

ESPECTRO ENERGÉTICO DE UN ELECTRÓN EN DOBLE NANOHILO COAXIAL

WILMAR LEONARDO VEGA VARGAS



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

Bucaramanga

2011

ESPECTRO ENERGÉTICO DE UN ELECTRÓN EN DOBLE NANOHILO COAXIAL

WILMAR LEONARDO VEGA VARGAS

Trabajo de Grado presentado como requisito para optar al título de:

FISICO

DIRECTOR:

HAROLD PAREDES GUTIERREZ, Ph.D



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

Bucaramanga

2011

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	11
1. MODELO MATEMÁTICO.....	17
1.1 HAMILTONIANO DEL SISTEMA.....	17
2. SOLUCIONES EXACTAS A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER.	20
2.1 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER PARA UN ELECTRÓN EN UN NANOHILO SIN LA PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO.	21
2.1.1. DENSIDAD DE LOS ESTADOS.....	23
2.2 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER PARA UN ELECTRÓN EN UN NANOHILO CON LA PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO.....	25
2.2.1 APLICACIONES A UN ANILLO 1-D	30
2.3 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER PARA UN ELECTRÓN EN DOBLE NANOHILO SIN LA PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO.	31
2.3 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER PARA UN ELECTRÓN EN DOBLE NANOHILO EN LA PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO.	38
3. SOLUCIÓN METODO BARRIDO TRIGONOMETRICO.	39
4. ANALISIS DE RESULTADOS.....	43

5. CONCLUSIONES.....	50
CITAS BIBLIOGRÁFICAS.....	51
BIBLIOGRAFIA.....	52

TABLA DE GRAFICAS

<i>GRAFICA 1 NIVELES ENERGÉTICOS EN FUNCIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO. CALCULADO PARA 10 DIFERENTES VALORES DE γ</i>	<i>43</i>
<i>GRAFICA 2 NIVELES ENERGÉTICOS EN FUNCIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO. CALCULADO PARA 50 Y 100 DIFERENTES VALORES DE γ</i>	<i>44</i>
<i>GRAFICA 3 NIVELES ENERGÉTICOS EN FUNCIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO. CALCULADO PARA 200 DIFERENTES VALORES DE γ</i>	<i>44</i>
<i>GRAFICA 4. NIVELES ENERGÉTICOS EN FUNCIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO PARA DIFERENTES RADIOS DEL POZO EXTERNO Y PARA LOS ANCHOS DE LOS POZOS Y EL RADIO INTERNO FIJOS.....</i>	<i>45</i>
<i>GRAFICA 5 NIVELES ENERGÉTICOS EN FUNCIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO PARA DIFERENTES RADIOS Y ANCHOS DEL POZO EXTERNO Y PARA LOS ANCHOS DE LOS POZOS Y EL RADIO INTERNO FIJOS.</i>	<i>47</i>
<i>GRAFICA 6. NIVELES ENERGÉTICOS EN FUNCIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO PARA DIFERENTES RADIOS Y ANCHOS DEL POZO INTERNO Y PARA EL ANCHO DEL POZO EXTERNO FIJOS.</i>	<i>48</i>

TABLA DE FIGURAS

<i>FIG. 1. FORMA EXPERIMENTAL DE LA ELABORACION DE UN DOBLE NANOHILO COAXIAL</i>	19
<i>FIG. 2 FORMA DEL POTENCIAL V_0 PARA UN NANOHILO</i>	21
<i>FIG. 3 DENSIDAD DE ESTADOS PARA UN NANOHILO</i>	24
<i>FIG. 4 EFECTO AB PARA UN ANILLO DELGADO</i>	31
<i>FIG. 5 FORMA DEL POTENCIAL PARA UN DOBLE NANOHILO</i>	32
<i>FIG. 6. REGIONES PARA ANALIZAR LAS CONDICIONES DE CONTORNO EN UN DOBLE NANOHILO COAXIAL</i>	34
<i>FIG. 7. FORMA DEL POTENCIAL EFECTIVO PARA ANALIZAR EL METODO DE BARRIDO TRIGONOMETRICO</i>	40

RESUMEN

TÍTULO: ESPECTRO ENERGÉTICO DE UN ELECTRÓN EN DOBLE NANOHILO COAXIAL*

AUTOR: WILMAR LEONARDO VEGA VARGAS**

PALABRAS CLAVE: Espectro energético, Método barrido trigonométrico, hilos coaxiales, nanohilos.

DESCRIPCIÓN: Se estudia el espectro energético de un electrón en dos nanotubos coaxiales de GaAs/Ga(Al)As cuando están en la presencia de un campo magnético homogéneo y dirigido a lo largo del eje de simetría, Debido a la simetría de la estructura la Ecuación de Schrödinger para este modelo es de variable separable y las soluciones para la energía y la funciones de onda pueden ser encontradas en forma exacta. La solución para la función de onda exacta puede ser expresadas en forma de una combinación lineal de funciones hipergeométricas, mientras que los valores de la energía se encuentran de las raíces de la ecuación trascendente expresadas en términos de las mismas funciones. Como método alternativo para resolver la parte radial de la ecuación de Schrödinger ha sido considerado el método numérico de barrido trigonométrico. Se presenta el resultado del cálculo que nos permite analizar el efecto de tamaño cuántico en el espectro de energía relacionados con la variación de los anchos de los nanotubos interno y externo y la separación entre ellos.

Para analizar las dependencias de los niveles energéticos de los parámetros geométricos y de la intensidad de campo magnético se calcularon las energías de los primeros diez niveles en función del campo magnético, de anchos de los nanotubos interno y externo y de la distancia entre ellos. Los resultados obtenidos permiten concluir que las energías tienen una alta sensibilidad al número de los puntos calculados. En las curvas de los niveles energéticos en función de la intensidad de campo magnético se observan las intersecciones entre las curvas acompañadas con intercambio de las posiciones de los niveles y las oscilaciones de la energía del estado base.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Dr. Harold Paredes Gutiérrez.

ABSTRACT

TITLE: ENERGY SPECTRUM OF ONE ELECTRON IN DOUBLE COAXIAL NANOWIRES*

AUTHOR: WILMAR LEONARDO VEGA VARGAS**

KEY WORDS: Energy spectrum, trigonometric sweep method, coaxial wires, nanowires.

DESCRIPTION: We study the energy spectrum of an electron confined in two coupled coaxial nanotubes GaAs / Ga (Al) As in the presence of a homogeneous magnetic field applied along the axis of symmetry. Due to the structure symmetry the variables in the Schrödinger equation can be separate and the energies and wave functions can be found exactly. The exact wave functions are expressed in the form of a linear combination of hypergeometric functions, while the energies are found as roots of a transcendent equation expressed in the terms of the same functions. As alternative method for solving the radial part of the Schrödinger equation has been considered the numerical trigonometric sweep method. We present the result the calculation that allows us to analyze quantum-size effect on the energy spectrum related with variation of widths of the internal and external nanotubes and the separation between them.

To analyze the dependencies of the energy levels on the geometric parameters and magnetic field strength the energies of the first ten levels as functions of the magnetic field, the widths of the inner and outer nanotubes and the distance between them are calculated. The results exhibit highly sensitive of the energies to the number of points used in the calculation. The curves of the energy levels as a function of magnetic field strength are observed the intersections between the curves accompanied by exchange of the positions and the oscillation of ground-state energy.

* Work Degree.

** Faculty of Science. School of Physics. Directress: Dr. Harold Paredes Gutierrez.

INTRODUCCIÓN.

Durante las últimas décadas del siglo XX, la física ha cambiado el concepto de los fenómenos microscópicos, la cual presenta una serie de fenómenos un poco confusos respecto a los que normalmente llamamos cotidianos o fenómenos macroscópicos. Dada la necesidad de poder explicar estos eventos físicos, nació una rama con más trascendencia tecnología e industrial de toda la historia, esta es llamada la Nanofísica; la cual se dedica a estudiar las propiedades cuánticas que emergen en un régimen intermedio entre la física atómica y la física macroscópica. Dedicándose al estudio de las propiedades físicas y especialmente electrónicas de los materiales, que en este caso son semiconductores cuyas características físicas se varían bruscamente a órdenes de 1 a 100 nanómetros que conduce a nuevos fenómenos típicos a esta escala [1,6].

Dentro de la estructura que se tienen se pueden clasificar según el tipo de confinamiento como superredes, pozo cuántico, hilo cuántico y puntos cuánticos. Las superredes consisten en un arreglo secuencial alternado de capas de dos o más tipos diferentes con espesores en la escala de los nanómetros dentro del rango de longitud característica de ondas de De Broglie de los portadores de carga, ocasionando así que los niveles energéticos se desacoplen y dan lugar a la aparición de múltiples sub-bandas. Entonces se dice que un nivel energético no pertenece a un solo elemento de la estructura sino a todo el conjunto, en este sentido la superred se comporta como un sólido artificial pero con periodicidad mucho mayor que la de cualquier sólido. Estas heteroestructuras exhiben comportamientos nuevos e interesantes en sus propiedades eléctricas, magnéticas y de transporte[6].

Un pozo cuántico es la denominación que recibe un potencial que confina, en dos dimensiones, partículas que originalmente tenían libertad para moverse en tres,

forzándolas a ocupar una zona plana. Los efectos del confinamiento cuántico se producen cuando el espesor del pozo cuántico es comparable a la longitud de onda de De Broglie de las partículas portadoras de energía (generalmente electrones y huecos de electrones), generando así niveles de energía llamadas "sub-bandas energéticas", por lo que la energía de estos portadores, solo podrá tener valores discretos energía [2].

Un hilo cuántico es una nanoestructura en la que los efectos cuánticos afectan las propiedades del transporte en las direcciones transversales a una de los ejes. La energía de los electrones de conducción es cuantizada por el confinamiento en dicha dirección. Es posible, por ejemplo fabricar hilos cuánticos en forma de nanotubos donde el efecto túnel permite que los electrones salten de un filamento a otro, caso que se encuentra en este estudio donde el electrón podrá tunelar de un pozo al otro.[3].

Un punto cuántico, generalmente es una nanoestructura semiconductor que confine el movimiento, en las tres direcciones espaciales, de los electrones de la banda de conducción, los huecos de la banda de valencia, o excitones. El caso particular de puntos cuánticos se presenta en las estructuras fabricadas recientemente [4,11], la cual poseen simetría axial llamados anillos cuánticos [16]. El movimiento de los portadores de carga se restringe dentro una cavidad semiconductor entre el radio interno y externo con un ancho muy pequeño comparado con el radio, además, de ser muy delgado, lo que restringe el movimiento en el eje de simetría, de esta manera se logra el confinamiento en las tres direcciones espaciales.

El estudio teórico del movimiento de los portadores en cristales se ha basado tradicionalmente en la aproximación de masa efectiva (AME). Esta consiste en subsumir los efectos del potencial cristalino periódico en un cambio del valor real

de la masa de los portadores en miras de analizar su respuesta a la presencia de campos eléctricos o magnéticos. En el caso de las heteroestructuras, la aplicación de la AME se mantuvo reservada hasta que Bastard la aplicó exitosamente para calcular la energía de estado base de una donadora en un QW infinito [5] analizando su dependencia de la anchura del pozo y de la posición de la impureza dentro del mismo. Desde entonces, se ha publicado una multitud de artículos sobre los espectros energéticos de heteroestructuras con base en la AME, extendiéndose a diversos compuestos de portadores confinados como excitones, triones, donadoras cargadas negativamente D^- , etc [16].

Para calcular las energías de enlace en estos sistemas en el marco de AME se han utilizado diferentes métodos aproximados, siendo quizás los más sencillos el variacional [7] y el de diagonalización matricial [8]. Ambos métodos requieren de un considerable volumen de cómputo, el cual crece exponencialmente con el aumento del número de partículas, y además presentan importantes limitaciones en cuanto al alcance de su aplicación. El método variacional sólo permite hacer un estimativo de la energía del estado base, mientras que el método de diagonalización es poco aplicable para potenciales diferentes del parabólico. Otros métodos también usados para analizar el espectro de sistemas de pocas partículas en heteroestructuras son el de expansión por series, dimensión fraccionaria, teoría de perturbaciones y diferentes técnicas numéricas tales como elementos y diferencias finitas y el método a utilizar para analizar nuestro fenómeno, el método de barrido trigonométrico que se explicara paso a paso en qué consiste más adelante [9]. Todas estas técnicas resultan ser bastante complicadas para el análisis del espectro energético cuando el número de partículas crece. Una de las maneras de obviar esta dificultad es sacando provecho de las características morfológicas de las heteroestructuras, como es el caso de los SAQDs, para los cuales se sabe que la altura es mucho menor que las dimensiones de su base, lo que permite hacer uso de la aproximación adiabática (AA). Esta aproximación permite reducir problemas tridimensionales a problemas similares en espacios de una o dos dimensiones con Hamiltonianos renormalizados [10].

Otro problema interesante y de gran actualidad es el análisis de sistemas de pocas partículas confinadas en nanotubos. Debido a una gran variedad de posibilidades para aplicaciones que pueden tener este tipo de heteroestructuras existe un gran interés de investigar sus propiedades opto-electrónicas. Hasta donde conocemos, la mayoría de los cálculos que se han realizado sobre el espectro electrónico de donadoras, dos electrones, excitones, y triones en nanohilos, en estas estructuras fueron hechos para un nanotubo solitario [11]. Pero recientemente fueron fabricados nanotubos coaxiales [12] cuya estructura es parecida a doble pozo cuántico considerado como el primer candidato para celdas para computación cuántica [13]. Los cálculos detallados para nanotubos coaxiales deben incluir el análisis riguroso del desdoblamiento de los niveles energéticos lo que hasta donde nosotros conocemos hasta ahora no se había realizado. Otro aspecto importante a tratar es el estudio del efecto Aharonov-Bohm en un doble nanohilo coaxial. Además de encontrar y describir que pasa con el comportamiento de la función de onda en el estado base sabiendo que la solución de la ecuación de Schrödinger es de forma exacta, debido a que el Hamiltoniano es separable, además se pretende establecer cuál es la densidad de estados y como varían en función de campo magnético B externo que va en dirección del eje de simetría del nanohilo y en nuestro caso será en la dirección B_z , después de tener esto se estudiará y analizará como varía la magnetización en función del campo externo aplicado.

El efecto *Aharonov-Bohm* (AB) [14] es un fenómeno mecánico cuántico descubierto por *Yakir Aharonov* y *David Joseph Bohm* en el año de 1959, en el cual una partícula cargada es afectada por un campo electromagnético externo, pero experimentalmente es más fácil de ser observado cuando se encuentra solo en presencia de campo magnético. Este fenómeno de interferencia es asociado con las corrientes persistentes y magnetización, es sufrido por diferentes nanoestructuras y especialmente para el caso de los anillos cuánticos con sección transversal uniforme y afortunadamente muchas propiedades de los anillos pueden ser explicados con la teoría de un solo electrón [15]. En este trabajo se analiza como varía este efecto para un hilo y en especial para un doble hilo coaxial debido a que

la mayoría de trabajos y artículos publicados hace énfasis en anillos simétricos y asimétricos además de variar la morfología del anillo pero ninguno habla de cómo se puede estudiar este fenómeno para nanohilos.

Para analizar el efecto AB en un nanohilo uniforme, es conveniente usar las coordenadas cilíndricas y solucionar la ecuación de Schrödinger en la dirección angular teniendo en cuenta que la diferencia entre el radio interno y el radio externo es muy pequeño. En un hilo uniforme, sus radios interno R_i y externo R_e son constantes para diferentes ángulos igual como el ancho del grosor $d(\varphi)$ de sección transversal que define como la diferencia entre el radio externo e interno para determinado ángulo. Para analizar el movimiento del electrón confinado en este anillo en el marco de la aproximación adiabática, se plantea que la sección transversal tiene que ser muy pequeña $d(\varphi) \ll R_i(\varphi)$. Por lo tanto se puede decir que el electrón estará circulando con un radio R constante (igual al radio de la línea central) y definiendo al *hilo delgado*, como aquel hilo que tenga un tamaño mínimo de sección transversal mucho menor que su longitud mínima de radio interno [6].

De esta manera al realizar una serie de sustituciones a unidades a -dimensionales y trabajar un poco, se obtiene un Hamiltoniano a -dimensional en función de las derivadas angulares, el número cuántico orbital magnético y una última variable, que es proporción a la intensidad de campo magnético B externo. Por consiguiente al obtener la energía del electrón, se observa que está compuesta por dos términos relevantes para su análisis, un elemento paramagnético y otro diamagnético.

Un tema importante es la posibilidad de ampliación de dicho fenómeno ya que en esta tesis se hace énfasis al estudio del efecto AB para un electrón en un doble hilo

coaxial, pero queda pendientes muchas más casos como es el de un excitón, el cual hace necesaria la ampliación del estudio de este efecto AB en dos hilos cuánticos coaxiales o nanohilos, teniendo en cuenta la variación de la intensidad del campo magnético externo, así como de los radios del nanohilo cuando estos son concéntricos y cuando no lo son.

1. MODELO MATEMÁTICO

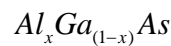
1.1 HAMILTONIANO DEL SISTEMA

Para analizar el modelo matemático de un electrón dentro de un nanohilo de GaAs/Ga(Al)A, es necesario describir el Hamiltoniano para el sistema teniendo en cuenta en la presencia del campo magnético externo está dirigido a lo largo del eje de simetría que para nuestro caso en particular será el eje z. En este caso, y haciendo uso de la aproximación de masa efectiva, el Hamiltoniano resulta:

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + V(\rho) \quad (1.1)$$

donde el termino m^* es la masa efectiva para el electrón, la cual se supondrá igual tanto dentro como fuera de la heteroestructura, $\vec{p} = -i\hbar\nabla$ el operador de momento lineal, y \vec{A} el vector potencial del campo magnético, la forma de el potencial magnético se explica más adelante en la sección 2.2 .

El potencial $V(\rho)$ depende de las concentraciones de aluminio (Al), así se puede variar el tamaño de la barrera de potencial de la siguiente manera:



Teniendo como condiciones para el valor de x .

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 240 & \text{si } x=1 \end{cases} \quad (1.2)$$

Las unidades de estos valores son meV.

Por lo tanto, para una mayor facilidad de aquí en adelante se hará uso de unidades adimensionales donde redefiniendo unas variables se puede obtener:

$$\frac{\hbar^2}{2m^* a_o^{*2}} = \frac{e^2}{2\epsilon a_o^*} = R_y^*$$

Donde:

$$a_o^* = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \left(\frac{m_o}{m^*} \right) \epsilon = a_o \left(\frac{m_o}{m^*} \right) \epsilon \quad (1.3)$$

Teniendo como valores numéricos para: $\epsilon = 12.5$; $a_o \approx 0.5 \text{ \AA}$ $\frac{m_e}{m^*} = \frac{1}{0.067} \approx 15$

se obtiene el valor para el radio efectivo.

$$a_o^* = 10nm \quad (1.4)$$

de la misma manera para el valor de R_y que es la constante de Rygberg efectiva se tiene:

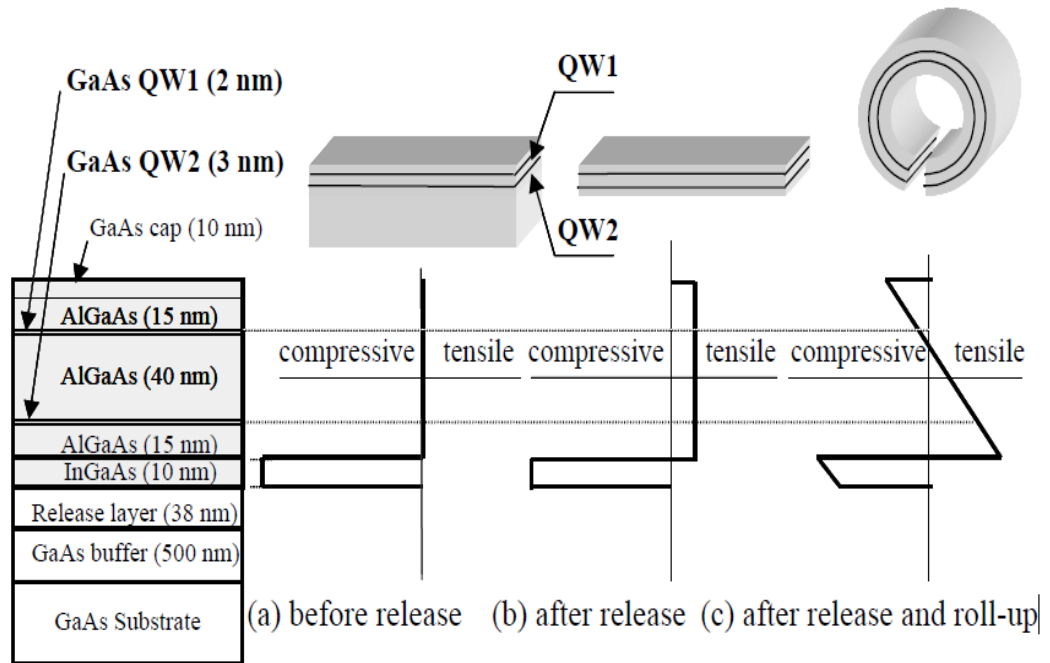
$$R_y^* = \frac{e^2}{2\epsilon a_o^*} = \frac{e^2}{2a_o} \left(\frac{a_o}{a_o^*} \right) \frac{1}{\epsilon} = R_y \left(\frac{a_o}{a_o^*} \right) \frac{1}{\epsilon} = 0.5mev \quad (1.5)$$

Así la ecuación de Schrödinger adimensional es de una manera mucho más fácil debido a que no depende de las condiciones del material:

$$-\frac{1}{2m^*} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi + V(\rho)\psi = E\psi \quad (1.6)$$

Experimentalmente los dobles nanotubos se construyen colocando capas de los diferentes materiales, por último se coloca una capa de un material diferente que soporte la tensión a la hora de enrollarse para formar el nanohilo como se muestra en la figura:

FIG. 1. FORMA EXPERIMENTAL DE LA ELABORACION DE UN DOBLE NANOHILO COAXIAL



FUENTE: K. Kubota et al. / Physica E 13 (2002) 313 – 316.

2. SOLUCIONES EXACTAS A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER.

La ecuación de Schrödinger en unidades a-dimensionales para nuestro modelo es de la forma:

$$-\left(\nabla - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 \psi + V(\rho)\psi = E\psi \quad (2.1)$$

En el caso en que no se tiene la presencia de campo el valor del potencial magnético A será igual a cero, por lo tanto, es por ahí donde comenzara el estudio como paso inicial para solucionar la ecuación de Schrödinger y encontrar los valores de la energía de un electrón dentro de un nanohilo coaxial, luego se analizara el caso cuando el valor del potencial magnético es diferente de cero y por último se extenderá este conocimiento para el electrón en un doble nanohilo.

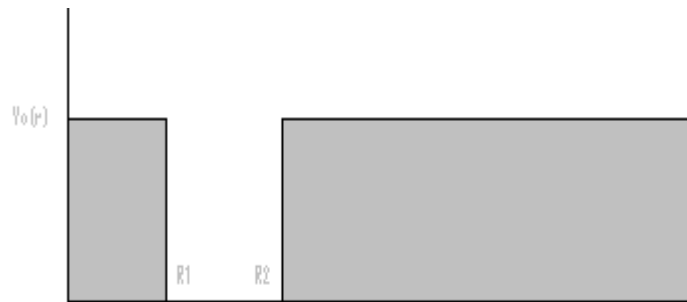
Para encontrar las soluciones exactas a dicha ecuación (2.1) para el electrón dentro de un nanotubo es conveniente utilizar coordenadas cilíndricas, debido a la simetría del problema, escrito en estas coordenadas cilíndricas y teniendo en cuenta que $\vec{p} = -i\hbar\nabla$ el operador de momento se tiene que la ecuación (2.1) en unidades adimensionales queda le la forma:

$$-\left(\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 \psi + V(\rho)\psi = E\psi \quad (2.2)$$

2.1 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER PARA UN ELECTRÓN EN UN NANOHILO SIN LA PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO.

Como se dijo anteriormente en este caso el valor del potencial magnético A es cero y las condiciones para el potencial eléctrico están dadas por:

FIG. 2 FORMA DEL POTENCIAL V_0 PARA UN NANOHILO



$$V_0(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } R_1 < \rho < R_2 \\ V_0 = \infty & \text{si } 0 < \rho < R_1 \cap \rho > R_2 \end{cases}$$

La solución para esta ecuación tiene la forma:

$$\psi(\rho, \varphi, z) = e^{im\varphi} e^{ikz} R(\rho) \quad (2.3)$$

Remplazando la ecuación (2.3) en (2.2) y realizando las derivadas se tiene que:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} R(\rho) \right) + \left(\frac{m^2}{\rho^2} + k^2 \right) R(\rho) = ER(\rho) \quad (2.4)$$

Como el valor k^2 es una constante se puede sumar a la energía y se tiene una nueva ecuación menos extensa:

$$-\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial \rho} + \left(\frac{m^2}{\rho^2} \right) R = (E - k^2) R \quad (2.5)$$

Introduciendo una nueva variable definida por:

$$\varepsilon = E - k^2 \quad \rho = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\ddot{R}(x) + \frac{1}{x} \dot{R}(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R(x) = 0 \quad (2.6)$$

Los nuevos valores para x serán:

$$R_1 \sqrt{\varepsilon} < x < R_2 \sqrt{\varepsilon}$$

La solución para la ecuación diferencial (2.6) son la funciones de Bessel (J) y de Neuman (Y).

$$R_m(x) = AJ_m(x) + BY_m(x) \quad (2.7)$$

Retomando nuestra primera variable ρ la solución dentro del pozo toma la forma:

$$R_m(\rho) = AJ_m(\rho\sqrt{\varepsilon}) + BY_m(\rho\sqrt{\varepsilon}) \quad (2.8)$$

Para encontrar los valores de A y B se tiene en cuenta las condiciones de frontera sabiendo que las barreras de potencial son infinitas:

$$R_m(R_1) = AJ_m(R_1\sqrt{\varepsilon}) + BY_m(R_1\sqrt{\varepsilon}) = 0 \quad (2.9)$$

$$R_m(R_2) = AJ_m(R_2\sqrt{\varepsilon}) + BY_m(R_2\sqrt{\varepsilon}) = 0$$

Luego la ecuación (2.9) se puede escribir de una manera matricial más fácil donde las soluciones a esta ecuación nos dan los valores para la energía:

$$\begin{pmatrix} J_m(R_1\sqrt{\varepsilon}) & Y_m(R_1\sqrt{\varepsilon}) \\ J_m(R_2\sqrt{\varepsilon}) & Y_m(R_2\sqrt{\varepsilon}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

Para que la ecuación (2.10) tenga una solución hay dos posibles formas, una que los valores de A y B sea cero que sería la solución trivial y la otra manera que el determinante de la matriz sea cero que es la solución no trivial:

$$\det \begin{pmatrix} J_m(R_1\sqrt{\varepsilon}) & Y_m(R_1\sqrt{\varepsilon}) \\ J_m(R_2\sqrt{\varepsilon}) & Y_m(R_2\sqrt{\varepsilon}) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

Luego el determinante de la matriz es lo que llamamos la ecuación trascendente que nos da los valores posibles de la energía.

$$AJ_m(R_1\sqrt{\varepsilon})BY_m(R_2\sqrt{\varepsilon}) - AJ_m(R_2\sqrt{\varepsilon})BY_m(R_1\sqrt{\varepsilon}) = 0 \quad (2.12)$$

$$E_{n,m} = \varepsilon_{m,n} + k^2 \quad (2.13)$$

2.1.1. DENSIDAD DE LOS ESTADOS.

Como la solución para la ecuación (2.12) son ciertos valores de energía que se pueden llamar niveles energéticos y sus estados o auto-vectores correspondientes. Este conocimiento conjunto de vectores y auto-valores propios del hamiltoniano se resume con frecuencia en el concepto de *densidad de estados*. Este se define como el número de estados, por unidad de volumen y por unidad de energía, cuya energía se encuentra entre un valor E y un valor $E + dE$. La presencia de la unidad de volumen surge, en el caso de los semiconductores, de la finitud del cristal y por lo tanto de las condiciones de Born-von Kármán. De no existir esa restricción de finitud, habría infinitos estados en el intervalo $[E, E + dE]$. La densidad de estados puede escribirse como:

$$\xi(E) = \sum_{n,m} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(E - E_{n,m}(k)) dk \quad (2.14)$$

Donde se puede decir que los índices n y m corresponden al número cuántico radial, y número cuántico acimutal. De la ecuación (2.13) se tiene que:

$$\xi(E) = \sum_{n,m} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(E - \varepsilon_{n,m} - k^2) dk$$

De las propiedades de la función delta δ :

$$\delta[f(x)] = \frac{1}{|f'(x)|} \delta(x - x_0); \quad f(x_0) = 0 \quad (2.15)$$

Sabiendo que:

$$f(k) = E - \varepsilon_{n,m} - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_0 = \sqrt{E - \varepsilon_{n,m}} \quad (2.16)$$

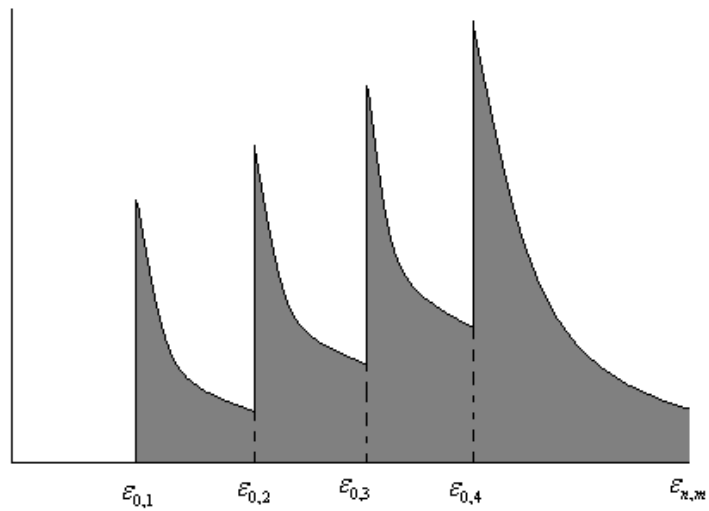
Y su respectiva derivada:

$$f'(k) = \frac{1}{2\sqrt{E - \varepsilon_{n,m}}} \quad (2.17)$$

$$\xi(E) = \sum_{n,m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{E - \varepsilon_{n,m}}} \delta(k - k_0) dk = \sum_{n,m} \frac{1}{2\sqrt{E - \varepsilon_{n,m}}} \quad (2.18)$$

Donde para cada valor de $\varepsilon_{n,m}$ se tiene una curva distinta, y sumando todas las contribuciones de cada estado n y m lo que obtenemos son sub-bandas de energía y no líneas de energía como se muestra en la siguiente grafica que es una gran diferencia entre un anillo y un nanotubo.

FIG. 3 DENSIDAD DE ESTADOS PARA UN NANOHILO



Como surgen la secuencia de los estados $\varepsilon_{n,m}$ depende de las dimensiones del nanotubo, así si R es grande y la diferencia entre los dos radios $L = R_2 - R_1$ es pequeño se ordenan de la forma de la grafica mientras que R es comparable con L los estados se mezclan debido a que los valores de la energía son comparables y van de la siguiente manera.

$$\Delta E_m = \frac{\hbar^2}{L^2}; \quad \Delta E_n = \frac{1}{R^2}$$

2.2 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER PARA UN ELECTRÓN EN UN NANOHILO CON LA PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO.

Cuando se tiene en cuenta la presencia del campo magnético el valor del potencial A es diferente de cero, y el potencial $V_0 = \infty$, la ecuación de Schrödinger es de la forma:

$$-\left(\overline{i\hbar\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 \psi + V(\rho)\psi = E\psi \quad (2.19)$$

Definiendo como:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B} \quad (2.20)$$

Y como se dijo en la sección anterior el campo magnético \vec{B} va en dirección del eje de simetría que en nuestro caso será la dirección $\vec{B} = B\hat{z}$ entonces:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} = \frac{yB}{2}\hat{i} + \frac{xB}{2}\hat{j} \quad (2.21)$$

Aplicando el rotacional de \vec{A} .

$$\text{Rot}(\vec{A}) = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & x & 0 \end{pmatrix} = \frac{B}{2} + \frac{B}{2} = B\hat{k} \quad (2.22)$$

Se ve claramente que cumple con la ecuación de Maxwell y por eso se puede escoger la forma del potencial magnético \vec{A} de la manera de la ecuación (2.20).

$$-\frac{1}{2m} \left(\hbar^2 \vec{\nabla} - \frac{i\hbar e}{c} \nabla \square \vec{A} - \frac{i\hbar e}{c} \vec{A} \square \nabla + \frac{e^2}{c^2} A^2 \right) \psi + V(\rho)\psi = E\psi \quad (2.23)$$

Por la condición de Gauge $\nabla \square A = A \square \nabla$

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} - \frac{i\hbar e}{2mc} \vec{A} \square \nabla + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 \right) \psi + V(\rho)\psi = E\psi \quad (2.24)$$

Analizando los términos que incluye el potencial magnético \vec{A} se tiene que:

$$A^2 = \frac{B^2}{4}(x^2 + y^2) = \frac{B^2}{4} \rho^2 \quad (2.25)$$

$$i\hbar \vec{A} \bullet \nabla = \frac{i\hbar B}{2} \left[y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right] = L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.26)$$

Remplazando las ecuaciones (2.25) y (2.26) en (2.24) se tiene que

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} + \frac{i\hbar e}{2mc} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e^2}{2mc^2} \frac{B^2}{4} \rho^2 \right) \psi + V(\rho)\psi = E\psi \quad (2.27)$$

Introduciendo una variable ω_p como la frecuencia ciclotrónica y definida por:

$$\omega_p = \frac{eB}{2mc}$$

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m^*} \vec{\nabla}^2 + \omega_p \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{m\omega_p^2 \rho^2}{2} \right) \psi + V(\rho)\psi = E\psi \quad (2.28)$$

En unidades adimensionales se tiene que:

$$-\left(\bar{\nabla}^2 + i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4}\right)\psi + V(\rho)\psi = E\psi \quad (2.29)$$

Donde el valor $i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi}$ es el término diamagnético y el valor $\frac{\gamma^2 \rho^2}{4}$ es el término paramagnético, y la ecuación de Schrödinger queda de la siguiente manera:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \psi - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi + i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi + V(\rho)\psi = E\psi \quad (2.30)$$

Como se dijo anteriormente la solución a la ecuación (2.30) es de variable separable y es de la forma

$$\psi_{(\rho, \varphi, z)} = e^{im\varphi} e^{ikz} \psi_m(\rho)$$

$$\psi_m(\rho) - \frac{m^2}{\rho^2} \psi_m(\rho) + \gamma m \psi_m(\rho) + k^2 \psi_m(\rho) + V(\rho)\psi_m(\rho) + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} \psi_m(\rho) - E\psi_m(\rho) = 0 \quad (2.31)$$

El valor de k será para este caso igual a cero $k = 0$ y a este valor se le llama piso de sub-banda pues es un valor aditivo.

$$\psi_m(\rho) - \frac{m^2}{\rho^2} \psi_m(\rho) + \left[\gamma m + V(\rho) + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} - \frac{m^2}{\rho^2} - E \right] \psi_m(\rho) = 0 \quad (2.32)$$

La condición de contorno para un nanohilo es:

$$\psi_m(R_i) = \psi_m(R_e) = 0$$

Analizando el comportamiento de la función cuando $\rho \rightarrow 0$ se tiene que los términos predominantes en la ecuación (2.32) son:

$$\psi_m(\rho) - \frac{m^2}{\rho^2} \psi_m(\rho) = 0 \quad (2.33)$$

La solución es del tipo

$$\psi_m(\rho) \rightarrow \rho^m$$

Realizando las derivadas de la ecuación (2.33) se tiene que:

$$m^2 \rho^{m-2} + m^2 \rho^{m-2} - m^2 \rho^{m-2} - m^2 \rho^{m-2} = 0 \Rightarrow \text{CUMPLE} \quad (2.34)$$

Ahora analizando el comportamiento de la función cuando $\rho \rightarrow \infty$ se tiene que los términos predominantes en la ecuación (2.32) son:

$$\psi_m(\rho) - \left[\frac{\gamma^2 \rho^2}{4} \right] \psi_m(\rho) = 0 \quad (2.35)$$

La solución es del tipo

$$\psi_m(\rho) \rightarrow e^{\frac{\gamma \rho}{2}}$$

Luego la solución general será de la forma:

$$\psi_m(\rho) = \rho^m e^{\frac{\gamma \rho}{2}} F(\rho) \quad (2.36)$$

Remplazando este en la ecuación (2.32) y realizando las derivadas escritas se lleva a la ecuación de Kumer:

$$xU''(x) + (|m| + 1 - x)U'(x) - aU(x) = 0 \quad (2.37)$$

Donde:

$$a = \frac{1}{2}(|m| + 1 - E)$$

Y sabiendo que el valor de x esta dado por la condición:

$$\gamma R_i^2 < x < \gamma R_e^2$$

Se tiene que:

$$U(\gamma R_e^2) = U(\gamma R_i^2) = 0 \quad (2.38)$$

La solución para este sistema son las funciones hipergeométricas o polinomios de Kummer:

$$U(x) = C_1 U(a, m+1, x) + C_2 M(a, m+1, x) \quad (2.39)$$

Analizando las condiciones de contorno de la ecuación (2.38) se tiene:

$$\begin{aligned} C_1 U(a, m+1, \gamma R_i^2) + C_2 M(a, m+1, \gamma R_i^2) &= 0 \\ C_1 U(a, m+1, \gamma R_e^2) + C_2 M(a, m+1, \gamma R_e^2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Estas ecuaciones con dos incógnitas se pueden escribir de una manera matricial:

$$\begin{pmatrix} U(a, m+1, \gamma R_i^2) & M(a, m+1, \gamma R_i^2) \\ U(a, m+1, \gamma R_e^2) & M(a, m+1, \gamma R_e^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.41)$$

Para que la ecuación (2.41) tenga una solución hay dos posibles formas, una que los valores de A y B sea cero que sería la solución trivial y la otra manera que el determinante de la matriz sea cero que es la solución no trivial:

$$\det \begin{pmatrix} U(a, m+1, \gamma R_i^2) & M(a, m+1, \gamma R_i^2) \\ U(a, m+1, \gamma R_e^2) & M(a, m+1, \gamma R_e^2) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.42)$$

Luego el determinante de la matriz es lo que llamamos la ecuación trascendente que nos da los valores posibles de la energía.

$$U(a, m+1, \gamma R_i^2) M(a, m+1, \gamma R_e^2) - U(a, m+1, \gamma R_e^2) M(a, m+1, \gamma R_i^2) = 0 \quad (2.43)$$

Ecuación Tracendente

Esta es la solución para un electrón confinado en un nanohilo sencillo en la presencia de campo magnético pero para ver una de las aplicaciones miraremos el caso en el que el radio es demasiado grande que se puede tomar constante y el ancho del pozo muy delgado.

2.2.1 APLICACIONES A UN ANILLO 1-D

Como se dijo anteriormente el efecto *Aharonov-Bohm* [14] es un fenómeno mecánico cuántico descubierto por *Yakir Aharonov* y *David Joseph Bohm* en el año de 1959, en el cual una partícula cargada es afectada por un campo electromagnético externo, pero experimentalmente es más fácil de ser observado cuando se encuentra solo en presencia de campo magnético. Para el análisis de un anillo en una dimensión tendremos en cuenta que el ancho del anillo L es muy pequeño en comparación al radio R , así, se dirá que el valor del radio R será constante y la ecuación diferencial se podrá reducir a los términos que dependen de la parte angular (φ), y como se dijo en la sección 2.1 la solución es de la forma:

$$\psi = e^{im\varphi} \quad (2.44)$$

El hamiltoniano para este sistema es de la forma:

$$H = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + i\gamma \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\gamma^2 R^2}{4} \quad (2.45)$$

Así realizando las derivadas y reemplazando se tiene que:

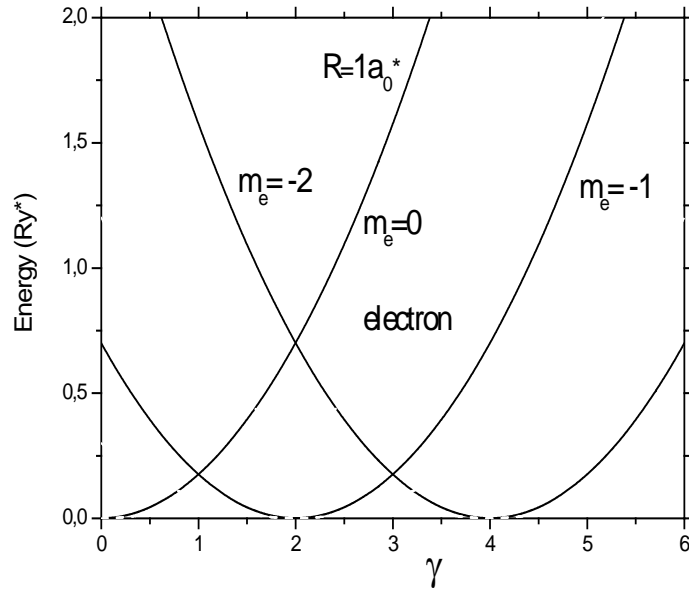
$$H\varphi = \left[\frac{1}{R^2} m^2 + i\gamma m + \frac{\gamma^2 R^2}{4} \right] \varphi = E\varphi \quad (2.46)$$

Donde la energía depende de los valores de m :

$$E_m = \frac{1}{R^2} \left(m + \frac{\gamma R^2}{2} \right)^2 \quad (2.47)$$

La grafica típica para el efecto *Aharonov-Bohm* para un anillo delgado es:

FIG. 4 EFECTO AB PARA UN ANILLO DELGADO.

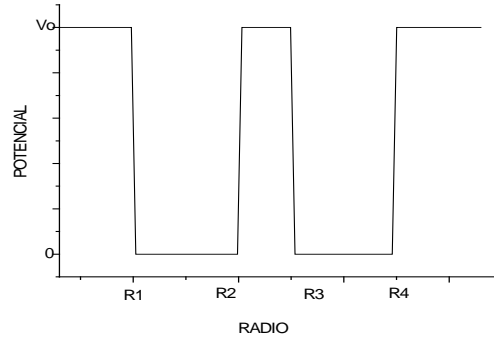


Este fenómeno de interferencia es asociado a corrientes persistente pues para valores de energía iguales a cero se tiene un momento magnético diferente de cero, otro aspecto importante son los cruces entre las líneas de energía o puntos de transparencia donde el electrón puede pasar de un estado a otro estado sin la necesidad de energía adicional.

2.3 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER PARA UN ELECTRÓN EN DOBLE NANOHILO SIN LA PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO.

Para analizar este sistema lo primero a analizar será definiendo la función de potencial por medio de la siguiente expresión matemática:

FIG. 5 FORMA DEL POTENCIAL PARA UN DOBLE NANOHILO



Donde tenemos que los radios de las juntas son:

$$R_1 < R_2 < R_3 < R_4 \quad (2.48)$$

Y la función potencial puede ser definida como:

$$V(\rho, \varphi, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } (R_1 < \rho < R_2) \cup (R_3 < \rho < R_4) \\ V_0 & \text{si } (0 < \rho < R_1) \cup (R_2 < \rho < R_3) \cup (\rho > R_4) \end{cases} \quad (2.49)$$

Como se dijo anteriormente la solución a la ecuación (2.30) es de variable separable y es de la forma

$$\Psi_{(\rho, \varphi, z)} = e^{im\varphi} e^{ikz} \phi(\rho)$$

$$\phi - \frac{\phi}{\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} \phi + \gamma m \phi + k^2 \phi + V(\rho) \phi + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} \phi - E \phi = 0 \quad (2.50)$$

El valor de k será para este caso diferente de cero $k \neq 0$ y a este valor se le llama piso de sub-banda pues es un valor aditivo.

$$\phi - \frac{\phi}{\rho} + \left[\gamma m + V(\rho) + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} - \frac{m^2}{\rho^2} - E + k^2 \right] \phi = 0 \quad (2.51)$$

Como el valor γ es una medida del campo magnético y este es cero para este caso tendremos que la ecuación (2.51) se reduce a una forma más simple.

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{\rho} \dot{\phi} - \frac{m^2}{\rho^2} \phi + [E - V(\rho) - k^2] \phi = 0 \quad (2.52)$$

Realizando un cambio de variable:

$$\wp^2 = E - V_0 - k^2 \quad (2.53)$$

La ecuación (2.53) queda escrita como:

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{\rho} \dot{\phi} - \frac{m^2}{\rho^2} \phi + \wp^2 \phi = 0 \quad (2.54)$$

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{\rho} \dot{\phi} + \left[\wp^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right] \phi = 0 \quad (2.55)$$

Ahora se definirá una nueva variable para llevar la ecuación (2.55) a una forma más conocida cuya solución es fácil de escribir como una combinación lineal de las funciones de Bessel:

$$x = \wp \rho \Rightarrow \rho = \frac{x}{\wp}$$

Y la ecuación (2.55) se transforma en:

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{x} \dot{\phi} + \left[1 - \frac{m^2}{x^2} \right] \phi = 0 \quad (2.56)$$

La solución para la ecuación diferencial (2.56) son las funciones de Bessel modificadas (I) y de Neuman modificadas (K):

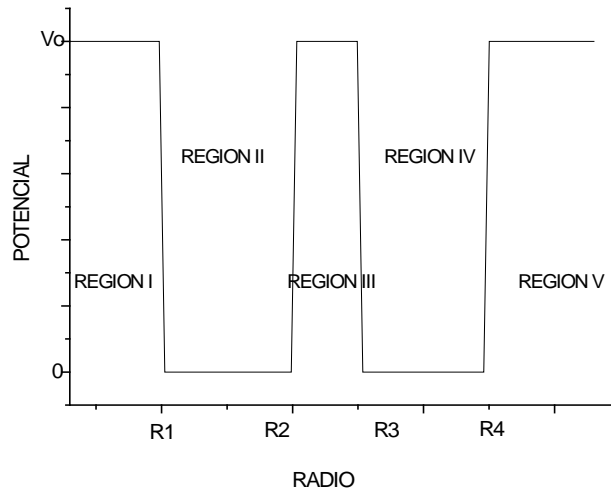
$$\phi(x) = AI_m(x) + BK_m(x) \quad (2.57)$$

Retomando nuestra primera variable ρ la solución toma la forma:

$$\phi_m(\rho) = AI_m(\wp\rho) + BK_m(\wp\rho) \quad (2.58)$$

Esta solución es válida regiones donde está la barrera de potencial en nuestro caso la región I, III, V.

FIG. 6. REGIONES PARA ANALIZAR LAS CONDICIONES DE CONTORNO EN UN DOBLE NANOHILO COAXIAL.



Para las regiones II y IV se tiene que el potencial es cero $V_0 = 0$ y la ecuación queda de la forma:

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{\rho}\dot{\phi} - \frac{m^2}{\rho^2}\phi + [E - k^2]\phi = 0 \quad (2.59)$$

Realizando nuevamente un cambio de variable:

$$\mathcal{G}^2 = E - k^2 \quad (2.60)$$

La ecuación (2.59) queda escrita como:

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{\rho}\dot{\phi} + \left[\mathcal{G}^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right] \phi = 0 \quad (2.61)$$

Ahora se definirá una nueva variable para llevar la ecuación (2.55) a una forma más conocida cuya solución es fácil de escribir como una combinación lineal de las funciones de Bessel:

$$x = \wp \rho \Rightarrow \rho = \frac{x}{\wp}$$

Y la ecuación (2.61) se transforma en:

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{x} \dot{\phi} + \left[1 - \frac{m^2}{x^2} \right] \phi = 0 \quad (2.62)$$

La solución para la ecuación diferencial (2.56) son la funciones de Bessel (J) y de Neuman (Y)

$$\phi(x) = AJ_m(x) + BY_m(x) \quad (2.63)$$

Retomando nuestra primera variable ρ la solución toma la forma:

$$\phi_m(\rho) = AJ_m(\wp\rho) + BY_m(\wp\rho) \quad (2.64)$$

Luego tenemos como tenemos cinco regiones tendremos cinco ecuaciones cada una con dos incógnitas:

Para la región I:

$$\phi_m(\rho) = AI_m(\wp\rho) + BK_m(\wp\rho)$$

Pero el comportamiento de la función $K_m(\wp\rho)$ cuando $\rho \rightarrow 0$ es que $K_m(\wp\rho) \rightarrow \infty$ por lo tanto como se tiene que la función en cero es igual a cero $B=0$ y la función para la primera región es:

$$\phi_m(\rho) = AI_m(\wp\rho)$$

Para la región II:

$$\phi_m(\rho) = CJ_m(\wp\rho) + DY_m(\wp\rho)$$

Para la región III:

$$\phi_m(\rho) = FI_m(\wp \rho) + GK_m(\wp \rho)$$

Para la región IV:

$$\phi_m(\rho) = MJ_m(\wp \rho) + PY_m(\wp \rho)$$

Para la región V:

$$\phi_m(\rho) = QK_m(\wp \rho)$$

Luego tenemos 8 incógnitas con cinco ecuaciones, además, por condiciones de frontera se sabe que la función como su derivada debe ser continua en las barreras así para la frontera en R_1 se tiene:

$$AI_m(\wp R_1) = CJ_m(\wp R_1) + DY_m(R_1) \quad (2.65)$$

$$A\wp I_m'(\wp R_1) = C\wp J_m'(\wp R_1) + D\wp Y_m'(\wp R_1) \quad (2.66)$$

Para la frontera en R_2 se tiene:

$$CJ_m(\wp R_2) + DY_m(R_2) = FI_m(\wp R_2) + GK_m(\wp R_2) \quad (2.67)$$

$$C\wp J_m'(\wp R_2) + D\wp Y_m'(R_2) = F\wp I_m'(\wp R_2) + G\wp K_m'(\wp R_2) \quad (2.68)$$

Para la frontera en R_3 se tiene:

$$FI_m(\wp R_3) + GK_m(\wp R_3) = MJ_m(\wp R_3) + PY_m(\wp R_3) \quad (2.69)$$

$$F\wp I_m'(\wp R_3) + G\wp K_m'(\wp R_3) = M\wp J_m'(\wp R_3) + P\wp Y_m'(\wp R_3) \quad (2.70)$$

Para la frontera en R_4 se tiene:

$$MJ_m(\mathcal{R}_4) + PY_m(\mathcal{R}_4) = QK_m(\phi R_4) \quad (2.71)$$

$$M \mathcal{G}J_m'(\mathcal{R}_4) + P \mathcal{G}Y_m'(\mathcal{R}_4) = Q \phi K_m'(\phi R_4) \quad (2.72)$$

La solución puede escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} I_m(\phi R_1) & I_m(\phi R_1) & Y_m(R_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi I_m'(\phi R_1) & \mathcal{G}J_m'(\mathcal{R}_1) & \mathcal{G}Y_m'(\mathcal{R}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_m(\mathcal{R}_2) & Y_m(R_2) & I_m(\phi R_2) & K_m(\phi R_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}J_m'(\mathcal{R}_2) & \mathcal{G}Y_m'(R_2) & \phi I_m'(\phi R_2) & \phi K_m'(\phi R_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m(\phi R_3) & K_m(\phi R_3) & J_m(\mathcal{R}_3) & Y_m(\mathcal{R}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi I_m'(\phi R_3) & \phi K_m'(\phi R_3) & \mathcal{G}J_m'(\mathcal{R}_3) & \mathcal{G}Y_m'(\mathcal{R}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_m(\mathcal{R}_4) & Y_m(\mathcal{R}_4) & K_m(\phi R_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{G}J_m'(\mathcal{R}_4) & \mathcal{G}Y_m'(\mathcal{R}_4) & \phi K_m'(\phi R_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \\ D \\ F \\ G \\ M \\ P \\ Q \end{pmatrix} = 0 \quad (2.73)$$

Para que la ecuación (2.73) tenga una solución hay dos posibles formas, una que los valores de las constantes A, C, D, F, G, M, P, y Q sea cero que sería la solución trivial y la otra manera que el determinante de la matriz sea cero que es la solución no trivial:

$$\det \begin{pmatrix} I_m(\phi R_1) & I_m(\phi R_1) & Y_m(R_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi I_m'(\phi R_1) & \mathcal{G}J_m'(\mathcal{R}_1) & \mathcal{G}Y_m'(\mathcal{R}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_m(\mathcal{R}_2) & Y_m(R_2) & I_m(\phi R_2) & K_m(\phi R_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{G}J_m'(\mathcal{R}_2) & \mathcal{G}Y_m'(R_2) & \phi I_m'(\phi R_2) & \phi K_m'(\phi R_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m(\phi R_3) & K_m(\phi R_3) & J_m(\mathcal{R}_3) & Y_m(\mathcal{R}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi I_m'(\phi R_3) & \phi K_m'(\phi R_3) & \mathcal{G}J_m'(\mathcal{R}_3) & \mathcal{G}Y_m'(\mathcal{R}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_m(\mathcal{R}_4) & Y_m(\mathcal{R}_4) & K_m(\phi R_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{G}J_m'(\mathcal{R}_4) & \mathcal{G}Y_m'(\mathcal{R}_4) & \phi K_m'(\phi R_4) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.74)$$

La ecuación que resulta de resolver esta determinante de la ecuación (2.74) es lo que llamamos ecuación trascendente, y la solución a dicha ecuación son los valores esperados de la energía. Pero resolver esta ecuación analíticamente es

muy complicado por eso se busca un método más fácil para solucionar la ecuación de Schrödinger, dicho método es el *método de barrido trigonométrico* que permite reducir la ecuación diferencial de segundo grado en una ecuación diferencial de primer grado.

2.3 SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER PARA UN ELECTRÓN EN DOBLE NANOHILO EN LA PRESENCIA DE CAMPO MAGNÉTICO EXTERNO.

La solución para esta ecuación es muy similar a lo hecho en la sección 2.2 y sección 2.3, lo único que varia es que la solución no son las funciones de Bessel y Neuman y son los polinomios de kumer y funciones hypergeometricas, por lo demás el tratamiento matemático es el mismo a la sección 2.2. Por esta razón no se explica en detalle y se da paso a un nuevo capítulo donde se analiza una manera más fácil de solucionar dicha ecuación, esta manera es el método de barrido trigonométrico que permite por medio de una sustitución convertir la ecuación de Schrödinger de segundo orden a una ecuación diferencial de primer orden.

3. SOLUCIÓN METODO BARRIDO TRIGONOMETRICO.

La ecuación diferencial para el problema de un electrón en un doble nanohilo coaxial es:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi \right) + \left(\frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} + V(\rho) + \gamma m + k^2 \right) \Psi = \Psi \quad (3.1)$$

Analizando la parte radial y recordando que la solución es del tipo:

$$\psi(r, \varphi) = e^{im\varphi} e^{ikz} R(\rho)$$

$$-R'' - \frac{1}{\rho} R' + \left(\frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} + V(\rho) + \gamma m + k^2 - \varepsilon \right) R = 0; \quad (3.2)$$

Como se vio en la sección 2.2 la parte radial tiene la forma:

$$R(\rho) = \rho^m Q(\rho);$$

Encontrando las derivadas y remplazando en la ecuación (3.2)

$$\begin{aligned} R'(\rho) &= m\rho^{m-1}Q(\rho) + \rho^m Q'(\rho); \quad R''(\rho) = m(m-1)\rho^{m-2}Q(\rho) + 2m\rho^{m-1}Q'(\rho) + \rho^m Q''(\rho) \\ &\quad - \cancel{m(m-1)\rho^{m-2}Q(\rho)} - 2m\rho^{m-1}Q'(\rho) - \rho^m Q''(\rho) - \cancel{m\rho^{m-2}Q(\rho)} - \rho^{m-1}Q'(\rho) \\ &\quad + \left(\frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} + V(\rho) + \gamma m + k^2 - \varepsilon \right) \rho^m Q(\rho) = 0 \\ &\quad -Q''(\rho) - \frac{2m+1}{\rho} Q'(\rho) + \left(\frac{\gamma^2 \rho^2}{4} + V(\rho) + \gamma m + k^2 - \varepsilon \right) Q(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como los valores γm y k^2 son valores constantes se pueden adicionar a ε para reducirla.

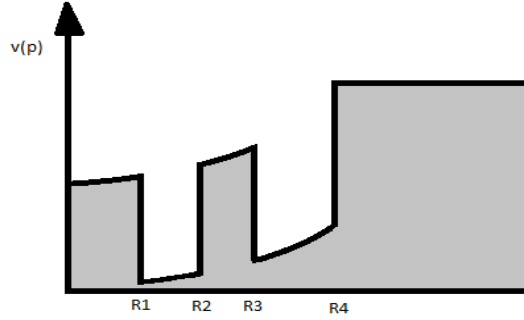
Así el valor de la energía E será:

$$E = \varepsilon - \gamma m - k^2 \quad (3.4)$$

Y la ecuación (3.1) queda reducida a:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi \right) + \left(\frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} + V(\rho) \right) \Psi = E \Psi \quad (3.5)$$

FIG. 7. FORMA DEL POTENCIAL EFECTIVO PARA ANALIZAR EL METODO DE BARRIDO TRIGONOMETRICO.



$$V_{effe} = \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{\gamma^2 \rho^2}{4} + V(\rho)$$

$$V_{effe}(\rho) = \begin{cases} V_{effe}(\rho) & \text{si } r < R_4 \\ V_{effe}(R_4) = V_f & \text{si } r > R_4 \end{cases}$$

Entonces se tiene que $E < V_{final}$ y la ecuación diferencial queda reducida

únicamente la parte radial $\Psi(r, \varphi, z) = e^{im\varphi} e^{ikz} R(\rho)$

$$\ddot{R} + \frac{1}{\rho} \dot{R} + (V_{effe} - E)R = 0 \quad (3.6)$$

La solución a esta ecuación diferencial (3.5) para $R > R_4$ es de la forma:

$$\ddot{R} + \frac{1}{\rho} \dot{R} + (V_f - E)R = 0 \quad (3.7)$$

Donde κ son los polinomios de Kummer:

$$R(\rho) = \kappa_m(\eta\rho); \quad \eta = \sqrt{V_f - E} \quad (3.8)$$

$$R(R_4) = \kappa_m(\eta R_4); \quad \text{Condicion de Contorno} \quad (3.9)$$

Para evitar una singularidad de la ecuación diferencial se escoge que $\dot{R}(0) = 0$.

El método de barrido trigonométrico utiliza coordenadas polares de Poincaré, para reducir la ecuación diferencial (3.5) de segundo orden a una ecuación diferencial de primer orden a través del siguiente cambio de variables:

$$R(\rho) = A(\rho)\cos\theta(\rho); \quad \frac{dR(\rho)}{d\rho} = A(\rho)\sin\theta(\rho) \quad (3.10)$$

Donde $A(x)$ y $\theta(x)$ representan la amplitud y la fase de las curvas de Poincaré.

Realizando una relación entre \dot{R} y R se tiene:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\sin\theta(\rho)}{\cos\theta(\rho)} = \tan\theta(\rho) \quad (3.11)$$

Derivando nuevamente la ecuación (3.11)

$$\frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} \dot{\theta} \quad (3.12)$$

Despejando el valor \ddot{R}/R de la ecuación (3.12) se tiene que:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{1}{\cos^2\theta} \dot{\theta} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \quad (3.13)$$

Dividiendo por R la ecuación diferencial (3.6):

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{\dot{R}}{R} + (V_{eff} - E) = 0 \quad (3.14)$$

Remplazando los valores de las ecuaciones (3.11) y (3.12) en (3.14) se obtiene una ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \theta'(\rho) + \frac{\sin^2 \theta(\rho)}{\cos^2 \theta} + \frac{2m+1}{\rho} \frac{\sin \theta(\rho)}{\cos \theta} (E - V(\rho)) = 0 \quad (3.15)$$

Multiplicando por coseno cuadrado la ecuación (3.15) se obtiene que:

$$\theta'(\rho) = - \left[\sin^2 \theta + \frac{2m+1}{\rho} \sin \theta \cos \theta + (E - V(\rho)) \cos^2 \theta \right] \quad (3.19)$$

Las nuevas condiciones de contorno para $0 < \rho < R_4$ será:

$$\theta(0) = 0 \quad (3.17)$$

De la ecuación (3.11) se puede obtener la otra condición de contorno.

$$\theta(R_4, E_{n,m}) - \left[\gamma \frac{\dot{\kappa}_m(\eta R_4)}{\kappa_m(\eta R_4)} \right] - n\pi = 0 \quad (3.18)$$

Luego la ecuación trascendente para este sistema está dado por:

$$\theta(R_4, E_{n,m}) = \left[\gamma \frac{\dot{\kappa}_m(\eta R_4)}{\kappa_m(\eta R_4)} \right] - n\pi \quad (3.19)$$

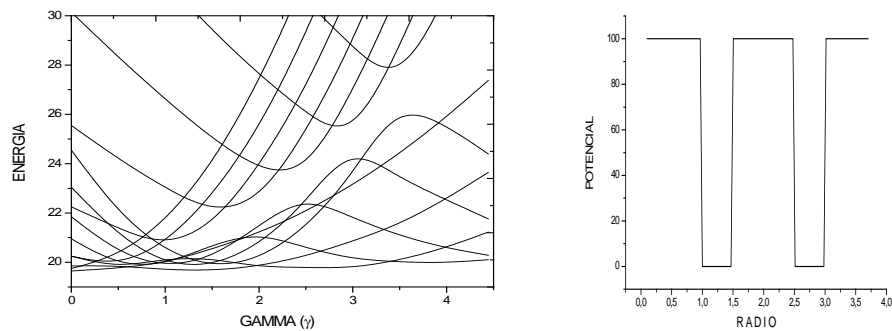
Luego la solución de la ecuación (3.19) nos da los valores de la energía en función de los números cuánticos m y n , además, Como podemos ver, la expresión dada en la ecuación es una ecuación diferencial de primer grado que, con condiciones iniciales definidas, se transforma en un problema de Cauchy y como es bien sabido este problema puede solucionarse utilizando diferentes métodos numéricos por ejemplo el método de Rounge-Kutta, el cual sera utilizado en el método de programación.

4. ANALISIS DE RESULTADOS

Para analizar el efecto *Aharonov-Bohm* en un doble nanohilo empezaremos analizando como se ve afectado por la presencia del segundo nanohilo, para ello, el segundo nanohilo se agranda conservando el mismo valor del ancho, por otro lado, las unidades de los radios esta en valores de radios de borh y la unidad del potencial en unidades de Rydberg.

Para todas las graficas se tiene que la barrera de potencial es igual a 100Ry. Para graficar los niveles energéticos en función de intensidad de campo magnético se realizaron cálculos para diferentes valores de gamma γ y los resultados muestran una alta sensibilidad del número de puntos calculados. En la Grafica. 1 se muestran resultados de cálculo con 10 puntos donde se ve la partición de las curvas en dos subconjuntos. Este resultado de la precisión insuficiente de la interpolación en el caso de intersecciones de las líneas.

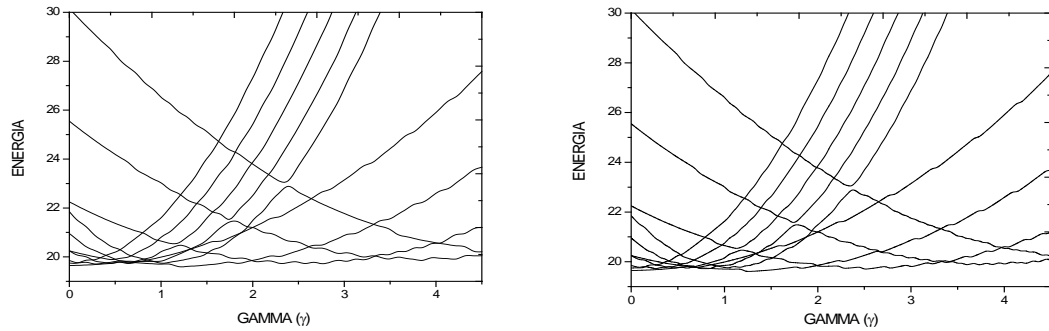
GRAFICA 1 NIVELES ENERGÉTICOS EN FUNCIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO. CALCULADO PARA 10 DIFERENTES VALORES DE γ



Para buscar la mejor precisión se realizaron cálculos adicionales con mayor número de puntos que permite recuperar las intersecciones entre las curvas energéticas. En la Grafica.2 se presentan resultados de cálculo con los números de puntos calculados de 50 y 100. Se ve que con el aumento de número de puntos se

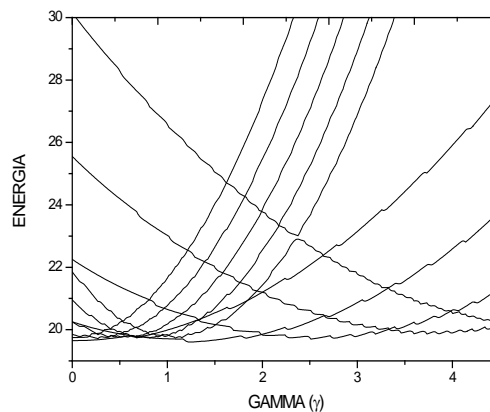
recuperan sucesivamente las intercesiones entre curvas y por eso en adelante vamos a analizar las curvas que corresponden al mayor número de puntos calculados.

GRAFICA 2 NIVELES ENERGÉTICOS EN FUNCIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO. CALCULADO PARA 50 Y 100 DIFERENTES VALORES DE γ .



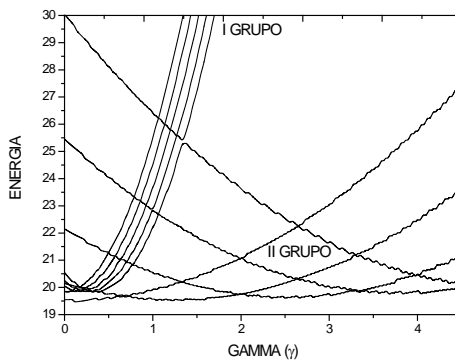
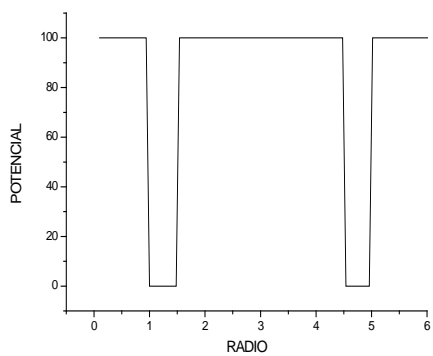
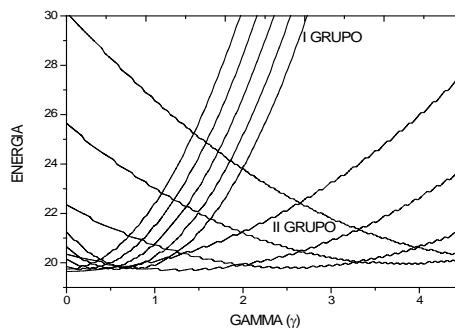
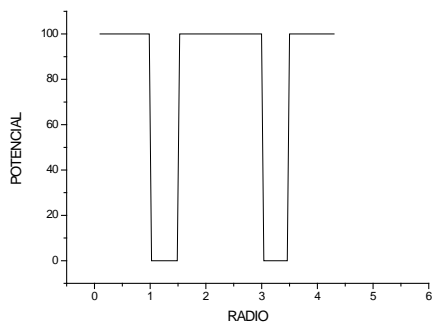
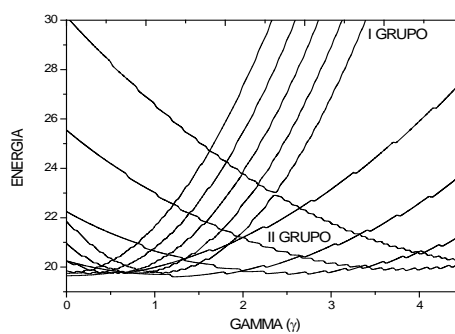
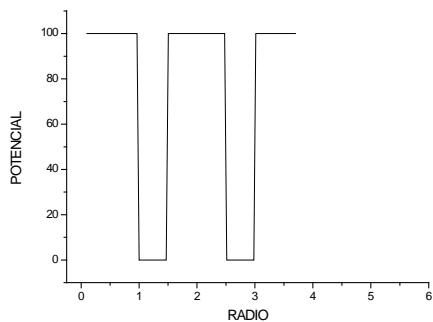
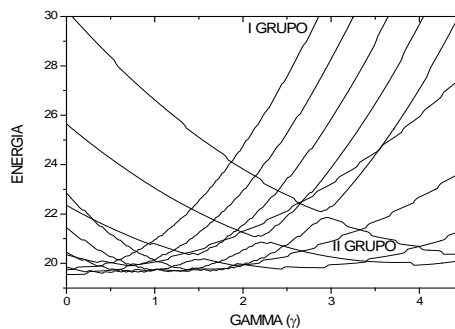
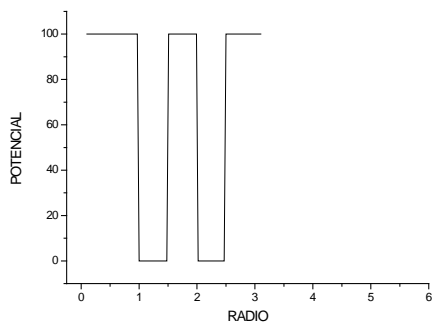
Un ejemplo de cálculo de este tipo se presenta en la Grafica.3 para 200 diferentes valores de γ .

GRAFICA 3 NIVELES ENERGÉTICOS EN FUNCIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO. CALCULADO PARA 200 DIFERENTES VALORES DE γ .



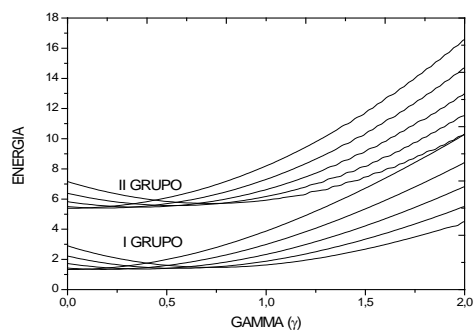
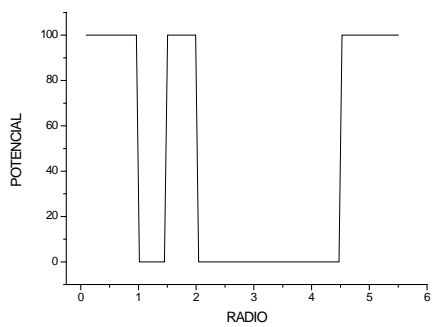
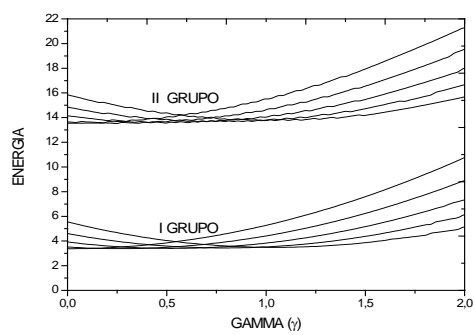
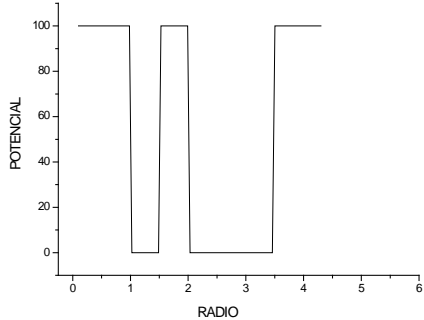
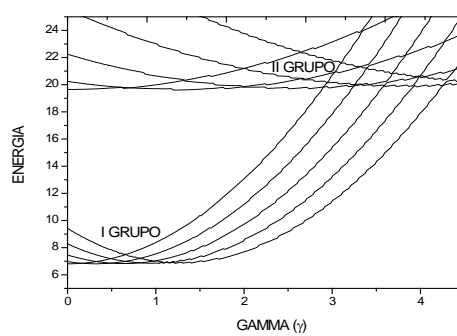
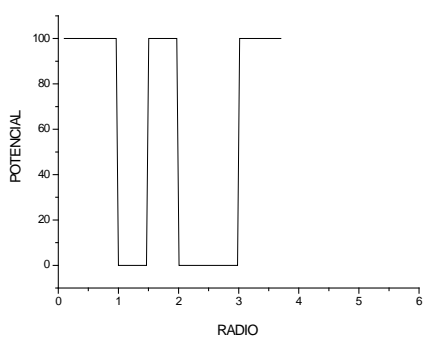
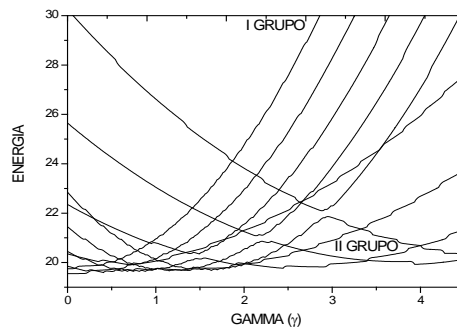
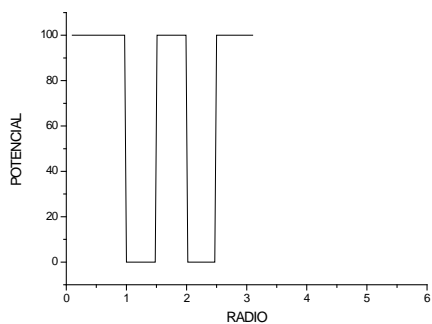
A continuación analicemos efecto de tamaño variando separación entre pozos y los anchos de los pozos correspondientes. Iniciamos con el análisis de efecto de separación entre pozos, presentado a continuación.

GRAFICA 4. NIVELES ENERGÉTICOS EN FUNCIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO PARA DIFERENTES RADIOS DEL POZO EXTERNO Y PARA LOS ANCHOS DE LOS POZOS Y EL RADIO INTERNO FIJOS.

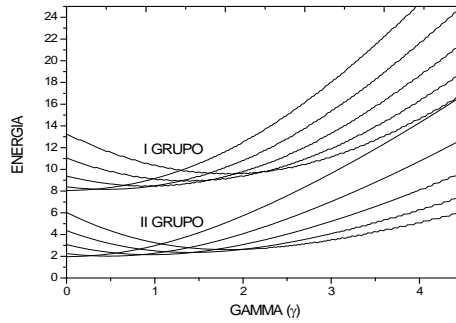
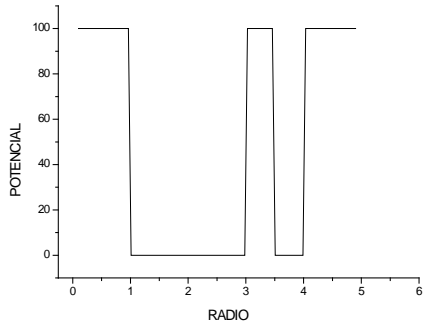
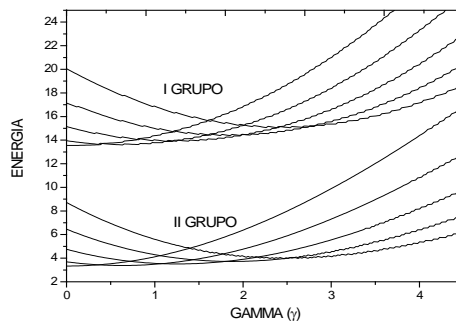
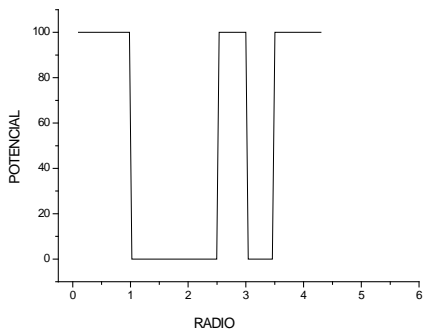
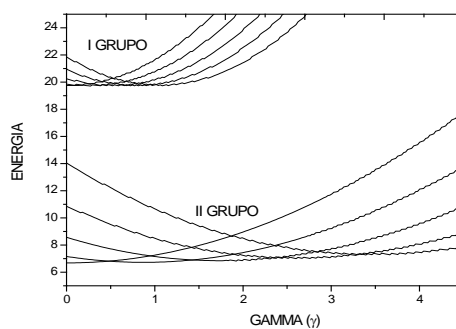
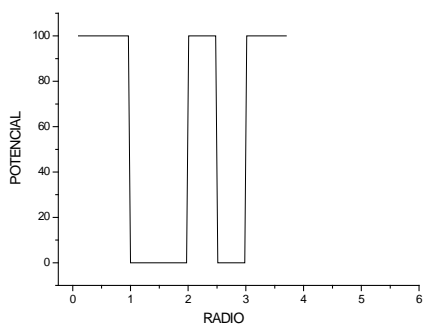
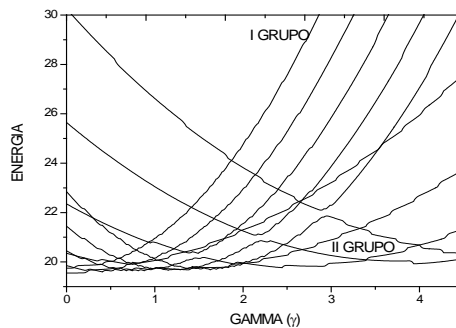
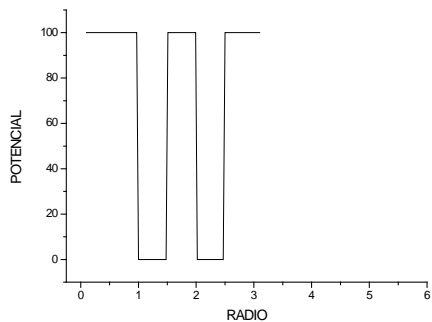


En la Grafica.4 se presentan las dependencias de los primeros 10 niveles energéticos respecto a la variación de intensidad de campo magnético para el caso cuando los anchos de los pozos coaxiales se mantienen fijos e iguales a 0.5 radio de Bohr, el radio de nanohilo interno se mantiene fijo e igual 1.25 radios de Bohr mientras que el radio del hilo externo se va aumentando desde 2, 25 hasta 4,25 radios de Bohr. Se ve que hay dos grupos de líneas separadas entre sí. El primer grupo corresponde a oscilaciones AB en el hilo externo y el segundo grupo corresponde a las oscilaciones en el hilo interno. Se puede ver que el primer grupo se confina a medida que el radio del nanohilo externo se aumenta y este hecho muestra que este grupo de líneas realmente corresponde a las oscilaciones en el hilo externo. Además, se puede ver que el grupo de líneas exterior se mantiene inmóvil y no depende del cambio del radio del hilo exterior y por esta razón este grupo de líneas corresponde a las oscilaciones AB en el hilo interior. En la grafica.5 se presentan las dependencias de los primeros 10 niveles energéticos respecto a la variación de intensidad de campo magnético para el caso cuando el ancho del primer pozo se mantiene constante e igual a 0.5 radio de Bohr y el ancho del segundo pozo se empieza a variar desde 0.5 a 3 radios de Bohr, por otro lado, el radio del hilo interno permanece constante e igual 1.25 radio de Bohr y el radio del hilo externo se va aumentando desde 2, 25 hasta 3,5 radio de Bohr. Se ve que hay dos grupos de líneas separadas entre sí. El primer grupo corresponde a oscilaciones AB en el hilo externo y el segundo grupo corresponde a las oscilaciones en el hilo interno. A medida que se ancha el segundo hilo los niveles de energía bajan como consecuencia de esto en la Grafica5. Se puede ver como los dos grupos de líneas se separan y uno baja mientras que el otro se mantiene constante. Cuando el ancho del segundo hilo es lo suficientemente grande los estados bajan tanto que se sitúan a varios estados en el segundo hilo antes de encontrar el primer nivel energético en el primer hilo, por esta razón se ve que los cruces de los niveles energéticos cuando el ancho del segundo pozo del segundo es igual a 1.5 radio de Bohr o mayor son los mismos. Por otro lado a medida que el ancho del segundo hilo aumenta las curvas empiezan a inclinarse debido a que empieza a comportarse como un hilo muy ancho.

GRAFICA 5 NIVELES ENERGÉTICOS EN FUNCIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO PARA DIFERENTES RADIOS Y ANCHOS DEL POZO EXTERNO Y PARA LOS ANCHOS DE LOS POZOS Y EL RADIO INTERNO FIJOS.



GRAFICA 6. NIVELES ENERGÉTICOS EN FUNCIÓN DE CAMPO MAGNÉTICO PARA DIFERENTES RADIOS Y ANCHOS DEL POZO INTERNO Y PARA EL ANCHO DEL POZO EXTERNO FIJOS.



Por último se analiza el efecto que tiene el ensanchamiento del hilo interno. En la Grafica .6 se presentan las dependencias de los primeros 10 niveles energéticos respecto a la variación de intensidad de campo magnético para el caso cuando el ancho del primer hilo se empieza a variar desde 0.5 a 2.5 radio de Bohr y el ancho del segundo hilo se mantiene constante e igual a 0.5 a 3 radio de Bohr, por otro lado, el radio del hilo externo se varia debido a que el ensanchamiento del primer hilo lo aleja desde 2.25 hasta 4.25 radio de Bohr, el radio del hilo interno se va aumentando desde 1.25 hasta 2,25 radio de Bohr. Se ve que hay dos grupos de líneas separadas entre sí. El primer grupo corresponde a oscilaciones AB en el hilo externo y el segundo grupo corresponde a las oscilaciones en el hilo interno. A medida que se ancha el primer hilo los niveles de energía bajan como consecuencia de esto en la grafica 6. se puede ver como los dos grupos de líneas se separan y uno baja mientras que el otro se mantiene constante. Cuando el ancho del primer hilo es lo suficientemente grande los estados bajan tanto que se sitúan a varios estados en el primer hilo antes de encontrar el primer nivel energético en el segundo hilo, por esta razón se ve que los cruces de los niveles energéticos cuando el ancho del primer hilo es igual a 1.5 radio de Bohr o mayor son los mismos. Por otro lado a medida que el ancho del primer hilo aumenta las curvas empiezan a inclinarse debido a que empieza a comportarse como un hilo muy ancho.

5. CONCLUSIONES

En conclusión, presentamos algunos de los resultados más importantes de esta tesis:

Se presento un método simple para calcular los niveles de energía de un electrón en un doble hilo coaxial y se analizo como varían dichos niveles con la intensidad de campo magnético externo, debido a que la solución exacta para este sistema es un poco complicada. Dicho método es *El método de barrido trigonométrico* que permite por medio de un cambio de variable transformar la ecuación de Schrödinger a una ecuación diferencial de primer orden con una ecuación trascendente más fácil de resolver.

Para analizar las graficar de los niveles energéticos en función de intensidad de campo magnético se realizaron cálculos para diferentes valores de gamma γ , los resultados mostraron una alta sensibilidad con el número de puntos calculados.

Se analizo el efecto de tamaño variando la separación entre los pozos y los anchos de los pozos correspondientes. Y se estudio como varia el efecto AB para los tres casos propuestos anteriormente. Los resultados obtenidos muestran que los niveles energéticos forman dos grupos de líneas correspondientes cada una un pozo de potencial. A medida que los anchos de nanotubos se aumentan las líneas correspondientes a diferentes niveles en función de la intensidad de campo magnético, bajan mientras que la pendiente de la línea correspondiente al estado base se incrementa. Además, con el aumento de los anchos de los nanotubos se observa una tendencia a la fusión de dos grupos subniveles correspondientes a diferentes nanotubos.

CITAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Michael R. Geller, Quantum phenomena in Low-Dimensional Systems. Department of Physics and Astronomy, University of Georgia, June 18, 2001
- [2] R. Mazurczyk. Semiconductor superlattice. Centre for Molecular and Macromolecular Studies, Polish Academy of Sciences Sienkiewicza.
- [3] X. J. Sánchez, E. Ribeiro, J. C. González. Fotoluminiscencia de hilos cuánticos auto-sustentados. Instituto de la Universidad de Guanajuato-Mexico, Laboratorio Nacional de luz Sincrotón-Campinas-SP-Brazil.
- [4] H. Pettersson, R.J. Warburton, A.Lorke, K. Karrai, J.P.Kotthaus, J.M.Garcia, P.M. Petroff, Physica E 6 (2000) 510-513.
- [5] G. Bastard. Theoretical investigations of superlattice band structure in the envelope-function approximation. 26 october 1981
- [6] David Velasco villamizar, Efecto AHARONOV-BOHM en anillos casi-circulares. Trabajo Proyecto de grado, Universidad industrial de Santander.
- [7] Jesus David Gonzalez Acosta. Estado base de una impureza D^0 Descentrada en un Punto Cuantico Esferico de GaAs/(GaAl)As con Diferentes Formas de Potencial. Mayo 2004
- [8] Willian Gutierrez Niño. Espectro Energetico de D^0 y D^- en Sistemas Casi-Unidimensionles, Rev. Col. Fís. **38**, No. 1, 9 (2006).
- [9] José Sierra Ortega. Espectro Electronico de Impureza D^0 y D^- Confinadas en Heterojunturas Semicondutoras de GaAs/(GaAl)As. 2004
- [10] Fernando Andrés Quiñónez Granados. Efecto del Campo Magnetico Sobre el Espectro de un Electrón en Puntos Cuánticos Auto-Ensamblados. 2005
- [11] Binding Energies of excitons and donors in a double quantum well in a magnetic field. J Cen and K. K. Bajaj. Department of physics, Emory University Atlanta Georgia, Volume 46, Number 23. 15 December 1992.
- [12] K..Kubota. P.O Vaccaro, N Ohtani. Photoluminescence of GaAs/AlGaAs micro-tubes containing uniaxial strained quantum wells. Phisica E 13-2002
- [13] Michael R. Geller. Quantum Phenomena in Low-dimensional Systems. Department of Physics and Astronomy, University of Georgia (June 18, 2001)
- [14] Y. Aharonov and D. Bohm, Significance of Electromagnetic Potential in the quantum Theory, Phys. Rev. Vol. 115 No. 3, (1959).
- [15] A. Bruno-Alfonso and A. Latgé. Aharonov Bohm oscillation in a quantum ring: Eccentricity and electric field effects, Phys. Rev. B 71, 125312(2005).
- [16] G. Bastard, E. E. Mendez, L. L. Chang and L. Esaki, Exiton binding Phys. Rev. B **26**, 1974 (1982).

BIBLIOGRAFÍA

BRANSDEN. B. H. JOACHAIN. C. J. Quantum Mechanics. 2nd Edition. ENGLAND: Prentice Hall: 2000. P 803. [QC174.12.B74]

DAVES, Jhon H. The physics of low-dimensional semiconductors. United Kingdom: Crambridge University Press, 1997. P. 438. [QC611.8.L68039].

GRIFFITHS. David J. Introduction to Electrodynamics. 3rd Ed. New Jersey: Prentice Hall: 1999. P. 562. [OC680.G74].

HARRISON Paul. Quantum Wells, Wires and Dots. Theoretical and computational Physics of semiconductor Nanostructures. Second Edition. United Kingdom: Wiley-Interscience. 2005. P 482.

L. Landau. E. Lifshitz. Curso Abreviado de Física Teórica. Libro I. Mecánica y Electrodinámica. 2nd Ed. MOSCU: Editorial Mir: 1979. P. 271.