultante" en relación a la solución de un sistema de ecuaciones, en la actualidad determinante.

Podemos ver un ejemplo en el cual Leibniz utiliza diferentes notaciones para el uso de determinantes. Se considera la siguiente ecuación:

$$\begin{matrix} +10.21 & \mathrm{a}equ.N & + \ {}_{1}0.\ {}_{2}1 & \mathrm{a}equ.N \\ -11.20 & & - \ {}_{1}1.\ {}_{2}0 & \end{matrix}$$

los índices izquierdos están escritos más pequeños que los derechos porque no son significativos, pero esto no quiere decir que sean menos importantes que los índices derechos.

Leibniz continúa:

$$\begin{matrix} +0.1 & \\ & aequ.N \\ -0.1 & \end{matrix}$$

Y establece que los índices de la izquierda se dejan de lado, luego añade:

$$Ou \quad \overline{0.1} \quad \mathrm{a}equ.N \qquad \text{Es decir} \quad \begin{vmatrix} 10 & 11 \\ 20 & 21 \end{vmatrix} = \overline{0.1}$$

Miramos que un determinante está representado por los elementos de la diagonal principal. En general corresponde al mismo sistema de coeficientes del determinante representado:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Leibniz hace mención a que se puede generar todas las combinaciones de un resultante (determinante) utilizando permutaciones sucesivas de un solo término, por ejemplo, en el caso de $\overline{0.1.2.3}$, la manera en que se realiza las combinaciones del determinante equivaldrían a la definición moderna:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in Sn} sign\ (\sigma).\, a_{1\sigma(1)} \quad \dots a_{n\sigma(n)}\,, \qquad A \in M(n \times n, k).$$

de tal manera que cada permutación del grupo simétrico Sn se lleve a cabo. Leibniz considera las siguientes expresiones:

$$\overline{2.1.3} = -\overline{1.2.3} \qquad \overline{3.1.2} = \overline{1.2.3}$$

Las expresiones tienen signos opuestos si se distinguen por un número impar de transposiciones, ellos tienen el mismo signo si difieren en un número par de transposiciones. Knobloch hace un paralelo en lo que ha términos modernos dicha afirmación, equivaldría a que intercambiáramos dos filas o dos columnas, el determinante solo cambiará de signo. Si elegimos cualquier $k1, k2, \dots, kn$ en lugar del orden original el valor del determinante $k1\ k2\ \dots\ kn$ se multiplica por el signo de esta permutación, es decir por $(-1)^t$donde t es el número de transposiciones.

Otro teorema interesante es mencionado por Leibniz:

la ecuación $\overline{0.1.2.3} = 0$ puede escribirse de cuatro maneras:

$$\overline{0.1.2}\,{}^{4}3 - \overline{0.1.3}\,{}^{4}2 + \overline{0.2.3}\,{}^{4}1 - \overline{1.2.3}\,{}^{4}0 = 0$$

$$\overline{0.1.2}\,{}^{3}3 - \overline{0.1.3}\,{}^{3}2 + \overline{0.2.3}\,{}^{3}1 - \overline{1.2.3}\,{}^{3}0 = 0$$

$$\overline{0.1.2}\,{}^{2}3 - \overline{0.1.3}\,{}^{2}2 + \overline{0.2.3}\,{}^{2}1 - \overline{1.2.3}\,{}^{2}0 = 0$$

$$\overline{0.1.2}\,{}^{1}3 - \overline{0.1.3}\,{}^{1}2 + \overline{0.2.3}\,{}^{1}1 - \overline{1.2.3}\,{}^{1}0 = 0$$

de hecho, si se calcula los valores de la expresión $\overline{0.1.2}$ de las diferentes ecuaciones, debemos completar los factores agregando los índices izquierdos en su orden natural. Los determinantes son multiplicados por tres índices, a partir de 1,2,3 y 4, los cuales no son iguales a los índices izquierdos del factor. Los signos de los determinantes son periódicos, es decir: más, menos, más, etc.

Por consiguiente, los términos de las ecuaciones 1 y 2, 2 y 3, 3 y 4 tienen signos opuestos; las ecuaciones 1 y 3, 2 y 4 tendrán los mismos signos. Todos los términos y signos de los cuales se trata sus cantidades son iguales a cero porque estos son resultantes. Por lo tanto, las cuatro ecuaciones pueden ser representadas por una sola ecuación: $\overline{0.1.2.3} = 0$

en términos modernos podemos decir que Leibniz hace referencia al desarrollo de un determinante de tamaño 4×4 por adjunta:

$$A = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

sea $d_{ik}(A)$ la adjunta del determinante de grado $n-1$, en el que la $i - esima$ fila y la k-esima columna se eliminan. Leibniz obtiene el resultado:

$$\det(A) = d_{i3}(A)a_{i3} - d_{i2}(A)a_{i2} + d_{i1}(A)a_{i1} - d_{i0}(A)a_{i0}$$

Al verlo con mas detalle Leibniz introduce el determinante por adjuntas, es decir multiplica por los determinantes de orden menor por$(-1)^{i+k-1}$, (Leibniz utiliza 0, por lo tanto, resta 1) siempre desarrolla el determinante en relación a los elementos de la $(4-i)^{iesima}$ fila, si i=1, 2, o 3, el valor del determinante se multiplica por $(-1)^{i}$. La diferencia entre el desarrollo ya visto de Leibniz y el que más adelante desarrolla Laplace en su regla de signos, la cual no juega ningún papel en el caso de los resultantes porque esta debe ser igual a cero, también es de considerar que Leibniz no aplica su desarrollo de manera general, dando una perspectiva de casos particulares.

Leibniz con sus análisis y resultados sobre sistemas lineales y sobre eliminación en sus manuscritos dejó las bases o la concepción de una teoría de determinantes, es posible que la no publicación de dichos trabajos haya atrasado más de un siglo el desarrollo del álgebra lineal, debido a que muchos de sus resultados fueron redescubiertos por otros autores en los siglos XVIII y XIX.

Más de medio siglo después se reinicia el desarrollo de los determinantes, donde ya es visto como un objeto matemático, la no difusión de los trabajos de Leibniz hace que todas las investigaciones generales sobre la eliminación de las incógnitas en las ecuaciones algebraicas inicien desde cero.

Gabriel Cramer

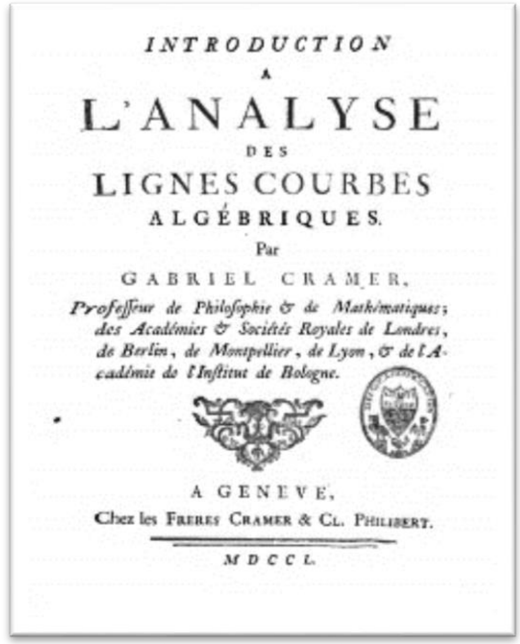


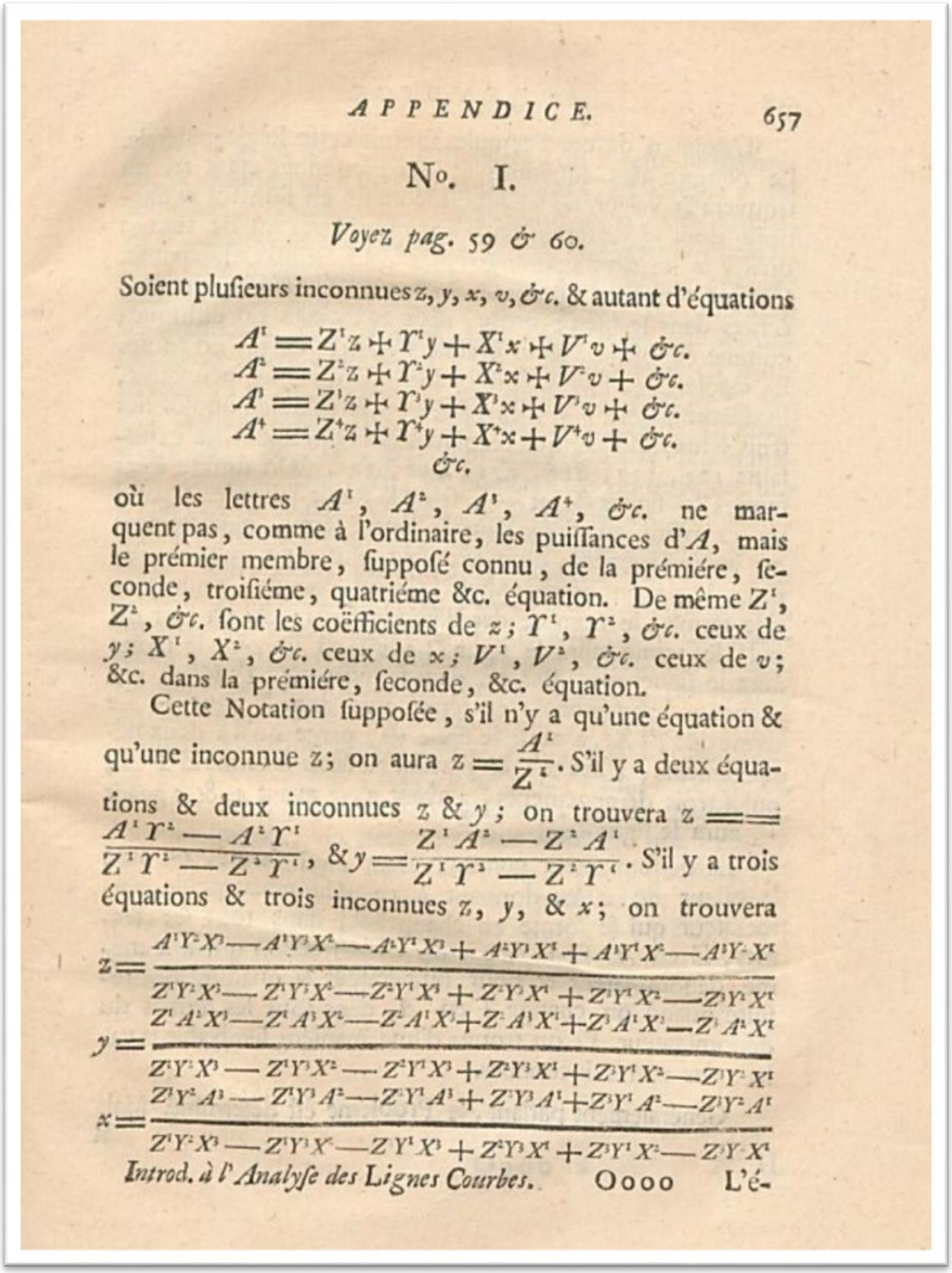
Ilustración 1. Portada de la obra Introduction a l'Analyse des Lignes Courbes algébriques.

El lugar reservado para Gabriel Cramer en la historia actual, aunque no es despreciable, se reduce al mínimo. Es citado regularmente en dos ocasiones: por un lado, la regla de Cramer para sistemas de ecuaciones lineales y por el otro, la paradoja de Cramer en relación con el número de puntos de intersección de dos curvas algebraicas. La famosa regla de Cramer permite la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, esta regla permitió que el nombre de Cramer sea reconocido por cualquier estudiante que vea un curso de álgebra lineal.

Cramer también demostró un teorema (que se conoce como teorema de Bézout) que indica el número de puntos de la intersección de dos curvas algebraicas de orden M y N respectivamente, y sin componente común es a lo sumo mn, es decir al producto de sus grados.

Su obra *Introduction a l'Analyse des Lignes Courbes algébriques (ver ilustración 1)* en la cual realiza varios aportes a los determinantes, es un libro de casi setecientas paginas profusamente ilustradas y llenas de ejemplos, es reconocido como una gran referencia sobre el tema de las curvas algebraicas. El tratado de Cramer aparece en un momento en el que el cálculo ya se encuentra muy extendido y cuya eficacia en el estudio de curvas se conoce. La introducción discute curvas algebraicas y sus propiedades como: diámetros, tangentes, puntos singulares, etc.

Coincidimos con Alvarez (2013) con lo analizado, al ver que es curioso decir que los aportes que desarrolla Cramer se encuentran al concluir el tratado anteriormente mencionado, es decir en los apéndices, agrupados bajo el título de; *De l'évanouissement des inconnues* (Cramer 1750, p. 657-659)



No. I.

Voyez pag. 59 *&* 60.

Soient pluſieurs inconnues z, y, x, v, *&c.* & autant d'équations

$$A^1 = Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \&c.$$
$$A^2 = Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \&c.$$
$$A^3 = Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \&c.$$
$$A^4 = Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \&c.$$
$$\&c.$$

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4, *&c.* ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puiſſances d'A, mais le prémier membre, ſuppoſé connu, de la prémiére, ſeconde, troiſiéme, quatriéme &c. équation. De même Z^1, Z^2, *&c.* ſont les coëfficients de z; Y^1, Y^2, *&c.* ceux de y; X^1, X^2, *&c.* ceux de x; V^1, V^2, *&c.* ceux de v; &c. dans la prémiére, ſeconde, &c. équation.

Cette Notation ſuppoſée, s'il n'y a qu'une équation & qu'une inconnue z; on aura $z = \frac{A^1}{Z^1}$. S'il y a deux équations & deux inconnues z & y; on trouvera $z = \frac{A^1 Y^2 - A^2 Y^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}$, & $y = \frac{Z^1 A^2 - Z^2 A^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}$. S'il y a trois équations & trois inconnues z, y, & x; on trouvera

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

 L'é-

Ilustración 2 Apéndice de la obra: Introduction a l'Analyse des Lignes Courbes algébriques.

Esta ilustración muestra un poco de la regla de Cramer en el apéndice, traduciendo un poco se ve la explicación de la regla hasta el tercer grado. Cramer (1750) afirma;

> Si solo hay una ecuación y una incógnita z; se tendrá $x = \frac{A^1}{Z^1}$, si hay dos ecuaciones & dos incógnitas z & y; se tendrá que $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$, & $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$, si hay tres ecuaciones & tres incógnitas $z, y,$ & x; se tendrá:
>
> $$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 + A^2Y^1X^3 - A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 + Z^2Y^1X^3 - Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$
>
> $$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 + Z^2A^1X^3 - Z^1A^3X^2 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 + Z^2Y^1X^3 - Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$
>
> $$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 + Z^2Y^1A^3 - Z^1Y^3A^2 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 + Z^2Y^1X^3 - Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$
>
> (pg.657).

Lo anterior detalla la manera inductiva de mostrar la regla, el problema viene siendo el poder determinar los signos. Para lo cual Cramer escribe:

> Sea n el número de las ecuaciones & de las incógnitas, se encontrará el valor de cada incógnita formando n fracciones cuyo denominador común tiene tantos términos como colocaciones diversas hay de n diferentes. Cada término está compuesto por las letras $ZYXV$ etc. Siempre escritas en el mismo orden, pero a las cuales se le aplican como exponentes, las n primeras cifras colocadas de todas las maneras posibles. Así si se tiene tres incógnitas el denominador tendría $[1 \times 2 \times 3 =] \, 6$ términos, compuestos de a tres letras ZYX, los cuales llevará sucesivamente los exponentes $123, 132, 213, 231, 312, 321$. Se da a estos términos los signos $+ \; o \; -$, según la regla siguiente. Cuando un exponente esta seguido del mismo término, inmediatamente, por un exponente menor que el, llamare a esto, un *dérangement.* Se cuenta, para cada término, el número de dérangements: si es par o nulo, el término tendrá el signo $+$; si es impar, el término tendrá signo -. (Cramer, 1750, p.658)

Por ejemplo, en el término $Z^1Y^2X^3$ no hay dérangement; este término llevará el signo $+$. El término $Z^3Y^1X^2$, tiene tres dérangements, 3 antes de $2,$ 3 antes de 1 y 2 antes de 1, este término tendrá el $-$.

> Así formado el denominador común, se tendrá el valor de z dando a este denominador el numerador que se forma cambiando, en todos sus términos, Z por A. (Cramer, 1750, p.658)

De acuerdo con Muir (1960) hay tres aportes esenciales que Cramer realiza al desarrollo del concepto de determinante:

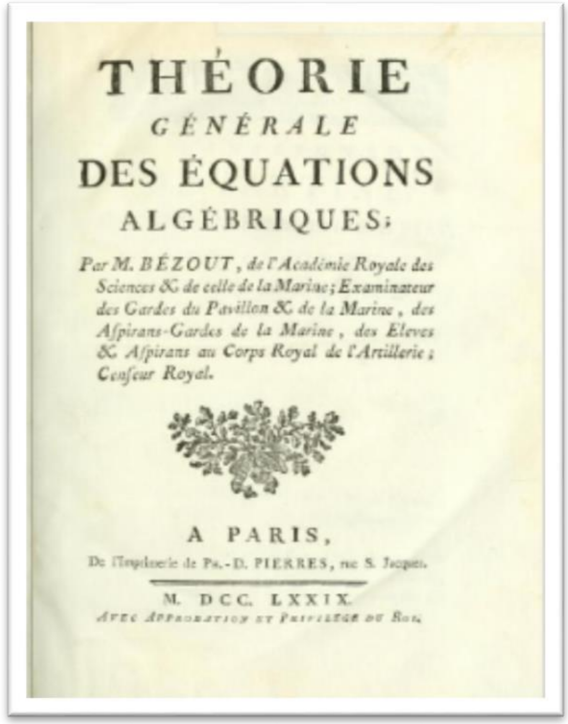
1. Una regla para unir los términos del denominador común de las fracciones que expresan los valores de las incógnitas en un conjunto de ecuaciones lineales.
2. Una regla para determinar el signo de cualquier término individual en dicho denominador (incluida la noción de dérangement).
3. Una regla para obtener los numeradores de la expresión para el denominador común.

Básicamente es la explicación específica de lo que es hoy en día la regla de Cramer, aunque el aporte de Leibniz es esencialmente igual, es decir la eliminación de n cantidades de un conjunto de $n + 1$ ecuaciones lineales. La solución que obtuvo Cramer, y que, como se ha dicho era la solución más adecuada para su propósito, pero en profundidad tiene un carácter muy distinto al desarrollado por Leibniz.

Leibniz dio una regla para escribir el resultado final de la eliminación; lo que da Cramer es una regla para escribir los valores de n incógnitas a partir de $n + 1$ ecuaciones, luego de una regla de “permutaciones” se procede a sustituir los valores y a generar el denominador común y los numeradores.

Étienne Bézout

Bézout en el año de 1779 incorporó investigaciones pasadas para generar un gran escrito titulado *Théorie Générale des Equations Algébriques*, esta obra extensa de aproximadamente 450 páginas, trata sobre las ecuaciones algebraicas. Tambien Bézout aborda el tema de la eliminación ya trabajado en sus memorias anteriores, así que se podría esperar una simple reproducción del contenido de esas memorias, aunque no es así, solo da las referencias necesarias a la obra de Cramer, Vandermonde, Laplace y sus propias obras.



THÉORIE
GÉNÉRALE
DES ÉQUATIONS
ALGÉBRIQUES;

Par M. BÉZOUT, de l'Académie Royale des Sciences & de celle de la Marine; Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Aspirans-Gardes de la Marine, des Eleves & Aspirans au Corps Royal de l'Artillerie; Censeur Royal.

A PARIS,
De l'Imprimerie de Ph.-D. PIERRES, rue S. Jacques.
M. DCC. LXXIX.

Ilustración 3. Portada del libro: Théorie Générale des Equations Algébriques.

Alvarez (2013) indica que en la introducción de la obra de Bézout titulada *Recherches su le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations* del año 1764 aclara que la expresión (determinante) ya la había trabajado Cramer, pero que su regla de signos para confeccionarla es un poco complicada cuando se pasa de un cierto número de incógnitas.

Bézout debido a lo anterior crea lo que él explica, como el procedimiento para escribir dicha expresión, lo llama Lema I:

Lema I

Si tenemos un número n de ecuaciones lineales, cada una de los cuales contienen el mismo número de incógnitas, ningún término conocido, por la regla siguiente se encuentra la relación que deben tener los coeficientes de las incógnitas producidas por todas estas ecuaciones.

Sean:

$a, \; b, \; c, \; d$, los coeficientes de las incognitas en la primera ecuación.

$a', \; b', \; c', \; d'$, los coeficientes de las incógnitas en la segunda ecuación.

$a'', \; b'', \; c'', \; d''$, los de la tercera y así sucesivamente.

Se forman dos permutaciones ab y ba y se escribe $ab - ba$; con estas dos permutaciones y la letra c se forman todas las permutaciones posibles, realizando cambios de signo todas las veces que c cambie de lugar en ab y lo mismo con respecto a ba; luego se tendrá:

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba$$

con estas seis permutaciones y la letra d, se forman todas las permutaciones posibles, realizando cambios de signo cada vez que d cambie de lugar en un mismo término; luego se tendrá:

$abcd - abdc + adbc - dabc - acbd + acdb - adcb + dacb + cabd - cadb + cdab - dcab - bacd + badc - bdac + dbac + bcad - bcda + bdca - dbca - cbad + cabd - cdba + dcba$

Y así sucesivamente hasta que se hayan agotado todos los coeficientes de la primera ecuación.

Mientras se mantienen las letras que ocupan el primer lugar; se da a las que ocupan el segundo, la misma marca que tienen en la segunda ecuación; a los que ocupan la tercera, de la misma marca que tienen en la tercera ecuación, y así sucesivamente; finalmente se iguala todo a cero y se tendrá la ecuación que se estaba buscando.

Así que si se tienen dos ecuaciones y dos incógnitas cómo

$$ax + by = 0$$
$$a'x + b'y = 0$$

la ecuación de condición será $ab' - ba' = 0 \quad o \quad ab' - a'b = 0$ ...

... pero siempre y cuando estas ecuaciones deban ser utilizadas para las fórmulas de eliminación en las ecuaciones de diferentes grados, luego debe darle forma tal que las sustituciones sean las menos posibles que se puedan; para este fin, se usan de esta forma:

$$ab' - ba' = 0$$

$$(ab' - a'b)c'' + (a''b - ab'')c' + (a'b'' - a''b')c = 0$$

$$\begin{aligned}
&[(ab' - a'b)c'' + (a''b - ab'')c' + (a'b'' - a''b')c]d''' \\
&+[(ab - ab')c'' + (ab''' - a'''b)d + (a'''b' - a'b''')c]d'' \\
&+[(a'''b - ab''')c'' + (ab'' - a''b)c''' + (a''b''' - a'''b'')c]d' \\
&+[(a'b''' - a'''b')d' + (a'''b'' - a''b''')d + (a''b' - a'b'')c'']d = 0
\end{aligned}$$

(Bézout, 1779, p.170).

Esta nueva forma que enuncia Bézout tiene dos ventajas: en primer lugar; para hacer sustituciones futuras se vuelve más convenientes, en segundo lugar, es la de ofrecer una regla aún más simple para la formación de estas fórmulas.

Se puede observar en el trabajo de Bézout mas ejemplos que muestran las propiedades, entre ellas se encuentran:

1. Uno en el que los coeficientes del conjunto de ecuaciones se dan en figuras
2. Una en la que algunos coeficientes son cero
3. Una que muestra la simplificación posible cuando se desea el valor de un solo desconocido.
4. Una que muestra la significación de la desaparición de una de las “líneas”
5. Una que muestra la significación de la ausencia de una de las incógnitas de la última “lineal”
6. Una o dos ejemplos relacionados con el problema de eliminación ya visto.

El punto notable, en lo que se refiere a la parte anterior, es que Bézout lanza su regla de formación y su regla de los signos en una. En la notación moderna equivaldría a:

$$a_r x + b_r y + c_r z = 0 \qquad (r = 1,2,3 \ldots)$$

Bézout en ninguna parte da una demostración de su regla, sólo manifiesta su efectividad y deja al lector toda la carga de aquella arbitrariedad.

Ya en un grado mayor el proceso se podría comparar con el ya realizado, este proceso puede considerarse como una mejora en relación a los determinantes ordinarios que se presentan hoy en día. Si observamos con mas detalle podemos encontrar mas cosas interesantes en los trabajos de Bézout:

Se tiene las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} ax \; + by \; + cz \; + d \; &= 0 \\ a'x \; + b'y \; + c'z \; + d' \; &= 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' \; &= 0 \end{aligned}$$

sabemos que los numeradores de los valores de x, y, z y el denominador común son:

$$-\begin{vmatrix} b & c & d \\ b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} a & c & d \\ a' & c' & d' \\ a'' & c'' & d'' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b & d' \\ a'' & b & d'' \end{vmatrix}, +\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

por lo tanto, los coeficientes $de\ x, y, z, t$ están en el determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ x & y & z & t \end{vmatrix}, \qquad \text{o} \quad \Delta.$$

Así el problema de resolver el conjunto de ecuaciones se transforma en encontrar un desarrollo al determinante. Al hacerlo se torna engorroso continuar con la notación de Bézout, Thomas Muir (p. 45) realiza un paralelo entre el desarrollo de Bézout para el Δ y lo muestra utilizando otra notación, lo cual facilita el análisis de lo desarrollado por Bézout para hacerlo mas facil de entender:

Usemos $[xyz]$ para representar el determinante de las incognitas $x,\ y,\ z,$ la cual z es la ultima fila, y cuyas otras filas son las dos inmediatamente arriba de $x, y\ , z$ en Δ: de igual modo $[zt]$ representa el determinante de la cual t es la ultima fila, y su otra fila la fila c'', d'' esta inmediatamente por encima de z, t en Δ ; y asi sucesivamente en todos los casos posibles, incluso $[xyzt]$ que por supuesto es el mismo Δ .

entonces tenemos

$$[xyzt] = a[yzt] - b[xzt] + c[xyt] - d[xyz] \quad (1)$$

desarrollando de la misma manera los cuatro determinantes aquí en el lado derecho, tenemos como el siguiente paso

$$\begin{aligned}[xyzt] = \ & a(b'[zt] - c'[yt] + d'[yz]) \\ & -b(a'[zt] - c'[xt] + d'[xz]) \\ & +c(a'[yt] - b'[xt] + d'[xy]) \\ & -d(a'[yz] - b'[xz] + c'[xy]),\end{aligned}$$

$$= (ab' - a'b)[zt] - (ac' - a'c)[yt] + (ad' - a'd)[yz] + (bc' - b'c)[xt] - (bd' - b'd)[xz] + (cd' - c'd)[xy].$$

desarrollando los seis determinantes $[zt], [yt], \ldots$ de la misma manera, y reorganizando los términos finalmente

$$\begin{aligned}[xyzt] = \ & \{(ab' - a'b)c'' - (ac' - a'c)b'' + (bc' - b'c)a''\}t \\ & -\{(ab' - a'b)d'' - (ad' - a'd)b'' + (bd' - b'd)a''\}z \\ & +\{(ac' - a'c)d'' - (ad' - a'd)c'' + (cd' - c'd)a''\}y \\ & -\{(bc - b'c)d'' - (bd' - b'd)c'' + (cd' - c'd)b''\}x.\end{aligned}$$

Pero los coeficientes de x, y, z, t en $[xyzt]$ son vistos al comenzar a ser los numeradores y el denominador común de los valores de x, y, z en el conjunto dado de ecuaciones: por lo tanto

$$x = \frac{-\{(bc' - b'c)d'' - (bd' - b'd)c'' + (cd' - c'd)b''\}}{\{(ab' - a'b)c'' - (ac' - a'c)b'' + (bc' - b'c)a''\}}$$

$$y = \cdots$$

$$z = \cdots$$

(Bézout, 1779, p.169).

Es oportuno observar que los sucesivos desarrollos obtenidos aquí, del determinante $[xyzt]$ son letra por letra idénticos a lo obtenido por Bézout a partir del producto $xyzt$; sino que en lugar de tener una arbitrariedad entre los pasos de uno a otro como la regla de Bézout, aquí hay más fluidez que caracteriza al conjunto de procedimientos

Bézout comparte un ejemplo (p. 178) en el cual no realiza procedimiento, solo muestra resultados:

Según Bézout se tiene las siguientes ecuaciones:

$$2x + 4y + 5z - 22 = 0$$
$$3x + 5y + 2z - 30 = 0$$
$$5x + 6y + 4z - 43 = 0$$

tendríamos por lo anterior que la primera línea seria:

$$2yzt - 4xzt + 5xyt + 22xyz.$$

la segunda línea:

$$-2zt + 11yt + 6yz - 17xt + 10xz - 106xy.$$

y la tercera línea:

$$-27t - 81y - 135x.$$

consiguiendo el denominador t el cual es -27 se tendría:

$$x = \frac{-135}{-27}, \qquad y = \frac{-81}{-27}, \qquad z = \frac{0}{-27}$$

es decir $x = 5,\ y = 3,\ z = 0.$

Si se hiciera uso del proceso realizado por Bézout hoy en día, seria ventajoso, porque simplificaría en mayor medida un determinante, por ejemplo, se tienen las ecuaciones:

$$2x + 4y + 5z = 22$$

$$3x + 5y + 2z = 30$$

$$5x + 6y + 4z = 43$$

se procede de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & -22 \\ 3 & 5 & 2 & -30 \\ 5 & 6 & 4 & -43 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 11 & -6 \\ 1 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & -3 & 9 \\ x & y & z & t \end{vmatrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = 27 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ x & y & z & t \end{vmatrix}$$

$$= 27\{-t + 0z - 3y - 5x]; \quad donde \;\; x = 5,\; y = 3,\; z = 0.$$

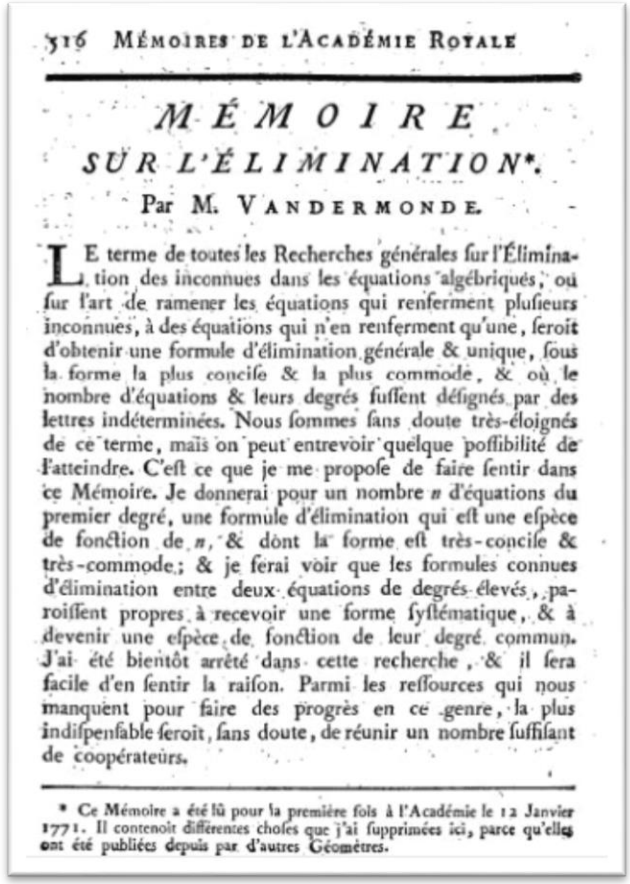
Para concluir podemos enumerar las contribuciones que Bézout realiza al desarrollo de la teoria de determinantes:

1. Un proceso por el cual se pueden encontrar los numeradores y denominadores de fracciones que expresan los valores de incógnitas en un conjunto de ecuaciones lineales, o para encontrar la resultante de la eliminación de *n* cantidades de *n+1* ecuaciones lineales un proceso especialmente útil cuando los coeficientes tienen valores particulares.
2. Al igual que Vandermonde, Bézout realiza una prueba del teorema en el cual se ve el efecto de la igualdad de dos índices pertenecientes al mismo conjunto.
3. Es interesante mencionar que Bézout trabaja sobre productos de determinantes, el cual en su desarrollo particular los llama "*Vanishing aggregates of determinant-products*", al cual establece varias identidades.

Alexandre-Théophile Vandermonde

El artículo de Alexandre-Théophile Vandermonde llamado *Memoire sur l'élimination* del año 1772, contiene dieciocho páginas, con una página de introducción, esta obra se divide en dos partes, la primera parte trata acerca de las ecuaciones de primer grado y la segunda parte trabaja problemas acerca de la eliminación entre dos ecuaciones de grados mayores.

Esta obra es publicada en *L'académie Royale des Sciences* en el mismo volumen que la obra de Laplace, sobre determinantes, esto demuestra que la teoría continuaba en manos matemáticos franceses.



316 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

*MÉMOIRE SUR L'ÉLIMINATION**.

Par M. VANDERMONDE.

LE terme de toutes les Recherches générales ſur l'Élimination des inconnues dans les équations algébriques, ou ſur l'art de ramener les équations qui renferment pluſieurs inconnues, à des équations qui n'en renferment qu'une, ſeroit d'obtenir une formule d'élimination générale & unique, ſous la forme la plus conciſe & la plus commode, & où le nombre d'équations & leurs degrés fuſſent déſignés par des lettres indéterminées. Nous ſommes ſans doute très-éloignés de ce terme, mais on peut entrevoir quelque poſſibilité de l'atteindre. C'eſt ce que je me propoſe de faire ſentir dans ce Mémoire. Je donnerai pour un nombre *n* d'équations du premier degré, une formule d'élimination qui eſt une eſpèce de fonction de *n*, & dont la forme eſt très-conciſe & très-commode; & je ferai voir que les formules connues d'élimination entre deux équations de degrés élevés, paroiſſent propres à recevoir une forme ſyſtématique, & à devenir une eſpèce de fonction de leur degré commun. J'ai été bientôt arrêté dans cette recherche, & il ſera facile d'en ſentir la raiſon. Parmi les reſſources qui nous manquent pour faire des progrès en ce genre, la plus indiſpenſable ſeroit, ſans doute, de réunir un nombre ſuffiſant de coopérateurs.

* Ce Mémoire a été lû pour la première fois à l'Académie le 12 Janvier 1771. Il contenoit différentes choſes que j'ai ſupprimées ici, parce qu'elles ont été publiées depuis par d'autres Géomètres.

Ilustración 4- Introduccion del libro: Memoire Sur l'élimination

La ilustracion numero 4 muestra la introducción del libro *Memoire sur l'élimination*, a continuacion se muestra la traduccion correspondiente, realizada por Álvarez (2013):

> La finalidad de todas las investigaciones generales sobre la eliminación de incógnitas en las ecuaciones algebraicas, o sobre el arte de reducir las ecuaciones que encierran varias incógnitas, a ecuaciones que no encierran más que una, seria obtener una fórmula de eliminación general y única, bajo la forma más concisa y más cómoda, y donde el número de ecuaciones y sus grados fueses designadas por letras indeterminadas. Estamos sin duda muy alejados de este fin, pero se puede entrever alguna posibilidad de alcanzarlo. Es lo que me

propongo poner de manifiesto en esta memoria. Daré para un número *n* de ecuaciones de primer grado, una fórmula de eliminación que es una especie de función de *n*, y cuya fórmula es muy concisa y muy cómoda; y haré ver que las formulas conocidas de eliminación entre dos ecuaciones de grados elevados, parecen listas para recibir una forma sistemática, y a convertirse en una especie de función de grado común. Me he detenido pronto en esta investigación, y será fácil entender la razón entre los recursos que nos faltan para hacer progresos de este género, lo más indispensable será, sin duda, reunir un número suficiente de cooperadores. (Vandermonde 1772, p.516)

El primer paso del desarrollo de la teoría de determinantes fue el establecer una notación que los matemáticos de la época aceptarán y pudierán seguir trabajando sobre ella, la notación utilizada por Vandermonde es similar a la utilizada por Leibniz, en relacion a que se utilizan coeficientes como posicionales. Mientras Vandermonde utiliza los coeficientes de forma vertical, Leibniz lo utiliza de forma horizontal (12 o 1_2), la notación de Vandermonde fue sencilla muy abreviada, pero no fue aceptada en su época por la misma razón.

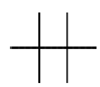


Ilustración 5. Notacion de Vandermonde.

Adentrandonos mas en la notación de Vandermonde, este utiliza el símbolo mostrado en la ilustración 5, para soportar las posiciones en el sistema, trabaja este de forma general, se usan letras en vez de números, en la posición superior del símbolo se utilizan letras del alfabeto griego y en la parte inferior se utiliza el alfabeto normal (latino).

Es necesario precisar que el término que Vandermonde considera a continuación como "abreviaturas" hace referencia a lo siguiente:

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline a & b \end{array} = \begin{matrix} \alpha & \beta \\ a. & b \end{matrix} - \begin{matrix} \alpha & \beta \\ b. & a \end{matrix}$$

Se puede desglosar esta abreviatura mejor para entenderla, contrastándolas con Vandermonde, esta abreviatura correspondería a un sistema de ecuaciones de tamaño 2×2, en la notación moderna:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

una sustitución simple hace ver lo que es semejante entre las abreviaturas y la notación moderna, es decir:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array} = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{array} - \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}$$

lo cual corresponde a los coeficientes de la solución de un determinante de tamaño 2×2.

Ya para las de orden 3 Vandermonde escribe:

$$\begin{array}{c|c|c} \alpha & \beta & \gamma \\ \hline a & b & c \end{array} = \begin{array}{c} \alpha \\ a. \end{array} \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline b & c \end{array} + \begin{array}{c} \alpha \\ b. \end{array} \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline c & a \end{array} + \begin{array}{c} \alpha \\ c. \end{array} \begin{array}{c|c} \beta & \gamma \\ \hline a & b \end{array}$$

Las de orden 4

$$\begin{array}{c|c|c|c} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline a & b & c & d \end{array} = \begin{array}{c} \alpha \\ a. \end{array} \begin{array}{c|c|c} \beta & \gamma & \delta \\ \hline b & c & d \end{array} - \begin{array}{c} \alpha \\ b. \end{array} \begin{array}{c|c|c} \beta & \gamma & \delta \\ \hline c & d & a \end{array} + \begin{array}{c} \alpha \\ c. \end{array} \begin{array}{c|c|c} \beta & \gamma & \delta \\ \hline d & a & b \end{array} - \begin{array}{c} \alpha \\ d. \end{array} \begin{array}{c|c|c} \beta & \gamma & \delta \\ \hline a & b & c \end{array}$$

y así se puede seguir hasta cualquier orden.

Si desglosamos la notación que Vandermonde utiliza para realizar la solución de orden 3, se tendría:

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \left[\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 \end{array} - \begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 3 & 2 \end{array} \right] + \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \left[\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 \end{array} - \begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 \end{array} \right] + \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \left[\begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array} - \begin{array}{c|c} 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \right]$$

ordenando obtendríamos los coeficientes siguientes:

$$\begin{matrix}1&2&3\\1&2&3\end{matrix}+\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\end{matrix}+\begin{matrix}1&2&3\\3&1&2\end{matrix}-\begin{matrix}1&2&3\\1&3&2\end{matrix}-\begin{matrix}1&2&3\\2&1&3\end{matrix}-\begin{matrix}1&2&3\\3&2&1\end{matrix}$$

si miramos detenidamente la solución de un determinante de tamaño 3×3 en la notación moderna correspondería a:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{12}a_{22}a_{31}$$

Percibimos que al contrastar los coeficientes arrojados por la notación de Vandermonde corresponden unívocamente a los generados por la notación moderna, aun así, podemos compararla con la notación utilizada por Leibniz la cual daría de la siguiente forma:

$$1_0 2_1 3_2+1_1 2_2 3_0+1_2 2_0 3_1-1_0 2_2 3_1-1_1 2_0 3_2-1_2 2_1 3_0$$

Leibniz en esta notación en particular empieza desde cero, para lo cual observamos es la misma que las dos anteriores (notación de Vandermonde y notación moderna).

Vandermonde en lugar de transponer las letras a, b, c, d y e , se podría dejar en orden alfabético, y en cambio trasponer las letras $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ etc., los resultados habrían sido perfectamente idénticos; al igual se lleva a cabo las siguientes conclusiones al analizar mas a fondo las abreviaturas:

En primer lugar, está claro que $\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline a&b\end{array}$ representan dos términos diferentes, uno positivo y otro negativo que resultan de todas las permutaciones posibles de *a* y *b*, que

$$\begin{array}{c|c|c}\alpha&\beta&\gamma\\\hline a&b&c\end{array}$$

representa seis términos, tres positivos y tres negativos, que resultan de todas las permutaciones posibles de *a, b* y *c*.

$$\begin{array}{c|c|c|c}\alpha&\beta&\gamma&\delta\\\hline a&b&c&d\end{array}\ \cdots$$

Además, la formación de estas cantidades es tal que el único cambio que puede resultar de una permutación cualquiera, realizado entre las letras del mismo alfabeto, en una de estas abreviaturas, será un cambio en el signo del primer valor. La demostración de esto y la búsqueda de un signo de una permutación definida, en general, dependerán de dos propuestas que pueden ser establecidas otra vez acudiendo al uso de números para indicar el rango de letras.

La primera es que

$$\frac{1\,|\,2\,|\,3\,|\,\cdots\,|\,m\,|\,m+1\,|\,\cdots n}{1\,|\,2\,|\,3\,|\,\cdots\,|\,m\,|\,m+1\,|\,\cdots n}$$

$$=\pm\frac{1\,|\,2\,|\,3\,|\,\cdots\,|\,n-m+1\,|\,n-m+2\,|\,n-m+3\,|\,\cdots\,|\,n}{m\,|\,m+1\,|\,m+2\,|\,\cdots\,|\,n\,|\,1\,|\,2\,|\,\cdots\,|\,m-1}$$

el signo – tiene lugar en el caso en que n y m sean pares.

Siguiendo

$$\frac{1\,|\,2\,|\,3\,|\,\cdots\,|\,m\,|\,m+1\,|\,\cdots n}{1\,|\,2\,|\,3\,|\,\cdots\,|\,m\,|\,m+1\,|\,\cdots n}$$

$$=-\frac{1\,|\,2\,|\,3\,|\,\cdots\,|\,m-1\,|\,m\,|\,m+1\,|\,m+2\,|\,\cdots\,|\,n}{1\,|\,2\,|\,3\,|\,\cdots\,|\,m-1\,|\,m+1\,|\,m\,|\,m+2\,|\,\cdots\,|\,n}$$

notamos que la primera ecuación, solo necesita ser probada para un caso, por ejemplo, cuando $m = n - 1$, es decir, aquella en la que las dos letras transpuestas son las dos últimas.

Vandermonde ocupa más de dos páginas y media en verificar el caso de segundo, tercer y cuarto orden, en lugar de mirar estas demostraciones ya que converge a un cálculo elevado, y difícil, miremos unos ejemplos simples, para ver la esencia de la demostración.

Si cualesquiera dos letras del mismo alfabeto son iguales entre sí; porque en cualquier lugar las dos letras son iguales, se puede transponer los dos últimos lugares de su rango, que solo hará más que cambiar el signo del valor; entonces, su permutación particular, no puede provocar ningún cambio ya que son iguales, ejemplo:

$$\frac{1\,|\,1\,|\,2}{1\,|\,2\,|\,3}=\frac{1}{1.}\,\frac{1\,|\,2}{2\,|\,3}+\frac{1}{2.}\,\frac{1\,|\,2}{3\,|\,1}+\frac{1}{3.}\,\frac{1\,|\,2}{1\,|\,2}=0$$

$$\frac{2\,|\,1\,|\,2}{1\,|\,2\,|\,3}=\frac{2}{1.}\,\frac{1\,|\,2}{2\,|\,3}+\frac{2}{2.}\,\frac{1\,|\,2}{3\,|\,1}+\frac{2}{3.}\,\frac{1\,|\,2}{1\,|\,2}=0$$

estos son dos casos similares el primero con dos términos iguales en la parte superior el segundo con dos términos idénticos, uno en la parte superior y otra en la inferior, resolviendo las abreviaturas, estas mismas se anulan.

Vandermonde se propone a encontrar los valores de ξ_1 y ξ_2 que cumplen con las dos ecuaciones

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1.}\,\xi_1 + \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{2.}\,\xi_2 + \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{3.} = 0$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{1.}\,\xi_1 + \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{2.}\,\xi_2 + \genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3.} = 0$$

compara y obtiene

$$\xi_1 = \frac{\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \end{array}}{\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array}}, \qquad \xi_2 = \frac{\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 1 \end{array}}{\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 \end{array}}$$

para el caso de tres ecuaciones con tres incógnitas Vandermonde hace un tratamiento similar.

Está claro que las abreviaturas no tienen factores innecesarios, así lo detalla Vandermonde en su artículo el cual determina que, para simplificar valores complejos, se deben sustituir las abreviaturas que le sigue en orden menor a la que se quiere desarrollar, es decir, para el desarrollo de:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline a & b & c & d \end{array}$$

se utilizarán las abreviaturas menores a ella, en este caso los valores de

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline a & b \end{array}$$

en

$$\begin{array}{c|c|c} \alpha & \beta & \gamma \\ \hline a & b & c \end{array}$$

luego se reduce y ordena, quedando:

$$\begin{array}{c|c|c|c} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline a & b & c & d \end{array} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline a & b \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} \gamma & \delta \\ \hline c & d \end{array} - \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline a & c \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} \gamma & \beta \\ \hline b & d \end{array} + \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline a & d \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} \gamma & \delta \\ \hline b & c \end{array} \\ + \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline b & c \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} \gamma & \delta \\ \hline a & d \end{array} - \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline b & d \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} \gamma & \delta \\ \hline a & c \end{array} \\ + \begin{array}{c|c} \alpha & \beta \\ \hline c & d \end{array} \cdot \begin{array}{c|c} \gamma & \delta \\ \hline a & b \end{array} \end{array} \right.$$

Si se quisiera desarrollar la abreviatura de orden seis:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon \\ \hline a & b & c & d & e \end{array}$$

el paso siguiente es sustituir los valores de la abreviatura de orden 5 en la original, es decir los valores de

$$\begin{array}{c|c|c|c} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \hline a & b & c & d \end{array}$$

se deben sustituir en

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon \\ \hline a & b & c & d & e \end{array}$$

ya ordenando y haciendo los cálculos correspondientes, quedaría:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}\alpha&\beta&\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline a&b&c&d&e&f\end{array}
=\left\{
\begin{array}{l}
\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline a&b\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline c&d&e&f\end{array}
-\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline a&c\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline b&d&e&f\end{array}
+\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline a&d\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline b&c&e&f\end{array}\\
+\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline b&c\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline a&d&e&f\end{array}
-\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline b&d\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline a&c&e&f\end{array}
+\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline b&e\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline a&c&d&f\end{array}\\
+\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline c&d\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline a&b&e&f\end{array}
-\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline c&e\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline a&b&d&f\end{array}
+\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline c&f\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline a&c&d&e\end{array}\\
+\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline d&e\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline a&b&c&f\end{array}
-\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline d&f\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline a&b&c&e\end{array}\\
+\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline e&f\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline a&b&c&d\end{array}\\
-\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline a&e\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline b&c&d&f\end{array}
+\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline a&f\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline b&c&d&e\end{array}\\
-\begin{array}{c|c}\alpha&\beta\\\hline b&f\end{array}\cdot\begin{array}{c|c|c|c}\gamma&\delta&\epsilon&\zeta\\\hline a&c&d&e\end{array}
\end{array}\right.
$$

La ley de permutaciones y de signos es bastante obvia con estos ejemplos, lo cual para los casos de más de 8 letras los cálculos se vuelven un poco engorrosos.

Vandermonde mas adelante establece un teorema: "cualesquiera de los dos índices de cualquier fila son iguales a la función, esta se anula idénticamente" notamos particularmente que la base de la prueba de este teorema es el intercambio de los dos índices que cambian el signo de la función, y aun, la dejan inalterada.

Tras este teorema la solución de un sistema de ecuaciones lineales con la notación moderna seria de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{l}
a_1|b_1c_2| + b_1|c_1a_2| + c_1|a_1b_2| = |a_1b_1c_2| = 0\\
a_2|b_1c_2| + b_2|c_1a_2| + c_2|a_1b_2| = |a_2b_1c_2| = 0
\end{array}
$$

entonces

$$\therefore \qquad \left.\begin{array}{l} a_1 \dfrac{|b_1 c_2|}{|a_1 b_2|} + b_1 \dfrac{|c_1 a_2|}{|a_1 b_2|} + c_1 = 0 \\ a_2 \dfrac{|b_1 c_2|}{|a_1 b_2|} + b_2 \dfrac{|c_1 a_2|}{|a_1 b_2|} + c_2 = 0 \end{array}\right\}$$

por lo tanto, si tenemos las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$$

siendo la solución:

$$x = \frac{|b_1 c_2|}{|a_1 b_2|}, \qquad y = \frac{|c_1 a_2|}{|a_1 b_2|}$$

La solución de:

$$r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots + r_n x_n + r_{n+1} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots n)$$

expresa plenamente y con precisión los artículos de Vandermonde, aunque la notación utilizada en los numeradores de los valores de $x_1, x_2, \ldots x_n$. son una forma tan simple como la regla de Cramer.

Para Finalizar coincidimos con Muir al establecer a Vandermonde como un autor importante para el desarrollo del concepto de determinante, el trabajo realizado por Vandermonde, Muir (1960) lo resume así:

1. Una simple y apropiada notación para nuevas funciones $\dfrac{1 \mid 2 \mid 3}{1 \mid 2 \mid 3}$
2. Un nuevo modo de definir las funciones, usando sustancialmente la ley de formación recurrente de Bézout
3. El hecho de que una expresión algebraica ordinaria de cualquier función es obtenible por permutaciones de cualquiera de las series de índices
4. El hecho de que los términos positivos y negativos son iguales en número (de permutaciones)

5. El teorema con respecto a intercambiar dos índices consecutivos
6. Las pruebas del teorema con respecto a la igualdad de los dos índices pertenecen a la misma serie.

Además de esto, hay que ver el trabajo de Vandermonde en su conjunto, y tener en cuenta que él es el primero en hacer una exposición conectada con la teoría, la definición de las funciones, el cual les asignan una notación, y a partir de entonces lógicamente el desarrollo de dichas propiedades. Es decir, Vandermonde establece una base en la cual sus sucesores extendieran la teoría sin necesidad absoluta de hacer una renovación o reconstrucción, solamente para agregar o para perfeccionar algunos detalles, en palabras de Muir: “Of the mathematicians whose work has thus far been passed in review, the only one fit to be viewed as the founder of the theory of determinants is Vandermonde” (Muir, 1965, p. 24).

Joseph -Louis De Lagrange

La posición de Lagrange en el avance de las matemáticas es bastante diferente en comparación de los matemáticos anteriores analizados. Todos aquellos estaban tratando explícitamente con el problema de la eliminación, y por lo tanto directamente con las funciones después conocidas como determinantes.

SOLUTIONS ANALYTIQUES

DE QUELQUES

PROBLÈMES SUR LES PYRAMIDES TRIANGULAIRES.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1773.)

Les pyramides triangulaires tiennent, par leur simplicité, parmi les corps solides le même rang que les triangles parmi les figures planes; car de même que toute figure plane rectiligne peut être regardée comme composée de triangles, de même aussi tout corps solide terminé par des plans peut être supposé formé de pyramides triangulaires; mais si les Géomètres se sont toujours beaucoup occupés de l'étude des triangles et n'ont cessé d'en approfondir les propriétés, ils n'ont fait, ce me semble, qu'effleurer celles des pyramides triangulaires; et des principaux Problèmes qu'on peut proposer sur ces sortes de solides il n'y en a encore qu'un très-petit nombre qui ait été résolu. Ceux qui vont faire la matière de ce Mémoire concernent la manière de trouver la surface, la solidité, les sphères circonscrites et inscrites, le centre de gravité, etc., de toute pyramide triangulaire dont on connaît les six côtés (*); et je me flatte que les solutions que j'en vais donner pourront intéresser les Géomètres tant par la méthode que par les résultats.

Ces solutions sont purement analytiques et peuvent même être entendues sans figures; j'y emploie des coordonnées rectangles pour déterminer la position des différents points que j'ai à considérer dans la pyra-

(*) Je nomme côtés les lignes formées par la rencontre des plans sous lesquels la pyramide est comprise, et je nommerai ces plans faces de la pyramide.

Ilustración 6- Portada del libro: Problemes sur les pyramides

Lagrange por otra parte trabajaba en las identidades algebraicas. En su memoria publicada en la Academia de Berlín, en el año 1775 su obra titulada: *Nouvelle solution du probléme du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune forece accélératice.*

Lagrange define x, y, z , x', y', z' y x'', y'', z'' no como hemos visto anteriormente que lo definen como coeficientes de ecuaciones lineales, sino se definen como coordenadas de puntos en el espacio, así que cuando se tiene:

$$(xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x''),$$

representa un volumen orientado y no el resultado de una eliminación.

También nos concentráremos en una obra fundamental, que amplía la mirada de los determinantes y crea un nuevo contexto de aplicación, el geométrico, esta obra de 1773 titulada *Solutions analytiques de quelques problemes sur les pyramides triangulaires.* En esta obra Lagrange calcula el volumen de un tetraedro de acuerdo con las coordenadas de sus vértices. También calcula las coordenadas del centro y el radio de las esferas inscritas y circunscritas al tetraedro, también estudia y determina las coordenadas de su centro de gravedad, todo lo anterior, Lagrange lo trabaja con soluciones puramente analíticas, incluso sin cifras algunas, es importante mencionar que en la lectura de esta obra se puede reconocer el producto escalar, el producto vectorial y el producto de determinantes. Con 33 páginas esta obra vislumbra por su sencillez, y efectividad al mostrar analíticamente todo lo relacionado con las pirámides triangulares, es de importancia mencionar que la obra carece de alguna imagen o representación gráfica de sus aportes, Lagrange empieza con una introducción aproximada de una hoja en la cual resalta la importancia y la belleza (matemática) de las pirámides triangulares:

> … "Ceux qui vont faire la matière de ce Mémoire concernentla manière de trouver la surface, la solidité, les sphères circonscrites et inscrites, le centre de gravité, etc.," … (Lagrange 1773, pg. 661)

Lagrange aborda el tema con nueve cantidades:

$$x,\ \ y,\ \ z,\ \ x',\ \ y',\ \ z',\ \ x'',\ \ y'',\ \ z'', \qquad (1)$$

paso seguido se forman nueve cantidades de esta forma

$$\begin{array}{lll} \xi = y'z'' - z'y'', & \eta = z'x' - x'z'' & \varsigma = x'y'' - y'x'', \\ \xi' = y''z - z''y, & \eta' = z''x - x''z, & \varsigma' = \ x'y - y''x, \\ \xi'' = \ yz' - zy', & \eta'' = zx' - xz', & \varsigma'' = \ xy' - yx', \end{array} \qquad (2)$$

lo cual actualmente, si se ordena las nueve cantidades en forma matricial de (1) correspondería a la matriz adjunta y las cantidades ξ, ς, η… serían los determinantes correspondientes a la matriz adjunta de (2).

Lagrange continúa, estableciendo las siguientes seis ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} x^2 \ + \ y^2 \ + \ z^2 \ = \ a & x'x'' + y'y'' + z'z'' = b \\ x'^2 \ + y'^2 \ + z'^2 \ = a' & xx'' \ + yy'' \ + zz'' = \ b' \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 = a'' & xx' + yy' \ + \ \ zz' \ = \ \ b'' \end{array} \qquad (3)$$

las abrevia:

$$\begin{array}{ll} \alpha = a'a'' - b^2, & \beta = b'b'' - ab, \\ \alpha' = aa'' - b'^2, & \beta' = bb'' - a'b', \\ \alpha'' = aa' - b''^2, & \beta'' = bb' - a''b'', \end{array} \qquad (4)$$

así se tendría lo siguiente

$$\begin{array}{ll} \xi^2 + \eta^2 + \varsigma^2 = \alpha, & \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \varsigma'\varsigma'' = \beta, \\ \xi'^2 + \eta'^2 + \varsigma'^2 = \alpha', & \xi\xi'' + \eta\eta'' + \varsigma\varsigma'' = \beta', \\ \xi''^2 + \eta''^2 + \varsigma''^2 = \alpha'', & \xi\xi' + \eta\eta' + \varsigma\varsigma' = \beta''. \end{array} \qquad (5)$$

Al ver con más detalle (3), este surge de la multiplicación de (1) con su traspuesta, haciendo los cálculos pertinentes a, a' y a'' correspondería a la diagonal principal y b, b' y b'' al ser simétrica el resultado de esa multiplicación, correspondería a las otras posiciones.

Con respecto a (4) correspondería igualmente a la adjunta de (3), solo Lagrange muestra seis cantidades, por ser simétrica (3), igualmente sucede con (5) que es análogo a (3). Lagrange juega con esas cantidades y con diversas propiedades de la teoría de matrices que en su época no se vislumbraba todavía, como matriz adjunta, producto de traspuesta, matriz simétrica.

De manera similar Lagrange continúa, ahora con las nueve cantidades;

$$\xi, \quad \eta, \quad \varsigma, \quad \xi', \quad \eta', \quad \varsigma', \quad \xi'', \quad \eta'', \quad \varsigma'',$$

y estableciendo las ecuaciones

$$\begin{array}{lll} X = \eta'\varsigma'' - \varsigma'\eta'', & Y = \varsigma'\xi'' - \xi'\varsigma'', & Z = \xi'\eta'' - \eta'\xi'', \\ X' = \eta''\varsigma - \varsigma''\eta, & Y' = \varsigma''\xi - \xi''\varsigma, & Z' = \xi''\eta - \eta''\xi\ , \\ X'' = \eta\varsigma' - \varsigma\eta', & Y'' = \varsigma\xi' - \xi\varsigma', & Z'' = \xi\eta' - \eta\xi', \end{array} \qquad (6)$$

luego

$$
\begin{aligned}
A &= \alpha'\alpha'' - \beta^2, \qquad & B &= \beta'\beta'' - \alpha\beta, \\
A' &= \alpha\alpha'' - \beta'^2, \qquad & B' &= \beta\beta'' - \alpha'\beta', \\
A'' &= \alpha\alpha' - \beta''^2, \qquad & B'' &= \beta\beta' - \alpha''\beta'',
\end{aligned} \tag{7}
$$

de manera similar:

$$
\begin{aligned}
X^2 + Y^2 + Z^2 &= A, \qquad & X'X'' + Y'Y'' + Z'Z'' &= B, \\
X'^2 + Y'^2 + Z'^2 &= A', \qquad & XX'' + YY'' + ZZ'' &= B', \\
X''^2 + Y''^2 + Z''^2 &= A'', \qquad & XX' + YY' + ZZ' &= B''.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Explicando con detalle, se vuelve a realizar lo aplicado anteriormente, siendo (6) la adjunta de la adjunta y (7) como anteriormente habíamos mencionado sería esta vez la matriz simétrica generada de la multiplicación de las cantidades con su traspuesta.

Álvarez (2013) estudia con más detalle los resultados arrojados por Lagrange en cuanto a las adjuntas, haciendo un estudio minucioso, llegando a descubrir las siguientes propiedades:

- $Adj(A)(Adj(A))^t = Adj(AA^t)$
- $Adj(Adj(A)) * (Adj(Adj(A)))^t = Adj(Adj(AA^t))$

Lagrange continúa e introduce formalmente el determinante de tercer orden:

$$\Delta = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'',$$

Entonces al seguir escribiendo Lagrange sus identidades aparece la siguiente:

$$
\begin{aligned}
X &= \Delta x, \qquad & Y &= \Delta y, \qquad & Z &= \Delta z, \\
X' &= \Delta x', \qquad & Y' &= \Delta y', \qquad & Z' &= \Delta z', \\
X'' &= \Delta x'', \qquad & Y'' &= \Delta y'', \qquad & Z'' &= \Delta z'';
\end{aligned} \tag{9}
$$

así sustituyendo se tendría:

$$\begin{aligned} A &= \Delta^2 a, & B &= \Delta^2 b, \\ A' &= \Delta^2 a', & B' &= \Delta^2 b', \\ A' &= \Delta^2 a'', & B'' &= \Delta^2 b'', \end{aligned} \qquad (10)$$

luego el valor de Δ^2 sería:

$$\Delta^2 = \frac{A}{a} = \frac{\alpha'\alpha'' - \beta^2}{a}, \qquad (11)$$

y sustituyendo los valores de α', α'', β en a, a' ...

$$\Delta^2 = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'{b'}^2 - a''b''^2; \qquad (12)$$

nos encontramos con el mismo valor de Δ^2.

No es menester decir que Δ corresponde al determinante de tamaño 3×3, lo interesante es ver que se cumplen varias propiedades que menciona Álvarez (2013) como:

- En (9) se cumple esta propiedad $Adj(Adj(A)) = det(A)$
- En (10) se utilizarían las propiedades anteriores de multiplicación de traspuestas, esto daría; $(Adj(Adj(A)))^t = \det(A)^2 AA^t$
- en (11) y (12) se cumpliría que $\det(A)^2 = \det(AA^t)$

Lagrange sigue trabajando en sus identidades algebraicas. Así al seguir leyendo y analizando el documento encontramos más cosas interesantes. Lagrange afirma:

es bueno tener en cuenta que el valor de Δ^2 se puede escribir también de la siguiente forma

$$\Delta^2 = \frac{A\alpha + A'\alpha' + A''\alpha'' + 2(B\beta + B'\beta' + B''\beta'')}{3}, \qquad (13)$$

de esta manera se tendría

$$\Delta^4 = \alpha\alpha'\alpha'' + 2\beta\beta'\beta'' - \alpha\beta^2 - \alpha'{\beta'}^2 - \alpha''{\beta''}^2 \qquad (14)$$

de esta forma se ve que Δ^2 y Δ^4 son funciones similares.

No hay mucho que decir de estas últimas, tanto (12) como (14) son similares, así que (14) correspondería al determinante de la adjunta de la multiplicación de la traspuesta, es decir $d\text{et}(adj(AA^t))$.

por otra parte

$$xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'' = \sqrt{aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2} = \Delta,$$

se tiene la misma relación entre las cantidades $x, y, z, x', \ldots$ y $a, a'', b, \ldots$ y las cantidades ξ, η, Ϛ… y α, α', α", …

$$\xi\eta'\varsigma'' + \eta\varsigma'\xi'' + \varsigma\xi'\eta'' - \xi\varsigma'\eta'' - \eta\xi'\varsigma'' - \varsigma\eta'\xi'' = \sqrt{\alpha\alpha'\alpha'' + 2\beta\beta'\beta'' - \alpha\beta^2 - \alpha'\beta'^2 - \alpha'\beta''^2} = \Delta^2.$$

así que vamos a tener este mismo problema

$$\xi\eta'\varsigma'' + \eta\varsigma'\xi'' + \varsigma\xi'\eta'' - \xi\varsigma'\eta'' - \eta\xi'\varsigma'' - \varsigma\eta'\xi'' = (xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'')^2. \qquad (15)$$

Lo que observamos del resultado de (15) es simple, corresponde al determinante de la adjunta es igual al determinante al cuadrado, es decir $\det\big(Adj(A)\big) = \Delta^2 = \det(A)^2$, lo cual corresponde a una propiedad importante de la matriz de adjuntos de la actualidad, la cual Lagrange por solo trabajar el tamaño $3x3$ el determinante queda al cuadrado, de manera general correspondería a $\det\big(adj(A)\big) = \det(A)^{n-1}$.

podemos representar las seis cantidades $\text{A}, \ \text{A}', \ \text{A}'', \ \text{B}, \ \text{B}', \ \text{B}''$ utilizando

$$\Delta^2 = \sqrt{\alpha\alpha'\alpha'' + 2\beta\beta'\beta'' - \alpha\beta^2 - \alpha'\beta'^2 - \alpha'\beta''^2},$$

mediante las expresiones

$$a = \frac{A}{\Delta^2}, \quad a' = \frac{A'}{\Delta^2}, \quad a'' = \frac{A''}{\Delta^2},$$
$$b = \frac{B}{\Delta^2}, \quad b' = \frac{B'}{\Delta^2}, \quad b'' = \frac{B''}{\Delta^2}.$$

Lo anterior correspondería a una igualdad no tan conocida $\frac{1}{\det(A)^2} Adj\big(Adj(AA^t)\big) = AA^t$.

Lagrange sigue desarrollando sus identidades algebraicas, los siguientes pasos se dan cuando realiza suma de productos de los sistemas anteriormente mostrados, Lagrange escribe

$$\begin{array}{lll} x\xi + x'\xi' + x''\xi'' = \Delta, & y\xi + y'\xi' + y''\xi'' = 0, & z\xi + z'\xi' + z''\xi'' = 0, \\ x\eta + x'\eta' + x''\eta'' = 0, & y\eta + y'\eta' + y''\eta'' = \Delta, & z\eta + z'\eta' + z''\eta'' = 0, \\ x\varsigma + x'\varsigma' + x''\varsigma'' = 0, & y\varsigma + y'\varsigma' + y''\varsigma'' = 0, & z\varsigma + z'\varsigma' + z''\varsigma'' = \Delta; \end{array} \tag{16}$$

y nos encontramos

$$\begin{array}{ccc} x\xi + y\eta + z\varsigma = \Delta, & x'\xi + y'\eta + z'\varsigma = 0, & x''\xi + y''\eta + z''\varsigma = 0, \\ x\xi' + y\eta' + z\varsigma' = 0, & x'\xi' + y'\eta' + z'\varsigma' = \Delta, & x''\xi' + y''\eta' + z''\varsigma' = 0, \\ x\xi'' + y\eta'' + z\varsigma'' = 0, & x'\xi'' + y'\eta'' + z'\varsigma'' = 0, & x''\xi'' + y''\eta'' + z''\varsigma'' = \Delta. \end{array} \tag{17}$$

(16) y (17) corresponderían a que el determinante de la matriz por la matriz idéntica es igual a la multiplicación de la matriz traspuesta por su adjunta y también igual a la matriz multiplicada por traspuesta de la adjunta, es decir, $det(A).I = A^t Adj(A) = A(Adj(A))^t$

Finalmente, Lagrange establece otras identidades utilizando las relaciones entre las cantidades x, x', x" y, … las correspondientes $\xi, \xi', \xi'', \eta,$ ... todo esto con el fin de utilizarlo en las diferentes situaciones en relación a la pirámide triangular. Entre otras identidades podemos distinguir haciendo un análisis más profundo y verificando con las generadas por Alvarez (2013), las siguientes:

- $\frac{1}{\det(A)} Adj(AA^t)A = Adj(A)$
- $\frac{1}{\det(A)} (AA^t) Adj(A) = A$

Cada vez más parecidas a la conocida identidad de la inversa de una matriz. Lagrange da un gran salto en el desarrollo de la teoría de determinantes, que a la par, Gauss complementará.

Carl Friedrich Gauss

Ilustración 7-Portada libro: Disquisitiones Arithmeticae

Gauss realizó una maravillosa síntesis de los resultados del pasado en teoría de números, generando una nueva época de desarrollo interesante.

Aquí nos ocuparemos de su obra principal, publicada en el año 1801, titulada: *Disquisitiones Arithmeticae* nos concentraremos específicamente en el quinto capítulo que habla sobre las formas cuadráticas.

La investigación realizada en la quinta sección se presenta desde el punto de vista aritmético, la teoría de las formas cuadráticas en general acompañada de una discusión de las formas cuadráticas ternarias. La sección quinta titulada *"De formis aequationibusque indeterminatis secundi gradus"* el cual es un estudio completo sobre las formas cuadráticas.

El problema general es encontrar todas las soluciones de cualquier ecuación indeterminada de segundo grado involucrando dos incógnitas, donde estas incógnitas pueden asumir tanto valores enteros como racionales. Siendo la ecuación indeterminada:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = M$$

donde $a, b, c\ , m$ son números enteros cualesquiera; Gauss llama a estas funciones "*formas de segundo grado"* o simplemente *formas.*

Gauss denota por (a, b, c) a la forma $ax^2 + 2bxy + cy^2$, escribe:

> Por lo tanto, esta expresión denotará de manera indefinida una suma de tres partes: el producto del número dado a por un cuadrado indeterminado cualquiera, el producto del duplicado del número b por esta indeterminada y otra indeterminada, y el producto del número c por el cuadrado de esta segunda indeterminada. E.g., $(1, 0, 1)$

> expresa la suma de un cuadrado y el duplicado de un cuadrado. Además, aunque las formas (a, b, c) y (c, b, a) denotan lo mismo, si solo se consideran sus términos, difieren, sin embargo, si también prestamos atención al orden… (Gauss, 1801, p.153)

El primer teorema de la sección quinta es especial, debido a que se habla del *"determinante":*

> Teorema. Si el número M puede representarse por la forma (a, b, c) de manera que los valores de las indeterminadas, por los que esto se produce, son primos entre sí, entonces $b^2 - ac$ será un residuo cuadrático del número M…
>
> … llamaremos al número $b^2 - ac$, de cuya índole dependen las propiedades de la forma (a, b, c), tal como lo enseñaremos en los siguiente, el ***determinante*** de esta forma. (Gauss, 1801, p.154)

La representación de la forma (a, b, c) en notación moderna correspondería a la matriz simétrica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, y lo que Gauss expresa como el *determinante* de la forma (a, b, c) es lo que llamaríamos el día de hoy *"discriminante"*. Si consideramos hallar el determinante (moderno) de la matriz simétrica mencionada anteriormente, seria: $ac - b^2$, el cual vendría siendo el mismo determinante que interpreta Gauss, pero con signo cambiado $-(b^2 - ac)$.

Es común ver en el presente capítulo que Gauss estudia las formas cuadráticas haciendo suficiente uso de sustituciones tal como lo trabaja Lagrange. Veamos un ejemplo de la aplicación de dichas sustituciones:

Una forma que implica otra o contenida en ella; la transformación propia e impropia.

Si la forma F, cuyas indeterminadas son x e y, puede transmutarse en otra F', cuyas indeterminadas son x' e y' por las sustituciones

$$x = \alpha x' + \beta y'$$

$$y = \gamma x' + \delta y'$$

de modo que $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ sean enteros; diremos que la primera implica la segunda o que la segunda está contenida en la primera. (Gauss, 1801, pg. 157)

Gauss realiza las sustituciones pertinentes y llega a un resultado:

$$b'^2 - a'c' = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

Donde prueba que el determinante de la forma F' es divisible por el determinante de la forma F y el cociente de ellos es un cuadrado. Exactamente el cuadrado del determinante de la sustitución efectuada. Gauss determina las contenencias entre F y F' estableciendo que los determinantes serán iguales, para este caso se dice que las formas son equivalentes.

Las condiciones "propia e impropia" se basan en el signo del cociente $(\alpha\delta - \beta\gamma)$, propia si este es positivo e impropia si es negativo. En el trabajo aritmético de Gauss la equivalencia de las formas es crucial para determinar propiedades y teoremas.

La equivalencia propia e impropia

> Si los determinantes de las formas F y F' son iguales y si F' está contenida en F, entonces F estará contenida en F', propia o impropiamente, según que F' este contenida en F propia o impropiamente. (P.158)

Para la demostración Gauss recurre nuevamente a las sustituciones

$$x = \alpha x' + \beta y'$$

$$y = \gamma x' + \delta y'$$

las cuales transforman a F en F', luego realizando estas dos sustituciones:

$$x' = \delta x - \beta y$$

$$y' = -\gamma x + \alpha y$$

transforman a F' en F.

En efecto, por esta sustitución resulta lo mismo de F' que de F al poner

$$x = \alpha(\delta x - \beta y) + \beta(-\gamma x + \alpha y)$$

$$y = \gamma(\delta x - \beta y) + \delta(-\gamma x + \alpha y)$$

o sea

$$x = (\alpha\delta - \beta\gamma)x$$

$$y = (\alpha\delta - \beta\gamma)y$$

es decir que F se hace $(\alpha\delta - \beta y)^2 F,$ es decir de nuevo F.

Ya mas adelante en el tema de las Formas Opuestas, se pueden ver cosas interesantes al aplicar dichas sustituciones, como la transitividad entre las relaciones de las formas: “Si la forma F implica la forma F', y esta implica la forma F'', también la forma F implicará la forma F''." (Gauss, 1801, p.159)

Este particular teorema se establece; $x\ e\ y, x'\ e\ y', x''\ e\ y''$, correspondientes para las indeterminadas F, F', F'' , se procede a transformar F en F' con la sustitución:

$$x = \alpha x' + \beta y'$$

$$y = \gamma x' + \delta y'$$

y F' en F'' con la sustitución

$$x' = \alpha' x'' + \beta' y''$$

$$y' = \gamma' x'' + \delta' y''$$

a esto se obtiene la sustitución

$$x = (\alpha\alpha' + \beta y')x'' + (\alpha\beta' + \beta\delta')y''$$

$$y = (\gamma\alpha' + \delta y')x'' + (\gamma\beta' + \delta\delta')y''$$

y se tendría la igualdad

$$(\alpha\alpha' + \beta y')(\gamma\beta' + \delta\delta') - (\alpha\beta' + \beta\delta')(\gamma\alpha' + \delta y') = (\alpha\delta - \beta y)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma').$$

Se observa por lo anterior que es el producto de resolventes o un resolvente de resolventes, es decir una suma de productos, lo cual es fuente principal de los trabajos de Cauchy al desarrollar la propiedad de la suma de productos del determinante. Claro está que esa igualdad hereda los teoremas anteriores, así que las implicaciones pueden ser propias o impropias, dependiendo del signo de dichas relaciones.

Gauss concluye la sección de formas opuestas del siguiente modo:

> Cualquier forma (a, b, c) equivaldrá propiamente a ella misma o a la forma $(a, -b, c)$. Al mismo tiempo, si tal forma implica la forma (a, b, c) o esta contenida en ella misma, ella implicará la forma (a, b, c) o la forma $(a, -b, c)$ propiamente o estará contenida propiamente en una de las dos, llamaremos a (a, b, c) y $(a, -b, c)$ formas opuestas (Gauss, 1801, p.159)

Sobre las formas cuadráticas Gauss realiza un exhaustivo estudio, estableciendo más detalles que sus antecesores Euler y Lagrange.

Podemos mirar con cautela cuando Gauss trabaja las formas ternarias de segundo grado, en una digresión al final de su desarrollo de formas cuadráticas, surgen estas con el título de *“formam ternariam secundi gradus”.*

Gauss define una forma ternaria correctamente ordenada del siguiente modo

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

se tiene que la primera incógnita es x, la segunda es x' y la tercera x''. El primer coeficiente es a etc., El cuarto es b etc. Así como se daba la notación de una forma cuadrática de forma más accesible, la notación de una forma ternaria Gauss la representa de la forma

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

Gauss continúa estableciendo unas sustituciones que son interesantes ver

$$b^2 - a'a'' = A, \quad b'^2 - aa'' = A', \quad b''^2 - aa' = A''$$

$$ab - b'b'' = B, \quad a'b' - bb'' = B', \quad a''b'' - bb' = B''$$

con dichas sustituciones obtendremos otra forma

$$\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix} \ldots \quad F$$

Gauss llama a esta, la ***adjunta de la forma***[14].

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} \ldots \quad f$$

al analizar con más detalles lo anterior tendríamos, primero que la forma

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

correspondería a la matriz simétrica $f = \begin{pmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{pmatrix}$

segundo que la sustitución realizada por Gauss corresponde efectivamente actualmente a la matriz de adjuntos o de cofactores, podemos observar las sustituciones de esta manera:

$$F = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b \\ b & a'' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b'' & b \\ b' & a'' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b'' & a' \\ b' & b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b'' & b' \\ b & a'' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b' \\ b' & a'' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b'' \\ b' & b \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b'' & b' \\ a' & b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b' \\ b'' & b \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Gauss paso seguido denota al número

$$ab^2 + ab^2 + ab^2 - aa'a'' - 2bb'b'' \qquad por \quad D$$

[14] La notación de Gauss es posible debido a la correspondencia de la matriz simétrica con sus notaciones, no sería posible utilizar la notación de Gauss con matrices no simétricas.

el cuál es el determinante de la forma f con signo cambiado, Gauss continua y establece de nuevo unas sustituciones

$$B^2 - A'A'' = aD, \quad {B'}^2 - AA'' = a'D, \quad {B''}^2 - AA' = a''D$$

$$AB - B'B'' = bD, \quad A'B' - BB'' = b'D, \quad A''B'' - BB' = b''D$$

en esta sustitución lo que Gauss está realizando seria la matriz de cofactores de la matriz de cofactores o en su defecto la adjunta de la adjunta[15], la adjunta de la forma F será la forma

$$\begin{pmatrix} aD, & a'D, & a''D \\ bD, & b'D, & b''D \end{pmatrix}.$$

siendo una de las propiedades de las adjuntas actualmente. Gauss también hace mención que el determinante de la forma F seria $= D^2$, esto es igual al cuadrado del determinante de la forma f de la cual es adjunta[16].

Gauss continúa su trabajo sobre ternarias, sin embargo es atractivo mostrar una serie de sustituciones que dan conclusión a varias propiedades interesantes.

Si una forma ternaria f de determinante D y con incógnitas x, x', x'' es transformada en una forma ternaria g de determinante E e incógnitas y, y', y'' por medio de una sustitución tal como esta

$$x = \alpha y + \beta y' + \gamma y''$$

$$x' = \alpha' y + \beta' y' + \gamma' y''$$

$$x'' = \alpha'' y + \beta'' y' + \gamma'' y''$$

Gauss por brevedad ignora las incógnitas y simplemente dice que f es transformada en g por medio de la sustitución (S)

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$$

[15] Corresponde a la propiedad: $\big(adj\big(adj(A)\big) = \det(A)^{n-2}A\big)$ para $A \in M_{nxn}$.

[16] Corresponde a la propiedad: $(\det(adj(A)) = \det(A)^{n-1})$ para $A \in M_{nxn}$.

$$\alpha', \quad \beta', \quad \gamma'$$
$$\alpha'', \quad \beta'', \quad \gamma''$$

y que f implica a g o bien que g está contenida en f.

1. Gauss denota el número k por

$$\alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\beta'\alpha'' - \alpha\gamma'\beta'' - \beta\alpha'\gamma''$$

Gauss encuentra que $(E = k^2 D)$[17]

2. Gauss denota por F y G las formas que son adjuntas a f y g respectivamente, los coeficientes en F estarán determinados por los coeficientes en f, los coeficientes en G por los valores de los coeficientes de la forma g a partir de la ecuación que es provista por la sustitución S. Si se expresa los coeficientes de la forma f por letras y comparamos los valores de los coeficientes de las formas F y G, es fácil ver que F implica a G y que es transformada en G por medio de la sustitución S'

$$\begin{array}{lll} \beta'\gamma'' - \beta''\gamma', & \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha', & \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' \\ \beta''\gamma - \beta\gamma'', & \gamma''\alpha - \gamma\alpha'', & \alpha''\beta - \alpha\beta'' \\ \beta\gamma' - \beta'\gamma, & \gamma\alpha' - \gamma'\alpha, & \alpha\beta' - \alpha'\beta \end{array}$$

3. Por medio de la sustitución S''

$$\begin{array}{lll} \beta'\gamma'' - \beta''\gamma', & \beta''\gamma - \beta\gamma'', & \beta\gamma' - \beta'\gamma \\ \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha', & \gamma''\alpha - \gamma\alpha'', & \gamma\alpha' - \gamma'\alpha \\ \alpha'\beta'' - \alpha''\beta', & \alpha''\beta - \alpha\beta'', & \alpha\beta' - \alpha'\beta \end{array}$$

g Será transformada en la misma forma que f por medio de la sustitución

[17] Al contrario de los anteriores determinantes que están cambiados de signo este “k” tiene el signo correcto, también se puede ver a simple vista que corresponde a la propiedad de multiplicación de los determinantes.

$$
\begin{matrix} k, & 0, & 0 \\ 0, & k, & 0 \\ 0, & 0, & k \end{matrix}
$$

esta es la forma que surge de multiplicar cada uno de los coeficientes de la forma f por k^2. Se designa esta forma por f'.

4. Exactamente de la misma manera, se prueba que por medio de la sustitución S'''

$$
\begin{matrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{matrix}
$$

la forma G será transformada en la forma que surge a partir de F, multiplicando cada coeficiente por k^2. Se designa esta forma como F'.

Gauss listó lo anterior en la página 268 de su obra, a continuación, se analiza con detalle dichas sustituciones:

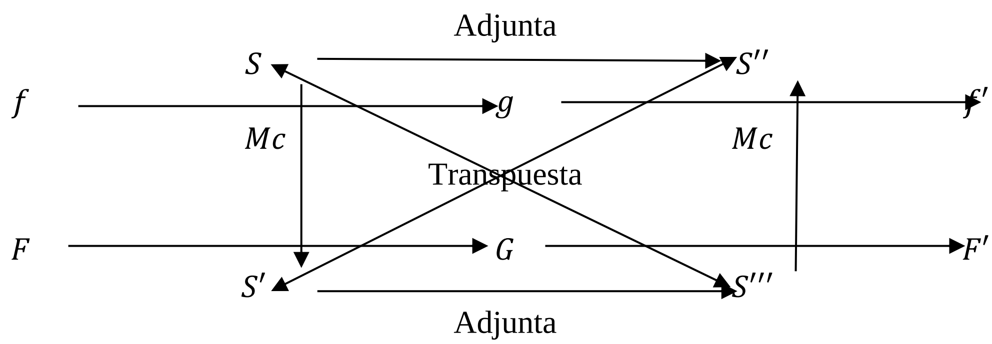
En el numeral uno se ve un resultado el cual es $E = k^2 D$ correspondería primero al determinante de la matriz adjunta de la sustitución S multiplicado por el determinante de la forma f el cual nos generaría el determinante de la forma g.

En el numeral dos la sustitución S' correspondería a la matriz adjunta de S, las implicaciones que menciona Gauss son debido a que los coeficientes de S' están determinados por los coeficientes de S.

En el numeral tres la sustitución S'' seria básicamente la Transpuesta de S', la forma f' correspondería al determinante de la forma multiplicada por la matriz identidad. Es curioso ver que Gauss menciona: *"esta es la forma que surge de multiplicar cada uno de los coeficientes de la forma f por k^2",* afirmando lo mencionado en el numeral uno.

En el numeral cuatro la sustitución S''' correspondería a la transpuesta de S.

Para dar más visibilidad a lo expuesto por Gauss en estos numerales mostraremos el siguiente esquema.



Esquema 2. Trasposiciones y sustituciones llevadas por Gauss en las formas ternarias.

Mc: matriz de cofactores.

El esquema resume todo lo mostrado por Gauss acerca de las formas Ternarias, de cómo es el proceso de pasar una forma determinada a otra por medio de una sustitución, y como cada sustitución puede convertirse en otra por medio de una transposición o de una matriz bien sea la matriz de cofactores o la matriz adjunta.

Gauss nos muestra lo siguiente:

… es fácil observar que si f es transformada en f' por medio de la sustitución

$$\begin{array}{lll} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}$$

y f' en f'' por medio de la sustitución

$$\begin{array}{lll} \delta, & \varepsilon, & \theta \\ \delta', & \varepsilon', & \theta' \\ \delta'', & \varepsilon'', & \theta'' \end{array}$$

entonces f será transformada en f'' por medio de la sustitución

$$\begin{array}{ccc} \alpha\delta + \beta\delta' + \gamma d'', & \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon' + \gamma\varepsilon'', & \alpha\theta + \beta\theta' + \gamma\theta'' \\ \alpha'\delta + \beta'^{\delta'} + \gamma' d'', & \alpha'\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \gamma'\varepsilon'', & \alpha'\theta + \beta'\theta' + \gamma'\theta'' \\ \alpha''\delta + \beta''^{\delta'} + \gamma'' d'', & \alpha''\varepsilon + \beta''\varepsilon' + \gamma''\varepsilon',' & \alpha''\theta + \beta''\theta' + \gamma''\theta'' \end{array}$$

y en el caso donde f es equivalente a f' y f' a f'', la forma f también será equivalente a la forma f''… (Gauss, 1801, pg. 270).

En lo anterior se puede notar la propiedad de multiplicación de matrices, es decir, se establecería el siguiente esquema: donde M es la sustitución de f en f' , N la sustitución de f' en f'' y O la sustitución de f en f''

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "M"] \arrow[rr, bend right, "O"'] & f' \arrow[r, "N"] & f'' \end{tikzcd}$$

Multiplicacion
de M y N

Esquema 3. Representación de Gauss sobre la multiplicación de matrices.

No es difícil ver que Gauss deja enunciadas en su trabajo de formas cuadráticas y ternarias todas las propiedades actuales sobre adjuntas y sobre la multiplicación de matrices, su trabajo se ve acotado a las matrices simétricas y al tamaño $2 \times 2\ y\ 3{\times}3$, lo interesante es ver y analizar que el trabajo realizado por Gauss, es un aporte a la aritmética, un pensamiento totalmente distinto a lo desarrollado por la teoría de matrices y de determinantes de la época, las propiedades, teoremas que podemos traslapar con la actualidad y de las cuales podemos encontrar similitudes corresponderían a un análisis posterior de esta gran obra con la actualidad, debido a que la teoría de matrices es otra etapa de la historia, lo que sí sabemos es que cualquier matemático posterior a Gauss encontraría una relación entre las formas cuadráticas y ternarias con las matrices y determinantes.

Augustin Louis Cauchy

Se analiza la memoria de Augustin Louis Cauchy titulada *Sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manieres posibles les quantités qu'elle renferme* del año 1815.

MEMOIRE

SUR LE

NOMBRE DES VALEURS QU'UNE FONCTION PEUT ACQUÉRIR,

LORSQU'ON Y PERMUTE DE TOUTES LES MANIÈRES POSSIBLES
LES QUANTITÉS QU'ELLE RENFERME.

Journal de l'École Polytechnique, XVII^e Cahier, Tome X, p. 1; 1815.

MM. Lagrange et Vandermonde sont, je crois, les premiers qui aient considéré les fonctions de plusieurs variables relativement au nombre de valeurs qu'elles peuvent obtenir, lorsqu'on substitue ces variables à la place les unes des autres. Ils ont donné plusieurs théorèmes intéressants relatifs à ce sujet dans deux Mémoires imprimés en 1771, l'un à Berlin, l'autre à Paris. Depuis ce temps, quelques géomètres italiens se sont occupés avec succès de cette matière et, particulièrement, M. Ruffini, qui a consigné le résultat de ses recherches dans le Tome XII des *Mémoires de la Société italienne* et dans sa *Théorie des équations numériques*. Une des conséquences les plus remarquables des travaux de ces divers géomètres est que, avec un nombre donné de lettres, on ne peut pas toujours former une fonction qui ait un nombre déterminé de valeurs. Les caractères par lesquels cette impossibilité se manifeste ne sont pas toujours faciles à saisir; mais on peut du moins, pour un nombre donné de lettres, assigner des limites que le nombre des valeurs ne peut dépasser et déterminer en outre un grand nombre de cas d'exclusion. Je vais exposer dans ce Mémoire ce qu'on avait déjà trouvé de plus important sur cet objet et ce que mes propres recherches

Ilustración 8- Portada del libro: Sur le Nombre des Valeurs qu'une fonction peut acquérir lorsqu'on y permute de toutes les manieres posibles les quantités qu'elle renferme

Esta memoria de 84 páginas fue leída casualmente el mismo día en el que fueron leídas las memorias de Binet, más allá de la coincidencia de la fecha, se observa también que las memorias tienen temas en común en relación a los determinantes, incluso en las memorias de Cauchy como de Binet se da una especie de referencia. Álvarez (2013) desarrolla con más profundidad lo realizado por Cauchy, lo complementa estudiando mas a fondo a Binet, rogamos al lector dirigirse a la obra de Álvarez si desea profundizar con los autores ya mencionados.

Binet escribe en la introducción de su memoria las siguientes palabras:

> Habiendo tenido ocasión de hablar con el Sr. Cauchy ingeniero de caminos y puentes, del teorema general que acabo de enunciar, me dijo haber llegado en investigaciones análogas a las del Sr. Gauss, a teoremas de análisis que debían tener relación con los míos. Me he asegurado de ello echando un vistazo a sus

> fórmulas; pero ignoro si tienen la misma generalidad que las mías: hemos llegado a ellas, creo, por vías muy diferentes (Binet, 1813. P 281).

Cauchy al igual que Binet dedica unas palabras para corroborar lo escrito por Binet:

> Yo había conocido el verano pasado en Cherbouurg, donde fui establecido por mi trabajo, este teorema y algunos otros de la misma clase, tratando de generalizar las fórmulas de Sr. Gauss. El señor Binet, siendo mi amigo, tenía los mismos resultados de diferentes investigaciones. De vuelta en Paris, estaba ocupado para continuar mi trabajo, cuando lo fui a ver, me mostró su teorema el cual era similar al mío. Lo que designa como la resultante lo llama factor determinante." (Cauchy, 1813, p. 111)

La memoria de Cauchy está dividida en dos capítulos, siendo el segundo el más extenso con 4 secciones:

En el primer capítulo Cauchy estudia las funciones simétricas basadas en permutaciones, se amplía la noción que se tenía sobre la función simétrica la cual no sólo son la que no se alteran si se permutan sus variables, sino también a la que cambia solo de signo.

Al comienzo contrasta con funciones que no sufren cambio alguno por la permutación de sus variables, es decir las funciones simétricas y teniendo en cuenta el hecho que después de comprobar que las nuevas funciones consisten en términos que alternan los signos + y –, y que si no fuera por los signos alternados estas serían funciones simétricas, entonces decide extender el término de "simétricas", las cuales clasifica a las funciones simétricas. Llama "funciones simétricas alternas" a las que alternan el signo y llama a las funciones que no cambia por permutaciones como "funciones simétricas permanentes", los determinantes vistos por Cauchy podría considerarse que es una clase especial de funciones simétricas alternas.

Sin embargo, para incluirlas, es necesario adoptar una convención, o debe hacerse una extensión de la definición. Por ejemplo, $a_1b_2 - a_2b_1$ no es una función alternante, a menos que los elementos estén tan relacionados que el intercambio de a_1 y a_2 requiere el intercambio de b_1 y b_2 al mismo tiempo; O a menos que la definición sea redactada de tal manera que el intercambio se refiera a sufijos, no a letras. Cauchy comenta:

> … diseño de diversas sucesiones de cantidades
>
> $$a_1, a_2, \dots, a_n$$
>
> $$b_1, b_2, \dots, b_n$$
>
> $$c_1, c_2, \dots, c_n$$
>
> $$. \quad . \quad . \quad .$$
>
> ligadas de tal modo entre sí, que la trasposición de dos índices tomados en una de las sucesiones, necesita ser la misma trasposición en todas otras; … (Cauchy 1813, p.30)

La transposición de dos índices atrapados en una de las sucesiones, requiere la misma transposición en todos los demás; entonces, las cantidades

$$b_1, c_1, \dots, b_2, c_2, \dots, b_3, c_3, \dots$$

se podrán utilizar únicamente como funciones similares

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

y como resultado de ellos las funciones de

$$a_1, b_1, c_1, \dots, a_2, b_2, c_2, \dots, a_n, b_n, c_n, \dots$$

eso no va a cambiar el valor, sino a lo sumo afirmar, bajo transposiciones entre los índices 1, 2, 3, …, n, debe ser incluido entre las funciones simétricas de $a_1, a_2, \dots, a_n$ o, de forma equivalente, los índices 1, 2, 3, …, n. así:

$$a_1^2 + a_2^2 + 4a_1a_2,$$

$$a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_3 + 2c_1c_2c_3,$$

$$a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_2b_1 + a_3b_2 + a_1b_3,$$

$$\cos(a_1 - a_2)\cos(a_1 - a_3)\cos(a_2 - a_3),$$

serán funciones simétricas permanentes, la primera de la segunda orden y la otra tercera parte; y en lugar de

$$a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 - a_2b_1 - a_1b_3 - a_3b_2,$$

$$\operatorname{sen}(a_1 - a_2)\operatorname{sen}(a_1 - a_3)\operatorname{sen}(a_2 - a_3)$$

funciones simétricas se alternarán la tercera orden. "(Cauchy 1813, p.30)

La cuestión de la nomenclatura se resuelve a continuación, esto también se decide sobre la base de la semejanza de las funciones con las funciones simétricas. Se sabe que cualquier función simétrica es representable por un término típico precedido por un símbolo que indica la permutación de las variables, por ejemplo:

$S(a_1b_2)$ *o* $S^2(a_1b_2)$ Representado por $a_1b_2 + a_2b_1$ y $S^3(a_1b_2)$ representado por $a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 + a_2b_1 + a_3b_2 + a_1b_3$

La cuestión significativa que estudia Cauchy es el poder generar a partir de K una función simétrica alternada

$$S\,(\pm K)$$

si los índices aparecen en **K** solo se han de permutar, y por

$$S^n(\pm K)$$

si los índices que deben permutarse son $1, 2, 3, \dots, n$. Por ejemplo, tomando el término típico a_1b_2 tenemos

$$S(\pm a_1b_2) = a_1b_2 - a_2b_1,$$

$$\text{Y } S^3(\pm a_1b_2) = a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1 - a_2b_1 - a_3b_2 - a_1b_3$$

$$S^3(\mp a_2b_1) = S^3(\mp a_1b_3) = \cdots$$

$S^4(\pm a_1b_2)$ es una imposibilidad, como cuando hay cuatro índices a_1b_2 , lo cual no satisface la condición requerida de un término típico. En efecto, Cauchy observa que el número de índices en cualquier lugar del término debe ser el número total o 1 menos.

El número de permutaciones sigue siendo par, es claro que el número de + términos $K_\alpha, K_\beta, \dots$ Es el mismo que el número de términos negativos $K_\lambda, K_\mu, \dots$, siendo esta una generalización de una observación de Vandermonde[18].

Es pertinente comentar que lo que se trabaja a continuación es desarrollado por Álvarez (2013) con más profundidad.

> Cauchy deja en evidencia que en toda función cualquier índice particular se canaliza en otro y si no se efectúa ninguna otra alteración, la expresión resultante debe ser igual a cero, siendo este un teorema con respecto a las funciones alternas que es la generalización de otro teorema ya trabajado por Vandermonde[19].
>
> Por último, debemos observar que el criterio que determina si un K particular pertenece a la clase $K_\alpha, K_\beta, \dots$a la clase $K_\lambda, K_\mu, \dots$ se demuestra incidentemente que es reducible a una forma más práctica. Por ejemplo, si el término es K_θ, puede derivarse de *K*, digamos, mediante el cambio de los sufijos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 en 3, 2, 6, 5, 4, 1, 7, es decir, en el lenguaje de Cauchy se realiza por medio de la sustitución
>
> $$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 3, & 2, & 6, & 5, & 4, & 1, & 7 \end{pmatrix},$$
>
> Transformamos esta sustitución en un “producto” de sustituciones circulares”, es decir, en
>
> $$\begin{pmatrix} 1, & 3, & 6 \\ 3, & 6, & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$
>
> En general, si m es el número de índices y g el de sustituciones circulares de la descomposición, con $g \leq m$, a las sustituciones con $m - g$ par estas son llamadas

[18] Vandermonde observa de que los términos positivo y negativo son iguales en el número de transposiciones o de intercambios.

[19] El teorema desarrollado por Vandermonde mira el efecto de la igualdad de dos índices pertenecientes a la misma serie.

por Cauchy como sustituciones “de primera especie” y “de segunda especie” si $m - g$ es impar; en el primer caso las permutaciones inicial y final de la sustitución son “de la misma clase” y en el segundo “de clase contraria”. De este modo, asignando signo a una permutación, por ejemplo, a la principal, queda fijado el signo de todas. (p.68)

Otra cuestión que comenta Álvarez (2013) en la página 69 es que: otro problema que debe resolver para el caso alternado es determinar las condiciones que ha de tener la función K para poder ser “término indicativo” de una función simétrica alternada $S(\pm K)$. Cauchy prueba que:

> La única condición necesaria para que la función K pueda ser el término indicativo de una función simétrica alternada de la forma
>
> $$S(\pm K),$$
>
> Es que los dos valores de esta función obtenidos, un por un número par y otro por un número impar de transposiciones de los índices contenidos en K, sean siempre diferentes uno del otro. (Cauchy 1813, p.44)

Al final de la primera parte de la memoria de Cauchy este escribe:

> Ahora voy a examinar algunas especies particulares de alternancia de funciones simétricas que están disponibles para ellos en una serie de investigaciones analíticas. Es a través de estas funciones que expresamos los valores generales de lo desconocido que contienen varias ecuaciones lineales. Representan cada vez que las ecuaciones que se formen, y en la teoría general de la eliminación (Cauchy 1813, p.51)

Coincidimos con Álvarez (2013) al establecer la importancia de hacer referencia a los escritos de Laplace, Vandermonde, Bézout y Gauss, de los cuales se adopta el nombre de "*determinante*":

> Voy a examinar ahora particularmente una cierta especie de funciones simétricas alternadas que aparecen en un gran número de investigaciones

analíticas. Por medio de estas funciones se expresan los valores generales de las incógnitas contenidas en varias ecuaciones de primer grado…

… Los Sres. Laplace y Vandermonde las han considerado bajo esta relación en las memorias de la Academia de Ciencias (año 1772), el Sr. Bézout las ha examinado también bajo el mismo punto de vista en su teoría de ecuaciones. El Sr Gauss las ha usado con ventaja en sus investigaciones analíticas a descubrir propiedades generales de las formas de segundo grado, y ha designado a estas funciones bajo el nombre de determinantes. ***Conservaré esta denominación que proporciona un medio fácil de enunciar los resultados***; observaré solamente que se da también algunas veces a las funciones de las que se trata el nombre de resultante de dos o más letras. Así las dos expresiones siguientes, ***determinante y resultante deberán mirarse como sinónimas.*** (Cauchy 1813, p.51)

La segunda parte lleva el título *Funciones alternas simetricas designadas como los determinantes.* Y se abre con la siguiente definición explicativa:

Sea $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$ n cantidades diferentes. Multiplicando el producto de las cantidades:

$$\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3 \dots \mathrm{a}_\mathrm{n}$$

por el producto de sus diferencias:

$$(\mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1)(\mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_1) \dots (\mathrm{a}_\mathrm{n} - \mathrm{a}_1)(\mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_2) \dots (\mathrm{a}_\mathrm{n} - \mathrm{a}_2) \dots (\mathrm{a}_\mathrm{n} - \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1}),$$

se obtendría la alternancia de la función simétrica

$$\mathrm{S}(\pm \mathrm{a}_1^1 \mathrm{a}_2^2 \mathrm{a}_3^3 \dots \mathrm{a}_\mathrm{n}^\mathrm{n})$$

que por lo tanto es siempre igual al producto

$$\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3 \dots \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1}$$

$$\times (\mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1)(\mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_1) \dots (\mathrm{a}_\mathrm{n} - \mathrm{a}_1)(\mathrm{a}_3 - \mathrm{a}_2) \dots (\mathrm{a}_\mathrm{n} - \mathrm{a}_2) \dots (\mathrm{a}_\mathrm{n} - \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1})$$

Supongamos ahora que desarrollamos ese producto, y que en cada desarrollo a largo plazo se reemplaza a cada letra por un segundo índice en cuestión, por ejemplo $a_{r,s}$en lugar de a_r^s, y,$a_{s,r}$ en lugar de a_s^r, esto obtendría un nuevo resultado, que, en lugar de ser representado por

$$S(\pm a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n)$$

estará representado por

$$S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} \dots a_{n\cdot n})$$

la señal S está en las primeras indicaciones de cada letra.

Esta es la forma más general de las funciones a las que me referiré más adelante como los determinantes. Si se asume sucesivamente

$$n = 1, n = 2, \&c$$

se encuentra que

$$S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2}) = a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} - a_{2\cdot 1} a_{1\cdot 2},$$

$$S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3}) = a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} + a_{2\cdot 1} a_{3\cdot 2} a_{1\cdot 3} + a_{3\cdot 1} a_{1\cdot 2} a_{2\cdot 3}$$

$$= a_{1\cdot 1} a_{3\cdot 2} a_{2\cdot 3} - a_{3\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{1\cdot 3} - a_{2\cdot 1} a_{1\cdot 2} a_{3\cdot 3},$$

$$\&c = \cdots ..$$

Y asi sucesivamente para el determinante de segundo orden, tercer orden, &…” (Cauchy 1813, p.51)

En relación con esto es importante notar que realmente hay dos definiciones que se dan.

$$S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} \dots a_{n\cdot n})$$

Que contiene la regla de formación de Leibniz y una mejorada regla de signos. El primero es nuevo y puede ser parafraseado de la siguiente manera:

Si las multiplicaciones indicadas en la expresión:

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n$$

$$\times (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$$

y en el resultado de que cada índice de una potencia sea cambiado en un segundo sufijo, por ejemplo, a^2en $a_{r,s}$, la expresión así obtenida se llama determinante,

y se denota por

$$S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} \dots a_{n\cdot n})$$

En esta definición la regla de los signos y la regla de la transformación son inseparables -una peculiaridad ya observada en el caso de la regla de Bézout de 1764.

Después de las definiciones se introducen varios términos técnicos. Las diferentes n^2 cantidades involucradas en

$$S(\pm a_{1\cdot 1} a_{2\cdot 2} a_{3\cdot 3} \dots a_{n\cdot n})$$

Se disponen así

$$\begin{cases} a_{1\cdot 1} & a_{1\cdot 2} & a_{1\cdot 3} & \dots & a_{1\cdot n} \\ a_{2\cdot 1} & a_{2\cdot 2} & a_{2\cdot 3} & \dots & a_{2\cdot n} \\ a_{3\cdot 1} & a_{3\cdot 2} & a_{3\cdot 3} & \dots & a_{3\cdot n} \\ \&c & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\cdot 1} & a_{n\cdot 2} & a_{n\cdot 3} & \dots & a_{n\cdot n} \end{cases}$$

“En un número igual de filas horizontales y tantas columnas verticales"

Y según se ha dispuesto de esta manera forman una Sistema simétrico de orden n. Las cantidades individuales $a_{1\cdot 1}$ y $\&c$, Se llaman los términos del sistema, y la letra a cuando está libre de sufijos la característica. Los términos conjugados se definen como aquellos cuyos sufijos ("índices") difieren en orden, por ejemplo, $a_{2\cdot 3}$ y $a_{3\cdot 2}$; Y términos que Son auto - conjugados, por ejemplo, $a_{1\cdot 1}$ y $a_{2\cdot 2}$,. . . Se denominan términos principales. Se dice que el determinante pertenece al sistema, o es el determinante del sistema. Las partes del determinante expandido que están conectadas por los signos + y - se llaman productos simétricos.

El producto

$$a_{1\cdot 1}a_{2\cdot 2}a_{3\cdot 3}\dots a_{n\cdot n}$$

de los principales "términos" se denomina producto principal. El "producto principal", sin embargo, también se llama la expresión indicativa del determinante. Es decir el sistema

$$\begin{cases} a_{1\cdot 1} & a_{1\cdot 2} & a_{1\cdot 3} & \dots & a_{1\cdot n} \\ a_{2\cdot 1} & a_{2\cdot 2} & a_{2\cdot 3} & \dots & a_{2\cdot n} \\ a_{3\cdot 1} & a_{3\cdot 2} & a_{3\cdot 3} & \dots & a_{3\cdot n} \\ \&c & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\cdot 1} & a_{n\cdot 2} & a_{n\cdot 3} & \dots & a_{n\cdot n} \end{cases}$$

Derivado del sistema anterior por intercambio de los sufijos de cada término se dice que esta conjugado con el sistema anterior. Un símbolo para cada uno de estos sistemas se obtiene tomando el último "término" de su primer resultado horizontal", y encerrando el "término" entre paréntesis: de esta manera se nos permite decir que $(a_{1\cdot n})$ y $(a_{n\cdot 1})$ son sistemas conjugados.

En el curso de estas explicaciones se observa incidentalmente una modificación de la regla de la formación del término, tomando la forma especialmente aplicable cuando las cantidades del sistema se han dispuesto en un cuadrado. La formulación de Cauchy de esta regla ahora es:

> Para formar cada uno de los términos en cuestión, es suficiente multiplicar la cantidad que se encuentra diferente tomada, respectivamente, en las diversas columnas verticales del sistema, y que se encuentra al mismo tiempo en las diversas líneas horizontales del sistema. (Cauchy 1813, p.55)

Aquí podemos notar de pasada que la eliminación de los "términos" en un cuadrado podría haber permitido a Cauchy señalar (lo cual no hizo) la diferencia entre el uso de Gauss de la palabra "determinante" de la suya, diciendo que el "determinante de una forma" tenía su conjugado "términos" igual.

La regla de los signos aplicables a las funciones alternas en general se modifica para el caso especial de los determinantes y toma la siguiente forma:

Teniendo en cuenta cualquier producto simétrico para el que la señal fue publicada en el determinante

$$S(\pm a_{1\cdot 1}a_{2\cdot 2}a_{3\cdot 3}\dots a_{n\cdot n})$$

basta con aplicar la norma que se utiliza para determinar el signo de un término tomado a voluntad en una función simétrica alterna, si

$$a_{\alpha\cdot 1}a_{\beta\cdot 2}a_{\gamma\cdot 3}\dots a_{\varsigma\cdot n}$$

es un producto simétrico en cuestión, y g indican el número de sustituciones circular equivalente a la sustitución

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ \alpha & \beta & \gamma & \dots & \varsigma\end{pmatrix}$$

este producto se verá afectado si el signo $+\ n\ -\ g$ es un número par, y el signo $-$ en el caso contrario.

Así, si el signo del término

$$a_{6\cdot 1}a_{8\cdot 2}a_{3\cdot 3}a_{1\cdot 4}a_{9\cdot 5}a_{2\cdot 6}a_{5\cdot 7}a_{4\cdot 8}a_{7\cdot 9}$$

en el determinante

$$S(\pm a_{1\cdot 1}a_{2\cdot 2}a_{3\cdot 3}\dots a_{9\cdot 9})$$

buscando, escribimos la serie de sufijos primeros 6, 8, … bajo los sufijos correspondientes del "producto principal", es decir, bajo las series 1, 2, 3, …, 9, obteniendo la sustitución

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 6 & 8 & 3 & 1 & 9 & 2 & 5 & 4 & 7\end{pmatrix}$$

Esto nos separamos en sustituciones circulares, encontrándolas tres en número, a saber,

$$\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 7 & 9\\ 9 & 5 & 7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 6 & 8\\ 6 & 8 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

y siendo el determinante del noveno orden, de ahí concluimos que el signo deseado es $(-)^{9-3}$, es decir, +. En relación con este tema se da una modificación de la regla de Cramer, no se hace referencia a los "trastornos" en absoluto. Puesto en el menor número posible de palabras es – el signo del término $a_{\alpha\cdot 1}a_{\beta\cdot 2}a_{\gamma\cdot 3}\dots a_{\varsigma\cdot n}$ es el mismo que el signo del producto-diferencia de los primeros sufijos, es decir, el signo de

$$(\beta - a)(\gamma - a)\dots(\varsigma - a)(\gamma - a)\dots$$

por ejemplo, el signo de

$$a_{6\cdot 1}a_{8\cdot 2}a_{3\cdot 3}a_{1\cdot 4}a_{9\cdot 5}a_{2\cdot 6}a_{5\cdot 7}a_{4\cdot 8}a_{7\cdot 9}$$

lo que se pretende arriba, es el signo del producto de las diferencias

$$6,8,3,1,9,2,5,4,7$$

es decir, el signo de

$$(7-4)(7-5)(7-2)(7-9)(7-1)(7-3)(7-8)(7-6)$$

$$\times (4-5)(4-2)\dots(4-6)$$

$$\times (5-2)\dots(5-6)$$

$$\dots\dots$$

$$\times (8-6)$$

El objeto que Cauchy tenía en vista al exponer la regla en esta forma innecesariamente compleja era sin duda, para demostrar su identidad esencial con la regla implicada en su nueva definición:

> Es fácil demostrar esta regla por lo anterior, espera una transposición hecho entre los dos índices está en constante cambio, como hemos demostrado, el producto del signo
>
> $$\left(a_\beta - a_\alpha\right)\left(a_\gamma - a_\alpha\right)\dots\left(a_\varsigma - a_\alpha\right)\left(a_\gamma - a_\alpha\right)$$
>
> y en consecuencia a la del producto

$(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) \ldots (\varsigma - \alpha)(\varsigma - \beta) \ldots$ (Cauchy 1813, pg.58)

Cauchy da una serie de demostraciones y definiciones en relación a los determinantes, consiguiendo que este fuera el primer paso para la apertura de la ***teoría de determinantes.*** Para mostrar todo el alcance de la teoría de Cauchy mostramos el siguiente esquema, el cual es una adaptación de la tabla de avance de la teoría de determinantes de Muir (1960, pg. 132), mostramos los temas recogidos por Cauchy de los anteriores autores, y su posterior formalización de dichos conceptos:

	Cauchy
Leibniz	• Una regla para determinar los signos de los términos en un resultado. • La regla para formar los términos de la expresión que se igualan a cero
Cramer	• La regla para encontrar el denominador común
Bézout	• Una regla combinada de formación de signos
Vandermonde	• El efecto de la igualdad de dos índices pertenecientes a la misma serie • El efecto de intercambiar dos índices consecutivos • Observación de la igualdad de los términos positivos y negativos
Laplace	• El nombre de resultante para las nuevas funciones
Lagrange	• Identidades obtenidas de las cuales Gauss formaliza en el capítulo sobre las formas cuadráticas
Gauss	• El nombre de “determinante” y su significado en las formas cuadráticas y ternarias.
Binet	• producto de determinantes

Tabla 3 Avance de la teoría de determinantes

Comentarios finales del análisis histórico epistemológico.

El término "determinante"

Arthur Cayley es considerado el fundador de la teoría de matrices, aunque el término "matriz" es debido a Joseph Sylvester en el año de 1850. De igual manera, Vandermonde es considerado el fundador de la teoría de determinantes, aunque el término determinante se debe a Gauss; aparece por primera vez en su obra del año 1801 (Disquisiciones Arithmeticae) en la cual estudia la clasificación de formas cuadráticas. Gauss uso este término debido a que "determina" completamente las propiedades de las formas cuadráticas. Sin embargo, el concepto de determinante dado por Gauss no es el mismo que hoy conocemos, resulta ser el mismo, pero con signo contrario.

Leibniz en 1693 uso la palabra "resultante" para referirse al determinante, también probó el resultado conocido como la regla de Cramer, además mostró que un determinante se puede expandir usando columnas, lo que hoy se conoce como la expansión de Laplace, también, como Gauss, uso los determinantes en el estudio de sistemas de coeficientes de ecuaciones cuadráticas.

Curiosamente y sin conocer los trabajos de Leibniz publicados hasta 1850, el término resultante es empleado por Laplace (1772) (en un estudio sobre las orbitas de los planetas) para señalar lo que conocemos como determinante.

Fue Cauchy el que definitivamente en 1812 establece el término determinante y da la definición actualmente conocida mediante sumas de productos con signos basados en permutaciones, definición debida a Leibniz inicialmente y la presenta como la única función multilineal alternada sobre un campo que toma el valor de 1 en la matriz identidad.

Resumiendo, sin contar con un término que corresponda a la idea de determinante, estos aparecen y se calculan al comienzo en ejemplos concretos de tamaño 2×2 y 3×3. Como en la mítica Macondo de nuestro Nobel Gabriel García

Márquez, el mundo de la matemática del siglo XVII era tan nuevo que muchas cosas carecían de nombre y había que señalarlas con el dedo.

El caso general $n \times n$ (la regla de Cramer): el rigor en las definiciones y demostraciones.

El propio Gabriel Cramer anunció la regla general para resolver sistemas de ecuaciones $n \times n$ en su obra del año 1750 sobre curvas algebraicas[20]. Sin embargo, la regla aparece enunciada en un apéndice y sin ofrecer prueba alguna de la misma, limitándose el autor con señalar: "uno da el valor de cada incógnita formando n fracciones de las cuales el común denominador tiene tantos términos como existan permutaciones de n cosas". (Cramer, 1750. P.658)

Vandermonde en su obra "Memoire sur l'elimination" del año 1772 en cuanto a demostraciones se refiere escribe: "me contentaré con desarrollar los ejemplos más simples; esto bastará para captar el espíritu de la demostración, que tiene que ser inductiva, dada la naturaleza asimismo inductiva de la definición" (Vandermonde, 1772).

Vandermonde da la definición combinatoria inductiva de determinante a partir de un cuadrado de coeficientes. La inducción se establece en el desarrollo por los elementos de la primera fila, indicando que daría igual tomar la primera columna. Hecho esto prueba que, si dos filas o columnas son iguales, la expresión, es decir, el determinante, se anula.

De lo anterior se deduce que, aunque para Leibniz la matemática debía ser rigurosamente deductiva, en lo que concierne a la teoría de determinantes, en un inicio, las definiciones y las demostraciones no eran muy rigurosas. El rigor tuvo que esperar

[20] Una geometría analítica del plano llevado a un nivel avanzado mediante el estudio del álgebra.

hasta Cauchy (1812), Jacobi (1830) y más tarde Kronecker y Weierstrass durante los años 1850 y 1860.

La definición axiomática del determinante que hoy conocemos como la única función multilineal alternada y que toma el valor 1 en la matriz identidad se debe a Kronecker y Weierstrass.

Las conferencias de Weierstrass fueron publicadas después de su muerte en 1903 en la nota sobre la teoría de determinantes. En ese mismo año, las conferencias de Kronecker sobre determinantes fueron publicadas, también como obra póstuma. (Luzardo y Peña, 2006. P 164)

Para finalizar este análisis histórico-epistemológico cabe resaltar la importancia del trabajo de Álvarez (2013), de allí surgen y se toman varios apartes que complementarón en gran manera nuestro análisis.

ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Introducción al álgebra lineal. Howard Anton, tercera edición, 1976.

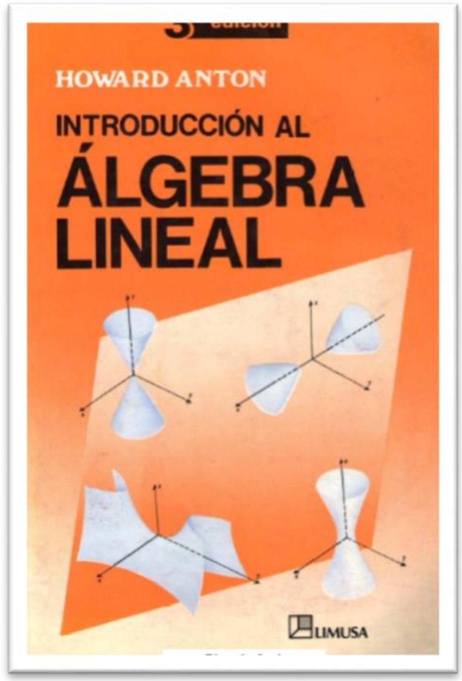


Ilustración 9- Portada del libro: introducción al álgebra lineal.

Se escogió esta edición antigua del libro de Howard Anton debido al tratamiento que realiza del concepto de determinante al introducir un enfoque combinatorio en la parte inicial, en las posteriores ediciones el enfoque combinatorio es trasladado a la parte final y es visto como algo "curioso" y que no es necesario trabajar en el aula de clase. Consideramos esta edición como algo única en este sentido y por eso se decidió describirlo con detalle, recomendamos al lector ver esta descripción o remitirse al libro en su defecto, cualquiera de las dos opciones es viable, aunque, una parada obligatoria es el cuadro comparativo realizado en la reflexión final de esta investigación, la cual se realiza un comparativo de ciertos criterios de los libros analizados, así que empecemos:

El libro Introducción al Álgebra Lineal de Howard Anton en su tercera edición del año 1976 proporciona un tratamiento elemental de la materia, en la cual no se requiere saber de cálculo sin embargo plantea algunos ejercicios adicionales para aquellos que han estudiado cálculo.

El propósito del autor con este libro es presentar de la manera más clara posible los fundamentos del álgebra lineal dando prioridad al aspecto pedagógico.

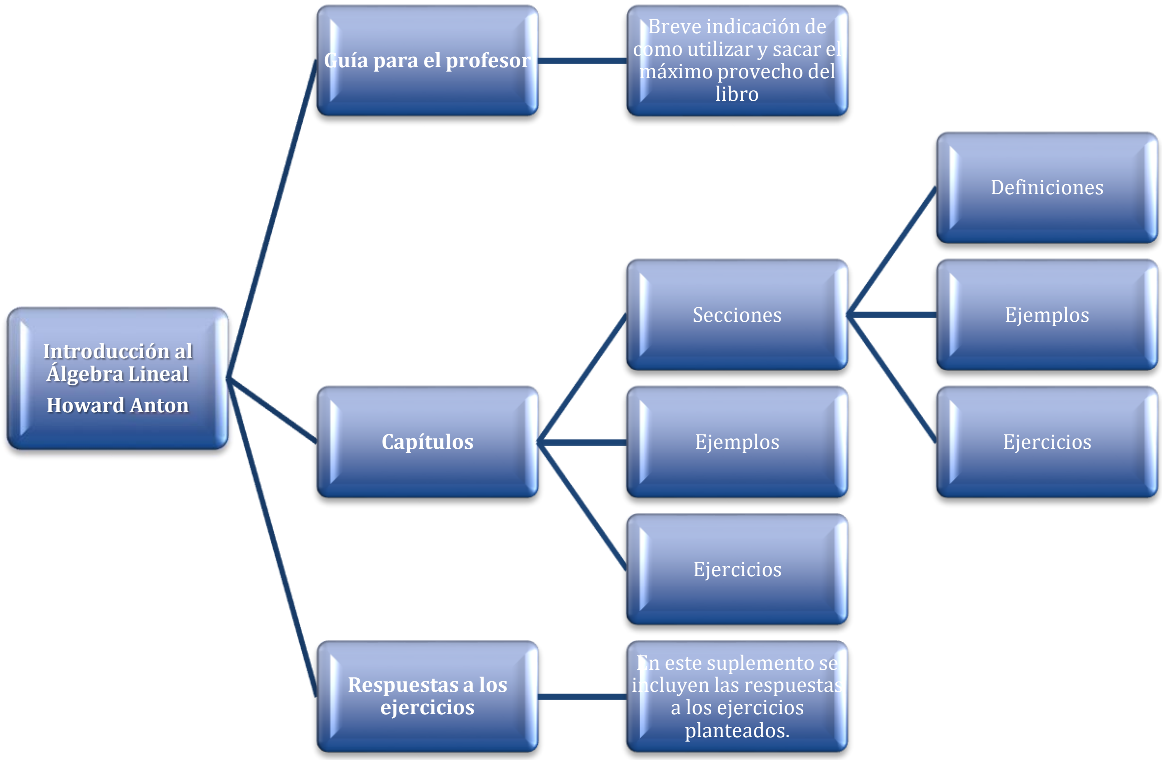
En cuanto a las demostraciones de los teoremas prefirió ser un poco más selectivo, dando prioridad a aquellas que consideró con mayor valor pedagógico y dejando para el final aquellas que a pesar de tener también cierto valor pedagógico son más difíciles y eliminó por completo las que consideró que no aportaban dicho valor, haciendo énfasis en esos casos en la aplicación del teorema.

> La filosofía aplicada al ordenamiento de este libro, que Anton considera es la mejor a nivel pedagógico, es que "el profesor debe ir de lo familiar a lo desconocido y de lo concreto a lo abstracto" (Pág. 7)

Así, dedica el primer capítulo del libro a los sistemas de ecuaciones lineales, y posteriormente, de manera similar a como lo hacen otros libros de texto, dedica un capítulo completo a la presentación del concepto de determinante, sin embargo, existe la particularidad que en el desarrollo del capítulo precedente no se menciona en ningún momento el concepto de determinante.

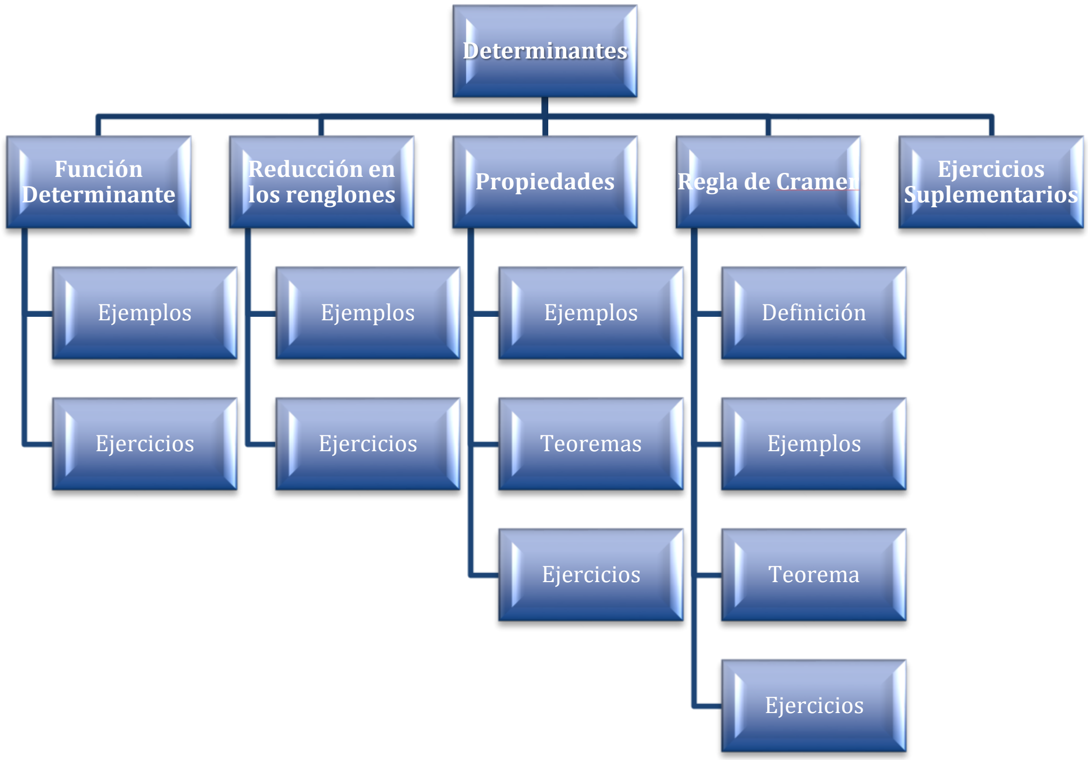
Esta tercera edición no presenta cambios significativos con respecto a las anteriores, se introducen algunos ejercicios complementarios, una sección nueva sobre geometría de transformaciones lineales, simplificaciones de unos ejercicios de cálculo, inclusión de nuevos ejemplos y el suplemento contiene algunos temas nuevos como geometría plana, equilibrio de cuerpos rígidos, problema de asignación y graficas con computadora.

Básicamente el libro se encuentra estructurado de la siguiente manera:



Esquema 4. Estructura del libro: Álgebra Lineal, Howard Anton..

Cada capítulo tiene una estructura similar a lo que se plantea en la gráfica, sin embargo, cada uno tiene sus particularidades según el tema del que trate. En particular el capítulo dedicado a los determinantes tiene la siguiente estructura:



Esquema 5. Estructura del tema determinantes en el libro.

Como se puede observar los teoremas son tratados en puntos particulares y no en generalidades en cuanto a los determinantes como tal ya que el autor comprende el determinante como una función que a una matriz asocia un número real, a saber:

"El lector ya conoce funciones como: $f(x) = sen\,x$ y $f(x) = x^2$, las cuales asocian un número real f(x) con un valor real de la variable x. Dado que tanto x como $f(x)$ toman únicamente valores reales, se pueden describir esas funciones como funciones de valor real de una variable real. En esta sección se inicia el estudio de funciones con valor real de una variable matricial, es decir funciones que asocian un número real f(x) con una matriz X. El objetivo principal es el estudio de una de esas funciones denominada función determinante." (Anton, 1976, p.77)

Luego de hacer esta presentación asociada a conceptos del cálculo, más que a conceptos de álgebra lineal, menciona que esta función determinante tendrá aplicaciones en la teoría de sistemas de ecuaciones y en el cálculo de inversas de matrices.

Así mismo, se enuncia un prerrequisito para poder llegar a definir la función determinante: *"permutación"*, se presentan una cantidad de ejemplos a fin de clarificar dicha cuestión y se enuncia una característica de las permutaciones relacionada con su paridad. Aclarando que “una permutación es par, si el número total de inversiones es un entero par, y se dice que es impar, si el número total de inversiones es un entero impar”. (p. 79)

Luego se define el producto elemental tomado de una matriz A y se relaciona con las definiciones dadas de permutación, para finalmente definir la función determinante de la siguiente manera: “Sea A una matriz cuadrada. La función determinante se denota por det, y se define $det\,(A)$ como la suma de todos los productos elementales con signo tomados de A” (Anton, 1976, p. 81).

Es interesante este tipo de definición de determinante debido a que se sala de cualquier marco de referencia de las definiciones comunes de diferentes libros de álgebra lineal utilizados.

Según menciona el autor, en esta presentación del determinante:

> “Se ha aplicado el enfoque clásico de las permutaciones. En opinión del autor, es menos abstracto que el enfoque a través de n formas lineales alternantes y da al estudiante una mejor comprensión intuitiva del tema que un desarrollo inductivo” (Anton, 1976, p. 7)

A partir de allí se genera la introducción de este enfoque combinatorio, Anton indica que: “una permutación del conjunto de enteros $\{1,2,\ldots,n\}$ es un arreglo de estos enteros en algún orden sin repeticiones” (Anton, 1976, p. 112)

Pone como ejemplo la permutación de 3 enteros, donde indica que 1,2 y 3 tienen seis permutaciones diferentes, a saber:

$$(1,2,3)\ (2,1,3)\ (3,1,2)$$

$$(1,3,2)\ (2,3,1)\ (3,2,1)$$

indica que un método conveniente para enumerar las permutaciones es por medio de un árbol de permutaciones, el cual ilustra con el siguiente ejemplo:

Enumerar todas las permutaciones del conjunto de enteros $\{1,2,3,4\}$

Presenta la forma de resolverlo gráficamente mediante un árbol donde el punto o número superior representa las posibilidades para la primera posición, de él salen 3 ramas que son las posibilidades para la segunda posición, de cada una de ellas salen 2 ramas más que son las posibilidades para la tercera posición y por ultimo nos queda una sola rama que es la cuarta y última posición.

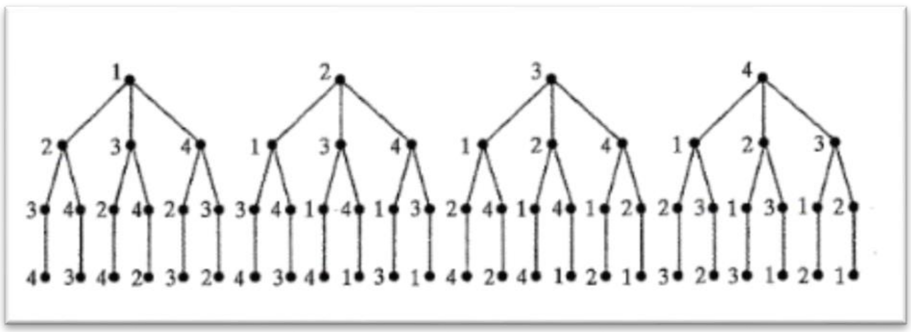


Ilustración 10 .Árbol de Permutaciones

Con este ejemplo se observa que existen 24 permutaciones para el conjunto $\{1,2,3,4\}$ lo cual se deduce mediante el siguiente razonamiento: la primera posición tiene 4 posibilidades de combinación, la segunda tiene 3 posibilidades, la tercera 2 y la última solo una posibilidad, así las posibles combinaciones serían $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, es decir, 24 posibles combinaciones, o cuatro factorial.

Paso seguido Anton denota lo que es una permutación general del conjunto $\{1,2, \ldots, n\}$ la cual escribe $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. Aquí j_1 es el primer entero de la permutación, j_2 es el segundo, y así sucesivamente. Se dice que en una permutación $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ ocurre una inversión siempre que un entero mayor precede a uno menor. El número total de inversiones que ocurren en una permutación puede obtenerse como sigue: 1) se encuentra el número de enteros que son menores que j_1 y que están después de j_1 en la permutación; 2) se encuentra el número de enteros que son menores que j_2 y que están después de j_2 en la permutación. Se continúa este proceso de conteo para $j_3, \ldots, j_{n-1}$. La suma de estos números es el número total de inversiones que hay en la permutación.

Luego propone un ejercicio para determinar el número de permutaciones en unos conjuntos dados, y pasa a la siguiente tabla de ejemplo de la clasificación de las permutaciones:

Permutación	Número de inversiones	Clasificación
(1, 2, 3)	0	par
(1, 3, 2)	1	impar
(2, 1, 3)	1	impar
(2, 3, 1)	2	par
(3, 1, 2)	2	par
(3, 2, 1)	3	impar

Ilustración 11 .Clasificación de las Permutaciones.

Pasa ahora a definir el "producto elemental de una matriz A nxn se entiende cualquier producto de n elementos de A, de los cuales ningún par de elementos proviene del mismo renglón o de la misma columna." (Anton, 1976, p. 114)

Para explicar este concepto da el siguiente ejemplo:

Se pide enumerar los productos elementales de las siguientes matrices:

$$\text{a)}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{b)}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Solución a)

Como cada producto elemental tiene dos factores, y como cada factor proviene de un renglón bien diferente, entonces un producto elemental se puede escribir de la forma.

$$a_1 - a_2 -$$

Donde los espacios en blanco indican números de columna. Como ningún par de factores en el producto proviene de la misma columna, entonces los números de columna deben ser 12 o 21. Así los únicos productos elementales son $a_{11}a_{22}$y $a_{12}a_{21}$.

Solución b)

Como cada producto elemental tiene tres factores, cada uno de los cuales proviene de un renglón diferente, entonces un producto elemental se podría escribir de la forma:

$$a_1 - a_2 - a_3 -$$

Como ningún par de factores en el producto proviene de la misma columna, entonces los números de columna no tienen repeticiones, en consecuencia, deben formar una permutación del conjunto $\{1,2,3\}$. Estas $3! = 6$ permutaciones producen la siguiente enumeración de productos elementales:

$$a_{11}a_{22}a_{33} \quad a_{12}a_{21}a_{33} \quad a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \quad a_{12}a_{23}a_{31} \quad a_{13}a_{22}a_{31}$$

Como indica este ejemplo una matriz $A\ n \times n$ tiene $n!$ productos elementales. Son los productos de la forma $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$, donde $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ es una permutación del conjunto $\{1,2, \dots, n\}$ Por producto elemental con signo de A se entiende un producto elemental $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$ multiplicado por $+1$ o por -1. Si $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ es una permutación par, se usa el signo +, y si $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ es una permutación impar se usa el signo$-$.

Luego se da el siguiente ejemplo:

Enumerar todos los productos elementales con signo de las matrices:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Cuya solución muestra así:

Solución

a)

Producto elemental	Permutación asociada	Par o impar	Producto elemental con signo
$a_{11}a_{22}$	$(1,2)$	par	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	$(2,1)$	impar	$-a_{12}a_{21}$

b)

Producto elemental	Permutación asociada	Par o impar	Producto elemental con signo
$a_{11}a_{22}a_{33}$	$(1,2,3)$	par	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	$(1,3,2)$	impar	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	$(2,1,3)$	impar	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	$(2,3,1)$	par	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	$(3,1,2)$	par	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	$(3,2,1)$	impar	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Ilustración 12. Solución al ejemplo de permutaciones

Ya aquí el autor introduce la definición de combinatoria de una función determinante así:

Sea A una matriz cuadrada se define $\det(A)$ como la suma de todos los productos elementales con signo de A.

Después de la introducción del concepto el autor recurre a una representación simbólica del mismo y parece plantearle al estudiante el uso del razonamiento analítico-aritmético ligado con el aprendizaje memorístico (ilustración 12).

$$\text{(i)}\ \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\text{(ii)}\ \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Ilustración 13. Solución del determinante de orden 2 y 3.

A pesar de la importancia de estas fórmulas, sugiere que para su obtención es importante tener en cuenta el nemotécnico presentado en la ilustración 13.

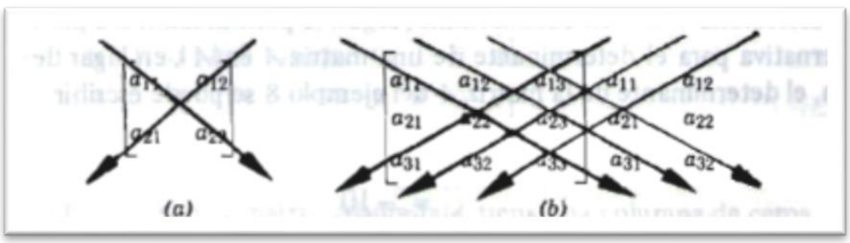
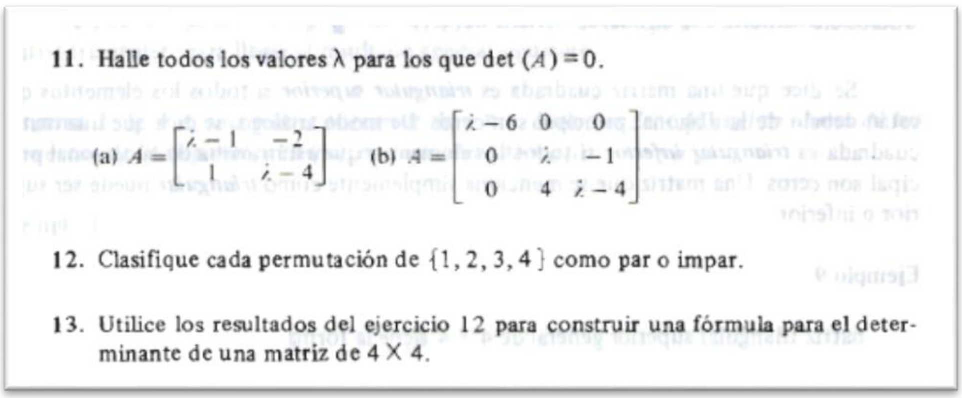


Ilustración 14. Nemotécnico para solucionar un determinante de orden 3.

Posteriormente se plantea una serie de ejemplos en los cuales se aplican estas fórmulas, sin embargo, destaca la importancia de tener presente que este método no funciona para matrices de 4×4 o superiores. Indica que estos generarían una gran cantidad de cálculos que ni la computadora más rápida podría resolver y por esta razón el resto del capítulo lo dedica a desarrollar otras propiedades que simplifican el cálculo para matrices de $n \times n$.

La sección dedicada a este particular concluye indicando que una forma común de representar el "determinante de A es: $\det(A) = \sum \pm a_1 j_1\, a_2 j_2 \ldots a_n j_n$ donde $\sum$ indica que se deben sumar los términos sobre todas las permutaciones $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ y se selecciona + o – en cada término, según la permutación sea par o impar." (p. 82)

La presentación de los conceptos, fórmulas y reglas nemotécnicas para el cálculo del determinante de una matriz se presentan a través de unos ejemplos típicos sobre el cálculo del determinante de matrices particulares. Los ejercicios sugeridos apuntan inicialmente al uso del algoritmo, más allá de pedir el cálculo de determinantes donde algunas de las entradas no son números sino letras. Así mismo pide desarrollar una tabla en la que se enumeren los productos elementales para una matriz de tamaño 4×4 y a partir de ella encontrar una fórmula para el determinante de una matriz de dicho orden. Como ejercicio no típico, aunque pide hallar los valores de λ en una matriz particular que hacen que el determinante de dicha matriz sea cero (Ilustración 14)



11. Halle todos los valores λ para los que $\det(A) = 0$.

(a) $A = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} \lambda - 6 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$

12. Clasifique cada permutación de $\{1, 2, 3, 4\}$ como par o impar.

13. Utilice los resultados del ejercicio 12 para construir una fórmula para el determinante de una matriz de 4×4.

Ilustración 15. Ejemplos de ejercicios planteados.

Posteriormente se presentan otros métodos o propiedades que habíamos mencionado anteriormente para la obtención de determinantes. Comienza con una sección dedicada al cálculo de determinantes mediante la reducción a la forma escalonada de la matriz y se presentan dos ejemplos de dicho cálculo, así como ejercicios de aplicación de dicha técnica, con matrices cuyas entradas son números o letras.

Esto se plantea como “un método alternativo para evaluar los determinantes, que evita la gran cantidad de cálculos relacionados con la aplicación directa de la definición de determinante” (p. 86)

Son presentados dos teoremas que podrán aplicarse una vez reducida la matriz a una triangular o a una versión R escalonada de A, siendo A una matriz de $n \times n$.

Teorema 2. Si A es una matriz triangular de $n \times n$, entonmces $\det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir, $\det(A) = a_{1\cdot 1}a_{2\cdot 2} \dots a_{n\cdot n}$

Teorema 3. Sea A cualquier matriz de $n \times n$.

> (b) Si A'es la matriz que se obtiene cuando un solo renglón de A se multiplica por una constante k, entonces $\det(A') = k \det(A)$.
>
> (c) Si A' es la matriz que se obtiene al intercambiar dos renglones de A, entonces $\det(A') = -\det(A)$.
>
> (d) Si A' es la matriz que se obtiene al sumar un múltiplo de uno de los renglones de A a otro renglón, entonces $\det(A') = \det(A)$.
>
> (p. 88)

Del teorema 3 presentado se omite la demostración y refiere a un ejercicio que plantea probar los casos especiales de éste.

Después de estos ejercicios donde se aplican los teoremas 2 y 3, presenta otras propiedades de la "función determinante", comenzando por la traspuesta de una matriz, la cual Anton (1976) explica de la siguiente manera:

> Sí A es cualquier matriz de $m \times n$, entonces la traspuesta de A se denota A^t y se define como la matriz de $n \times m$ cuya primera columna es el primer renglón de A, su segunda columna es el segundo renglón de A, su tercera columna es el tercer renglón de A, etc. (p. 90)

Se muestran unos ejemplos de esta operación y plantea las siguientes propiedades para ella:

i. $(A^t)^t = A$
ii. $(A + B)^t = A^t + B^t$
iii. $(kA)^t = kA^t$ donde k es cualquier escalar
iv. $(AB)^t = A^t B^t$

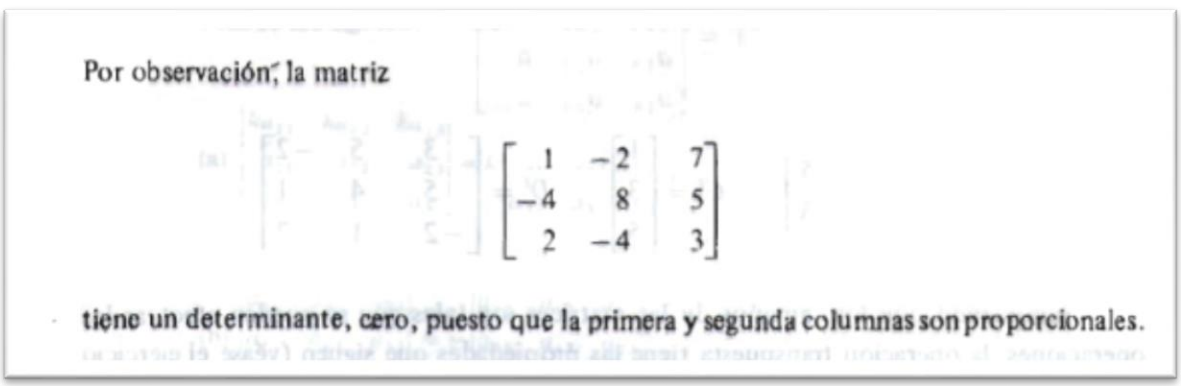
Luego de esto se plantea el teorema 4 con el que se demuestra que A y A^t tienen en realidad los mismos productos elementales con signo.

Teorema 4. Si A es cualquier matriz cuadrada, entonces $\det(A) = \det(A^t)$

Con respecto a esto Anton (1976) refiere:

> En virtud de este resultado, casi todo teorema acerca de los determinantes que contiene la palabra "renglón" en su enunciado, también es verdadero cuando se sustituye la palabra "renglón" por "columna". A fin de probar una proposición relacionada con las columnas. Sólo se necesita transponer la matriz en cuestión para convertir la proposición acerca de las columnas en una referente a los renglones, y a continuación aplicar el resultado conocido correspondiente, respecto a los renglones. (p.91)

Para demostrar este teorema presenta ejemplos como el que se puede apreciar en la ilustración 15.


Por observación, la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

tiene un determinante, cero, puesto que la primera y segunda columnas son proporcionales.

Ilustración 16. Demostración teorema 4.

También explica la forma de calcularlo por otros métodos como convertir A en una matriz triangular, tal como se aprecia a continuación:

$$\det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

El autor destaca que siempre es conveniente estar atentos a las columnas que conforman las matrices y que nos podrían permitir acortar los cálculos mediante la aplicación de las propiedades conocidas. Este apartado incluye la relación entre el determinante de una matriz y la existencia de su inversa.

Anton (1976) en el quinto teorema que se refiere a dos matrices cuadradas del mismo tamaño así.

Teorema 5. Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (p.94)

El autor se refiere a este teorema de la siguiente manera: "La elegante sencillez de este resultado, comparada con la compleja naturaleza tanto de la multiplicación matricial como de la definición de determinante, es interesante y sorprendente." (Anton, 1976; p. 94) Sin embargo, prefiere omitir la demostración de este teorema y pasar a la explicación del sexto:

Teorema 6. Una matriz cuadrada A es inversible si y solo si $\det(A) \neq 0$.

La demostración del teorema 6 se basa en teoremas anteriores y lo resuelve utilizando las propiedades de matrices elementales.

Corolario. Sí A es inversible, entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Demostración. Ya que $A^{-1}A = 1, \det(A^{-1}A) = \det(1)$; es decir: $\det(A^{-1})\det(A) = 1$. Supuesto que $\det(A) \neq 0$, se puede completar la demostración al dividir todo entre $\det(A)$ (Anton, 1976, p. 95).

Los ejercicios planteados para el final de esta sección tienen la misma estructura que los ejercicios anteriores proponiendo la aplicación de las propiedades y teoremas anteriormente expuestos.

En una sección final del capítulo se definen *menor* y *cofactor*, y se presenta la regla de Cramer como parte de fórmulas que permitirán hallar la solución de un sistema o calcular la inversa de una matriz, si esta existe. En esta sección se presentan tres teoremas y los ejercicios siguen la misma estructura de las secciones anteriores.

La Regla de Cramer la define así:

> Si A es una matriz cuadrada, entonces el menor del elemento a_{ij} se denota por M_{ij}y se define como el determinante de la sub matriz que se deja después de eliminar de A el i-ésimo renglón y la j-ésima columna. El número $(-1)^{i+j}M_{ij}$ se denota por C_{ij} y se conoce como cofactor del elemento a_{ij} (Anton, 1976; p. 98)

Luego de una serie de ejemplos y ejercicios con la aplicación de esta regla llegamos al siguiente teorema:

Teorema 7. Se puede calcular el determinante de una matriz A de $n \times n$ multiplicando los elementos de cualquier renglón (o columna) por sus cofactores y sumando los productos que resulten, es decir, para cada $l \le i \le n$ y $l \le j \le n$,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna)

Y

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(desarrollo por cofactores a lo largo del j-ésimo renglón)

Este teorema se explica y se demuestra con una serie de ejercicios entre los que se hace la observación de que la estrategia que resulta mejor a la hora de evaluar determinantes por medio del desarrollo de cofactores es aplicándolo en el renglón o columna que contenga el mayor número de ceros, ya que esto ahorrará cálculos y facilitará el proceso.

Presenta a continuación:

Teorema 8. Si A es una matriz inversible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Demostración. Se demostrará primero que

$$A\ adj(A) = \det(A)\, I$$

Esta demostración completa se omitirá puesto que es muy larga y no aporta mayores elementos al punto central de esta investigación que es el punto de vista epistemológico de los determinantes. Se dan en el libro, una serie de ejemplos de la aplicación y luego se pasa al teorema 9 que es propiamente la regla de Cramer:

Teorema 9. *(Regla de Cramer).* Si $AX = B$ es un sistema de n ecuaciones lineales en n incognitas tal que $\det(A) \neq 0$, entonces el sistema tiene una solución única. Esta solución es

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

en donde A_j es la matriz que se obtiene al reemplazar los elementos de la j-ésima columna de A por los elementos de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

esta demostración es extensa y constituye conocimientos que se han desarrollado a lo largo de los otros teoremas de formas diferentes en su aplicación, por ende, se comentará la teoría presentada por Dorier mencionada en el capítulo anterior.

Dorier (2002) afirma que de acuerdo al análisis epistemológico presentado parecía conveniente el inicio del proceso de enseñanza del álgebra lineal a partir del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, y consecuente con este estudio ir realizando una coordinación con los conceptos que le están íntimamente ligados como lo es el concepto de determinante.

La presentación del concepto de determinante en el libro de Anton (1976) escapa a esta perspectiva pues desarrolla la construcción del concepto de manera independiente de los sistemas de ecuaciones lineales, más allá de hacer mención en la parte final del capítulo de las aplicaciones que los determinantes pueden tener en la solución de dichos sistemas.

Cabe acotar en esta parte que, por la época en que fue editado, la perspectiva bajo la cual está escrito el libro es una perspectiva aún asociada a la Matemática Moderna prevaleciente en su momento. El autor del libro refleja una postura adherida a la idea de avanzar de lo concreto a lo abstracto, y muchos de los conceptos tratados se presentan mediante ejemplos numéricos y hasta donde es posible a través de una interpretación geométrica.

El mismo autor menciona que en algunas partes del libro se omiten las demostraciones y se hace énfasis en la aplicación de los teoremas, lo que a la luz de las percepciones de autores como Sierpinska (ce. Dorier, 2002) podría considerarse como una decantación por una aplicación técnica donde prevalece el pensamiento práctico sobre el teórico.

Por último, los ejemplos y los ejercicios presentados en este capítulo siguen la estructura clásica del desarrollo de los algoritmos presentados en cada sección; a lo sumo dos o tres ejercicios de cada una de ellas representan una postura diferente, pero pueden terminar conduciendo al desarrollo de algoritmos antes requeridos o relacionados con otro campo de las matemáticas.

Álgebra Lineal. Una Introducción Moderna, David Poole, tercera edición, 2011.

La tercera edición del libro *Álgebra Lineal. Una Introducción Moderna* de David Poole, publicada en el 2011, surge como mejora de la segunda edición y conserva el enfoque y las características de la misma.

La intención del autor con este libro es mostrar el álgebra lineal más allá de lo meramente teórico y permitirles a los alumnos descubrir sus distintas aplicaciones. Esto convierte la cátedra en una materia más que interesante a la hora de hacer los estudios sobre el tema.

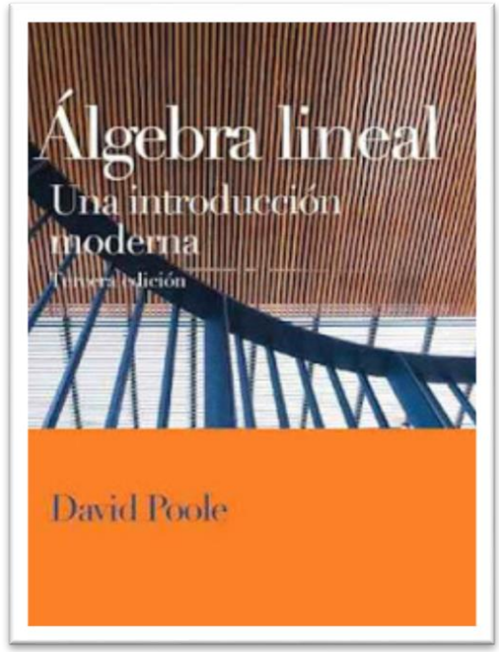


Ilustración 17. Portada del libro: álgebra lineal una introduccion moderna.

El libro cuenta con características particulares que lo han convertido en uno de los textos de álgebra favoritos de los educadores. Los temas que se tratan en el libro son abordados en un lenguaje simple, fácil de comprender por todos, se dan ejemplos y aplicaciones de los teoremas y de los ejercicios propuestos. Así mismo se contextualiza la información que se está estudiando con breves apartados históricos contenidos a manera de comentario o información adicional, esto porque el autor considera necesario que los alumnos sepan "algo acerca de la historia de las matemáticas y lleguen a verla como un esfuerzo social y cultural, así como científico" (Poole, 2011, p. XIII)

Esto va de la mano o apoya el sentido de esta investigación el cual es destacar la importancia a nivel histórico y etimológico de temas matemáticos, específicamente las determinantes. Por esto es destacable la visión de este autor con respecto al tema, el cual incorpora a lo largo de todo el libro dando pequeños detalles biográficos de los autores y contextualizando a nivel histórico los teoremas y conceptos que se presentan. A pesar de esto es de destacar que ninguno de sus 7 capítulos y 5 apéndices está dedicado exclusivamente a determinantes.

La forma conversacional en la que está escrito el libro es una de las características poco convencionales que le definen como una obra innovadora. En ella se pretende hacer una introducción a la materia, de uno o dos semestres, mediante ejemplos concretos que permitan descubrir una gran variedad de aplicaciones en distintas áreas del conocimiento.

A nivel pedagógico se adapta a cualquier metodología de aprendizaje y a cualquier estilo estudiante, teniendo como principio que "no existe un mejor estilo de aprendizaje. Se adapta a las recomendaciones del *Lineal Álgebra Curriculum Study Group*, y presenta ejemplos concretos que preceden a los abstractos.

Se destaca también el hecho de que los conceptos claves son introducidos al inicio del libro, dejando los conceptos más fundamentales para los puntos específicos en los cuales será desarrollado el tema, repasando luego los conceptos clavé en la medida en que son necesarios o requeridos. Esto le permite al aprendiz tener una idea clara de lo que va a trabajar desde el inicio y le permite familiarizarse con los conceptos antes del momento de llegar a temas más complejos.

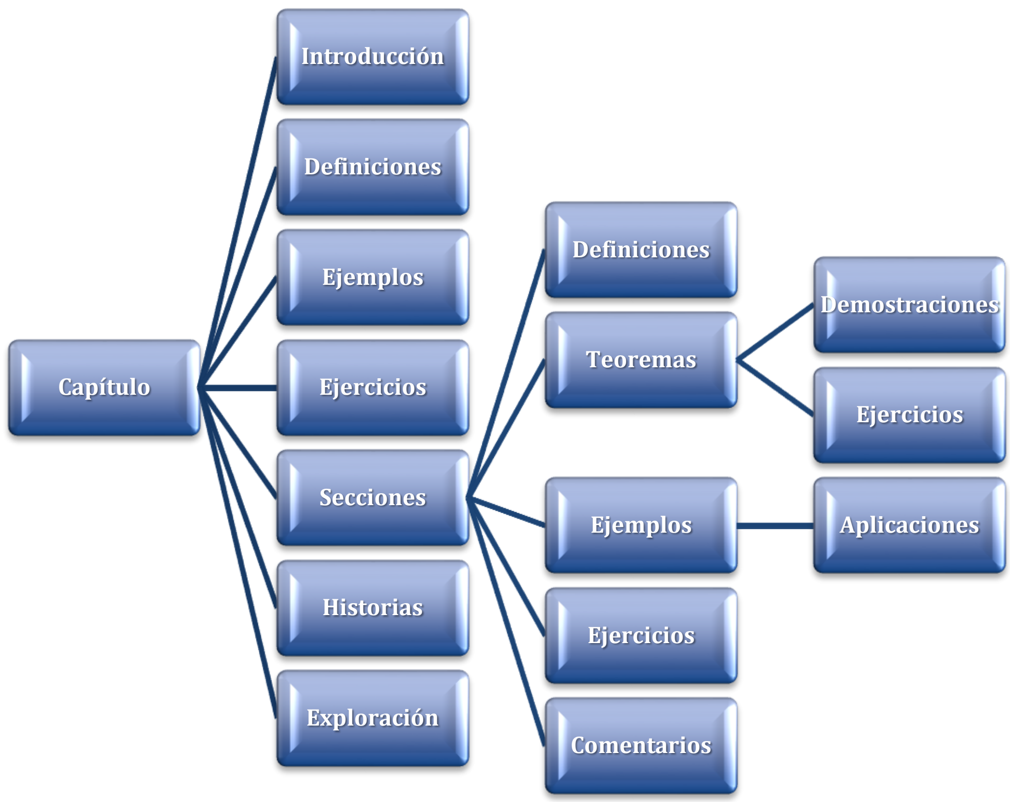
En el libro se hace bastante énfasis en vectores y geometría, teniendo en cuenta que a pesar de que la filosofía del álgebra lineal se fundamenta en vectores principalmente, también es necesaria la intuición que aporta la geometría.

Con respecto a los cambios que se realizaron para con la edición anterior, ésta incorpora los modelos económicos lineales, reorganiza todo el primer capítulo, incorpora más de 400 nuevos ejercicios, mejora temas de redacción, e incluso ha introducido mejoras en el sitio web del libro las cuales se encuentran disponibles para los docentes permitiéndoles su aplicación en la enseñanza de la materia.

Tiene un apartado de Exploraciones en el que los alumnos mediante ejemplos sencillos y ejercicios dinámicos, en algunos casos juegos, pueden irse adelantando de forma intuitiva el contenido del capítulo siguiente.

Tiene un apartado de Aplicaciones en el que se destaca el uso real de estos temas en diferentes disciplinas que van desde la computación hasta la psicología, pasando por distintas ramas del saber. Asimismo, podemos encontrar más de 400 ejemplos sencillos con explicaciones claras y detalles paso a paso de cómo resolver los ejercicios. Cuenta con más de 2000 ejercicios que, dicho sea de paso, son muchos más que los que contienen los libros de texto similares.

En el siguiente esquema se explica cómo está estructurado el libro en cuanto a su contenido, ejercicios, ejemplos y apartados especiales para cada capítulo, incluyendo los teoremas y sus demostraciones, así como las menciones históricas que hace el autor sobre temas puntuales.



Esquema 6. Estructura del libro:Álgebra lineal una introducción moderna.

Como se mencionó anteriormente, este libro a diferencia de otros similares, no dedica un capítulo específico al concepto de determinante, sin embargo, en el apartado 2 del capítulo

4 hace mención extensa del tema e introduce el concepto de determinante contextualizándolo primero en el origen y uso del término.

Destaca el hecho de que en el libro comentan que el concepto de determinante se originó dos siglos antes del concepto de matrices a pesar de que actualmente se enseñan de forma inversa.

En la parte de la notación refiere que el determinante de una matriz puede ser representado con la siguiente notación: $|A|$, así para la matriz anteriormente presentada podemos usar la siguiente definición:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Sin embargo, advierte que esta notación no debe ser confundida con el valor absoluto, indicando que se debe ver el contexto en el que se encuentra la notacion, cual es el propósito que se tiene y a que se refiere.

Finalmente, la definición propuesta de un determinante de orden 3 en el libro se puede observar en la siguiente imagen:

Definición Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Entonces el ***determinante*** de A es el escalar

$$\det A = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Ilustración 18. Definición de determinante de orden 3.

Se muestra siguiendo la anterior definición, puede ser abreviada:

$$\det A = a_{11}detA_{11} - a_{12}detA_{12} + a_{13}detA_{13}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j}\, a_{ij} detA_{ij}$$

Para cualquier matriz cuadrada A $detA_{ij}$ se llama menor – (i,j) de A.

Posteriormente plantea un método diferente en el que se copian las dos primeras columnas de A a la derecha de la matriz donde se toman como productos 6 diagonales en las cuales se agrega posteriormente el signo de suma a los descendentes y de resta a los ascendentes.

Luego de estos métodos pasa a la definición de las determinantes de matrices *n x n*, que podemos observar en la siguiente imagen:

Definición Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$, donde $n \geq 2$. Entonces el ***determinante*** de A es el escalar

$$\det A = |A| = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \qquad (3)$$

Ilustración 19. Determinante de una matriz nxn

Con respecto a la definición presentada anteriormente (ilustración 18) el autor hace la siguiente observación:

Es conveniente combinar un menor con su signo más o menos. Para este fin, se define el cofactor – (i, j) de A como

$$= (-1)^{i+j} detA_{ij}$$

Con esta notación la definición de la ilustración 18 se convierte en

$$detA = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij}$$

Con esta definición, conocida como expansión por cofactores a lo largo del primer renglón tiene la particularidad de que se obtiene exactamente el mismo resultado a expandir a lo largo de cualquier renglón o de cualquier columna y esto lo destaca el autor como un hecho sorprendente. Sin embargo, no entra en la demostración sino hasta el final de la sección de determinantes. Puesto que esta sección es bastante extensa se pasará inmediatamente al Teorema de expansión de Laplace tal como se presenta en el libro en el teorema 4.1:

Teorema de expansión de Laplace

El determinante de una matriz A de n x n, donde $n \geq 2$, puede calcularse como

$$detA = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

(que es la expansión por cofactores a lo largo del i-ésimo renglón) y también como

$$detA = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$$

(la expansión por cofactores a lo largo de la j-ésima columna). (p. 277)

Se recalca la utilidad de este teorema cuando la matriz contiene un renglón o columna con muchos ceros, ya que reduce el número de cofactores que se deben calcular. Esto se ve más claramente con ejemplos presentados en el libro.

En este punto, el autor del libro menciona una breve reseña histórica sobre Laplace donde destaca que fue examinador de Napoleón Bonaparte, y que cuando éste estuvo en el poder sirvió como Primer Ministro del Interior y luego como Canciller del Senado; fue condecorado con el título de Conde del Imperio y posteriormente recibió el título de Marqués de Laplace.

Luego del teorema de Laplace presenta también otros teoremas interesantes que son más eficientes a la hora de calcular el determinante de una matriz de nxn. Al final de este análisis se dan ejemplos y demostraciones de los mismos.

Partiendo de las propiedades de las matrices se pueden evaluar los siguientes teoremas presentados en el libro, por eso el autor presenta los siguientes aspectos:

- *determinante de una matriz triangular*.

El determinante de una matriz triangular es el producto de las entradas en su diagonal principal. Específicamente, si $A = [a_{ij}]$es una matriz triangular de nxn, entonces

$$detA = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

- Matriz cuadrada.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada

a. Si A tiene un renglón (columna) cero, entonces $detA = 0$

b. Si B se obtiene al intercambiar dos renglones (columnas) de A, entonces $detB = -detA$.

c. Si A tiene dos renglones (columnas) idénticos, entonces $detA = 0$

d. Si B se al multiplicar un renglón (columna) de A por k, entonces $detB = kdetA$

e. Si A, B y C son idénticas, excepto que el i-ésimo renglón (columna) de C es la suma de los i-ésimos renglones (columnas) de A y B, entonces $C = detA + detB$

f. Si B se obtiene al sumar un múltiplo de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna), entonces $detB = detA$.

- *Matrices elementales.*

Sea E una matriz elemental de *n x n*.

a. Si *E* resulta de intercambiar dos renglones de I_n, entonces $detE = -1$.

b. Si *E* resulta de multiplicar un renglón de I_n por k, entonces $detE = k$.

c. Si *E* resulta de sumar un múltiplo de un renglón de I_n a otro renglón, entonces $detE = 1$.

Sea *B* una matriz de *n x n* y sea *E* una matriz elemental de *n x n*. Entonces

$$\det(EB) = (detE)(detB)$$

- *Matriz cuadrada.*

Una matriz cuadrada *A* es inversible si y solo si $detA \neq 0$. (p. 280)

Ahora el autor pasa a analizar las determinantes y operaciones matriciales en el libro, donde buscara explica las relaciones entre una y otra, en los casos en los que existan. Así llega al ***Teorema de Cauchy***.

Si A es una matriz de n x n, entonces

$$\det(kA) = k^n detA$$

También hace una breve reseña histórica de Cauchy donde destaca su labor como matemático con más de 700 artículos sobre ecuaciones diferenciales y definiciones.

El libro de Poole es muy completo en el tratameinto de los teoremas y demostraciones, otros de los teoremas mostrados en el libro son los siguientes:

Sí A y B son matrices de *n x n*, entonces

$$\det(AB) = (\det A)\,(\det B)$$

Y

Sí A es invertible, entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Luego pasa a explicar la Regla de Cramer tal como se muestra en la ilustración siguiente.

Regla de Cramer

Sea A una matriz de $n \times n$ invertible y sea $\mathbf{b}$ un vector en $\mathbb{R}^n$. Entonces la solución única $\mathbf{x}$ del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det A} \quad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

Ilustración 20. Regla de Cramer

Como comentario a este teorema el autor agrega que es “computacionalmente ineficiente para todos los sistemas de ecuaciones lineales, excepto los pequeños, pues involucra el cálculo de muchos determinantes” (p. 287)

El siguiente teorema presentado es el de la adjunta o traspuesta conjugada:

Sea A una matriz de n x n invertible. Entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA$$

Y posteriormente la demostración del Teorema de Laplace.

Finalmente, esta sección la concluye con una breve reseña histórica sobre las determinantes. Con la cual se pretende contextualizar los conceptos anteriormente expuestos. Se habla de Seki y Leibniz, que fueron los primeros en introducir el concepto en 1683 y 1693 respectivamente pero no es sino hasta 1748 cuando aparecen formalmente en el tratado de álgebra de MaClaurin quien incluyó la regla de Cramer hasta el tamaño 4x4, posteriormente en 1772 Laplace dio una demostración de su teorema de expansión y la regla fue probada por Cramer en 1750 aplicado el ajuste de curvas. También la sección tiene un apartado interesante sobre una forma de resolver los determinantes, llamado método de condensación.

Método de Condensación de Lewis Carroll

Alicia En El País De Las Maravillas es, sin duda una obra reconocida mundialmente, y del por qué se empezó mencionando esta obra es porque Charles Lutwidge Dodgson, mejor conocido por el seudónimo de Lewis Carroll realizo esta maravillosa obra, también hizo un buen aporte al estudio de los determinantes al crear este método mediante el cual la matriz se va reduciendo "condensando" hasta que nos queda el determinante de cualquier matriz de tamaño $n \times n$. Básicamente se podría decir que es un algoritmo para ir reduciendo un determinante a otros de menor tamaño, pero con una cualidad y es que solo se calculan determinantes de orden 2, sin importar el tamaño de la matriz, es un método interesante, pero tiene una debilidad y resulta que si la matriz posee un coeficiente con valor 0 no funciona el método de condensación, el autor es consciente de ello y recalca que si esto ocurre se puede aplicar propiedades mediante columnas o filas para reducir el cero.

A continuación, Poole explica brevemente en qué consiste el método y como se aplica para la solución de cualquier determinante. Ante todo, plantea que debemos conocer la siguiente definición:

> **Definición** Si A es una matriz de $n \times n$, con $n \geq 3$, el ***interior*** de A, denotado $\text{int}(A)$, es la matriz $(n-2) \times (n-2)$ que se obtiene al borrar el primer renglón, el último renglón, la primera columna y la última columna de A.

Ilustración 21 Definición del método de C.L Dodgson del libro Álgebra lineal, una introducción moderna de David Poole 3ra Ed

Poole establece una analogía que es valida, si imaginamos el proceso de desarrollo de el método de condensación como una pirámide (ver ilustración 22), donde la base A_0 es el determinante original, cada vez que se realiza un procesos en el método el determinante se va reduciendo así de A_0 pasaría a A_1 y así consecutivamente hasta llegar a A_5 que correspondería a una matriz de tamaño 1×1 que contendrá el $detA$. Cada proceso conlleva un numero determinado de soluciones de determinantes de orden 2, esto es lo novedoso e interesante de este sistema, lo cual lo hace fácil de calcular aunque siempre tengan bastantes cálculos.

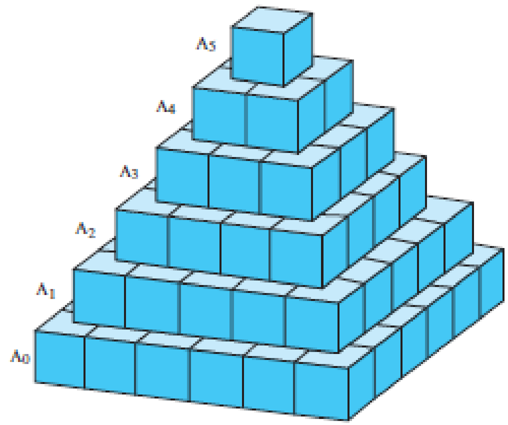


Ilustración 22 Forma del método de condensación del libro Álgebra lineal, una introducción moderna de David Poole 3ra Ed

Poole utiliza el siguiente ejemplo,:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Comenzamos por construir una matriz A_0 de 6×6 cuyas entradas son todas 1. Ahora igualamos $A_1 = A$.

Se va condensando de la siguiente manera: A_1 en una matriz A_2' de 4×4 cuyas entradas son los determinantes de todas las submatrices de 2×2 de A_1:

$$A_2' = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 & -7 & -8 \\ -5 & 7 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 5 & -4 \\ 7 & 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Ahora se divide cada entrada de A_2' por su correspondiente de $int(A_0)$ y obtendremos la matriz A_2 y como A_0 es toda números 1, entonces $A_2 = A_2'$.

Repetimos el procedimiento para obtener A_3' a partir de las submatrices de 2×2 de A_2. Luego se divide cada entrada de A_3' por su correspondiente de $int(A_1)$ y se continúa de esa manera:

$$A_3' = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 11 & -7 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & -8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 & 60 & -27 \\ -30 & 36 & -29 \\ 12 & -4 & 26 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 62/2 & 60/3 & -27/1 \\ -30/-1 & 36/2 & -29/1 \\ 12/1 & -4/-1 & 26/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 20 & -27 \\ 30 & 18 & -29 \\ 12 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A_4' = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 31 & 20 \\ 30 & 18 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 20 & -27 \\ 18 & -29 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 30 & 18 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 18 & -29 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 & -94 \\ -96 & 350 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -42/7 & -94/1 \\ -96/-1 & 350/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -94 \\ 96 & 70 \end{bmatrix}$$

$$A_5' = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -6 & -94 \\ 96 & 70 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = [8604]$$

$$A_5 = [8604/18] = [478]$$

Este resultado se puede comprobar por otros métodos. En líneas generales con este método siempre una matriz A de $n \times n$ producirá una matriz A_n de 1×1 cuyo contenido será el $detA$.

Se puede profundizar más acerca del método de condensación de Lewis Carrol en el documento de Álvarez (2013) páginas 153-154, el cual muestra detalles históricos y de la importancia computacional que tiene el método.

Ya para finalizar esta descripción del libro de Poole se hace necesario comentar que el libro hace aportes históricos interesantes, por ejemplo, se comenta en él, que no es sino hasta 1801 cuando Gauss emplea por primera vez el término “determinante”. Luego en 1812 Cauchy los usa por primera vez en sentido moderno y desarrolla la teoría temprana de los mismos, incluyendo resultados importantes como la regla del producto para determinantes, el polinomio característico y la noción de una matriz diagonalizable. Y que en 1841 que se hacen populares los determinantes gracias a la intervención de Jacobi, aunque en el contexto de funciones de varias variables.

Álgebra Lineal, Stanley Grossman, quinta edición, 1996.

La quinta edición del *Álgebra Lineal* de Stanley Grossman, publicado en el año 1996, contiene pequeños cambios con respecto a la edición anterior. Estos provienen de las evaluaciones realizadas por algunos usuarios y otras personas autorizadas para tal fin. El autor tiene dos metas principales para con este libro, que se encuentran en concordancia con lo planteado por Poole (2011) en su libro: *Álgebra Lineal una Introducción moderna.*

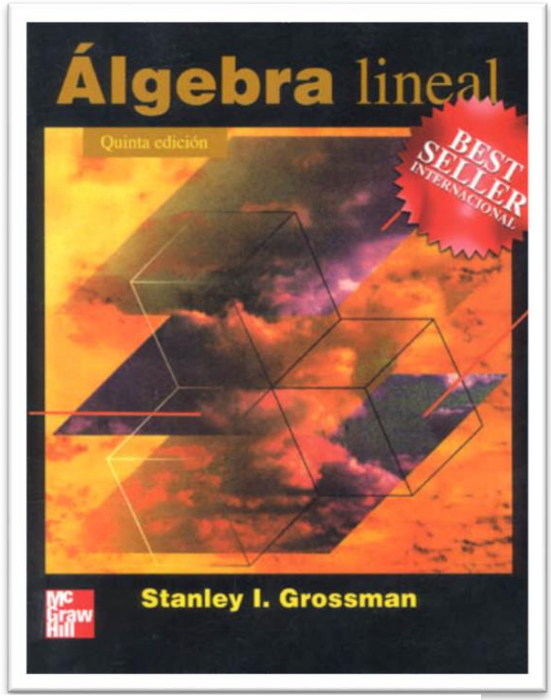
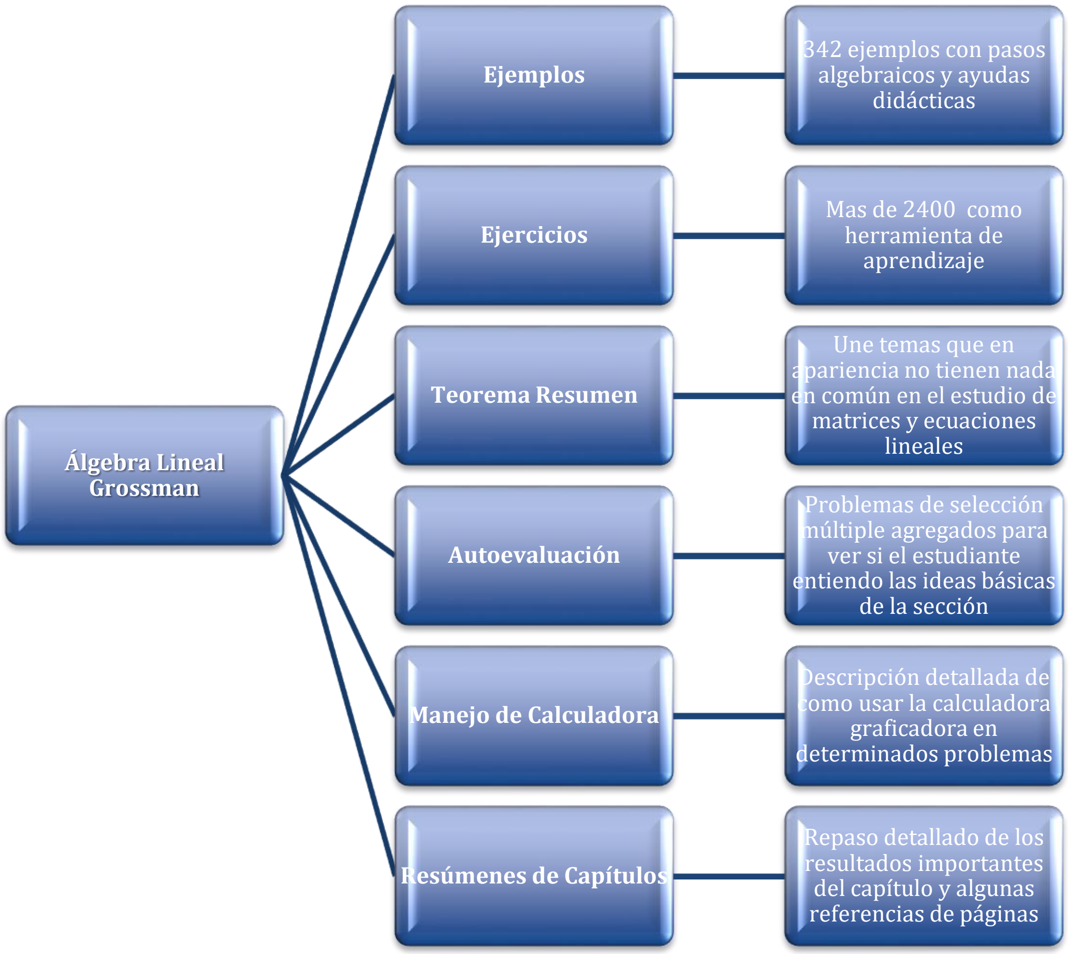


Ilustración 23. Portada del libro: álgebra lineal, Stanley Grossman

Grossman (1996) quiere hacer accesible el álgebra lineal al mayor número posible de estudiantes en una gran variedad de disciplinas, destacando sus distintas aplicaciones. También quiere reforzar conceptos en aquellos estudiantes que "necesitan solo conocimientos firmes del álgebra correspondiente a la enseñanza media superior" (p. vii).

Grossman (1996) describe las características de su libro como se muestra en el esquema 5.

También es interesante ver que al igual que Anton (1976) Grossman incluye la interpretación geométrica de algunos ejercicios, con el fin de lograr otra perspectiva en la comprensión de los conceptos planteados.



Esquema 7 Estructura del libro: Álgebra lineal, Stanley Grossman.

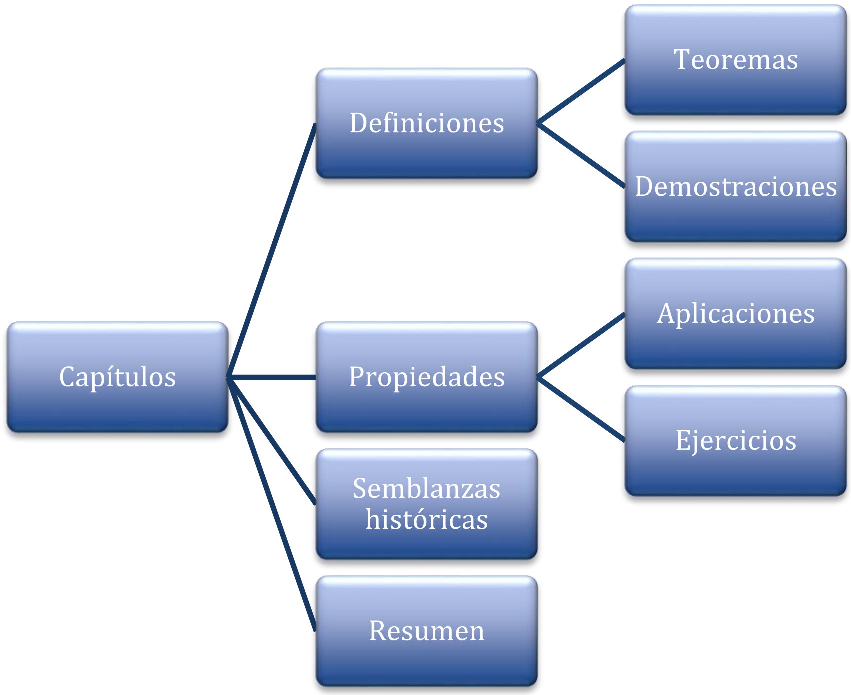
Incluye, además de lo que vemos en el esquema 5, temas de Geometría, destacando que algunas ideas del álgebra se entienden mejor observando su interpretación geométrica. Al igual que Poole (2011), Grossman considera importante contextualizar algunos conceptos, por eso incluye lo que él llama "semblanzas históricas" dispersas a lo largo del libro.

Esta edición incorpora ciertas novedades como los problemas de autoevaluación, el manejo de la calculadora, tutorías y problemas en MATLAB. También introduce una presentación de la multiplicación de matrices como una combinación lineal de las columnas de una matriz y la multiplicación de matrices de bloques, una sección dedicada a la factorización LU.

Dos secciones de los métodos numéricos que estaban en la edición anterior como son los métodos iterativos para resolver un sistema de ecuaciones y para calcular los valores y vectores propios, no aparecen en esta edición porque se consideró que lo más probable es que los estudiantes resuelvan estos problemas numéricos usando algún software como MATLAB.

Una de las mayores novedades está asociada precisamente a este software ya que se incorporaron más de 230 problemas opcionales para resolverlos a través de él. Estos están distribuidos en varias secciones, diseñados para que el usuario vaya conociendo los comandos a medida que los ejercicios lo exigen. Hay además 10 herramientas elementales de álgebra lineal en un disco con archivos tipo M, es decir, pequeños programas de MATLAB que se relacionan con muchos de los problemas planteados. Este añadido adicional de MATLAB hace que esta edición tenga 130 páginas más que la edición anterior.

El libro se encuentra organizado por capítulos y ellos a su vez tienen una estructura en la que presentan el contenido. Tal estructura es similar a la que se muestra a continuación en el esquema 6.



Esquema 8 Estructura de los capítulos

Grossman (1996) dedica un capítulo completo al tema de los determinantes, específicamente el segundo capitulo del libro. Este se presenta tras haber abordado con anterioridad el tema de las ecuaciones lineales y matrices.

Parece relevante mencionar que la primera definición de determinante que aparece en el libro se da en el capítulo 1, cuando se aborda el tema de la inversa de una matriz, tal como se puede apreciar en el determinante de una matriz de tamaño 2 ×2, resumiendo en tres aspectos la definicion:

- Se define $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.
- Se define, determinante de $A = \ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- El determinante de A se denota por $detA$

Esto para explicar el teorema que indica que una matriz A solo es invertible si su determinante es diferente de 0. El capítulo 2 comienza haciendo referencia a esta mención previa del concepto de determinante.

Grossman (1996) presenta la notación de una determinante $|A|$ y, al igual que otros autores, como en el álgebra lineal de Poole insiste en que no debe confundirse con la notación de valor absoluto aclarando que "$|A|$ es el det de A si A es una matriz cuadrada, $|x|$ denota el valor absoluto de x si x es un número real o complejo" (p. 172).

Comienza el trabajo con determinantes de matrices de $n \times n$, explicando que se utilizara lo anteriormente explicado de matrices de 2 x 2 para definir los determinantes de tamaño 3 x 3, 4 x 4, y así sucesivamente. Define el determinante de tamaño 3×3 tal como se muestra a continuación:

determinante de tamaño 3×3

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \text{ Entonces}$$

$$detA = |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Explica los métodos para el cálculo de estos determinantes comenzando por la definición con dos ejemplos propuestos, y luego el método de adjuntar las dos primeras columnas y colocar la suma de los productos, siguiendo el método de las diagonales con signos positivos hacia abajo y negativos hacia arriba (ilustración 25).

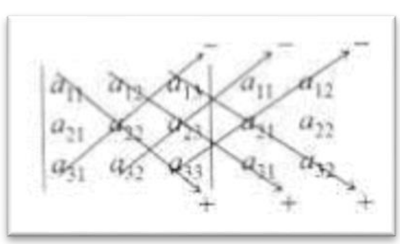


Ilustración 24 Método para el cálculo de determinantes de orden 3.

Destaca que este método solo funciona para determinantes de matrices *n x n* donde *n* > 3 puesto que de lo contrario arrojará valores equivocados. Luego de explicar este método pasa a la siguiente definición, en la cual explica con dos ejemplos donde elimina el primer renglón y la tercera columna de *A*, y luego el tercer renglón y la segunda columna:

Menor. Sea *A* una matriz de n x n y sea M_{ij} la matriz de $(n-1)\times(n-1)$ obtenida de *A* eliminando el renglón *i* y la columna *j*. M_{ij} se llama menor *ij* de *A*.

Continúa con la definición de Cofactor, la cual tiene sentido siendo que se va a definir una determinante de una matriz $n \times n$ y se asume que ya se sabe lo que es el determinante de $(n - 1) \times (n - 1)$.

Cofactor. Sea A una matriz de n x n. El cofactor de ij de A, denotado por A_{ij} está dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Esto es, el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Observe que:

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & si\ i+j\ es\ par \\ -1 & si\ i+j\ es\ impar \end{cases}$$

La siguiente definición es la de determinante de una matriz de $n \times n$ donde éste se halla mediante la expansión por cofactores en el primer renglón de *A*, que ya ha explicado, pero se aclara que se obtendrá la misma respuesta si se expande por cofactores en cualquier renglón o columna.

Este tipo de cálculo resulta tedioso por la cantidad de determinantes que deben ser calculados para llegar al resultado final, por lo que se han desarrollado técnicas que lo simplifican y Grossman las presenta también, recordando que igualmente hay matrices para las que es realmente sencillo calcular el determinante. Como ejemplo esta la matriz triangular, de la cual recuerda la definición, para una mejor comprensión.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de n x n triangular superior o inferior. Entonces

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$$

Esto es: el determinante de una matriz triangular es igual al producto de sus componentes de la diagonal. Grossman paso seguido demuestra que se cumple para cualquier matriz nxn.

Para Grossman es importante la comprensión del concepto de determinante desde el punto de vista geométrico, de un determinante, así es que presenta la gráfica de la interpretación geométrica de un determinante de tamaño 2 x2:

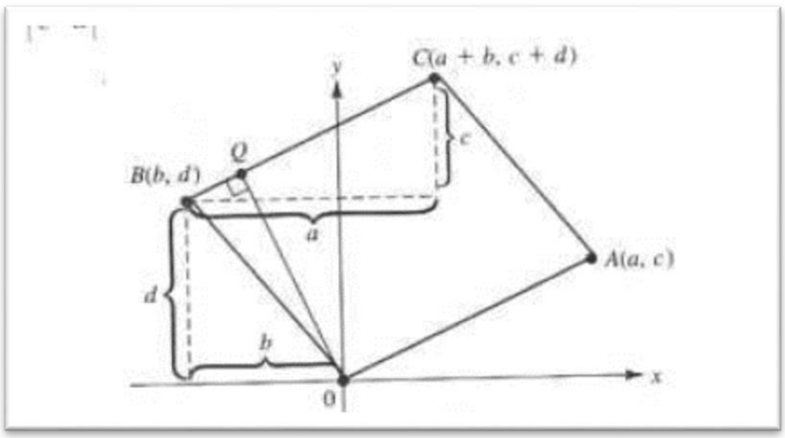


Ilustración 25. Interpretación Geométrica de un determinante de tamaño 2x2

El área generada por $A = |detA|$.

Grossman demuestra la anterior afirmación por medio de geometría analítica (distancias, áreas del paralelogramo, pendientes, etc.)

Finalmente, en esta sección propone ya una serie de ejercicios de autoevaluación y las recomendaciones para el uso de calculadora graficadora, así como también propone una serie de ejercicios para resolverlos mediante la utilización de un software como MATLAB.

La siguiente sección está dedicada a las propiedades de los determinantes donde presenta conceptos interesantes como el teorema en que expresa la propiedad distributiva en el producto de los determinantes así: el determinante del producto es igual al producto de los determinantes.

$$detAB = detA\,detB$$

Sin embargo, aclara que esta misma propiedad no aplica para la suma ya que el determinante de la suma no siempre es igual a la suma de los determinantes. Plantea a continuación el siguiente teorema:

Si una matriz cuadrada A tiene la factorización LU, $A = LU$ donde L tiene unos en la diagonal, entonces

$$detA = detU = \text{Producto de los elementos de la diagonal de } U.$$

La cual explica por medio del siguiente ejemplo:

Uso de la factorización LU para calcular el determinante de una matriz de $4 \times$ 4.

Calcule $detA$, donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 4 & -7 \end{bmatrix}$

Sabemos que $A = LU,$ donde

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -49 \end{bmatrix}$$

Por lo que $detA = detU = (2)(4)(3)(-49) = -1176.$

El siguiente teorema que plantea Grossman es el correspondiente a la factorización $PA = LU$ donde P es una matriz de permutación y L y U son como antes, se entiende lo siguiente:

$$detA = \frac{detU}{detP} = \pm detU$$

Este teorema tiene su explicación mediante un ejemplo donde se calcula el determinante de una matriz de tamaño 3×3, de allí se pasa al siguiente teorema:

$$detA^1 = detA$$

El cual se demuestra mediante la aplicación de los teoremas anteriores para hallar el determinante de A, en el caso de que $A = LU$. Grossman explica que la demostración completa será colocada como referencia en las conclusiones al final.

Se aclara que el determinante de una matriz es el mismo de su traspuesta, y que como todos los teoremas han sido explicados respecto a los renglones, se asume que aplican también para sus columnas. La demostración de esto se presenta hasta el final del libro ya que el autor considera que es más compleja.

A continuación, pasa a un siguiente teorema referido a una matriz de $n \times n$:

Teorema básico. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Una matriz de $n \times n$, entonces:

$$detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

para $i = 1,2, \ldots, n$. Es decir, se puede calcular $detA$ expandiendo por cofactores en cualquier renglón de A

A partir de lo anterior Grossman define varias propiedades, las listaremos a continuación pero omitiremos sus demostraciones debido a que estas se encuentran mas detalladas en el libro.

1. Si el renglón i o la columna j de A se multiplica por un escalar c, entoces $detA$ se multiplica por c, es decir si se denota por B esta nueva matriz, entonces:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c|A|$$

Grossman demuestra esta propiedad utilizando la expansión por renglones.

2. $detC = detA + detB$, donde:

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ y

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} + a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} + a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} + a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Suponiendo que $A, B\ y\ C$ son idénticas excepto por la columna j y que la columna j de C es la suma de las j-*ésimas* columnas de $A\ y\ B$. Entonces, $detC = detA + detB$. La misma afirmación es cierta para renglones.

Se presenta una demostración de esta propiedad mediante la expansión de C con respecto a la columna j.

3. El intercambio de dos renglones (o columnas) distintos de A tiene el efecto de multiplicar el $detA$ por -1.

Se prueba la afirmación para los renglones y se supone primero que se intercambian dos renglones adyacentes.

4. Si A tiene dos renglones o columnas iguales entonces $detA = 0$, se demuestra suponiendo que los renglones i y j de A son iguales.
5. Si un renglón o columna de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna) entonces $detA = 0$.

6. Si se suma un múltiplo de un escalar de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna) de A, entonces el determinante no cambia.

Estas son todas las propiedades que se presentan con el fin de hacer más sencilla la posible evaluación de determinantes de alto orden.

Conociendo estas propiedades se pueden aplicar técnicas que hagan más sencillo el cálculo del determinante como reducir por renglones usando la propiedad 7 hasta que tenga una forma en la que pueda ser evaluada fácilmente, o utilizar el método por adjunta..

Posteriormente Grossman coloca una serie de ejemplos y soluciones donde se observa la aplicación de estas propiedades para simplificar el cálculo de un determinante. Después de conocer estas propiedades continúa la exposición de los teoremas, ahora entrando en el teorema 6 que indica que, siendo A una matriz de $n \times n$, entonces:

Teorema 6. Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i1}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \quad si\ i \neq j$$

Cuya demostración se encuentra inmediatamente

Luego de que se plantea este teorema se pasa a una serie de ejercicios de autoevaluación, explicaciones para el uso de la calculadora graficadora, y se proponen ejercicios para resolver con MATLAB.

La siguiente sección del libro está dedicada a las demostraciones de tres teoremas más complejos, y a la presentación del contexto histórico de las determinantes. Los teoremas que se estudian y se demuestran, no serán colocados con su demostración acá ya que no es el objetivo de este análisis, solo se mencionará que fueron abordados por el autor en un apartado diferente por considerarlos de mayor complejidad, a continuación, los teoremas presentados por Grossman:

Teorema 1. *Teorema básico*: Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$. Entonces

$$detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

Para $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 1,2, \dots, n$

Lema 1. Sea E una matriz elemental:

i. Si E es la matriz que representa la operación elemental $R_i \underset{\leftarrow}{\overset{\rightarrow}{}} R_j$, entonces $detE = -1$.

ii. Si E es la matriz que representa la operación elemental $R_j \rightarrow R_j + cR_i$, entonces $detE = 1$

iii. Si E es la matriz que representa la operación elemental $R_i \rightarrow cR_i$, entonces $detE = c$.

Lema 2. Sea B una matriz de $n \times n$ y sea E una matriz elemental. Entonces

$$detEB = detE\ detB$$

Teorema 2. Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y solo si $detA \neq 0$.

Finalmente, el último teorema es el que indica que sean A y B matrices de $n\ x\ n$, entonces:

$$detAB = detA + detB$$

En la reseña histórica se destaca que este mismo teorema fue demostrado por Cauchy en 1812, así mismo destaca lo fructífera de la obra de este autor quien en cuanto a contribución literaria al estudio de la matemática solo es superado, cuantitativamente, por Euler. Sin embargo, fue el quien estableció el estándar para las publicaciones matemáticas haciendo más difícil la publicación de obras ya que no se permitía la intuición, sino que se exigían demostraciones formales.

La expansión de un determinante por cofactores fue utilizada por primera vez por Pierre Simon Laplace quien es más conocido por su explicación de la transformada que se estudia en los cursos de matemáticas aplicadas.

Luego de Laplace menciona al siguiente contribuyente en la historia de los determinantes que es Carl Gustav Jacobi con quien la palabra determinante logró su aceptación final, fue el primero en usar un determinante aplicado a las funciones para establecer la teoría de funciones de varias variables, método que sería llamado más tarde por Sylvester como determinante Jacobiano.

Por último, cita la contribución de Charles Dodgson con su libro An Elementary Theory of Determinants, publicado en 1867 (este autor es más conocido por su pseudónimo Lewis Carroll con el cual publicó el famoso cuento de Alicia en el país de las maravillas). En su libro Dodgson da las condiciones bajo las que los sistemas de ecuaciones tienen soluciones no triviales. Con más detalle hablamos también de su método de condensación en el apartado del análisis del libro de algebra lineal de David Poole.

Luego de este apartado histórico pasa a una siguiente sección en la que habla de determinantes e inversas donde se indica que se puede calcular la inversa de una matriz mediante el uso de determinantes. Así presenta el primer teorema de esta sección donde básicamente veremos la aplicación de los determinantes que ya se han estudiado para los cálculos matriciales:

Teorema 1. Si A es invertible, entonces $detA \neq 0$ y

$$detA^{-1} = \frac{1}{detA}$$

Pero antes del uso de determinantes para el cálculo de la inversa el autor prefiere definir y dejar claro el concepto de adjunta de esta manera nos dice que sea A una matriz de $n \times n$ y sea B dada por la matriz de sus cofactores entonces la adjunta de A, que se denota $adjA$, es la traspuesta de la matriz B de $n \times n$; y la presenta así:

$$adj\ A = B' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Aclara también que en algunos casos podemos encontrar el término adjugada de A en lugar de adjunta ya que adjunta tiene un segundo significado en matemática y también indica que no debemos olvidar trasponer la matriz por cofactores antes de hacer el cálculo de la adjunta.

Nos presenta el siguiente teorema donde se observa que la adjunta de una matriz A tiene como resultado final el determinante de A por 1, así:

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$(A)(adjA) = \begin{bmatrix} detA & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & detA & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & detA & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & detA \end{bmatrix} = (detA)1$$

Grossman muestra el tercer teorema de esta sección el cual indica lo siguiente: Sea A una matriz de $n \times n$, entonces A es invertible si y solo si $detA \neq 0$. Si $detA \neq 0$ entonces: $A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA$

Luego presenta unos ejemplos de cómo usar el determinante y la adjunta para calcular la inversa de una matriz, haciendo la observación de que en una matriz $n \times n$ si $n > 3$ es más fácil por lo general calcular la inversa con la reducción por renglones que usando la adjunta de A. Aclara también que en muchas ocasiones las matrices están representadas de forma simbólica (variables) y no numérica, en cuyo caso la manera más sencilla de proceder es mediante el cálculo de determinantes, sobre todo esto se ve en la teoría de control.

Posteriormente presenta un “Teorema de Resumen” donde destaca las siguientes afirmaciones que se cumplen para una matriz de $n \times n$:

- A es invertible
- La única solución al sistema homogéneo $Ax = 0$ es la solución trivial (x = 0)
- El sistema $Ax = b$ tiene una solución única para cada n-vector b
- A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n_1 1_n$
- A es el producto de matrices elementales.
- La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes
- $detA \neq 0$

Todas estas afirmaciones fueron demostradas por los teoremas presentados anteriormente. A continuación, se presentan una serie de ejercicios de autoevaluación y unos también unos ejercicios planteados para ser resueltos con MATLAB.

El siguiente punto o sección está dedicado a la regla de Cramer, un viejo método utilizado para resolver sistemas con el mismo número de incógnitas y ecuaciones. Sin embargo, lo platea como algo opcional.

El teorema que define la regla de Cramer es el siguiente:

Sea una matriz A de $n \times n$ y suponiendo que $detA \neq 0$ entonces la solución única al sistema $Ax = b$ está dada por:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_i = \frac{D_i}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

Grossman escribe el siguiente aparte historico acerca de la regla de Cramer: *"La regla de Cramer recibe su nombre en honor al matemático suizo Gabriel Cramer, quien la publicó en 1750 en su libro Introduction to the Analysis of Lines of Álgebraic Curves, aunque existe evidencia de que Collin McLaurin la conocía desde 1729. Esta regla es uno de los resultados más conocidos en la historia de las matemáticas a pesar de que actualmente es utilizada muy poco por el gran número de cálculos que requiere fue muy importante y muy aplicada en su tiempo y fue fundamental en la enseñanza del álgebra por más de 200 años."*(p.213)

Seguido se plantean algunos ejemplos del uso de esta regla y posteriormente unos problemas de autoevaluación sobre la misma para determinar la comprensión del tema.

Grossman resalta en un apartado el teorema del resumen, que es básicamente todas las definiciones, teoremas, conceptos y términos que se desarrollaron, los lista, esto con el fin de hacer mas fácil su estudio.

Y luego de esto, antes de entrar al capítulo 3 dedicado a vectores, propone unos ejercicios de repaso sobre todo el capítulo. Así concluye el capítulo dedicado a los determinantes en el libro de Grossman en el que hace mucho énfasis en las demostraciones de los teoremas los cuales no escribimos en su totalidad en nuestra descripción del libro debido a su extensión, también cabe destacar la importancia de la representación y comprensión geométrica del concepto de determinante y de los aportes históricos que realiza a lo largo del libro, para ver más a profundidad podemos dirigirnos al cuadro comparativo en la reflexión final de esta investigación.

Aproximación al Álgebra Lineal: Un enfoque geométrico, Rafael Isaacs, Sonia Sabogal, 2009.

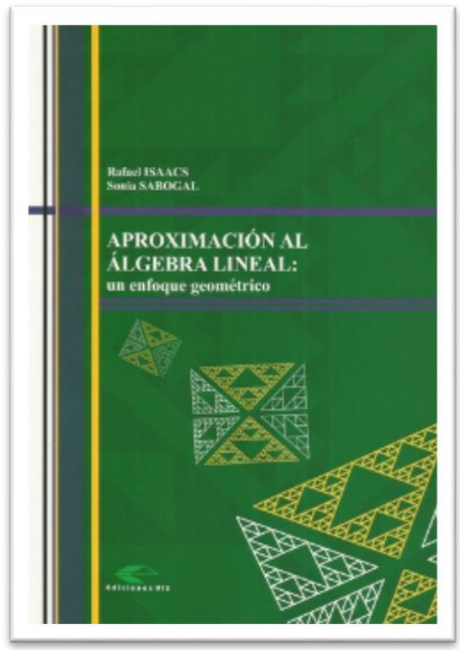


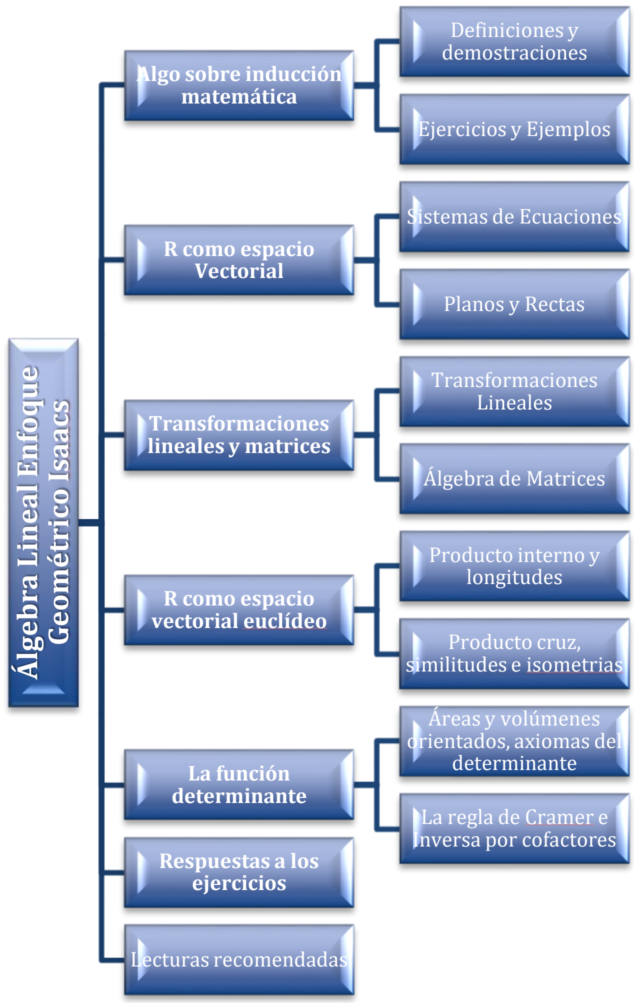
Ilustración 26. Portada del libro: Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico.

Este libro fue escogido para nuestra investigación debido a que hace parte de la Universidad Industrial de Santander, realizado por dos profesores reconocidos de la misma y utilizado en varios cursos de algebra lineal pretende, como su título lo indica, hacer una introducción al álgebra lineal pero principalmente bajo un enfoque geométrico haciendo énfasis en interpretaciones muy concretas e intuitivas.

A pesar de que se presentan los mismos temas de casi todos los libros de álgebra lineal, varía un poco en cuanto al orden de presentación y el enfoque de los mismos, introduciendo en algunas secciones conceptos nuevos y relativamente modernos asociados a las matemáticas, tales como, fractales y sistemas dinámicos.

Mostraremos los detalles más interesantes del libro y algunos los haremos al pie de la letra tal como aparece en el libro original, algunos axiomas que nos parecen de gran importancia mostrar, por tal motivo pedimos al lector acudir al libro original para su total comprensión del tema.

El libro en si está divido en 5 capítulos los cuales se presentan como se indica en el siguiente esquema.



Esquema 9. Esquema de organización del libro: Álgebra lineal un enfoque geométrico.

El primer capítulo tiene la particularidad de que puede ser abordado al principio o al final de la materia, según el criterio del profesor a la hora de conducir la asignatura. Este contiene temas básicos interesantes e importantes sin embargo el autor menciona que existe más por tradición que por su conexión directa con los temas centrales del curso.

No es sino hasta el quinto capítulo cuando trata el tema que compete a esta investigación y sobre el cual haremos énfasis en este análisis, la función determinante, tomando como fuente de inspiración las propiedades del producto mixto e interpretándolo como un volumen:

"Viéndola entonces como una función que a cada matriz cuadrada le asigna un número real y constituyendo un muy buen mecanismo teórico que indica si *n* vectores dados de $\mathbb{R}^n$ son o no linealmente independientes. Este enfoque de los determinantes resulta muy bondadoso: permite, por ejemplo, deducir fácilmente propiedades como la de que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices, deducción que de otra manera puede resultar muy dispendiosa." (Isaacs y Sabogal 2009, p. VI)

Este enfoque permite deducir fácilmente algunas de las propiedades del determinante como la del producto de matrices que de otra manera podría resultar muy engorrosa. Deduce un método sencillo para calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada, triangularizándola, deduce luego la regla de Cramer, el cálculo de la inversa de una matriz por cofactores, y finalmente, a diferencia de otros libros, presenta el cálculo de determinantes desarrollándolos por una fila o columna, lo cual normalmente se introduce al principio del tema en otros textos.

Este capítulo se encuentra estructurado de la siguiente manera:

1. Definición de Áreas y volúmenes orientados
    a. Ejercicios
2. Axiomas del determinante
        i. Proposiciones
    a. Calculo por triangulizacion
        i. Ejemplos
    b. Unicidad de la función determinante
        i. Proposiciones
    c. Ejercicios
3. Regla de Cramer
    a. Proposiciones
        i. Ejemplos
    b. Ejercicios
4. Inversa por cofactores

a. Ejemplos
b. Ejercicios

Finalmente, el libro incluye un apéndice con la solución a los ejercicios propuestos.

El capítulo de determinantes lo aborda, como se observa, comenzando por el tema de áreas y volúmenes orientados, donde indica que si un conjunto de n vectores de $\mathbb{R}^n$ (lo que otros autores denominan como una matriz de n x n) es o no linealmente independiente es importante identificarlo ya que ello dirá el tipo de soluciones que corresponden, es decir, el tipo de transformación lineal asociada. Esto lo podemos hacer gracias a la función determinante.

> "Nuestra fuente de inspiración es el llamado producto mixto para tres vectores de $\mathbb{R}^3$. El lector recordara que dados A, B, C vectores de$\mathbb{R}^3$, el valor absoluto de $A \cdot (B \times C)$ nos indica el volumen del paralelepípedo formado por $A, B\ y\ C$ (Ejercicio 8 de la sección 4.3). Este volumen es diferente de 0 si y solo si $A, B\ y\ C$ son linealmente independientes (recuerde como se interpreta geométricamente el hecho de que tres vectores de $\mathbb{R}^3$ sean linealmente independientes). Así, el "volumen orientado", que a tres vectores de $\mathbb{R}^3$ los envía en su producto mixto $A \cdot (B \times C)$, es un buen modelo de lo que se quiere con la función determinante. El problema es definir "volumen orientado" para n vectores de $\mathbb{R}^n$." (Isaacs y Sabogal 2009, p. 129)

Plantea una serie de ejercicios para esta parte de demostraciones de vectores linealmente independientes bajo las definiciones planteadas.

Axiomas del determinante

El tratamiento que se da al libro en forma de axiomas se asemeja mucho al utilizado por Cauchy en sus artículos y totalmente toman el estilo de Apóstol para el desarrollo de su libro.

Se estableció que a cada par de vectores de $\mathbb{R}^2$ se le puede asignar un único número (área orientada) y a cada triple de $\mathbb{R}^3$ se le puede asignar un único número (volumen orientado), lo cual da la idea de una función y por eso se habla de función determinante.

Define el recorrido de la función así:

$$det\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$(A_1 \downarrow, A_2 \downarrow, \ldots, A_n \downarrow)\sim \to \det(A_1 \downarrow, A_2 \downarrow, \ldots, A_n \downarrow)$$

Para hablar de una matriz cuadrada sustituye los paréntesis con barra a la hora de un determinante, así:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

El primer axioma que plantea tiene que ver con el producto mixto lineal de cada una de sus variables.

AD1: El determinante es una función lineal de cada una de sus variables.

Este axioma comprende dos aspectos:

Homogeneidad. Si la columna j es multiplicada por un escalar α, el valor determinante se multiplica por α.

Aditividad: el determinante distribuye la suma en cualquier columna j quedando fijas las demás.

Produciéndose inmediatamente la siguiente proposición:

Proposición 9: AD1 implica que:

d. Si una matriz cuadrada tiene una columna de solo ceros su determinante es 0.

Si I_n es la matriz idéntica de n x n, y A es una matriz diagonal total (es decir $A = (a_{ij})_{nn}$ con $a_{ij} = 0\ \forall \neq j$) entonces el valor $\det(A)$ es el producto de los elementos de la diagonal por $\det(I_n)$. (Isaacs y Sabogal 2009, p. 132)

e.

Para la demostración sugiere consultar los ejercicios planteados anteriormente y pasa inmediatamente al siguiente axioma que tiene que ver con la orientación que llevan los vectores.

> **AD2: (Alternancia)** si se intercambian dos variables el determinante cambia de signo.
>
> Con esto conocemos la propiedad clave:
>
> **Proposición 10:** Si en una matriz, dos columnas tienen iguales valores, entonces su determinante es nulo…
>
> …Esta propiedad permitirá hacer operaciones básicas entre filas y columnas para pasar entonces a la siguiente proposición.
>
> **Proposición 11:** Si a una columna se le suma otra multiplicada por un escalar el determinante no cambia.
>
> **Proposición 12**: Si en la matriz A hay una columna que es combinación lineal de otras entonces $\det(A) = 0$. (p. 133-134)

Estos axiomas y proposiciones contienen su demostración la cual se puede observar acudiendo a la obra original.

Seguido se comienza a trabajar la triangularizacion de una matriz a lo cual para llegar a ello empieza:

> Si las columnas de la matriz A conforman un conjunto de vectores linealmente dependientes entonces $\det(A) = 0$.
>
> Consideremos ahora una matriz triangular superior de tamaño 3×3, es decir de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Para calcular $\det(A)$:

$$\det(A) = det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} det\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ usando AD1}$$

$$\begin{matrix} -a_{12}c_1 + c_2 \\ -a_{13}c_1 + c_3 \end{matrix} = a_{11} det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ por la proposición 11}$$

$$= a_{11}a_{22} det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ de nuevo AD1}$$

$$\overset{-a_{23}c_2 + c_3}{=} a_{11}a_{22} det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ por la proposición 11}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ AD1}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\det(I_3).$$

El mismo cálculo se puede hacer tomando la matriz como una matriz triangular de orden inferior, así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ (Isaacs y Sabogal 2009, p. 135)}$$

Así llega a la **proposición 13** que indica que cualquier matriz A que sea triangular superior (o inferior) tiene como determinante el producto de los elementos de la diagonal por $\det(I_n)$.

Con esta proposición se llega al "cálculo por triangularización":

"sabemos que cualquier matriz se puede convertir con operaciones elementales entre columnas en una matriz triangular superior o inferior y, según la Proposición 11, estas operaciones son, con cierto cuidado, "compatibles con el valor del determinante. Así, nos queda determinar el valor de la función en las matrices idénticas I_n" (Isaacs y Sabogal , 2009, p.150)

Llegamos al AD3 que indica: el determinante de una matriz identidad es 1.

Sigue lo que Isaacs y Sabogal llaman el algoritmo para calcular el valor de la función en cualquier matriz cuadrada:

1. Sumarle a una columna (fila) los valores de otra columna (fila) multiplicados por una constante
2. Intercambiar dos columnas (filas)
3. Multiplicar una columna (fila) por una constante distinta de 0

Luego da un ejemplo de este algoritmo, explicando como con estas simples operaciones se puede calcular el determinante d cualquier matriz cuadrada.

Se llega a la Unicidad de la función determinante, donde se encuentra la **proposición 14**:

Cualquier función $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Que cumpla con los axiomas AD1 y AD2, es invariante por operaciones elementales entre columnas, es decir, si A es una matriz $n \times n$ y A' se obtiene:

i. Sumándoles una columna de A otra columna multiplicada por cualquier constante, entonces $f(A') = f(A)$
ii. Intercambiando dos columnas de A entonces $f(A') = -f(A)\ldots$

Proposición 16: La función determinante es la única que cumple las propiedades AD1, AD2 y AD3. (Isaacs y Sabogal 2009, p. 138)

Se plantean luego una serie de ejercicios donde se aplican los conocimientos adquiridos sobre los axiomas y las proposiciones planteadas hasta el momento para luego explicar detenidamente la regla de Cramer:

> La Regla de Cramer nos ofrece un útil método para resolver sistemas lineales con igual número de ecuaciones que incógnitas. Nos interesa, además, por lo que de ella se puede deducir. En efecto, aplicando la regla de Cramer obtenemos un método para calcular la inversa de una matriz y para calcular determinantes
>
> En términos de matrices, si A es la matriz del sistema y $B\downarrow$ es el vector de términos independientes, resolver el sistema como se vio en capítulos anteriores del libro, es resolver la ecuación matricial
>
> $$AX\downarrow = B\downarrow$$
>
> Que consiste en encontrar escalares $x_1, x_2, \dots, x_n$tales que
>
> $$x_1A_1\downarrow + x_2A_2\downarrow + \cdots + x_nA_n\downarrow = B\downarrow$$
>
> O abreviadamente,
>
> $$\sum x_iA_i\downarrow = B\downarrow$$
>
> $$\det\left(A_1\downarrow, \dots, \underset{colj}{B}\downarrow, \dots, A_n\downarrow\right) = \det(A_1\downarrow, \dots, \sum_{col.j} x_iA_i\downarrow, \dots, A_n\downarrow)$$
>
> $$= \sum xi \det(A_1\downarrow, \dots, \underset{col.j}{A_i\downarrow}, \dots, A_n\downarrow)$$
>
> $$= x_j\det(A_1\downarrow, \dots, \underset{col.\ j}{A_j\downarrow}, \dots, A_n\downarrow)$$
>
> $$= x_j\det(A)$$
>
> De la justificación de las igualdades planteadas se deduce la siguiente proposición:
>
> **Proposición 17:** La ecuación matricial
>
> $$AX\downarrow = B\downarrow$$

Tiene solución única $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si $\det(A) \neq 0$,

Proposición 18: La ecuación matricial $AX \downarrow = B \downarrow$

Tiene solución única si y solo si $\det(A) \neq 0$ (Isaacs y Sabogal 2009, p. 141)

Luego de esto plantea los siguientes ejercicios que servirán para practicar la regla de Cramer y como ejemplo de estas proposiciones:

Ejercicios 5.3

1. Aplique la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

   a) $\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ x - 2y &= 1; \end{aligned}$

   b) $\begin{aligned} y - 2z + 3 &= 0 \\ z - x - y &= 2 \\ z - x &= 3. \end{aligned}$

2. Aplicando la regla de Cramer, en cada caso decidir para qué valores de h y k cada uno de los siguientes sistemas tienen solución única:

   a) $\begin{aligned} 3x + 2y &= h \\ x - y &= k; \end{aligned}$

   b) $\begin{aligned} 3x + 2hy &= h \\ 2x + ky &= 1; \end{aligned}$

   c) $\begin{aligned} x - y + kz &= 1 \\ hy - kz &= 2 \\ kx + 2z &= 3. \end{aligned}$

3. ☛Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y notemos M_f su matriz correspondiente. Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

Ilustración 27. Ejercicios sobre la Regla de Cramer.

Finalmente explica la inversa por cofactores así:

> Si A es una matriz cuadrada, recordemos que encontrar la inversa de la matriz A es encontrar una matriz B del mismo orden que A, tal que $AB = I$, esto significa que se deben resolver n sistemas con n ecuaciones lineales y n incógnitas en cada sistema. Todos los n sistemas tienen la misma matriz asociada A. Si B_j es la j-ésima columna de B, debe tener: $AB_j \downarrow = E_j \downarrow$, donde E_j es el vector j-ésimo de la base canónica. La solución i-ésima a la anterior ecuación, es decir b_{ij}, por la regla de Cramer es:
>
> $$b_{ij} = \det\left(A_1 \downarrow, \dots, \underset{col.\,i}{E_j \downarrow}, \dots, A_n \downarrow\right)/\det(A),$$
>
> El numerador de esta expresión es llamado el cofactor j, i que notamos c_{ji}.
>
> $$c_{ji} = \det\left(A_1 \downarrow, \dots, \underset{col.\,i}{E_j \downarrow}, \dots, A_n \downarrow\right)$$
>
> En un ejercicio planteado anteriormente se pide demostrar que c_{ij} se puede calcular hallando el determinante a la matriz que resulta al eliminar la j-ésima fila y la i-ésima columna de la matriz A multiplicado por $(-1)^{j+i}$. De allí deducimos que la inversa de la matriz A es la transpuesta de la matriz de cofactores multiplicada por el inverso multiplicativo del determinante de A que debe ser no nulo. Es decir,
>
> $$A^{-1} = (1/\det(A))C^t$$
>
> Que es una fórmula para hallar la inversa de una matriz y que en otras palabras significa que
>
> $$AC^t = \det(A)\,.\,I_n$$
>
> Este resultado indica que:
>
> - Al hacer el producto interno entre los términos de una fila por los cofactores de otra, se obtiene 0.
>
> $$i \neq j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{kj} = 0.$$

- Al hacer el producto interno entre los términos de una fila por los cofactores correspondientes, se obtiene el determinante de A, es decir para cada i,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$$

Lo cual proporciona un método para calcular el determinante: desarrollo por la fila i-ésima. (Isaacs y Sabogal 2009, p. 147-148)

Luego de esto se plantea un ejercicio de ejemplo y los siguientes ejercicios de práctica:

2. Demuestre que $\det(C^t) = (\det(A))^{n-1}$ (A es una matriz $n \times n$).
3. Calcule por cofactores los determinantes de las siguientes matrices y las respectivas matrices inversas si existen:

   a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

   c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. De (5.3) deducir el método para calcular el determinante por cofactores desarrollando la j-ésima columna.
5. Demuestre en base a la fórmula (5.2) y usando el Ejercicio 2, que $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.
6. Una matriz es ortonormal si sus vectores columna son ortogonales entre sí y de longitud 1. Demuestre que el determinante de una matriz ortonormal es ± 1.

Ilustración 28. Ejercicios de Practica.

Así concluye el capítulo de este libro dedicado a los determinantes, el cual, por ser el último capítulo del libro, da paso a la sección de respuestas a los ejercicios planteados en todo el texto.

El libro: aproximación al algebra lineal hace menciones muy breves sobre la historia de las matemáticas o los personajes que descubrieron determinadas teorías, simplemente los menciona como citas al pie de página. En la reflexión final podemos contrastar este libro con los anteriores analizados en un cuadro comparativo muy completo.

Es pertinente terminar este análisis descriptivo de los libros de álgebra lineal con una pequeña conclusión. Al describir al pie de la letra los libros de álgebra lineal se va familiarizando con el contenido del libro, a su vez se resalta los diferentes enfoques que estos libros manejan, en este análisis encontramos tres enfoques:

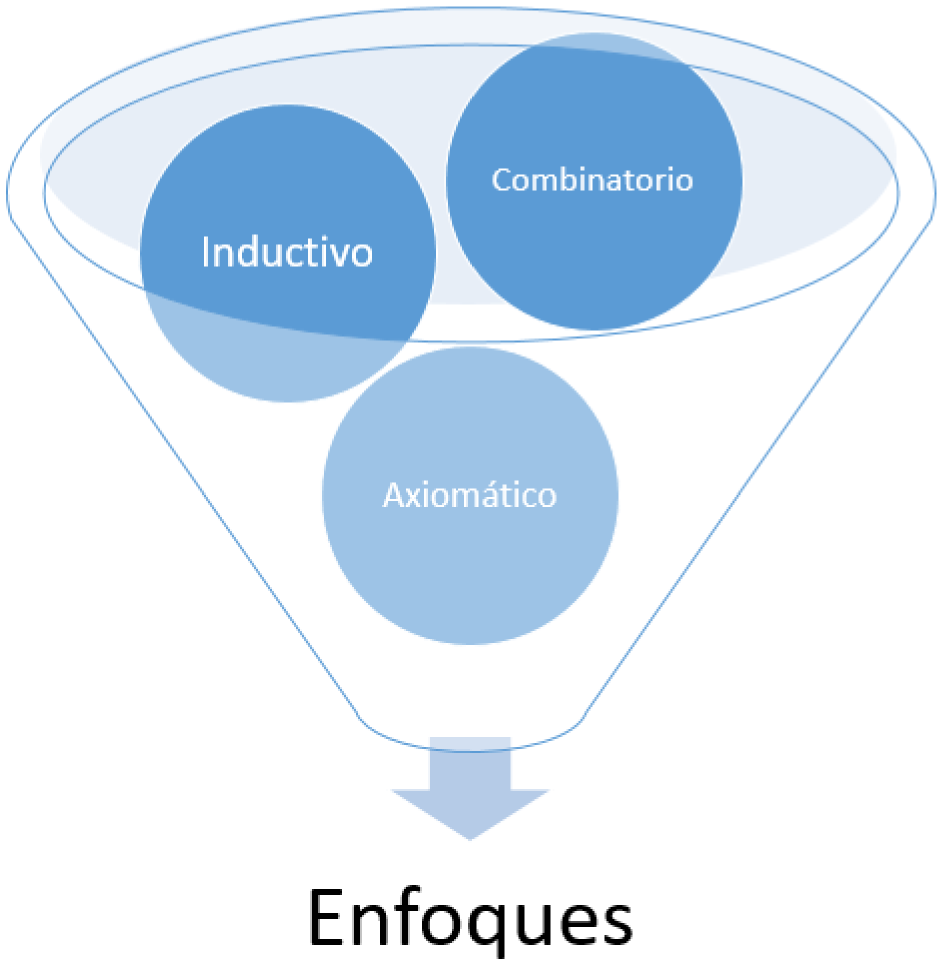


Ilustración 29. enfoques encontrados en los libros de álgebra lineal.

En la ilustración 29 se muestran los enfoques que manejan los libros de álgebra lineal, en el primer lugar se encuentra el enfoque combinatorio, este enfoque se da en el libro de álgebra lineal de Anton en su introducción, la especial forma en el que se da el tratamiento anterior a definir el determinante lo hacen un libro único en su categoría.

Uno de los enfoques mas utilizados y encontrados tanto en los libros de álgebra lineal como en las obras analizadas en el análisis histórico - epistemológico , este enfoque se da en el desarrollo del determinante por el método de adjunta. Pese a que el enfoque inductivo es muy intuitivo en las obras analizadas muestran su dificultad cuando se aumentaba el orden de sistema de ecuaciones, eso conllevo a tener problemas con la regla de signos que tanto dolor de cabeza causó a los autores de la época. Ya en los libros de álgebra lineal el método se desarrolla de una forma inductiva como es el caso del libro de álgebra lineal de Poole y de Grossman.

El ultimo enfoque es el axiomático, este enfoque se caracteriza por tener una dificultad mayor, la cual requiere de varios conocimientos previos, el enfoque carece de intuición y fue utilizado ya cuando los determinantes pasaron de ser una herramienta a ser un objeto de estudio, a ser una teoria formal, este enfoque desarrollado por Cauchy y optimizado con sus predecesores es utilizado en varios libros hoy en dia, un ejemplo de ello son los calculus de Tom Apostol, y es precisamente Apostol el que sirve de inspiración y referencia para el desarrollo del libro de álgebra lineal de Isaacs y Sabogal. Este libro totalmente esta enmarcado en el enfoque axiomático con un plus que es el contexto geométrico que se le da a los temas tratados.

De esta forma concluimos y damos paso a la reflexión final allí entraremos con mas detalles y con un cuadro comparativo que resultara útil para entender las pequeñas diferencias de los libros analizados.

REFLEXION FINAL

El objetivo de este capítulo es observar el análisis histórico-epistemológico realizado, junto con la revisión de los libros de álgebra lineal analizados, mirar los distintos componentes que los forman, como su componente histórico, su componente epistemológico y poder presentar los diferentes resultados encontrados, también generar una discusión alrededor de los análisis realizados, poder dejar una base para futuras investigaciones en relación a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal específicamente del concepto de determinante.

Lo ideal sería establecer una relación entre el análisis histórico–epistemológico y la revisión de los libros de álgebra lineal, para lograrlo es necesario ampliar la investigación, en cuanto al lapso histórico de estudio, y también en cuanto al análisis de los libros, es decir, ver desde cuando surgieron, como se desarrolló la teoría, ver los primeros libros académicos acerca de determinantes, las investigaciones posteriores a Cauchy acerca de determinantes, observar el auge de la teoría de determinantes y como se va debilitando, establecer las causas del ¿por qué? los libros de álgebra lineal actuales tienen dicha categorización de contenidos, el ¿por qué? el concepto de determinante se encuentra de diversas formas en los diferentes libros de álgebra lineal. Son muchas preguntas que surgen para poder establecer la relación entre el análisis histórico-epistemológico, y el análisis de libros, igualmente nos encontramos satisfechos con el producto logrado, este será un gran apoyo para futuras investigaciones, ciertamente nuestra investigación se planteó de forma muy general, abarcando un buen lapso de tiempo en el cual se encuentran grandes matemáticos de la historia, los cuales poseen trabajos extensos sobre diversos temas. Fuentes inagotables para análisis posteriores.

En este capítulo encontraremos lo siguiente:

- Un breve recorrido del antes y después de nuestra línea de tiempo de investigación.
- Relaciones de los autores analizados en nuestra línea de tiempo.
- Cuadro comparativo acerca de los libros de álgebra lineal analizados.
- Una ojeada a los primeros libros académicos escritos sobre determinantes los cuales fueron analizados en la tesis doctoral de Álvarez (2013).
- Contextos en los cuales se da el concepto de determinante.

Breve recorrido del antes y después de nuestra línea de tiempo de investigación

Nuestro periodo de estudio es el comprendido entre Leibniz (1693) y Cauchy (1812), sin embargo, resulta conveniente hacer referencia a los años inmediatamente anteriores y posteriores a nuestro periodo. Con el fin de tener un marco de referencia más amplio que nos permita ubicar las diferentes etapas en el desarrollo de la teoría de los determinantes.

Los determinantes fueron introducidos por Cardano en el siglo XVI. En el *Ars Magna,* Cardano da una regla para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales que llama *regula de modo* definiéndola como la "madre de las reglas" (Knobloch, 1994).

En (1591) François Viéte (1540-1603) propone escribir las ecuaciones en forma general. Emplea consonantes para las cantidades conocidas, la "Y" griega y las vocales para las cantidades desconocidas.

La contribución de Viéte en su obra *Introducción al método analítico (1591)* en el cual aporta al desarrollo de la teoría y la notación algebraica. Se inicia en álgebra simbólica. Ya por otro lado se tiene la geometría analítica de descartes y Fermat.

"como parte de la recuperación del legado griego clásico, en el renacimiento se emprende la restauración de la antigua tradición matemática griega basada en el método de análisis, en cuya acción la importancia de la naciente álgebra simbólica, como una poderosa técnica algorítmica será decisiva" (González, 2002. P 23)

El análisis algebraico- geométrico de Viéte es un estadio intermedio esencial en el camino que arranca del álgebra geométrica de los griegos y confluye en la geometría analítica de Fermat y Descartes.

La geometría analítica es algo más que una mera combinación de álgebra y geometría, es decir, necesita como elementos imprescindibles para poder circular del álgebra a la geometría y de la geometría al álgebra no solo el álgebra simbólica sino también el uso de las coordenadas.

Los grandes matemáticos griegos, Menecmo (380-320 A.C) Apolonio (262-190 A.C) y Pappus utilizaron el equivalente de un "sistemas de coordenadas" pero carecieron del álgebra simbólica, mientras que Descartes en su libro "*Reglas para la Dirección del Espíritu*" se propone la descripción precisa y metódica de cómo resolver cualquier problema (geométrico) transformándolo en sistemas de ecuaciones.

Las primeras descripciones del método de resolver conjuntos de ecuaciones lineales mediante determinantes conocido como la "Regla de Cramer" se dio en Japón en 1683 Takakazu Seki escribió el "*Método de solución de problemas disimulados*" que contiene métodos matriciales escritos en tablas exactamente, sin tener ninguna palabra que corresponda a determinante. Seki dio métodos generales para calcular mediante ejemplos, determinantes de tamaño $2 \times 2, 3 \times 3, 4 \times 4\ y\ 5 \times 5.$ Y Leibniz en una carta enviada a L'Hopital en 1693 (publicada en 1850). En la cual daba también la condición para la consistencia de las ecuaciones. Se destaca en la carta de Leibniz; "la notación para los coeficientes del sistema la cual está inspirada en su búsqueda de la *característica universal* un lenguaje simbólico que permitiera expresar mejor el conocimiento e impulsar su avance" (Álvarez 2013, p. 30).

Leibniz fue el primero en ver que los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales podían ser organizados en un arreglo, actualmente llamado matriz, el cual podía ser manipulado para encontrar la solución del sistema (si la hubiera).

El aporte en la notación se da con la introducción de subíndices[21] en los coeficientes, que permiten con ayuda también de la introducción de los puntos suspensivos escribir el caso general de un sistema de n ecuaciones lineales con n

[21] Es necesario comentar que ante el desarrollo de los subíndices estos fueron adquiriendo otros contextos como el semejar un par de coordenadas en el plano cartesiano.

incógnitas; y por la introducción de los determinantes que permiten escribir fórmulas para la solución explicita en el caso general

También se destaca en Leibniz la concepción de dependencia lineal, al considerar que se podría suprimir una ecuación del sistema debido a que se verifica que el resultante es cero, ya más adelante escribiría Euler (1750):

"cuando uno dice que para determinar n incógnitas es suficiente tener n ecuaciones que expresan las relaciones mutuas, hay que añadir la restricción que todas las ecuaciones sean diferentes entre ellas, o que ninguna este contenida en la otra" (Álvarez 2013, p.38).

Leibniz hace primero una explicación del uso combinatorio de los índices, los logros de Leibniz son dos, primero la llamada regla de Cramer y segundo, determinó claramente el algoritmo de sumas combinatorias de productos con signo formadas con los coeficientes del sistema, tal como se representa en el libro de álgebra lineal de Anton. También es preciso considerar lo que antes mencionamos, de que la regla de signos en Leibniz falla, lo cual siguió siendo por mucho tiempo tema de reflexión para los matemáticos.

La primera mención académica (impresa) apareció En 1730. Maclaurin[22] escribió *Treatise of álgebra* aunque no se publicó hasta 1748, dos años después de su muerte. Este tratado contiene los primeros resultados publicados sobre los determinantes que demuestran la regla de Cramer para sistemas 2×2 y 3×3 indicando cómo podría funcionar el sistema 4×4.

[22] Álvarez (2013) expone que "MaClaurin no llegó a exponer con amplitud y rotundidad, aunque anuncia la descripción combinatoria incluida la regla de los signos, de las formulas finales con independencia del procedimiento de su obtención".(p.35)

Cramer[23], 1750 era un divulgador y actualizador de la matemática de la época, fue muy afortunado por su posición y logró atraer la atención hacia lo determinantes. “La teoría de los determinantes llegó a ser de propiedad de los matemáticos dentro y fuera de Francia”. (Muir, 1960. P 86)

Cramer dio la regla general para sistemas $n \times n$ en un documento llamado Introducción al Análisis de Curvas *(1750).* Ya en este periodo aparecían regularmente trabajos sobre determinantes. En 1764 Bézout dio métodos de calcular determinantes como lo hizo Vandermonde en 1771.

Laplace uso la palabra *resultante*, la misma palabra que utilizó Leibniz, pero el hecho curioso es que todavía Laplace no era conocedor de los trabajos de Leibniz.

Lagrange, en un documento de 1773, estudió identidades para el determinante de tamaño 3×3 . Sin embargo, Lagrange ve cómo su trabajo no tiene ninguna conexión con los trabajos de Laplace y Vandermonde. Mostraba lo que ahora consideramos como la interpretación de determinante como volumen. Lagrange mostro que el tetraedro formado por $O\,(0,0,0)$ y los tres puntos: $M(x,y,z), M'(x',y',z'), M''(x'',y'',z'')$ tiene volumen

$$\frac{1}{6}[z(x'y'' - y''x'') + z'(yx'' - xy'') + z''(xy' - yx')]$$

El término determinante fue introducido por primera vez por Gauss en *Disquisitiones Arithmeticae (1801)* mientras trabajaba en las formas cuadráticas, Gauss usó el término porque consideraba que el determinante, “determina” las

[23] Cramer en su obra “introducción al análisis de curvas algebraicas”, libro de geometría algebraica plana, coincidimos con Álvarez (2013) al decir que este libro es la geometría analítica del plano llevada a un nivel avanzado mediante el estudio del álgebra, de la solución general (sin demostración)

propiedades de la forma cuadrática, sin embargo, ese concepto que él tenía es muy diferente de la actual.

Fue Cauchy en 1812 quien uso el término determinante en el sentido moderno. Gracias al prestigio de su nombre, a la inherente excelencia de su extensa monografía, Cauchy posiciona la teoría de los determinantes como una teoría de importancia.

Cauchy elaboró el más completo trabajo sobre los determinantes, mostrando distintos trabajos sobre los menores, la adjunta, y demostró por primera vez el teorema de la multiplicación de los determinantes ($\det(AB) = detA.detB$). Fue el mismo Cauchy en 1826 quien utiliza el término *Tableau* para mostrar una matriz de coeficientes.

Treinta años después de Cauchy 1810-1840 el número de contribuciones era consideradamente mayor. Entonces interviene otro gran analista, Jacobi, publica una monografía similar en extensión y valor a la de Cauchy, en alemán.

Ya alrededor de 1841 salían a la luz tratados sobre los determinantes de la mano de Jacobi, estos fueron importantes ya que por primera vez se veía la definición del determinante de un modo algorítmico, donde sus entradas no eran específicas. Así sus resultados se aplicaban igualmente si eran números o funciones es allí donde el trabajo de Jacobi se hace popular incluso en la modernidad.

Cayley, el mismo año 1841 contribuyó a la teoría de los determinantes, en su trabajo se usaron dos líneas verticales a cada lado para denotar determinante, una notación que se ha convertido estándar.

Tres años más tarde 1844 Eisenstein es el primero en pensar en las sustituciones lineales como la formación de un álgebra, podemos ver una cita de su documento de 1844

> *An algorithm for calculation can be based on this, it consists of applying the usual rules for the operations of multiplication, division, and exponentiation to symbolic equations between linear systems, correct*

symbolic equations are always obtained, the sole consideration being that the order of the factors may not be altered. (Einsenstein, 1844)

En 1850 con Spottiswoode aparece la primera publicación independiente de un tratado elemental de teoría de los determinantes, para entonces en 1885 había 175 títulos acerca de los determinantes ya para 1904 se tenían más de 1710 títulos

De 1810 a 1850 y de allí en adelante[24] el surgimiento de las geometrías no euclidianas y de estructuras algebraicas, teoría de grupos, campos finitos, no conmutativos, grupo de permutaciones, cuaterniones de Hamilton, marcan un punto de quiebre en la historia de la ciencia en general y de la matemática en particular, pese a que ya era un pensamiento de Leibniz esta nueva concepción, la relación ciencia-realidad es replanteada. La concepción de la ciencia cambió debido a que la ciencia es una secuencia de proposiciones que le deducen unos de otros, que no tienen que ver con la realidad, y que su validez y existencia se basa en el principio de no contradicción.

Ya a partir de esos años famosos matemáticos (Sylvester, Cayley, Hamilton, Jordan, etc.) empiezan a trabajar en la teoría de matrices Cabe destacar que ni Cauchy y demás Matemáticos se dieron cuenta de la generalidad de las ideas, solo veían sus trabajos en contextos específicos. Podemos ver un breve recorrido sobre cómo evolucionó la noción de determinante y cómo este surgió antes que las matrices y las aplicaciones lineales.

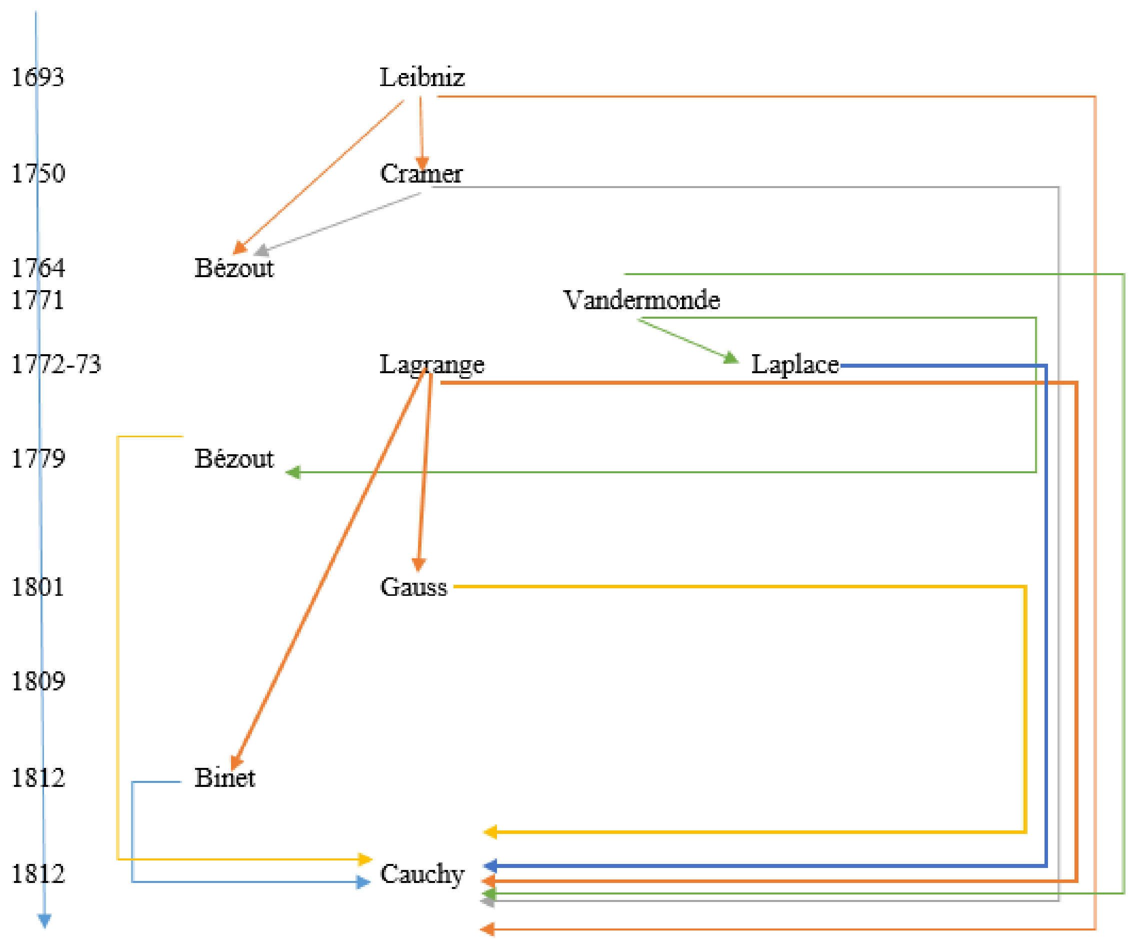
Cabe hacer mención al trabajo arduo después de la mitad del siglo XIX, el desarrollo de la teoría de determinantes y matrices, los orígenes de la formalización del álgebra lineal, incluso el origen de la teoría de invariantes a mano de Cayley. El término teoría invariante se refiere al estudio de las formas algebraicas invariantes para

---

[24] Se puede considerar una época de cambios que cuenta con un lenguaje maduro, una teoría de determinantes ya establecida y una teoría de espacios vectoriales.

la acción de las transformaciones lineales, siendo esta las raíces de teorías tales como: las representaciones de grupos de Lie, álgebra conmutativa, espacios modulares, entre otras, el trabajo de Hilbert sobre la cuestión de la generación finita del álgebra de invariantes resulto en la creación de una nueva e importante disciplina matemática llamada Álgebra Abstracta.

Relaciones de los autores analizados en nuestra línea de tiempo



Esquema 10. Esquema de Representación de Relaciones entre los matemáticos de la época

Temas Desarrollados

Enumeramos los aportes relacionados por cada autor, siguiendo el lineamiento de Muir (1960), en si no son temas específicos, sino aportes o contribuciones que los matemáticos dieron en su momento, los cuales en cada autor pueden ser en esencia los mismos, pero los trabajan de forma diferente. Esta lista nos ayudará a establecer las relaciones del Esquema de relaciones mostrado anteriormente. Si bien los aportes no están organizados cronológicamente, debido a que varios autores retoman aportes anteriores y los "mejoran" generando así una nueva apreciación de dicho aporte, por ejemplo, la regla de formación de los signos siempre estuvo presente desde Leibniz hasta Cauchy, en varias versiones y generando dificultad entre los autores.

1. Nueva Notación.
2. Regla de formación de términos.
3. Regla de formación de los signos.
4. Regla de formación de los términos de los denominadores.
5. Regla de formación de los numeradores.
6. Ley recurrente de formación de nuevas funciones.
7. Nueva notación que denotan nuevas funciones.
8. Nuevo modo de definición de funciones.
9. Términos positivos y negativos son iguales en número. (determinante)
10. El efecto de intercambiar dos índices consecutivos
11. El efecto de intercambiar dos índices de la misma serie.
12. El nombre resultante para las nuevas funciones
13. Un modo de buscar los número de términos.
14. Una serie de identidades sobre los productos
15. Se menciona la adjunta.

Relaciones

Aquí estableceremos las relaciones existentes, en cuanto a los avances de la teoría de determinantes, dichas relaciones serán tomadas de acuerdo a los temas desarrollados por cada autor. Esto no implica que cada autor conozca las obras de su “relación”, ni tampoco que sea una continuación, los escritos de Leibniz[25] son claro ejemplo de lo dicho, simplemente se tratará de establecer una línea de tiempo en la cual se muestre el desarrollo total de la teoría de determinantes hasta la época de Cauchy, no tendremos en cuenta las relaciones de Cauchy, debido a que todo converge en él, y ya anteriormente en el análisis se había comentado sus aportes lo cual catapulta la teoría de determinantes y la vuelve importante.

Leibniz- Cramer: la relación establecida parte del tema que casi todos por no decir que todos trabajaron y a su vez tuvieron problemas y esta es el tema 3), el problema del signo. Para su famosa regla termina desarrollando los temas 4) y 5)

Leibniz –Bézout: Bézout, trabaja en el problema de signo, establece una regla combinada para la formación de los signos, es decir trabaja los temas 1) y 2). También establece el tema 6.

Cramer- Bézout: en una segunda lista de contribuciones de Bézout se ve su avance en la expresión de valores de incógnitas y ecuaciones lineales, utilizando lo trabajado por Cramer, los procesos de encontrar el numerador y denominadores. Es decir, utiliza los temas 2), 3), 4) y 5). Lo más interesante de Bézout es en el desarrollo de 14. Que más adelante varios autores retomarían, y Cauchy lo formalizaría.

Vandermonde- Laplace: Laplace trabaja en base a Vandermonde y su espectacular obra, en si complementa muchas cosas, como la prueba del teorema del efecto de la trasposición de dos letras adjuntas en cualquiera de las nuevas funciones es decir 10). También establece una prueba del teorema del efecto de igualar dos letras, 11). El 12) es expresamente de Bézout, y este nombre seria reconocido y utilizado por varios matemáticos de la época, también utiliza otro tipo de notación, no tan famoso. 1).

---

[25] Los escritos de Leibniz acerca de los determinantes no surgieron a la luz de la academia inmediatamente, fue hasta el año 1850.

Vandermonde-Bézout: Bézout prueba el teorema de Vandermonde 11).

Lagrange- Gauss: Gauss toma de Lagrange varios a partes de sus obras, las diferentes sustituciones empleadas por Gauss en su libro Disquisitiones son tomadas de Lagrange, ya Gauss hace un trabajo más expositivo y establece nuevas propiedades, tal como se ve en el quinto capítulo. También el tema 15) el cual es posible verlo en el análisis histórico epistemológico correspondiente a Gauss, allí podemos ver con más claridad el tema de la adjunta.

Cuadro comparativo acerca de los libros de álgebra Lineal analizados.

Este aparte intentáremos mostrar a nivel muy general las diferencias que se encuentran en los libros Analizados, esto con el fin de ver el enfoque que estos tienen acerca del concepto de determinante, también el ojear con un poco más de información el tratamiento que le dan al concepto de determinante, este cuadro tratará de ser lo más completo posible.

El fin del cuadro comparativo no es el de establecer cual libro es mejor o peor para su enseñanza, solo es de carácter expositivo al mostrar las diferencias y similitudes de cada uno en relación al concepto de determinante.

Se establecerán para el cuadro comparativo los siguientes criterios:

1. Contenido: como está organizado el contenido
2. Capítulo sobre determinantes: reconocimiento del capítulo de determinantes
3. Estructura del capítulo de determinantes: como aborda el capítulo de determinantes
4. Otras menciones del concepto de determinante: menciones sobre el determinante fuera del capítulo específico.
5. Referencias históricas: menciones históricas o apartes sobre autores matemáticos.
6. Concepto de determinante: cómo define el determinante
7. Importancia de los teoremas: como se da el tratamiento a los teoremas
8. Teoremas mencionados
9. Representación geométrica: representación geométrica en relación al concepto de determinante
10. Demostraciones: el tratamiento de las demostraciones
11. Matemáticos citados: que matemáticos son mencionados.

12. complementos adicionales: ayudas extras que presenta el libro

Elemento de comparación	Libros			
	Álgebra lineal una introducción moderna David Poole, tercera edición 2011.	**Introducción al Álgebra Lineal Howard Anton, tercera edición 1976.**	**Álgebra Lineal de Stanley Grossman, quinta edición 1996**	**Álgebra Lineal enfoque geométrico, Rafael Isaacs y Sonia Sabogal 2009.**
Contenido	Presenta 7 capítulos y 5 apéndices, ninguno de ellos dedicado a determinantes	Consta de 8 capítulos y una sección de respuestas a los ejercicios, de los cuales el 2do capítulo está dedicado a los determinantes	Contiene 6 capítulos y 5 apéndices, adicionalmente consta con un apartado sobre Matlab. El capítulo 2 dedicado a determinantes	Consta de 5 Capítulos de los cuales el 5to es dedicado completamente a los determinantes, una sección de respuestas a los ejercicios y una sección de lecturas recomendadas
Capítulo sobre determinantes	No tiene un capítulo específico dedicado a los determinantes, aborda este concepto en el capítulo de eigenvectores.	Dedica el segundo capítulo del libro a los determinantes, luego de haber abordado los sistemas de ecuaciones lineales y matrices en el capítulo 1.	Dedica el segundo capítulo del libro a los determinantes, luego de haber abordado los sistemas de ecuaciones lineales y matrices en el capítulo 1.	El tema de determinantes es tratado en el 5to y último capítulo del libro, el cual lo identifica como "la función determinante" luego de haber trabajado el tema de R como espacio vectorial euclídeo.

Estructura del capítulo determinantes	No tiene capítulo de determinantes	Inicia el capítulo hablando sobre la función determinante, sigue con la explicación de la reducción por renglones, luego las propiedades de los determinantes y finaliza con la regla de Cramer a la que siguen algunos ejercicios suplementarios	Grossman comienza con la definición de determinante a la que sigue las propiedades del mismo luego demostraciones de dos teoremas que considera importantes junto con una semblanza histórica sobre los determinantes a la que le sigue la explicación de determinantes e inversas y finaliza con la explicación de la Regla de Cramer a la cual le sigue un resumen del capítulo junto con unos ejercicios de repaso	El capítulo de determinantes lo aborda, como se observa, comenzando por el tema de áreas y volúmenes orientados, donde indica que si un conjunto de n vectores de R**n (lo que otros autores denominan como una matriz de n x n), sigue con los axiomas (o propiedades) de determinantes para luego presentar la regla de Cramer y finaliza con la explicación de la inversa por cofactores.

Otras Menciones del concepto de determinante	Solo hace mención al concepto de determinante dentro del capítulo de eigenvectores.	No hace mención en los capítulos precedentes al segundo sobre el concepto de determinante, sin embargo en el capítulo siguiente dedicado a vectores, en el apartado 3.4 sobre producto vectorial (cruz) usa la notación de determinantes como otra forma de representar la definición. Posteriormente hace varias menciones al concepto para aplicarlo sobre distintos casos que se resuelven más fácilmente aplicando las propiedades determinantes.	Es importante mencionar que ya en el capítulo 1 en el apartado de matrices, cuando se está hablando de la inversa de una matriz, se da la primera definición de determinante que presenta el libro, antes del segundo capítulo que es el que dedica específicamente al tema de los determinantes.	No hace ninguna mención del concepto de determinantes fuera del capítulo dedicado al mismo.
Referencias Historicas	Da mucha importancia a las referencias históricas, colocando pequeños apartados a lo largo del capítulo como capsulas que explican la historia de un determinado concepto. Igualmente dedica secciones enteras solo a semblanzas o reseñas históricas	No tiene reseñas históricas, solo hace menciones ocasionales al pie de página de los autores o teoremas mencionados.	Cada capítulo contiene secciones específicas dedicadas a las semblanzas históricas ubicadas al final de cada sección antes de las recomendaciones y ejercicios de Matlab y hacen referencia al autor o los autores que fueron mencionados en dicha sección y sus aportes matemáticos.	Isaacs no tienen ningún tipo de semblanza histórica, solo en algunos casos una escaza mención al pie de página sobre el personaje mencionado donde solo indica su año de nacimiento y de muerte.

Concepto de determinante	Propone la definición del determinante como la sumatoria (o resta) del producto de los elementos de una matriz de $n \times n$ en sus diagonales.	Comprende el determinante como una función que asocia un número real a una matriz dada.	Da exactamente la misma definición de Poole, destacando, al igual que él, que no debe confundirse la notación de determinante con la de valor absoluto, por las barras con que se representa.	Define el determinante como una función que indicará si n vectores dados son, o no, linealmente independientes. No se da la prueba de unicidad (de la función) El enfoque para introducir la función determinante es axiomático (símil a Apóstol)
Importancia de los teoremas	Destaca la utilidad de los teoremas y en cada sección tiene un apartado para definiciones y teoremas con sus respectivas demostraciones, sin embargo el autor trató de limitar el número de los mismos, dejando sus resultados para el resumen. En la medida de lo posible, el autor incluye pruebas elementales y accesibles a los teoremas, obteniendo como resultado una obra muy completa.	En cuanto a las demostraciones de los teoremas prefirió ser un poco más selectivo, dando prioridad a aquellas que consideró con mayor valor pedagógico y dejando para el final aquellas que a pesar de tener también cierto valor pedagógico son más difíciles y eliminó por completo las que consideró que no aportaban dicho valor, haciendo énfasis en esos casos en la aplicación del teorema	Presenta muchos teoremas, sin embargo busca siempre un equilibrio entre la técnica y la teoría	Se plantean algunos teoremas cuya demostración es dejada como ejercicio y que se encuentran identificados porque su realización muy seguramente requerirá de la ayuda del profesor.

Teoremas mencionados	Teorema de expansión de Laplace, Teorema de una matriz triangular, teorema de una matriz cuadrada, teorema de una matriz invertible, teorema del determinante de $(kA) = k ** ndetA,$ teorema de la propiedad conmutativa de los determinantes, Regla de Cramer	Teorema de reducción por renglones, teorema de una matriz triangular, teorema de operaciones elementales sobre renglones de cualquier matriz, teorema de matrices cuadradas del mismo tamaño, teorema de una matriz cuadrada inversible, teorema de una matriz inversible, regla de Cramer	Teorema de una matriz triangular, teorema de una matriz triangular invertible, teorema del área generada por el determinante de A, teorema de la propiedad conmutativa de los determinantes, teorema de la factorización LU de una matriz cuadrada, teorema de una matriz permutación, teorema de la traspuesta de una matriz, teorema básico, teorema de una matriz de nxn invertible, teorema del $detA$ diferente de 0, teorema de una matriz de nxn, teorema de una matriz invertible, teorema resumen, regla de Cramer	A diferencia de otros autores presenta Axiomas en lugar de teoremas, los cuales se presentan en este orden: el determinante es una función lineal, alternancia, determinante de una matriz identidad posteriormente presenta la regla de Cramer y termina con la inversa por cofactores, sin que estas sean tratadas como axiomas o teoremas.
Representación geométrica	Este autor habla de vectores antes de hablar de determinantes ya que considera que el álgebra lineal se compone esencialmente de vectores y que la comprensión de estos en ciertos escenarios concretos, con la finalidad de obtener la comprensión geométrica necesaria	No hace alusión a la representación geométrica de los determinantes	Incorpora la interpretación geométrica de un determinante de 2x2 por considerar que algunas ideas importantes en el álgebra lineal se observan mejor a través de su interpretación geométrica	El libro comprende todos los conceptos desde su interpretación geométrica

Demostraciones	Los resultados interesantes que no son el tema central del libro se incluyeron como ejercicios o exploraciones, el número de teoremas es limitado y por ende sus demostraciones cuyos resultados se dejaron para el texto resumen	El tratamiento de las demostraciones varía las que son elementales y tienen un contenido pedagógico significativo se presentan con precisión, en forma apropiada para los principiantes.	Se demuestran todos los teoremas que se pueden probar usando los resultados dados en el libro. Las demostraciones más difíciles se dan al final de las secciones o en secciones especiales, pero se dan.	Se utilizan axiomas cuyas demostraciones no son requeridas
Matemáticos citados o referenciados (solo para determinantes)	Pierre Simon Laplace, Augustin Louis Cauchy, Gabriel Cramer, Colin Maclaurin,Takakazu Seki Kowa, Gottfried Wilhelm von Leibniz, Issai Schur.	No referencia a ningún matemático en el capítulo de determinantes, a pesar de explicar la regla de Cramer no hace referencia a su autor	Gottfried Wilhelm von Leibniz, Augustin Louis Cauchy, Gabriel Cramer.	Gabriel Cramer.
complementos adicionales	Exploraciones, Aplicaciones, ejemplos y ejercicios, bosquejos biográficos y notas etimológicas, iconos marginales, página web, apéndices, auxiliares, guía para el profesor, guía para el alumno.	Guía para el profesor, ejercicios suplementarios, sección sobre la geometría de las transformaciones, ejercicios de cálculo, ejemplos, suplemento de aplicaciones del álgebra lineal.	Aplicaciones, ejemplos, ejercicios, teorema de resumen, autoevaluación, manejo de calculadora, resúmenes de capítulos, geometría, semblanzas históricas, MATLAB	Lecturas recomendadas, ejercicios.

Tabla 4 Cuadro comparativo de los libros analizados

Es pertinente abordar los libros desde el punto de vista en investigación, cada libro de álgebra lineal analizado tiene características que los hacen únicos, y cada libro tiene propuestas interesantes en cuanto al manejo del álgebra lineal.

Álgebra lineal una introducción moderna, David Poole tercera edición, 2011.

Cómo ya habíamos comentado anteriormente en el cuadro comparativo el libro se destaca por ser un libro dirigido a las aplicaciones, esto con el fin de poder abarcar la mayor interdisciplinariedad posible. Un libro basado en la utilidad genera contextos interesantes, entre ellos las aplicaciones a las cual se dirige el libro se encuentran:

- matemáticas
- ciencias de la computación
- física
- química
- ingeniería
- biología
- negocios
- economía
- psicología
- geografía
- sociología

El libro de David Poole tercera edición se enmarca en un énfasis geométrico, el mismo autor detalla que conserva la filosofía del álgebra lineal de vectores subrayando la intuición geométrica. Otra cuestión interesante ya adentrándonos a nuestro tema en particular, los determinantes es que esta versión se introduce el método de condensación de Lewis Carroll.

Otro detalle interesante de mencionar y que ya lo hemos tocado en el cuadro comparativo son los bosquejos biográficos e históricos, el libro de Poole hace varios a partes históricos y biográficos a lo largo de su recorrido, enmarca estos a partes como un "esfuerzo social y cultural, así como científico" (p. 13). También el libro hace apartes etimológicos, para atender el problema de la terminología.

Como se menciona varias veces el libro de Poole salé de la categorización de los libros de álgebra lineal y no establece un capítulo para los determinantes en sí, estos son integrados en el capítulo cuarto que trata sobre eigenvalores y eigenvectores. Claro es interesante mostrar que ver los determinantes en este contexto es único, ya que se ven motivados por el uso en el descubrimiento de los polinomios característicos de las matrices, muy acorde al método axiomático que reduce a su forma triangular y genera la multiplicación de las entradas en su diagonal principal.

Introducción al Álgebra Lineal Howard Anton, tercera edición 1976.

Lo más interesante de mencionar de este libro y que ya se presentó en el cuadro comparativo es el enfoque en el cual trata los determinantes el libro de Álgebra Lineal de Howard Anton, este enfoque guiado por el enfoque clásico de las permutaciones hace del libro de Howard Anton único en su clase.

Al hacer un tratamiento del enfoque de permutaciones el autor deslinda el problema de definir el concepto a través de n formas lineales alternantes esto da al estudiante una mejor comprensión, más intuitiva del tema.

Claro el capítulo desarrollado para los determinantes consta de cuatro subcapítulos los cuales hacen que en 5 secciones se puedan abarcar todo el tema relacionado a este. Si bien el libro carece de todo tipo de apartes históricos, etimológicos, este lo compensa con la definición de permutaciones, aunque es conveniente expresar que el libro de Howard Anton en sus posteriores ediciones ha tenido grandes cambios, los cuales todos estos detalles se han venido incluyendo.

No ahondáremos en el tema de como hace el tratamiento al capítulo de los determinantes, ya en el análisis del libro queda bastante claro, aunque se debe abrir una discusión fundamental acerca de retomar esta posición en los cursos de álgebra lineal I de la universidad industrial de Santander, esto lo vemos en opinión personal como necesario para el desarrollo de un curso de álgebra lineal I.

Álgebra Lineal Stanley Grossman, quinta edición 1996.

Un libro bastante conocido en los cursos de Álgebra lineal, es un libro con abundante temas, ejercicios y ejemplos. A destacar se puede decir que preserva la parte tecnológica con Matlab una gran aplicación.

Al igual que el libro de Álgebra lineal de David Poole este contiene aspectos históricos pero vistos como más de interés del lector a un aporte en si útil al libro.

En diferencia a los otros libros de álgebra lineal el libro de Grossman inicia el capítulo definiendo la solución de un determinante de orden 2, establece su notación e invita al lector a no confundir la notación del determinante con el valor absoluto. El libro de Grossman al contrario del libro de álgebra lineal de Howard Anton basa su capítulo de determinantes por el método inductivo. Al definir el determinante de orden 3x3 da pautas de cómo resolverlo de forma sencilla y allí entra la primera dificultad no se puede seguir por el mismo método para el determinante de orden 4. Para seguir se hace necesario introducir las definiciones necesarias para manejar el determinante por cofactores y así poder generalizar al determinante de una matriz de nxn.

El enfoque del libro de álgebra lineal de Grossman se guía más por un enfoque orientado a los sistemas de ecuaciones lineales. A la utilización del determinante como una herramienta y no pasa de allí.

Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico, Rafael Isaacs y Sonia Sabogal 2009.

Un libro elegido por ser de autoría de dos profesores reconocidos de la universidad industrial de Santander, el profesor Rafael Isaacs y la profesora Sonia

Sabogal, se eligió por tener un enfoque diferente a los demás libros, el cual es un enfoque axiomático guiado en el capítulo de los determinantes por la parte geométrica de área y volúmenes orientados.

Un libro concreto, puntual en relación al punto de vista geométrico, no contiene a partes históricos, ni etimológicos, tampoco se establece una relación entre la combinatoria y los determinantes, un libro que sale de lo tradicional.

El capítulo desarrollado en relación a los determinantes lo hace desde la definición axiomática de la función determinante, los autores relatan que tomaron el estilo del tratamiento que realiza Apóstol en su clásico libro de cálculo. Al usar los axiomas de la función determinante, se deduce un sencillo método para calcular el de cualquier matriz cuadrada, también se vería como poder triangulizar la matriz mediante operaciones elementales sobre filas o sobre columnas, esto generaría una deducción de la regla de Cramer, todo este enfoque axiomático hace fácil realizar la muestra de propiedades como por la multiplicación de determinantes y demás. Es un gran libro, muy puntual y que ofrece un contexto diferente en el cual se puede desarrollar un curso de álgebra lineal I de la universidad Industrial de Santander.

Una ojeada a los primeros libros escritos sobre determinantes.

Spottiswoode es considerado el autor que escribió el primer libro Académico sobre determinantes, (Farebrother, 2002), aunque en años anteriores se publicaron varios artículos amplios como el texto de Cauchy (1812), o el de Jacobi (1841) que pueden ser calificados como los primeros libros de determinantes, no lo podríamos considerar de esa forma, debido a que estos son artículos científicos que tienen un nivel de rigor elevado, y no cualquier persona puede leerlos, despojándolo de un carácter formativo, a diferencia de lo que sucede con los libros de enseñanza. Álvarez (2013) dice:

Entendemos que los libros, aunque pueden tener diversos niveles de extensión y dificultad, tienen como objetivo difundir entre públicos más amplios, casi siempre en el entorno educativo, una materia ya elaborada en el ámbito de la investigación (p.109)

Y si reflexionamos sobre lo que comento Muir, quien asevera que "Spottiswoode creo el primer trabajo elemental independiente de la época".

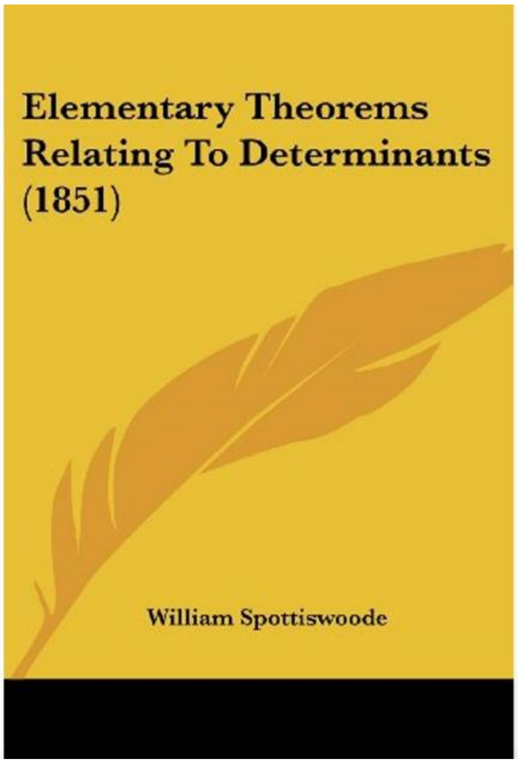


Ilustración 30. Elementary Theorems Relating to determinants

Álvarez (2013) hace mención a un libro que es anterior al de Spottiswoode, aunque es un libro de recopilación, menciona varios apartes interesantes, el libro titulado *Tratados Matemáticos* (1825) de Heinrich Ferdinand Scherk, en este libro se puntualiza la regla de Cramer, el libro es de corte inductivo, las propiedades van surgiendo a medida que avanza en el tema.

Más adelante Spottiswoode en su libro titulado *Elementary Theorems Relating to Determinants* del año 1851, segun Álvarez (2013) explica con más detalle el libro, al referirse al él como un escrito corto con ocho páginas iniciales y sesenta y tres de texto.

La mayor parte del prefacio comenta Álvarez, está dedicada a exponer un breve esbozo histórico de la evolución de los determinantes desde Cramer.

El libro categoriza los temas de la siguiente manera:

I. Introducción
II. Sobre la formación de determinantes
III. Transformación de determinantes
IV. Sobre la conexión entre determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

V. Sobre productos y potencias de determinantes

VI. Sobre sistemas inversos y determinantes de determinantes

VII. Expresiones para un determinante y sus constituyentes en términos de sus coeficientes diferenciales

VIII. Sobre sistemas redundantes y grupos de determinantes

IX. Sobre determinantes antisimetricos

X. Sobre determinantes funcionales.

Nos podemos guiar por lo que comenta Álvarez (2013) acerca del contenido en dichas secciones, aunque si desean más profundidad del análisis pueden ir directamente al autor en cuestión.

En el primer capítulo se establece un método inductivo para mostrar la formación de los determinantes, aborda las diferentes aplicaciones que en la historia dieron lugar a la formación del concepto tales como la "obtención del centro y los ejes principales de una curva plana y de una superficie de segundo orden, así como la transformación de coordenadas".

Al dar una definición inductiva Spottiswoode la realiza hasta $n = 4$ dejando la definición inductiva general para más adelante. La notación es característica de Vandermonde, aunque no escogen sus símbolos de representar funciones si todas sus características de acuerdo a la resolución y una que otra pequeña notación característica.

Álvarez detalla que el libro contiene muchas erratas en cuanto a la escritura del libro, pero lo contrasta con la época en la cual *"no eran tiempos de rigor expositivo"* (p.115).

En el capítulo 2 aparecen los primeros teoremas que muestran la linealidad de la función determinante,

Teorema I. si toda una línea vertical u horizontal se multiplica por la misma cantidad, el determinante es multiplicado por esa cantidad.

Aquí continúa el autor con la demostración del teorema. En el libro se contrasta un poco la retórica de la fecha al tener enunciados bien expresados y sin notaciones.

Ya en el capítulo IV se enuncia la primera conexión entre determinantes y sistemas de ecuaciones con la regla de Cramer. En el capítulo V se establece un teorema muy reconocido, El teorema es el siguiente:

Teorema XI. Un determinante cuyos constituyentes son funciones lineales de constituyentes dados, siendo los coeficientes los mismos para cada línea horizontal, es igual al producto de los dos determinantes cuyos constituyentes son los constituyentes dados y los coeficientes respectivamente. (pg. 26)

Álvarez (2013) comenta que la exposición del producto de determinantes es acertada, al hacerlo de modo algorítmico, aunque esto suponga dejar abierto a interpretaciones de multiplicación fila - fila, fila- columna. También comenta el autor que en conclusión este libro es sistemático y pedagógico al mostrar la parte general de la teoría de determinantes. Aunque cambia en la versión siguiente haciéndolo más extenso y más riguroso[26], lo cual lo hace perder el enfoque pedagógico que tenía en la primera versión.

La segunda versión del libro de Spottiswoode está con fecha de 1856, pero siendo elaborada de 1851 a 1853, este retraso en la publicación Álvarez (2013) comenta que se podría pensar que fue a que el editor de la revista diera el trabajo un visto negativo, debido a la reescritura de la obra totalmente[27], al hacerlo Álvarez afirma

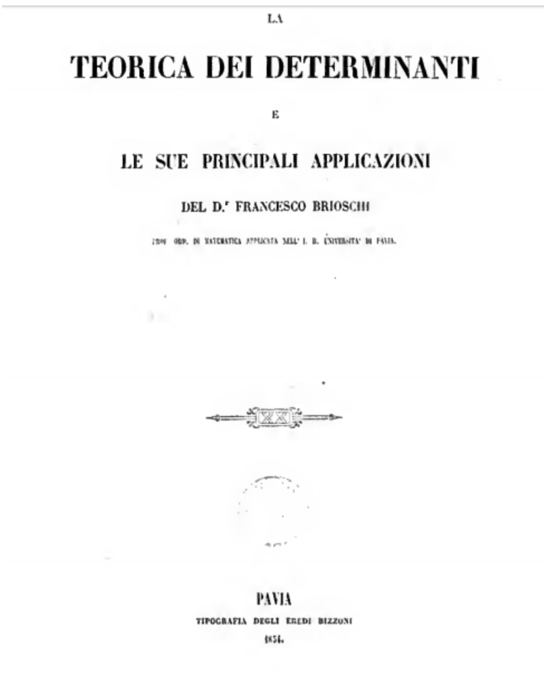
---

[26] Se podría pensar que el motivo es que el segundo trabajo fue publicado en una revista de investigación (Journal de Crelle), por eso las modificaciones a la rigurosidad del documento en cuestión.

[27] Álvarez (2013) cita a Spottiswoode escribe una nota en su segunda versión:

En el año 1851 el autor del siguiente artículo público un folleto titulado “teoremas elementales relacionados con los determinantes” y tras la solicitud del editor de esta revista para reproducirlo, que esta “perdió el mérito de frescura, concisión y accesibilidad que tenía” (p.121) la revista de investigación Crelle de pronto fijó su mirada en la primera obra realizada y al ver la segunda versión totalmente cambiada, podría ser un argumento para el retraso de la publicación del escrito.[28]

Un segundo libro enuncia Álvarez (2013), ocupa la teoría de determinantes, se titula *La teorica dei determinanti e le sue principali applicationi.* De Francesco Brioschi (1854).


LA

TEORICA DEI DETERMINANTI

E

LE SUE PRINCIPALI APPLICAZIONI

DEL D.r FRANCESCO BRIOSCHI

PAVIA

TIPOGRAFIA DEGLI EREDI BIZZONI

1854.

Ilustración 31. Portada libro, Francesco Brioschi

El autor resalta un detalle que es importante para nuestra investigación;

Los más recientes trabajos sobre determinantes son aplicaciones de sus propiedades al análisis, a la geometría, a la mecánica, a la teoría de las ecuaciones, a la teoría de números. (pg. 12)

Aunque pequeño, este argumento es poderoso para las conclusiones de nuestro análisis histórico-epistemológico, al mencionar lo que fue el desarrollo de la teoría de determinantes, una aplicación de sus propiedades, un descubrimiento ante todo de aquellas propiedades que se dieron en los diferentes contextos.

---

[28] "...solicité permiso para revisar el trabajo. El tema había sido ampliamente desarrollado en el intermedio, lo que hacía necesario no solamente revisarlo, sino reescribir por completo la obra. El resultado se ofrece en las páginas siguientes". (Spottiswoode, 1856 p.209)

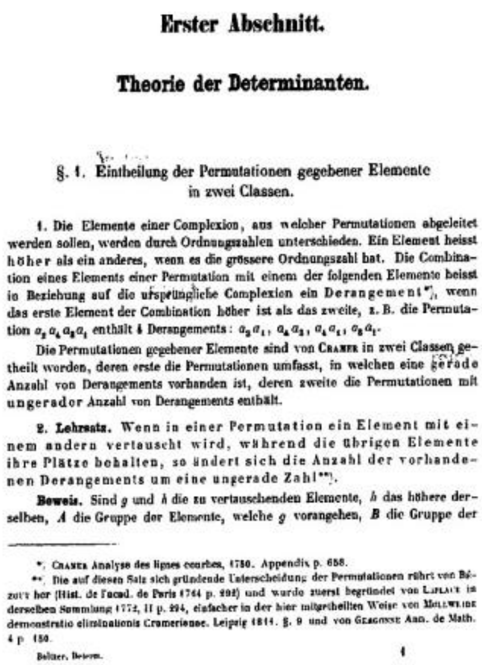
El contenido del libro lo enuncia Brioschi de la siguiente forma:

I. Definiciones y notaciones
II. Leyes de formaciones de determinantes
III. Propiedades generales de los determinantes
IV. De la resolución de las ecuaciones algebraicas lineales
V. Multiplicación y elevación a potencias de los determinantes
VI. determinantes y elementos recíprocos, o determinantes de determinantes
VII. De las propiedades de los determinantes menores
VIII. determinantes antisimetricos y determinantes simétricos
IX. De los determinantes de las raíces de las ecuaciones algebraicas, y de los determinantes de las integrales particulares de las ecuaciones diferenciales lineales
X. determinantes de funciones
XI. determinantes de Hesse

Álvarez (2013) menciona que el libro de Brioschi está más enfocado hacia la parte de las aplicaciones de los determinantes, que a la construcción de su teoría formal. La notación tipo a_{ij} es la utilizada y no la que utiliza Spottiswoode que es tipo Vandermonde.

“se trata por tanto de un libro elemental en cuanto al desarrollo teórico y abundante en los que a exponer aplicaciones se refiere”. (Álvarez, 2013, pg. 129)

De aquí en adelante es marcada la tendencia de los libros acerca de determinantes, en hacerlos más expositivos y guiado hacia las aplicaciones, un ejemplo de ello son los libros de Baltzer (1857) y Trudi (1862) el cual tienen en común que el contenido está dividido en dos partes, el primero en teoría y el segundo en aplicaciones.


Erster Abschnitt.

Theorie der Determinanten.

§. 1. Eintheilung der Permutationen gegebener Elemente in zwei Classen.

1. Die Elemente einer Complexion, aus welcher Permutationen abgeleitet werden sollen, werden durch Ordnungszahlen unterschieden. Ein Element heisst höher als ein anderes, wenn es die grössere Ordnungszahl hat. Die Combination eines Elements einer Permutation mit einem der folgenden Elemente heisst in Beziehung auf die ursprüngliche Complexion ein Derangement*), wenn das erste Element der Combination höher ist als das zweite, z. B. die Permutation $a_2 a_4 a_3 a_1$ enthält 4 Derangements: $a_2 a_1$, $a_4 a_3$, $a_4 a_1$, $a_3 a_1$.

Die Permutationen gegebener Elemente sind von Cramer in zwei Classen getheilt worden, deren erste die Permutationen umfasst, in welchen eine gerade Anzahl von Derangements vorhanden ist, deren zweite die Permutationen mit ungerader Anzahl von Derangements enthält.

2. **Lehrsatz.** Wenn in einer Permutation ein Element mit einem andern vertauscht wird, während die übrigen Elemente ihre Plätze behalten, so ändert sich die Anzahl der vorhandenen Derangements um eine ungerade Zahl**).

Beweis. Sind g und h die zu vertauschenden Elemente, h das höhere derselben, A die Gruppe der Elemente, welche g vorangehen, B die Gruppe der

*) Cramer Analyse des lignes courbes, 1750. Appendix p. 658.

**) Die auf diesen Satz sich gründende Unterscheidung der Permutationen rührt von Bézout her (Hist. de l'acad. de Paris 1764 p. 292) und wurde zuerst begründet von Laplace in derselben Sammlung 1772, II p. 294, einfacher in der hier mitgetheilten Weise von Mollweide demonstratio eliminationis Cramerianae. Leipzig 1811. §. 9 und von Gergonne Ann. de Math. 4 p. 150.

Baltzer, Determ. 1

Ilustración 32. Ejemplo de nota a pie de página del libro de Baltzer

Baltzer con su obra titulada "*Teoría y aplicaciones de los determinantes, con indicación de las fuentes originales"* este esquema metodológico es el que toman los libros posteriores, al partir en dos la teoría y las aplicaciones el rigor matemático se va a la parte de la teoría, dejando con más libertad a la parte de las aplicaciones para tratar temas como el álgebra, análisis y la geometría.

Baltzer hace un importante comentario acerca del desarrollo histórico, señala que en su obra cita a las fuentes originales, creadores de los métodos, autores de los teoremas esto ***con el fin de que sirva de elemento de estudio para la historia de las ciencias***, y como invitación al estudio de las mismas.

Álvarez (2013) reconoce el esfuerzo de Baltzer por reconocer los autores originales de la teoría de determinantes. "A lo largo de toda la obra no deja de indicar en notas a pie de página a quien corresponde la autoría de los diversos resultados que expone, ya sea en la parte de la teoría como en la de aplicaciones." (pg.133).

El índice de contenido de Baltzer se encuentra de la siguiente forma:

Teoría de determinantes

I. División de las permutaciones de elementos dados en dos clases

II. determinante de un sistema de n^2 elementos
III. Los términos de un determinante en una suma de productos de determinantes parciales
IV. Descomposición de un determinante en una suma de productos de determinantes
V. determinantes ordenados siguiendo los productos de los elementos de dos líneas que se cortan
VI. Producto de determinantes
VII. Los determinantes de sistemas adjuntos
VIII. El determinante de un sistema de elementos, en el cual los elementos correspondientes son iguales y de signo contrario

Aplicaciones de los determinantes

IX. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales
X. Teoremas sobre las ecuaciones diferenciales lineales
XI. Resultante de dos ecuaciones algebraicas
XII. Productos de todas las diferencias de varias cantidades dadas
XIII. Los determinantes funcionales
XIV. Teoremas sobre las funciones homogéneas
XV. Las sustituciones lineales y en particular las sustituciones ortogonales
XVI. Área de un triángulo y volumen de un tetraedro
XVII. Sobre los productos de áreas de triángulos y volúmenes de tetraedros
XVIII. Relaciones poligonometricas y poliedrometricas

De las 18 secciones que se compone el libro la mayoría recae sobre las aplicaciones, Álvarez (2013) afirma lo siguiente:

“Baltzer no se limita a indicar el uso que se hace de los determinantes en los temas seleccionados, sino que expone la materia correspondiente de modo bastante completo”. (pg. 135).


TEORIA

DE'

DETERMINANTI

E LORO APPLICAZIONI

DI

NICOLA TRUDI

PROFESSORE DI CALCOLO INFINITESIMALE NELLA R. UNIVERSITÀ DI NAPOLI;
SOCIO ORD. DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE E DEL R. ISTITUTO D'INCORAGGIAMENTO;
E SOCIO RESIDENTE DELL'ACCADEMIA PONTANIANA.

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
DI
B. PELLERANO
STRADA DI CHIAIA, N.° 60
1862

Ilustración 33. Portada libro de N. Trudi.

Más adelante en 1862, se publica una obra titulada *Teoría de determinanti e loro applicazioni* de N. Trudi. Álvarez (2013) hace gran énfasis en el, debido a que fue la fuente principal de la cual se introdujo en España, dejando así el reconocimiento a éste de que los determinantes fueran difundidos y conocidos, gracias a la traducción de J. Echegaray. Es importante señalar que Muir comenta sobre esta obra:

> Este libro tiene un alcance similar al de Brioschi y Baltzer, pero dirigido a lectores menos avanzados. Las explicaciones son más complejas, tienen numerosos ejemplos, los teoremas menos simples están divididos para una gradual absorción, y las deducciones que son evidentes están enunciadas formalmente. (Muir 1960, pg 8).

El contenido del libro de Trudi, como ya lo comentamos se divide en dos partes uno para la teoría y otro para las aplicaciones, el libro de Trudi contiene menos variedad de aplicaciones que el libro de Baltzer.

Teoría de Los determinantes

I. Inversiones en las permutaciones
II. Nociones en torno a las matrices rectangulares y cuadradas
III. Primeras nociones en torno a los determinantes, y a los determinantes menores y complementarios

IV. Propiedades generales de los determinantes
V. Descomposición de determinantes en suma de productos de menores complementarias
VI. Multiplicación de determinantes
VII. Derivadas y diferenciales de los determinantes
VIII. Trasformación especiales de determinantes
IX. determinantes recíprocos
X. determinantes simétricos, semisimetricos y disimétricos
XI. Matrices y determinantes de dos escalas

Aplicaciones de los determinantes

XII. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales
XIII. Consideraciones generales sobre las funciones enteras, y el proceso del máximo común divisor
XIV. Eliminación entre dos ecuaciones
XV. determinantes de las ecuaciones y raíces múltiples
XVI. Sobre el teorema de Sturn
XVII. determinantes funciones
XVIII. Algunas consideraciones generales sobre las sustituciones lineales
XIX. Algunas propiedades de las funciones homogéneas
XX. Algunas transformaciones y propiedades de las formas; y una particular de las binarias y de las cuadráticas
XXI. Algunas aplicaciones a la geometría analítica

Menciona Álvarez (2013) que Trudi sigue la línea de Baltzer el cual dedica la primera sección a explicar las permutaciones, en la segunda tan solo introduce terminología sobre los” rectángulos de cantidades, a los que denomina “matrices, siendo dichas cantidades los “elementos” de la matriz que están dispuestos en líneas horizontales y verticales.

A partir de estos primeros libros surgen cada vez más obras acerca de la teoría de determinantes, entre estas se encuentran las sucesivas versiones del libro de Baltzer, con aportaciones de Kronecker, Dodgson, Dostor, Gunter y Scott, Ernesto Pascal entre otros. Los anteriores escritos específicos de determinantes, se multiplicaron según pasaban los años, los posteriores estudios y aportes a los sistemas lineales dieron una motivación para trabajar los diferentes problemas que abordaban dicho estudio e incluso el aumentar la mirada más allá de los determinantes al álgebra matricial.

Contextos en los cuales se desarrolla el concepto de determinante.

De acuerdo al desarrollo del concepto de determinante, desde su origen hasta su consolidación como una teoría general, podemos identificar cuatro contextos claves

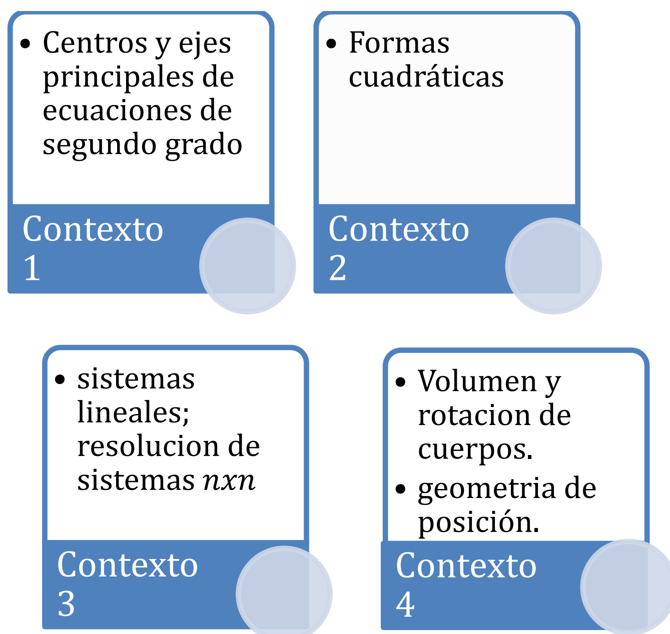


Ilustración 34. Contextos claves sobre el determinante.

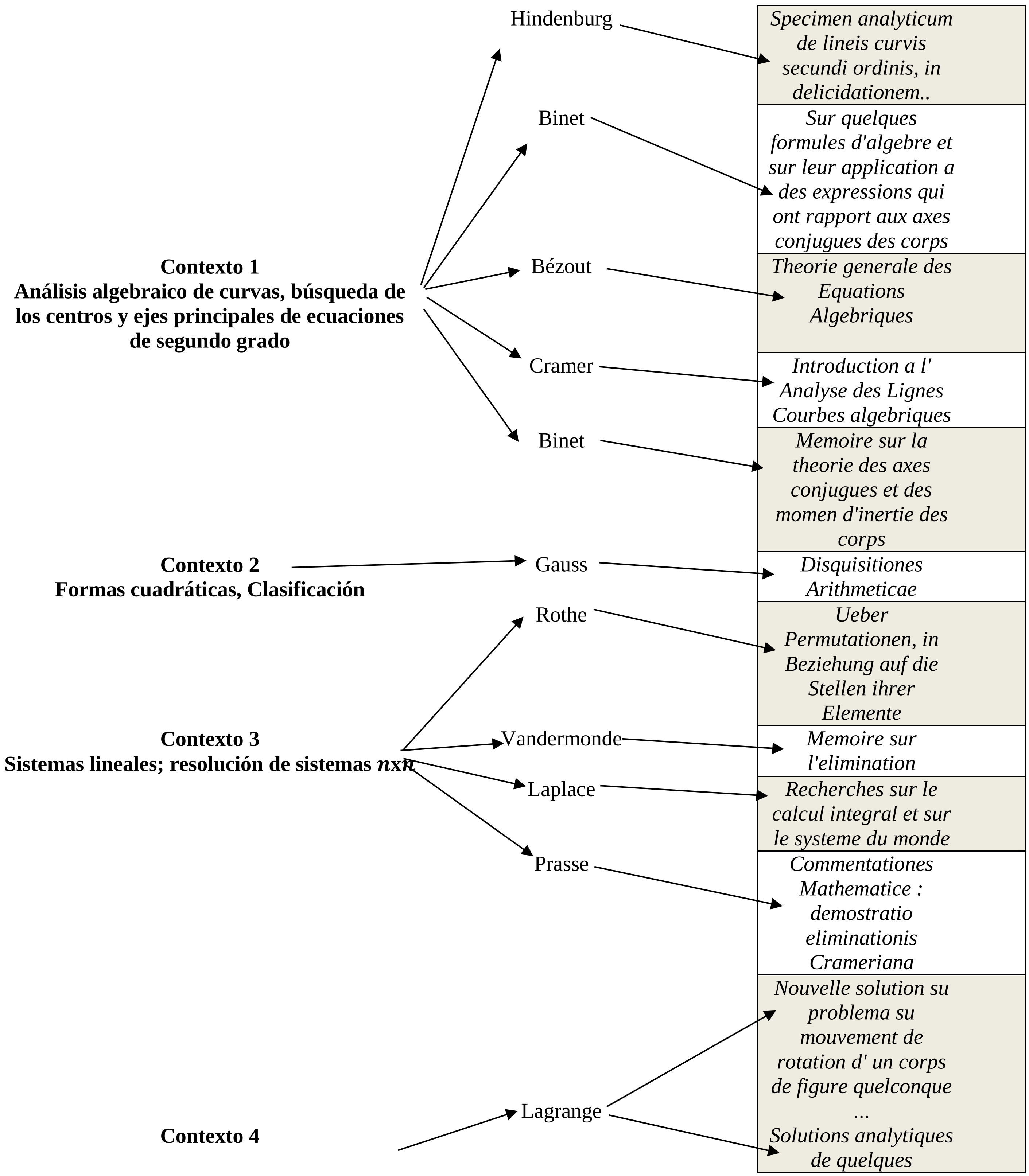
Cuatro contextos que abarcan lo desarrollado por la teoría de los determinantes y que se encuentran en nuestro periodo de investigación que empieza con Leibniz (1693) y termina con Cauchy (1812), todos los contextos se encuentran enmarcados desde la parte de las aplicaciones, estas aplicaciones ayudaron a formar la teoría de determinantes, las situaciones explícitas allí planteadas en los diferentes artículos analizados, dan cuenta del surgimiento del concepto de determinante y sus propiedades.

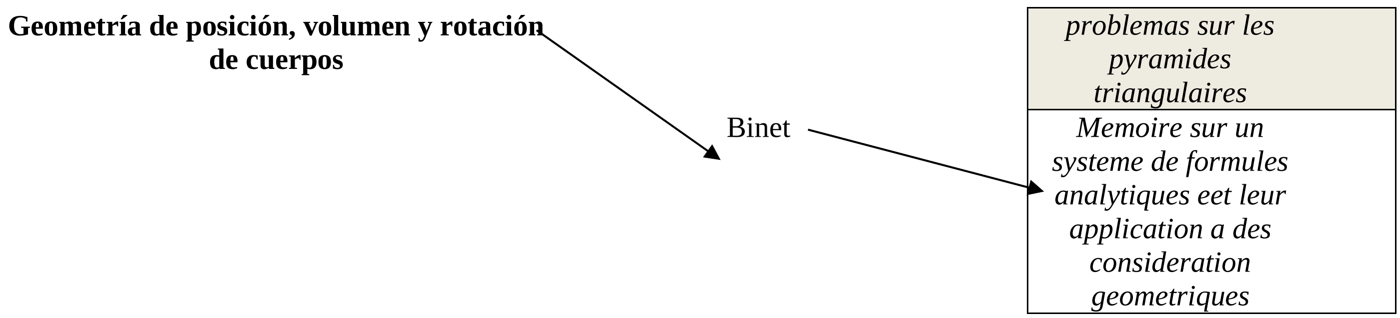
El primer contexto se establece en la búsqueda de los centros y ejes principales de ecuaciones de segundo grado, en el análisis algebraico de curvas, por ejemplo podemos citar la obra de Cramer (1750) *"Introducción al análisis de curvas algebraicas"*.

El segundo contexto es el de las formas cuadráticas, las cuales enuncias importantes propiedades y son la base de la imagen funcional de los determinantes. A modo de ejemplo se encuentra todo el trabajo realizado por Gauss en el quinto capítulo de sus disquisiciones, los aportes de Lagrange en cuanto a las sustituciones empleadas para formar formas cuadráticas.

El tercer contexto es fundamental el cual es, sistemas de ecuaciones lineales, desde Leibniz en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales pasando por Bézout y Vandermonde con su teoría de la eliminación dan cuenta de la importancia de este contexto al desarrollo del determinante no solo como concepto si no ya como una teoría.

El cuarto contexto, llamado "volumen y rotación de cuerpos" enmarca todo lo que tiene que ver con la parte geométrica, esta visión inició con Lagrange en sus dos obras de 1773, siendo la más importante la titulada *"solutions analytiques de quelques problemas sur les pyramides triangulaires"*. La belleza y el esfuerzo contemplado en una obra totalmente analítica que rompe los esquemas de la época los cuales concentraban esfuerzos en lo ya mencionado en el contexto 1 y 3, abre una nueva mirada y ve a los elementos del determinante como coordenadas, tal como lo veía Leibniz en su tiempo.


Contexto 1
Análisis algebraico de curvas, búsqueda de los centros y ejes principales de ecuaciones de segundo grado
Hindenburg
Specimen analyticum de lineis curvis secundi ordinis, in delicidationem..
Binet
Sur quelques formules d'algebre et sur leur application a des expressions qui ont rapport aux axes conjugues des corps
Bézout
Theorie generale des Equations Algebriques
Cramer
Introduction a l' Analyse des Lignes Courbes algebriques
Binet
Memoire sur la theorie des axes conjugues et des momen d'inertie des corps
Contexto 2
Formas cuadráticas, Clasificación
Gauss
Disquisitiones Arithmeticae
Contexto 3
Sistemas lineales; resolución de sistemas nxn
Rothe
Ueber Permutationen, in Beziehung auf die Stellen ihrer Elemente
Vandermonde
Memoire sur l'elimination
Laplace
Recherches sur le calcul integral et sur le systeme du monde
Prasse
Commentationes Mathematice : demostratio eliminationis Crameriana
Contexto 4
Lagrange
Nouvelle solution su problema su mouvement de rotation d' un corps de figure quelconque ...
Solutions analytiques de quelques



Esquema 11. Contextos establecidos junto a sus autores y obras.

El esquema 11 muestra con más detalle los autores y las obras correspondientes a cada contexto, se puede profundizar en cada artículo mirando el análisis histórico realizado en la sección correspondiente, en este esquema se exponen varios autores que no los analizamos, pero los cuales no pierden importancia en el desarrollo de la teoría de determinantes.

CONCLUSIONES

Mostraremos las conclusiones de acuerdo a los objetivos planteados en la investigación, teniendo en cuenta la secuencia de las secciones trabajadas.

Los objetivos planteados son

1. Realizar un estudio histórico-epistemológico relativo al concepto de determinante de Leibniz a Cauchy a partir del texto de Thomas Muir.

2. Identificar dentro del estudio histórico-epistemológico, los contextos que dieron lugar al concepto de determinante.

3. Revisar y analizar el enfoque de libros de texto usados como guía en cursos de álgebra lineal I de la UIS en torno al concepto de determinante.

Para lograr los objetivos, la investigación se ha dividido en tres secciones, la primera corresponde al análisis histórico-epistemológico, la segunda corresponde al análisis de los libros de álgebra lineal y una última sección la cual establece una reflexión suscitada de las dos primeras secciones.

Cómo menciona Álvarez (2013) el texto de Muir es una guía obligatoria para sintetizar la evolución general de los determinantes, esta investigación se basó en dicho libro, seleccionando los autores y los temas a analizar, consultando siempre las fuentes principales para complementar lo trabajado por Muir. De esta primera parte destacamos las siguientes conclusiones:

1. Cramer en su memoria de 1750, trata con la resolución de los sistemas lineales por métodos de eliminación. Todo esto se lleva a cabo en el apéndice de su obra *"introduction a l'Analyse des Lignes Courbes Algebriques"*. Este método luego conocido como la famosa regla de Cramer en su momento fue crucial ya que expresaba las soluciones sin extensos cálculos.
2. Es de gran importancia el trabajo de Vandermonde (1771) (teoría de la eliminación) ya que traslada el determinante de un concepto, de un algoritmo, a una teoría general de los determinantes, a su vez establecida con independencia. También es importante mencionar la notación simbólica utilizada por Vandermonde, la cual es pertinente para la época.
3. Los resultados de Leibniz sobre sistemas de ecuaciones lineales ya plasmaban lo que 50 a 70 años más tarde Cramer y Vandermonde redescubrían; la no publicación en su tiempo de los trabajos de Leibniz frenó el desarrollo de la teoría de determinantes y en el álgebra lineal en casi un siglo.
4. Gauss en su obra Disquisitiones Arithmeticae en el quinto capítulo que trata sobre las formas cuadráticas deja planteada la imagen funcional de las matrices, las sustituciones lineales y la composición de funciones, la disertación realizada sobre las formas cuadráticas con enteros, las sustituciones son representadas por matrices de orden dos, y tres con determinante +1 o -1, todas esas propiedades y características se establecerán gracias a Weierstrass el cual caracteriza los determinantes

como funciones multilineales alternadas exponiendo sus propiedades principales a través de esa definición funcional.

5. Se puede observar la aparición de una teoría de determinantes en Cauchy (1812), quedando completa como menciona Álvarez (2013) en la memoria de Cauchy del año 1815. Pese a que la teoría quedó estancada varios años (se publicaron pocos artículos), solo se retomó hasta los años cuarenta, a partir del predominio de Jacobi, aunque con frecuencia Cauchy resaltaba las propiedades del determinante como función multilineal alternada, el enfoque del determinante estaba dominado como un algoritmo que se extraía de un arreglo de números. Solo fue hasta la mitad de siglo que los determinantes se les reconocería como un cuerpo teórico general, con aplicaciones en análisis, geometría y mecánica

Del segundo objetivo, el cual lo desarrollamos en la Reflexión Final concluimos lo siguiente:

1. Se identifican cuatro contextos en el cual se desarrolla el concepto de determinante, estos cuatro conceptos son:
   Contexto 1, el cual abarca todos los desarrollos establecidos sobre la intersección de curvas, centros y ejes principales de ecuaciones de segundo grado, la teoría de la eliminación.
   Contexto 2, incluye todos los trabajos sobre formas cuadráticas, su clasificación y propiedades.
   Contexto 3, todo lo concerniente a los sistemas de ecuaciones lineales, resolución de ecuaciones, teoría de la eliminación.
   Contexto 4, el cual establece el nuevo enfoque dado a la geometría de posición, volumen y rotación de cuerpos. Lagrange.

Del tercer objetivo podemos concluir lo siguiente:

1. El libro de David Poole no tiene ningún capítulo dedicado a los determinantes, solo aborda el concepto en el tema de eigenvectores, las referencias históricas son muy dispersas, son apartes que explican muy brevemente la historia de un determinado concepto, de los matemáticos citados se encuentran: Laplace, Cramer, Mcclaurin, Seki, y Leibniz.
2. El enfoque del libro de Howard Anton es interesante, aborda el concepto de determinante empezando por la combinatoria de los coeficientes, hace un tratamiento adecuado y de gran utilidad, este dedica el segundo capítulo del libro para los determinantes previamente ha abordado los sistemas de ecuaciones lineales y matrices en el capítulo 1. Seguido define el determinante como una función que asocia un número real a una matriz, Anton no hace alusión alguna a la representación geométrica tampoco hace referencia histórica a algún autor.
3. El álgebra lineal de Grossman dedica su capítulo segundo para abordar los determinantes, propone la definición del determinante como la sumatoria del producto de los elementos de una matriz de $n\text{x}n$ en sus diagonales. Resalta el hecho de que no debe confundirse a la función determinante como un valor absoluto, debido a que la simbología es la misma, geométricamente incorpora la interpretación geométrica de un determinante de 2x2 y 3x3. Cada capítulo contiene secciones especificas dedicadas a lo histórico ubicados al final de cada sección los autores que hace mención son a Leibniz, a Cauchy y a Cramer.
4. El libro de Rafael Isaacs y Sonia Sabogal deja para el último capítulo el concepto de determinante, áreas y volúmenes orientados en el cual lo identifica como “la función determinante”. El texto es de enfoque axiomático no contiene apartes históricos, como el titulo lo indica el

libro está enfocado hacia la parte geométrica, presenta el determinante como una función lineal alternante, demuestra la regla de Cramer y en la proposición N° 16 que habla de la unicidad de la función no se demuestra.

Otra conclusión que refieren a nuestro tema de estudio:

1. Los primeros libros sobre determinantes nacen por la necesidad de difundir la teoría, empezó con el libro de Spottiswoode (elementary theorems relating to determinants) y a continuación le siguieron Brioschi y Trudi, también Baltzer gestaba de gran manera la teoría de determinantes, estos libros se caracterizan por su destreza pedagógica, por su contenido fácil de seguir, y por su separación del contenido de forma teoría-aplicación.

SUGERENCIAS, DISCUSIONES E INVESTIGACIONES A FUTURO

Abrimos una discusión empezando por el trabajo de Cauchy y unas sugerencias puntuales.

Los orígenes de las funciones multilineales alternadas

El determinante pasa de cenicienta a princesa. El determinante es un objeto de estudio matemático, es una función multilineal alternada. El enfoque axiomático, con que se abordan los determinantes en los libros de texto, parte de que existe una única función, de $M_n(k)$ en K, llamada determinante, tal que:

1. Es multilineal
2. Si se intercambia dos filas o columnas el determinante cambia de signo

3. $|I| = 1$

A continuación, se demuestran unas propiedades con las cuales se puede diagonalizar la matriz y así calcular el determinante multiplicando los términos de la diagonal.

En este enfoque se hace necesario demostrar el teorema de la unicidad, lo cual es bastante complejo para un curso de álgebra lineal I.

En este enfoque la función parte de $M_n(k)$, se asume entonces que se conoce el conjunto $M_n(k)$ y se envía el mensaje de que los determinantes se originan de las matrices, cosa que es históricamente falsa, más bien al contrario, lo que encontramos es que las matrices se originan de los determinantes. Cauchy no utiliza matrices para definir sus funciones multilineales alternadas, usa es el enfoque combinatorio.

Una matriz puede representar diferentes cosas (volumen, formas cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales, conjunto de vectores), y una misma cosa (forma cuadrática) puede ser representada por diferentes matrices. De igual manera los determinantes.

En las siguientes expresiones:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\sum_{\sigma \epsilon P_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

La expresión de la izquierda es una definición (enfoque combinatorio), un método para calcular un determinante, una definición surgida desde Leibniz mucho antes de la noción matricial de la derecha. La expresión de la derecha es una notación, una representación simbólica, una imagen mental del concepto de determinante, útil a la hora de hacer demostraciones, puesto que esa notación es fácil de manipular lo que no ocurre usando la definición de combinatoria, la cual es compleja.

Conclusión

El enfoque axiomático, por su carácter teórico, general, lógicamente riguroso debe ser visto no en álgebra lineal I, dado los pre saberes que se requieren, pero si en álgebra lineal II, como un ejemplo de las funciones multilineales alternadas.

Enfoque combinatorio de los determinantes.

Los determinantes se definen como sumas de productos con signo basados en permutaciones. Sumar todos los posibles productos que se puedan formar con los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales, tomando uno de cada ecuación y uno de cada incógnita, la manera como se escribe el sistema de ecuaciones lineales si es en filas y en columnas no interesa, no es lo importante, lo importante es que los coeficientes del sistema son rotulados con un par de subíndices para ser ubicados en el sistema a modo de coordenadas en un plano cartesiano, sin filas y sin columnas. Es decir, el enfoque combinatorio no parte de las matrices, como si ocurre en algunos textos (ejm: Álgebra lineal Howard Anton).

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} Permutacion & & Producto \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \leftrightarrow & a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} \end{array}$$

El enfoque combinatorio presentó un nivel de dificultad a la hora de calcular el signo de la permutación, el signo se hizo materia de estudio. Mclaurin anuncia la descripción combinatoria incluida la regla de los signos, pero no fue claro ni contundente. Llamamos la atención sobre la dificultad que presentó para los diferentes autores el establecer la regla de los signos.

La regla del signo:

Siempre que un entero mayor preceda a uno menor ocurre una inversión. El número total de inversiones de la permutación será par o impar. Si es par el producto es positivo y si es impar el producto será negativo. En el ejemplo anterior tenemos tres inversiones por tanto el producto es negativo.

En el lenguaje moderno se define determinante como:

$$\sum_{\sigma \epsilon P_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} .$$

Como es claro, se hace necesario el estudio de grupo de permutaciones P_n para entender la definición de determinante vía combinatoria.

Proponemos en consecuencia el estudio del grupo de permutaciones P_n como parte básica de un curso de álgebra lineal I, puesto que es una herramienta esencial para ingenieros, matemáticos, físicos, y además como la primera noción de grupo, el primer ejemplo de operaciones con objetos alejados de la noción de número, pero con propiedades algebraicas, una oportunidad de introducir al estudiante en nuevas estructuras algebraicas.

En el enfoque inductivo el determinante se desarrolla por cofactores, es de carácter operativo, necesario para efecto prácticos, creemos que el enfoque inductivo y el enfoque combinatorio son los enfoques con los cuales se debe abordar el concepto de determinante en álgebra lineal I dejando al enfoque axiomático para el álgebra lineal II.

De Arte Combinatoria

Uno de los hechos de gran importancia que resaltamos de nuestra investigación fue habernos encontrado con un documento extraordinario. G.W. Leibniz en 1666, presenta a la facultad de filosofía de la universidad de Leipzig una disertación doctoral con el nombre *Dissertatio De arte combinatoria*, que ha sido traducido desde el latín en el año de 1992 por Manuel Antonio Correia.

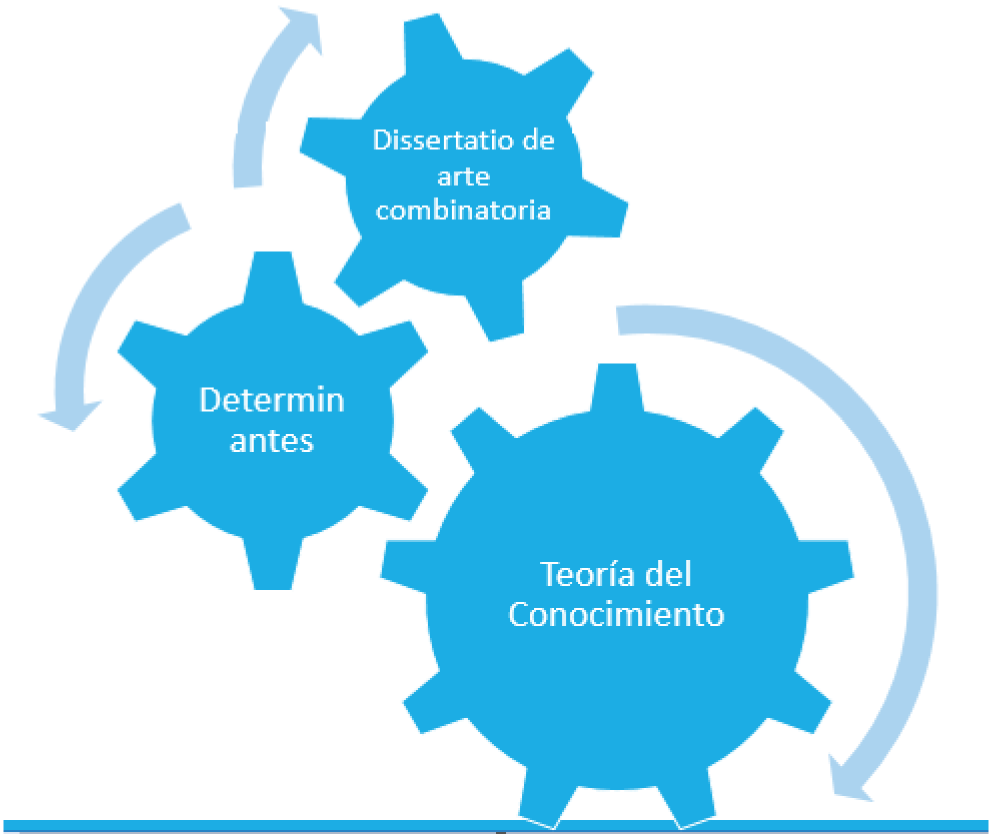


Ilustración 35. engranaje acerca de la teoria de conocimiento de Leibniz

Pues bien, también nos encontramos con un artículo del año 2012 titulado *El De arte combinatoria de G.W. Leibniz como una teoría de la ciencia.* Escrito por Manuel Antonio Correia en el cual presenta a la teoría de las variaciones del *De arte combinatoria de G.W. Leibniz* como una teoría de la ciencia. Sostiene Correia (2012)

> La razón descubre a través del análisis la manera en que las distintas realidades naturales se relacionan entre sí. Esto permite que la misma razón completé deductivamente el sistema saber científico por medio de una síntesis combinatoria cuyas leyes son las leyes de la lógica inventiva que a su vez se fundamentan en los principios de la combinatoria y la aritmética (p.81)

El arte combinatorio no solo es una herramienta, sino una teoría del conocimiento.

> Así el joven Leibniz propone en su disertación doctoral que las complexiones (combinaciones) sean el modelo del conocimiento deductivo humano, encontrando en ellas la razón y justificación de toda verdad y realidad (Correia, 2012. p.82)

En conclusión, llamamos la atención firmemente por la necesidad e importancia, de un estudio de los elementos básicos del análisis combinatorio en álgebra lineal I. porque no solo son útiles como herramientas a físicos, matemáticos e ingenieros, sino como fundamento de una teoría de la ciencia.

"El *De arte combinatoria* es a la vez el fundamento formal más especializado que la época podría entregar para la justificación de la postura racionalista en el ámbito de las ciencias experimentales." (Correia, 2012, p.82)

Otras discusiones:

- Cabe hacer mención especial a un tema que no se tocó en las conclusiones y es más para una discusión; la combinatoria, la importancia de retomarla en los cursos de álgebra lineal. Podría darse utilizando el libro de Howard Anton a modo de introducción de un curso de álgebra lineal, esté pensamiento combinatorio que nace desde Leibniz, y se desarrolla en la mayoría de matemáticos es indispensable para la creación del espíritu científico, el lenguaje de programación y la ciencia de la computación está sustentado en bases combinatorias, y estas fueron dadas por Leibniz en su artículo "*explication de l'Aritmetique Binaire*" menciona los símbolos binarios usando el 0 y el 1 igual que el sistema actual. Las ciencias de la computación es una gran aplicación de los sistemas lineales y de determinantes, la aplicación en los motores de búsquedas es fundamental, el establecimiento de prioridades en las búsquedas hace que desde el siglo XVII se promueva el pensamiento combinatorio, así que es momento de retomar este pensamiento e inculcarlos a los alumnos, debido a que es necesidad de adquirir los componentes necesarios para ese desarrollo; como el componente aleatorio, el componente aritmético, el componente geométrico, y el componente métrico.

- Es necesario reconstruir lo realizado por Lagrange en relación al volumen del tetraedro y en Gauss en relación a la clasificación de formas cuadráticas, puesto que allí están los conceptos básicos del álgebra lineal; el producto escalar, producto vectorial, producto de determinantes, etc...
- Respecto a la primera parte (análisis histórico - epistemológico) un aporte a futuro es mirar el periodo comprendido entre Cauchy y Sylvester, desde allí empieza la teoría de matrices, este trabajo de investigación es necesario para complementar la historia de los determinantes.
- En cuanto a la segunda parte (análisis de los libros de texto de álgebra lineal) un trabajo a futuro sería, complementar la investigación de Álvarez (2013), cómo se introdujo el álgebra lineal moderna en los años sesenta en Colombia.
- Otras investigaciones a futuro es la de establecer la realidad de los cursos de álgebra lineal en la Universidad Industrial de Santander, observando la parte docente, del estudiante y del currículo, identificando debilidades y problemas en cuanto al concepto de determinante.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, Y. P. (2013). *Introducción del álgebra lineal en España y Colombia durante la segunda mitad del s.XIX y la primera del s.XX*. (Tesis Doctoral), Universidad de la Rioja, España.

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA*, *8*(1), 30-46.

Anton, H. (1976), *Introducción al Álgebra Lineal (3ra ed.),* México DF, México: editorial Limusa.

Aponte, M. (2014). *La noción de infinito en George Cantor. Un estudio histórico - epistemológico en la perspectiva de la educación matemática (tesis inédita de maestría).* Universidad del Valle. Santiago de Cali

Arboleda, L. (2011). Los estudios históricos en educación matemática desde la perspectiva de la práctica docente. Artículo presentado en XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

Arboleda, L. y Recalde, L. (1995). Formación y manejo operatorio de conceptos matemáticos: La Historia y Epistemología del Infinito. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*

Arboleda, L. (1984). Historia y Enseñanza de las Matemáticas. *Quipu revista latinoamericana de historia de las ciencias y la tecnología. 1* (2), 167-194.

Arrigo, G. y D'Amore, B. y Sbaragli, S. (2011). *Infinitos infinitos, historia filosofía y didáctica del infinito*. Traducción Jiménez Alejandro. Bogota, Colombia: Editorial Magisterio.

Artigue, M. (1991). Epistémologie et didactique. *Recherche en didactique des Mathématiques*. (10), 241-286.

Axler, S. (1995). Down with determinants!, *The American Mathematical Monthly*, *102,* 139-154.

Bell, E.T. (1948). *Grandes matemáticos*, Buenos Aires, Argentina: Editorial Losada S.A.

Berrio, J. (1976). El método histórico de la investigación histórica de la educación. *Revista Española De Pedagogía,* 34(134), 449-475. Recuperado de http://www.jstor.org/stable/23763481

Bachelard, G. (1987). *La formación del espíritu científico,* México DF, México: editorial siglo veintiuno.

Baltzer, R. (1857). *Theorie und Anwendung der determinantem. Mit Beziehung auf die Originalquellen dargestellt.* S. Hirzel

Bézout, É. (1764). Recherches sur le degre des équations résultantes de I'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces Equations. Memoires d l'Academic, 288-343. Recuperado de: http://visualiseur.bnf.fr/ark:/12148/cb32786820s/date1764

Bézout, É. (1779). Theorie Générale des Equations Algebriques Ph.-D. Pierres.

Binet, J. (1813). Mémoire sur un systéme de formules analytiques, et leur application á des considérations géométriques. *Journal de l'École Polytechnique*, 9:280–354.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa.* Madrid, España: CEAC.

Brenner, J. y Cummings, L. (1972). The Hadamard maximum determinant problema, *Amer Math*, 79, 626-630.

Camargo, D. (2008). *Los textos de algebra publicados en Colombia Durante el siglo XIX y comienzos del XX.* (Tesis de maestria), Universidad de los andes. Bogota, Colombia.

Cardoso, C. F. (2000). *Introducción al trabajo de la investigación histórica: conocimiento, método e historia* (5ta ed.), Barcelona, España: Editorial Crítica, S.L.

Carlson, D., Johnson, R., Lay, D., Porte, D., Watkins, A., y Watkins, W. (1997) Resources for Teaching Linear Álgebra. Mathematical Association of America .

Castro, F. (1993). Los orígenes del álgebra lineal, *Revista SUMA.* 13, 66-68.

Cauchy, L.A (1815). Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtener que deux valeurs égaleset de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment. *Journal de l'Ecole Polytechnique*. 10,1-28.

Cauchy, L.A. Complete Dictionary of Scientific Biography. Recuperado en Noviembre 10, 2016 de:http://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/cauchy-augustin-louis

Cayley, A. (1841). A On a theorem in the geometry of position. *Cambridge Mathematical Journal,* 2:267–271,

Cayley, A. (1843). On the theory of determinants. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society,* 8:1–16,

Cayley, A. (1845). On the theory of linear transformations. *Cambridge Mathematical Journal*, 4:193–209,

Craigen, R. (1996). *Hadamard matrices and designs* C.J. Colbourn, J.H. Dinitzin (Eds.) The CRC Handbook of Combinatorial Designs, CRC Press, Boca Raton (Chapter 24).

Cramer, G. (1750). Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Freres Cramer & Cl. Philibert.

De la Torre, G. (1997). *Anotaciones en torno a una lectura de Arquímedes,* Medellín, Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

De la Torre, G. (2001). Los Conflictos Cognitivos en la construcción del concepto de Continuo, - *Matemáticas: Enseñanza Universitaria Escuela Regional de Matematicas*. *IX* (1), 51-70.

De la Torre, G. (2002). Aspectos históricos relativos al concepto de continuo, *Matemáticas: Enseñanza Universitaria Escuela Regional de Matematicas. X* (1), 89-106.

Dixon, J. (1984). *How good is Hadamard's inequality for determinants?* Canada: editorial Math. Bull., 27 (3). 260–264.

Dobson, T. (1810). Leibnitz. En *Encyclopaedia; or, a dictionary of arts, sciences, and miscellaneous literature*. (Vol IX, pp. 749-750). Philadelphia, Estados Unidos: Bud and Bartram.

Dobson, T. (1798). Vandermonde. En *Encyclopaedia; or, a dictionary of arts, sciences, and miscellaneous literature.* (Vol XXI, pp. 432-433). Philadelphia, Estados Unidos: Bud and Bartram.

Dorier, JL. y Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear Álgebra

Dorier J.L., Robert A., Robinet J. and Rogalski M. (2000). On a Research Program about the Teaching and Learning of Linear Álgebra in First Year of French Science University. *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology*. *(2).* 111-137

Dubinsky, E. (2001). Research in Collegiate Mathematics Education IV.

Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. y Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. *Educational studies in Mathematics*, *27*, 267-305.

Farebrother, S., Jensen, T. y Styan, G. (2002). Sir Thomas Muir and nineteenth-century books on determinants. *IMAGE*, *28*, 6-15.

Febvre, L. (1953). *Combates por la historia* [Traducido al español de Combat pour histoire]. España: Ariel, S.A.

García, C.M. (1998). De Los Obstáculos Epistemológicos A Los Conceptos Estructurantes: Una Aproximación A La Enseñanza aprendizaje De La Geología. *Historia Y Epistemología De Las Ciencias*, *16*(2), 323-330.

Gauss, C.F. (1996). Disquisitiones Arithmeticae [Traducido al español de Disquisitiones arithmeticae] (Obra original publicada en 1801).

Gauss, C. F. Complete Dictionary of Scientific Biography. Recuperado en Noviembre 12, 2016 de http://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/gauss-carl-friedrich

González, M.T. (2002). Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos. Tesis doctoral inédita. Universidad de Salamanca.

Gómez, B. (2003). *La investigación histórica en Didáctica de la Matemática*. En Castro, E. (Ed.), Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 79-86). Granada, España: Universidad de Granada.

Grabiner, J.V. (1981). *The origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. New York, EEUU: Editorial Dover Inc.

Grossman, S. (1996). *Álgebra Lineal (5ta edición.)*, Mexico DF, Mexico: Editorial Mc Graw Hill.

Hedayat, A. y Wallis, W.D. (1978). Hadamard matrices and their applications, *Ann. Statist. 6*(6), 1184-1238.

Isaacs, R. y Sabogal, S. (2009). *Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico*, Bucaramanga, Colombia: Editorial UIS.

Klappenbach, H. (2014). Acerca de la Metodología de Investigación en la Historia de la Psicología. *Psykhe*, *23*(1), 01-12.

Knobloch, E. (1994). From Gauss to Weierstrass: determinant theory and its historical evaluations, *in the intersection of history and mathematics*. 51-66.

Knobloch, E., y Contro, W. S. (1994). Gottfried Wilhelm Leibniz, Mathematische Schriften, Geometrie-Zahlentheorie-Álgebra 1672-1676. *Wiley*, *28*, 128-132. Recuperado de: http://www.jstor.org/stable/2215931

Lagrange, J. L. (1773). Nouvelle solution du problème du movement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice. *Nouveaux Memoires de l'Academie Rouale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 85-128.

Lagrange, J. L. (1773). Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires. *Nouveaux Memoires de l'Academie Rouale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 149-176.

Lakatos, I. (1983). *La metodología de los programas de la investigación científica,* Madrid, España: Editorial Alianza Universidad.

Luzardo, D. y Peña, A. (2006). Historia del álgebra lineal hasta los albores del siglo XX. *Revista Divulgaciones matemáticas*, 153-170.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico, *Revista IRICE*, 13. 1-26.

Maz, A. (2005). Los Números Negativos En España En Los Siglos XVIII Y XIX. (Tesis Doctoral, no publicada). Universidad de Granada, Granada, España.

Muir, T. (1960) *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development (4 Volumes).*London,.

Montoya, J. (2013). Apuntes histórico epistemológicos siglos XVI y XVII. *Revista Trilogía*, 29-38.

Moradiellos, E. (1999). *El oficio de historiador* (1era ed.). Madrid, España: Siglo XXI de España Editores, S.A.

Nadler, S. M. (2010). The Best of All Possible Worlds: A Story of Philosophers, God, and Evil in the Age of Reason. Princeton University Press.

Neira, G. (2007). *Del álgebra al cálculo: ¿transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica.* Bogotá, Colombia: Publicaciones Universidad Distrital

O'Connor, J.J. y Robertson, E.F. (2001). *Alexandre-Théophile Vandermonde*. Recuperado en Noviembre 02, 2016 de: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Vandermonde.html

O'Connor, J.J. y Robertson, E.F. (1998). *Gottfried Wilhelm von Leibniz*. Recuperado en Noviembre 04, 2016 de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibniz.html

O'Connor, J.J. y Robertson, E.F. (1997). *Augustin Louis Cauchy*. Recuperado en Noviembre 11, 2016 de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy.html

O'Connor, J.J. y Robertson, E.F. (1996) *Johann Carl Friedrich Gauss*. Recuperado en Noviembre 12, 2016 de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gauss.html

Palarea, M. y Socas, M. (1994). Algunos Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico, Revista SUMA, 16, 91-98.

Pereira, R. (2010). A física da música no Renascimento: Uma abordagem histórico – epistemológica (Tesis inédita de maestría). Universidad de Sao Paulo. Brasil

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal Una introducción moderna* . International Thompson Publishi

Romero, J. (2009). Presupuestos básicos para la investigación histórico-educativa. *Revista de Educación*, *7*, 211-220.

Roth y Ames. (2014). Beiträge zum Mathematikunterricht, Münster: WTM-Verlag, 305–308.

Scholtzová, I. (2014). Determinants of primary mathematics education a national and international context .*Acta Mathematica*, 17, 15-22.

Spottiswoode, W. (1851). *An elementary theorems relating to determinants.* Longman.

Tee, G. (2004). Vivan Los determinantes. *Revista Lecturas matemáticas, 25*(1), 25-40.

Vandermonde, A, T. (1772). Memoire sur I'elimination. *Memoires de l'Academie Paris*, II, 516-532.

Vandermonde, A, T. (2008). Complete Dictionary of Scientific Biography. Recuperado en Noviembre 03, 2016 de http://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/vandermonde-alexandre-theophile

Villarino, M., Josephy, M., Ruiz, A. y Barrantes, H. (1996). Introducción. En Gauss C.F. (Ed.), Disquisitiones arithmeticae [Traducido al español de Disquisitiones arithmeticae] IX-XXX. Connecticut, Estado Unidos: Yale University Press

Wallis, A. (1978). History of Mathematics: Why an Who. In Proccedings of the International Congress Mathematicians. Helsinki.

Xiao-chun. (2010). Normative discussion of definition of determinants in the course of linear álgebra. *Journal of Anshan Normal University*, *05*(1), 89-93.

YU Gang. (2010). A Note on Elementary Transformation in Teaching of Linear Álgebra. *Journal of Anshan Normal University*, *04*, 13-15.

Xian Feng On. (2000). Some Ways in Higher Álgebra; *Journal of Fuzhou Teachers College*, *03*, 15-19.