Tareas que promueven el desarrollo de pensamiento algebraico temprano a través de los sistemas de representación

María José Bautista Pedraza

Juan Andrés Parra Alvarez

Trabajo de grado presentado para optar al título de

Licenciatura en Matemáticas

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias en Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2025

Agradecimientos

Primeramente, agradecemos a Dios por permitirnos alcanzar este nuevo logro tanto en el ámbito profesional como personal siendo nuestro guía y luz en nuestros caminos. A la Doctora Solange Roa Fuentes, por su paciencia, orientación constante y sus valiosos aportes académicos que nos guiaron en cada etapa de esta investigación. Gracias por su compromiso y apoyo, por brindarnos las herramientas y enseñanzas que nos formaron como futuros docentes investigadores.

A mis queridos padres, Julia y Freddy, quienes con su amor y apoyo incondicional me han dado la fortaleza para alcanzar cada una de mis metas. A mi pareja, por su paciencia, su respaldo constante y ser mi compañero y soporte en este trabajo. A mis amigos cuyas risas, aportes e ideas nos motivaban a seguir. A los docentes que fueron parte esencial en este proceso de formación. A Odín mi compañero fiel, quien estuvo a mi lado en todo este trascurso, en cada desvelada, alegría y tristeza.

María José Bautista Pedraza.

Estos agradecimientos quedan muy corto a todo el recorrido y las experiencias que he ganado en estos últimos años. Durante este proceso conocí persona que marcaron de buena y mala manera en mi vida, me hicieron crecer más como personas, entre risas y momentos, todo queda marcado en lo que soy y en lo que quiero transmitir, pero todas contribuyeron a mi crecimiento personal.

A mis padres les agradezco el apoyo para seguir adelante, a mi pareja que me ha acompañado en estos años, a cada profesor que compartí aula ya que me formaron no solo de manera profesional, si no como persona y en muchos que dejaron una huella en mí.

Juan Andrés Parra Alvarez

Tabla de contenido

Lista de Tablas

Listas de Figuras

Resumen

Título: Tareas que promueven el desarrollo de pensamiento algebraico temprano a través de los sistemas de representación.[1]

Autores: María Jose Bautista Pedraza y Juan Andrés Parra Alvarez [2]

Palabras Clave: Pensamiento algebraico temprano, tareas, sistemas de representación.

Descripción:

Este trabajo tiene como propósito principal diseñar Tareas basadas en la teoría de la Objetivación, para promover el desarrollo de sistemas de representación en estudiantes de quinto primaria (9- 11 años). Diversas investigaciones muestran que en el contexto del pensamiento algebraico temprano es posible fomentar diferentes maneras de representar, contribuyendo al desarrollo de habilidades y mejoramiento de las falencias que se pueden presentar en los estudiantes. Estos sistemas de representación pueden ser gestual, pictórico, simbólico, tabular y múltiple, pueden presentarse desde los primeros años de la educación escolar permitiendo evolucionar hasta formas más complejas en contextos universitarios. Por tanto, esta investigación busca proporcionar diversas herramientas al profesor, las cuales permita promover de manera efectiva y sistemática, el desarrollo del pensamiento algebraico temprano por medio de distintos sistemas de representación en el nivel de primaria.

---

[1] Trabajo de grado.

[2] Facultad de ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora Solange Roa Fuentes.

Abstract

Title: Tasks that promote the development of early algebraic thinking through representation systems.[3]

Authors: María Jose Bautista Pedraza and Juan Andrés Parra Alvarez [4]

Keywords: Early algebraic thinking, tasks, representation systems.

Description:

The main purpose of this study is to design tasks based on objectification theory to promote the development of representation systems in fifth-grade students (9-11 years old). Various studies show that in the context of early algebraic thinking, it is possible to encourage different ways of representing, contributing to the development of skills and improving weaknesses that may arise in students. These representation systems can be gestural, pictorial, symbolic, tabular, and multiple. They can be introduced in the early years of schooling and evolve into more complex forms in university contexts. Therefore, this research seeks to provide teachers with various tools that will enable them to effectively and systematically promote the development of early algebraic thinking through different representation systems at the elementary level.

[3] Bachelor Thesis.
[4] Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director Solange Roa Fuentes.

1. Introducción

Reciente investigaciones sobre el pensamiento algebraico han evidenciado la necesidad de fomentar su desarrollo en las aulas de educación básica primaria, ya que es una forma de pensar que se fomenta generalmente en secundaria (Radford,2010; Vergel, 2015; Torres, 2022; Cañadas y Figueiras, 2011; Angarita, 2024).

Distintos autores como Blanton et al. (2007), proponen que la transición de la aritmética al álgebra no debe considerarse simplemente como un relleno del plan de estudios, sino como un complemento esencial que debe incluirse desde etapas tempranas, y no algo que se deba "enseñar" después de lo aritmético. Estos argumentos han sido abordados por Kaput (1998), quien inició las investigaciones en el campo del álgebra temprana, destacando su importancia. En este orden de ideas, el pensamiento algebraico temprano es un camino hacia la matemática abstracta y compleja, y su desarrollo progresa a medida que se avanza en los niveles educativos. Como menciona Vergel (2016) "el pensamiento algebraico abre nuevas posibilidades para repensar la forma en que las cantidades indeterminadas pueden significar para los estudiantes más jóvenes" (p.72).

El desarrollo de este tipo de pensamiento a través de tareas y actividades cuidadosamente diseñadas es fundamental en el desarrollo de esta investigación. Según Vergel y Rojas (2018), una tarea es una actividad integrada de interacción en la que la enseñanza y el aprendizaje desempeñan un papel crucial en el desarrollo del pensamiento algebraico.

Asimismo, las representaciones, juegan un papel fundamental en la construcción del conocimiento, especialmente en el ámbito matemático, permitiéndonos interactuar con conceptos abstractos mediante signos, esquemas e imágenes mentales. Según Torres (2022), las representaciones juegan un papel importante en el desarrollo del pensamiento algebraico y en la comprensión de las matemáticas en general.

Para iniciar esta investigación, se realiza una revisión bibliográfica que abarca tanto las perspectivas curriculares nacionales del Ministerio de Educación Nacional (MEN) como la perspectiva internacional del *National Council of Teacher of Mathematics* (NCTM). Por otro lado, la perspectiva de diversas investigaciones sobre el álgebra temprana, "*Early Algebra"* haciendo una relación entre el pensamiento algebraico, el sistema de representaciones y el diseño de tareas.

En el apartado tres se presenta el planteamiento del problema abordado, la pregunta y el objetivo propuesto en la investigación. En el apartado cuatro se presentan aspectos teóricos, que conforman el marco teórico, el cual se basa en la Teoría de la Objetivación (TO), propuesta por Radford (2003); esta adopta una perspectiva histórico-cultural. Según Radford (2020b), la TO establece que el objetivo de la educación matemática va más allá de la mera transmisión de aprendizaje técnico; se enfoca en el desarrollo de individuos éticos y reflexivos. Siendo la TO una base fundamental para la interpretación y análisis de datos.

En el apartado cinco de este documento se presenta la metodología, ésta contempla el diseño y desarrollo de cuatro fases estas son: i) Revisión y análisis documental ii) Adaptación de tareas iii) Intervención de aula (recolección de la información) iv) Análisis de datos (Vergel, 2015).

2. Antecedentes

En los antecedentes de esta investigación, presentamos de manera sintética la perspectiva del Ministerio de Educación Nacional (MEN) y una perspectiva internacional del *National Council of Teachers of Mathematics* Education, NCTM por sus siglas en inglés, respecto a la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la educación básica primaria. Esto con el objetivo de introducir el pensamiento algebraico y la propuesta curricular *early algebra*, que en español se define como álgebra temprana. Además, se estudia la relación de dichas perspectivas con los sistemas de representaciones y el diseño de tareas.

2.1 Perspectivas curriculares

A medida que los estudiantes van avanzando en su formación escolar, se presenta la oportunidad de construir conceptos y desarrollar habilidades matemáticas necesarias para potenciar su pensamiento matemático. En particular, el NCTM (2003), contempla un trabajo sistemático sobre el desarrollo del Álgebra, a partir de los 3 años. Esta propuesta se centra en puntos focales curriculares que contemplan los procesos de enseñanza y aprendizaje, a partir del estudio de las relaciones entre cantidades incluyendo las funciones, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio (NCTM, 2003). El NCTM define cuatro estándares de contenido, asociados al Álgebra, que se desarrollan a través de los diferentes grupos de grados; en esta investigación abordaremos dos de ellos, las cuales están directamente relacionados con los sistemas de representación, estos son:

- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas. (NCTM, 2003, p.39)

Referente al primero el NCTM propone que: "A veces, los estudiantes pueden comprender ciertos argumentos geométricos mucho antes de que puedan realizar razonablemente manipulaciones complicadas de símbolos algebraicos." (NCTM, 2003, p. 41). Es común que en el aula los estudiantes manipulen expresiones numéricas o alfanuméricas sin saber que éstas se fundamentan en propiedades de conjuntos asociados a su estructura; por ejemplo, la propiedad distributiva de los números reales como un campo. Los estudiantes presentan dificultades con el concepto de variable, por eso es importante desarrollar este concepto a través de cada nivel.

En matemáticas, la modelización permite al estudiante representar cualquier fenómeno matemático con la finalidad de dar solución al problema propuesto. Se espera que a medida que el estudiante aumente su nivel educativo este proceso vaya presentando un cambio de complejidad.

Por otro lado, el NCTM (2003) menciona cinco procesos matemáticos: resolución de problemas, comunicación, razonamiento y demostración, conexiones y representación. En esta investigación nos enfocaremos en el proceso de representación, aunque es importante aclarar que todos los procesos están ligados entre sí.

Para entender y utilizar las ideas matemáticas, es fundamental considerar cómo se representan. Muchas de las representaciones que hoy conocemos son el resultado de un largo proceso cultural e histórico al cual tenemos acceso. No obstante, estas representaciones se han enseñado y aprendido como si fueran las únicas posibles. Según el NCTM (2003) todas las etapas deberían capacitar a los estudiantes para:

- Crear y utilizar representaciones para organizar y comunicar ideas matemáticas.
- Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para

resolver problemas.

- Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos (p.71).

Es importante alentar a los estudiantes a que representen sus ideas de manera que tengan sentido para ellos. Según el NCTM (2003) "Los estudiantes deberían comprender que las representaciones escritas de ideas matemáticas son una parte esencial del aprendizaje y el uso de las matemáticas" (p.71). Las diversas características de las representaciones que los estudiantes realizan al resolver problemas desempeñan un papel crucial en su comprensión y en la resolución de problemas, así como en el registro y comunicación de un método de resolución.

Es común que diversas representaciones aclaren distintos aspectos de un concepto complejo. Esta variedad de representaciones es crucial para apoyar la comprensión del estudiante, especialmente en los primeros niveles, donde los alumnos empiezan a observar cómo ciertas representaciones facilitan la comprensión de alguna propiedad (NCTM, 2003).

Además, el NCTM (2003) plantea que los modelos matemáticos pueden usarse para aclarar e interpretar los fenómenos, para la resolución de problemas, esto permite una visión en un contexto real. Los estudiantes hacen uso de las representaciones para modelizar fenómenos físicos, sociales y matemáticos, enfocados en su entorno, estos deberían ir aumentando su complejidad a medida de cada nivel.

Desde otra perspectiva, encontramos los documentos curriculares de matemáticas en Colombia, Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2003), estructurados por el

Ministerio de Educación Nacional (MEN).

En 1998 el MEN transformó su papel, pasando de ser un diseñador del currículo, a ser un orientador y facilitador, en la creación de ambientes de participación, creatividad y autonomía. De esta manera las personas o instituciones se encargan de diseñar las propuestas que se implementarán en el aula. En los Lineamientos curriculares de Matemáticas, se presenta un modelo que tiene en cuenta las limitaciones y posibilidades para estructurar el currículo, considerando tres aspectos: los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto.

Figura 1.

Dimensiones: procesos generales, conocimientos básicos y contexto.

Nota. El cubo representa el modelo de Los lineamientos Curriculares en Matemáticas establecido por el MEN (MEN, 1998, p.20).

La *Figura 1*, explica cómo se relacionan estos componentes del cubo, los procesos, conocimientos básicos y contextos. El MEN (1998) menciona que: “Cada cara del cubo se proyecta en su opuesta de tal manera que al observar el cubo desde cualquiera de sus puntas se observan los tres aspectos para significar la presencia de éstos en cualquier momento del acto educativo.” (p.20). Cabe aclarar que para el MEN no se menciona el pensamiento algebraico, sino del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos. El MEN (1998) teniendo en cuenta este pensamiento, considera el álgebra como:

> …Que en un primer momento generaliza patrones aritméticos y posteriormente se constituye en una potente herramienta para la modelación de situaciones de cuantificación y de diversos fenómenos de variación y cambio, es por ello que debe involucrar entre otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables. (MEN, 1998, p.17)

Dentro de los diferentes sistemas de representaciones que son utilizados para describir o analizar las diversas formas de variación según el contexto, se encuentran: los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional, la cual trata de programación en computadora, las mecánicas, las fórmulas y las expresiones analíticas (MEN, 1998). Según el MEN (1998) todas estas hacen parte de los sistemas de representaciones que podemos encontrar en este pensamiento. La capacidad de entender cómo cambian las cantidades y cómo se relacionan entre sí; al desarrollar tareas aritméticas mediante tablas, los estudiantes comienzan a familiarizarse con este concepto de variación y fórmulas matemáticas, el cual facilita a la comprensión de matemáticas complejas.

En los Estándares Básicos de Competencias del MEN se señala que “Los estándares están formulados de forma que sea posible orientar a las instituciones educativas a definir los planes de estudio por área y por grado, buscando el desarrollo de las competencias en el tiempo" (MEN, 2003, p.14). Estos estándares se organizan en una secuencia de complejidad creciente y se agrupan en grupos de grados, definiendo lo que cada estudiante debe saber y saber hacer al finalizar cada uno de estos grupos de grados.

Asimismo, según el MEN (2003) el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos se define como pensamiento ligado al reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos. Allí también se incluye modelación, la descripción y representación en distintos sistemas o registros simbólicos.

Uno de los principales objetivos del pensamiento variacional es el de construir desde la educación básica primaria distintas maneras de abordar el uso de conceptos y la compresión de estos mismos incluyendo funciones y sus sistemas analíticos. Un papel fundamental de este pensamiento es la resolución de problemas sustentados en el estudio de variación y el cambio (MEN, 2003).

Asimismo, en la Educación Básica Primaria, el MEN (2003) plantea que el sistema de representaciones complementa al sistema algebraico. Estas representaciones pueden expresarse a través de lenguaje ordinario o técnico, mediante el uso de tablas, gráficas (diagramas) e incluso representaciones icónicas. El desarrollo de este pensamiento es complejo y lento, pero indispensable para mirar el proceso de variación que se esté llevando a cabo, si se mantiene constante o se está generando algún tipo de cambio. Según le MEN (2003) analizar situaciones de variación permiten fomentar en los estudiantes la argumentación de conjeturas, donde puede refutar o sustentar sus ideas.

Este proceso se logra mediante la elaboración de representaciones matemáticas, las cuales permiten afrontar problemáticas relaciones con la variación y dependencia en la resolución de problemas (MEN, 2003).

2.2 Álgebra Temprana

Históricamente, las matemáticas escolares se han centrado precisamente en la fluidez y claridad de lo numérico y geométrico, mientras que el enfoque procedimental del álgebra se trabaja en los últimos años de básica secundaria; lo cual ha dejado a un lado la matemática más abstracta y compleja. Sin embargo, este enfoque no ha tenido buenos resultados en el rendimiento de los estudiantes, según Butto y Rojano (2010) "varios resultados de investigación en didáctica del álgebra registran que una de las dificultades que presentan los estudiantes al iniciar en el estudio del álgebra se deben a que, por mucho tiempo, ésta ha sido vista como una mera extensión del cálculo numérico al cálculo literal" (p.56).

Esta es una de las razones que ha dado paso al desarrollo de un nuevo enfoque, que busca que los estudiantes de primaria tengan experiencia con matemáticas más complejas. Esta propuesta de desarrollo de pensamiento matemático en los grados elementales ha llegado a conocerse como álgebra temprana. Blanton et al. (2007), plantean que, aunque resulta complejo definir específicamente el álgebra temprana, dada la diversidad cultural de los diferentes países, es posible establecer un acuerdo central respecto a dos objetivos específicos: "(1) generalizar, identificar, expresar y justificar la estructura, propiedades y relaciones matemáticas y (2) el razonamiento y las acciones basadas en las formas de generalizaciones" (Blanton et al., 2007, p. 7).

Blanton et al., (2007) afirman que el álgebra temprana, debe verse como un complemento del plan de clase, es decir no es algo distinto que el profesor debe "enseñar" después del dominio de la aritmética. Al contrario, el álgebra temprana debe ir ligada con el plan de estudios. Esto dado que potencia el desarrollo de la comprensión y coherencia de los conceptos para que así se pueda dar una oportunidad de acercamiento a la matemática abstracta y compleja. Como se ha planteado antes, de manera natural en edades tempranas, los estudiantes comparan cosas y se preguntan continuamente "quién tiene más", además, crean formas de medir, como colocar objetos uno encima del otro o ponerlos al lado (Dougherty, 2008). Además de que el álgebra temprana no se trata de un relleno de álgebra como un curso de pre-álgebra, si bien los estudiantes puedan tener ciertas habilidades al momento de desarrollo algebraico, el objetivo de esta es que el estudiante tenga un razonamiento algebraico, y que pueda desarrollar un lenguaje matemático (Blanton et al., 2007).

Blanton y Kaput (2007) plantean que el desarrollo del pensamiento algebraico temprano ayuda a los estudiantes a entender las matemáticas y darle un significado a lo que están aprendiendo. Para lograr este objetivo es esencial generar un espacio donde el estudiante explore diferentes perspectivas y representaciones, lo cual promueve una comprensión más profunda de las matemáticas. Como lo menciona Schoenfeld (2008) "El propósito del álgebra temprana es proporcionar a los estudiantes el tipo de experiencias de creación de sentido que les permitirán participar adecuadamente en el pensamiento algebraico" (p.482).

Blanton et al. (2007) propone tres beneficios principales de desarrollar pensamiento algebraico en los primeros grados escolares:

- Aborda las cinco competencias necesarias para el dominio de las matemáticas (Kilpatrick, et al, 2001) estas son: la comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y disposición productiva.

- Les da a los niños la oportunidad de desarrollar una comprensión de las matemáticas más avanzadas en preparación para los que se enseñan en los grados secundarios.
- Democratiza el acceso a las ideas matemáticas para que más estudiantes entiendan más matemáticas y, por lo tanto, tengan mayores oportunidades de éxito durante toda la vida (Blanton et. al, 2007, p. 8).

Como se ha mencionado anteriormente, el álgebra temprana brinda beneficios no sólo para el currículo y los docentes sino para el estudiante, esto debido a que más allá de comprender conceptos y propiedades aritméticas, se pretende incluir conceptos y propiedades que se manejan normalmente en secundaria y que en general se asocian al desarrollo de pensamiento matemático. Por lo tanto, a medida que los estudiantes desde los primeros años escolares razonan algebraicamente, desarrollan hábitos mentales y conocimientos importantes para el éxito matemático en grados posteriores.

3. Planteamiento del problema

Hablar sobre las representaciones implica referirse a conocimientos, significados, comprensión y modelización, las cuales no solo están presentes en Educación Matemática, sino en diversas áreas de la investigación. Diversos estudios como los de Cañadas y Figueiras (2011), Castro y Romero (1997), Goldin y Shteingold (2001) y Pinto (2016). Han destacado el papel de las representaciones, considerándolas una herramienta fundamental para la comprensión a los contenidos que el profesor propone en el aula.

Explorar las representaciones desde las perspectivas del NCTM y el MEN proporciona una base sólida para entender su importancia en la educación matemática, tanto a nivel internacional como nacional.

Las representaciones son fundamentales para comprender la naturaleza de las matemáticas en diferentes contextos, proporcionando a los estudiantes múltiples formas de abordar, interpretar y resolver las actividades propuestas por el docente (NTCM, 2003). Estas representaciones generan un impacto que permite hacer las matemáticas concretas y asequibles a la reflexión, mostrando pasos intermedios del concepto y problemas que ellos están abordando, permitiendo que organicen sus ideas en situaciones diferentes (NTCM, 2003).

El papel del profesor es escuchar y analizar las diversas representaciones utilizadas por los estudiantes, con el fin de analizar el desarrollo del pensamiento matemático y ofrecer apoyo cuando surjan dificultades (NCTM, 2003). De esta manera los estudiantes aprenden que las representaciones son herramientas útiles para modelar e interpretar situaciones matemáticas (NCTM, 2003).

Según el NCTM (2003) en la etapa de preescolar a segundo, los estudiantes representan sus ideas matemáticas mediante "lenguaje oral y escrito, gestos, dibujos y símbolos inventados o convencionales" (Edwards, Gandini y Forman, 1993, citado en NCTM, 2003 p.140). Estas representaciones ayudan a los estudiantes a formar imágenes mentales sobre las ideas matemáticas que están trabajando, esto también se debe a una interacción con el profesor y sus compañeros (NTCM, 2003). En la etapa de tercero a quinto, se menciona que los estudiantes desarrollan y utilizan diversas representaciones que facilitan su proceso educativo. Estas representaciones no solo les ayudan a modelar sus ideas, sino también les permiten justificar y refutar conjeturas, desarrollando así un pensamiento matemático más profundo y la capacidad de identificar relaciones de los problemas que enfrentan (NCTM, 2003).

Según el MEN (1998), el álgebra abarca diversas temáticas que se desarrollan a lo largo de la etapa escolar. Un aspecto fundamental en la enseñanza de estos contenidos es incorporar las estructuras algebraicas como medio de representaciones y el uso de sus métodos como herramientas de resolución de problemas. Se destaca la importancia de utilizar diversas representaciones, reconociendo que algunas son más adecuadas y eficaces que otras en determinadas situaciones (MEN, 1998). Según el MEN el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas de representación en la educación básica primaria busca fomentar diversas competencias. El sistema de representación es un componente fundamental en el álgebra, vinculado a la variación en el sistema algebraico. Además, existen otros tipos de representaciones como las gestuales, las de lenguaje ordinario o técnico, las numéricas, gráficas y las icónicas (MEN, 1998). Durante esta etapa se espera que los estudiantes utilicen y combinen diferentes representaciones para confirmar o refutar conjeturas MEN (2003).

Algunos objetivos que los estudiantes pueden alcanzar en la educación básica primaria sobre el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos en la utilización de representaciones según en MEN (2003) son:

- Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
- Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales
- Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.

Las representaciones en álgebra temprana son fundamentales, ya que las formas en que los estudiantes utilizan símbolos, dibujos o descripciones verbales para resolver problemas revelan cómo comprenden y procesan conceptos algebraicos (NCTM, 2003). Las representaciones que emplean desempeñan un papel crucial, especialmente al considerar cuál de ellas se adapta mejor para resolver una tarea de manera efectiva. En este orden de ideas, considerando la importancia de las representaciones en la educación básica, para la enseñanza- aprendizaje del álgebra, surge la necesidad de comprender y conocer las distintas formas de representación que usan los estudiantes. Esto nos lleva a platearnos la siguiente pregunta: ¿Qué formas de representación son utilizadas por los estudiantes de quinto de primaria al resolver tareas que promueven el desarrollo del pensamiento algebraico?

Para responder a la pregunta se plantea como objetivos:

Objetivo general:

Identificar las distintas formas de representación que emplean los estudiantes de quinto grado de primaria al enfrentarse a tareas diseñadas para fomentar el pensamiento algebraico.

Objetivos específicos:

1. Describir los tipos de representaciones (gráfica, simbólicas, verbales, concretas, entre otras) que utilizan los estudiantes durante la resolución de tareas orientadas al pensamiento algebraico.

2. Analizar cómo las formas de representación elegidas por los estudiantes reflejan su comprensión y desarrollo del pensamiento algebraico.

A continuación, se describen los elementos teóricos y metodológicos que sustentan en este trabajo.

4. Teoría de la Objetivación

La teoría de la objetivación (TO) ofrece una perspectiva histórico – cultural que va más allá de la simple transmisión de conocimientos, se centra en la formación integral de los seres humanos (Radford, 2023). Aunque la TO esta influencia por la teoría del constructivismo y la teoría de situaciones didácticas, no se limita a replicar postulados. De hecho, se diferencia de estas teorías en varios aspectos importantes. Según Radford (2023), una distinción clave radica en los referentes filosóficos que cada una adopta; mientras que el constructivismo y la teoría de las situaciones didácticas se basan en Kant y la filosofía de la Ilustración, la TO se nutre de referentes filosóficos y psicológicos, destacando figuras como Hegel, Vygotsky, Leont'ev y Luria. Esta riqueza interdisciplinaria permite a la TO abordar la enseñanza- aprendizaje desde una óptica más amplia y compleja.

Según Radford (2020b), la TO establece que el objetivo de la educación matemática va más allá de transmitir el aprendizaje técnico; se enfoca en el desarrollo de individuos éticos y reflexivos. Esta perspectiva considera aspectos políticos, sociales, históricos y culturales, y propone que la enseñanza en la educación matemática debe transformar el conocimiento como parte integral del ser. Así, busca crear prácticas educativas situadas en contextos histórico-culturales específicos, donde se "concibe la enseñanza y el aprendizaje como un único proceso que implica tanto el saber cómo el ser" (Radford, 2020b, p.7). Para enfocarse en el saber y en el ser, la TO redefine los conceptos de saber y aprendizaje de manera coherente con una aproximación histórico-cultural.

Esta teoría se inspira en el materialismo dialéctico y en la escuela de pensamiento de Vygotsky, alejándose de las enseñanzas tradicionales que se enfocan en un aprendizaje empírico y constructivismo. Aunque la TO surge de una perspectiva psicología, no debe considerarse simplemente una teoría psicológica, sino una teoría educativa que promueve la colaboración entre diferentes educadores. Uno de los enfoques clave de la TO es el trabajo colectivo, donde se puede evidenciar diferentes constructos, incluyendo el Saber, el Aprendizaje, los Procesos de objetivación y subjetivación, Labor conjunta y la Ética (Radford, 2020b).

En la TO, el Saber se define como un sistema que constituye nuestro pensamiento y acción de manera cultural e históricamente determinada. Desde nuestro nacimiento, ya poseemos sistemas que nos permite pensar y percibir el mundo, los cuales están en constante evolución. A medida que nos expresamos y reflexionamos, descubrimos distintas maneras de hacerlo en el transcurso de nuestra vida (Radford, 2014). Según Radford y Empey (2007): "El saber, en efecto, se considera altamente estético, ético, simbólico y político". Así, el saber se presenta desde el momento que llegamos a este mundo, provocando un cambio cultural significativo (Radford, 2020a).

Así el Saber está íntimamente relacionado con la noción de Objetivación, que implica la capacidad de concebir una idea antes de nuestro encuentro con el saber, el cual se presenta como algo externo y distinto a nosotros (Radford, 2014). Esta situación puede generar cierta resistencia del saber en los sujetos, el papel de la objetivación es quitar esa resistencia. Radford (2020b) presenta esta relación mediante una ecuación *el sujeto ≠ al saber*, destacando que la TO busca eliminar esta diferencia y facilitar la integración de ambas.

El aprendizaje no puede definirse como las construcciones individuales de los estudiantes, como sugieren algunas teorías constructivistas que lo consideran como acciones aisladas. En cambio, la TO ofrece una perspectiva más coherente, en la que saber y aprendizaje se conciben desde los principios de una escuela histórico-cultural (Radford, 2020a).

Desde esta visión, el aprendizaje no es un proceso individual, sino un trabajo colectivo. La teoría de la objetivación se centra en un enfoque cultural e histórico, donde las actividades de aprendizaje requieren de la participación de todos los individuos. De este modo, se aleja de una concepción puramente intelectual, reconociendo el papel fundamental del cuerpo, las emociones y el mundo material en el proceso de aprendizaje (Radford, 2020).

Además, la TO integra las emociones y el afecto en la educación, distanciándose de enfoques meramente psicológicos. Inspirándose en las ideas de Vygotsky (1998b) y Spinoza (1989, p. 131), Radford (2015) sostiene que las emociones son parte omnipresente del pensamiento. El aprendizaje, por lo tanto, se fundamenta en las emociones y los afectos que impactan nuestras vidas como individuos. Roth (2017, p.156) señala que: “Las emociones son manifestaciones del mayor o menor poder del cuerpo pensante para actuar.” Así, en el aula no solo se genera conocimientos, sino también subjetividades; es decir, los estudiantes se ven como sujetos desde una perspectiva histórico-cultural, reaccionando a culturales e intelectuales.

4.1. Pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico, esencial para el desarrollo matemático de los estudiantes, ha sido objeto de estudio desde diversas perspectivas. Una de las aproximaciones más recientes y relevantes es de la TO, una propuesta por Radford

(2006), la cual se centra en los procesos de aprendizaje como prácticas sociales y culturales que permiten a los individuos apropiarse de conceptos matemáticos. Según Vergel (2015) el pensamiento matemático se define como una forma particular de reflexionar matemáticamente, la cual contiene cantidades indeterminadas (por ejemplo, incógnitas o variables) como si fueran conocidas y realizamos cálculos con ellas como lo hacemos con números conocidos.

Radford (2010b), define el pensamiento algebraico como una forma particular de reflexionar que se distingue por tres componentes que se relacionan entre sí. Estos componentes ayudan a comprender qué hace que el pensamiento algebraico sea único y distintivo de otros tipos de razonamiento. Estos componentes son:

> - Es la *indeterminación* que es propio de los objetos algebraicos básico, con las incógnitas, las variables y los parámetros.
> - Los objetos indeterminados se manejan *analíticamente* se refiere al álgebra como una arte analítico, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
> - Modo *simbólico o sistemas semióticos*, es decir, a la manera específica de nombrar o referirse a los objetos. (p.39)

Además, Radford (2010b) afirma que, "así como no toda simbolización es algebraica, no toda actividad de modelado conduce al pensamiento algebraico" (p.40). Por ejemplo, la sustitución de una variable u objeto desconocido por otro; No tiene sentido sustituir 3 por 3, pero puede tener sentido sustituir una incógnita por otro bajo ciertas condiciones.

Radford (2010a) en su estudio sobre el pensamiento algebraico desde una perspectiva semiótica cultural, reconoce tres reconoce formas de pensamiento algebraico o estratos caracterizados por los medios semióticos de objetivación movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva, incluyendo percepción, movimientos, gestos o lenguaje natural. Estas formas de pensamiento algebraico son las siguientes.

Pensamiento algebraico factual. se basa la coordinación rítmica de gestos, los movimientos, símbolos y las palabras. En este nivel, la ambigüedad no se verbaliza explícitamente, sino se expresa mediante acciones concretas, como el trabajo con números. Por ello (Vergel, 2015) afirma que la ambigüedad permanece implícita en este estrato. Un ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice "aquí", señala y dice "más dos".

Pensamiento algebraico contextual. Se caracteriza por el uso de frases clave en lugar de gestos y palabras, como medio semióticos de objetivación. En este nivel, la ambigüedad se vuelve explícita y se convierte en parte del discurso. La fórmula algebraica actúa como una descripción del término general, tal como debía ser dibujado o imaginado. Por ejemplo, el estudiante dice "# de la figura más para la fila de arriba y # de la figura más dos para la de abajo. Sumar los dos para el total". Esto refleja una contracción semiótica, donde el estudiante emplea formas reducidas de expresión, aunque el pensamiento algebraico sigue siendo contextual y depende de una perspectiva especifica.

Pensamiento algebraico simbólico. Las frases clave son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n + (n-1)$ o $2n - 1$. En este estrato de pensamiento "hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso", a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica (Radford, 2010a, p. 8).

4.2. Diseño de Tareas

La investigación sobre el diseño de tareas en matemáticas ha generado un interés al ser conocida como clave para la construcción del conocimiento en los estudiantes y para mejorar la calidad de enseñanza (Pochulu, 2016). Estas tareas, propuesta por los profesores y que pueden incluir problemas, investigaciones u otros tipos de actividades, buscan fomentar el aprendizaje autónomo del estudiante. Lo que puede potenciar el desarrollo de habilidades de exploración, razonamiento y resolución de problemas. Según Leont'ev (2009), el diseño de tareas tiene como objetivo facilitar que los estudiantes generen conocimiento a través del uso de material didáctico en el aula. Por medio de tareas específicas se puede transformar el conocimiento algebraico como un objeto de pensamiento e interpretación; donde estas actividades se centran en la resolución y el planteamiento de problema (Radford, 2015).

En el diseño de tareas, Radford (2023) identifica tres elementos esenciales las condiciones generales, consideraciones relativas a los problemas matemáticos, y las formas de colaboración humana previstas.

Las *consideraciones generales* deben tener en cuenta el nivel de conocimientos de los estudiantes e integrar herramientas que despierten su interés, aprovechando sus conocimientos previos para evitar que abandonen la actividad matemática en el aula.

Los *problemas matemáticos*, estos deben estar diseñados de manera que generen interés en los estudiantes, brindándoles oportunidades para alcanzar un nivel más profundo de comprensión. Además, estos problemas deben promover la conceptualización, facilitando la construcción y el desarrollo de conceptos matemáticos.

Finalmente, las consideraciones sobre las formas de *colaboración humana* se refieren a la organización y dinámica en el aula, donde el profesor promueve un espacio de reflexión colectiva, generando una producción de conocimientos a través del trabajo conjunto (Radford, 2023).

Una vez establecidos estos tres elementos, el objetivo principal del diseño de tareas es crear las condiciones didácticas que permitan a los estudiantes acceder a formas histórico- culturales de pensar matemáticamente. El diseño de tareas busca no solo que los estudiantes adquieran conocimientos matemáticos, sino también que tome conciencia de las conexiones entre los diferentes componentes matemáticos. Sin embargo, uno de los retos más complejos en el diseño es la elección adecuada de tareas. Estas elecciones deben seguir una curva de complejidad, donde los primeros problemas presentados faciliten la resolución de los problemas más avanzados (Radford, 2023).

4.3. Sistema de representaciones

Platón (1988), en el Mito de la Caverna, postuló que nuestro conocimiento es representación de un mundo de ideas, a las cuales tenemos acceso directamente. Desde inicios de la humanidad, la capacidad de comprender y manipular el mundo que nos rodea ha sido esencial para nuestro desarrollo. En la década de los 80 según Rico (2009) el concepto de representación se abordó como equivalente a una señal externa que evidencia y hace presente un concepto matemático. Estas representaciones se consideran los signo o marcas mediante las cuales se estructura el pensamiento matemático, incluyendo esquemas o imágenes mentales, sobre los cuales la mente trabaja sobre ideas matemáticas.

Así las representaciones, juegan un papel esencial en la construcción del conocimiento, especialmente en el ámbito matemático, al permitirnos interactuar con conceptos abstractos mediante signos, esquemas e imágenes mentales. Sin embargo, Glasersfeld (1995) amplia esta idea al sugerir que la representación, más allá de ser una manifestación externa también es un proceso interno en el cual la mente trae a la conciencia experiencias pasadas. Por ejemplo, si se le pide a un estudiante que dibuje una manzana y tiene la idea de que la manzana es de color roja, puede sentirse confundido al observar o escuchar una descripción distinta de la manzana, como su color, forma e incluso sabor. Esta situación puede ayudar al estudiante a ampliar su comprensión y a aprender de manera más profunda (Glasersfeld, 1995).

Es por ello, que "las representaciones se han considerado parte esencial del aparato conceptual necesario para analizar los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas." (Rico, 2009, p.4). Usualmente, se distinguen las representaciones externas y las representaciones internas, Según Pinto (2016) las representaciones externas hacen referencia a las operaciones convenidas con las cuales comunicamos nuestro conocimiento matemático, mientras que las representaciones internas, son aquellas que hacen referencias a objetos matemáticos, formando imágenes mentales.

Para Goldin y Shteingold (2001) "Los sistemas representacionales importantes para matemáticas y su aprendizaje tienen estructura, de modo que las diferentes representaciones dentro de un sistema están ricamente relacionadas entre sí". Complementando la idea de Pinto (2016), Goldin y Shteingold (2001) menciona que:

Los sistemas externos van desde los sistemas de símbolos convencionales de las matemáticas (como la numeración en base diez, la notación algebraica formal, la recta numérica real o la representación de coordenadas cartesianas) hasta los entornos de aprendizaje estructurados (por ejemplo, los que involucran materiales manipulables concretos o micro mundos basados en computadoras). Los sistemas internos, por el contrario, incluyen los constructos de simbolización personales de los estudiantes y las asignaciones de significado a las notaciones matemáticas, así como su lenguaje natural, sus imágenes visuales y representaciones espaciales, sus estrategias de resolución de problemas y heurísticas, y (muy importante) su afecto en relación con las matemáticas. (p.2)

En diferentes investigaciones encontramos autores que coinciden en que las representaciones juegan un papel importante en el desarrollo del pensamiento algebraico y en la comprensión de las matemáticas en general (Torres, 2022, Cañadas y Figueiras, 2011, Castro, Rico y Romero, 1997, Angarita, 2024). Además, de la importancia de sistema de representaciones en edades tempranas. Castro, Rico y Romero (1997) nos mencionan los sistemas de representación a los cuales se refieren en su investigación son "los modos de expresar y simbolizar determinadas estructuras numéricas" (p. 363); desde este planteamiento, las representaciones son las expresiones simbólicas, los enunciados, los diagramas, los gráficos y otras notaciones usuales de las matemáticas.

También, las representaciones son "un acto creador, que consiste en cambiar de aspecto un mismo dato para verlo de otro modo" (Rico, 2009, p.10). Además, este autor menciona que las representaciones, la podemos tomar como "aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas." (p.3)

Siguiendo estas ideas, Pinto (2016) entiende que un sistema de representación:

a. Organiza los símbolos por los cuales se hacen presentes los conceptos matemáticos;

b. Diferentes sistemas de representación aportan diferentes significados para cada concepto; y

c. Un mismo concepto admite y necesita diferentes sistemas de representación complementarios. (p.26)

A continuación, se realiza una descripción de las principales características de las representaciones, considerados en la literatura sobre el pensamiento algebraico en los primeros cursos escolares.

4.3.1. Sistema Gestual.

Los gestos pueden revelar aspectos importantes de los contenidos mentales del hablante. Radford (2008) señala que "concebir el pensamiento como algo intrínsecamente mental conduce fácilmente a pensar en los gestos como "ventanas" a los pensamientos internos o como transmisores de ideas que ya están en algún lugar de la mente esperando el material adecuado, es decir, la expresión verbal" (p.113). Además, Torre (2022) destaca que "Los gestos ayudan a los estudiantes a generalizar y expresar la generalización" (p.47). Sin embargo, esto no garantiza que el estudiante haya logrado la generalización planteada en los problemas. En el caso de los estudiantes de primaria, los gestos pueden interpretarse como un indicio de que están buscando una forma de expresar lo que piensan (Angarita, 2024).

4.3.2. Sistema Verbal.

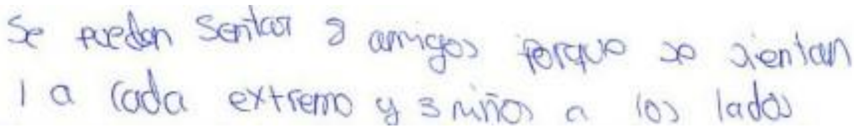
Según Cañadas y Figueiras (2011, p.413) Las representaciones verbales se apoyan "del lenguaje natural de manera oral o escrita para exponer la información de forma cohesionada". Esto para hacer referencia al proceso matemático que se pretender representar (Angarita, 2024). Los principales problemas que involucran este tipo de representación lo hacen en enunciados escritos (trabajos con clases completas o parciales) y orales (entrevistas), estas también pueden ser acompañados por otras representaciones (Torres, 2022).

El uso del lenguaje natural puede apoyar el pensamiento algebraico, pero como señala Radford (2002), también presenta un problema en el discurso matemático al estar ligado al contexto. Esto puede generar expresiones algebraicas ambiguas, ya que lo que los estudiantes escriben no siempre refleja con claridad su intención.

Diversas investigaciones destacan que las representaciones verbales son las más utilizadas por estudiantes de los primeros años escolares para expresar sus ideas. Merino, et al. (2013), en su estudio sobre el uso de representaciones en alumnos de quinto de primaria, subraya que esta preferencia se debe a "la comodidad que supone para los alumnos explicar con sus propias palabras lo que están haciendo, y más en un contexto en el que se les insistió en la importancia de que explicaran/justificaran sus respuestas" (p.36). Un ejemplo de esto se observa en la situación del cumpleaños de Sara (ver figura 2), en la pregunta: "¿Cuántos amigos pueden sentarse a merendar si se juntan 3 mesas?" donde un estudiante respondió:

Figura 2.

Respuesta de cuestión 1 del cumpleaños de Sara.



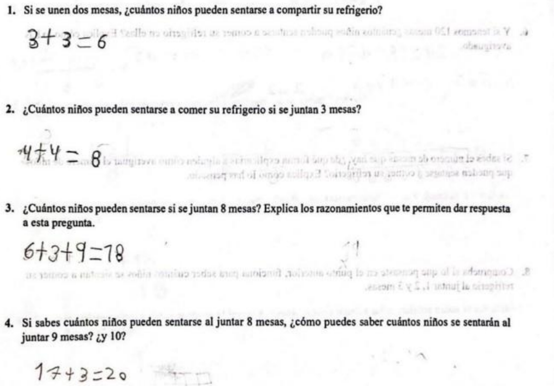
Nota. Tomado de (Merino, et al., 2013, p. 31)

En esta cuestión, los autores destacan que todos los estudiantes aludieron solo al caso particular, dando respuestas correctas, y que la mitad respondió de manera directa. En la educación básica primaria, la representación verbal es clave, ya que permite a los estudiantes familiarizarse con el pensamiento algebraico. Aunque en este nivel los estudiantes aún no están preparados para la simbología formal del álgebra, son capaces de expresar sus ideas mediante el lenguaje natural, tanto de forma escrita como oral. A medida que avanzan de grado, sus representaciones se vuelven más complejas y abstractas, dejando de lado las simbólicas y pictóricas, y recurriendo cada vez más al lenguaje verbal (Merino, et al, 2013). Por ello, es esencial fomentar el uso de la representación verbal en el desarrollo del pensamiento matemático.

4.3.3. Sistema Numérico.

Las representaciones numéricas se basan únicamente en números y operaciones expresadas mediante lenguaje matemático, que suelen organizarse para realizar un cálculo (Cañadas y Figueiras, 2011). Según Angarita (2024), los estudiantes emplean este tipo de representación cuando trabajan con casos que implican valores numéricos específicos. En la educación básica primaria, es natural que se utilicen representaciones acordes con el contenido que se aborda en clase. Por ejemplo, en el estudio realizado por Angarita (2024) sobre el pensamiento funcional en estudiantes de tercer grado, en la situación del restaurante escolar, se esperaba encontrar representaciones como $m + m + 2 = n$, donde m es el número de mesas y n es el número de niños. Sin embargo, se observaron diferentes representaciones (ver figura 3).

Figura 3.


1. Si se unen dos mesas, ¿cuántos niños pueden sentarse a compartir su refrigerio?

3+3=6

2. ¿Cuántos niños pueden sentarse a comer su refrigerio si se juntan 3 mesas?

4+4=8

3. ¿Cuántos niños pueden sentarse si se juntan 8 mesas? Explica los razonamientos que te permiten dar respuesta a esta pregunta.

6+3+9=18

4. Si sabes cuántos niños pueden sentarse al juntar 8 mesas, ¿cómo puedes saber cuántos niños se sentarán al juntar 9 mesas? ¿y 10?

17+3=20

Respuesta de la situación del restaurante escolar.

Nota. Tomado de (Angarita, 2024, p. 112)

En esta actividad se observa el uso de la suma repetida para expresar la relación entre el número de mesas y la cantidad de niños que pueden sentarse. Esta representación numérica es clave en la transición hacia la multiplicación.

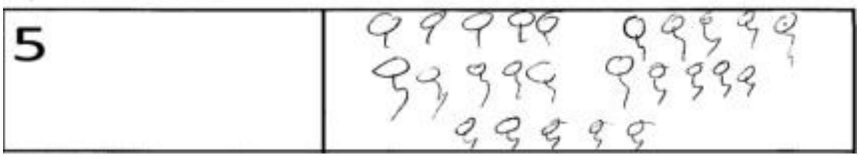
4.3.4. Sistema Pictórico.

Las representaciones pictóricas son aquellas que emplean dibujos sin utilizar notaciones simbólicas. Funcionan como una forma de recolectar de información, aunque es importante señalar que no siempre un dibujo equivale a una representación pictórica (Angarita, 2024). En los primeros años escolares, estas representaciones son clave para el trabajo con los estudiantes (Cañadas y Fuentes, 2015). Generalmente, permiten visualizar la situación problemática y mostrar la relación entre las variables, conectando las estructuras espaciales y numéricas (Torres, 2022).

Cañadas y Fuentes (2015), en su estudio sobre el pensamiento funcional de estudiantes de primero grado, mencionan que la mayoría de las respuestas correctas relacionadas con la situación de la fiesta de cumpleaños se basaron en representaciones pictóricas. Por ejemplo, ante pregunta: "¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 5 niños a la fiesta de cumpleaños?" en relación de 1-5 es decir, asignando cinco globos a cada niño (ver figura 4) un estudiante agrupó los globos para darle solución.

Figura 4.

Representación 1-5, fiesta de cumpleaños.



Nota. Tomado de (Cañadas y Fuentes, 2015, p.217)

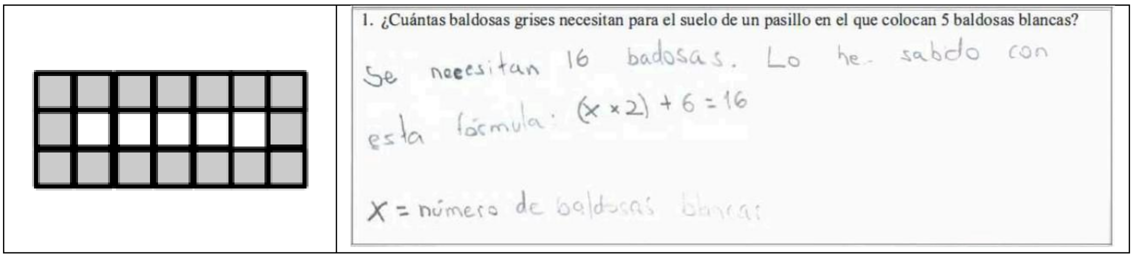
4.3.5. Sistema Simbólico.

Las representaciones simbólicas es un enfoque que utiliza símbolos, letras y notaciones matemáticas para expresar ideas, conceptos y relaciones de manera concisa y precisa. Torres (2022) menciona que estas representaciones permiten a través de símbolos expresar relaciones algebraicas entre letras y signos matemáticos (+, −, ×, ÷, =). Lo cual brinda una visión cualitativa y cuantitativa general de esto.

Esto se evidencia en la figura 5, donde se presenta el uso de la representación simbólica por un estudiante, al responder a una de las cuestiones que estable Pinto (2019) en el problema de las baldosas.

Figura 5.

Problema de la baldosa, representación por un estudiante.



Nota. Tomado de (Pinto, 2016, p.37-38)

4.3.6. Sistema Tabular.

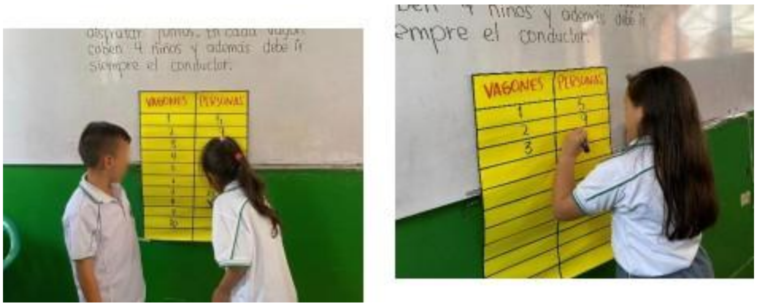
El sistema de representación tabular es una forma de organizar y presentar datos en tablas, lo que permite visualizar de manera clara y ordenada la información. Según

Torres (2022), la representación tabular separa la información de forma clara, facilitando la identificación de los elementos presentados. Construir tablas implica que los estudiantes segmenten y escojan unidades de información, así como que determinen cómo organizarán los datos en un determinado diseño espacial.

Sin embargo, Angarita (2024) destaca la importancia de considerar que el proceso de construcción de tablas requiere que los estudiantes seleccionen unidades de información y determinen cómo organizarán los datos. Por ejemplo, en la situación del tren, se presentó una cartulina que muestra una tabla que relaciona la cantidad de vagones con el número de personas. En colaboración entre estudiantes y profesor, se elaboró (ver figura 6) la representación tabular.

Figura 6.

Representación tabular, situación en el tren.



Nota. Tomado de (Angarita, 2024, p.123)

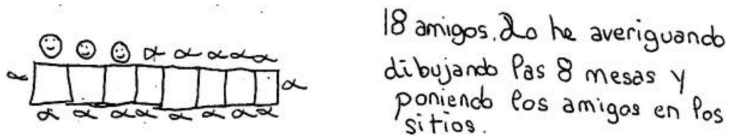
4.3.7. Sistema de representación múltiple.

En los apartados anteriores, se presentaron ejemplos de distintos sistemas de representación de manera separada Pinto (2016) define estas representaciones como la combinación de dos o más sistemas de representaciones utilizados simultáneamente. Además, este autor señala que las combinaciones más comunes son entre representación verbal y la representación pictórica. Por ejemplo, en el estudio de Merino, et al. (2013)

en la situación del Cumpleaños de Sara (ver figura 7), se puede observar una representación múltiple que integra tanto la representación pictórica como la verbal.

Figura 7.

Representación múltiple, cumpleaños de Sara.



Nota. Tomado de (Merino, et al., 2013, p.33)

5. Método

En este apartado se describen los aspectos del método que guían esta investigación. Esta es una investigación de corte cualitativo-descriptivo, dado que tiene como objetivo *identificar las formas de representación que evidencian estudiantes de quinto de primaria cuando abordan tareas que promueven el desarrollo del pensamiento algebraico.* Este tipo de investigación, como señala Guevara, et al. (2020), se enfoca en "conocer las situaciones, costumbres y actitudes predominantes a través de la descripción exacta de las actividades, objetos, procesos y personas" (p.171).

Aunque la TO no propone fases metodológicas específicas, Radford (2015) afirma que esta teoría busca "entender el aprendizaje no como el resultado de las acciones individuales de los estudiantes sino como un proceso cultural- histórico, y ofrecer explicaciones de los procesos implicados de conocer y devenir" (p.553). Esta metodología se apoya en un enfoque multi- semiótico propuesta por la TO (Radford, 2015). Este se centra en el análisis de diversos momentos de la actividad semiótica, como: los gestos, el habla, la escritura y el movimiento corporal, las cuales son activados por los estudiantes al resolver tareas matemáticas (Vergel, et al., 2020).

La metodología multi - semiótica, dentro de la TO, según (Radford, 2015) considera que el aprendizaje se da a través de las acciones sensoriales de los estudiantes, que actividades: “perceptiva, auditiva, cinestésica, gestual, lingüística y simbólica en general” (p.560).

La recolección de datos se lleva a cabo mediante un diseño previo de tareas, siguiendo la orientación de Radford (2015), donde, dentro del diseño metodológico Vergel (2015) considera cuatro fases, las cuales son: i) Revisión y análisis documental ii) Adaptación de tareas iii) Intervención de aula (recolección de la información) iv) Análisis de datos; que se describen a continuación.

Tabla 1.

Cronograma

Fases de investigación	**2024**			**2025**				
	Septiembre	Octubre	Noviembre	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Septiembre
Fase I								
Fase II								
Fase III								
Fase IV								

Nota. Esta tabla muestra el cronograma correspondiente a cada fase de investigación.

5.1. Fase I: Revisión y análisis documental

En esta fase se realiza una revisión de documentos curriculares y del concepto de álgebra temprana expuestos en los antecedentes de este trabajo. En particular el NCTM (2003) establece que el álgebra debe desarrollarse a partir de los 3 años, basándose en el estudio de relaciones entre cantidades y representaciones matemáticas.

Lo anterior resalta la importancia de introducir el pensamiento algebraico de forma progresiva en la educación temprana. Desde esta perspectiva la representación de los objetos matemáticos es clave para el aprendizaje, ya que permite organizar, comunicar, resolver problemas y modelizar (NCTM, 2003).

De la misma manera, el NTCM (2003) reconoce que los estudiantes enfrentan desafíos con conceptos como la variable, así como con la manipulación de las expresiones algebraicas. En este sentido, Godino et al. (2012, p. 490; citados por Vergel, y Rojas, 2018) señala que "hay un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un cierto grado de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica con facilidad". Esto evidencia las dificultas que los estudiantes presentan al utilizar la notación algebraica, incluso al momento de generalizar un patrón.

A partir de lo establecido por el MEN (1998), existen diferentes sistemas de representaciones utilizados para describir o analizar las diversas formas de variación, entre ellos los enunciados verbales, tabulares, pictóricas e icónicas, entre otras. Todas estas representaciones forman parte del sistema el cual facilita la comprensión de conceptos matemáticos. Posterior a esto, en el MEN (2003) introduce el pensamiento variacional y sistema algebraico, resaltando su papel fundamental de este pensamiento en la resolución de problemas sustentados en el estudio de variación y el cambio.

Teniendo en cuenta las perspectivas curriculares presentadas anteriormente, se da paso al concepto de álgebra temprana. Históricamente el álgebra se ha estudiado en los últimos grados escolares, dejando un lado la matemática abstracta y compleja. La propuesta del *early algebra* busca el desarrollo del pensamiento matemática desde los grados elementales. Esto se debe a que, más allá de comprender conceptos y propiedades aritméticas, se pretende incluir conceptos y propiedades que se manejan normalmente en secundaria y que en general se asocian al desarrollo de pensamiento matemático.

En esta ruta la TO, ofrece una perspectiva histórico-cultural, la cual plantea que el aprendizaje no es un proceso individual, sino un trabajo colectivo. A través de éste se espera que los estudiantes logren desarrollarse, encuentren formas culturales de ser y pueden expresarse a través de ellas, a partir de la colaboración e interacción promovidas en el aula de clase (Vergel y Rojas, 2020).

Asimismo, esta teoría aborda el sentido ontológico, que, según Vergel y Rojas (2020), "significa alteridad, es decir, la actividad debe promover el encuentro de eso que no soy yo y que, al encontrarlo, me transforma" (p.75). Es otras palabras, la interacción y colaboración con sus compañeros y el profesor el estudiante se transforme.

En cuanto al diseño de la Tarea, Radford (2023) define tres componentes fundamentales: la consideración general, el problema matemático y la colaboración humana, lo cuales se profundizan en los aspectos teóricos que sustentan este trabajo y que fueron presentados en la sección cuatro de este documento.

Además, se aborda la relación entre el pensamiento algebraico y la TO. Radford (2010b) define el pensamiento algebraico como una forma particular de reflexionar, la cual se distingue por tres componentes que se relacionan entre sí: la indeterminación, lo analíticamente y el modo simbólico o sistema semiótico.

Radford (2010a) distingue tres formas del pensamiento algebraico: el *factual* en el cual se habla de la coordinación rítmica de gestos, movimientos, símbolos y las palabras, el *contextual* se caracteriza por el uso de frases claves, donde la ambigüedad se vuelve explícita y se convierte en parte del discurso, y *simbólico* las frases claves son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra.

Finalmente, se destacan los sistemas de representaciones como parte fundamental de este enfoque. Los sistemas de representación que serán analizados en este documento son: gestual, verbal, numérico, pictórico, simbólico, tabular y múltiple.

5.2.Fase II: Diseño de tareas.

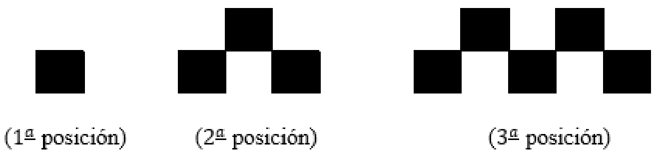
En esta fase, el enfoque principal es el diseño y adaptación de tareas que permitan a los estudiantes de quinto de primaria expresar y desarrollar su pensamiento algebraico. Según Vergel (2020) es fundamental que estas tareas se "manifiesten a través de recursos gestuales, verbales y/o escritos, como de manera progresiva realizaban acercamientos al establecimiento de algún patrón identificando posibles variables, su comportamiento y la forma en que éstas se relacionaban" (p.73).

El proceso de adaptación seguirá las orientaciones teóricas de Radford (2015) que resaltan la importancia de diseñar actividades que, más allá de la simple manipulación de símbolos, involucren una comprensión profunda y cultural del pensamiento matemático. De allí Radford (2015) menciona que "la actividad en el aula debe avanzar hacia su objeto, suele ser pedagógicamente necesario introducir algunas metas" (p.554).

Las tareas planteadas a continuación, se llevará a cabo en grupos de a tres estudiantes, fomentando la labor conjunta, donde los estudiantes pueden compartir sus propias estrategias, razonamientos y justificaciones.

La duración estimada para el desarrollo de cada tarea es aproximadamente 30 minutos. Como indicaciones iniciales, se presenta a los estudiantes el taller, se les solicita que lean atentamente cada enunciado, planteen preguntas sobre aquello que no sea claro y desarrollen sus respuestas en el espacio asignado. Además, en cada actividad, se fomentará el debate buscando que los estudiantes expongan y justifiquen los procedimientos utilizados para llegar a su solución.

Tarea 1. Búsqueda de patrones



1. Dibuje cada figura correspondiente a la 4ª y 5ª posición.

2. Calcule el número de cuadros de la figura correspondiente a la 9ª posición.

3. Calcule el número de cuadros de la figura de la posición 30. Explica detalladamente como llegaste a esa respuesta.

4. Juan Andrés asegura que: “La figura que aparece en la posición 100 tiene 120 cuadrados”. Crees que la afirmación de Juan Andrés es correcta. Explica ampliamente tu respuesta.

5. Escribe cómo le explicaría a su persona favorita, de qué manera puede encontrar cualquier figura en cualquier posición de la secuencia.

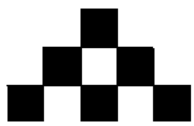
Vergel y Rojas (2018, p. 81)

El objetivo de esta tarea es que los estudiantes identifiquen y analicen secuencias numéricas y geométricas, promoviendo el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Para la implementación de esta tarea es importante incluir hojas cuadriculadas en las que los estudiantes puedan dibujar y extender la secuencia de mejor manera.

En relación con los dos primeros ítems, se espera que el estudiante identifique rápidamente el patrón que determina los términos de la secuencia y respondan sin dificultad. Sin embargo, algunos estudiantes pueden enfrentar desafíos al reconocer correctamente el patrón de crecimiento, lo que puede llevar a errores en la alineación y estructura de las figuras. Es posibles que agreguen cuadros de más, afectando la continuidad del patrón.

Figura 8.

Secuencia de la figura en la posición 4ª *con error en el patrón de crecimiento.*



Nota. Figura tomada de (Vergel y Rojas, 2018, p.82)

Al no identificar de manera correcta la secuencia, pueden continuar el procedimiento de manera errónea.

En el tercer ítem, se espera que, a partir de lo realizado en los ítems anteriores, los estudiantes logren identificar el patrón de crecimientos y puedan determinar el número de cuadrados de la figura solicitada sin realizar su representación gráfica. Algunas dificultades que pueden presentar incluyen el no reconocer que la estrategia de dibujar todas las figuras hasta la posición 30 es poco eficiente y la dificultad para operar números grandes sin apoyo visual.

Además, se espera que los estudiantes expliquen su procedimiento de manera clara, describiendo la estrategia que eligieron, los pasos que siguieron para identificar la secuencia y cómo aplicaron esto para calcular el número de cuadrados en la posición 30.

En relación con el cuarto ítem, se espera que los estudiantes, utilizando la estrategia aplicada en el ítem anterior, verifique si la afirmación de Juan es correcta o no. Para ello deberán comparar los resultados obtenidos con la regla de crecimiento identificada y justificar de manera clara y fundamentada. Puede tener dificultades al momento de realizar los cálculos.

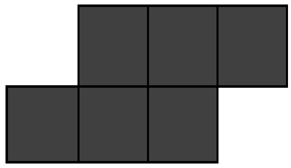
Finalmente, en el último ítem, al pedirle al estudiante que explique el procedimiento a su persona favorita, se espera que pueda describir de manera clara y ordenada cómo determinar la cantidad de cuadrados en cualquier posición. Para ellos, se espera que explique el paso a paso del proceso seguido y que incluyan un ejemplo de alguna posición.

Algunos desafíos que podrían presentarse incluyen dificultades para estructurar la explicación de manera coherente, el uso de términos imprecisos o la falta de justificación en su razonamiento.

De manera general, en esta tarea se espera que los estudiantes utilicen la representación tabular como una herramienta para la organizar los datos de cada posición. Esto les permitirá visualizar con mayor claridad la regularidad de la secuencia y fortalecer sus argumentos al responder las situaciones planteadas.

Tarea 2. Baldosas

Tomando como referencia la figura dada, en la cual cada para de baldosas debe estar unida al menos por uno de sus lados, ¿Es posible añadir baldosas de manera tal que el perímetro de la nueva configuración de baldosas sea 18 unidades? ¿cuál sería el número mínimo de baldosas requeridas?, ¿cuál sería el máximo? Explica.



Vergel y Rojas (2018, p. 84)

El propósito de esta tarea es que los estudiantes exploren la relación entre la cantidad de baldosas agregadas y el perímetro total de la figura, identificando diversas configuraciones que cumplan con las condiciones planteadas. Se propone que esto permita el desarrollo de estrategias de conteo y razonamiento geométrico.

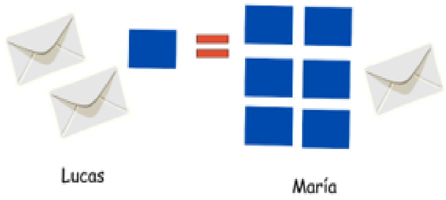
Además, la tarea permitirá que los estudiantes reconozcan que añadir baldosas no implica que el perímetro de la nueva configuración aumente, pues puede mantenerse o incluso, disminuir. Finalmente, se busca que reconozcan los diversos hallazgos, en particular, las relaciones entre área y perímetro.

Con esta tarea se espera que el estudiante utilice estrategias como contar directamente el perímetro de la figura inicial y analizar cómo va cambiando si se le agrega una nueva baldosa. También, se busca que explore diversas configuraciones para agregar baldosas sin exceder el perímetro indicado e identifique posibles patrones expresando la relación entre la cantidad de baldosas y el perímetro.

Algunos desafíos que pueden surgir en esta tarea incluyen la confusión al momento de determinar el perímetro, especialmente al considerar los lados compartidos. Además, los estudiantes pueden no reconocer que, al agregar baldosas, el perímetro puede disminuir. También podrían enfrentar dificultades para encontrar una estrategia eficiente que les permita minimizar o maximizar la cantidad de baldosas agregadas.

Además, de manera general, se espera que los estudiantes utilicen diversas representaciones en esta tarea. La representación pictórica puede ayudarles a visualizar al momento de agregar las baldosas. Asimismo, el uso de representaciones verbales, tanto escrita como orales, favorecerá la explicación y justificación de sus respuestas. Esto puede promover el proceso de visualización sobre la situación planteada.

Tarea 3. Problema de los sobres.



Determine el número de tarjetas que hay en cada sobre, sabiendo que ambos jóvenes tienen la misma cantidad de tarjetas, y que en cada sobre el número de tarjetas es el mismo.

Vergel y Rojas (2018, p. 88)

Esta tarea fue planteada por Radford (2002) con el propósito de poner en evidencia que es posible empezar a pensar algebraicamente en ausencia de signos alfanuméricos del álgebra e identificar formas de pensamiento algebraico. Esta tarea busca que los estudiantes desarrollen este pensamiento.

Esta tarea se presenta a cada grupo mediante en material concreto. Para ello, se hace uso de sobres y tarjetas según corresponda a cada situación planteada. Tras recibir las indicaciones, los estudiantes deberán explicar su solución de manera escrita y oral.

Se espera que los estudiantes reconozcan que la cantidad total de tarjetas es la misma para ambos personajes y, a partir de esta igualdad, deduzcan cuántas tarjetas hay en cada sobre. Para ello, pueden emplear diversas estrategias, como “eliminar” la misma cantidad de tarjetas a cada lado o “cancelar” elementos equivalentes. Además, al manipular el material concreto, podrán explorar la igualdad de manera correcta, deducir que el total de tarjetas se distribuye en partes iguales y plantear una estrategia de reparto.

El estudiante puede enfrentar diversas dificultades al desarrollar la tarea, como no reconocer que la cantidad total de tarjetas es la misma en ambos personajes, tener dificultades para distribuir equitativamente de las tarjetas, no comprender que cada sobre contiene la misma cantidad de tarjetas, realizar cálculos incorrectos o no emplear una estrategia adecuada para resolver el problema.

Tarea 4. ¿Quién cuenta 20?

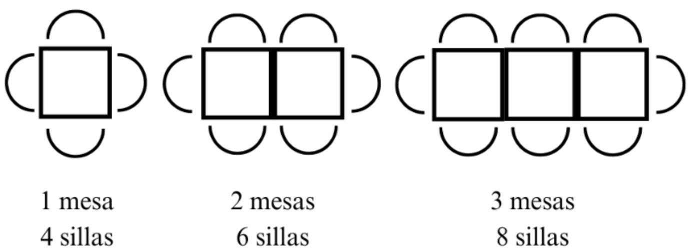
> *Juego por parejas:* Cada jugador debe escoger sólo un de tres números: 1, 2 o 3, y en los otros turnos, a este número se le suma el dicho por el siguiente jugador: por ejemplo, el primero dice 3 y el otro dice uno, entonces van 4, ahora el primero dice 3 y van 7, gana quien diga primero 20.
>
> ***Desafío:*** Encuentra una estrategia ganadora que te asegure la victoria en cada partida.
>
> Vergel y Rojas (2018, p. 89)

El propósito de esta actividad es que los estudiantes identifiquen patrones numéricos y desarrollen estrategias de conteo para obtener el número 20. A través de este juego, se promueve el pensamiento estratégico, el razonamiento algebraico y la exploración de secuencias numéricas

En principio, los estudiantes pueden abordar el juego mediante ensayo y error. Sin embargo, después de algunos intentos, se pueden retar a encontrar una estrategia ganadora. Algunas de estas estrategias pueden incluir el conteo acumulativo, sumando de manera secuencial para observar cómo aumenta el número. Además, algunos estudiantes podrán identificar patrones para determinar una estrategia óptima e identificar las posiciones clave que les garanticen la victoria.

Algunos desafíos que pueden surgir en este juego incluyen la dificultad de anticipar y prever jugadas futuras, no comprender que algunos números permiten un mejor control del juego, realizar cálculos incorrectos al sumar los valores en cada turno y la dificultad para identificar patrones numéricos que conduzcan a una estrategia ganadoras.

Tarea 5. Mesas y sillas



1. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?

2. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?

3. En una fiesta se han colocado 18 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica como has encontrado el resultado.

4. Si en tu cumpleaños has invitado a 42 niños, ¿Cuántas mesas necesitaremos juntas en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.

5. Explica con tus palabras cual es la relación del número de mesas y el número de sillas.

Vergel y Rojas (2018, p. 90)

El objetivo de esta tarea es que los estudiantes identifiquen y analicen secuencias numéricas de la relación funcional al asociar el número de mesas con el de sillas, promoviendo el desarrollo del pensamiento algebraico temprano y capacidad de establecer patrones.

En relación con los dos primeros ítems, se espera que el estudiante identifique rápidamente el patrón de los siguientes términos de la secuencia y respondan sin dificultad. Sin embargo, algunos podrían enfrentar desafíos al reconocer correctamente el patrón de crecimiento, lo que podría generar errores en la disposición y ubicación de las sillas o mesas. Es posibles que ubiquen incorrectamente las sillas o mesas, afectando la continuidad del patrón.

En el tercer ítem, se espera que, a partir del trabajo realizado en los ítems anteriores, los estudiantes sean capaces de identificar el patrón de crecimiento y apliquen directamente un cálculo sin la necesidad de dibujar las mesas y sillas intermedias hasta llegar a 18 mesas. Algunas dificultades que podrían enfrentar incluyen no reconocer que la estrategia de dibujar hasta la mesa 18 es poco eficiente y tener problemas para operar con números sin apoyo visual.

Además, se espera que los estudiantes expliquen su procedimiento de manera clara, describiendo la estrategia que eligieron, los pasos que siguieron para identificar la secuencia y cómo aplicaron esto para calcular el número de invitados que pueden sentarse en 18 mesas.

En el cuarto ítem, se espera que los estudiantes trabajen el concepto de operación inversa, aplicando la relación entre el número de mesas y el número de sillas identificada en los ítems anteriores. En lugar de calcular cuantas sillas hay par un número de mesas, deberán determinar cuántas mesas se necesitan para 42 sillas. Algunos estudiantes, pueden optar por la estrategia de prueba y error, sumando mesas hasta llegar al resultado o podrían utilizar el patrón encontrado previamente y despejar el número de mesas de manera directa.

Algunas dificultades que podrían presentarse incluyen no reconocer que el problema debe resolver manera inversa, lo que podría llevar a los estudiantes seguir sumando en lugar de restar o dividir. También pueden cometer errores al establecer la relación entre mesas y sillas, depender excesivamente del dibujo para encontrar la respuesta o enfrentar dificultades al realizar cálculos con números grandes.

Finalmente, en el quinto ítem, al pedirle a los estudiantes que expliquen la relación entre las mesas y las sillas, se espera que verbalicen, promoviendo la reflexión y consolidación del patrón identificado a través de la argumentación. Se espera que pueda explicar cómo identifica el patrón haciendo uso de ejemplos, lenguaje matemático como “aumento”, “crece”, “sumando dos”, etc. Incluso se espera que haga un intento de expresar una generalización.

Algunas dificultades que podrían presentarse, es que el estudiante identifique de manera incorrecta el patrón, realice cálculos erróneos, dificultades para estructurar la explicación de manera coherente, no comprensión del enunciado o falta de justificación.

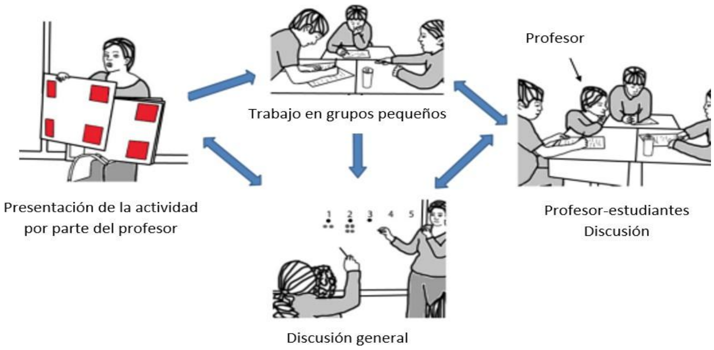
Además, de manera general, en esta tarea se espera que los estudiantes utilicen la representación tabular como una herramienta para la toma de datos. Esto les permitirá visualizar mayor claridad la regularidad de la secuencia y fortalecer sus argumentos al responder las situaciones planteadas.

5.3. Fase III: Intervención en el aula (recolección de la información)

Radford (2015) menciona que, en la mayoría de sus investigaciones en el aula los estudiantes se organizan en grupos de mesas, para promover el trabajo colaborativo. Como se ha mencionado dado que la TO es una teoría histórico-cultural, y considera que la acción del docente y la del alumno corresponden a una misma labor, esto es, una "forma social de acción conjunta" (Radford, 2014). Para así generar una interacción como se muestra en la Figura 9.

Figura 9.

Actividad en el aula.



Nota. Adaptado de (Radford, 2015, p.556)

En esta Figura, se evidencia la interacción entre el docente y los estudiantes. En un primer momento está la presentación de la actividad, después se pasa al trabajo en grupos pequeños, la discusión entre el docente y los estudiantes; por último, la discusión general que se puede evidenciar también en los grupos de trabajos pequeños.

Para la recolección de datos, Vergel (2015) define cuatro fases:

Tabla 2.

Fases de recolección de datos.

Fase I. Grabación de video de todas las actividades de clase.	Fase II. Obtención de hojas de trabajo de cada estudiante.
Fase III. Transcripción de todos los videos.	Fase IV. Análisis de videos y hojas de trabajo, en el cual se evidencia el proceso de resolución de las tareas.

Nota. En esta tabla se presentan las cuatro fases, que menciona (Vergel, 2015, pp.11-12) para la recolección de datos.

En este proyecto la intervención en el aula se llevó a cabo en una institución pública del departamento de Santander (Colombia), con un grupo de 34 estudiantes de quinto de primaria de la jornada de la tarde, cuyas edades oscilan entre edades de 9-11 años. Esta intervención se desarrolló de acuerdo con el cronograma establecido (ver Tabla 3), en el cual se organizaron las tareas planteadas para cada intervención. Se realizaron dos sesiones de intervención, cada una con una duración aproximada de 150 minutos.

Tabla 3.

Cronograma de intervención

Fase III. Intervención en el aula	Abril		Objetivo de las tareas
	Miércoles, 9	Jueves, 10	
Tarea 1. Búsqueda de patrones.			Identificar y analizar las secuencias numéricas y geométricas
Tarea 2. Baldosas.			Explorar la relación entre la cantidad de baldosas agregadas y el perímetro total de la figura, identificando diversas

			configuraciones.
Tarea 3. Problema de los sobres.			Empezar a pensar algebraicamente en ausencia de signos alfanuméricos del álgebra e identificar formas de pensamiento algebraico.
Tarea 4. ¿Quién cuenta 20?			Identificar patrones numéricos y desarrollo de estrategias de conteo.
Tarea 5. Mesas y sillas.			Identificar y analizar secuencias numéricas de la relación funcional.

Nota. En esta tabla se presenta el cronograma de intervención, con las tareas planteadas para cada sesión de intervención.

A continuación, se presentan los análisis de las tareas realizadas en el aula. Desde la perspectiva de la TO, considerando los gestos, el lenguaje, los recursos semióticos y las interacciones grupales. Estas intervenciones se realizaron en grupos de tres estudiantes: inicialmente se les presentó la tarea de manera general dando paso a una reflexión individual, y posteriormente se daba paso a la discusión grupal, lo que permitió reconocer tanto los procesos individuales como aquellos que surgen del trabajo grupal.

5.3.1. Análisis a posteriori.

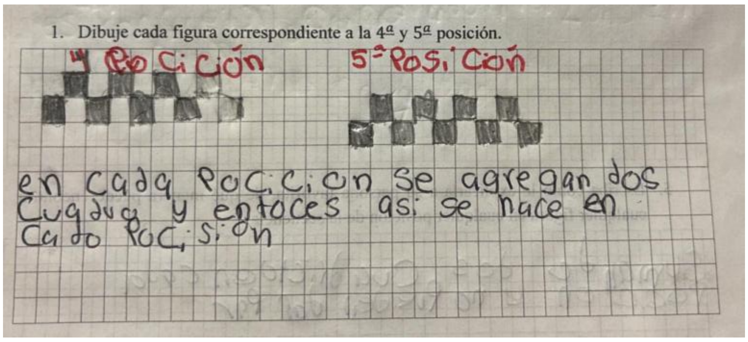
Este análisis se realizará por cada una de las tareas diseñadas. Donde inicialmente se enumeraron las hojas de trabajo de cada estudiante (E1, E2, …, E34) para identificar y realizar un seguimiento de estas. Asimismo, se tienen en cuenta la recopilación de audios y videos, donde se realizó una transcripción de cada estas, favoreciendo las ideas y construcciones de las producciones realizadas por los estudiantes.

Tarea 1. Búsqueda de patrones.

En relación con los dos primeros ítems, la mayoría de los estudiantes no tuvo dificultades para dar una respuesta al primer ítem (Figura 10). Podemos notar el sistema de representación múltiple, en el cual el estudiante no solo realiza una representación pictórica, sino que la combina con la verbal. Asimismo, el estudiante logra identificar el patrón de "agregar" dos cuadros.

Figura 10.

Producción dada por un estudiante de la Tarea 1.

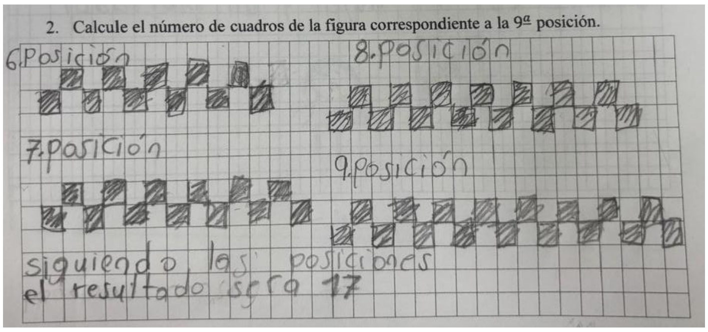


"en cada posición se agregan dos cuadros y entonces así se hace en cada posición"

En el segundo se esperaba que los estudiantes identificaran el número de cuadrados rápidamente sin hacer uso de las representaciones pictóricas de las posiciones anteriores. Sin embargo, un grupo de estudiantes utilizaron esta estrategia para llegar al resultado de la 9ª posición como se muestra en la (Figura 11).

***Figura 11*.**

Producción del estudiante 15 a solicitud de la 9ª posición con apoyo tabular.



“siguiendo las posiciones el resultado será 17”

Además, podemos observar que en estos primeros ítems se evidenciaron tres sistemas de representación, como podemos notar en la (Figura 11), tenemos el sistema pictórico y “verbal”. En el siguiente fragmento se evidencia la discusión de un grupo de estudiantes con el objetivo de dar solución al primer ítem:

E1: Acá había cinco ¿verdad? *[señalando la figura de la* 3ª *posición]*, entonces tiene que haber siete en la siguiente. Entonces acá *[señalando la figura de la* 5ª *posición]* debe haber 8.

E2: Nueve...

E1: Aja, nueve.

E3: ¿Cómo así?... me puede explicar esto *[señalando la figura de la* 4ª *posición]*

E1: ……. Pues tenemos que dibujar las otras posiciones, donde se le van sumando de a dos a cada una.

E3: Ahhh… listo así sucesivamente.

Figura 12.

Recursos semióticos, sistema gestual y lenguaje utilizados por el estudiante para explicar a sus compañeros sus ideas.

Como se aprecia en la figura 12, el señalamiento y los gestos acompañaron la explicación del estudiante, estos recursos semióticos se definen dentro del sistema de representación gestual, esto permite la construcción de un entendimiento compartido. Como lo menciona Saavedra (2019) los gestos juegan un papel muy importante, puesto que ayudan al estudiante a comunicar sus ideas o representaciones mentales que son difíciles de explicar por medio del habla. Cuando el estudiante se expresa "así sucesivamente" hace el gesto que podemos notar en la figura anterior señalando que esto se repite.

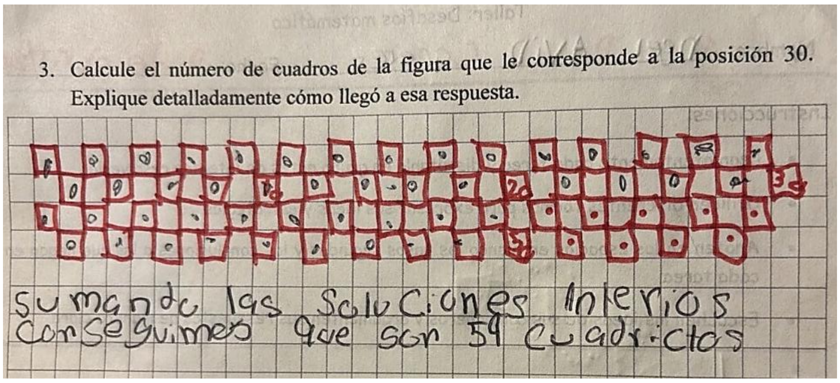
En el segundo ítem, en el que se les pedía a los estudiantes calcular el número de cuadros de la figura correspondientes a la posición 9ª, se observaron diversos resultados. El propósito de este era que identificaran el patrón, lo cual llevó a algunos a la siguiente conclusión: "empezamos con un cuadrito y se le suman dos, y si nos pregunta la posición 9 entonces $9 \times 2 = 18$ y se le quita una del primer cuadrito entonces 17. Entonces en la posición 9 tendríamos 17 cuadritos".

Este razonamiento evidencia la manera como el estudiante logra identificar el patrón de crecimiento, aunque lo expresa de manera informal la idea de "sumar dos y restar uno" su explicación evidencia un proceso en el que relaciona el conteo, las operaciones aritméticas y el sistema verbal para la construcción del patrón.

En cuanto al tercer ítem, sobre los cuadros en la figura de la posición 30, el número de respuestas y procesos distintos aumentó. Algunos estudiantes insistieron en realizar la representación pictórica de esta posición, ubicando un cuadro tras otro hasta notar que no les cabría en la hoja de trabajo por lo que optaron seguir en el siguiente reglón (Figura 13). Sin embargo, otros estudiantes emplearon estrategias más cercanas a lo simbólico, apoyándose de operaciones aritméticas y razonamiento algebraicos para llegar al resultado.

Figura 13.

Producción de un estudiante sobre la posición 30 de la secuencia con apoyo tabular.



"Sumando las soluciones anteriores conseguimos que sean 54 cuadritos".

A continuación, se presenta unos fragmentos de transcripción en el que se evidencia cómo, a través de la discusión y el uso gestual, los estudiantes lograron acordar estas estrategias para abordar lo planteado:

E4: Profe, mira que es que ellos no me creen…

P: ¿Por qué?

E4: Es que yo les digo que hay 59.

E5: Yo creo que son 57.

P: ¿Por qué?

E6: Por que 17 son de la posición nueve, en la posición diez son 19 y 19. por 3 son 57.

P: Muy bien, pero recuerda que como le habías restado una a la de la posición nueve, entonces ¿no deberías agregarle uno?

[…]

E5: Si, profe, pero como multiplicamos por 2 entonces debemos sumarle dos, entonces daría 59.

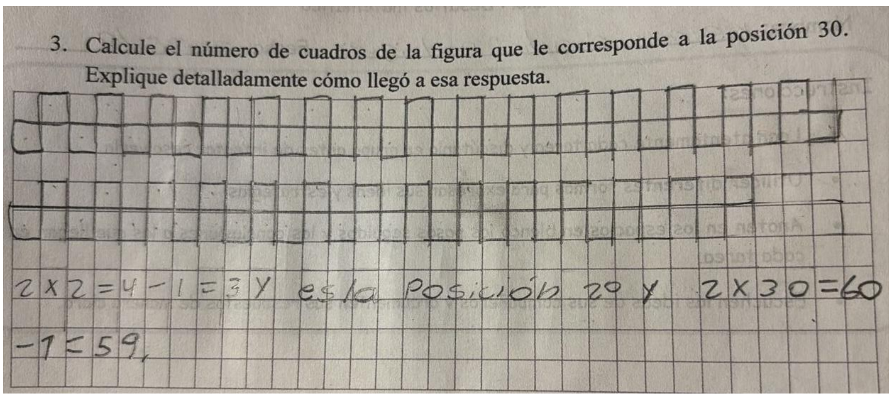
E4: Si ve, son 59.

P: muy todos, ambas formas son válidas solo se debía tener en cuenta agregarle 2.

Esta interacción entre los estudiantes muestra que, a partir de diferentes procedimientos, los estudiantes lograron llegar al mismo resultado. Esto refleja, la importancia de la discusión colectiva y la mediación docente para precisar en el razonamiento. Como se muestra en la (Figura 14) el estudiante no solo se enfocó en la representación pictórica, sino que además justifico su procedimiento mediante una posición ya encontrada para dar encontrar la posición solicitada en este ítem.

Figura 14.

Producción por parte de uno de los estudiantes, en el cual se evidencia el sistema numérico.

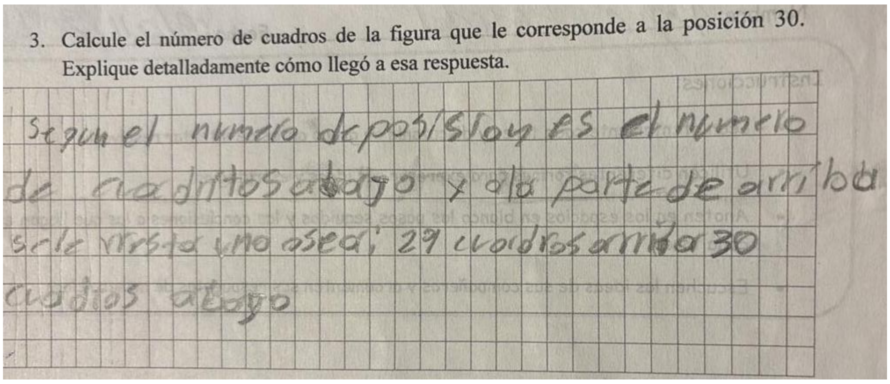


$2 \times 2 = 4 - 1 = 3$ y es la posición 2° y $2 \times 30 = 60 - 1 = 59$

Asimismo, evidenciamos otro proceso presentado por un grupo distinto de estudiantes, los cuales logran abordar una estrategia distinta, esta se muestra en la figura 15.

Figura 15.

Producción dada por uno de los grupos, haciendo uso de una estrategia distinta.



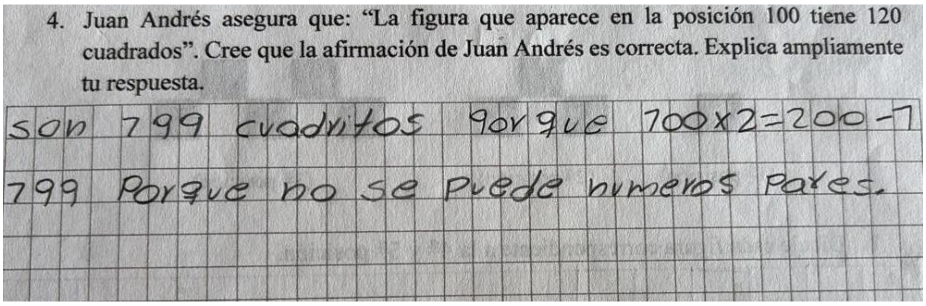
"Según el número de posiciones es el número de cuadritos abajo y a la parte de arriba se le resta uno ósea; 29 cuadros arriba 30 cuadros abajo"

En la discusión grupal, los estudiantes acordaron una estrategia: "el número de la posición corresponde a la cantidad de cuadros que debían ir en la parte de "abajo" y los cuadros en la parte de arriba son el número de la posición "menos un cuadro"".

En el cuarto ítem, cuyo propósito era que los estudiantes comprobaran si Juan Andrés tenía la razón al afirmar que *"la figura de la posición 100 tenía 120 cuadros"*, la mayoría concluyó que estaba equivocado. Para ello, emplearon sus estrategias y dieron argumentos consistentes, como se muestra en la figura 16.

Figura 16.

Producción del estudiante 11 a solicitud del ítem 4 de la primera tarea.



4. Juan Andrés asegura que: "La figura que aparece en la posición 100 tiene 120 cuadrados". Cree que la afirmación de Juan Andrés es correcta. Explica ampliamente tu respuesta.

son 199 cuadritos porque 100x2=200-1
199 Porque no se puede numeros Pares.

"Son 199 cuadritos porque $100 \times 2 = 200 - 1 = 199$ porque no se puede números pares"

A partir de esta producción se evidencia que algunos estudiantes incluso llegaron a generalizar la regla del patrón, concluyendo que en la posición 100 se obtienen 199 cuadros. Esta representación simbólica que se evidencia les permitió argumentar que la afirmación de Juan Andrés era incorrecta.

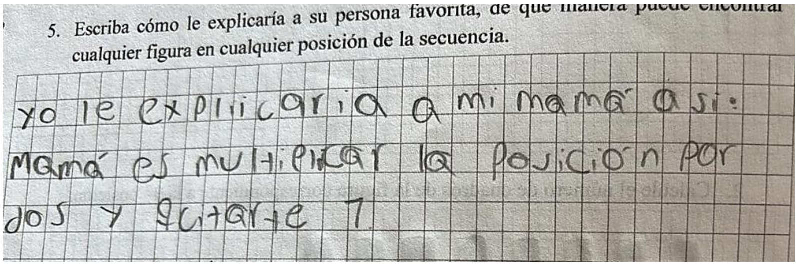
Además, los estudiantes afirmaron que la cantidad de cuadros no pueden ser números pares, llegaron a esta conclusión señalando que *"todas las posiciones que hemos encontrados son números impares"* y, al avanzar al último ítem confirmaron que así fuera una posición grande siempre el número de cuadros sería impar.

No obstante, también se presentó que un grupo de estudiantes afirmaban que Juan tenía razón. Para justificarlo, dicen que "vamos agregando de a dos cuadritos entonces dos por dos es cuatro… entonces dos por diez es veinte, 100 más veinte da 120 entonces en la posición 100 hay 120 cuadritos". Se les cuestiono la coherencia con el cálculo en relación con la posición 30, donde habían obtenido 59 cuadros. Al revisar, los estudiantes explican que multiplicaron $30 \times 2 = 60$ y luego le restaron 1, obteniendo así 59. Siguiendo el mismo razonamiento, concluyeron finalmente que la posición 100 serían 199 cuadros, reconociendo que Juan estaba equivocado.

En el último ítem se pidió a los estudiantes que escribieran cómo le explicaría a su persona favorita, de qué manera puede encontrar cualquier figura en cualquier posición. A partir de sus respuestas, se pudo observar que los estudiantes recurrieron al lenguaje natural, expresando el relato de forma narrativa, apoyándose asimismo de las operaciones básica y números, como ejemplos de algunas posiciones (Véanse las Figura 17, 18,19).

Figura 17.

Producción del estudiante 5 respecto al quinto ítem.



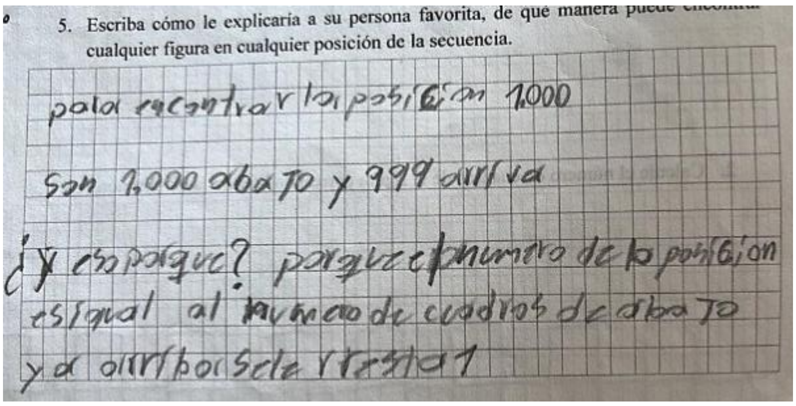
"Yo le explicaría a mi mamá así. Mamá es multiplicar la posición por dos y quitar 1"

En esta producción realizada por el estudiante 5, podemos notar que se expresa de manera verbal (escrita), de la forma genreal en la que se puede hallar cualwuier posición, no necesariamente, utilizando una manera simbolica.

Figura 18.

Producción del estudiante 13 a solicitud de quinto ítem.

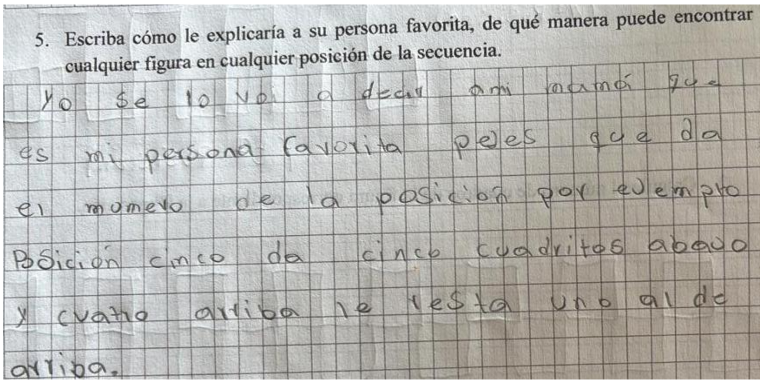
"Para encontrar la posición 1.000
Son 1.000 abajo y 999 arriba
¿Y eso por qué? Porque el número de la posición es igual al número de cuadros de abajo y a arriba se le resta 1



Podemos notar que el estudiante no solo esta relacionando el cambio de la secuencia respecto a lo imagen, si no como cambia dependiendo la posición. Ademas, presenta un ejemplo con una posición mayor.

***Figura 19*.**

Producción del estudiante 14 respecto al quinto ítem.



Yo se lo voy a decir a mi mamá que es mi persona favorita, pues que da el número de la posición por ejemplo posición cinco da cinco cuadritos abajo y cuatro cuadritos arriba le resta uno al de arriba.

El estudiante expresa sus ideas con su lenguaje natural, incluso para que su madre lo entienda, especificando a cuál fila de cuadros si a la de arriba o la de abajo se le debe restar uno.

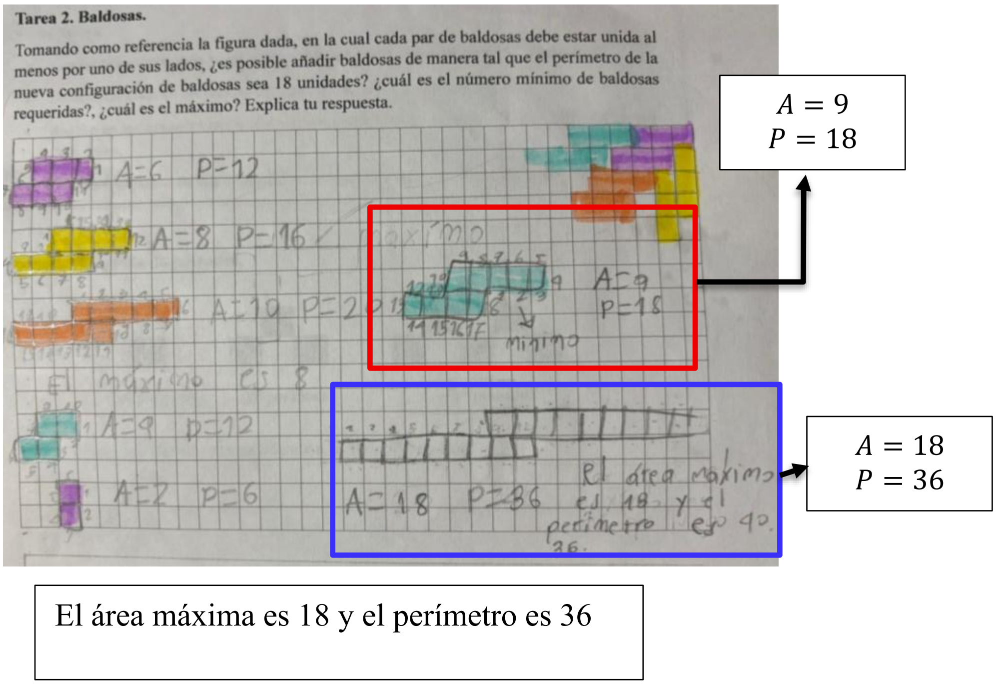
A partir de las respuestas dadas en la primera tarea, se evidencio una gran diversidad del uso de representaciones: algunos recurrieron al lenguaje natural, apoyándose de ejemplos con alguna posición de la secuencia; mientras hicieron uso de representación numérica, representaciones pictóricas y verbales, lo cual conlleva a una representación múltiple. Esto permitió identificar distintos sistemas de representaciones encontrados en esta tarea.

Tarea 2. Baldosas

En esta segunda tarea se presentó a los estudiantes una configuración de baldosas inicial, a partir de la cual debían añadir nuevas baldosas de manera que la nueva configuración de baldosas el perímetro fuese de 18 unidades. Además, se les solicitó determinar el número mínimo y el número máximo de baldosas requeridas.

Figura 20.

Producción presentada por el estudiante 7 al agregar baldosas.

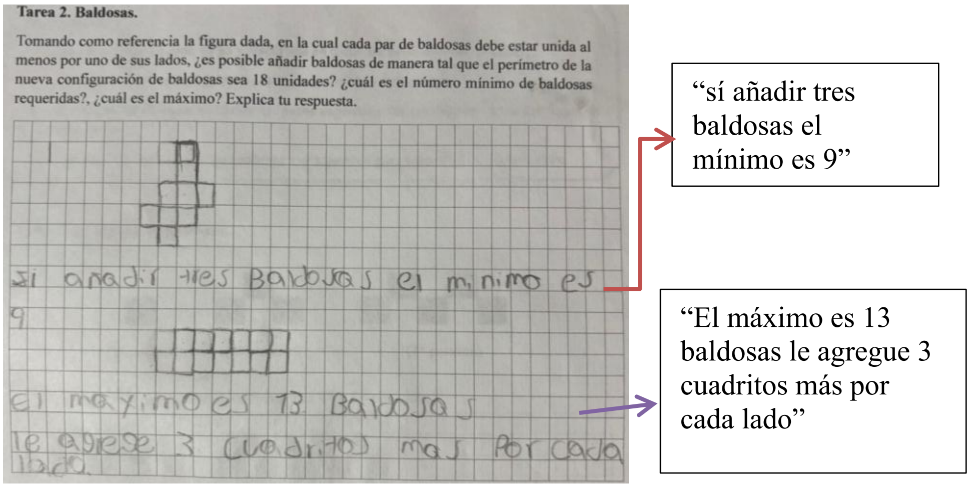


En la producción analizada se observa cómo se recurre a una combinación entre la representaciones pictóricas, simbólicas y verbales. A través de este procedimiento, logra identificar el número mínimo de baldosas, indicado en recuadro rojo, necesarias para alcanzar el perímetro solicitado. Sin embargo, al momento de establecer el máximo, no mantuvo la condición del perímetro 18 en las demás configuraciones, tal como puede verse en el recuadro azul (ver Figura 20).

También encontramos otras representaciones, los estudiantes añadieron baldosas de manera diferentes, pero aun así se cumplía las condiciones iniciales, como se muestra a continuación (ver Figura 21).

Figura 21.

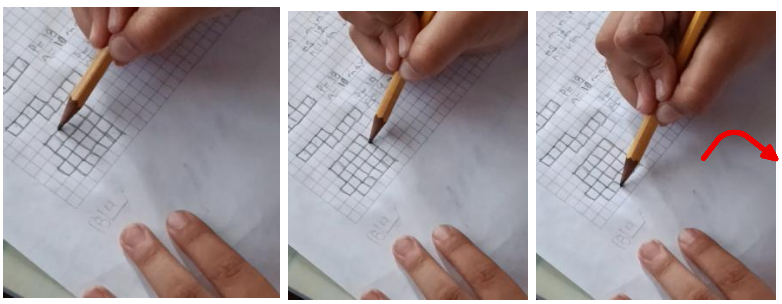
Producción a solicitud de la tarea, del mínimo y máximo de baldosas.



En este caso, el estudiante afirma que el mínimo de baldosas que se pueden añadir es tres, lo cual resulta correcto. Aunque el número máximo que la estudiante presenta que es 13 baldosas, es correcto que al añadir 13 baldosas se obtiene un perímetro de 18 unidades, pero no es el máximo de baldosas que se pueden añadir.

Figura 22.

Sistema gestual empleado por el estudiante 17, junto con la transcripción correspondiente.



E7: El máximo del perímetro es lo de afuera [Inicia a contar el perímetro] en esta se pasa, entonces debemos quitar una baldosa […] Listo el número máximo de baldosas es 14.

Podemos observar los signos deícticos mencionados por Saavedra (2025) que pueden ser espaciales, temporales y de modo, los cuales son complementadas como gestos o desplazamientos. En este caso podemos notar que el estudiante va contando y señalando con su lápiz el perímetro de la configuración creada.

A partir de las discusiones realizadas por cada grupo de trabajo se evidenciaron que cada vez aparecía un nuevo número de baldosas máximas que cumplía con la condición. Llegaron a la conclusión de que no se podía establecer este valor, pues era posible seguir añadiendo baldosas que no alteran el perímetro. Esto permitió que los estudiantes exploraran la relación entre área y perímetro, reconociendo que al aumentar el número de baldosas no necesariamente cambiaria su perímetro.

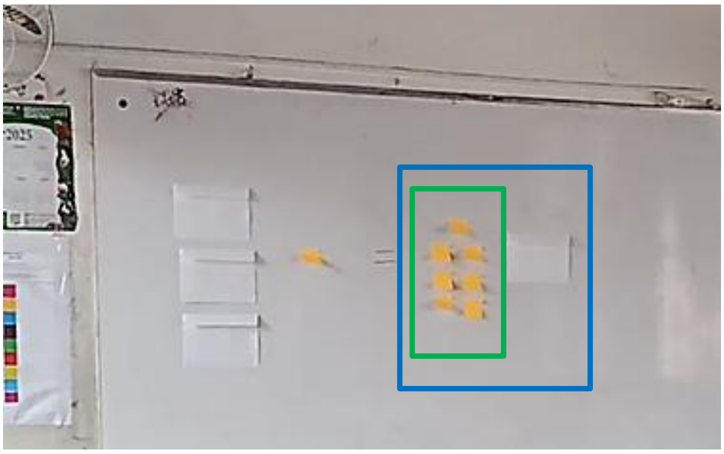
Estas producciones permitieron que los estudiantes indagaran sobre los términos de área y perímetro. Asimismo, se evidencio el uso de los sistemas de representación como el sistema pictórico, el sistema verbal y el sistema simbólico, los cuales fueron clave en el resultado presentado por los estudiantes.

Tarea 3. Problema de los sobres.

Esta tarea se desarrolló a partir de una representación pictórica haciendo uso de material concreto, la cual fue expuesta de manera general en el tablero del aula (Figura 23). El propósito inicial de esta era la discusión de manera grupal para encontrar posibles estrategias de solución a la tarea planteada.

Figura 23.

Presentación del problema de los sobres.



P: ¿Como van muchachos?

E6: Bien, ya tenemos dos formas.

E7: Primero la mía y luego la tuya […] En cada sobre hay tres, porque mire allá hay 7 [refiriéndose a un lado de la igualdad], entonces como en un lado hay tres sobre y en el otro hay uno y tenemos 7 tarjetas en un lado y una en el otro, entonces seria 3 más 7 es 10, entonces en ese sobre hay una tarjeta entonces en cada sobre debe haber 3 tarjetas ya que tres más tres más tres es 9 y una tarjeta en total serían 10 tarjetas entonces seria 3 tarjetas en cada sobre.

E6: Profesor sería 3, ya que tres por tres sería 9 y más uno sería 10, entonces acá [refriéndose al otro lado de la igualdad] hay 7 tarjetas y como en cada sobre hay 3 tarjetas entonces seria 10 en total en cada uno.

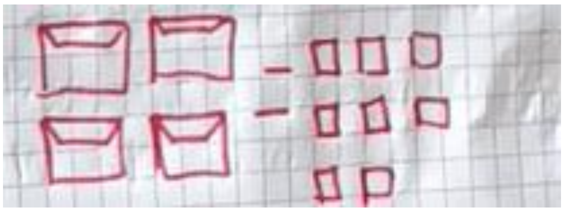
Figura 24.

Sistema gestual en la resolución de la tercera tarea.

En la solución presentada por los estudiantes podemos presenciar que se apoyaron de la representación pictórica para dar solución a la situación planteada. Asimismo, se evidencio un numero de resultados distintos, incluyendo una agrupación de sobre y fichas a cada lado de la igualdad (ver Figura 25).

Figura 25.

Producción del estudiante 13 agrupando sobres y fichas a cada lado de la igualdad.



Aunque maneja el intercambio de manera inconsistente con respecto a lo planteado inicialmente, mantiene una coherencia en las operaciones realizadas. Cuando supone que hay dos tarjetas en cada sobre, el presenta un argumento que sustenta su procedimiento, a pesar de que este altera la situación inicial, cabe aclarar que para la igualdad que el presenta se cumple.

A continuación, se presenta la transcripción de la conclusión dada por el estudiante.

> *E13:* Mateo le pasa el sobre a Alfredo y Alfredo le pasa la ficha a mateo, entonces sería que mateo tendría 8 fichas, Alfredo como tiene 4 sobres entonces en cada sobre hay 2 fichas, ya que 2 por 4 es 8, entonces tienen la misma cantidad de fichas.

El desarrollo de esta tarea se evidencio cómo los estudiantes recurren a los diversos tipos de representaciones como: la pictórica, verbal y gestual para dar sentido a lo planteado. Aunque algunos procedimientos presentados eran inconsistentes y la igualdad no se cumplía, su razonamiento muestra un proceso de construcción colectiva de estrategias para presentar un resultado.

Tarea 4. ¿Quién cuenta 20?

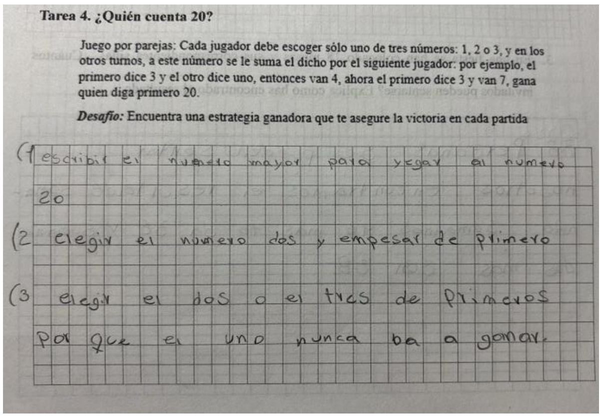
Esta tarea fue fundamental en el desarrollo de la intervención, debido a que los estudiantes además de identificar un patrón numérico dieron a conocer su rol competitivo para encontrar una estrategia ganadora. Al inicio se les dificultó entender a qué se hace referencia cuando se dice: "sumar el resultado de su oponente"; por lo cual se dio un ejemplo de manera general. Una de las estrategias presentadas por un grupo, se muestra a continuación:

> *E12:* profe ya descubrí una estrategia, si digo 1 y el contrincante dice 3 entonces yo gano si el comienza, porque él dice primero 19 y entonces yo diría veinte.
>
> *P:* muy bien esa sería una.
>
> *E12:* y si el contrincante dice 17 profe… entonces yo gano si tengo el tres.
>
> *P:* ¿Como seria?
>
> *E14:* haber … esto tu di 2 y yo digo 3.
>
> *E12 y E14 comienzan a jugar.*
>
> *E12*: 12.
>
> *E14*: 15.
>
> *E12*: 17.
>
> *E14*: 20, si ve profe entonces si yo digo el tres y el dos entonces gana el que primero diga 15. Y pierde el que dice 17.

Asimismo, se lograron evidenciar otras estrategias ganadoras en las producciones de los estudiantes que finalmente se verificaron. A continuación, se muestra algunas producciones escritas (ver Figura 26):

Figura 26.

Producciones presentadas por dos estudiantes a través del sistema verbal en busca de estrategias ganadoras.



Tarea 4. ¿Quién cuenta 20?

Juego por parejas: Cada jugador debe escoger sólo uno de tres números: 1, 2 o 3, y en los otros turnos, a este número se le suma el dicho por el siguiente jugador: por ejemplo, el primero dice 3 y el otro dice uno, entonces van 4, ahora el primero dice 3 y van 7, gana quien diga primero 20.

Desafío: Encuentra una estrategia ganadora que te asegure la victoria en cada partida

(1 escribir el numero mayor para yegar al numero 20

(2 elegir el número dos y empesar de primero

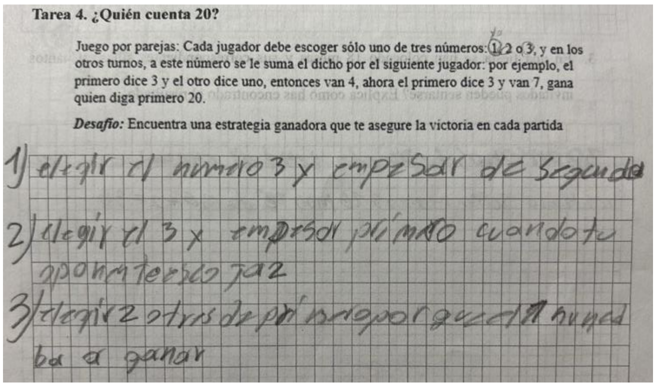
(3 elegir el dos o el tres de primeros por que el uno nunca ba a ganar.

a)

1) Escribir el número mayor para llegar al número 20
2) Elegir el numero dos y empezar de primero
3) Elegir el dos o el tres de primeros porque el uno nunca va a ganar

1) Elegir el número 3 y empezar de segundo.
2) Elegir el 3 y empezar primero cuando tu oponente escoja 2.
3) Elegir 2 o tres de primero porque el 1 nunca va a ganar.

b)



Tarea 4. ¿Quién cuenta 20?

Juego por parejas: Cada jugador debe escoger sólo uno de tres números: 1, 2 o 3, y en los otros turnos, a este número se le suma el dicho por el siguiente jugador: por ejemplo, el primero dice 3 y el otro dice uno, entonces van 4, ahora el primero dice 3 y van 7, gana quien diga primero 20.

Desafío: Encuentra una estrategia ganadora que te asegure la victoria en cada partida

Como se muestra en la figura 26 dentro de las producciones de los estudiantes se pueden identificar tres estrategias ganadoras distintas, en las cuales indican el número correspondiente al oponente. Asimismo, se puede observar cómo los estudiantes logran encontrar un patrón numérico que les permitió identificar que números los conduce a perder o a ganar.

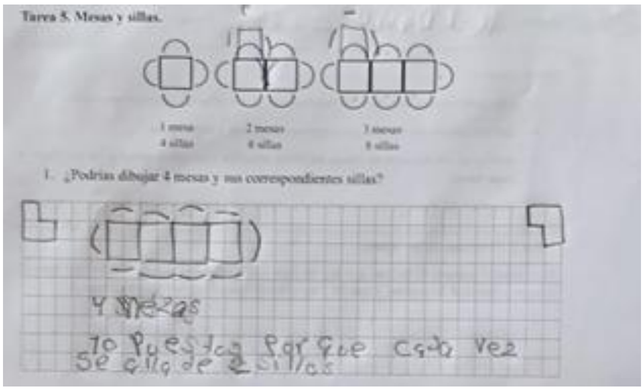
En conclusión, esta tarea permitió que los estudiantes fueran más allá del conteo, facilitó que determinaran estrategias ganadoras a partir de patrones numéricos, estas estrategias surgieron de la interacción grupal. Además, se evidencia el uso del sistema verbal, donde los estudiantes usan su lenguaje natural para argumentar y explicar sus resultados.

Tarea 5. Mesas y sillas

En esta tarea en los primeros ítems, los estudiantes no presentaron dificultades, para identificar el patrón. Sin embargo, se evidenció que una interpretación distinta del patrón como se muestra a continuación:

Figura 27.

Producción de algunos estudiantes sobre la secuencia.

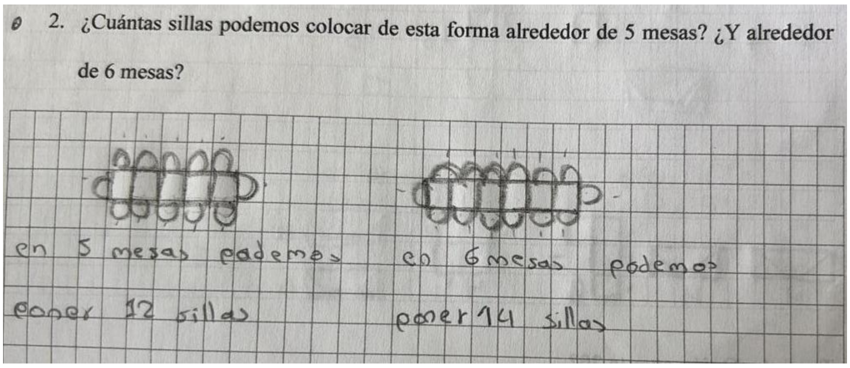


"4 mesas
10 puestos porque cada vez se allá de 2 sillas".

Como podemos observar (ver Figura 27), los estudiantes utilizaron una estrategia para poder comprender el problema. En la secuencia original, las mesas se agregan de manera horizontal, mientras ellos las agregaron de manera vertical como un apoyo para comprender, pues como resultado final, presentaron la secuencia de manera vertical.

Figura 28.

Producción a solicitud del segundo ítem.



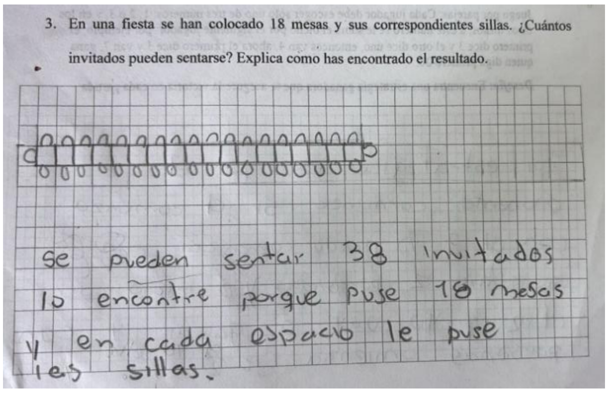
"En 5 mesas podemos poner 12 sillas".	"En 6 mesas podemos poner 14 sillas".

Para dar respuesta al número de sillas al alrededor de 5 y 6 mesas, los estudiantes fueron contando de dos en dos, donde cada mesa tenía dos sillas y al final se les agregaba las dos sillas de los costados.

En el tercer ítem, encontraron una formar general y más rápida para poder encontrar el número de invitados que se pueden sentar alrededor de 18 mesas. A pesar de que el objetivo principal era que los estudiantes explicaran de manera escrita algunos se apoyaron de la representación pictórica para solucionar lo que se planteó (ver Figura 29).

Figura 29.

Producción del tercer ítem, junto a la transcripción compartida.



"Se pueden sentar 38 invitados lo encontré porque puse 18 mesas y en cada espacio le puse las sillas".

E1: la relación es multiplicando por dos las mesas y sumando 2 sillas.

P: haber, intentémoslo con el de 18 mesas.

E2: 18 por 2 son 36

P: ¿le sumamos dos sillas, entonces cuantas sillas tendría?

E3: 38.

P: ¿entonces cuál sería la relación?

E2: Por cada mesa multiplicó por dos y le sumo dos sillas.

P: y si fuera como el punto cuatro que te dan la cantidad de sillas que necesitas, pero necesitas saber cuántas mesas, ¿entonces como lo harían?

E3: lo contrario.

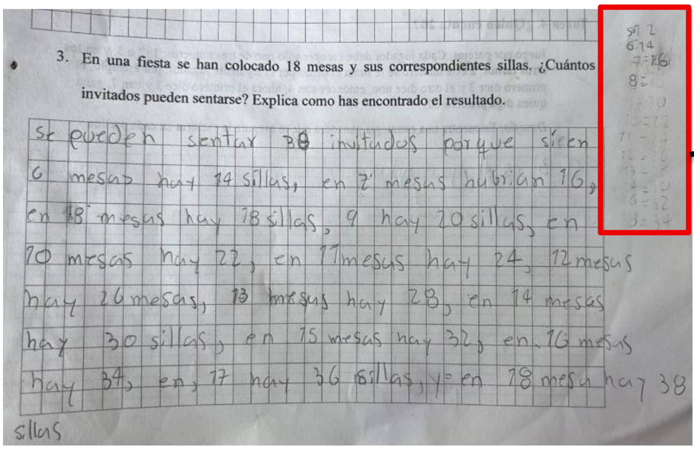
E1: Ah, se divide.

Asimismo, se presentó un resultado de manera escrita en el cual se evidencia un registro que depende del número de mesas y sillas.

Figura 30.

Producción escrita por parte de un estudiante.

Se pueden sentar 38 invitados porque sí en 6 mesas hay 14 sillas, en 7 mesas habrían 16, en 8 mesas hay 18 sillas, 9 hay 20 sillas, en 10 mesas hay 22, en 11 mesas hay 24, 12 mesas hay 26 mesas, 13 mesas hay 28, en 14 mesas hay 30 sillas, en 15 mesas hay 32, en 16 mesas hay 34, en 17 mesas hay 36 sillas ya en 18 mesas hay 38 sillas



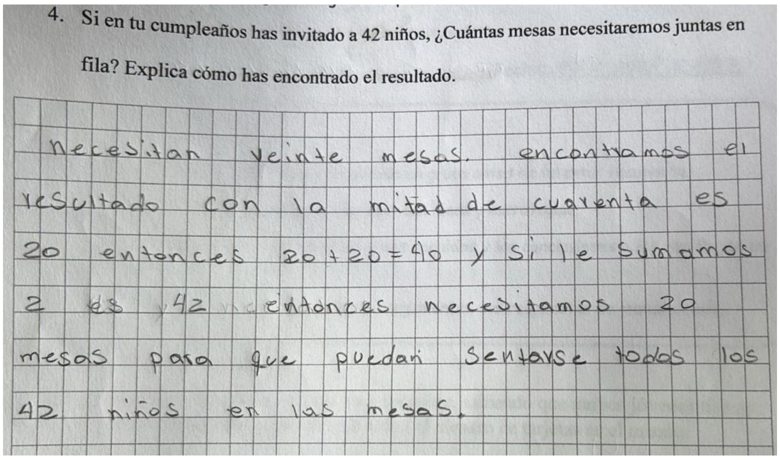
5=12
6=14
7=16
8=18
9=20
10=22
11=24
12=26
13=28
14=30
15=32
16=34

Incluso, en la parte derecha de la imagen podemos notar que el estudiante realizó un registro tabular de número de mesas y número de sillas.

En el ítem 4, se presentó un poco más de dificultad, debido a que se venía trabajando con los ítems anteriores, encontrar el número de sillas respecto al números de mesas, mientras que en este caso es, al contrario, se les plantea que cuantas mesas se necesitan para que se sienten 42niños. Se evidencio que los estudiantes notaron que si la relación fuese al revés debían dividir, una de las producciones realizadas por los estudiantes, se muestra a continuación (ver Figura 31):

Figura 31.

Producción escrita por un estudiante.



4. Si en tu cumpleaños has invitado a 42 niños, ¿Cuántas mesas necesitaremos juntas en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.

necesitan veinte mesas. encontramos el resultado con la mitad de cuarenta es 20 entonces 20+20=40 y si le sumamos 2 es 42 entonces necesitamos 20 mesas para que puedan sentarse todos los 42 niños en las mesas.

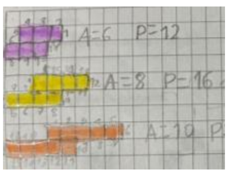
Necesitan veinte mesas encontradas el resultado con la mitad de cuarenta es 20 entonces 20+20 =40 y si le sumamos 2 es 42 entonces necesitamos 20 mesas para que puedan sentarse todos los 42 niños en las mesas

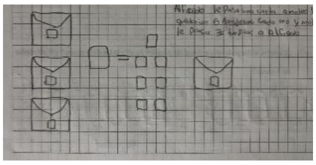
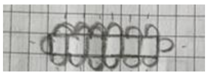
Finalmente, en el quinto ítem los estudiantes encontraron la relación entre mesas y sillas, concluyendo que para hallar la cantidad de sillas respecto al número de mesas se debía multiplicar por 2 el número de mesas y al final se sumaban dos. Mientras que si se quería hallar el número de mesas respecto al de silla (invitados) se debía dividir o hallar la mitad y sumarle dos, esto se evidencio desde el tercer ítem.

En esta tarea se evidencia que los resultados obtenidos por los estudiantes fue un proceso de trabajo colectivo donde cada integrante aportó y compartió ideas para poder llegar al resultado final. Asimismo, se presenció el uso de diversos sistemas de representaciones (ver tabla 4), aunque la mayoría de las respuestas se evidencio un mayor uso del sistema verbal, cabe destacar que el sistema pictórico, tabular, gestual fueron parte esencial para el razonamiento presentado.}

Tabla 4.

Sistema de representaciones utilizadas en cada tarea.

Tareas	Sistema de representación	Ejemplo de cómo se evidencia	Cómo se evidenció
Tarea 1: Búsqueda de patrones	Gestual	Señalamiento con el dedo, y rotación de manos.	Para el conteo de cuadros y la expresión “así sucesivamente”.
	Verbal (escritura y oral)	" [...] Pues tenemos que dibujar las otras posiciones, donde se le van sumando de a dos a cada una".	Por las producciones escritas y justificaciones de manera oral, como complemento.
	Pictórico		Uso grafico para la compresión de la secuencia.
	Numérico	$2 \times 2 = 4 - 1 = 3$	Relacionan el patrón con las operaciones aritméticas
Tarea 2: Baldosas	Gestual	Señalamiento con el lápiz.	Usado para contar y verificar el perímetro.
	Verbal (escritura y oral)	" Si añadí tres baldosas, el mínimo son 9".	Justificación con lenguaje natural (escrita).
	Simbólico	$A = 9, P = 18.$	Asignación de variables para el área y el perímetro.
	Pictórico		Apoyo de la nueva configuración al agregar baldosas a la original.

Tarea 3: Problema de los sobres	Pictórica		Apoyo para la compresión de la tarea.
	Múltiple	"Primero la mía y luego la tuya [...] En cada sobre hay tres, porque mire allá hay 7 [refiriéndose a un lado de la igualdad]"	El estudiante se apoyó tanto de gesto, cómo de su lenguaje, para explicar la tarea.
Tarea 4: ¿Quién cuenta 20?	Verbal (escrito y oral)	"y si el contrincante dice 17 profe... entonces yo gano si tengo el tres "	Por medio de las discusiones y pruebas realizadas para encontrar la estrategia ganadora, además del registro de estas.
Tarea 5	Pictórica		Apoyo para agregar encontrar la cantidad de sillas
	Verbal (escrita y oral)	"la relación es multiplicando por dos las mesas y sumando 2 sillas".	Justificación de manera oral y escrita, de la relación de mesas y sillas.
	Múltiple	"$20 + 20 = 40$ y si le sumamos dos es 42"	Uso del sistema verbal y numérico para complementar su justificación. Además del acompañamiento de los gestos.
	Numérica	$20 + 20 = 40$	Uso de las propiedades aritmética.
	Tabular	5=12 6=14 7=16 8=18 9=20 10=22 11=24 12=26	Registro del patrón numérico aumentando de a dos.

Nota. Se evidencia los sistemas de representación utilizados en cada tarea, acompañado de un ejemplo y el cómo se evidencio conforme a estas.

5.4. Fase IV: Análisis de datos.

El análisis de datos se realiza siguiendo un enfoque cualitativo, lo que permite una interpretación detallada de las diferentes formas de representación observadas. La teoría de la objetivación de Radford (2015) y Vergel (2020) sirve como referencia para entender los procesos mediante los cuales los estudiantes transforman sus ideas en conocimiento matemático, considerando el contexto cultural y social del aprendizaje.

Con el propósito de dar respuesta al objetivo de investigación — Identificar las distintas formas de representación que emplean los estudiantes de quinto grado de primaria al enfrentarse a tareas diseñadas para fomentar el pensamiento algebraico —, se analizaron los sistemas de representación presentes en las producciones realizadas por los estudiantes. Asimismo, las relaciones entre ellas y cómo estas fueron esenciales en la comprensión de las tareas planteadas.

A pesar de que todos los sistemas se presenciaron, cabe resaltar que uno de las más utilizados fue el sistema de representación pictórica, la cual promovió la visualización de patrones y estrategias empleadas por los estudiantes. Es importante señalar que la introducción del álgebra en edades tempranas debe realizarse mediante conexiones entre lo aritmético y lo algebraico (Vergel, 2018).

Asimismo, se identificaron diversos métodos para abordar las tareas planteadas, entre ellos: el conteo con sus dedos, señalamiento con el lápiz e incluso las representaciones pictóricas de los elementos propios de cada tarea (cuadros, sillas, sobres, mesas). En general, la representación pictórica que en algunos casos iba acompañada de la representación verbal y numérica, permitió mayor comprensión de las tareas. Además, el trabajo colectivo fue fundamental en la construcción de estrategias, ya que esta interacción permitió que cada participante aportará con ideas que apoyaron para dar solución. Estas representaciones, fueron esenciales para que los estudiantes llegaran a un tipo de generalización de las secuencias planteadas.

En la segunda tarea se evidenció que el uso del sistema de representación simbólico fue apoyo esencial para la comprensión de la relación entre el área y el perímetro. Mientras, el sistema de representación tabular no fue muy utilizado por los estudiantes; no obstante, en la quinta tarea se presentó un caso donde el estudiante se apoyó del registro para justificar el resultado obtenido (ver figura30).

En todas las tareas planteadas se pudo observar el uso del sistema de representación gestual y múltiple, como un apoyo para expresar sus ideas y justificaciones de manera natural. El sistema de representación múltiple se evidenció en todas las tareas debido a que los estudiantes no solo se centraron en una representación para justificar sus resultados sino los relacionaban entre sí. Podemos afirmar que le proceso representación fue esencial para la comprensión de las tareas. Sin embargo, los procesos matemáticos van de la mano (NCTM, 2003) por eso mismo, es importante resaltar los procesos de comunicación y razonamiento usados por los estudiantes para argumentar cada resultado obtenido.

En el análisis se evidenció que los sistemas de representación fueron relevantes para la comprensión y resolución de las tareas, pues permiten organizar, comunicar y justificar sus ideas. La relación entre los sistemas favoreció los procesos de razonamiento algebraico temprano, en donde fue fundamental el trabajo colectivo y las discusiones para la objetivación de sus conocimientos matemáticos. Estos resultados reafirman la necesidad de introducir el álgebra en la educación básica primaria relacionándolo con lo aritmético.

6. Conclusiones

En esta investigación se logran identificar distintas estrategias empleadas por los estudiantes, donde fue fundamental el uso de los sistemas de representación, para evidenciar y promover el desarrollo de pensamiento algebraico. Cada una de estas conexiones fueron fundamentales para potenciar el desarrollo de este pensamiento (Vergel y Rojas, 2018). Además, el álgebra en las edades tempranas es ignorada, donde únicamente se le reconoce como algo "simbólico" (Radford, 2010).

Asimismo, los hallazgos muestran que los estudiantes utilizaron diferentes sistemas de representación: verbal, pictórico, numérico, tabular, gestual y simbólico, lo cual facilitó la compresión de las tareas y promovió el trabajo colaborativo. Radford (2010a), señala que el pensamiento algebraico no se debe reducir a lo simbólico, sino que también se puede evidenciar a partir de gestos, lenguaje natural y acciones corporales. En este sentido, se observó que las representaciones más utilizadas por los estudiantes fueron la pictórica y la gestual, lo cual nos permite cuestionar y superar el concepto de que el álgebra se limita a lo simbólico. La emergencia de estas formas de representación para compartir ideas matemáticas debe ser promovida por los profesores que enseñan matemáticas. De la misma manera otras formas como la tabular, debe aparecer como parte de las estrategias para abordar una tarea. En este caso es labor fundamental del profesor que enseña matemáticas, diversificar las formas de representación y promover su conexión al abordar tareas matemáticas.

Es importante resaltar el trabajo colectivo, ya que éste permitió relacionar los aportes individuales de cada integrante, para alcanzar soluciones compartidas. Como lo afirma Radford (2010a), el pensamiento algebraico se fomenta por medio de una actividad reflexiva, percepción, movimientos, gestos o lenguaje natural, aspectos que estuvieron presentes en las producciones desarrolladas por los estudiantes. Cada tarea permitió al estudiante utilizar cada representación acorde a sus necesidades, también permitió que justificaran, refutaran y comunicaran sus ideas. Como menciona Rico (2009) “las representaciones se han considerado parte esencial del aparato conceptual necesario para analizar los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas” (p.4).

También, los procesos de comunicación y razonamiento son fundamentales para promover el pensamiento algebraico, dando esto validez a los procesos y producciones dadas por el estudiante. Estas conexiones fortalecen los argumentos y justificaciones de cada proceso realizado. El proceso de representación se consolida como un eje transversal, el cual permite expresar múltiples formas e ideas matemáticas. Estos procesos son el reflejo de la cultura matemática que la sociedad necesita de las practicas educativas anteriores sus valores y expectativas comparten el público en general (NCTM, 2003).

El MEN (2003) menciona que en este nivel educativo en el pensamiento algebraico del estudiante debería permitirle predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica. Los hallazgos presentados en esta investigación muestran que, mediante el uso de las diferentes representaciones los estudiantes logran identificar y predecir secuencias presentadas en las tareas, esto evidencia la pertinencia de estas en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Asimismo, estas tareas están enfocadas en determinar cómo el uso de diversas representaciones favorece el desarrollo de dicho pensamiento, sin embargo, nos encontramos que incluso estas tareas pueden encaminar a los estudiantes hacia la exploración de conceptos más avanzados del álgebra.

En las tareas implementadas, los estudiantes a través de múltiples sistemas semióticos lograron visibilizar las regularidades de las secuencias (objetivación). A la vez, cada grupo produjo sus propias estrategias al mismo tiempo que las validaban por medio de las discusiones grupales y generales (subjetivación). De esta manera, se confirma uno de los enfoques clave de la TO que reconoce el valor del trabajo colectivo, incluyendo el Saber, el Aprendizaje, los procesos de objetivación subjetivación, la labor conjunta y la ética (Radford, 2020b)

En efecto, el diseño y rediseño de tareas es una herramienta pedagógica esencial para los docentes, debido a que favorecen al desarrollo del pensamiento algebraico, impulsando los procesos matemáticos y da un acercamiento al razonamiento de este. Asimismo, es importante tener en cuenta los tres elementos que nos menciona Radford (2023) las condiciones generales, consideraciones relativas a los problemas matemáticos, y las formas de colaboración humana.

Inicialmente se esperaba encontrar con diversas dificultades relacionas a la poca relevancia que se le da al uso de las representaciones como método de solución. Sin embargo, se evidenció que fue relevante para dar solución a las tareas. Asimismo, se encontraron dificultades de comprensión lectora, de errores en procedimientos de las propiedades básicas.

Las tareas diseñadas, no solo favorecen el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, sino además se puede encaminar al pensamiento funcional que como nos menciona Pinto (2016) es un tipo de pensamiento algébrico que se centra en la relación entre dos variables que co -varían. En este orden de ideas, esta investigación no solo evidenció el apoyo del uso de los sistemas de representación, sino que también abre la posibilidad de explorar el pensamiento algebraico de manera más profunda, particularmente, el pensamiento funcional, que además ha recibido poca atención en los primeros niveles académicos (Pinto, 2016)

Finalmente, esta investigación no solo aportó en la comprensión del pensamiento algebraico temprano apoyándose del sistema de representación, sino que nos permite como docentes en formación señalar la importancia del diseño de tareas que involucren el desarrollo conceptual de las matemáticas, la compresión y el trabajo colaborativo, relacionando el álgebra no solo como lo simbólico y abstracto de la matemática, sino que se puede construir a través de los diversos sistemas de representaciones. Evidenciamos que, aun en los niveles iniciales es posibles encaminar a los estudiantes hacia el desarrollo de conceptos algebraicos más avanzados, lo cual consiste en un buen diseño de planeaciones y tareas que involucren estos conceptos; todo esto como resultado de la planeación del profesor investigador que concibe su aula de clase como un laboratorio.

7. Referencias

Alsina, Á., Pincheira, N. & Delgado-Rebolledo, R. The professional practice of designing tasks: how do pre-service early childhood teachers promote mathematical processes in early algebra? *ZDM Mathematics Education* (2024). https://doi.org/10.1007/s11858-024-01636-1

Blanton, M., Schifter, D., Inge, V., Lofgren, P., Willis, C., Davis, F. y Confrey, J. (2007). Gateway to a technological future. *United States of America: The Mathematical Association of America*, 7-14.

Butto Zarzar, C., & Rojano Ceballos, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática, 22*(3), 55-86.

Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011) Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje, 34*(4), 409-425.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante, España: SEIEM.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistema de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 361-371.

Angarita, L. M. A. (2024). *Pensamiento funcional en básica primaria: Generalización y sistemas de representación*. Universidad Industrial de Santander.

Dougherty, B. (2008). Measure up: a quantitative view of early algebra. Kaput, J.J., Carraher, D.W., & Blanton, M.L. (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (389-412). Routledge.

García, F. J. (2019). Introducción a 'Diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos' (Universidad de Jaén (Spain), Ed.)

Glasersfeld, E. von. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning* (Reprinted). Londres, Reino Unido: Falmer Press.

Goldin, G. y Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco y F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook* (pp. 1-23). Reston, VA: NCTM.

Guevara Alban, G. P., Verdesoto Arguello, A. E., & Castro Molina, N. E. (2020). Metodologías de investigación educativa (descriptivas, experimentales, participativas, y de investigación-acción). *RECIMUNDO*, *4*(3), 163-173.

https://doi.org/10.26820/recimundo/4.(3).julio.2020.163-173

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (2017). Algebra in the early grades. En *Routledge eBooks*. https://doi.org/10.4324/9781315097435

Kaput, J.J., Carraher, D.W., & Blanton, M.L. (Eds.). (2008). Algebra in the Early Grades (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315097435

Merino, E., Cañada, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares del área de Matemáticas.* Bogotá: MEN. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-89869.html

Ministerio de Educación Nacional (2003). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-116042.html

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática* [Traducción de Manuel Fernández Reyes]. Sevilla: Sociedad Andaluza para la Educación Matemática “THALES”.

Pinto, E. (2016). *Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria.* (Tesis de maestría), Universidad de Granada, Granada, España.

Platón (1988). República. Madrid, España: Gredos.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*, *22*(2), 14-23.

Radford, L. (2006). *Elementos de una teoría cultural del aprendizaje escolar: la objetivación*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(3), 103-129.

Radford, L. (2008). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational studies in mathematics*, *70*, 111-126.

Radford, L. (2010a) Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective, Research in Mathematics Education, 12:1, 1-19, https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación (R. L. de Etnomatemática 7(2) 132-150., Ed.).

Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática*, *8*(18).

Radford, L. (2020a). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación.

Radford, L. (2020b). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática*, 15-42.

Radford, L. (2023). La teoría de la objetivación (Universidad de los Andes, Facultad de

Educación UED-Centro de investigación y formación en Educación Matemática, Ed.).

Radford, L., & Empey, H. (2007). Culture, knowledge and the self: Mathematics and the formation of new social sensibilities in the Renaissance and Medieval Islam. Revista Brasileira de História da Matemática. Festschrift Ubiratan D'Ambrosio, 231-254.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representaciones y comprensión en la Investigación en Educación Matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Roth, W.-M. (2017). The mathematics of mathematics. Rotterdam: Sense Publisher.

Saavedra, I. (2025). Procesos de objetivación emergentes de la actividad con generalización de patrones: Una experiencia con universitarios indígenas. https://noesis.uis.edu.co/handle/20.500.14071/45111

Schoenfeld, A. (2008). Early Algebra as Mathematical Sense Making. Kaput, J.J., Carraher, D.W., & Blanton, M.L. (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (479-510). Routledge.

Spinoza, B. (1989). Ethics Including the Improvement of the Understanding. (R. Elwes, Trans.). Buffalo: Prometheus.

Torres, M. (2022). Generalización, estructuras y representaciones de estudiantes de segundo de educación primaria desde un enfoque funcional del early algebra. (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vergel, R. (2015). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (68), 9-17.

Vergel, R. (2016). Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria (Tesis doctoral). *Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Recuperado de https://doi. org/10.14483/9789588972244*.

Vergel, R., y Rojas, P. (2018). Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula. *Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas*.

Vergel, R., González, L., y Miranda, I. (2020). La relación de dependencia entre variables: Un análisis desde la teoría de la objetivación. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*, *5*(2), 67-81.