

**INTERPRETACIÓN DE SOLUCIONES ESTÁTICAS
DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN EN EL VACÍO
EN TÉRMINOS DE MODELOS DE DISCOS
CONTRA-ROTANTES.**

OMAR ALBERTO ESPITIA CASTELLANOS

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA**

2004

**INTERPRETACIÓN DE SOLUCIONES ESTÁTICAS
DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN EN EL VACÍO
EN TÉRMINOS DE MODELOS DE DISCOS
CONTRA-ROTANTES**

OMAR ALBERTO ESPITIA CASTELLANOS

Trabajo de Investigación para optar al título de Magister en Física

Director:

GUILLERMO A. GONZÁLEZ V., Ph. D.

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA**

2004

Agradecimientos

Agradezco la valiosa colaboración, que en calidad de becario suyo, me fue concedida por la Vicerrectoría Académica, Universidad Industrial de Santander.

Resumen

El estudio de soluciones axialmente simétricas de las Ecuaciones de Einstein correspondientes a configuraciones discoidales de materia que tienen una gran historia. Estas fueron estudiadas primero por Bonnor y Sackfield obteniendo discos estáticos con menos presión, y por Morgan y Morgan, obteniendo discos estáticos con y sin presión radial. En conexión con el colapso gravitacional, los discos fueron estudiados en principio por Chamorro, Gregory y Stewart. En años pasados, discos delgados con tensión radial, campos magnéticos y campos eléctricos y magnéticos han sido también estudiados. Varias clases de soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein correspondientes a discos delgados estáticos y estacionarios han sido obtenidas por diferentes autores, con o sin presión radial.

Se presenta un estudio detallado del Modelo de Contra-Rotación (CRM) para discos delgados estáticos, axialmente simétricos, generales con presión radial diferente de cero. Se obtiene una restricción general sobre las velocidades tangenciales de contra-rotación, necesaria para expresar el tensor de momentum-energía superficial del disco como la superposición de dos flúidos perfectos contra-rotantes. Igualmente se obtienen expresiones para la densidad de energía y la presión de los flúidos contra-rotantes.

Se muestra que, en general, no es posible considerar que los dos flúidos contra-rotantes circulan a lo largo de geodésicas ni considerar las dos veloci-

dades tangenciales de contra-rotación como iguales y opuestas. Se estudia una familia simple de discos la cual admite algunos CRM con velocidades tangenciales de contra-rotación bien definidas y estables con respecto a perturbaciones radiales.

Abstract

The study of axially symmetric solutions of Einstein field equations corresponding to disklike configurations of matter has a long history. These were first studied by Bonnor and Sackfield , obtaining pressureless static disks, and by Morgan and Morgan, obtaining static disks with and without radial pressure . In connection with gravitational collapse, disks were first studied by Chamorro, Gregory and Stewart. In the last years, disks models with radial tension, magnetic fields and magnetic and electric fields have been also studied. Several classes of exact solutions of the Einstein field equations corresponding to static and stationary thin disks have been obtained by different authors, with or without radial pressure.

A detailed study of the Counter-Rotating Model (CRM) for generic finite static axially symmetric thin disks with nonzero radial pressure is presented. A general constraint over the counter-rotating tangential velocities, needed to cast the surface energy-momentum tensor of the disk as the superposition of two counter-rotating perfect fluids, and expressions for the energy density and pressure of the counter-rotating fluids are obtained.

We show that, in general, it is not possible to take the two counter-rotating fluids as circulating along geodesics neither take the two counter-rotating tangential velocities as equal and opposite. A simple family of disks is studied that

admits some CRM with well defined counter-rotating tangential velocities and stable against radial perturbations.

Tabla De Contenido

Introducción	1
1. Modelos relativistas de discos	4
1.1. Introducción	4
1.2. Distribuciones tensoriales	5
1.3. Ecuaciones de Einstein para cascarones de materia	8
1.4. Discos delgados axialmente simétricos	11
2. El modelo de contra-rotación	15
2.1. Introducción	15
2.2. Proyecciones sobre la tetradra	16
2.3. El tensor de momentum - energía	19
2.4. Velocidades de contra - rotación	22
3. Discos contra - rotantes con presión radial	27
3.1. Introducción	27
3.2. Solución general con presión radial	28
3.3. Una familia simple de discos	32
3.3.1. Propiedades de la familia de discos	33
3.3.2. Modelos de contra - rotación correspondientes	39

4. Discusión de resultados	44
Bibliografía	46

Lista de Figuras

3.1. Densidad de energía para discos con $\mu = 1,5$	36
3.2. Densidad de energía para discos con $\mu = 5,5$	36
3.3. Presión radial para discos con $\mu = 1,5$	37
3.4. Presión radial para discos con $\mu = 5,5$	37
3.5. Presión azimutal para discos con $\mu = 1,5$	38
3.6. Presión azimutal para discos con $\mu = 5,5$	38
3.7. Velocidad de contra-rotación para discos con $\mu = 0,5$	40
3.8. Velocidad de contra-rotación para discos con $\alpha = 5$	40
3.9. Momentum angular específico para discos con $\mu = 0,5$	42
3.10. Momentum angular específico para discos con $\alpha = 5$	42
3.11. Gráficas de $\sigma_+ + \sigma_-$ para discos con $\alpha = 5$	43
3.12. Gráficas de $\sigma_{\pm} + p_{\pm}$ para discos con $\alpha = 5$	43

Introducción

El estudio de soluciones axialmente simétricas de las Ecuaciones de Einstein correspondientes a configuraciones discoidales de materia tienen una larga historia. Estas fueron estudiadas primero por Bonnor y Sackfield [1], obteniendo discos estáticos libres de presión, y por Morgan y Morgan, obteniendo discos estáticos con y sin presión radial [2, 3], mientras que en conexión con el colapso gravitacional, los discos fueron estudiados inicialmente por Chamorro, Gregory y Stewart [4]. En años pasados, discos delgados con tensión radial [5], campos magnéticos [6] y campos eléctricos y magnéticos [7] han sido también estudiados. Varias clases de soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein correspondientes a discos delgados estáticos [8 - 15] y estacionarios [16 - 18] han sido obtenidas por diferentes autores, con o sin presión radial.

En todos los casos anteriores, los discos son obtenidos usando un método tipo “problema inverso”, llamado por Synge el “*método - g*” [19]. El método trabaja así: se toma una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, en la cuál hay una discontinuidad en las derivadas del tensor métrico sobre el plano del disco, y el tensor de momentum-energía es obtenido de las ecuaciones de Einstein. Las propiedades físicas de la distribución de materia son después estudiadas mediante un análisis del tensor de momentum-energía superficial así obtenido. Por otro lado, un método tipo “problema directo”, llamado por

Synge el “*método - T*”, también es usado por otros autores [20 - 25] tomando un tensor de momentum-energía superficial dado, correspondiente a discos de polvo contra-rotantes, y resolviendo las ecuaciones de Einstein en la región de materia. La solución interna es luego usada para obtener condiciones de frontera sobre las ecuaciones de campo en el vacío en la región externa.

Como se puede ver, mediante el método tipo “problema inverso” no sólo se puede obtener fácilmente discos delgados con tensores de momentum-energía más generales sino también usar esta construcción para hacer interpretaciones físicas de algunas soluciones conocidas de las ecuaciones de Einstein en el vacío, en el sentido de que los discos delgados pueden actuar como fuentes exactas para métricas espacio-temporales dadas por soluciones en el vacío. Ahora bien, en el caso de discos estáticos sin presión radial, hay dos interpretaciones comunes: se puede suponer la existencia de esfuerzos tangenciales o suponer que las partículas sobre el disco se mueven bajo la acción de su propio campo gravitacional de tal manera que algunas partículas se muevan en el sentido de las manecillas del reloj y otras en sentido contrario. Esta última interpretación, el “Modelo de Contra-Rotación” (CRM), se emplea frecuentemente dado que puede ser utilizado para simular efectos rotacionales reales. Aunque esta interpretación puede considerarse como un artificio teórico, existen evidencias observacionales de discos constituidos por corrientes de materia rotante y contra-rotante [26, 27].

Usualmente se ha considerado que el Modelo de Contra-Rotación sólo se puede aplicar cuando no existe presión radial y el esfuerzo azimutal es positivo (presión). Estas condiciones, sin embargo, son muy restrictivas y, en algunos casos, se pueden tener discos que sólo las satisfacen en una región parcial. Así, el Modelo de Contra -Rotación será válido sólo como una interpretación parcial de los discos correspondientes. También, comunmente se considera que los dos

fluidos contra-rotantes circulan a lo largo de geodésicas. En este trabajo se mostrará que esto no es necesario y que sólo se puede hacer si la presión radial es constante. Otra suposición común es considerar que el Modelo de Contra-Rotación representa dos fluidos que circulan en direcciones opuestas con la misma velocidad tangencial. Como se mostrará en este trabajo, en general los dos fluidos circulan con diferentes velocidades; aún más, en algunos casos no es posible obtener un Modelo de Contra-Rotación si se toman las dos velocidades tangenciales como iguales y opuestas.

El objetivo principal de este trabajo es un estudio detallado del Modelo de Contra-Rotación para discos delgados estáticos axialmente simétricos, de radio finito y con presión radial diferente de cero. En el capítulo 1 se presentará un resumen del procedimiento para obtener estas soluciones de discos delgados y obtener el tensor de momentum-energía superficial. En el siguiente capítulo, capítulo 2, se considera el Modelo de Contra-Rotación para los discos. Se encuentra una restricción general sobre las velocidades tangenciales contra-rotantes necesaria para expresar el tensor de momentum-energía superficial como la superposición de dos fluidos perfectos contra-rotantes. Se encuentran también las expresiones para la densidad de energía y la presión de los fluidos contra-rotantes. En el capítulo 3, se considera una familia de discos con algunos modelos de contra-rotación bien definidos y estables con respecto a perturbaciones radiales. Los Modelos de Contra-Rotación obtenidos concuerdan con la condición de energía fuerte, pero hay regiones del disco con densidad de energía negativa.

Capítulo 1

Modelos relativistas de discos

1.1. Introducción

La construcción de modelos de discos delgados en relatividad general se puede hacer tomando como punto de partida soluciones axialmente simétricas a las ecuaciones de Einstein en el vacío e introduciendo posteriormente una discontinuidad finita en las primeras derivadas del tensor métrico a través del plano $z=0$. Dicha discontinuidad puede obtenerse reflejando la solución dada a través del plano. La discontinuidad en las primeras derivadas del tensor métrico puede representarse mediante una función de Heaviside de tal forma que, dado que el tensor de curvatura es lineal en las segundas derivadas del tensor métrico y cuadrático en las primeras derivadas, el tensor de curvatura contendrá términos proporcionales a funciones delta de Dirac con soporte en el plano $z=0$.

En este capítulo se presenta, con base en la referencia [48], un breve resumen del tratamiento de modelos de discos delgados en relatividad general. El formalismo necesario para el tratamiento de campos tensoriales como distribuciones se presenta brevemente en la sección 1.2. En la sección 1.3 dicho

formalismo se aplica al caso en que existe un cascaron delgado de materia en el espacio-tiempo M , de tal forma que las primeras derivadas del tensor métrico poseen una discontinuidad finita a través de una hipersuperficie Σ . Restringiendo el formalismo anterior al caso de un disco delgado axialmente simétrico, en la sección 1.4 se obtiene la expresión general para el tensor de momentum-energía superficial del disco.

1.2. Distribuciones tensoriales

Sean T, U dos campos tensoriales definidos sobre un espacio-tiempo M , y (T, U) su producto escalar en el punto $x \in M$. Sea $D(M)$ el espacio de campos tensoriales con soporte compacto y una clase de diferenciabilidad determinada. Una distribución tensorial T es una función lineal sobre $D(M)$ definida como [42]

$$\langle T, U \rangle = \int_M (T, U) \sqrt{-g} d^4x \quad (1.1)$$

donde $U \in D(M)$ y T es un campo tensorial localmente integrable.

Sea Σ una hipersuperficie en M descrita por la ecuación

$$\phi(x^a) = 0, \quad (1.2)$$

donde ϕ es una función suave de las coordenadas x^a , y por el vector normal

$$\eta_a = \phi_{,a} \quad (1.3)$$

donde $(\)_{,a} = \partial/\partial x^a$. La hipersuperficie Σ divide el espacio-tiempo M en dos partes $M^+ = \{x^a : \phi > 0\}$ y $M^- = \{x^a : \phi < 0\}$, de tal forma que se puede introducir la función θ de Heaviside, definida como

$$\theta(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi > 0 \\ \frac{1}{2}, & \phi = 0 \\ 0, & \phi < 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

y tal que

$$\theta_{,a} = n_a \delta(\phi), \quad (1.5)$$

donde $\delta(\phi)$ es la función delta de Dirac con soporte sobre la hipersuperficie Σ . Así, para toda función F con soporte compacto

$$\int_M F \delta(\phi) \sqrt{-g} d^4x = \int_\Sigma F dV, \quad (1.6)$$

donde dV es un elemento de volumen invariante introducido sobre la hipersuperficie Σ .

De la definición de θ se tiene que, para todo campo tensorial $U(x)$ definido sobre M [43, 44],

$$\begin{aligned} \langle \theta(1 - \theta), U(x) \rangle &= \int_M U(x) \theta(1 - \theta) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{M^+} U(x) (1 - \theta) \sqrt{-g} d^4x \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \theta^2, U(x) \rangle &= \int_M U(x) \theta^2 \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{M^+} U(x) \theta \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{M^+} U(x) \sqrt{-g} d^4x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (1 - \theta)^2, U(x) \rangle &= \int_M U(x) (1 - \theta)^2 \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{M^-} U(x) (1 - \theta) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{M^-} U(x) \sqrt{-g} d^4x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \theta \delta(\phi), U(x) \rangle &= \int_M U(x) \theta \delta(\phi) \sqrt{-g} d^4x \\
&= U(x) \theta|_{\Sigma} \\
&= \frac{1}{2} U(x)|_{\Sigma}, \\
\langle (1 - \theta) \delta(\phi), U(x) \rangle &= \int_M U(x) (1 - \theta) \delta(\phi) \sqrt{-g} d^4x \\
&= U(x) (1 - \theta)|_{\Sigma} \\
&= \frac{1}{2} U(x)|_{\Sigma},
\end{aligned}$$

lo que prueba las identidades

$$\begin{aligned}
\theta(1 - \theta) &= 0, \\
\theta^2 &= \theta, \\
(1 - \theta)^2 &= (1 - \theta),
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$(1 - \theta) \delta(\phi) = \theta \delta(\phi) = \frac{1}{2} \delta(\phi),$$

en el sentido de las distribuciones.

Si T es un campo tensorial definido en M tal que T y sus derivadas poseen discontinuidades finitas a través de Σ , se pueden definir distribuciones en términos de T en la forma:

$$(T)^D = T^+ \theta + T^- (1 - \theta), \tag{1.8}$$

$$(T_{,a})^D = T_{,a}^+ \theta + T_{,a}^- (1 - \theta), \tag{1.9}$$

donde los índices \pm sobre el campo tensorial lo restringen a las regiones M^\pm , respectivamente. De esta forma, $T = T^+$ en M^+ , $T = T^-$ en M^- y $T = T_\Sigma = \frac{1}{2}(T^+ + T^-)$ en Σ . Usando las identidades (1.7) se puede probar fácilmente que

$$(T)^D{}_{,a} = (T_{,a})^D + [T] n_a \delta(\phi), \quad (1.10)$$

$$(TU)^D = (T)^D(U)^D, \quad (1.11)$$

$$[TU] = U_\Sigma[T] + [U]T_\Sigma, \quad (1.12)$$

donde $[T]$ es el salto de T a través de Σ , definido como

$$[T] = T^+|_\Sigma - T^-|_\Sigma, \quad (1.13)$$

el cual mide la discontinuidad de T a través de Σ .

1.3. Ecuaciones de Einstein para cascarones de materia

Vamos a formular las ecuaciones de Einstein para el caso en que existe un cascarón de materia en el espacio-tiempo M , de tal forma que las primeras derivadas del tensor métrico poseen una discontinuidad finita a través de una hipersuperficie Σ . Vamos a suponer que el tensor métrico g_{ab} es continuo a través de Σ , esto es

$$[g_{ab}] = g_{ab}^+|_\Sigma - g_{ab}^-|_\Sigma = 0, \quad (1.14)$$

de modo que, en la vecindad de Σ , se puede escribir

$$g_{ab}^\pm = g_{ab}^0 + \phi g'_{ab}^\pm + \frac{1}{2} \phi^2 g''_{ab}^\pm + \dots, \quad (1.15)$$

donde la prima denota la derivada parcial respecto de ϕ .

Usando la continuidad de g_{ab} , se puede escribir

$$g_{ab} = (g_{ab})^D, \quad (1.16a)$$

$$g_{ab,c} = (g_{ab,c})^D, \quad (1.16b)$$

$$\Gamma_{bc}^a = (\Gamma_{bc}^a)^D, \quad (1.16c)$$

$$\Gamma_{bc,d}^a = (\Gamma_{bc,d}^a)^D + [\Gamma_{bc}^a] n_d \delta(\phi), \quad (1.16d)$$

donde

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ae} (g_{eb,c} + g_{ce,b} - g_{bc,e}), \quad (1.17)$$

son los símbolos de Christoffel.

Usando los resultados anteriores en la definición del tensor de curvatura de Riemann,

$$R_{bcd}^a = \Gamma_{bd,c}^a - \Gamma_{bc,d}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a, \quad (1.18)$$

y suponiendo que el tensor métrico g_{ab} es, por lo menos, de clase C^3 en las regiones M^\pm , se obtiene para el tensor de Riemann la expresión [45]

$$R_{bcd}^a = (R_{bcd}^a)^D + H_{bcd}^a \delta(\phi), \quad (1.19)$$

donde

$$H_{bcd}^a = [\Gamma_{bd}^a] n_c - [\Gamma_{bc}^a] n_d, \quad (1.20)$$

y los $(R_{bcd}^a)^\pm$ son los tensores de Riemann usuales definidos en M^\pm .

Las discontinuidades en las primeras derivadas del tensor métrico pueden ser obtenidas de (1.15) y están caracterizadas por el tensor b_{ab} , definido a través de las relaciones

$$[g_{ab,c}] = b_{ab} n_c, \quad (1.21)$$

de tal forma que

$$[\Gamma_{bc}^a] = \frac{1}{2} (b_b^a n_c + b_c^a n_b - g^{ae} b_{bc} n_e), \quad (1.22a)$$

$$H_{bcd}^a = \frac{1}{2} (b_d^a n_b n_c - b_c^a n_b n_d + b_{bc} n^a n_d - b_{bd} n^a n_c), \quad (1.22b)$$

donde todas las cantidades están evaluadas en la hipersuperficie Σ .

Suponiendo que el tensor de momentum-energía T_{ab} se puede expresar en la forma

$$T_{ab} = (T_{ab})^D + Q_{ab} \delta(\phi), \quad (1.23)$$

donde Q_{ab} es el tensor de momentum-energía asociado con la hipersuperficie Σ y los T_{ab}^\pm son los tensores de momentum-energía usuales definidos en M^\pm , se puede probar fácilmente que las ecuaciones de Einstein, en unidades geométricas tales que $c = 8\pi G = 1$, son equivalentes al sistema de ecuaciones

$$R_{ab}^\pm - \frac{1}{2} g_{ab} R^\pm = T_{ab}^\pm, \quad (1.24a)$$

$$H_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} H = Q_{ab}, \quad (1.24b)$$

donde $H_{ab} = H_{acb}^c$ y $H = g_\Sigma^{ab} H_{ab}$.

Cuando el cascarón de materia es la única fuente del campo gravitacional, de tal forma que el resto del espacio-tiempo es vacío, $T_{ab}^\pm \equiv 0$ y las ecuaciones (1.24a) se reducen a las ecuaciones de Einstein en el vacío en M^\pm ,

$$R_{ab}^\pm = 0. \quad (1.25)$$

De esta forma, habiendo resuelto el sistema anterior, las ecuaciones (1.24b) pueden ser usadas para obtener las expresiones del tensor de momentum-energía para un cascarón de materia,

$$Q_b^a = \frac{1}{2} \{b_c^a n^c n_b - b_b^a n^c n_c + b_b^c n^a n_c - b_c^c n^a n_b - \delta_b^a (b_e^c n^e n_c - b_c^c n^e n_e)\}, \quad (1.26)$$

donde todas las cantidades son evaluadas en la hipersuperficie Σ .

1.4. Discos delgados axialmente simétricos

Vamos a restringir el formalismo anterior al caso de un disco delgado axialmente simétrico introduciendo en el espacio-tiempo M las coordenadas quasi-cilíndricas $x^a = (t, \varphi, r, z)$ y considerando la hipersuperficie Σ definida por la función $\phi(x^a) = z$, con vector normal $n_a = \phi_{,a} = \delta_a^z$. La métrica para un espacio-tiempo estático con simetría axial puede ser escrita como [46, 47]

$$ds^2 = e^{-2\Phi}[R^2 d\varphi^2 + e^{2\Lambda}(dr^2 + dz^2)] - e^{2\Phi} dt^2, \quad (1.27)$$

donde las funciones R , Φ e Λ dependen sólo de las coordenadas r y z . La naturaleza quasi-cilíndrica de las coordenadas, ver referencia [3], significa que $r = 0$ sobre el eje de simetría y, para z fijo, r crece monótonamente al infinito, en cuanto que z , para r fijo, crece monótonamente en el intervalo $(-\infty, \infty)$. La coordenada φ varía en el intervalo usual $[0, 2\pi)$.

Dada una solución de la forma (1.27) para las ecuaciones de Einstein en el vacío, $R_{ab} = 0$, el tensor métrico g_{ab}^+ , definido para $z \geq 0$, se obtiene de la relación

$$ds^2|_{M^+} = g_{ab}^+ dx^a dx^b, \quad (1.28)$$

y el tensor métrico g_{ab}^- , definido para $z \leq 0$, se obtiene a través de la relación

$$g_{ab}^-(r, z) = g_{ab}^+(r, -z), \quad (1.29)$$

de tal forma que $[g_{ab}] = 0$. Esto significa construir modelos con simetría de reflexión con respecto al plano $z = 0$.

La relación anterior implica que, cuando $z \neq 0$,

$$g_{ab,z}^-(r, z) = -g_{ab,z}^+(r, -z), \quad (1.30)$$

y de esta forma, tomando apropiadamente el límite cuando $z \rightarrow 0$, las discontinuidades en las primeras derivadas del tensor métrico se pueden escribir

como

$$b_{ab} = [g_{ab,z}] = 2 g_{ab,z}^+ |_{z=0^+}. \quad (1.31)$$

Para la métrica (1.27), las componentes del tensor métrico son:

$$g_{00} = g_{tt} = -e^{2\Phi}, \quad (1.32a)$$

$$g_{11} = g_{\varphi\varphi} = R^2 e^{-2\Phi}, \quad (1.32b)$$

$$g_{22} = g_{rr} = e^{2(\Lambda-\Phi)}, \quad (1.32c)$$

$$g_{33} = g_{zz} = e^{2(\Lambda-\Phi)}, \quad (1.32d)$$

y las componentes no-nulas del tensor b_{ab} son:

$$b_{tt} = 2g_{tt,z} = -4e^{2\Phi}\Phi_{,z}, \quad (1.33a)$$

$$b_{\varphi\varphi} = 2g_{\varphi\varphi,z} = 4e^{-2\Phi}R(R_{,z} - R\Phi_{,z}), \quad (1.33b)$$

$$b_{rr} = 2g_{rr,z} = 4e^{2(\Lambda-\Phi)}(\Lambda_{,z} - \Phi_{,z}), \quad (1.33c)$$

$$b_{zz} = 2g_{zz,z} = 4e^{2(\Lambda-\Phi)}(\Lambda_{,z} - \Phi_{,z}), \quad (1.33d)$$

donde todas las cantidades están evaluadas en la hipersuperficie $z = 0^+$.

Usando los resultados anteriores en la expresión (1.26), se obtiene para el

tensor de momentum-energía del disco las componentes no-nulas

$$Q_t^t = 2e^{2(\Phi-\Lambda)} \left\{ \Lambda_{,z} - 2\Phi_{,z} + \frac{R_{,z}}{R} \right\}, \quad (1.34a)$$

$$Q_\varphi^\varphi = 2e^{2(\Phi-\Lambda)} \Lambda_{,z}, \quad (1.34b)$$

$$Q_r^r = 2e^{2(\Phi-\Lambda)} \left\{ \frac{R_{,z}}{R} \right\}, \quad (1.34c)$$

donde, nuevamente, todas las cantidades están evaluadas en la hipersuperficie $z = 0^+$.

El tensor de momentum-energía superficial S_b^a del disco se puede obtener a través de la relación

$$S_b^a = \int T_b^a ds, \quad (1.35)$$

donde $ds = \sqrt{g_{zz}} dz$ es la medida física de longitud en la dirección normal a la dirección del disco y $T_b^a = Q_b^a \delta(z)$. Usando la métrica (1.27), tenemos que

$$S_b^a = \int Q_b^a \delta(z) \sqrt{g_{zz}} dz = \int Q_b^a \delta(z) e^{(\Lambda-\Phi)} dz = Q_b^a e^{(\Lambda-\Phi)}, \quad (1.36)$$

obteniendo entonces las componentes no nulas

$$S_0^0 = 2e^{\Phi-\Lambda} \left\{ \Lambda_{,z} - 2\Phi_{,z} + \frac{R_{,z}}{R} \right\}, \quad (1.37a)$$

$$S_1^1 = 2e^{\Phi-\Lambda} \Lambda_{,z}, \quad (1.37b)$$

$$S_2^2 = 2e^{\Phi-\Lambda} \left\{ \frac{R_{,z}}{R} \right\}, \quad (1.37c)$$

donde, como en las expresiones anteriores, todas las cantidades son evaluadas en la hipersuperficie $z = 0^+$.

Podemos escribir la métrica y el tensor de momentum-energía superficial en las formas canónicas

$$g_{ab} = -V_a V_b + W_a W_b + X_a X_b + Y_a Y_b, \quad (1.38a)$$

$$S_{ab} = \sigma V_a V_b + p_\varphi W_a W_b + p_r X_a X_b, \quad (1.38b)$$

con una tetrad orthonormal $e_{\hat{a}}{}^b = \{V^b, W^b, X^b, Y^b\}$, donde

$$V^a = e^{-\Phi} (1, 0, 0, 0), \quad (1.39a)$$

$$W^a = \frac{e^\Phi}{R} (0, 1, 0, 0), \quad (1.39b)$$

$$X^a = e^{\Phi-\Lambda} (0, 0, 1, 0), \quad (1.39c)$$

$$Y^a = e^{\Phi-\Lambda} (0, 0, 0, 1). \quad (1.39d)$$

La densidad de energía, la presión azimutal, y la presión radial son, respectivamente,

$$\sigma = -S_0^0, \quad p_\varphi = S_1^1, \quad p_r = S_2^2. \quad (1.40)$$

y

$$\varrho = \sigma + p_\varphi + p_r \quad (1.41)$$

es la densidad newtoniana efectiva.

Capítulo 2

El modelo de contra-rotación

2.1. Introducción

Vamos a considerar ahora, con base en las referencias [30] y [31], la posibilidad de que el tensor de momentum-energía superficial S^{ab} (SEMT) se pueda escribir como la superposición de dos flúidos perfectos contra-rotantes que circulan en direcciones opuestas; esto es, vamos a suponer que S^{ab} , escrito en su forma canónica como

$$S^{ab} = \sigma V^a V^b + p_\varphi W^a W^b + p_r X^a X^b, \quad (2.1)$$

se puede expresar como

$$S^{ab} = S_+^{ab} + S_-^{ab}, \quad (2.2)$$

donde S_+^{ab} y S_-^{ab} son, respectivamente, el SEMT de los flúidos contra-rotantes progradados y retrogradados.

Con el fin de hacer la descomposición anterior, en la sección 2.2, se presenta el procedimiento para proyectar las cantidades físicas importantes sobre la tetradra comovil con el flúido. Posteriormente, en la sección 2.3, se realiza la descomposición del SEMT y se obtienen las expresiones correspondientes para

las densidades y presiones isotrópicas de los flúidos contra-rotantes. Finalmente, en la sección 2.4, se analizan dos posibilidades comúnmente empleadas para determinar explícitamente las velocidades tangenciales de contra-rotación.

2.2. Proyecciones sobre la tetrada

Con el fin de obtener la descomposición (2.2), debemos en primer lugar proyectar los vectores velocidad de los dos flúidos contra-rotantes sobre la tetrada $e_{\hat{a}}^b$, usando las relaciones [32]

$$U_{\pm}^{\hat{a}} = e_{\hat{a}}^b U_{\pm}^b \quad , \quad U_{\pm}^a = U_{\pm}^{\hat{b}} e_{\hat{b}}^a. \quad (2.3)$$

Si $U_{\pm}^a = (U_{\pm}^0, U_{\pm}^1, 0, 0)$ son los vectores velocidad de los dos flúidos contra-rotantes, se obtienen las relaciones

$$U_{\pm}^a = U_{\pm}^{\hat{0}} e_{\hat{0}}^a + U_{\pm}^{\hat{1}} e_{\hat{1}}^a, \quad (2.4)$$

$$-(U_{\pm}^{\hat{0}})^2 + (U_{\pm}^{\hat{1}})^2 = -1, \quad (2.5)$$

siendo esta última la condición de normalización del vector velocidad U_{\pm}^a .

La velocidad tangencial de contra-rotación, medida en la tetrada $e_{\hat{a}}^b$, está dada por

$$U_{\pm} = \frac{U_{\pm}^{\hat{1}}}{U_{\pm}^{\hat{0}}}. \quad (2.6)$$

Reemplazando ahora (2.6) en (2.5), se obtiene

$$U_{\pm}^{\hat{0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - U_{\pm}^2}}. \quad (2.7)$$

Reemplazando entonces en (2.4), y usando la tetrada (1.39), tenemos

$$U_{\pm}^a = \frac{V^a + W^a U_{\pm}}{\sqrt{1 - U_{\pm}^2}}; \quad (2.8)$$

esto es, las componentes de la velocidad de los flúidos contra-rotantes en términos de la tetraada (1.39) y de la velocidad tangencial (2.6).

Otra cantidad relacionada con el movimiento de contra-rotación es el momento angular específico de una partícula en una órbita circular de radio r , definido como $h_{\pm} = g_{\varphi\varphi}U_{\pm}^{\varphi}$. Mediante las relaciones (2.6) y (2.7), se puede ver que

$$h_{\pm} = \frac{Re^{-\Phi}U_{\pm}}{\sqrt{1-U_{\pm}^2}}. \quad (2.9)$$

Esta cantidad puede ser usada para analizar la estabilidad de los discos con respecto a perturbaciones radiales. La condición de estabilidad,

$$\frac{d(h^2)}{dr} > 0, \quad (2.10)$$

es una extensión del criterio de estabilidad de Rayleigh de un flúido en reposo en un campo gravitacional (ver por ejemplo [33]).

De igual manera, se pueden expresar V^a y W^a en términos de U_{\pm}^a y de U_{\pm} . De (2.8) tenemos que

$$\sqrt{1-U_+^2}U_+^a = V^a + W^aU_+, \quad (2.11a)$$

$$\sqrt{1-U_-^2}U_-^a = V^a + W^aU_-; \quad (2.11b)$$

así entonces, despejando V^a y W^a de (2.11a) y (2.11b), se obtiene

$$V^a = \frac{\sqrt{1-U_-^2}U_+U_-^a - \sqrt{1-U_+^2}U_-U_+^a}{U_+ - U_-}, \quad (2.12a)$$

$$W^a = \frac{\sqrt{1-U_+^2}U_+^a - \sqrt{1-U_-^2}U_-^a}{U_+ - U_-}, \quad (2.12b)$$

lo cual nos da las expresiones buscadas para los vectores V^a y W^a .

De acuerdo con lo anterior, los productos $V^a V^b$ y $W^a W^b$ están dados por

$$\begin{aligned}
V^a V^b &= \frac{[(1 - U_-^2)U_+^2 U_-^a U_-^b + (1 - U_+^2)U_-^2 U_+^a U_+^b]}{(U_+ - U_-)^2} \\
&\quad - \frac{\sqrt{1 - U_-^2} \sqrt{1 - U_+^2} U_+ U_- (U_-^a U_+^b + U_+^a U_-^b)}{(U_+ - U_-)^2}, \\
W^a W^b &= \frac{[(1 - U_+^2)U_+^a U_+^b + (1 - U_-^2)U_-^a U_-^b]}{(U_+ - U_-)^2} \\
&\quad - \frac{\sqrt{1 - U_+^2} \sqrt{1 - U_-^2} (U_+^a U_-^b + U_-^a U_+^b)}{(U_+ - U_-)^2},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

que al reemplazarse en la expresión canónica para S^{ab} llevan a la descomposición deseada.

Finalmente, para poder completar la descomposición (2.2), debemos también expresar el vector X^a en términos de los vectores U_\pm^a y de las velocidades tangenciales U_\pm . Para tal fin, introducimos la métrica h_{ab} de la hipersuperficie $z = 0$, definida mediante la relación

$$h_{ab} = g_{ab} - Y_a Y_b. \tag{2.14}$$

Con la métrica g_{ab} escrita en la forma canónica (1.38a), la expresión para h_{ab} en forma canónica es

$$h_{ab} = -V_a V_b + W_a W_b + X_a X_b; \tag{2.15}$$

despejando entonces el producto $X_a X_b$, tenemos

$$X_a X_b = h_{ab} + V_a V_b - W_a W_b, \tag{2.16}$$

lo cual, usando (2.13), permite expresar $X_a X_b$ en términos de U_\pm^a y U_\pm . Las expresiones anteriores completan las relaciones requeridas para obtener la descomposición (2.2) del tensor de momentum-energía, la cual efectuaremos en la siguiente sección.

2.3. El tensor de momentum - energía

Tomando el tensor de momentum energía S^{ab} en su forma canónica

$$S^{ab} = \sigma V^a V^b + p_\varphi W^a W^b + p_r X^a X^b$$

y reemplazando la expresión (2.16) para el producto $X^a X^b$, se obtiene

$$S^{ab} = (\sigma + p_r) V^a V^b + (p_\varphi - p_r) W^a W^b + p_r h^{ab}. \quad (2.17)$$

Finalmente, usando la expresión (2.13) para los productos $V^a V^b$ y $W^a W^b$, se obtiene

$$\begin{aligned} S^{ab} = & \frac{f(U_-, U_-)(1 - U_+^2) U_+^a U_+^b}{(U_+ - U_-)^2} \\ & + \frac{f(U_+, U_+)(1 - U_-^2) U_-^a U_-^b}{(U_+ - U_-)^2} \\ & - \frac{f(U_+, U_-)(1 - U_+^2)^{\frac{1}{2}}(1 - U_-^2)^{\frac{1}{2}}(U_+^a U_-^b + U_-^a U_+^b)}{(U_+ - U_-)^2} \\ & - p_r h^{ab}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde

$$f(U_-, U_-) = (\sigma + p_r) U_-^2 + p_\varphi - p_r, \quad (2.19a)$$

$$f(U_+, U_+) = (\sigma + p_r) U_+^2 + p_\varphi - p_r, \quad (2.19b)$$

$$f(U_+, U_-) = (\sigma + p_r) U_+ U_- + p_\varphi - p_r. \quad (2.19c)$$

Así, (2.18) proporciona la expresión necesaria de S^{ab} en términos de las velocidades de los dos fluidos contra-rotantes.

Ahora bien, para que el tensor de momentum-energía se pueda interpretar apropiadamente en términos de un modelo de contra-rotación bien definido como (2.2), es necesario que el término mixto en (2.18) sea igual a cero. De acuerdo con lo anterior, las velocidades tangenciales de contra-rotación deben estar relacionadas mediante la condición de ligadura

$$f(U_+, U_-) = 0, \quad (2.20)$$

donde se asume que $|U_\pm| \neq 1$. Así el SEMT se puede escribir como la superposición de dos flúidos perfectos contra-rotantes si, y solo si, la ecuación anterior admite una solución tal que $U_+ \neq U_-$. Este último resultado es completamente equivalente a la condición necesaria y suficiente obtenida en la referencia [31].

Ahora bien, escribiendo el SEMT (2.2) como la suma de dos flúidos perfectos contra-rotantes de la forma

$$S_+^{ab} = (\sigma_+ + p_+)U_+^a U_+^b + p_+ h^{ab}, \quad (2.21a)$$

$$S_-^{ab} = (\sigma_- + p_-)U_-^a U_-^b + p_- h^{ab}, \quad (2.21b)$$

se obtiene la expresión

$$S^{ab} = (\sigma_+ + p_+)U_+^a U_+^b + (\sigma_- + p_-)U_-^a U_-^b + (p_+ + p_-)h^{ab}; \quad (2.22)$$

esto es, una expresión en donde aparecen claramente factorizados los términos correspondientes a cada uno de los flúidos contra-rotantes.

Tomando ahora una solución de la ecuación (2.20) para las velocidades de contra-rotación, se tiene que

$$(\sigma + p_r)U_+ U_- + p_\varphi - p_r = 0; \quad (2.23)$$

por lo tanto, despejando $p_\varphi - p_r$ y reemplazando en (2.19a) se tiene que

$$f(U_-, U_-) = (\sigma + p_r)U_-(U_- - U_+). \quad (2.24)$$

Igualmente se obtiene

$$f(U_+, U_+) = (\sigma + p_r)U_+(U_+ - U_-), \quad (2.25)$$

al reemplazar $p_\varphi - p_r$ en (2.19b).

Así entonces, reemplazando (2.24, (2.25) y (2.20) en (2.18) se obtiene finalmente la factorización

$$\begin{aligned} S^{ab} &= \left[\frac{1 - U_+^2}{U_- - U_+} \right] (\sigma + p_r)U_- U_+^a U_+^b + \\ &\quad \left[\frac{1 - U_-^2}{U_+ - U_-} \right] (\sigma + p_r)U_+ U_-^a U_-^b + \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$p_r h^{ab}.$$

Comparando entonces (2.26) y (2.22) se obtienen las expresiones

$$\sigma_+ + p_+ = \left[\frac{1 - U_+^2}{U_- - U_+} \right] \{(\sigma + p_r)U_-\}, \quad (2.27a)$$

$$\sigma_- + p_- = \left[\frac{1 - U_-^2}{U_+ - U_-} \right] \{(\sigma + p_r)U_+\}, \quad (2.27b)$$

$$p_+ + p_- = p_r. \quad (2.27c)$$

Combinando estas expresiones podemos obtener la expresión

$$\sigma_+ + \sigma_- = \sigma + p_r - p_\varphi, \quad (2.28)$$

para las densidades de energía de los fluidos contra-rotantes.

Como se puede ver fácilmente de las expresiones (2.27), las densidades de energía σ_\pm y las presiones p_\pm del modelo de contra-rotación no están definidas unívocamente, incluso para valores definidos de las velocidades U_\pm . Esto significa que para una determinación completa del modelo de contra-rotación es

necesario imponer alguna condición adicional que permita determinar explícitamente estas cantidades, como veremos en la siguiente sección. Es importante anotar también que las anteriores expresiones son también equivalentes a la correspondientes expresiones en la referencia [31].

2.4. Velocidades de contra - rotación

Como se puede observar de los resultados obtenidos en la sección anterior, las cantidades físicas que caracterizan el modelo de contra-rotación, las densidades σ_{\pm} y presiones p_{\pm} , dependen de las velocidades tangenciales de contra-rotación U_{\pm} . Así entonces, para determinar completamente dichas cantidades, es necesario conocer explícitamente las velocidades tangenciales de los flúidos contra-rotantes; sin embargo, la condición (2.20) no determina U_{\pm} unívocamente, así que existe cierta libertad en la escogencia de los vectores velocidad U_{\pm}^a de los flúidos contra-rotantes.

De acuerdo con lo anterior, para determinar completamente el modelo de contra-rotación, es necesario imponer alguna condición adicional sobre las velocidades tangenciales de contra-rotación, U_{\pm} , de tal manera que, combinada con la ecuación(2.20), permita determinar explícitamente dichas velocidades. Las dos posibilidades más simples que comunmente se consideran son suponer que los dos flúidos contra-rotantes circulan a lo largo de geodésicas, o suponer que los dos flúidos contra-rotantes circulan con velocidades tangenciales iguales y opuestas.

Vamos a considerar en primer lugar la suposición de que los dos flúidos contra-rotantes circulan a lo largo de geodésicas. La ecuación de las geodésicas para las componentes covariantes del vector velocidad, $U_a = g_{ab}U^b$, puede

escribirse como (ver [34])

$$\frac{dU_a}{d\tau} = \frac{1}{2}g_{bc,a}U^bU^c; \quad (2.29)$$

ahora bien, para órbitas circulares se tiene que $r = cte.$, así que $U_r = 0$; de acuerdo con esto, (2.29) se reduce a

$$g_{bc,r}U^bU^c = 0, \quad (2.30)$$

donde b y c toman los valores 0 y 1.

Escribiendo entonces los vectores velocidad de los fluidos contra-rotantes como $U_{\pm}^a = (U_{\pm}^0, U_{\pm}^1, 0, 0) = U_{\pm}^0(1, \omega_{\pm}, 0, 0)$, donde $\omega_{\pm} = U_{\pm}^1/U_{\pm}^0$ son las velocidades angulares, la ecuación (2.30) implica que

$$g_{11,r}\omega^2 + g_{00,r} = 0, \quad (2.31)$$

cuyas soluciones están dadas por

$$\omega_{\pm} = \pm \omega, \quad (2.32)$$

$$\omega^2 = -\frac{g_{00,r}}{g_{11,r}}.$$

Como podemos ver, dado que el espacio-tiempo es estático, los dos fluidos geodésicos circulan con velocidades iguales y opuestas.

Vamos ahora a calcular $f(U_+, U_-)$ para las velocidades geodésicas. En primer lugar, expresando U_{\pm} en términos de ω_{\pm} se obtiene

$$U_{\pm} = -\left[\frac{W_1}{V_0}\right]\omega_{\pm}, \quad (2.33)$$

y así, usando (1.38a) y (1.38b), se tiene que

$$f(U_+, U_-) = \frac{A + (\sigma + p_r - p_{\varphi})B}{g_{11,r}V_0^2}, \quad (2.34)$$

donde

$$A = g_{11,r}S_{00} + g_{00,r}S_{11}, \quad (2.35a)$$

$$B = g_{00}g_{11,r} + g_{00,r}g_{11}. \quad (2.35b)$$

Usando las ecuaciones de Einstein (3.2a) - (3.2d) y las expresiones (1.37a) - (1.37c) para el SEMT se puede mostrar que

$$f(U_+, U_-) = \left[\frac{R}{R_{,r} - R\Phi_{,r}} \right] \frac{dp_r}{dr}; \quad (2.36)$$

esto es, los flúidos contra-rotantes circulan a lo largo de geodésicas sólo si la presión radial es constante, como es esperado debido a que el gradiente de presión representa una fuerza no gravitacional.

Un caso importante de lo anterior es cuando no hay presión radial, $p_r = 0$, de modo que la condición (2.20) es equivalente a

$$U^2 = \frac{p_\varphi}{\sigma}, \quad (2.37)$$

como comúnmente se considera en los trabajos relacionados con discos contra-rotantes. Ahora, dado que $p_r = 0$, se puede tomar $p_+ = p_- = 0$, así que se tienen dos flúidos de polvo contra-rotantes con densidades de energía iguales, dadas por

$$\sigma_+ = \sigma_- = \frac{\sigma - p_\varphi}{2}. \quad (2.38)$$

En este caso se tiene una determinación completa de todas las cantidades relacionadas con el CRM. Por otro lado, cuando $p_r \neq 0$ se tiene que, en general, $f(U_+, U_-) \neq 0$ para flúidos que circulan a lo largo de geodésicas y así no es posible obtener un modelo contra-rotante con ellos.

Vamos a considerar ahora la otra posibilidad simple para determinar las velocidades de contra-rotación. En este caso se supone que los dos flúidos circulan con velocidades tangenciales iguales y opuestas, aunque no lo hagan

a lo largo de geodésicas; esto es, se supone que

$$U_{\pm} = \pm U, \quad (2.39)$$

de modo que la ecuación (2.20) es equivalente a

$$U^2 = \left[\frac{p_{\varphi} - p_r}{\sigma + p_r} \right]. \quad (2.40)$$

Este caso, el cual también se considera comúnmente, permite igualmente una determinación completa de los vectores velocidad U_{\pm}^a ; sin embargo, esto solo se puede hacer cuando la expresión anterior es positivo definida. Si este no es el caso, no se puede tomar las dos velocidades como iguales y opuestas.

En el caso general, cuando (2.40) no es positivo definida, los dos flúidos circularán con velocidades diferentes y (2.20) se puede escribir como

$$U_+ U_- = \left[\frac{p_r - p_{\varphi}}{\sigma + p_r} \right], \quad (2.41)$$

así que sólo se puede obtener un CRM sí

$$|p_r - p_{\varphi}| < |\sigma + p_r|, \quad (2.42)$$

con el fin de que $|U_{\pm}| \leq 1$. Además, esta relación no determina completamente las velocidades tangenciales U_{\pm} , y así el CRM es indeterminado.

Como se puede ver de las consideraciones anteriores, para CRM construidos partiendo de métricas estáticas axialmente simétricas generales, no se pueden determinar completamente las velocidades contra-rotantes mediante la condición (2.20). Así, en general el CRM correspondiente quedará indeterminado puesto que la densidad de energía y la presión isotrópica no pueden obtenerse explícitamente sin un conocimiento completo de las velocidades tangenciales de contra-rotación. En efecto, como fue mostrado en [31], ver también referencia [35], hay una familia bi-paramétrica de interpretaciones en términos de dos flúidos perfectos para el el SEMT (1.38b). Por otro lado, la ecuación (2.42) es

una condición muy restrictiva de la descomposición de S^{ab} y, de acuerdo con esto, en general no es posible considerar el SEMT como la superposición de dos flúidos perfectos contra-rotantes.

Capítulo 3

Discos contra - rotantes con presión radial

3.1. Introducción

Como una aplicación de lo presentado en los capítulos anteriores, consideramos en este capítulo algunos modelos simples de discos con presión radial diferente de cero que se pueden interpretar apropiadamente mediante el Modelo de Contra-Rotación. Tales discos se obtienen considerando una solución simple de las ecuaciones de Einstein que permite obtener expresiones simples para todas las cantidades involucradas en el Modelo de Contra-Rotación.

De acuerdo con esto, en la sección 3.2 se presenta la manera de obtener una solución general de las ecuaciones de Einstein en el vacío tal que los modelos de discos obtenidos presenten presión radial diferente de cero, llevando las ecuaciones de Einstein a la forma de Weyl mediante una transformación conforme de las coordenadas, la cual determina a su vez el comportamiento de la presión radial. Posteriormente, en la sección 3.3, se considera una familia simple de soluciones y se obtienen, en la sección 3.3.1, las expresiones generales

para la densidad de energía y las presiones azimutal y radial de los modelos de discos así obtenidos. Finalmente, en la sección 3.3.2, se analizan los CRM correspondientes a los anteriores discos.

3.2. Solución general con presión radial

Tomando la métrica para un espacio-tiempo estático axialmente simétrico en la forma (1.27),

$$ds^2 = e^{-2\Phi}[R^2 d\varphi^2 + e^{2\Lambda}(dr^2 + dz^2)] - e^{2\Phi} dt^2, \quad (3.1)$$

donde R , Φ y Λ son funciones que sólo dependen de las coordenadas r y z , las ecuaciones de Einstein en el vacío son equivalentes al sistema de ecuaciones diferenciales

$$R_{,rr} + R_{,zz} = 0, \quad (3.2a)$$

$$(R\Phi_{,r})_{,r} + (R\Phi_{,z})_{,z} = 0, \quad (3.2b)$$

$$R_{,z}\Lambda_{,r} + R_{,r}\Lambda_{,z} - 2R\Phi_{,r}\Phi_{,z} - R_{,rz} = 0, \quad (3.2c)$$

$$R_{,r}\Lambda_{,r} - R_{,z}\Lambda_{,z} - R(\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2) + R_{,zz} = 0, \quad (3.2d)$$

validas en la región exterior al disco; esto es, para $z \neq 0$.

La ecuación (3.2a) es la ecuación de Laplace bidimensional,

$$\Delta R = R_{,rr} + R_{,zz} = 0, \quad (3.3)$$

de modo que la función $R(r, z)$ se puede considerar como la parte real de una función analítica $\mathcal{F}(\nu) = R(r, z) + iZ(r, z)$, donde $\nu = r + iz$. La parte

imaginaria de $\mathcal{F}(\nu)$, la función $Z(r, z)$, se puede obtener a partir de la función $R(r, z)$ resolviendo las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial Z}{\partial r} = -\frac{\partial R}{\partial z}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial Z}{\partial z}. \quad (3.5)$$

las cuales son la condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{F}(\nu)$ sea una función analítica de $\nu = r + iz$.

La función $\mathcal{F}(\nu)$ puede igualmente usarse para definir una transformación conforme de las coordenadas, a través de la relación

$$r \rightarrow R(r, z), \quad (3.6)$$

$$z \rightarrow Z(r, z),$$

de tal manera que

$$dr^2 + dz^2 = \frac{dR^2 + dZ^2}{|\mathcal{F}'(\nu)|^2}, \quad (3.7)$$

donde

$$|\mathcal{F}'(\nu)|^2 = R_{,r}^2 + R_{,z}^2. \quad (3.8)$$

Las nuevas coordenadas (t, φ, R, Z) se denominan *coordenadas de Weyl*.

En las coordenadas de Weyl, la métrica toma la forma

$$ds^2 = e^{-2\Psi}[R^2 d\varphi^2 + e^{2\Pi}(dR^2 + dZ^2)] - e^{2\Psi} dt^2, \quad (3.9)$$

conocida como la métrica de Weyl. Las ecuaciones de Einstein en el vacío para

esta métrica son

$$\Psi_{,RR} + \frac{1}{R}\Psi_{,r} + \Psi_{,ZZ} = 0 , \quad (3.10a)$$

$$\Pi_{,R} = R(\Psi_{,R}^2 - \Psi_{,Z}^2) , \quad (3.10b)$$

$$\Pi_{,Z} = 2R\Psi_{,R}\Psi_{,Z} . \quad (3.10c)$$

Como se puede ver, la ecuación (3.10a) es la ecuación de Laplace tri-dimensional con simetría axial, la cual a su vez es la condición de integrabilidad del sistema de ecuaciones (3.10b) - (3.10c) para la función $\Pi(R, Z)$.

De acuerdo con esto, dada una solución $\Psi(R, Z)$ de la ecuación (3.10a), entonces $\Pi(R, Z)$ se obtiene integrando las ecuaciones (3.10b) - (3.10c). La solución general para el sistema de ecuaciones de Einstein originales, (3.2a) - (3.2d), está dada entonces por las funciones

$$R(r, z) = \text{Re } \mathcal{F}(\nu) , \quad (3.11a)$$

$$Z(r, z) = \text{Im } \mathcal{F}(\nu) , \quad (3.11b)$$

$$\Phi(r, z) = \Psi(R, Z) , \quad (3.11c)$$

$$\Lambda(r, z) = \Pi(R, Z) + \ln |\mathcal{F}'(\nu)| , \quad (3.11d)$$

donde $\Psi(R, Z)$ y $\Pi(R, Z)$ son soluciones de las ecuaciones de Weyl (3.10a) - (3.10c).

Como se puede ver de (3.11), (1.37c) y (1.40), la construcción de discos delgados con presión radial diferente de cero depende fuertemente de la función

analítica $\mathcal{F}(\nu)$, debido a que esta función no solo define la transformación (3.11) que lleva las ecuaciones de campo a la forma de Weyl (3.10), sino que también determina el comportamiento de la presión radial, como veremos a continuación.

Teniendo en cuenta (1.37c) y (1.40), la presión radial se expresa como

$$p_r = 2e^{\Phi-\Lambda} \frac{R_{,z}}{R}, \quad (3.12)$$

de modo que, usando (3.11c) y (3.11d), se tiene que

$$p_r = \frac{2e^{\Psi-\Pi}}{|\mathcal{F}'(\nu)|} \frac{R_{,z}}{R}, \quad (3.13)$$

y así, usando (3.8), tenemos finalmente

$$p_r = \frac{2e^{\Psi-\Pi}}{\sqrt{R_{,r}^2 + R_{,z}^2}} \frac{R_{,z}}{R}, \quad (3.14)$$

donde todas las cantidades están evaluadas en $z = 0^+$; asimismo, suponiendo que las funciones Ψ y Π son reales y bien comportadas en la hipersuperficie $z = 0^+$, el comportamiento de la presión p_r depende fundamentalmente de la función métrica $R(r, z)$, la cual está determinada por la parte real de la función analítica $\mathcal{F}(\nu)$.

Una posibilidad simple para la función $\mathcal{F}(\nu)$ está dada por

$$\mathcal{F}(\nu) = \nu + iz_0, \quad (3.15)$$

donde z_0 es una constante. En este caso se tiene discos infinitos con presión radial igual a cero. Este es el método bien conocido de “desplazamiento, corte y reflexión” usado en casi todos los trabajos acerca de modelos de discos para generar discos delgados usando soluciones de las ecuaciones de Einstein y Einstein-Maxwell. Otra posibilidad para $\mathcal{F}(\nu)$ fue presentada en la referencia [5] y está dada por

$$\mathcal{F}(\nu) = \nu + \alpha\sqrt{\nu^2 - 1}, \quad (3.16)$$

donde $\alpha \geq 0$, de tal forma que la expresión general para la presión radial se puede escribir como

$$p_r = \frac{2\alpha}{\sqrt{1 + (\alpha^2 - 1)r^2}} e^{\Psi - \Pi}, \quad (3.17)$$

de donde se puede ver que si Ψ y Π son reales y finitas cuando $z = 0^+$, entonces p_r es una función bien comportada de r para todo valor de $\alpha \geq 0$. En este caso se obtienen discos delgados con presión radial diferente de cero y con radio unitario, localizados en $z = 0$, $0 \leq r \leq 1$. Para obtener discos con radios finitos no unitarios, se necesita hacer solamente la transformación $r \rightarrow ar$, donde a es el radio del disco.

3.3. Una familia simple de discos

Vamos ahora a considerar un ejemplo simple de solución de las ecuaciones de Weyl (3.10a) - (3.10c), mediante el cual se pueden obtener diferentes CRM con velocidades de contra-rotación bien definidas. La solución considerada está dada por [36]

$$\Psi(R, Z) = \frac{\mu}{2k} \ln \left[\frac{R_+ + R_- - 2k}{R_+ + R_- + 2k} \right], \quad (3.18a)$$

$$\Pi(R, Z) = \frac{\mu^2}{2k^2} \ln \left[\frac{(R_+ + R_-)^2 - 4k^2}{4 R_+ R_-} \right], \quad (3.18b)$$

donde $\mu > 0$, $k = \sqrt{\alpha^2 - 1}$ y $R_{\pm}^2 = R^2 + (Z \pm k)^2$. La anterior es una de las más simples soluciones de Weyl y contiene la solución de Chazy-Curzon [37, 38] cuando $\alpha = 1$, la solución de Zipoy-Voorhees [39, 40] cuando $\alpha > 1$, y la solución de Morgan y Morgan [2], cuando $\alpha < 1$.

Si ahora se toma $\mathcal{F}(\nu)$ dado por (3.15), se obtienen discos infinitos con presión radial igual a cero. Estos modelos han sido estudiados en las referencias [1, 2] y [12, 14]. Para obtener discos estáticos finitos con presión radial diferente

de cero, siguiendo la referencia [5], se toma \mathcal{F} dado por (3.16), de modo que los discos están localizados en $z = 0$, $0 \leq r \leq 1$. Estos discos ya fueron parcialmente discutidos en la referencia [5], pero sin tener en cuenta el Modelo de Contra-Rotación. Así, en el presente trabajo se completa el análisis de dichos discos considerando todo el espectro de valores para los parámetros μ y α y haciendo un estudio detallado del correspondiente Modelo de Contra-Rotación.

Tomando el valor de las funciones (3.18) en el disco y usando (1.34a), (1.34b) y (3.17), se pueden obtener las expresiones para la densidad de energía y las presiones azimutal y radial,

$$\sigma = p_r \left[\frac{2\mu - \alpha}{\alpha} - \frac{1 + \mu^2 r^2}{1 + k^2 r^2} \right], \quad (3.19a)$$

$$p_\varphi = p_r \left[\frac{1 + \mu^2 r^2}{1 + k^2 r^2} \right], \quad (3.19b)$$

$$p_r = p_0 [1 + k^2 r^2]^{(\mu^2 - k^2)/2k^2}, \quad (3.19c)$$

donde $p_0 = 2\alpha(\alpha - k)^{\mu/k} \geq 0$ y $0 \leq r \leq 1$. Vamos ahora, en las siguientes secciones, a analizar las propiedades de esta familia de discos para diferentes valores de los parámetros μ y α , así como también los modelos de contra-rotación correspondientes.

3.3.1. Propiedades de la familia de discos

Consideraremos, en primer lugar, dos casos donde se obtienen expresiones simples para el SEMT. Sea $\alpha = 0$, así que $p_r = p_\varphi = 0$, y

$$\sigma = \frac{4\mu e^{-\mu\pi/2}}{(1 - r^2)^{(\mu^2+1)/2}}; \quad (3.20)$$

esto es, este caso corresponde a un disco de polvo con densidad de energía positiva, el cual satisface todas las condiciones de energía [41]. De otra parte, la

densidad de energía es singular en el borde del disco. Se puede ver también que la restricción (2.20) implica que $U_{\pm} = 0$, así que este es un disco “verdaderamente estático”, en el sentido de que no se le puede obtener una interpretación en términos del modelo de contra-rotación. Este caso corresponde al disco de Bonnor y Sackfield de la referencia [1].

Para el segundo caso simple tomamos $\mu = k > 0$, así que

$$\sigma = -4(\alpha - k)^2, \quad (3.21a)$$

$$p_r = p_{\varphi} = 2\alpha(\alpha - k). \quad (3.21b)$$

De acuerdo con esto, los discos están constituidos por fluidos perfectos con densidad de energía y presión constantes. Ahora bien, dado que $\sigma < 0$, los discos no satisfacen la condición de energía débil; por otro lado, $\varrho > 0$, así que los discos si satisfacen la condición de energía fuerte. Para estos discos se tiene igualmente que $U_{\pm} = 0$, así que tampoco es posible una interpretación en términos del modelo de contra-rotación. Estos son también discos “verdaderamente estáticos”.

Para cualquier otro valor de $\alpha > 0$ y $\mu \neq k$, las presiones radiales y azimutales, p_r y p_{φ} , son positivas en todas partes y bien comportadas para todos los valores de μ y α . Para la “densidad newtoniana efectiva” se obtiene

$$\varrho = \frac{2\mu p_r}{\alpha}; \quad (3.22)$$

esto es, ϱ es positiva en todas partes y los discos son atractivos, en concordancia con la condición de energía fuerte. De otra parte, es fácil ver que $\sigma < 0$ cuando $r = 1$, para algún valor de α y μ , mientras que $\sigma > 0$ para $r = 0$ solo si $\mu > \alpha$. Esto es, en general, la densidad de energía σ no es positiva en todas partes sobre el disco.

Con el fin de estudiar el comportamiento de la densidad de energía y las presiones vamos a hacer un análisis gráfico de dichas cantidades para diferentes valores de los parámetros α y μ . En primer lugar, en las figuras 3.1 y 3.2 se presenta la densidad de energía, σ , para discos con diferentes valores de μ y α . Como se puede ver, para algunos valores de μ y α la densidad de energía es negativa en todas partes sobre el disco, mientras que para otra combinación de los parámetros la densidad de energía es positiva en la parte central de los discos, pero negativa en el borde. Igualmente se estudió el comportamiento de σ para diferentes valores de μ y α y, en todos los casos, se obtuvo un comportamiento similar.

El comportamiento de la presión radial, p_r , se representa gráficamente en las figuras 3.3 y 3.4 para discos con diferentes valores de μ y α . Como se mencionó anteriormente, p_r es positiva en todas partes sobre el disco para todos los valores de μ y α . Ahora bien, para algunos valores de los parámetros p_r tiene un máximo en $r = 0$ y luego decrece monótonamente. De otra parte, con otros valores para μ y α , p_r es una función creciente de r . Al igual que con la densidad de energía, se estudió el comportamiento de la presión radial para diferentes valores de μ y α y en todos los casos considerados se presentaron las mismas características.

Finalmente, el comportamiento de la presión azimutal, p_φ , se estudia gráficamente en las figuras 3.5 y 3.6. Se encuentra un comportamiento similar con el de la presión radial, con un máximo en $r = 0$ para algunos valores de los parámetros y funciones crecientes de r para algunos otros valores. También se consideraron otros valores de μ y α y, como fue el caso con p_r y σ , se obtuvo un comportamiento similar.

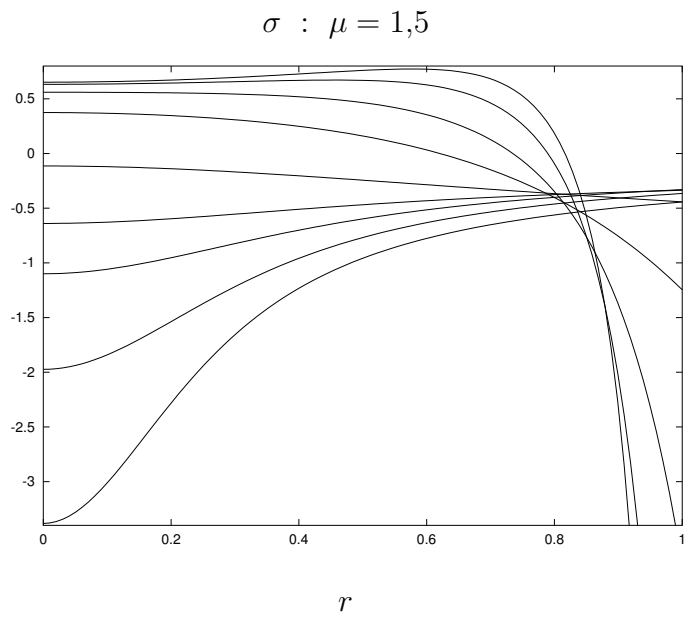


Figura 3.1: Gráficas de la densidad de energía, σ , para discos con $\mu = 1,5$ y $\alpha = 0,5, 0,6, 0,8, 1,1, 1,6, 2, 2,3, 2,8$ y $3,5$.

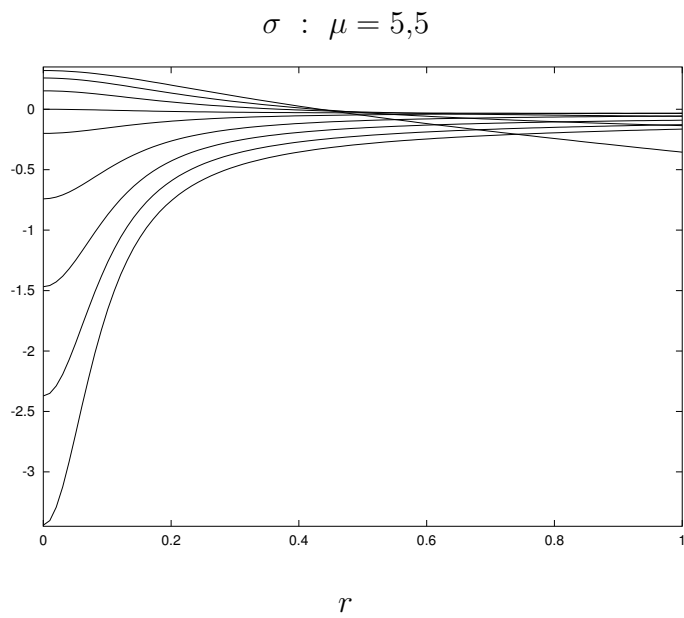


Figura 3.2: Gráficas de la densidad de energía, σ , para discos con $\mu = 5,5$ y $\alpha = 0,5, 0,6, 0,8, 1,1, 1,6, 2, 2,3, 2,8$ y $3,5$.

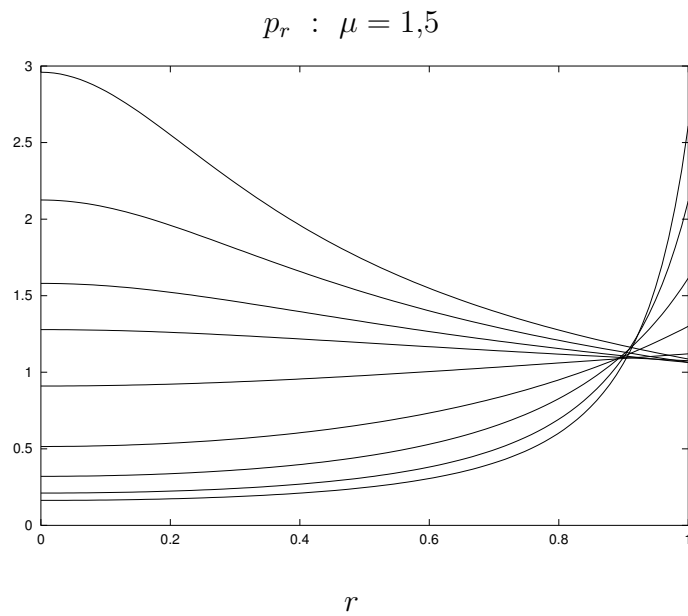


Figura 3.3: Gráficas de la presión radial, p_r , para discos con $\mu = 1,5$ y $\alpha = 0,5$, 0,6, 0,8, 1,1, 1,6, 2, 2,3, 2,8 y 3,5.

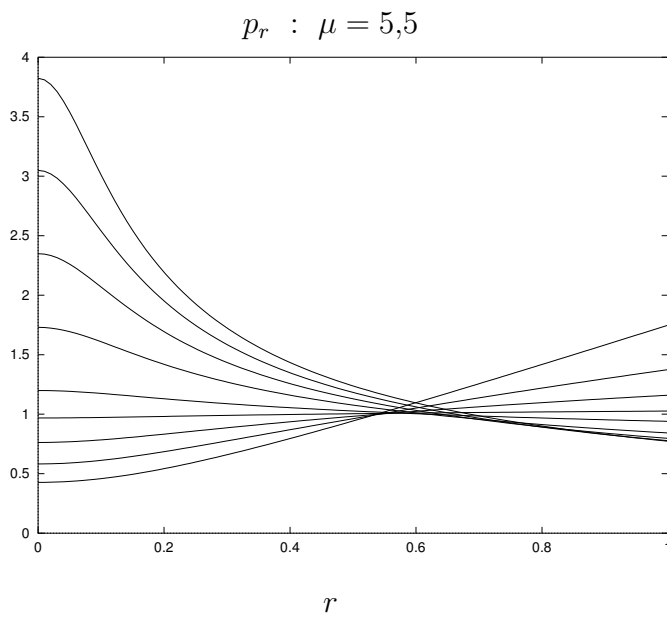


Figura 3.4: Gráficas de la presión radial, p_r , para discos con $\mu = 5,5$ y $\alpha = 0,5$, 0,6, 0,8, 1,1, 1,6, 2, 2,3, 2,8 y 3,5.

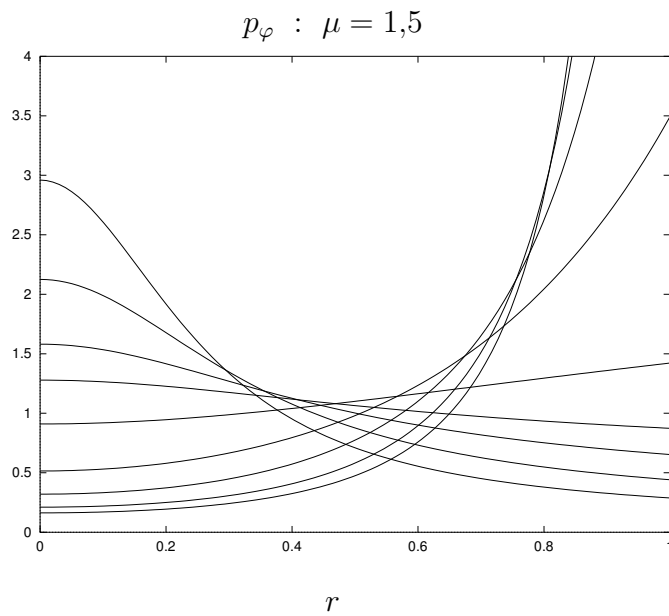


Figura 3.5: Gráficas de la presión azimutal, p_φ , para discos con $\mu = 1,5$ y $\alpha = 0,5, 0,6, 0,8, 1,1, 1,6, 2, 2,3, 2,8$ y $3,5$.

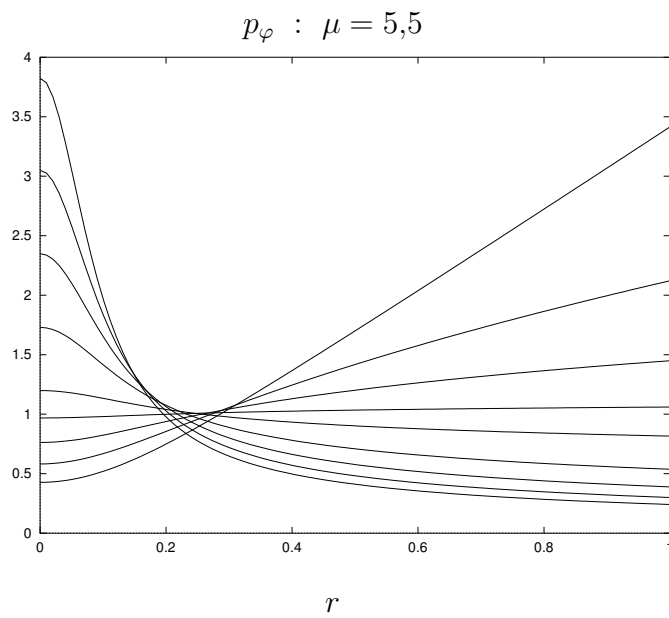


Figura 3.6: Gráficas de la presión , p_φ , para discos con $\mu = 5,5$ y $\alpha = 0,5, 0,6, 0,8, 1,1, 1,6, 2, 2,3, 2,8$ y $3,5$.

3.3.2. Modelos de contra - rotación correspondientes

Consideremos ahora los CRM correspondientes a los discos anteriores. Como p_r , en general, depende de r , no se puede considerar que los dos flúidos contra-rotantes circulan a lo largo de geodésicas; sin embargo, se puede explorar la posibilidad de obtener un CRM bien definido con velocidades iguales y opuestas, para lo cual debemos calcular la velocidad tangencial U^2 . Usando entonces (2.40) y (3.19) se obtiene

$$U^2 = \frac{\alpha(\mu^2 - k^2)r^2}{(2\mu - \alpha) + \mu(2k^2 - \alpha\mu)r^2}. \quad (3.23)$$

Debemos, además, imponer la condición

$$0 \leq U^2 \leq 1. \quad (3.24)$$

con el fin de que el correspondiente CRM este bien definido.

Nuevamente, es más fácil hacer un análisis gráfico, mediante el cual se estudie el comportamiento de la relación (3.23) para diferentes combinaciones de los parámetros μ y α . En algunos casos se obtienen funciones con cambios fuertes en la pendiente, con regiones donde U^2 es negativa y con $U > 1$. Con el fin de ver la clase de comportamiento que se tiene, se presenta un gráfico simple en la figura 3.7. En algunos otros casos se obtiene U^2 como funciones de r bien comportadas, positivas y crecientes en todas partes pero siempre con $U^2 < 1$. Un ejemplo de estos casos se muestra en la figura 3.8.

Igualmente, podemos calcular el momentum angular específico de estos CRM, usando(2.9) y (3.19), y obtener

$$h^2 = \frac{\alpha(\alpha + k)^{\mu/k}(\mu^2 - k^2)r^4}{(2\mu - \alpha) + [(2\mu - \alpha)k^2 - 2\alpha\mu^2]r^2}. \quad (3.25)$$

Al igual que con U^2 , el análisis gráfico es más conveniente, así que de nuevo se considera la relación anterior para algunos valores diferentes de μ y α . En

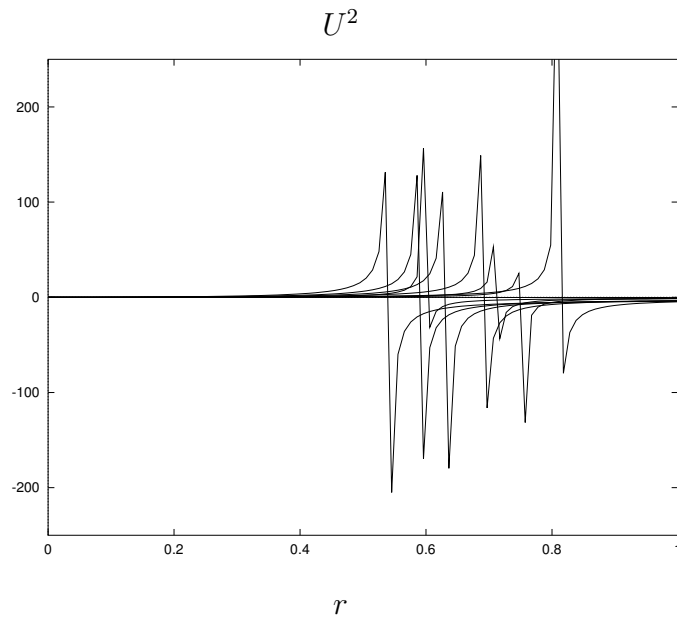


Figura 3.7: Gráficas de la velocidad de contra-rotación, U^2 , para discos con $\mu = 0,5$ y $\alpha = 0,5, 0,6, 0,8, 1,1, 1,4, 1,7, 2,2, 2,3$ y $2,8$.

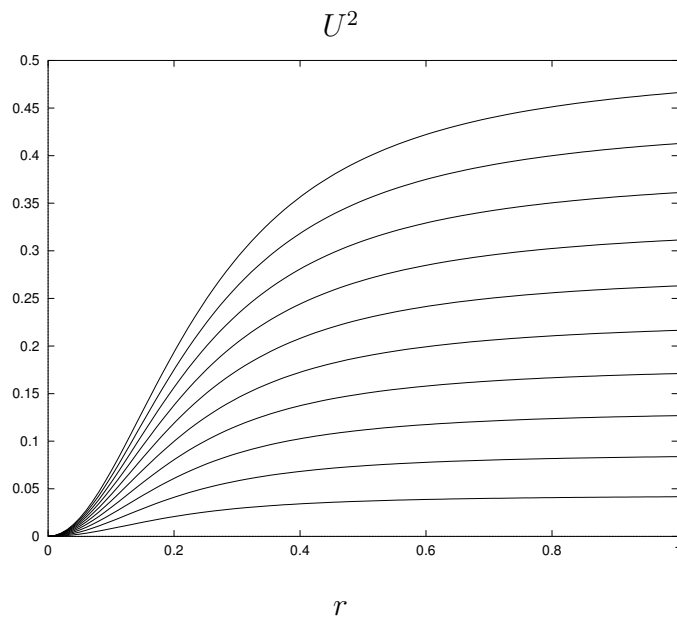


Figura 3.8: Gráficas de la velocidad de contra-rotación, U^2 , para discos con $\alpha = 5$ y $\mu = 5, 5,1, 5,2, 5,3, 5,4, 5,5, 5,6, 5,7, 5,8$ y $5,9$.

alguno de los casos considerados se tiene cambios fuertes en la pendiente de h^2 , como una indicación de fuertes inestabilidades del CRM con respecto a perturbaciones radiales, o regiones con valores negativos de h^2 , mostrando que el CRM no puede ser aplicado para estos valores de los parámetros. Se presenta un ejemplo de los casos considerados en la figura 3.9. También se obtiene h^2 como funciones monótonamente crecientes de r para algunos otros valores de μ y α , lo cuales corresponden a CRM estables para los discos. Un ejemplo de estos casos es mostrado en la figura 3.10. Estos discos son los mismos que presentan velocidades tangenciales bien comportadas.

Finalmente, calculamos $\sigma_+ + \sigma_-$ y $\sigma_{\pm} + p_{\pm}$ para los discos anteriores. Usando (2.27), (2.40) y (3.19), se obtiene

$$\sigma_+ + \sigma_- = 2 p_r \left[\frac{\mu}{\alpha} - \frac{1 + \mu^2 r^2}{1 + k^2 r^2} \right], \quad (3.26a)$$

$$\sigma_{\pm} + p_{\pm} = p_r \left[\frac{2\mu + \alpha}{2\alpha} - \frac{1 + \mu^2 r^2}{1 + k^2 r^2} \right]. \quad (3.26b)$$

Las relaciones anteriores se estudiaron para los valores de los parámetros μ y α correspondientes a los discos con un buen comportamiento de las velocidades tangenciales y del momentum angular específico. Como un ejemplo, en las figuras 3.11 y 3.12 se presentan, respectivamente, $\sigma_+ + \sigma_-$ y $\sigma_{\pm} + p_{\pm}$. Como se puede ver, para estos valores de los parámetros, la densidad de energía total del CRM, $\sigma_+ + \sigma_-$, es positiva solo en la región central de los discos pero negativa en el resto, teniendo un máximo en $r = 0$ y después decrece monótonamente. De otra parte, $\sigma_{\pm} + p_{\pm}$ es siempre positiva para estos casos. Se ve que el CRM obtenido es estable y satisface la condición de energía fuerte, aunque no satisface la condición de energía débil.

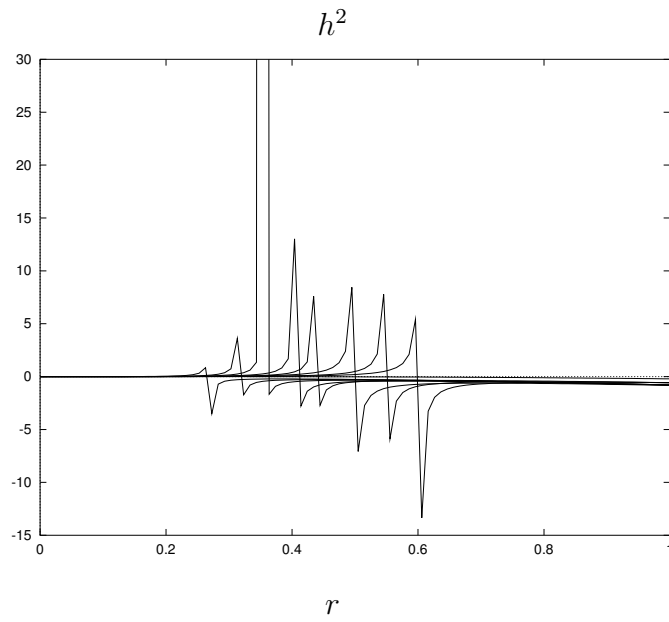


Figura 3.9: Momentum angular específico, h^2 , para discos con $\mu = 0,5$ y $\alpha = 0,5, 0,6, 0,8, 1,1, 1,4, 1,7, 2,2, 2,3$ y $2,8$.

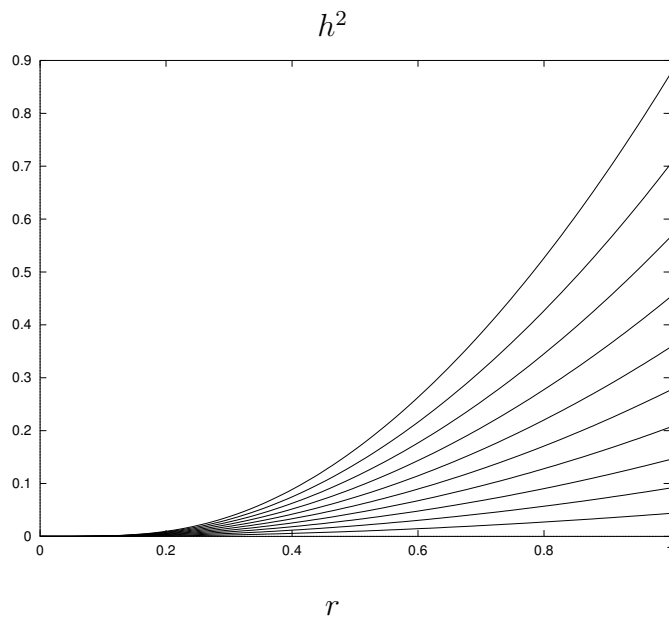


Figura 3.10: Momentum angular específico, h^2 , para discos con $\alpha = 5$ y $\mu = 5, 5,1, 5,2, 5,3, 5,4, 5,5, 5,6, 5,7, 5,8$ y $5,9$.

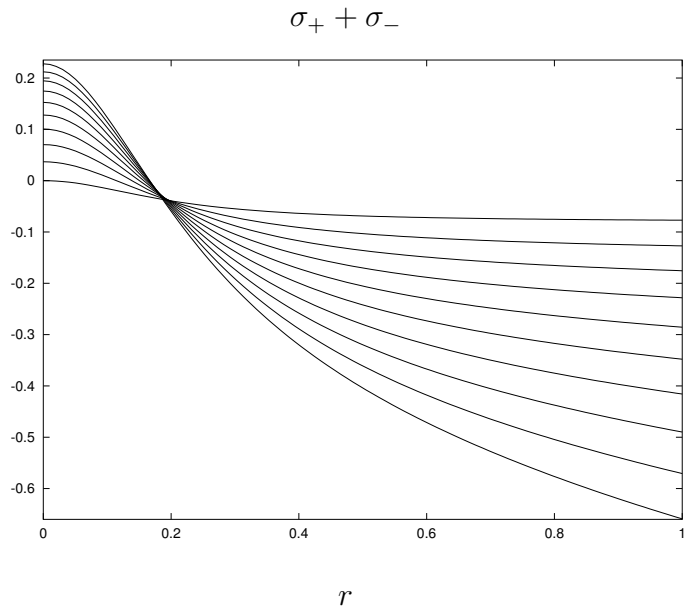


Figura 3.11: Gráficas de $\sigma_+ + \sigma_-$ para discos con $\alpha = 5$ y $\mu = 5, 5,1, 5,2, 5,3, 5,4, 5,5, 5,6, 5,7, 5,8$ y $5,9$.

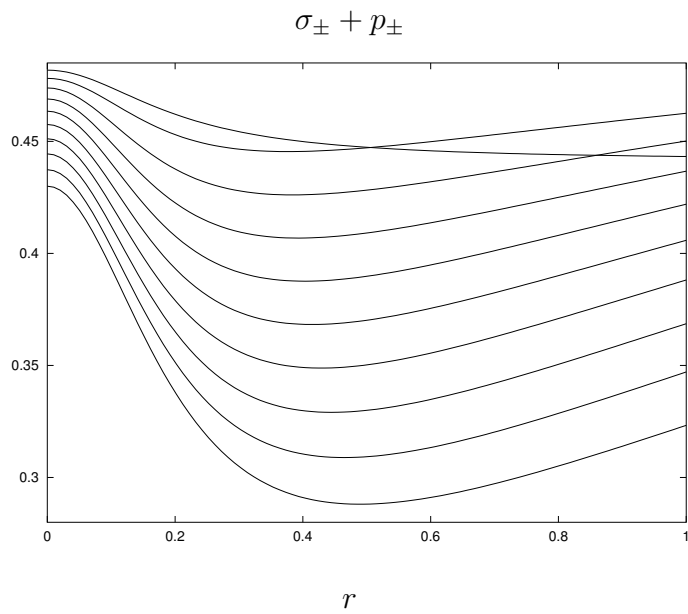


Figura 3.12: Gráficas de $\sigma_+ + p_+$ para discos con $\alpha = 5$ y $\mu = 5, 5,1, 5,2, 5,3, 5,4, 5,5, 5,6, 5,7, 5,8$ y $5,9$.

Capítulo 4

Discusión de resultados

En este trabajo se presentó un estudio detallado del Modelo de contra-rotación para discos delgados estáticos axialmente simétricos generales, con presión radial diferente de cero. Se encontró que, para discos construidos partiendo de métricas axialmente simétricas estáticas generales, las velocidades contra-rotantes no están completamente determinadas y así el CRM correspondiente en general estará indeterminado, puesto que la densidad de energía y la presión isotrópica no se pueden determinar explícitamente sin un conocimiento de las velocidades tangenciales contra-rotantes. Se pudo ver también que la ecuación (2.20) es una restricción demasiado fuerte para la descomposición de S^{ab} así que, en general, no es posible considerar el SEMT con presión radial diferente de cero como la superposición de dos flúidos perfectos contra-rotantes.

Se estudió una familia de discos que admite algunos CRM estables con velocidades tangenciales contra-rotantes bien definidas, pero con regiones de los discos donde la densidad de energía es negativa. Por otro lado, algunos discos de la familia presentan cambios fuertes en las pendientes de la velocidad tangencial y del momento angular específico, indicando inestabilidades fuertes del CRM.

La familia contiene igualmente discos con U^2 y h^2 negativos, así que no fue posible obtener el correspondiente CRM, y dos discos simples “verdaderamente estáticos” con $U_{\pm} = 0$, los cuales no tienen interpretación en términos del CRM.

El anterior análisis se puede realizar también con muchas otras soluciones de Weyl, más complicadas que la considerada aquí. Sin embargo, con el fin de tener un ejemplo simple del CRM, sólo se consideró esta solución y así se obtuvieron expresiones simples de todas las cantidades involucradas, de tal manera que se pudo hacer fácilmente el análisis de los diferentes aspectos del CRM. Por otra parte, es posible generalizar el modelo contra-rotante presentado aquí al caso de discos delgados rotantes, con o sin presión radial. También es posible la generalización para discos estacionarios y estáticos con campos eléctricos y magnéticos.

Bibliografía

- [1] W. A. Bonnor and A. Sackfield, *Comm. Math. Phys.* 8, 338 (1968).
- [2] T. Morgan and L. Morgan, *Phys. Rev.* 183, 1097 (1969).
- [3] L. Morgan and T. Morgan, *Phys. Rev. D*2, 2756 (1970).
- [4] A. Chamorro, R. Gregory and J. M. Stewart, *Proc. R. Soc. Lond. A* 413, 251 (1987).
- [5] G. A. González and P. S. Letelier. *Class. Quantum Grav.* 16, 479 (1999).
- [6] P. S. Letelier. *Phys. Rev. D* 60, 104042 (1999).
- [7] J. Katz, J. Bičák and D. Lynden-Bell, *Class. Quantum Grav.* 16, 4023 (1999).
- [8] D. Lynden-Bell and S. Pineault, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 185, 679 (1978).
- [9] P.S. Letelier and S. R. Oliveira, *J. Math. Phys.* 28, 165 (1987).
- [10] J. P. S. Lemos, *Class. Quantum Grav.* 6, 1219 (1989).
- [11] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier, *Class. Quantum Grav.* 10, L75 (1993).
- [12] J. Bičák, D. Lynden-Bell and J. Katz, *Phys. Rev. D*47, 4334 (1993).

- [13] J. Bičák, D. Lynden-Bell and C. Pichon, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 265, 126 (1993).
- [14] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier, *Phys. Rev D* 49, 5135 (1994).
- [15] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier, *Int. J. Mod. Phys. D* 5, 53 (1996).
- [16] J. Bičák and T. Ledvinka. *Phys. Rev. Lett.* 71, 1669 (1993).
- [17] T. Ledvinka, M. Zofka and J. Bičák, in *Proceedings of the 8th Marcel Grossman Meeting in General Relativity*, edited by T. Piran (World Scientific, Singapore, 1999), pp.339-341.
- [18] G. A. González and P. S. Letelier, *Phys. Rev. D* 62, 064025 (2000).
- [19] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*. (North Holland, 1966)
- [20] C. Klein, *Class. Quantum Grav.* 14, 2267 (1997).
- [21] C. Klein and O. Richter, *Phys. Rev. Lett.* 83, 2884 (1999).
- [22] C. Klein, *Phys. Rev. D* 63, 064033 (2001).
- [23] J. Frauendiener and C. Klein, *Phys. Rev. D* 63, 084025 (2001).
- [24] C. Klein, *Phys. Rev. D* 65, 084029 (2002).
- [25] C. Klein, *Phys. Rev. D* 68, 027501 (2003).
- [26] V. C. Rubin, J. A. Graham and J. D. P Kenney. *Ap. J.* 394, L9-L12, (1992).
- [27] H. Rix, M. Franx, D. Fisher and G. Illingworth. *Ap. J.* 400, L5-L8, (1992).
- [28] H. Weyl. *Ann. Phys.* 54, 117 (1917).

- [29] H. Weyl. *Ann. Phys.* 59, 185 (1919).
- [30] P. S. Letelier. *Phys. Rev. D* 22, 807 (1980).
- [31] J. J. Ferrando, J. A. Morales and M. Portilla. *Gen. Rel. and Grav.* 22, 1021 (1990).
- [32] S. Chandrasekar, *The Mathematical Theory of Black Holes*. (Oxford University Press, 1992).
- [33] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Addisson-Wesley, 1989).
- [34] B. F. Schutz, *A first course in general relativity*. (Cambridge University Press, 1985).
- [35] G. S. Hall and D. A. Negm, *Int. J. Theor. Phys.* 25, 405 (1986).
- [36] H. P. Robertson and T. W. Noonan. *Relativity and Cosmology*. (Saunders, 1969).
- [37] J. Chazy, *Bull. Soc. Math. France* 52, 17 (1924).
- [38] H. E. J. Curzon, *Proc. London Math. Soc.* 23, 477 (1924).
- [39] D. M. Zipoy, *J. Math. Phys.* 7, 1137 (1966).
- [40] B. H. Voorhees, *Phys. Rev. D* 2, 2119 (1970).
- [41] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. (Cambridge University Press, 1973).
- [42] A. H. Taub, *Space-times with Distribution Valued Curvature Tensors*. *J. Math. Phys.* 21, 1423 (1980).

- [43] A. Wang, *Plane Walls Interacting with Gravitational Waves and Matter Fields*. J. Math. Phys. 32, 2863 (1991).
- [44] A. Wang, *Dynamics of Plane Symetric Thin Walls in General Relativity*. Phys. Rev. D45, 3534 (1992).
- [45] P. S. Letelier and A. Wang, *Space-time Defects*. J. Math. Phys. 36, 3023 (1995).
- [46] D. Kramer, H. Herlt, and M. McCallum, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. (Cambridge University Press, 1980).
- [47] R. M. Wald, *General Relativity*. (The University of Chicago Press, 1980).
- [48] G. A. González, *Construção de Modelos Relativísticos de Discos com Suporte de Esforço na Direção Radial*. Tesis de Doctorado en Matemática Aplicada. (Universidade Estadual de Campinas, 1998).