

**UN ACERCAMIENTO A LA GEOMETRÍA FRACTAL
EN EL BACHILLERATO**

WILLIAM SIERRA TORRES

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2006**

**UN ACERCAMIENTO A LA GEOMETRÍA FRACTAL
EN EL BACHILLERATO**

WILLIAM SIERRA TORRES

**Trabajo de Grado para optar al título de
Especialista en Educación Matemática**

**DIRECTORA:
Ph. D. SONIA MARLENI SABOGAL**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2006**

TABLA DE CONTENIDO

	Página
MIS MOTIVACIONES.....	1
MOSTRANDO PASO A PASO.....	7
RECONSTRUYENDO LA HISTORIA.....	12
VIVIR PARA CONTARLO.....	48
1. Resolviendo los talleres.....	48
2. Manipulando la tecnología.....	97
3. Acercamiento a la geometría fractal.....	116
CONCLUYENDO ESTA EXPERIENCIA.....	128
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	135

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1. CONJUNTO DE CANTOR

FIGURA 2. CURVA DE KOCH

FIGURA 3. PULMONES

FIGURA 4. LA ISLA DE KOCH O DEL COPO DE NIEVE

FIGURA 5. ALFOMBRA DE SIERPINSKI

FIGURA 6. CONJUNTO DE MANDELBROT

FIGURA 7. HOLA DE HELECHO

FIGURA 8. ANÁLISIS GRÁFICO DE ÓRBITAS

FIGURA 9. PUNTO FIJO ATRACTIVO

FIGURA 10. PUNTO FIJO REPULSIVO

RESUMEN

TÍTULO: UN ACERCAMIENTO A LA GEOMETRÍA FRACTAL EN EL BACHILLERATO*.

AUTOR: WILLIAM SIERRA TORRES**

PALABRAS CLAVES: Geometría fractal, Sistema dinámico, Órbita, Órbita acotada, composición de funciones, iteración grafica, puntos fijos.

DESCRIPCIÓN O CONTENIDO:

En la Universidad Industrial de Santander se encuentran monografías del área de la matemática, dentro de las cuales se localiza: "Geometría Fractal en el bachillerato, acercamiento por sistemas dinámicos". Este trabajo plantea 10 talleres por el camino de los sistemas dinámicos discretos unidimensionales que se aplicaron a los estudiantes del grado décimo del Instituto La Cumbre del municipio de Floridablanca, para que se inicien en la Geometría Fractal ya que hace uso de contenidos como la composición de funciones y sucesiones.

La pregunta que sirvió de pilar durante el desarrollo de esta experiencia fue ¿los talleres propuestos en la monografía geometría fractal en el bachillerato, acercamiento por sistemas dinámicos, posibilitan a los estudiantes de décimo grado del Instituto La Cumbre un acercamiento a la geometría fractal? El propósito de esta experiencia fue replantear, aplicar y evaluar los talleres propuestos por Daza (1999), para que a través de la aplicación de estos los estudiantes tuvieran un acercamiento a la geometría fractal. La propuesta que se desarrolló está basada en la investigación cualitativa, específicamente en el aula, teniendo en cuenta los procesos que los estudiantes debían desarrollar como la interpretación, el análisis, experimentación. A partir de la revisión de los datos, se establecieron tres categorías de análisis que recogieron la mayor parte de la información de los estudiantes estas fueron:

- ✓ Resolviendo los talleres: en esta categoría se incluyeron las experiencias, apreciaciones y observaciones de los estudiantes.
- ✓ Manipulando la tecnología: esta categoría se recoge la información de los estudiantes que está relacionada con el uso de la tecnología, especialmente el manejo de la calculadora TI – 92 PLUS.
- ✓ Acercamiento a la geometría fractal: esta categoría recoge de los talleres, todos los elementos que están relacionados con el proceso de aproximación que hicieron los estudiantes hacia la geometría fractal.

* Trabajo de Grado

** Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Especialización en Educación Matemática. Directora: Ph. D. Sonia Marleni Sabogal.

SUMMARY

TITLE : AN APPROACH TO THE FRACTAL GEOMETRY IN HIGH SCHOOL.*

AUTHOR: WILLIAM SIERRA TORRES**

KEY WORDS: Fractal geometry, Dynamic system, Orbit, delimit orbit, function compositions, graphic repetition, fixed dots.

DESCRIPTION OR CONTENT:

At the Industrial Santander University, there are many monographs about mathematical area in which is located the "Fractal Geometry" in High school, a dynamic system approach". This work set out ten workshops in the way of unidimensional dynamic discrete systems which were applied in tenth graders students from El Carmen institute in Floridablanca, in order to start them in the Fractal Geometry, because it makes use of contents such as the function composition and successions. The question that was used as a support during the development of this experience ¿The workshops suggested in the geometry fractal monographs in High school, dynamic system approach, make possible to the tenth graders students from El Carmen institute an approach to the fractal geometry? The purpose of this experience was to reconsider, apply and evaluate the workshops proposed by Daza (1999), in order that the students had an approach of fractal geometry through the application of them.

The proposal that was developed was based on a qualitative research, specifically in the classroom, taking into account the processes that students must develop such as: the interpretation, the analysis, and testing. Based on the data checking, was established three analysis categories that collected a part of the information from the students, they were:

- ✓ Solving workshops: In this category was included the experiences, appreciations and observations from the students.
- ✓ Manipulating technology: this category collects the students' information related to the technology use specially the operation of TI-92 PLUS calculator.
- ✓ Approach to the fractal geometry: this category collects from the workshops all the elements which are related to the approximation process, students made to the fractal geometry.

*Work Degree.

** Science Faculty. Mathematic School, Mathematic Education Specialization. Director: Ph. D. Sonia Marleni Sabogal.

MIS MOTIVACIONES

Debido al interés de abarcar aplicaciones de temas ya vistos en clase, como es el caso de funciones y que algunos estudiantes del grado décimo del Instituto La Cumbre, manifestaban preguntando: “¿*Para qué nos sirve esto profesor?*”, me pareció interesante trabajar con estos jóvenes el tema de geometría fractal ya que tenían motivación de aprender algo más de lo cotidiano que un estudiante de grado décimo pudiera aprender, además en toda su escolaridad ellos no tuvieron el contacto con este tópico de las matemáticas.

Por otra parte, en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS), existen trabajos monográficos que permiten dicho acercamiento a la geometría fractal, por ejemplo, el trabajo que presenta la monografía: “*Geometría fractal en el bachillerato, acercamiento por sistemas dinámicos*” elaborado por Daza C. (1999) como requisito para optar el título de Licenciado en Matemáticas. En este trabajo, el autor propone 10 talleres, iniciando un primer contacto con la geometría fractal, por el camino de los sistemas dinámicos discretos.

Por otra parte, aunque en los Lineamientos Curriculares (1998), contemplados en el Ministerio de Educación Nacional (MEN), no se encuentra incluida la geometría fractal, si encontramos algunos intentos de introducirla a este nivel como en el texto de matemáticas de Editorial Santillana para grado décimo donde se presenta una unidad sobre fractales; hay también incluso textos de primaria que mencionan los fractales.

Una motivación más, es el poco interés de los estudiantes de secundaria hacia la matemática en general. Es muy común encontrar actitudes de apatía, aversión, rechazo, o temor de lo jóvenes ante la matemática. La geometría fractal se presenta como una buena alternativa u opción para disminuir este problema, básicamente por las siguientes razones:

- La belleza y vistosidad de las figuras que se trabajan.
- El uso indispensable del computador lo que de por si es atractivo para el estudiante.
- Las muchas aplicaciones de la geometría fractal en muy diversas áreas de la ciencia y aún del arte.

Además, en geometría fractal se pueden reforzar y aplicar temas de la matemática clásica de la secundaria como por ejemplo: el concepto de sucesión, límite de una sucesión, función de variable real y valor real, composición de funciones, matrices, entre otros.

Un propósito más para la elaboración de este trabajo es el de retomar la idea del autor Daza (1999), en donde resalta las siguientes conclusiones:

- “Estas actividades constituyen una posibilidad abierta a los intereses y motivaciones de los estudiantes: se pueden enriquecer, modificar, o adaptar a otras necesidades del curso o actividades que se desarrollen según el criterio del profesor.
- Esta monografía debe tomarse solo como una breve introducción a los sistemas dinámicos, como camino de acercamiento a la teoría de los fractales. Es mucho lo que resta por decir acerca de ello y muy

interesante sería seguir trabajando partiendo de este y algunos otros trabajos realizados; otra posibilidad para un tema de monografía sería diseñar talleres del mismo tipo, continuación de los que aquí se presentan, trabajando temas igualmente importantes, como: puntos periódicos, caos, dinámica de Verhulst, sistemas dinámicos bidimensionales, conjuntos de Julia y el conjunto de Mandelbrot.

- Las actividades de estos talleres proporcionan una manera de acercarse y explorar el maravilloso mundo geométrico de los sistemas dinámicos y la teoría de los fractales complementan los contenidos de la matemáticas del típico currículo de secundaria, refuerzan temas importantes del bachillerato como: funciones, su gráfica y composición, funciones iteradas y el concepto de sucesión, entre otros.”

Estas fueron las motivaciones que me llevaron a considerar esta experiencia de aula. Surgió así una pregunta que se convirtió en “pieza clave” de esta experiencia: **¿los talleres propuestos en la monografía “*geometría fractal en el bachillerato, acercamiento por sistemas dinámicos*”, posibilitan a los estudiantes de décimo grado del Instituto La Cumbre, un acercamiento a la geometría fractal?** Pero, como seguramente la respuesta a esta pregunta se podía abordar por diferentes caminos, la delimité estableciendo el siguiente objetivo: **replantear, aplicar y evaluar los talleres que se presentan en dicha monografía**, además analizar a través de la aplicación de estos talleres el proceso de acercamiento de los alumnos del grado décimo a la geometría fractal.

La experiencia de aula que presento a continuación la desarrollé con un grupo de estudiantes de décimo grado del Instituto La Cumbre, colegio público, ubicado en el municipio de Floridablanca. El grupo consta de 40

estudiantes cuya edad promedio es de 17 años (mujeres y hombres), el estrato socioeconómico del grupo es bajo, la mayoría de los estudiantes viven en estratos 1 y 2 de Floridablanca. La jornada que se trabaja con los estudiantes es la mañana. Sin embargo, para el análisis que presento en este trabajo solamente tomé la información de cinco estudiantes: Leidy, Carlos, Adriana, William y Omar. Esta información fue recogida a partir de los talleres planteados por Daza (1999), los diálogos entre los estudiantes, las preguntas dirigidas a ellos, los dibujos y demás trabajos que fueron evidenciando el acercamiento al objetivo. Tuve en cuenta como criterio para la selección de los estudiantes los resultados que obtuve de ellos en el desarrollo de los talleres, escogiendo aquellos que sobresalieron en el desarrollo de las actividades planteadas.

A continuación quiero hacer una breve presentación de los cinco estudiantes:

Leidy, es una joven de 16 años, ella ha manifestado su gusto por las matemáticas, ya que se le facilitan y siempre se ha destacado en clase por su participación y buenos resultados académicos.

Carlos tiene 17 años, es un estudiante que demuestra ciertas habilidades para las matemáticas, pero tiene dificultades con el orden en el desarrollo de los diferentes trabajos y tareas.

Adriana tiene 16 años, ella ha manifestado siempre que tiene dificultad para trabajar con los números, refiriéndose a las matemáticas, sin embargo, muestra interés en el desarrollo de las actividades desarrolladas en clase.

William tiene 16 años. Es un estudiante que siempre esta preguntando el ¿por qué? y ¿cómo? de todo, y en el tema de geometría fractal, no sería la excepción. Aunque se le presentaron algunos obstáculos en el desarrollo de

los talleres, siempre demostró su interés por conocer y aprender más del tema.

Omar tiene 17 años, su trabajo en clase es bastante lento, sin embargo siempre se encuentra a la expectativa de lo que se va a desarrollar en clase.

El desarrollo y análisis de esta experiencia de aula lo hago en cuatro capítulos, a continuación realizaré una pequeña presentación de cada uno de ellos:

En el primer capítulo, **“Mostrando paso a paso”**, se expone el método seguido para la construcción de este trabajo. Aquí describo las motivaciones que me llevaron a plantear esta experiencia de aula y su estrategia, cuál es el objetivo propuesto, cuál es la pertinencia o importancia del tema a desarrollar, entre otros aspectos. También hago explícito como fue el planteamiento y ejecución de las actividades y como se realizó el análisis posterior de las mismas.

En el segundo capítulo, **“Reconstruyendo la historia”**, presento la fundamentación pedagógica y científica que sustenta el presente trabajo, así como una breve reseña histórica de la geometría fractal y para que el lector tenga mayor claridad sobre cada taller, en este capítulo también aparecerá el formato correspondiente a la actividad que se presentó a los estudiantes para que ellos lo desarrollaran.

En el tercer capítulo, **“Vivir para contarlo”**, propongo tres grandes categorías de análisis que son: resolviendo los talleres, manipulando la tecnología y acercamiento a la geometría fractal; incluyendo las voces de los estudiantes y mis puntos de vista.

Para finalizar, presento el cuarto capítulo, ***“Concluyendo esta experiencia de aula”***, donde muestro las conclusiones a las que pude llegar una vez finalizada esta experiencia de aula, así como algunas recomendaciones.

Concluyo esta presentación aclarando que el trabajo está escrito en primera persona, siendo esta la opción más apropiada para contar esta experiencia de aula, buscando generar un acercamiento entre el lector, la experiencia contada y mi propia vivencia.

MOSTRANDO PASO A PASO

Santaló (1990) en su artículo: “*matemáticas para no matemáticos*” citado por Parra (1994) plantea:

“Como ejemplos de objetos geométricos relativamente recientes cuyo estudio ha despertado mucho interés por sus amplios espectros de aplicaciones, desde las artes plásticas, hasta la física, la biología y la astronomía, y que tiene muchas vinculaciones con la computación y, con las teorías “caóticas” que se están desarrollando entre la física y la filosofía”. Además, en dicho artículo se resalta la importancia de los fractales introducidos por Mandelbrot, para quien: “la geometría de la naturaleza es caótica y esta mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del cálculo infinitesimal”. (Parra, 1994, p.38)

En la Universidad Industrial de Santander se encuentran monografías del área de las matemáticas, dentro de las cuales se localiza la geometría fractal, donde se plantean algunas actividades para que el estudiante se acerque y explore este tema. Algunos de estos trabajos, sin dejar de ser valiosos, se quedan en propuestas, como es el caso de la monografía “***Geometría fractal en el bachillerato, acercamiento por sistemas dinámicos***”. Este trabajo que plantea 10 talleres, por el camino de los sistemas dinámicos discretos unidimensionales – me pareció oportuno para que los estudiantes se inicien en la geometría fractal, ya que hace uso de temas como por ejemplo la composición de funciones y sucesiones, temas que trabajan los jóvenes en el bachillerato.

Lo anterior dio lugar a la pregunta que sirvió de pilar durante el desarrollo de la presente experiencia de aula: **¿los talleres propuestos en la monografía geometría fractal en el bachillerato, acercamiento por sistemas dinámicos, posibilitan a los estudiantes de décimo grado del Instituto la Cumbre un acercamiento a la geometría fractal?**, y de esta manera proponer esta experiencia cuya intención es replantear, aplicar y evaluar los talleres, para que a través de la aplicación de los talleres propuestos por Daza (1999) los estudiantes tuvieran un acercamiento hacia la geometría fractal. Cabe resaltar en este momento, aunque lo comentaré con más detalle en el segundo capítulo, que a algunos de los talleres se les hicieron ciertas modificaciones y se les incluyó el uso de la tecnología para tener una mejor apreciación de los temas allí relacionados.

Es importante tener en cuenta que otras personas también han explorado el tema de la geometría fractal, planteando talleres que ayudan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de estos temas. Dentro de las propuestas que han sido elaboradas en la Universidad Industrial de Santander (UIS) dentro del programa de Licenciatura, dirigido a procesos de enseñanza y aprendizaje en la geometría fractal y que constituyen un aporte al presente trabajo, tenemos:

- *Inducción a la geometría fractal. Básica Primaria.* (Cobos, 2002). Presenta unos talleres que permiten el desarrollo de la imaginación, creatividad en la construcción de figuras u objetos con fractales o sin ellos, a partir de situaciones de la vida real, ya que ofrece a los niños un aprendizaje más dinámico. Los talleres pretenden un acercamiento a los fractales, motivando a su estudio mediante una aproximación desde el punto de vista de las autosimilitudes. Son cinco talleres y al inicio de cada uno se encuentran registrados los objetivos y los

materiales a utilizar. El trabajo en el aula se realizó con estudiantes de tercer grado de básica primaria del Gimnasio San Diego.

- *Geometría Fractal en el Bachillerato*. (Castro, 1994), donde presenta una serie de talleres dedicados a introducir y motivar el estudio de la geometría fractal en el bachillerato, en un camino muy específico: el de la autosimilitud y las transformaciones afines. Al final de dicho trabajo en la parte de conclusiones, queda planteado, como otro posible tema de trabajo, proponer talleres del mismo estilo para explorar un camino distinto: el de los sistemas dinámicos.
- *Geometría fractal en el bachillerato, acercamiento por sistemas dinámicos*, elaborado por Daza (1999), esta monografía se dedica al estudio de algunos conceptos básicos de la teoría de los sistemas dinámicos, tiene como finalidad un acercamiento a la geometría fractal por el camino de los sistemas dinámicos discretos unidimensionales. Se presenta una serie de diez talleres que pueden ser desarrollados por estudiantes de décimo y undécimo grado de bachillerato.

Conocidos algunos de los anteriores trabajos que tuve en cuenta para la realización de esta propuesta, así como algunas de las motivaciones que me llevaron a ella, quiero referirme a la metodología que implementé para el desarrollo de esta experiencia.

En “Mis motivaciones” ya había hecho algunos comentarios generales respecto a la metodología, indicando que esta experiencia de aula se basó en la aplicación de 10 talleres que iban desarrollando durante el transcurso de las clases de matemáticas y su posterior análisis, para así determinar el logro de los objetivos propuestos.

La propuesta que desarrollé esta basada en la investigación cualitativa, específicamente en el aula, teniendo en cuenta que algunos de los procesos que los estudiantes debían desarrollar, como la interpretación, el análisis, experimentación, se podían generar en el marco de este tipo de investigación.

La primera etapa que se llevó a cabo fue la aplicación de los diez talleres (Daza, 1999) con los cuarenta estudiantes, y posteriormente analicé los datos bajo un análisis cualitativo, donde se revisó cada pregunta en cada taller, según estos resultados seleccioné un grupo de cinco estudiantes, con los cuales se realizaron charlas, entrevistas, y otras formas de obtener más información, acerca de lo que ellos respondieron.

Al obtener los resultados de los talleres planteé unas categorías emergentes, que salen de la información recolectada. Una vez planteadas las categorías emergentes realicé el análisis teniendo en cuenta los teóricos, los datos obtenidos y mi punto de vista, todo esto es para lograr el análisis y evolución de estos diez talleres.

A partir de la revisión de los datos, establecí tres categorías de análisis que recogieron la mayor parte de la información de los estudiantes. Estas categorías fueron:

- ✓ Resolviendo los talleres: en esta categoría de análisis se incluyeron las experiencias de los estudiantes que estuvieron motivadas por el desarrollo de los talleres en clase. Aquí aparecen todas las apreciaciones y observaciones que los estudiantes indicaron a partir del desarrollo de los mismos, algunas de las frases que expresaron, la forma como lo resolvieron, entre otros aspectos.

- ✓ Manipulando la tecnología: esta categoría de análisis recoge la información de los estudiantes que está relacionada con el uso de la tecnología, especialmente el manejo de la calculadora TI – 92 PLUS, ya que su utilización facilitó el desarrollo de los talleres 7, 8 y 9 y el estudio de la iteración gráfica de una función. Cabe recordar que estos tres talleres se unieron en un solo taller, debido a las limitaciones de tiempo que se presentaron, pues el año escolar ya se estaba finalizando.

- ✓ Acercamiento a la geometría fractal: esta categoría de análisis recoge, de los talleres, todos los elementos que están relacionados con el proceso de aproximación que hicieron los estudiantes hacia la geometría fractal. Aquí establezco cómo los estudiantes fueron interpretando los sistemas dinámicos, la iteración de funciones, entre otros. Al igual que en las otras categorías, aquí aparecen unas frases textuales de los estudiantes así como partes exactas de los trabajos que se presentaron.

RECONSTRUYENDO LA HISTORIA

Los fractales constituyen una de las secciones más hermosas de la teoría del caos. Lo que en un principio comenzó como una observación sobre la repetición indefinida de una misma estructura, ha acabado dando lugar a imágenes de increíble belleza, que han caracterizado especialmente a esta ciencia matemática, alejándola de la frialdad con que se suele tratar al resto de las matemáticas.

Pero no es solamente la belleza el motivo del estudio de los fractales. Casi siempre al contemplar un fractal, inevitablemente se recuerda alguna forma de la naturaleza; parece que la esencia de la geometría es la realidad, y con ella su atractivo, halla una simulación, o una explicación, en la geometría fractal. Pero ¿por qué se dice esto? Ante todo, explicaré por qué a esta singular especialización en la teoría del caos se la conoce como geometría fractal.

La referencia a la geometría es clara; en esta área se estudian figuras en el espacio. La palabra fractal guarda un significado más complejo. Se refiere al hecho de que matemáticamente la dimensión de estos objetos en general no es un número entero, como cabría esperar tras haber estudiado durante 2500 años la geometría euclídea, o las geometrías derivadas de ésta. No entraré en el aspecto del cálculo para la obtención del valor de la dimensión de un fractal, lo cual corresponde a un área muy especializada de la matemática: la teoría de la medida y la dimensión.

Otra característica de estos objetos, la que precisamente los hace bellos al espíritu humano, es la reiteración de un propósito constante, infinitas veces. La complejidad que observamos en un fractal no es en realidad más que una impresión producida por el inmenso número de veces que se repite una imagen, aunque siempre con sutiles diferencias.

Además de describir cómo es un fractal, tenemos que relacionarlo con la teoría de los sistemas dinámicos caóticos. Estudiando éstos con las herramientas de la topología, existe ya un puente de unión. La obtención misma de un fractal constituye un proceso iterativo, lo que lo emparenta con los sistemas dinámicos. Más allá de todo tratamiento matemático, y de todo estudio cualitativo, la semejanza entre los fractales y lo que observamos en la realidad nos obliga a pensar en la capacidad de explicación de la naturaleza ofrecida por los sistemas dinámicos, y, también, nos lleva a la cuestión siguiente: ¿tendremos que sustituir los triángulos de Pitágoras por estas extrañas figuras?

Dimensión fractal

El que estos objetos reciban el nombre precisamente de esta propiedad, el poseer dimensión no entera, nos puede hacer sospechar, con razón, sobre la importancia de este concepto, tanto en su análisis como en su significación.

Al poseer una dimensión situada entre dos números enteros, no podremos tratarlo como una longitud, un volumen o un área bien definidos. Así, diremos de un fractal con dimensión situada en el intervalo $(1,2)$ que es una superficie no delimitada por una curva o un conjunto de rectas, pero que no llega a ser un plano (su perímetro es infinito y no diferenciable). Si ésta estuviera en $(0,1)$ diríamos que se trata un conjunto de puntos alineados que no llegan a constituir una recta, pese a ser infinitos y a estar infinitamente próximos entre

sí. Éste es el caso del conjunto de Cantor, cuya dimensión (fractal) es $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,630929$.



FIGURA 1. CONJUNTO DE CANTOR

Presentamos aquí una de las figuras de Koch, construidas mediante un proceso geométrico iterado. El fractal resultante tiene dimensión en el intervalo (1,2), mas exactamente su dimensión (fractal) es $\frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,261859$.

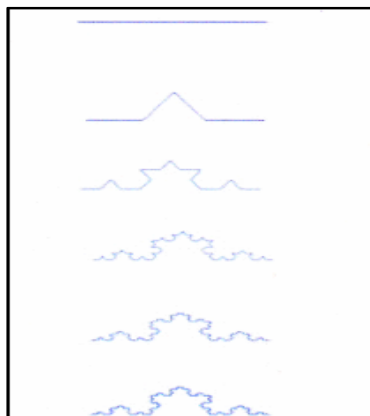


FIGURA 2. CURVA DE KOCH

Este significado de la dimensión fractal tiene una interpretación física muy interesante: la dimensión fractal de un objeto es un parámetro que nos cuantifica la capacidad que tiene éste al ocupar espacio, independientemente de la estructura geométrica del mismo. El fractal se extiende por el espacio de dimensión menor (de las dos entre las que se encuentra) repitiendo un mismo motivo indefinidamente, hasta "superar" esa dimensión (al poseer longitudes, áreas o volúmenes infinitos).

Además de esta información, cualitativa en cierto modo, y que aprovecha poco el valor numérico (el número que representa la dimensión), ésta nos indica la escala a la que se encuentran ciertos parámetros al aparecer las copias del conjunto inicial en el desarrollo del cuerpo del fractal. Y en este número se diferencian todos los fractales entre sí. Todos presentan copias de sí mismos (autosemejanza), no exactamente idénticas, en su cuerpo, pero no escalan de la misma forma. Por eso, atribuimos a la dimensión el "grado de ocupación" del espacio por el conjunto en cuestión. Pensemos ahora un momento en la idea que tenemos de la naturaleza, como sistema en evolución, que tiende al mejor aprovechamiento del entorno. ¿No utilizará ésta una geometría de dimensión fractal, con el fin de aprovechar lo mejor posible el espacio?

Los pulmones son superficies increíblemente extensas, situadas en un volumen muy reducido; el conjunto de conductos de nuestro sistema circulatorio colocado en línea recta tendría una longitud inmensa y, sin embargo, está situado en nuestro cuerpo ocupando una superficie finita y reducida.

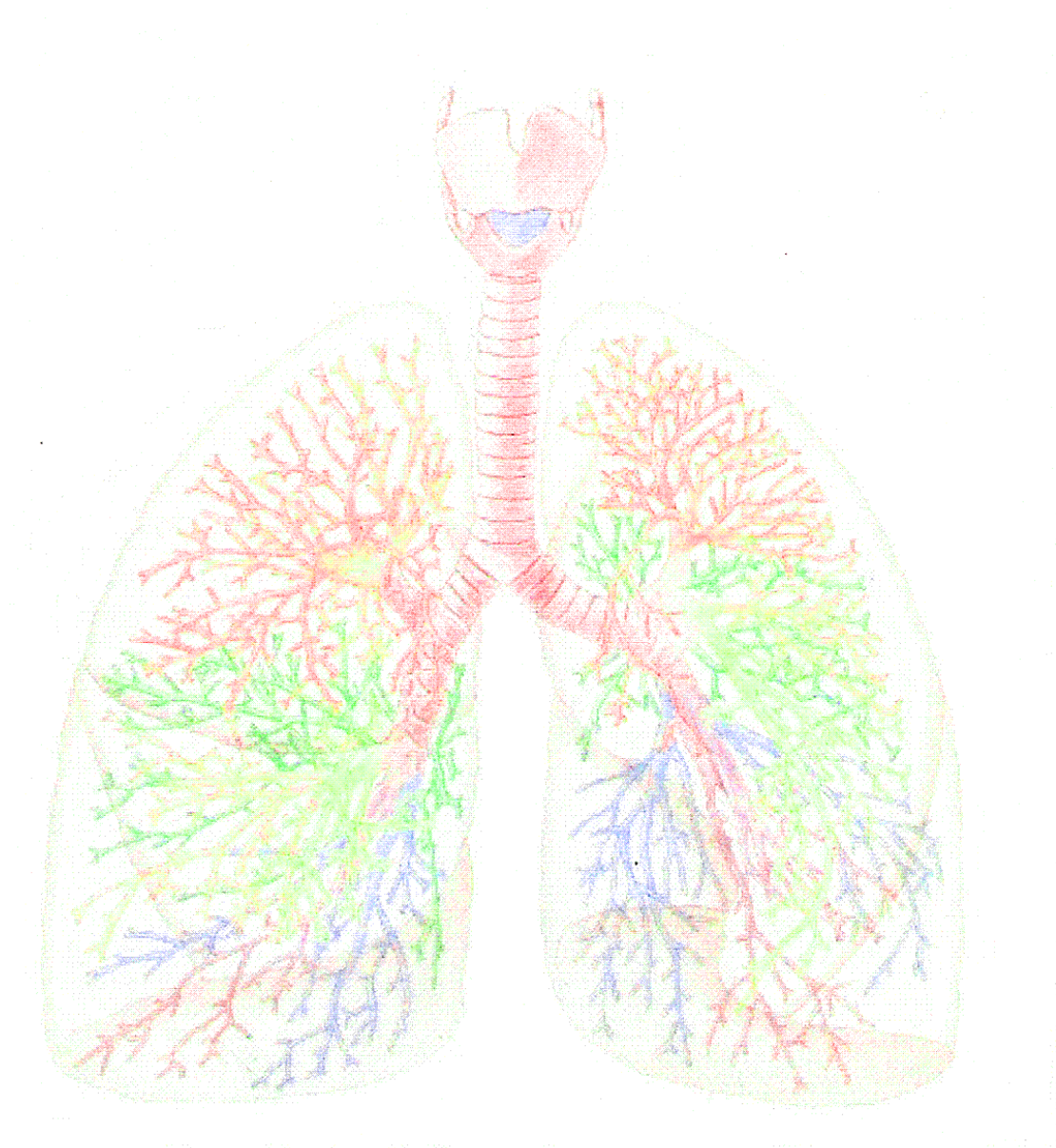


FIGURA 3. PULMONES

Y como éstos, podemos pensar en muchos ejemplos más. Teniendo presente la idea de que la naturaleza tiende a maximizar o minimizar algunas magnitudes, los fractales aparecen como geometría propia y característica de ésta.

Relación con los sistemas dinámicos

Antes de preguntarnos qué relación existe entre los objetos fractales y los sistemas dinámicos, veamos cómo se construye un fractal. Existen varias formas de obtener este tipo de figuras. Todas ellas tienen en común la necesidad de iterar una acción un número elevado de veces (indefinidamente, en teoría).

Uno de estos métodos es el de iteración de una transformación concerniente a la geometría. Por ejemplo: “divide cada segmento en tres partes y quita la parte central”. Con esta última acción reiterada una y otra vez llegamos al conjunto de Cantor, el primer objeto fractal estudiado. Éste método de obtención de fractales es muy sencillo, y con él podemos obtener imágenes semejantes a los copos de nieve, motivos artísticos, etc.

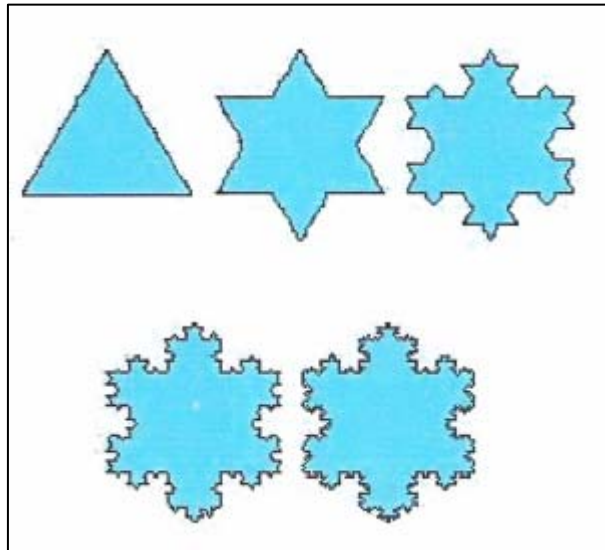


FIGURA 4. LA ISLA DE KOCH O DEL COPO DE NIEVE

La figura 5 es una de las versiones de la "alfombra de Sierpinski", donde la transformación consiste en dividir un cuadrado en nueve cuadrados del mismo tamaño, colorear todos los cuadrados excepto el del centro. Reiterando una y otra vez la función obtenemos el fractal.

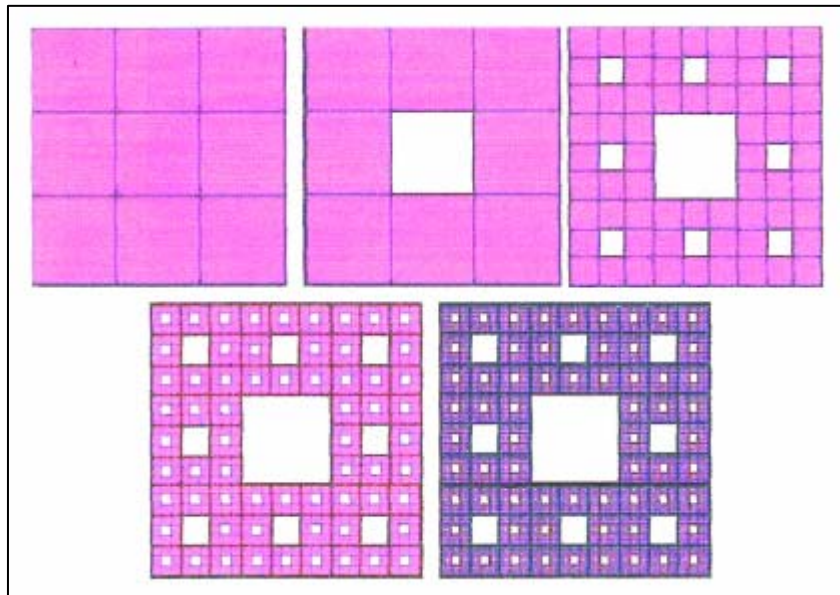


FIGURA 5. ALFOMBRA DE SIERPÍNSKI

Otra forma de obtener fractales es siguiendo la órbita de un punto en un sistema dinámico caótico (mas adelante se definirán más formalmente estos conceptos). Lo que obtenemos se conoce como atractor extraño y viene a indicar la zona del espacio de fases por la que circulan los distintos puntos del sistema caótico. La importancia de estas figuras reside en que son fractales directamente extraídos de los sistemas dinámicos.

Un subconjunto del plano complejo que ocupa un lugar destacado en la teoría de los sistemas dinámicos y fractales es el llamado **Conjunto de Mandelbrot** (en honor a su “descubridor” Benoit Mandelbrot, físico nacido en

Polonia en 1924 y quien es considerado el “padre de los fractales”). Para construir el conjunto de Mandelbrot se considera no una sola definición recursiva, sino toda una familia de definiciones recursivas así:

$$z_0 = 0 \quad \text{y} \quad z_{n+1} = z_n^2 + c$$

donde c es una constante compleja; por ejemplo, si tomamos $c = -\frac{1}{2}i$, la definición recursiva para este valor de c es:

$$z_0 = 0 \quad \text{y} \quad z_{n+1} = z_n^2 - \frac{1}{2}i$$

Calculemos entonces la llamada órbita de 0:

$$z_1 = 0^2 - \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2}i;$$

$$z_2 = \left(-\frac{1}{2}i\right)^2 - \frac{1}{2}i = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i;$$

$$z_3 = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right)^2 - \frac{1}{2}i = -\frac{3}{16} - \frac{1}{4}i;$$

$$z_4 = \left(-\frac{3}{16} - \frac{1}{4}i\right)^2 - \frac{1}{2}i = -\frac{7}{256} - \frac{13}{32}i.$$

Si continuamos con un poco de paciencia y cuidado, verificando los cálculos anteriores, encontramos z_5 y ubicamos estos complejos en el plano, observamos que esta órbita no se va a “escapar hacia el infinito” sino que se queda encerrada en una región, es decir, es acotada.

Entonces el punto $c = -\frac{1}{2}i$ va a pertenecer al conjunto de Mandelbrot, que notaremos M , es decir $-\frac{1}{2}i \in M$.

Con base en lo anterior, el conjunto M se define de la siguiente manera:

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} \mid \text{órbita de } 0 \text{ para } z_{n+1} = z_n^2 + c, \text{ es acotada} \right\}$$

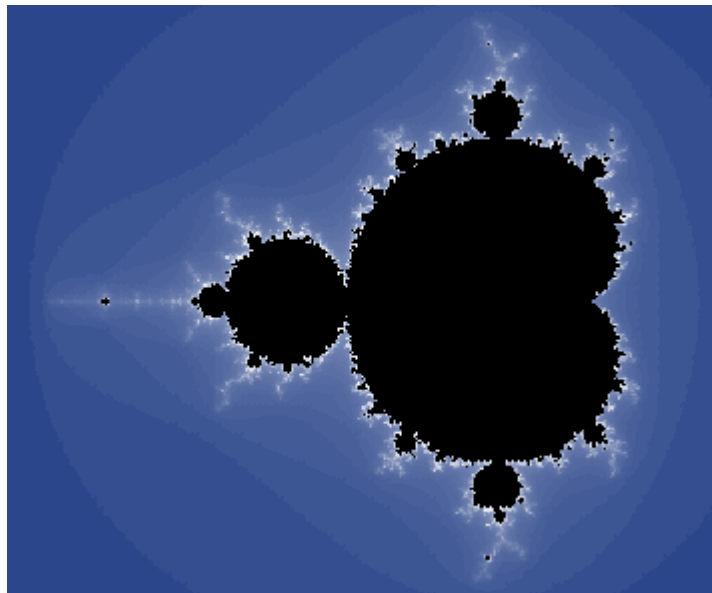


FIGURA 6. CONJUNTO DE MANDELBROT

Finalmente, podemos hablar de otra forma de crear figuras fractales, conocida como "el juego del caos". El método es muy sencillo: tenemos n reglas o sucesos cada uno con una determinada probabilidad (que llevan un punto a otro punto del espacio), y según el suceso que ocurra aplicamos sobre el punto una u otra ley. Hacemos que aparezca un nuevo suceso, y repetimos el proceso. Reiterando este mecanismo una y otra vez obtenemos

figuras de todo tipo. Una de ellas, quizá la más famosa, es la de la hoja de helecho que aquí presentamos.

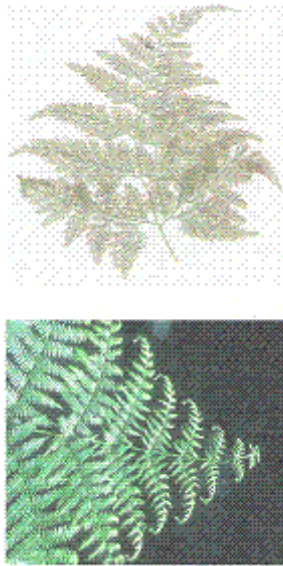


FIGURA 7. HOJA DE HELECHO

Este fractal se ha generado con cuatro funciones con distinta probabilidad, siendo cada función una transformación afin (es decir, una transformación lineal, seguida de un desplazamiento). Fijémonos en las características propias de fractal: autosemejanza (cada ramita es igual a la hoja entera) y repetición.

Un mecanismo tan sencillo es capaz de generar una imagen tan bella como la que aquí vemos, claramente presente en la naturaleza. Con este método podemos simular las costas de un continente, un cielo estrellado, galaxias, árboles, etc., por eso el juego del caos es uno de los más interesantes (y con muchas aplicaciones para el mundo multimedia).

Con esto hemos visto a grandes rasgos cómo se construye un fractal. Pero, ¿qué relación guardan estas hermosas figuras con los sistemas dinámicos

caóticos? En primer lugar tenemos procesos iterativos en todos los métodos de construcción, también presentes en los sistemas dinámicos. Pero no sólo en la construcción aparece la iteración. Como hemos visto, la autosemejanza y la repetición de un mismo motivo son características de los fractales, constituye su método de conquista del espacio. Luego, si consideramos el mecanismo que crea un fractal, como un sistema dinámico, (por ser un proceso iterado), el objeto pasa a ser la representación gráfica de la ley. En los atractores, esta concepción es clara, puesto que se forman a partir de órbitas de puntos.

En un conjunto del tipo del de Cantor, la idea es también muy natural, pues el fractal no es más que la consecuencia de la acción del sistema dinámico. Por lo tanto en estos casos el fractal adquiere el sentido de "frontera del sistema dinámico", frontera que separa los puntos en los que tiene sentido la aplicación del proceso de los que no lo tiene. Este concepto de frontera es mucho más profundo de lo que puede parecer, puesto que, en términos de sistemas dinámicos, delimita la cuenca de un atractor, es decir, la zona del espacio en la que los puntos se ven arrastrados o repelidos por el atractor. Este tipo de fractales tiene gran relación con los sistemas dinámicos caóticos (en el resto de sistemas dinámicos, las cuencas no son fractales).

Así, en general, los fractales aparecen como una exposición gráfica de la acción de un sistema caótico. Estudiando los fractales conocemos características del sistema dinámico que lo ha generado (y que podemos desconocer), y viceversa. Unos, como posible explicación de ciertos mecanismos de la naturaleza y otros como posible geometría de ésta.

Siguiendo esta interpretación de la teoría, que habla de ésta como el "lenguaje de la naturaleza", deben estar muy relacionados el caos con los fractales.

Realidad de los fractales

La imagen del helecho obtenida como resultado del "juego del caos" es realmente sorprendente. Como también lo son el resto de las imágenes de plantas, galaxias, ríos, costas, montañas, paisajes, etc., conseguidos por iteraciones semejantes. ¿Cómo es que se parecen tanto a la realidad? Si hablábamos sobre los sistemas dinámicos como herramienta intuitiva y natural a la hora de explicar los procesos dados en la naturaleza, y vemos que éstos están unidos conceptualmente a los fractales, no nos debe extrañar que aparezcan precisamente las formas de la naturaleza reflejadas en ellos.

Los fractales pasan por lo tanto a ser una interesantísima prueba de que los sistemas dinámicos caóticos están realmente presentes en la naturaleza (dejando las discusiones de si están en nuestra cabeza o en la naturaleza). Podemos ahora divagar sobre las consecuencias de la "realidad" de los fractales. A muchas personas (o: a la mayoría de las personas) les produce satisfacción y placer la contemplación de un objeto fractal. ¿A qué se debe esto? Podemos hablar de causas probables: la reiteración de un motivo, algo común en el arte; el colorido se obtiene (y que es algo artificial, que elige quien diseña el programa que genera los fractales); la originalidad, nunca habíamos visto cosas iguales (las imágenes que no son copia de la realidad); etc.

Pero podemos hablar de otra causa más profunda, basada precisamente en su parecido a las formas de la realidad. ¿Acaso lo que nos agrada está basado en las irregularidades ordenadas presentes en los fractales y no en las figuras geométricas clásicas? O quizá la propia tortuosidad de nuestra mente provoca que estos objetos nos parezcan bellos, por "parecerse a nosotros". O, dentro ya del aspecto más metafísico, quizá vemos en ellos un orden presente en la naturaleza, en todos sus rincones, común a todos los

fenómenos. Existe un mecanismo, una ley, que provoca que la naturaleza sea como es. Pero ésta, al igual que una bella mujer, se nos muestra como un misterio, como algo oculto, que nos arrastra irremediablemente a una constante admiración y búsqueda. Contemplando esta belleza de los fractales, contemplamos la de la teoría del caos, y, en general, la de las matemáticas y la razón.

Benoit Mandelbrot (1924-)



Nacido en Polonia, sus padres emigraron a Francia en 1936 y su tío Szolem, profesor de matemáticas en el Collège de Francia asumió la responsabilidad de su educación. Benoit estudió en Paris, Lyon y en California (en Caltech).

Como investigador en IBM se enfrentó a un problema que sorprendía a los ingenieros de la multinacional. Estos notaron que se producen siempre errores de transmisión de información entre ordenadores, sea cual sea la cantidad de información transferida. Vieron además que existía cierta regularidad en la distribución temporal de estos: tras un período de ausencia venía otro repleto de errores. Mandelbrot analizó el fenómeno, y descubrió que a medida que acortamos los intervalos de tiempo estudiados, sigue apareciendo más complejidad en la distribución. Así, si durante una hora no se producen errores, en la siguiente sí se producen. Si estudiamos

únicamente esta hora, y la dividimos en intervalos de 20 minutos, veremos que habrá intervalos sin errores, y otros con muchos errores; estudiando aquellos con errores volvíamos a ver nuevos intervalos, etc. Mandelbrot asoció la imagen con un objeto estudiado por el matemático George Cantor, el conjunto de Cantor. Descubrió otros procesos con complejidad creciente a medida que nos aproximamos a ellos, y los llamó fractales. Mostró cómo los fractales están presentes en muchos lugares tanto en las matemáticas como en la naturaleza. Mandelbrot ha recibido, entre otros premios, la "Barnard Medal for Meritorius Service to Science", la Medalla Franklin y la Medalla Steinmetz (ésta, en 1991).

El estudio de los *Sistemas Dinámicos Discretos* ha tenido un desarrollo muy importante en los últimos años. No sólo el número de libros y artículos dedicados a este tema ha tenido un crecimiento impresionante. También ha cambiado muy favorablemente el grado de divulgación y de conocimiento en ambientes no propiamente matemáticos de conceptos relacionados con los sistemas dinámicos. Caos, turbulencia y conjuntos fractales (por mencionar los más exitosos en este terreno) han jugado, de alguna manera, el papel de mensajeros de ideas que han tocado a un público muy amplio.

El hecho es que vivimos rodeados de sistemas dinámicos. Pensemos en todos aquellos objetos que cambian su posición cuando el tiempo transcurre: los autos, los aviones, las personas, los animales, las manzanas que caen, las olas en las playas,... Pensemos en todas aquellas magnitudes que cambian su valor al paso del tiempo: la temperatura de nuestro cuerpo, las reservas de dólares en los bancos, la población de China, la concentración del ozono en el aire de la Ciudad de México,... Todos estos fenómenos son sistemas dinámicos o son parte de algún sistema dinámico digamos más grande.

Biólogos, físicos, ingenieros y matemáticos, entre una gran cantidad de curiosos, han estudiado el movimiento y los sistemas dinámicos. Los puntos de vista que han asumido y las herramientas que han utilizado son de una gran diversidad. Esta pluralidad se presenta aún entre los matemáticos que se declaran aficionados a este tema. Es altamente probable que esto último, la diversidad de enfoques, se debe a la gran dificultad de la meta planteada: hacer un modelo matemático del movimiento (o de cada movimiento). El siguiente ejemplo, ayudará a entender cuál es el punto de vista y cuáles son las herramientas que se han adoptado en dichos enfoques.

Ejemplo (tomado de Méndez (2000)): **Una visita al doctor.** Imagina que acudes a tu doctor preferido para un chequeo general. En algún momento el doctor te coloca un aparato – sensor que mide tu frecuencia cardíaca, es decir la cantidad de latidos de tu corazón por minuto. Llamemos t_0 al momento en que el aparato les da, a ti y a tu doctor, el primer dato: n_0 latidos por minuto. Un minuto después, $t_0 + 1 = t_1$, el aparato da el siguiente dato, n_1 latidos por minuto. Y así sucesivamente. Después de k minutos tienen esta colección de datos: $n_0, n_1, \dots, n_k$. Tu doctor apaga el aparato, toma los datos y elabora una conjetura sobre tu salud. Nosotros, sin medir las consecuencias, nos preguntamos: ¿cuál sería tu frecuencia cardíaca dentro de 10 minutos, n_{k+10} ?, ¿cuál dentro de siete días?, ...

Para responder estas preguntas, o preguntas similares, hacemos un modelo matemático simple que refleja la forma en que se comporta tu frecuencia cardíaca: supones que existe una relación entre el valor de n_{k+1} y los datos ya conocidos $n_0, n_1, \dots, n_k$. Lo más simple, y por tanto lo más audaz, es proponer que cada dato depende sólo del valor del dato inmediato anterior. Es decir, que existe una función que a partir del valor n_j nos da el valor de

n_{j+1} , $f(n_j) = n_{j+1}$. El valor de n_1 sería $f(n_0)$; el de n_2 sería $f(n_1)$, y así sucesivamente. Si conociéramos la regla de correspondencia de f encontraríamos, en particular, el valor de n_{k+1} , $f(n_k) = n_{k+1}$, y con ello responderíamos nuestra primera pregunta. Resolver la siguiente también estaría a nuestro alcance ya que para cada tiempo $t_j = t_0 + j$ tendríamos una expresión para la frecuencia cardiaca en ese instante:

$$n_j = f \circ f \circ \dots \circ f(n_0).$$

Aquí f aparece compuesta consigo misma j veces.

Si las frecuencias cardiacas fluctúan entre 60 y 140, podemos suponer que el dominio y el contradominio de f es el intervalo $[60,140]$, así tenemos:

$$f : [60,140] \rightarrow [60,140].$$

Si todo esto fuera cierto podríamos predecir la frecuencia cardiaca de una persona dentro de los siete días ($7 \times 24 \times 60 = 10080$ minutos) a partir sólo de la frecuencia inicial n_0 , que llamaremos también condición inicial, y de la función f , para ello sólo tendríamos que calcular el valor

$$f^{10080}(n_0), \text{ donde } f^{10080} = \underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{10080 \text{ veces}}$$

La función $f : [60,140] \rightarrow [60,140]$ describiría el movimiento, el comportamiento, de tu frecuencia cardiaca para todo tiempo t_j en el futuro.

En el ejemplo anterior y en general en los sistemas que nos interesan, los datos que se obtienen están ordenados, sabemos cuál es el primero, cuál es el segundo, etc. Y de cada uno de ellos al siguiente transcurre una unidad fija de tiempo. Esta característica les agrega a nuestros sistemas dinámicos el nombre de *discretos*.

FUNDAMENTACIÓN CIENTÍFICA.

Espacio Métrico:

Sea X un conjunto no vacío y $d : X \times X \rightarrow \mathfrak{R}$ que satisface para cualquier $x, y, z \in X$:

- i) $d(x, y) \geq 0$
- ii) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$
- iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Entonces d se llama **métrica sobre X** y (X, d) se llama un **espacio métrico**.

Bola:

Sean (X, d) espacio métrico, $a \in X$ y $r \in \mathfrak{R}^+$. Se define la bola de centro a y radio r , notada $B(a, r)$ por :

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$$

Sistema Dinámico: $\{D; f\}$

Sistemas Dinámicos Unidimensionales: Sea $\{D; f\}$ donde $D \subseteq \mathfrak{R}$ y sea f una aplicación, en general continua, de D en si mismo. En la teoría de sistemas dinámicos se estudia el comportamiento de las iteraciones de f según los diferentes valores del punto inicial. La sucesión $(f^n(x))$ de las iteraciones de f en un punto dado es la órbita de ese punto. Por tanto, en la teoría de sistemas dinámicos se estudia como son las órbitas de los diferentes puntos.

En general nos interesará saber si la órbita de un punto converge a cierto valor (que será necesariamente un punto fijo), si converge a un ciclo periódico o si se comporta de forma aparentemente aleatoria.

También nos interesará saber cuándo un punto fijo (o un ciclo periódico) atrae o repele las órbitas de puntos cercanos, y en caso de ser así, cuales son los puntos cuyas órbitas atrae o repele.

Ejemplos de sistemas dinámicos clásicos

La ecuación de Maltus

Supongamos que queremos estudiar la evolución de la población de una determinada especie. Para ello denotamos por x_k al número de individuos de la población en el instante k . Para estudiar de que manera evoluciona la población, se establece una relación entre ésta en instantes consecutivos. Una primera manera de abordar el problema se debe a Maltus (s.XIX), y es suponer que el crecimiento de la población es proporcional a la población existente. Esto es,

$$x_{k+1} = x_k + d \quad x_k = (1+d) x_{k-1} = c x_{k-1},$$

con $c > 0$. Entonces $x_k = c^k x_0$. Por tanto la población crece indefinidamente, se mantiene constante o se extingue según sea c mayor, igual o menor que uno respectivamente.

La curva de Verhulst

A mediados del siglo XIX, el matemático belga Pierre Verhulst propuso la siguiente fórmula cuadrática, en la que se supone que el crecimiento de la

población es proporcional tanto a la población existente, como al "espacio" disponible. Esto es,

$$x_{k+1} = x_k + c \quad x_k(1-x_k) = (1+c) x_k - c x_k^2$$

donde se supone que la población máxima admisible es 1 (normalizando). Así, cuando la población pasa de 1 el crecimiento se hace negativo.

La parábola logística de May

Propuesta por el biólogo Robert May en 1976, consistía en estudiar el crecimiento de una población de insectos en un ecosistema cerrado. En este caso la evolución de la población sigue la regla:

$$X_{k+1} = c(1-x_k)x_k.$$

Órbita

Sea $\{D; f\}$ un sistema dinámico; para cada $x \in D$ se define la órbita de x , notada $\mathcal{O}(x)$ por:

$$\mathcal{O}(x) = (x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots).$$

Órbita Acotada

Se dice que $\mathcal{O}(x)$ es acotada si existe una bola que la contiene, es decir, si existe $B(a, r)$ tal que:

$$\mathcal{O}(x) \subseteq B(a, r)$$

Conjunto Lleno de Julia

Sea $\{D; f\}$ un sistema dinámico se define el Conjunto Lleno de Julia de f notado F_f por:

$$F_f = \{x \in D \mid \mathcal{O}(x) \text{ es acotada}\}$$

Iteración gráfica

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Una manera de estudiar la dinámica es el análisis gráfico de las órbitas. Consiste en lo siguiente:

1. Empezamos en un punto p en el eje OX .
2. Nos movemos verticalmente hasta intersectar la gráfica de f .
3. Nos movemos horizontalmente hasta intersectar la diagonal $y=x$.
4. Nos movemos verticalmente - hacia arriba o hacia abajo - hasta intersectar la gráfica de f .
5. Se repiten los pasos 3 y 4 para generar nuevos puntos.

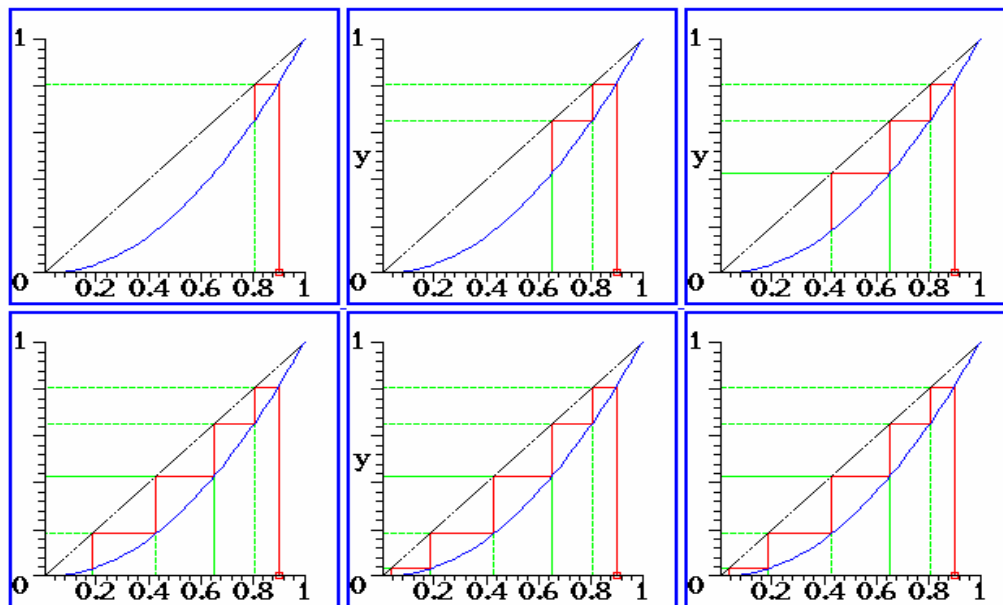


FIGURA 8. ANÁLISIS GRÁFICO DE ÓRBITAS

La órbita de p está generada por las proyecciones sobre el eje OX de los puntos obtenidos.

Esto se puede realizar simultáneamente con varios puntos iniciales para generar las órbitas de varios puntos.

Puntos fijos

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow I$, I intervalo. Se dice que $\xi \in I$ es un punto fijo de f si $f(\xi) = \xi$. Se dice que ξ es eventualmente fijo si $f^{n+1}(\xi) = f^n(\xi)$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Puntos fijos atractivos: Se dice que un punto fijo ξ es atractivo si existe un intervalo abierto U alrededor de ξ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \xi$ para todo $x \in U \cap I$.

Ejemplo. 0 es un punto fijo atractivo de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$

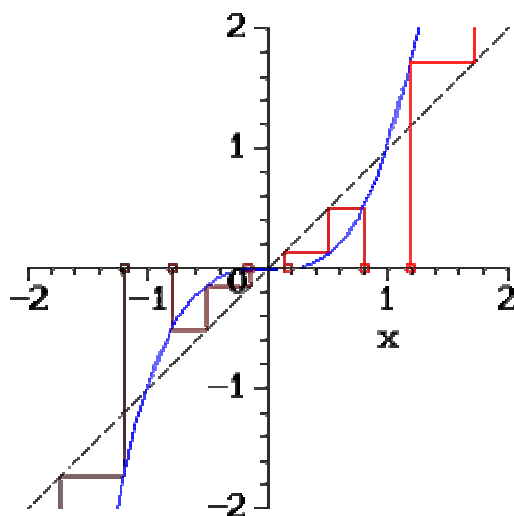


FIGURA 9. PUNTO FIJO ATRACTIVO

Puntos fijos repulsivos: Se dice que un punto fijo ξ es repulsivo si existe un intervalo abierto U alrededor de ξ tal que para todo $x \in (U \cap I) - \{\xi\}$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \notin U$.

Ejemplo. El 0 es un punto fijo repulsivo de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^3$

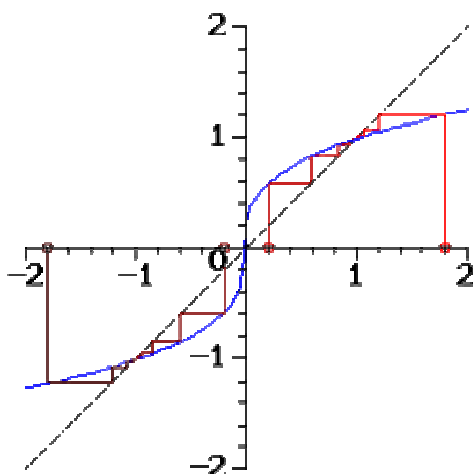


FIGURA 10. PUNTO FIJO REPULSIVO

Teorema: Si la órbita de un punto converge a un punto z , entonces z es un punto fijo de f (esto es debido a la continuidad de f).

FUNDAMENTACIÓN PEDAGÓGICA

El aprendizaje es un proceso de desarrollo de estructuras significativas. Se identifica con “conocer” definido como “comprensión del significado”. De ahí que cuando existen una vacilación o duda en el aprendizaje no se ha comprendido plenamente.

La formación y desarrollo de la estructura cognitiva depende del modo como percibe una persona los aspectos psicológicos del mundo personal, físico y social. Las motivaciones, incluso, dependen de la “estructura cognitiva”, y el cambio de motivación implica un cambio de estructura cognitiva. Por medio del aprendizaje se producen los cambios de las estructuras significativas o comprensión interna de la situación y su significado. Los cambios que se producen en la estructura cognitiva provienen del cambio en la misma estructura y por la fuerza que tienen en el “aquí y ahora” las necesidades, motivaciones, deseos, tensiones, aspiraciones,... (Ontoria, 1999).

Aquí se fija la orientación del aprendizaje que supone la génesis de nuevos conceptos interiorizados, nuevas estructuras mentales, nuevas actitudes, ..., con los que el alumno puede analizar y solucionar los problemas. Las nuevas estructuras y actitudes, desarrolladas por la *asimilación, reflexión e interiorización*, permiten valorar y profundizar las distintas situaciones vitales en las que tiene que tomar una opción personal. Existen, pues, un *proceso reflexivo*, ya que se trata de una incorporación resistente y responsable de los hechos, conceptos, situaciones, experiencias, ..., que implica aceptar el aprendizaje desde la perspectiva del alumno y relacionado con el ámbito específico. Por tanto, se trata de un aprendizaje para desarrollar la *actitud crítica y la capacidad de toma de decisiones*. Estas dos características definen el proceso de **aprender a aprender**.

Dentro de la concepción de Ausubel (1986) es importante clarificar el concepto de *estructura cognitiva*. Ella se define como construcción hipotética, es decir, entidades supuestamente hipotéticas que tanto deben explicar la unidad, cierre y homogeneidad individual, como las semejanzas y coincidencias de determinados modos de comportamiento. En cada estructura mental está implícito un momento de generalidad. Las estructuras cognitivas son utilizadas por Ausubel para designar el conocimiento de un

tema determinado y su organización clara y estable, y están en conexión con el tipo de conocimiento, su amplitud y su grado de organización (Ontoria, 1999).

Ausubel sostiene que la estructura cognitiva de una persona es el factor que decide acerca de la significación del material nuevo y de su adquisición y retención. Las ideas nuevas solo pueden aprenderse y retenerse útilmente si se refieren a conceptos y proposiciones ya disponibles, que proporcionan las anclas conceptuales. La potenciación de la estructura cognitiva del alumno facilita la adquisición y retención de los conocimientos nuevos. Si el nuevo material entra en fuerte conflicto con la estructura cognitiva existente o si no se conecta con ella, la información no puede ser incorporada ni retenida. El alumno debe reflexionar activamente sobre el material nuevo, pensando los enlaces y semejanzas y reconciliando diferencias o discrepancias con la información existente.

Al analizar la realidad escolar, Ausubel se dio cuenta que predominaba un *aprendizaje memorístico*, caracterizado por la adquisición de los conocimientos a través de unos procedimientos repetitivos. Ante esta situación se planteó la alternativa del *aprendizaje por descubrimiento*, en la cual el alumno adquiere los conocimientos por sí mismo, es decir, los redescubre, sin darles una organización previa.

Ausubel cuestionó que el aprendizaje por descubrimiento fuese la alternativa adecuada al aprendizaje memorístico. Para él, la distinción entre aprendizaje memorístico y aprendizaje significativo es más importante, pues se apoya en criterios de contraposición más coherentes. El *aprendizaje memorístico o repetitivo* se produce cuando “la tarea de aprendizaje consta de puras asociaciones arbitrarias (números, listas, pares asociados, etc.)” (Ausubel,

Novak y Hanesian, 1989, p.37). En este tipo de aprendizaje, en la asociación de los conceptos no hay una relación sustancial y con significado lógico.

“En el aprendizaje memorístico, la información nueva no se asocia con los conceptos existentes en la estructura cognitiva y, por lo tanto, se produce una interacción mínima o nula entre la información recientemente adquirida y la información ya almacenada” Novak citado por Ontoria (1999, p.16).

El alumno no tiene intención de asociar el nuevo conocimiento con la estructura de conceptos que ya posee en su estructura cognitiva. Se produce, pues, una memorización mecánica o repetitiva de los datos, hechos o conceptos.

El *aprendizaje significativo*, por el contrario, tiene lugar cuando se intenta dar sentido o establecer relaciones entre los nuevos conceptos o nueva información y los conceptos y conocimientos existentes ya en el alumno, o con alguna experiencia anterior. Hay aprendizaje significativo cuando la nueva información “puede relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe” (Ausubel citado por Ontoria, 1999, p.16). De esta manera, el alumno construye su propio conocimiento y, además, está interesado y decidido a aprender.

Las diferencias entre ambos tipos de aprendizaje son las siguientes:

a) *En el aprendizaje significativo*, la nueva información se incorpora de forma sustantiva, no arbitraria, a la estructura cognitiva del alumno. Hay una intencionalidad de relacionar los nuevos conocimientos con los de nivel superior más inclusivos, ya existentes en la estructura cognitiva. Se relaciona con la experiencia, hechos u objetos. Hay una implicación

positiva al establecer esta relación, al manifestar una disposición positiva ante el aprendizaje.

b) *En el aprendizaje memorístico*, la incorporación de los nuevos conocimientos se produce de forma arbitraria. No hay intención de integrarlos en la estructura cognitiva. No se relaciona con la experiencia, hechos u objetos. No hay implicación afectiva en dicha relación al no mostrar una disposición positiva ante el aprendizaje.

Sin embargo, Ausubel no concibe estas dos clases de aprendizaje como contrapuestos radicalmente, todo o nada, sino que los presenta como *un continuo*. Tanto el aprendizaje repetitivo como el significativo puede ser *por descubrimiento*, según el proceso que se utilice en la aplicación metodológica. En este sentido, el aprendizaje escolar dependerá del grado en que el nuevo aprendizaje sea significativo (Ontoria, 1999, p.17)

El aprendizaje significativo es más eficaz que el memorístico:

- Porque le afecta en sus tres principales fases: adquisición, retención y recuperación;
- Las pruebas realizadas confirman que el enfoque significativo de un material potencialmente significativo hace la adquisición más fácil y más rápida que el caso del enfoque repetitivo;
- La adquisición significativa es más fácil porque fundamentalmente implica la utilización de estructuras y elementos previamente adquiridos, que funcionan como anclas respecto al nuevo material, por semejanza y contraste;

- Es más fácilmente retenido durante un período más largo.

Para Ausubel, lo fundamental del aprendizaje significativo como proceso consiste en que los pensamientos, expresados simbólicamente de modo no arbitrario y objetivo, se unen con los conocimientos ya existentes en el sujeto. Este proceso, pues, es *un proceso activo y personal*.

- *Activo*, porque depende de la asimilación deliberada de la tarea de aprendizaje por parte del alumno.
- *Personal*, porque la significación de toda la tarea de aprendizaje depende de los recursos cognitivos que utilice cada alumno.

“La clave del aprendizaje significativo está en relacionar el nuevo material con las ideas ya existentes en la estructura cognitiva del alumno” (Ausubel citado por Ontoria, 1999, p.18). Por consiguiente, la eficacia de este aprendizaje está en función de su significatividad, no de las técnicas memorísticas (aprendizaje memorístico). Para ello, los prerequisites básicos son:

- a) Que el material sea potencialmente significativo, es decir, que permita establecer una relación sustantiva con conocimientos e ideas ya existentes.
- b) La tendencia del alumno al aprendizaje significativo, es decir, una disposición en el alumno que indica interés por dedicarse a un aprendizaje en el que intenta dar un sentido a lo que aprende (Ontoria, 1999, p.18)

¿Cuándo un material es potencialmente significativo? La significación potencial quiere decir que el material de aprendizaje (contenido cultural)

puede ser puesto en conexión, de modo no arbitrario, superficial y objetivo, con la estructura cognitiva de un determinado individuo. En general, podemos decir que el nuevo material debe ser “susceptible de dar lugar a la construcción de significados” (Coll, *Ibíd.*). El nuevo material debe permitir una relación intencionada (no arbitraria) y sustancial (no al pie de la letra) con los conocimientos e ideas del alumno. Por “relación sustancial” se entiende que esta relación, establece con algún aspecto específicamente relevante de la estructura cognitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición. Se trata de la relación que se establece con el sentido y significado de las ideas previas. Las relaciones significativas pueden normalmente expresarse de diversas maneras y su establecimiento es más fácil cuando se recurre a formulaciones alternativas.

Esta significatividad potencial del material depende de la **significatividad lógica**, es decir, que el contenido o material posea una estructura interna, organizada, de tal forma que sus partes fundamentales tengan un significado en sí y se relacionen entre sí de modo no arbitrario. Esta potencial significatividad lógica no solo depende de la estructura interna del contenido, sino también de la manera como este sea presentado al alumno.

Además de la significatividad lógica, el material o contenido de aprendizaje necesita una potencial **significatividad psicológica**, es decir, que pueda significar algo para el alumno y le lleve a tomar la decisión intencionada de relacionarlo no arbitrariamente con sus propios conocimientos. El material tiene potencial significatividad psicológica cuando puede conectarse con algún conocimiento del alumno, es decir, con su estructura cognitiva. Esto implica la importancia de las ideas o conocimientos previos del alumno en el proceso del aprendizaje significativo.

La significatividad psicológica supone, pues, la disponibilidad de contenidos relevantes en la estructura cognitiva de diferentes alumnos, es decir, que el alumno tenga en su estructura cognitiva ideas incluso con las cuales puedan relacionar el nuevo material. Además, de la potencial significatividad lógica y psicológica, del material, se necesita otra condición básica: una *actitud favorable del alumno* para aprender significativamente, es decir, una intención de dar sentido a lo que aprende y de relacionar, no arbitrariamente, el nuevo material de aprendizaje con sus conocimientos adquiridos previamente y con los significados ya construidos. El aprendizaje significativo es el resultado de una interacción del nuevo material o información con la estructura cognitiva preexistente en el individuo. Resumiendo, pues, para que se produzca el aprendizaje significativo, se debe ampliar:

1. Los nuevos materiales o información a aprender deben ser potencialmente significativos, para poder ser relacionados con las ideas relevantes que posee el alumno.
2. La estructura cognitiva previa del alumno debe poseer las necesarias ideas relevantes para que puedan relacionarse con los nuevos conocimientos.
3. El alumno debe tener disposición significativa hacia el aprendizaje, lo cual exige una actitud *activa* (*Ibíd. p.20*).

Ausubel distingue tres tipos básicos de aprendizaje significativo en función del grado creciente de complejidad: aprendizaje de representaciones, aprendizaje de conceptos y aprendizaje de proposiciones.

a) Aprendizaje de representaciones

Consiste “en hacerse del significado de símbolos solos (generalmente palabra) o de lo que éstos representan” (Ausubel citado por Ontoria, 1999, p.20). Se trata, pues, de aprender lo que significan las palabras aisladas o los símbolos. “Significa aprender los símbolos particulares que representan o son significativamente equivalentes a los referentes específicos”. (*Ibíd.*). Este tipo de aprendizaje se vincula con la adquisición del vocabulario. En el proceso de aprendizaje de representaciones hay que distinguir dos aspectos:

- Uno, el aprendizaje antes de los conceptos;
- Otro, después de la formación de conceptos.

En el primero, las palabras representan objetos o sucesos reales. La palabra es igual a la imagen concreta y específica de lo que tales referentes significan. A medida que el individuo se desarrolla, aprende nuevo vocabulario para representarlos.

b) Aprendizaje de conceptos

Es el segundo tipo de aprendizaje significativo. Ausubel define el concepto como “objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos de criterio comunes y que se designan mediante algún símbolo o signo” (*Ibíd.*). Los conceptos también representan símbolos y palabras individuales, pero hay un mayor grado de abstracción en función de unos *atributos de criterio comunes*. Surgen, pues, de relacionar determinados objetos, sucesos, etc. con atributos comunes a todos ellos. Ausubel presenta dos formas para el aprendizaje de los conceptos: una, *formación de conceptos* a partir de las experiencias concretas, similar al aprendizaje de representaciones, y, otra, *la*

asimilación de conceptos consistente en relacionar los nuevos conceptos con los existentes ya en el alumno formando estructuras conceptuales.

c) Aprendizaje de proposiciones

Consiste en captar el significado de nuevas ideas expresadas en forma de proposiciones, es decir, el significado expresado en una frase u oración que contiene varios conceptos. Utilizando una metáfora un tanto tosca, las proposiciones son “moléculas” a partir de las que se construye el significado y los conceptos son los “átomos” del significado. Este tipo de aprendizaje puede hacerse, según Ausubel, combinando o relacionando palabras individuales entre sí, cada una con referente distinto, y combinándolas de tal manera que el resultado (la proposición) es más que la suma de los significados de las palabras individuales. Lógicamente, el aprendizaje de proposiciones supone conocer el significado de los conceptos que la integran. En los dos tipos de aprendizaje anteriores se trata de representaciones o conceptos *unitarios*, mientras que en el aprendizaje de proposiciones intervienen varios conceptos que se relacionan entre sí y con la estructura cognitiva del alumno para producir un nuevo significado *compuesto*. Al implicar la relación de conceptos, la adquisición de las proposiciones sólo puede hacerse a través de la *asimilación* (Ontoria, 1999, p.21).

El aprendizaje como proceso de comprensión y asimilación. Cuando se habla de que los alumnos “comprendan”, estamos diciendo que intenten dar sentido a aquello con lo que entran en contacto y mediante lo cual se forman las representaciones y los esquemas cognitivos. Se trata, pues, de una asimilación activa, consistente en captar o adquirir lo que está implicado en el proceso de aprendizaje, que va desde las características sensoriales hasta las características más abstractas.

Para facilitar la comprensión y asimilación, cada persona tiene sus estrategias, pero se puede afirmar que la familiarización con el material tiene un efecto positivo mayor que con el desconocido. Utilizar estos materiales familiares para establecer relaciones, clasificaciones, categorías, esquemas, facilita un aprendizaje más eficaz.

La asimilación de significados y sus modalidades. La teoría de la *asimilación* es el punto central del planteamiento de Ausubel sobre el aprendizaje significativo, de tal manera que la mayor parte de este aprendizaje consiste en la asimilación de nueva información. Explica dicha teoría diciendo que “la nueva información es vinculada a los aspectos *relevantes y preexistentes* en la estructura cognitiva, y en el proceso se modifican la información recientemente adquirida y la estructura preexistente” (Ausubel citado por Ontoria, 1999, p. 22).

“La adquisición de información nueva depende en alto grado de las ideas pertinentes que ya existen en la estructura cognitiva y el aprendizaje significativo de los seres humanos ocurre a través de una *interacción* de la nueva información con las ideas pertinentes que existen en la estructura cognitiva. El resultado de la interacción que tiene lugar entre el nuevo material que se va a aprender y la estructura cognitiva existente constituye una *asimilación* de significados nuevos y antiguos para formar una estructura cognitiva altamente diferenciada” Ausubel citado por Ontoria (*Ibíd.*)

Ausubel ha introducido el término *inclusor* que se define cómo las ideas o conceptos relevantes que posee el alumno en su estructura cognitiva y con los que relaciona la nueva información. El proceso de interacción entre el material recién aprendido y los conceptos existentes constituye el núcleo de la teoría de asimilación.

El proceso de asimilación se lleva a cabo mediante tres formas de modalidades diferentes:

a) Aprendizaje subordinado. La nueva idea o concepto se halla jerárquicamente subordinada a otra ya existente. Se produce cuando las nuevas ideas se relacionan subordinadamente con ideas relevantes (inclusores) de mayor nivel de abstracción, generalidad e inclusividad. Se genera, pues, una *diferenciación progresiva* de los conceptos existentes en varios de nivel inferior de abstracción. La subordinación de los conceptos puede hacerse sin que la nueva información modifique los atributos del concepto inclusor (son ejemplificaciones), ni cambie el significado de concepto inclusor. En el proceso de enseñanza, la diferenciación progresiva consiste en partir de las ideas más generales para llegar a las más concretas, desglosando progresivamente los conceptos en subconceptos.

b) Aprendizaje supraordenado. El proceso es inverso al subordinado o proceso de diferenciación progresiva, en el que los conceptos relevantes (inclusores) existentes en la estructura cognitiva son de menor grado de abstracción, generalidad e inclusividad que los nuevos a aprender. Con la información adquirida, los conceptos ya existentes se reorganizan y adquieren nuevo significado. Suele ser un proceso que va de abajo – arriba y se produce una *reconciliación integradora* entre los rasgos o atributos de varios conceptos que da lugar a otro más general (supraordenado). Cuando se buscan diferencias, comparaciones y semejanzas entre los conceptos, se facilita esta reconciliación conceptual. Cuando un concepto se integra bien en otro concepto más general posee una **consonancia cognitiva o una reconciliación integradora**. Se obtiene una disonancia cognitiva, cuando aparecen dos conceptos contradictorios o no integrados adecuadamente.

c) Aprendizaje combinatorio. Consiste en la relación, *de una forma general*, de nuevos conceptos con la estructura cognitiva ya existente, pero sin producirse la *inclusión* (subordinación o supraordenación). Se apoya en la búsqueda de elementos comunes entre las ideas, pero sin establecer relación de supra o de subordinación.

Ausubel considera que la estructura cognitiva está organizada jerárquicamente respecto al nivel de abstracción, generalidad e inclusividad de las ideas o conceptos. En el aprendizaje subordinado y supraordenado existe una relación jerárquica, mientras que no se produce en el aprendizaje combinatorio.

EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN EL AULA DE CLASE

Silvio (Citado por Grupo Gente, 2003, p. 97), al hablar de tecnología, explica que “como procedimiento o conjunto de procedimientos lógicamente interconectados se materializa en un software”. Más adelante anota que “detrás de cada tecnología hay seres humanos que la crean y la aplican para resolver un problema o satisfacer una necesidad, utilizando medios tecnológicos, sistemas de artefactos físicos”. Para el caso se asume que la tecnología es un sistema de artefactos cognitivos y físicos que también el autor asocia con el concepto de software del cual afirma “... que no es sino un conjunto de informaciones codificadas en lenguaje binario que permite hacer cosas: escribir una carta, hacer cálculos, dibujar, elaborar gráficos estadísticos, etc.”.

Al respecto es importante tener en cuenta que el solo hecho de contar con los artefactos físicos, como a veces se pretende hacer creer, no tiene ningún efecto en la solución de los problemas. Hace falta tener los artefactos cognitivos para que se genere el impacto apropiado del uso de la tecnología en diversas áreas de solución de problemas y toma de decisiones.

Las características esenciales de una tecnología, de una sociedad del conocimiento es la de ser una prolongación de las facultades intelectuales del ser humano. Lo anterior nos lleva a pensar que el mundo de la educación debe estar apoyado con herramientas derivadas de la tecnología de la información y la comunicación, que ofrecen los medios para el acceso y el procesamiento de la gran cantidad de información que se produce permanentemente entre los autores de la ciencia, la tecnología y la sociedad en general.

Con el auge de las tecnologías de la información, han surgido nuevas herramientas para el trabajo tanto en geometría como en su enseñanza que

es importante conocer y utilizar para poner a tono nuestros métodos pedagógicos con las nuevas posibilidades de aproximación cognitiva que la sociedad nos brinda. En particular, los programas de geometría dinámica han revolucionado la manera de hacer matemáticas y la forma de diseñarlas, proporcionando contextos de aprendizaje, con nuevas y potentes posibilidades de representaciones. En la categoría emergente “Manipulación de la Tecnología” reflexionaremos acerca de la evolución de la geometría para mostrar como ella se encuentra en permanente crecimiento y abarca un panorama extenso de desarrollos y posibilidades ligadas a la interacción entre lo visual y lo discursivo. Posteriormente nos centraremos en el aprendizaje de la geometría fractal, sus obstáculos, dificultades y ventajas.

VIVIR PARA CONTARLO

1. Resolviendo los talleres.

Ya habiendo divisado en gran parte el panorama que giró alrededor de este trabajo, considero fundamental que centremos nuestra atención en el desarrollo de cada uno de los talleres, ya que a partir de éstos se pudo recoger toda la experiencia con los estudiantes.

El trabajo con los estudiantes se estableció a partir de los talleres, de forma individual y grupal, posibilitando la comunicación y favoreciendo algunos procesos.

A continuación presento el primer taller titulado por el autor como **“Una introducción al concepto de sistema dinámico”**, cuyo objetivo era conducir al estudiante a los conceptos de sistema dinámico, órbitas, órbita acotada y no acotada.

Con este taller, se pretendía introducir al estudiante en una noción muy intuitiva deduciendo lo que es un sistema dinámico.

Antes quiero comentar lo que sucedió cuando se les entregó este taller a los estudiantes, pues ellos se encontraban a la expectativa sobre el tema de “geometría fractal”, ya que se les había hablado acerca de la experiencia que se iba a llevar a cabo con ellos. Pero, cuando recibieron esta primera actividad los estudiantes quedaron con muchos interrogantes, ya que al ver

que eran funciones, se vieron confundidos, pues no comprendían que este tema tenía muchas otras aplicaciones y que se iba a estudiar una de ellas.

TALLER I

UNA INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE SISTEMA DINÁMICO

Objetivo: Con este taller se espera que deduzcas los conceptos de sistema dinámico, órbitas, órbita acotada y no acotada.

Materiales: Para el desarrollo de este taller no necesitas más que un lápiz, un borrador y mucha disposición y buen ánimo para trabajar.

Actividades: Imagina una avispa en un panal, el cual esta próximo a ser derribado por un campesino. Al darse cuenta la avispa trata de salir del panal, pero como sus alas están untadas de miel puede volar solo un trayecto y cae en una rama del árbol, recupera fuerzas e intenta de nuevo, avanzando otro trayecto y volviendo a caer en la rama del árbol y así sucesivamente, “escapando a saltos”.

Situación 1: Supongamos que en cada intento de vuelo, la avispa avanza al doble de lo que había avanzado en el intento anterior.

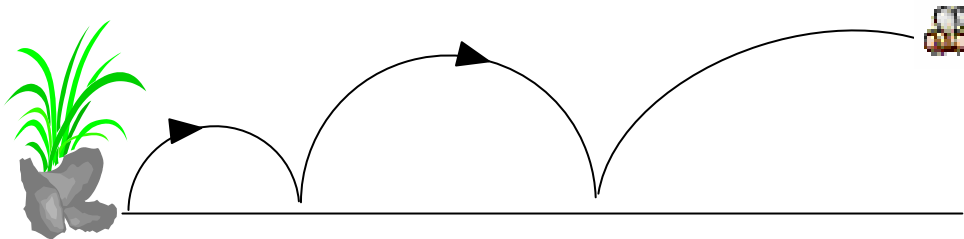


Figura 1: Sistemas dinámicos simples

1. Si en el primer salto avanza 1 metro, ¿cuánto avanza en el segundo salto?, ¿y en el tercero?, ¿y en el cuarto?

2. Si en el primer salto avanza 3 metros, ¿cuánto avanza en el segundo salto?, ¿y en el tercero? ¿y en el cuarto?

3. Si en el primer salto avanza $\frac{1}{2}$ metro, ¿cuánto avanza en el segundo salto?, ¿y en el tercero?, ¿y en el cuarto?

4. Supongamos que en el quinto salto avanzó 11 metros, ¿cuánto avanza en el sexto salto?, ¿cuánto había avanzado en el cuarto salto?

También puede ocurrir que la avispa empiece a volar en dirección contraria, es decir, hacia la izquierda del panal. Por ejemplo, puede avanzar en el primer salto 1,5 metros hacia la izquierda (ver figura 2)

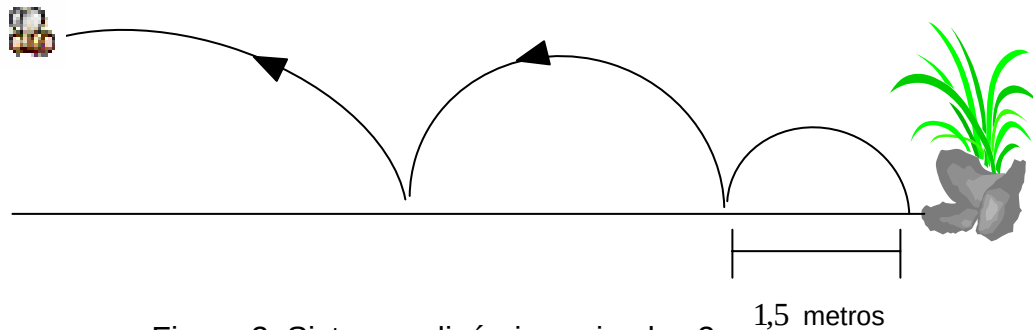


Figura 2: Sistemas dinámicos simples 2

¿Con qué número simbolizamos tal avance hacia la izquierda?

5. Si en el primer salto avanza -2.3 metros, ¿cuánto avanza en el segundo salto?, ¿y en el tercero?, ¿y en el cuarto?

6. En general, si en un determinado vuelo avanza una distancia x , ¿cuánto avanza en el siguiente vuelo?

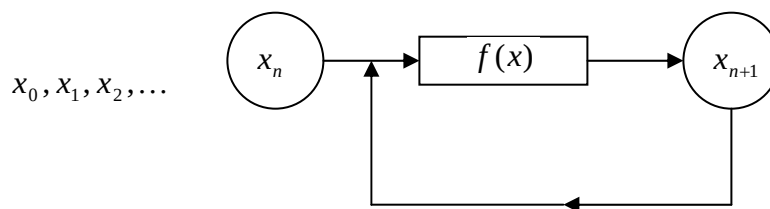
PUNTO DE DISCUSIÓN: Para cada caso, ¿hasta dónde llega la avispa?

7. Llamemos x_n al avance en el “n-ésimo” salto y resumamos lo anterior, completando la siguiente tabla:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1		4				
6	12					
-5		-20				
-1						
$\frac{1}{2}$		2				
x				$8x$		

8. Observa las dos primeras columnas de la tabla anterior. Para cada valor inicial de x_1 , se obtiene un único valor x_2 , es decir, estamos trabajando una función, ¿cuál función?, ¿cuál es su dominio?, ¿cuál es su rango? Representa gráficamente esta función.

Podemos pensar entonces en un mecanismo de retroalimentación, representado por el siguiente diagrama:



Situación 2: Supongamos ahora que las alas de la avispa en cada salto se untan cada vez más de miel, reduciendo cada salto a la mitad del anterior (ver figura).

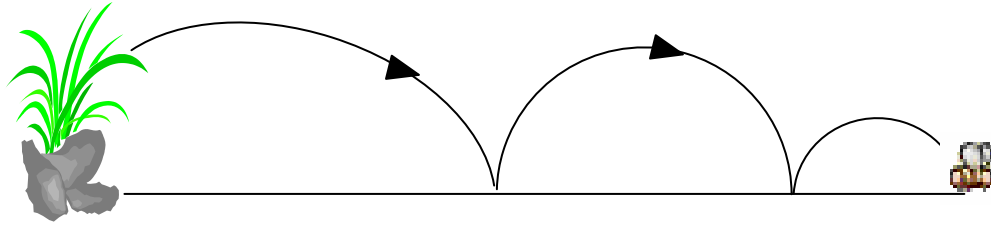


Figura 4: Sistemas dinámicos simples

Responde las mismas preguntas 1 a 8 de la situación 1, para esta nueva situación y representa el mecanismo de retroalimentación correspondiente (ver figura 3)

1. Si en el primer salto avanza 1 metro, ¿cuánto avanza en el segundo salto?, ¿y en el tercero?, ¿y en el cuarto?

2. Si en el primer salto avanza 3 metros, ¿cuánto avanza en el segundo salto?, ¿y en el tercero?, ¿y en el cuarto?

3. Si en el primer salto avanza $\frac{1}{2}$ metro, ¿cuánto avanza en el segundo salto?, ¿y en el tercero?, ¿y en el cuarto?

4. Supongamos que en el quinto salto avanzó 11 metros, ¿cuánto avanza en el sexto salto?, ¿cuánto había avanzado en el cuarto salto?

También puede ocurrir que la avispa empiece a volar en dirección contraria, es decir, hacia la izquierda del panal. Por ejemplo, puede avanzar en el primer salto 1,5 metros hacia la izquierda (ver figura 2)

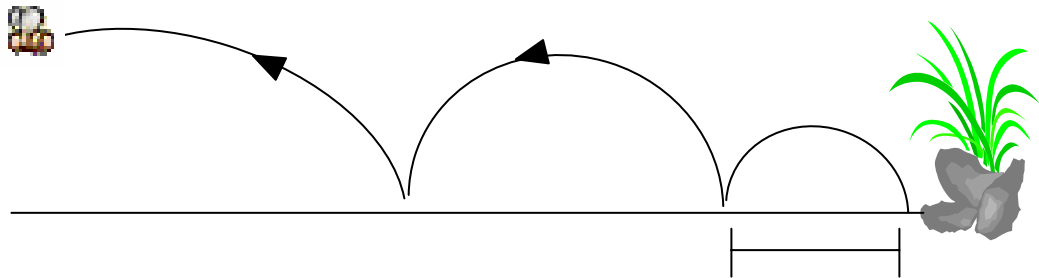


Figura 2: Sistemas dinámicos simples 2

1,5 metros

¿Con qué número simbolizamos tal avance hacia la izquierda?

5. Si el primer salto avanza -2.3 metros, ¿cuánto avanza en el segundo salto? ¿y en el tercero? ¿y en el cuarto?

6. En general, si en un determinado vuelo avanza una distancia x ¿cuánto avanza en el siguiente vuelo?

PUNTO DE DISCUSIÓN: Para cada caso ¿hasta donde llega la avispa?

7. Llamemos x_n al avance en el “n-ésimo” salto y resumamos lo anterior, completando la siguiente tabla:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1		1/4				
6	3					
-5		-1.25				
-1						
$\frac{1}{2}$		1/8				
x				$(1/16)x$		

8. Observa las dos primeras columnas de la tabla anterior. Para cada valor inicial de x_1 , se obtiene un único valor x_2 , es decir, estamos trabajando una función, ¿cuál función?, ¿cuál es su dominio?, ¿cuál es su rango? Representa gráficamente esta función.

Situación 3: Supongamos ahora que la avispa avanza en cada intento el cuadrado de la distancia anterior. Tengamos en cuenta acá que a una distancia de un metro a ambos lados del panal hay un hueco que lo conduce

de nuevo al panal x_n en este caso, representará el valor absoluto del desplazamiento $n \rightarrow 2$ por ejemplo si $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 16$, etc.

Responde las preguntas:

1. Si en el primer salto avanza 1 metro, ¿cuánto avanza en el segundo salto? ¿y en el tercero?, ¿y en el cuarto?

2. Si en el primer salto avanza 3 metros, ¿cuánto avanza en el segundo salto? ¿y en el tercero?, ¿y en el cuarto?

3. Si en el primer salto avanza $\frac{1}{2}$ metro, ¿cuánto avanza en el segundo salto?, ¿y en el tercero?, ¿y en el cuarto?

4. Supongamos que en el quinto salto avanzó 11 metros, ¿cuánto avanza en el sexto salto?, ¿cuánto había avanzado en el cuarto salto?

También puede ocurrir que la avispa empiece a volar en dirección contraria, es decir, hacia la izquierda del panal. Por ejemplo, puede avanzar en el primer salto 1,5 metros hacia la izquierda (ver figura 2)

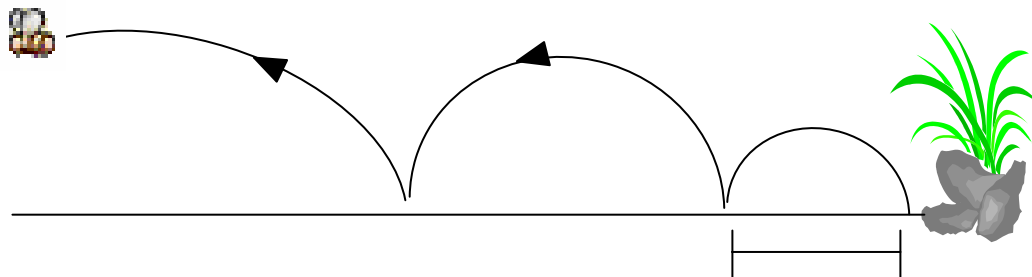


Figura 2: Sistemas dinámicos simples 2 1,5 metros

¿Con qué número simbolizamos tal avance hacia la izquierda?

5. Si el primer salto avanza -2.3 metros, ¿cuánto avanza en el segundo salto? ¿y en el tercero? ¿y en el cuarto?

6. En general, si en un determinado vuelo avanza una distancia x ¿cuánto avanza en el siguiente vuelo?

PUNTO DE DISCUSIÓN: Para cada caso ¿hasta donde llega la avispa?

7. Llamemos x_n al avance en el “n-ésimo” salto y resumamos lo anterior, completando la siguiente tabla:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1		1				
6	36					
-5		625				
-1						
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{16}$				
x				x^{16}		

8. Observa las dos primeras columnas de la tabla anterior. Para cada valor inicial de x_1 , se obtiene un único valor x_2 , es decir, estamos trabajando una función, ¿cuál función?, ¿cuál es su dominio?, ¿cuál es su rango? Representa gráficamente esta función.

Las situaciones anteriores corresponden a lo que llamaremos un sistema dinámico unidimensional. Observa que cada situación está asociada a una función $f : R \rightarrow R$, operada una y otra vez sobre un único valor inicial, donde podríamos imaginar también un mecanismo de retroalimentación como el de la figura 5.

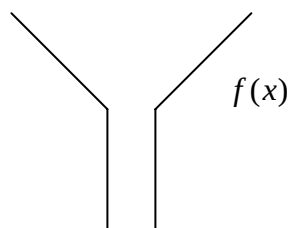


Figura 5: Mecanismo iterado

Generando una sucesión de términos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ donde $x_2 = f(x_1)$,
 $x_3 = f(x_2) = f(f(x_1)), \dots, x_n = f(x_{n-1})$.

El conjunto de los x_i , son los puntos que van a conformar lo que se llama la órbita de x .

Una función f se dirá que tiene una órbita acotada ó estable si existe un valor “a” para el cual $x_i \rightarrow a$. De otra forma se dice que la órbita de f es no acotada ó que escapa.

¿Qué puedes decir entonces de las órbitas de los diferentes puntos para las funciones que encontraste asociadas a las tres situaciones anteriores? Analiza cada una en la siguiente tabla:

❖ $f(x) = 2x$

x_1	x_2	x_3	x_4	...	Acotada?
1					
3/2					
0					
-1/3					
-2					

$$\diamond f(x) = \frac{1}{2}x$$

$$\diamond f(x) = x^2$$

Una vez leído el taller en general, y al comenzar el desarrollo del mismo, los estudiantes se miraban sorprendidos unos a otros y se hacían preguntas como:

“pero... ¿qué es eso de la geometría fractal?, si aquí solamente hay funciones”

(Taller # 1, noviembre 16 de 2004)

Esto fue lo que dijo Carlos después de realizada la lectura de la actividad. Pues ellos solamente veían funciones, y pensaban que se iban a encontrar con figuras geométricas, a las cuales se les debía calcular el área o el perímetro o propiedades de ellas, todo menos lo que había en el taller. Así que les expliqué que la geometría fractal se construye a partir de la modelación de funciones, tema que en algún momento se había estudiado. En este momento William agregó:

“Ah profe, eso quiere decir que debemos volver a calcular los valores en una función, hacer operaciones y graficarlas”

(Taller # 1, noviembre 16 de 2004)

Efectivamente, eso y mucho más debían hacer ellos, como por ejemplo recordar conceptos básicos de las matemáticas como el primero, el segundo, el tercer y el enésimo término de una sucesión, el concepto de límite de una sucesión, tabular la información obtenida en tablas, predecir los posibles resultados, graficar, definir y hallar el dominio y rango de una función, entre otras cosas.

Percibí que tenían dificultad al hallar el cuadrado de un número, así lo manifestó Omar:

“¿el cuadrado de un número es multiplicarlo siempre por dos?”
(Taller # 1, noviembre 16 de 2004)

También se les presentaba confusión al hallar el término antecesor y el sucesor, y algunos otros temas que poco a poco se fueron aclarando.

En los numerales 1 al 6, los estudiantes debían predecir una serie de resultados a partir de unas indicaciones dadas en cada situación planteada para esta actividad. Se les facilitaba hallar los avances de la avispa hacia la derecha, pues estos valores eran positivos. Pero cuando llegaban a la pregunta cinco, **“Si en el primer salto avanza -2.3 metros, ¿cuánto avanza en el segundo salto?, ¿y en el tercero?, ¿y en el cuarto?”** se les dificultaba reconocer que los avances hacia la izquierda eran en sentido negativo, pues ellos estaban aferrados al concepto de distancia, que siempre es positiva, pero no tenían presente el sentido del movimiento de la avispa.

A partir de los datos del punto 7, los estudiantes debían construir una función en el siguiente punto, en este momento pensé que se iba a presentar confusión, pero no fue así, pues los estudiantes pudieron hallar el modelo que mas se ajustaba a los datos allí encontrados.

Finalizando este taller, en el cual los estudiantes trabajaron alrededor de una hora y media, Carlos afirmó lo siguiente:

“profe, ¿para que el mismo proceso tres veces?, si al fin y al cabo vamos a llegar a lo mismo”
(Taller # 1, noviembre 16 de 2004)

A este estudiante le pareció muy mecánico y aburrido este taller, pues debía hacer un ejercicio varias veces, pero en ese momento no diferenció el sentido de cada movimiento realizado por la avispa. Entonces le pregunté que si el comportamiento de las funciones halladas era igual, es decir, ¿una función lineal y una cuadrática se comportan de la misma manera?

“No profe, claro que no, cuando yo calculo los datos y los dibujo en una gráfica, éstas no son iguales”

(Taller # 1, noviembre 16 de 2004)

A partir de las tres situaciones planteadas se definen los sistemas dinámicos unidimensionales, órbita, órbita acotada y no acotada y se presenta una tabla en donde se da un punto inicial x_1 diferente para que el estudiante determine si su órbita es acotada o no acotada.

Estos elementos fueron de gran importancia para orientar el trabajo en las demás actividades y poder alcanzar el objetivo aquí planteado, ya que lo que se pretende es un **“acercamiento a la geometría fractal, por medio de sistemas dinámicos”**.

Muestro aquí un aparte de la situación dos de este taller, elaborado por Leidy:

También puede ocurrir que la avispa empiece a volar en dirección contraria, es decir, hacia la izquierda del panal. Por ejemplo, puede avanzar en el primer salto 1,5 metros hacia la izquierda (ver figura 2)

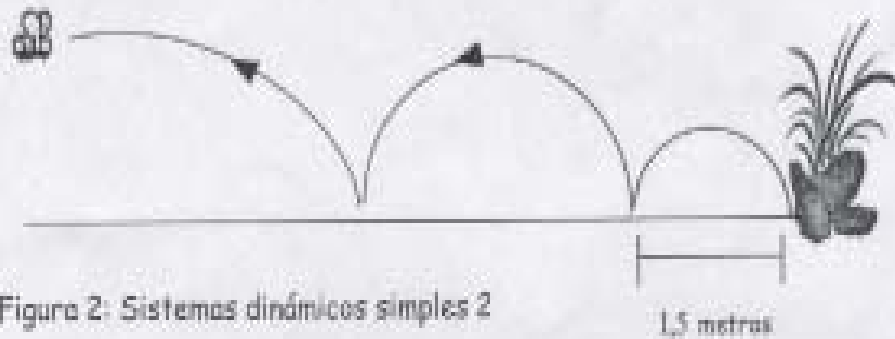


Figura 2: Sistemas dinámicos simples 2

¿Con qué número simbolizamos tal avance hacia la izquierda? -1,5 metros

5. Si el primer salto avanza -2,3 metros, ¿cuánto avanza en el segundo salto? ¿y en el tercero? ¿y en el cuarto? segundo salto -1,15 m, tercero -0,575, cuarto -0,2875 m

6. En general, si en un determinado vuelo avanza una distancia x ¿cuánto avanza en el siguiente vuelo? $x/2$

PUNTO DE DISCUSIÓN: Para cada caso ¿hasta donde llega la avispa?

7. Llamemos x_n al avance en el "n-ésimo" salto y resumamos lo anterior, completando la siguiente tabla:

n	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/32$	$1/64$	$1/128$
6	3	1.5	0.75	0.375	0.1875	0.09375	0.046875
-5	-2,5	-1.25	-0,625	-0,3125	-0,15625	-0,078125	-0,0390625
-1	-0,5	-0,25	-0,125	-0,0625	-0,03125	-0,015625	-0,0078125
$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/32$	$1/64$	$1/128$	$1/256$
x	$(1/2)x$	$(1/4)x$	$(1/8)x$	$(1/16)x$	$(1/32)x$	$(1/64)x$	$(1/128)x$

Terminada esta actividad iniciamos el segundo taller, “**Composición de funciones**”, que está enfocado al concepto sobre el cual se construye el estudio de la iteración y el caos. La noción es desarrollada desde una perspectiva intuitiva como una función aplicada a un primer valor x que produce una correspondiente salida $f(x)$, la cual servirá como un nuevo valor inicial para la siguiente función, así al ejecutar $f(g(x))$ se aplica primero g y luego f . Dicha composición es luego trabajada sobre una misma función un número determinado de veces con lo que se introduce lo correspondiente al concepto de función.

TALLER # 2

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Objetivo: Con este taller se espera que te familiarices con el concepto de composición de funciones, como paso fundamental para la introducción a los sistemas dinámicos.

Materiales: Para el desarrollo de este taller vas a necesitar de una calculadora sencilla, lápiz y borrador.

Actividades: El proceso conocido como la composición de funciones es uno de los conceptos algebraicos fundamentales para el estudio de las iteraciones y de los sistemas dinámicos.

La composición de funciones puede ser representada visualmente por un diagrama como el de la figura 6, que realiza un proceso mecánico en el que se introduce un valor “ a ” el cual es procesado por la primera “máquina” operativa $g(x)$ y arroja un resultado $g(a)$ que ingresa a la segunda “máquina” $f(x)$ cuyo producto resultante será $f(g(a))$.

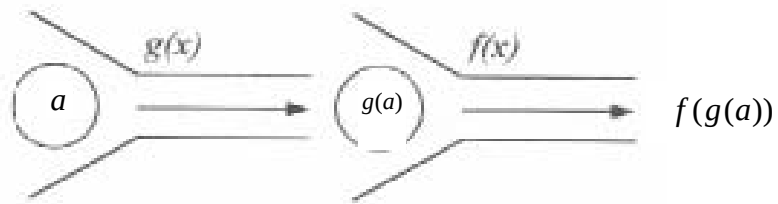
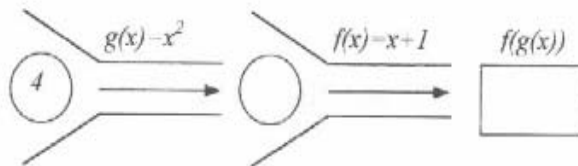


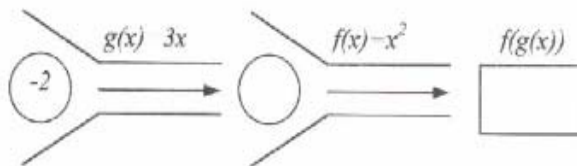
Figura 6. Composición de funciones.

1. Utilizando el valor de entrada determina la salida de la composición mostrada, usando la salida $g(x)$ como entrada $f(x)$.

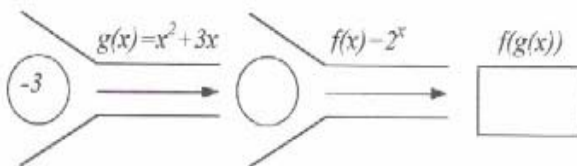
a.



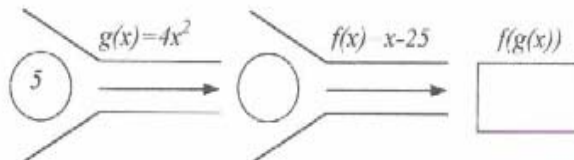
b.



c.



d.



2. ¿Es importante el orden en que actúan las “máquinas” f y g ?
3. Determinar el valor de $f(g(x))$ y de $g(f(x))$ para los siguientes pares de funciones, usa $x = 1$ como valor inicial.
- $g(x) = x + 1$ $f(x) = x^2$
 - $g(x) = x^2$ $f(x) = x + 1$
 - $g(x) = 3x + 2$ $f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)$
4. Repite el ejercicio anterior tomando ahora como valor inicial $x = -1$.
5. Utiliza $g(x) = x^2$ y $f(x) = x + 1$ y determina los valores de las funciones compuestas en términos de un valor inicial “ a ”.
- $g(f(a))$
 - $g(g(a))$
 - $f(f(a))$
 - $f(g(a))$

Para recordar: La iteración es el proceso de repetir la composición de una función con ella misma una y otra vez.

Este proceso se ilustra en las figuras 7 y 8.

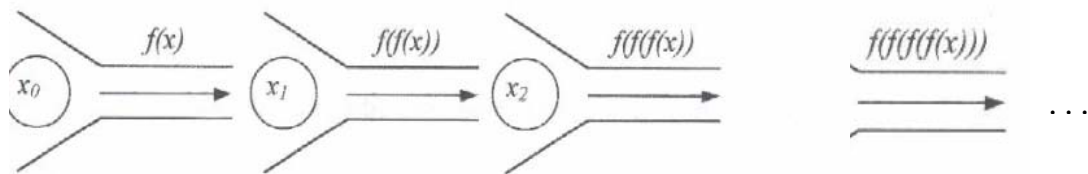


Figura 7. La iteración como comparación.

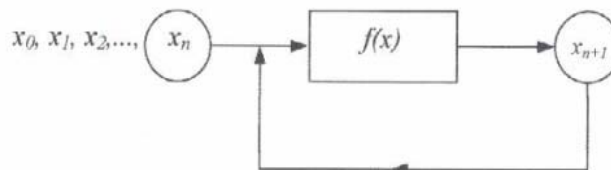


Figura 8. Mecanismo de iteración.

6. Explica con tus palabras la siguiente afirmación: La iteración funciona como una “máquina que se retroalimenta”.



Para recordar: Así, al iterar una función a partir de un valor inicial x_0 , se obtiene una lista de valores:

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

A la sucesión anterior la llamaremos la órbita de x_0 bajo la función f .

7. Itera con cada valor de x_0 para $f(x) = \frac{1}{2}x$. Usa la calculadora y anota los resultados en la correspondiente tabla.

a.

$x_0 = 0.2$
$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$

b.

$x_0 = 0.85$
$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$

c.

$x_0 = 0.64$
$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$

d.

$x_0 = 13.25$
$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$

8. Observa cada órbita y escribe una conjetura sobre el “comportamiento” de cada de ellas. Continúa iterando y verifica tus conjeturas.

9. Usa la calculadora para iterar la función $f(x) = x^2$. Inicia con el valor x_0 dado y construye una tabla de valores como el punto 7.

a. $x_0 = 1$

b. $x_0 = 8$

c. $x_0 = 0,85$

d. $x_0 = -7$

10. Dibuja el comportamiento de las órbitas, al iterar la función $f(x) = x^2$

- Cuando $x_0 > 1$
- Cuando $0 < x_0 < 1$
- Cuando $-1 < x_0 < 0$
- Cuando $x_0 < -1$

11. Encuentra la función que al ser iterada produce la sucesión de valores correspondientes:

a. $4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow \dots$ $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

b. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow \dots$ $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

c. $1 \rightarrow -3 \rightarrow 9 \rightarrow -27 \rightarrow 81 \rightarrow \dots$ $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

d. $-6 \rightarrow -1 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 14 \rightarrow \dots$ $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

e. $-8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \dots$ $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

En este taller, el autor propone un diagrama para representar la composición de funciones que facilitó la realización de esta operación y permitió al estudiante reconocer cuál función es la que actúa en primer lugar. Al respecto Leidy argumentó:

“con este gráfico (Figura 6), se me hace más fácil hallar la composición entre funciones, pues sé con cual función debo comenzar”

(Taller # 2, noviembre 22 de 2004)

No solamente Leidy percibió esto, también los otros estudiantes hicieron comentarios parecidos y esto les facilitó el desarrollo de este taller.

En el segundo punto con la pregunta: “¿Es importante el orden en que actúan las “maquinas” f y g ?” Por ejemplo, Carlos respondió:

“no, el orden de los factores no altera el producto”

(Taller # 2, noviembre 22 de 2004)

En primer lugar, el estudiante esta relacionando la composición de funciones con la operación matemática de la multiplicación y en segundo lugar no comparó de tal manera que le permitiera darse cuenta que el orden de las funciones si altera el resultado de la composición.

Mientras que Omar respondió:

“si es importante, porque entonces me daría otro valor”

(Taller # 2, noviembre 22 de 2004)

Aunque el objetivo del taller no era precisamente este, cabe resaltar que al hablar de este tema, es indispensable tener presente esta condición, pues puede generar en los estudiantes concepciones erróneas acerca de esta operación. Además, en ningún punto del taller se permitió realizar este tipo de discusiones.

En el quinto punto se plantea lo siguiente: **“Utiliza $g(x) = x^2$ y $f(x) = x + 1$ y determina los valores de las funciones compuestas en términos de un valor inicial “ a ”.** Se presentó mucha dificultad, puesto que no había un valor que les permitiera dar un resultado numérico. Por el contrario debían dar como resultado una expresión algebraica en términos de “ a ” que no fue muy fácil de encontrar.

En este taller el autor define la iteración de funciones como el proceso de repetir la composición de una función con ella misma una y otra vez.

A continuación muestro un aparte de este taller elaborado por Omar:

figura 6, que realiza un proceso mecánico en el que se introduce un valor "a" el cual es procesado por la primera "maquina" operativa $g(x)$ y arroja un resultado $g(a)$ que ingresa a la segunda "maquina" $f(x)$ cuyo producto resultante será $f(g(a))$.

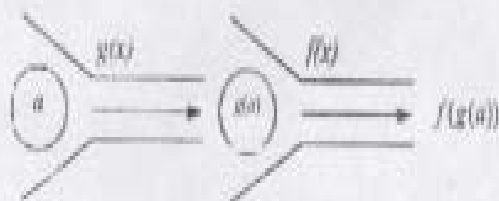


Figura 6. Composición de funciones.

1. Utilizando el valor de entrada y determina la salida de la composición mostrada, usando la salida de $g(x)$ como entrada de $f(x)$.

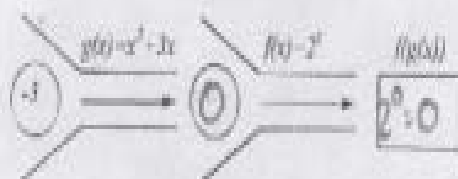
a.



b.



c.



En el tercer taller “**iteración gráfica**” se utilizan tanto funciones lineales como no lineales en un sencillo proceso de desplazamiento vertical y horizontal sucesivo que se describe con detalle en este taller. Es de anotar aquí la importancia de la conexión del proceso geométrico de la iteración gráfica con el proceso algebraico de la composición de funciones.

TALLER III

LA ITERACIÓN GRÁFICA

Objetivo: El objetivo principal de éste taller es que adquieras habilidades en el juego de la iteración gráfica, donde geométricamente observarás los resultados obtenidos en forma analítica en el taller anterior cuando repetías el proceso de composición de una función con ella misma una y otra vez.

Materiales: Para el desarrollo de este taller será necesario tener a la mano algunas hojas de papel cuadriculado, un lápiz, borrador y regla.

Actividades: El juego de la iteración gráfica es un proceso muy sencillo en el que se traza un camino de puntos en el plano que parte de un valor fijo x (pertenece al dominio de la función f) y repetidamente se va moviendo entre la gráfica de la función f y la diagonal $y = x$ de la siguiente manera:

1. Se mueve verticalmente hasta tocar la curva (la gráfica de f);
2. Se mueve horizontalmente hasta tocar la diagonal.

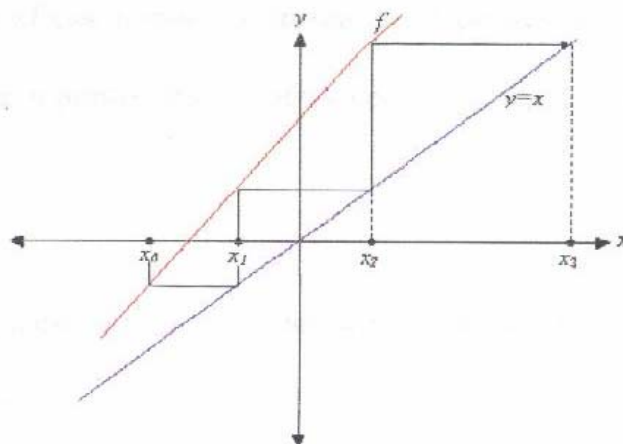
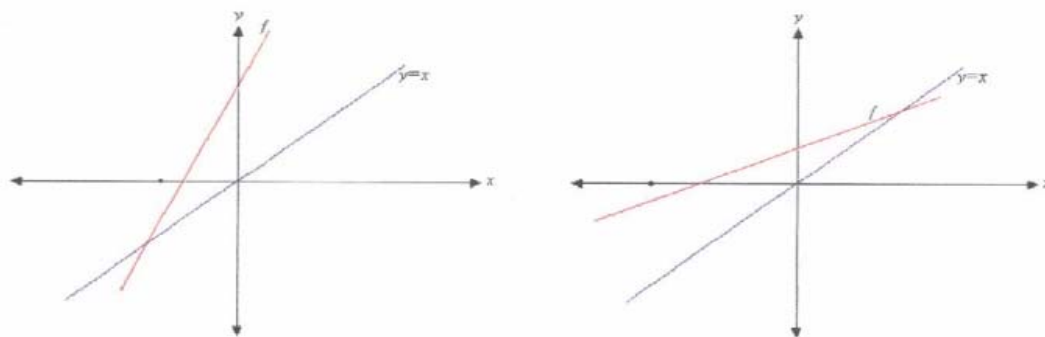


Figura 9. La iteración gráfica.

El proceso geométrico consiste entonces en repetir una y otra vez estos dos pasos, en el cual utilizamos el final de cada paso como el principio del siguiente y se obtiene así una sucesión de puntos: x_0 , x_1 , x_2 , ..., sobre el eje horizontal, como lo muestra la figura 9.

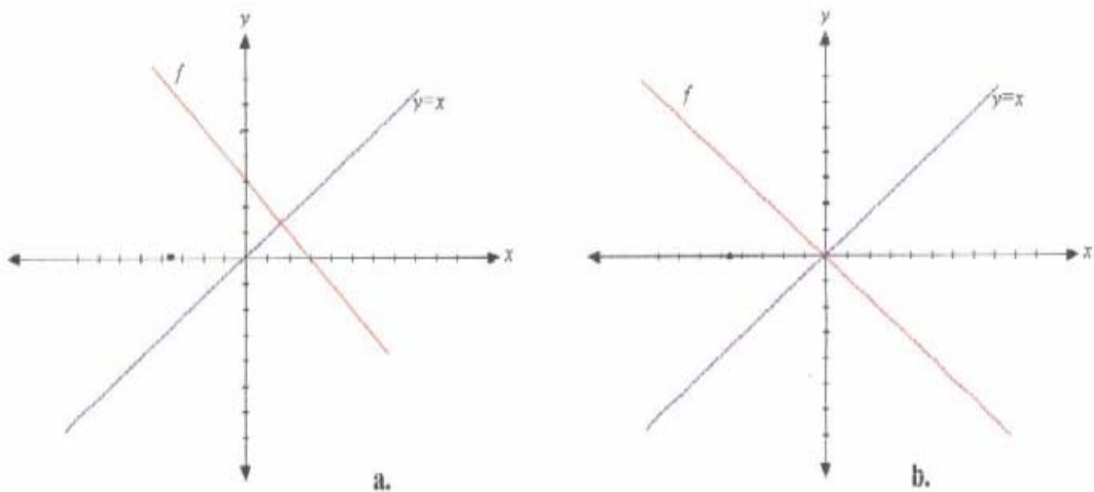
Trayectorias muy diferentes se pueden generar por la iteración gráfica. Algunas de estas toman la forma de escalera como en el ejemplo de la figura 9 y a veces conducen a un punto fijo o tienden a escaparse al infinito.

1. Traza el camino de iteración partiendo de los puntos señalados y observa si la trayectoria de la iteración tiende a acercarse a un punto determinado o por el contrario tiende a “escaparse” o a “alejarse” infinitamente.



Algunas iteraciones gráficas toman la forma de espirales y al igual que las anteriores, algunas veces conducen a puntos fijos y otras veces tienden a escaparse.

2. Sigue el mismo proceso curva-recta del punto anterior y dibuja el camino de iteración para los valores marcados.

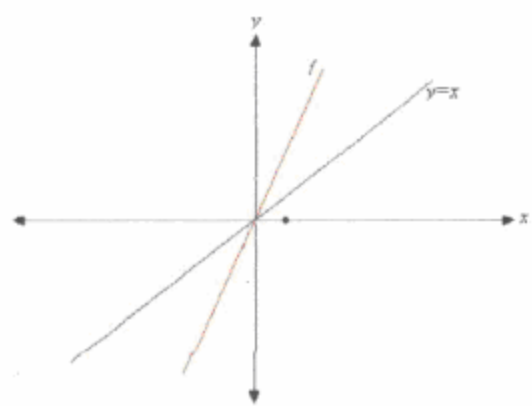
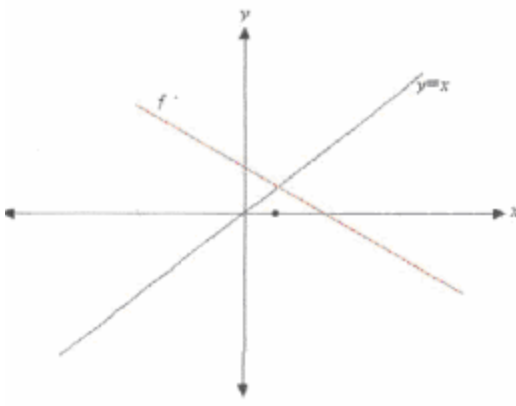
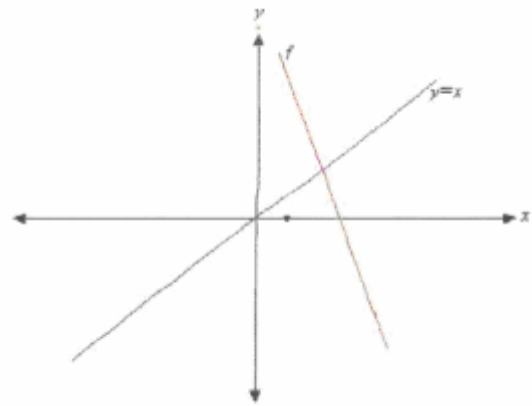
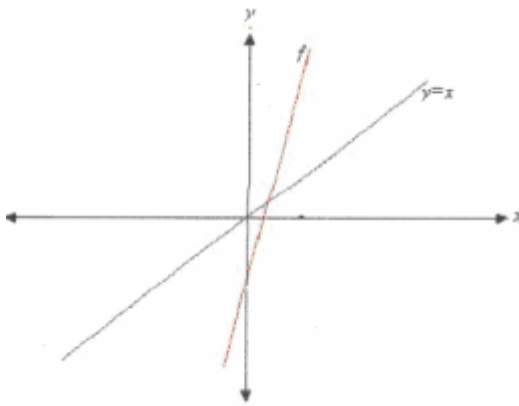


3. Escribe aproximadamente las coordenadas del punto de intersección de la curva y la diagonal

a. $x = \underline{\hspace{2cm}}, \quad y = \underline{\hspace{2cm}}.$

b. $x = \underline{\hspace{2cm}}, \quad y = \underline{\hspace{2cm}}.$

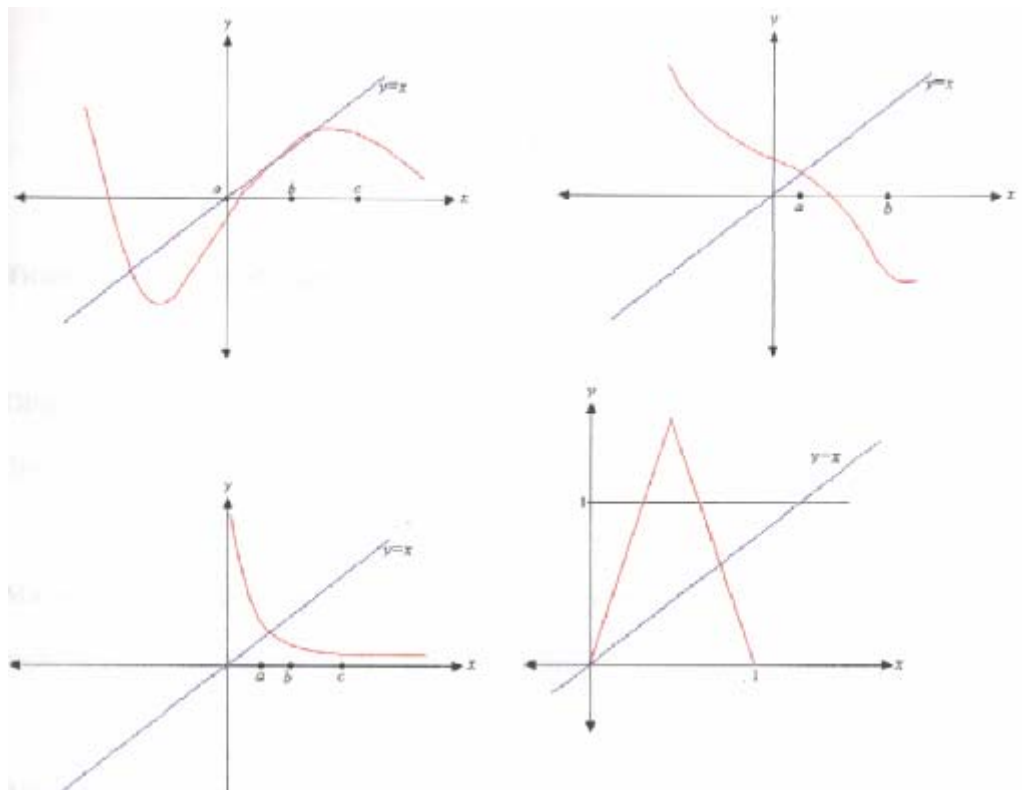
4. En las siguientes gráficas dibuja el camino de iteraciones y determina cuáles toman la forma de escalera y cuáles toman la forma de espiral, partiendo de los valores iniciales marcados.



5. ¿Piensas que la ubicación del punto inicial afecta el comportamiento de la iteración? ¿Por qué?

6. ¿Piensas que la inclinación de la recta, afecta también el comportamiento de la iteración? ¿Por qué?

7. Para cada una de las siguientes gráficas dibuja el camino de iteración partiendo de los puntos iniciales dados.



8. Traza tu propia gráfica y escoge los puntos que quieras. Realiza luego el mismo proceso del punto anterior.

En el primer y segundo punto de este taller el autor explica de una forma clara la iteración gráfica de una función. Se presentaron algunas dificultades en los estudiantes al iniciar las iteraciones, dado que no identificaban quien era la función. Sin embargo, después de varios intentos desarrollaron una gran habilidad para realizar este procedimiento. William comentó:

“profe fue fácil realizar la composición de una función gráficamente”

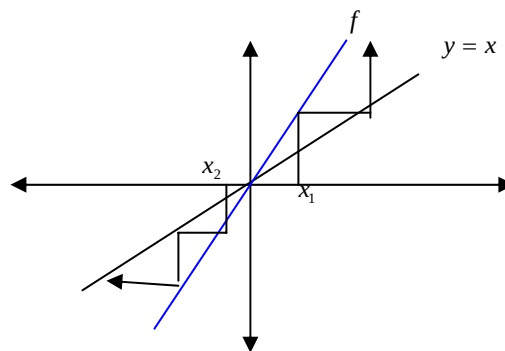
(Taller # 3, noviembre 24 de 2004)

Se presentó confusión al responder la pregunta cinco: “¿Piensa que la ubicación del punto inicial afecta el comportamiento de la iteración? ¿Por qué?” Carlos afirma lo siguiente:

“si, porque todos los puntos cogen para diferentes partes y no llegan a un lugar en común”

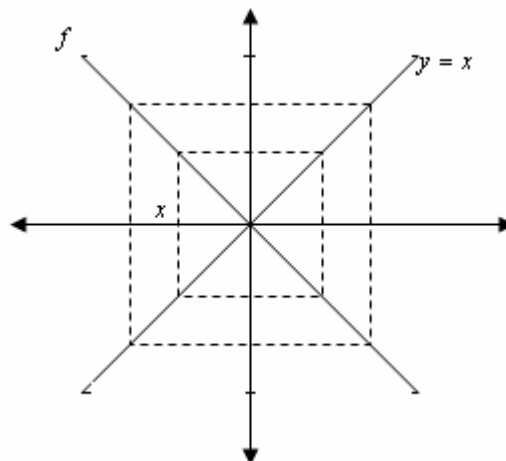
(Taller # 3, noviembre 24 de 2004)

No siempre “todos los puntos van par el mismo lugar”:



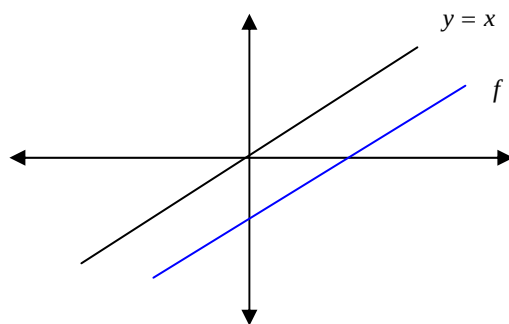
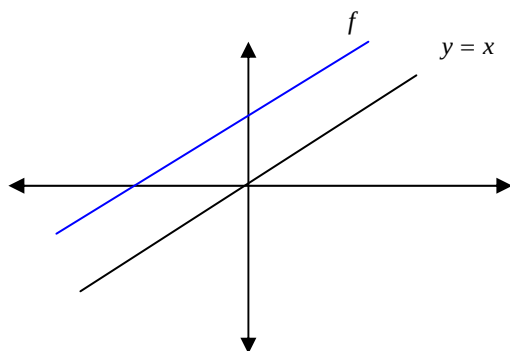
En la figura x_1 se “escapa a $+\infty$ ” mientras que x_2 se “escapa a $-\infty$ ”

Otro ejemplo:



Todo punto x queda oscilando entre dos valores.

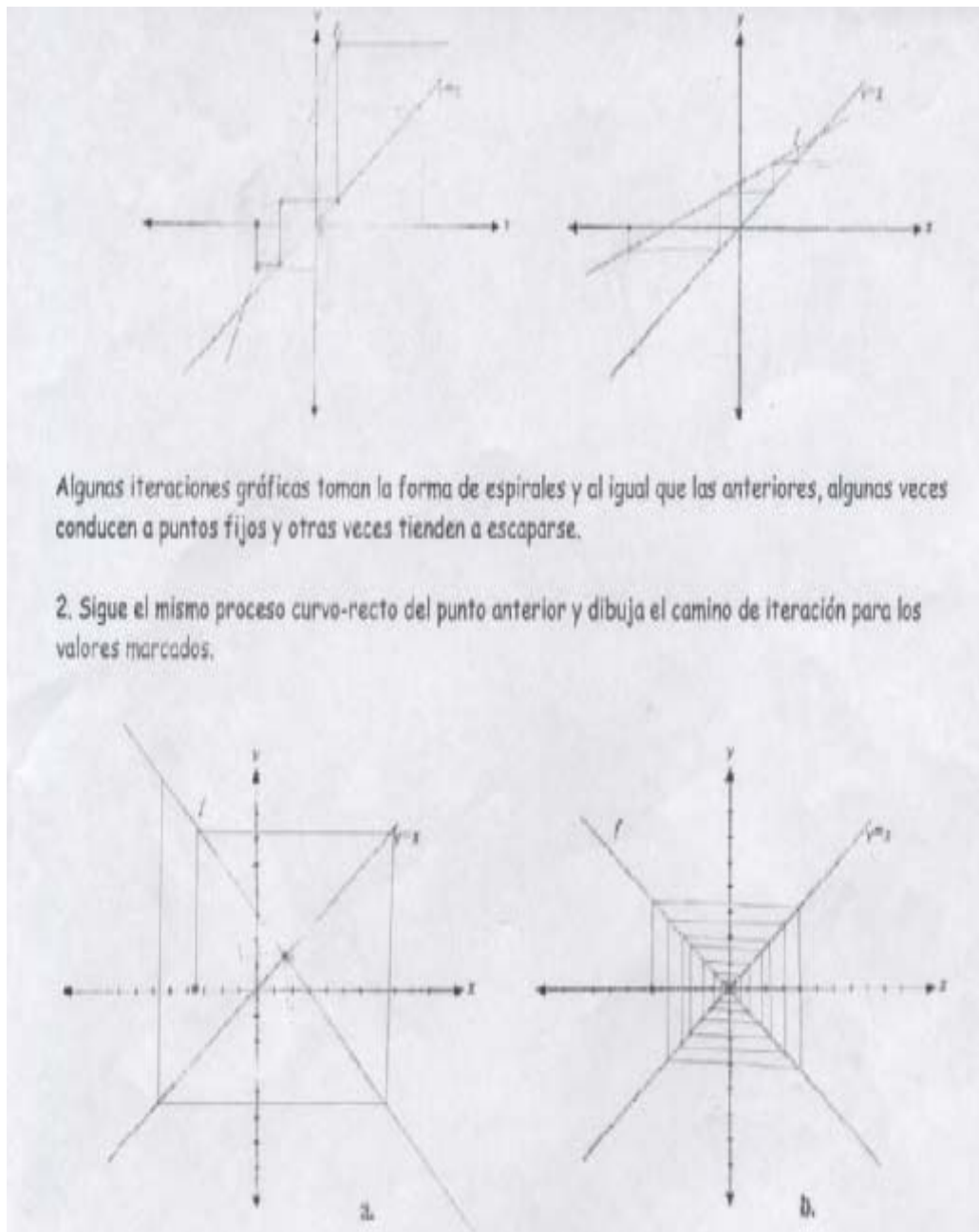
Si la función no tiene puntos fijos, como se están considerando solo rectas, esto significa que la recta es paralela a $y = x$ y se pueden distinguir dos casos:



Todos los puntos se escapan a $+\infty$. Todos los puntos se escapan a $-\infty$.

Observe que aquí, aunque la función no tiene puntos fijos, sí ocurre que todos los puntos van para el mismo lugar.

A continuación se muestra un aparte correspondiente a este taller elaborado por William:



En el siguiente taller se establece el concepto de punto fijo, además utilizando el proceso de iteración gráfica se estará clasificando en atractores y repulsores, según el comportamiento de la órbita para cada valor. Se refuerzan también otros conceptos de gran importancia en el estudio de proceso iterativos como son el concepto de órbita acotada y órbita no acotada.

TALLER IV

ÓRBITAS Y PUNTOS FIJOS

Objetivo: Una vez terminado este taller debes conocer los conceptos de órbitas y puntos fijos de funciones.

Materiales: Para el desarrollo de este taller será necesario tener a la mano por lo menos dos hojas de papel milimetrado, lápiz, borrador y regla.

Actividades: La iteración gráfica puede ser usada para el estudio de la naturaleza de puntos fijos para funciones lineales y no lineales.



Para recordar: Un punto del dominio de una función f se dice punto fijo de f , si al aplicarse la función, no cambia, es decir, si cumple $f(x) = x$.

- Observa y analiza la condición para ser punto fijo, es decir que se cumpla $f(x) = x$. ¿Qué significa geoméricamente encontrarlos puntos fijos de f ?
 - De acuerdo con tu interpretación geométrica, ¿toda función tiene puntos fijos? ¿Cuántos puntos fijos puede tener una función? Justifica gráficamente cada una de tus respuestas.
- I. Considera la función definida por $f(x) = 2x$ y la diagonal $y = x$, e imagina nuevamente un camino de puntos como en el taller anterior, representado por la sucesión de puntos: x_0 , x_1 , $x_2, \dots$, sobre el eje horizontal (ver figura 10).

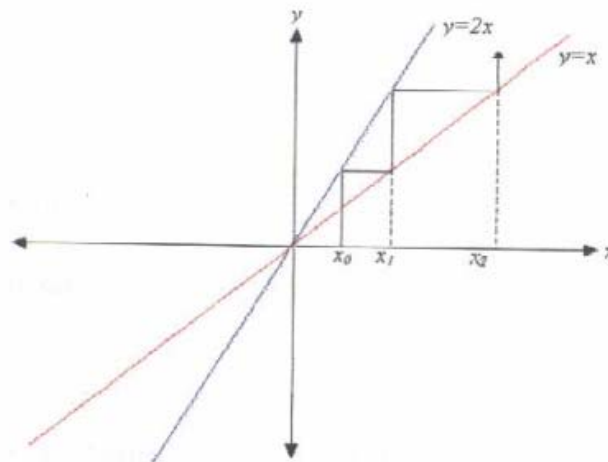


Figura 10. Órbitas y puntos fijos.

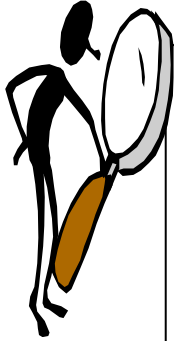
Observa que cada punto de la sucesión se obtiene aplicando f al punto anterior, es decir, la sucesión $x_0, x_1, x_2, \dots$, es la sucesión $x_0, f(x_0), f(f(x_0))$, que como podrás recordar es la órbita de x_0 .

1. Determina la órbita de: 1, 3, $2/3$, $-1/4$, -2 , 0, teniendo que $f(x) = 2x$. Dibuja usando el método descrito anteriormente, cada una de las órbitas halladas.

2. Describir con tus palabras el “comportamiento” de la órbita de un punto $x_0 > 0$, de un punto $x_0 < 0$ y de $x_0 = 0$. ¿Es posible “encerrar” cada órbita en un intervalo (a, b) de la recta? ¿Por qué?

- Diremos que la órbita de x_0 es acotada si está contenida en un intervalo de la forma (a, b) . También diremos en este caso que la órbita del punto x_0 no escapa al infinito o que queda “prisionero”. En caso contrario diremos que la órbita de x_0 es no acotada o que la órbita del

punto x_0 se escapa al infinito (recuerda y compara con las definiciones dadas en el taller 1)



Para recordar:

Órbita acotada: La sucesión $x_0, f(x_0), f(f(x_0)) \dots$, se puede encerrar en un intervalo (a, b) .

Órbita no acotada: La sucesión $x_0, f(x_0), f(f(x_0)) \dots$, no se puede encerrar en un intervalo (a, b) .

3. Para nuestro ejemplo, ¿cuáles son los puntos de órbita acotada? ¿y los de órbita no acotada?

4. ¿Qué particularidad tiene $x_0 = 0$?

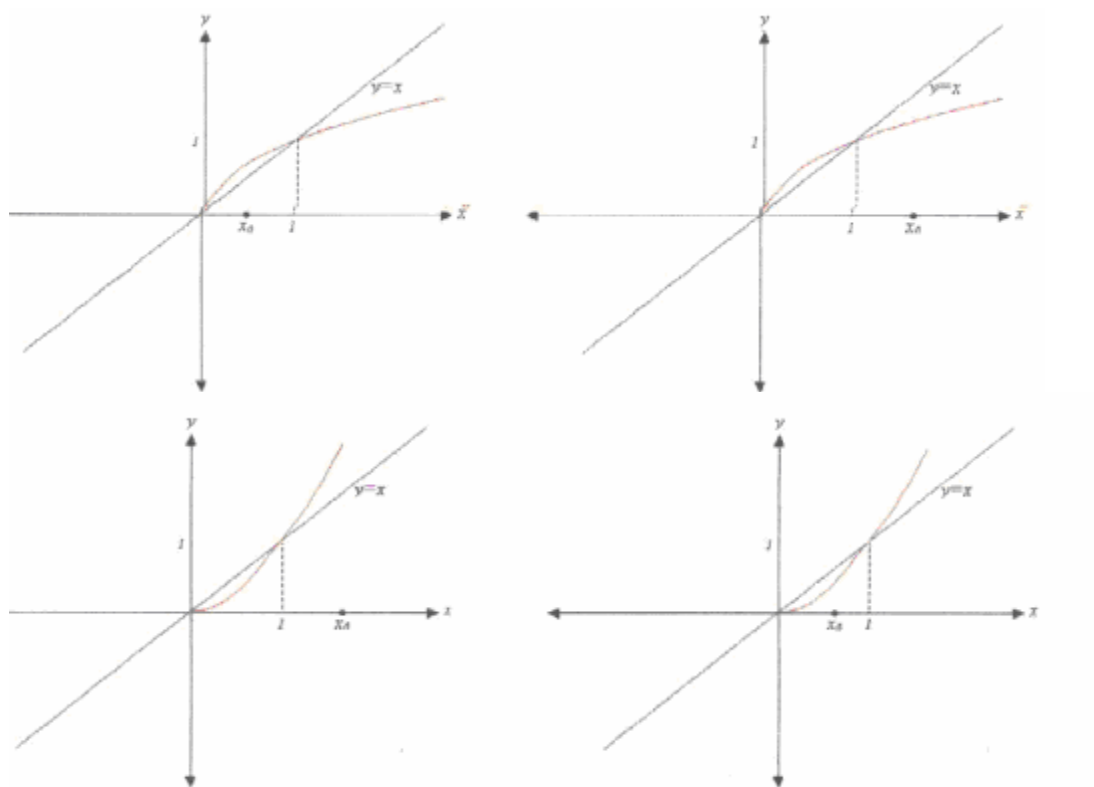
5. ¿Cuáles son los puntos fijos de $f(x) = 2x$?

II. Considera ahora la función $f(x) = \frac{1}{2}x$ y desarrolla los mismos puntos de la parte anterior. ¿Qué semejanzas y qué diferencias encuentras entre los dos casos?

▪ Para $f(x) = 2x$ diremos que $x_0 = 0$ es el punto fijo repulsor y para $f(x) = \frac{1}{2}x$ diremos que $x_0 = 0$ es un punto fijo atractor.

¿Cómo justificas los términos “repulsor” y “atractor”?

III. Para cada una de las gráficas mostradas a continuación, dibuja utilizando el “método de iteración gráfica” la órbita de los puntos marcados y determina si cada órbita es o no acotada



Identifica los puntos fijos en las gráficas anteriores y determina si son tipo “atractor” o de tipo “repulsor” para cada caso.

1. Toma la función definida por $f(x) = \frac{1}{2}$.

- ¿Qué pasa cuando el punto inicial está en el intervalo abierto $(0,1)$?
- ¿Qué pasa cuando el punto inicial es mayor que 1?
- ¿Qué pasa cuando el punto inicial es igual a 0 ó igual a 1?

2. Toma ahora la función por $f(x) = x^2$ y responde las mismas preguntas del punto anterior, incluyendo ahora algunos puntos iniciales menores que cero.

En este taller se consolidaron los conceptos de órbita acotada y no acotada y el autor define los puntos fijos atractores y repulsores.

Los estudiantes debieron traer hoja milimetrada para facilitar el desarrollo de este taller. En estas hojas dibujaron las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{1}{2}x$ y $f(x) = 2x$, para describir el comportamiento de las órbitas para diferentes valores iniciales.

En el desarrollo de la pregunta # 2: **“Describir con tus palabras el “comportamiento” de la órbita de un punto $x_0 > 0$, de un punto $x_0 < 0$ y de $x_0 = 0$. ¿Es posible “encerrar” cada órbita en un intervalo (a,b) de la recta? ¿Por qué?”** los estudiantes dieron respuestas de buen contenido matemático. Este fue el caso de William:

“ $x_0 > 0$, no se puede encerrar porque sigue avanzando. $x_0 < 0$ no se puede encerrar con los números negativos y $x_0 = 0$ si se puede encerrar en un intervalo (a,b) ”

(Taller #4, 25 de noviembre de 2004)

Con esta respuesta el estudiante confirmó su acercamiento al concepto de órbita acotada y no acotada.

En la tercera pregunta: **para nuestro ejemplo “¿cuáles son los puntos de órbita acotada? ¿y los de órbita no acotada?”** pude percibir que los estudiantes tenían claros los conceptos, pero no sabían como expresarlos

para que sus compañeros lo entendieran. Este fue el caso de Leidy, ya que ella respondió lo siguiente:

“1 No (a,b) , 3 No (a,b) , $\frac{2}{3}$ No (a,b) , $-\frac{1}{4}$ No (a,b) , -2 No (a,b) , 0 Si (a,b) ”

(Taller # 4, 25 de noviembre de 2004)

Mi interpretación a esta respuesta es que 1 no tiene una órbita acotada, porque no existe un intervalo (a,b) que la encierre y de igual forma para los otros valores. Pero esta respuesta, parecía un “telegrama” matemático y sus compañeros no entendían lo que ella quería expresar.

En la comparación de las funciones $f(x) = \frac{1}{2}x$ y $f(x) = 2x$ con iguales puntos iniciales William dedujo lo siguiente:

“para la función $f(x) = 2x$ los puntos iniciales son órbitas no acotadas mientras que para la función $f(x) = \frac{1}{2}x$ esos mismos puntos iniciales si son acotados, el único punto que satisface las dos funciones es el cero”

(Taller # 4, 25 de noviembre de 2004)

Se observa que el estudiante tiene clara la diferencia entre las órbitas acotadas y no acotadas.

El taller número cinco es una continuación de todo lo trabajado en el taller anterior, pero aplicándolo a las funciones seno y coseno. Se analiza con detalle el comportamiento de las órbitas para diversos intervalos de valores del dominio.

TALLER V

ITERANDO LA FUNCIÓN SENO Y COSENO

Objetivo: Mediante el desarrollo de este taller podrás conocer el comportamiento de las órbitas de las funciones seno y coseno, haciendo uso nuevamente del método de iteración gráfica que ya conoces muy bien.

Materiales: Un lápiz, borrador y una regla bastarán para desarrollar el presente taller.

Actividades: Realiza el mismo proceso del taller 4, ahora para las funciones seno y coseno.

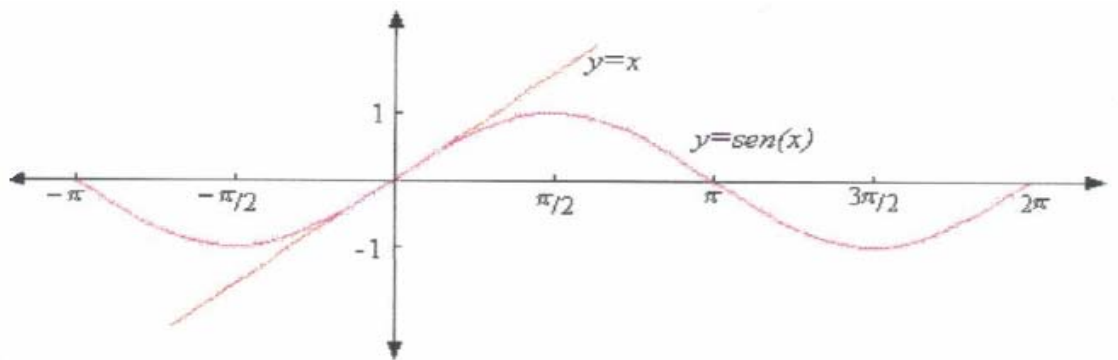


Figura 11. Iterando la función seno

1. Escoge varios puntos al azar y realiza con ellos el proceso de iteración gráfica.
2. ¿Qué ocurre al aplicar a la función seno el proceso de iteración gráfica: curva-recta, curva-recta, sucesivamente?
3. Completa la siguiente tabla para analizar las órbitas de los puntos que se indican y de otros dos cualesquiera que tu escojas. Observa que para

calcular cada órbita debes ayudarte con una calculadora, escribiendo el valor inicial y luego oprimiendo la tecla “sin” una y otra vez. Escribe cada valor con tres cifras decimales, realiza al menos cinco iteraciones para cada x .

$f(x) = \text{sen}x$					
x	$f(x)$	$f^{02}(x)$	$f^{03}(x)$	$f^{04}(x)$	$f^{05}(x)$
0.5					
2					
-3.3					
$\vdots$					

4. Observa la tabla. ¿Tiende cada órbita a acercarse a un valor determinado? ¿Cuál?
5. ¿Cuáles son los puntos fijos de f ? Clasifícalos como atractores o repulsores.
6. Escribe en tu cuaderno una conclusión respecto al comportamiento de las órbitas para la función seno.

Observemos ahora la función coseno:

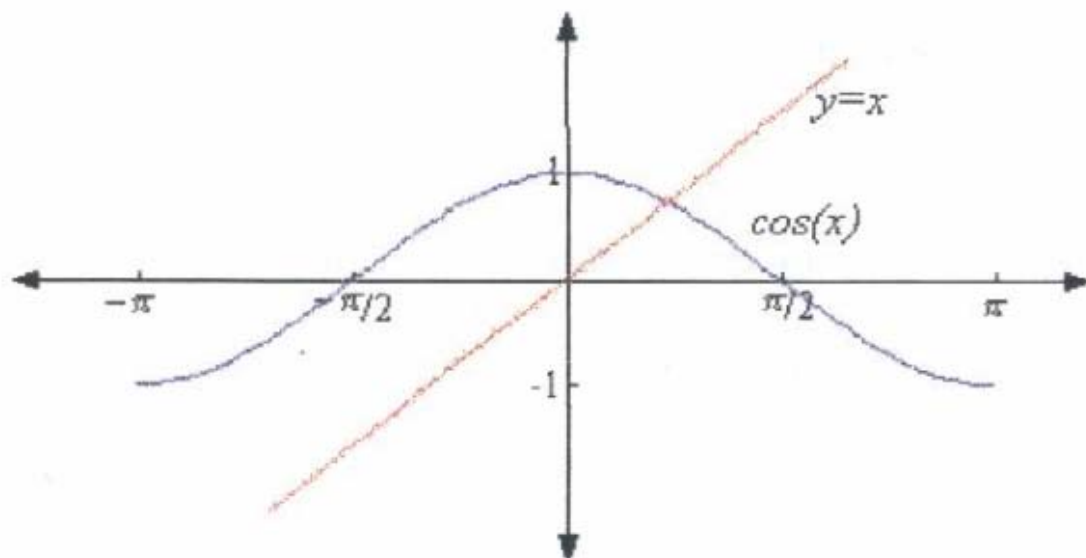


Figura 12. Iterando la función *coseno*.

7. Nuevamente escoge varios puntos al azar y realiza con cada uno de ellos el proceso de iteración gráfica.
8. Escribe una conjetura con respecto a lo que ocurre en éste caso.
9. De manera parecida a como hiciste para la función seno, completa la siguiente tabla y verifica tu conjetura.

$f(x) = \cos x$					
x	$f(x)$	$f^{02}(x)$	$f^{03}(x)$	$f^{04}(x)$	$f^{05}(x)$
0.5					
2					
-3.3					
$\vdots$					

10. Observa la tabla. ¿Tiende cada órbita a acercarse a un valor determinado? ¿Cuál?

11. ¿Cuáles son los puntos fijos de f ? Clasifícalos como atractores o repulsores.

12. Escribe en tu cuaderno tres semejanzas y tres diferencias entre las “dinámicas” (comportamiento de las órbitas) de las funciones seno y coseno.

En el desarrollo de este taller los estudiantes se sorprendieron al ver que la función seno al iterarla en cualquier punto inicial, siempre llegaba a cero.

Este fue el caso de Carlos:

“Mira, tan raro la función seno en cualquier punto se va para cero”

(Taller # 5, 26 de noviembre de 2004)

Sorprendido e incrédulo lo confirmó en la tabulación de la función seno con diferentes valores iniciales. Y efectivamente, se convenció más de su

deducción, ya que cuando se le pedía una conclusión del comportamiento de la órbita para esta función el respondía:

“esta función solo tiene un punto fijo, y se llama atractor”

(Taller # 5, 26 de noviembre de 2004)

Al analizar la función coseno con respecto a sus órbitas, los estudiantes hicieron apreciaciones muy similares a la que hizo el estudiante Carlos.

“mire esta función tiene como punto fijo el 1”

(Taller # 5, 26 de noviembre de 2004)

Esto fue lo que expresó Omar.

Mientras que Leidy argumentó:

“estas dos funciones son diferentes a las que hemos trabajado en los talleres anteriores”

(Taller # 5, 26 de noviembre de 2004)

Pienso que el objetivo de este taller se cumplió satisfactoriamente, pues los estudiantes comprendieron el proceso y no se les presentó ninguna dificultad.

En este taller y el siguiente se trabajó con una familia de funciones muy particular $f(x) = cx(1-x)$, donde c es el valor constante que determina una función específica dentro de la familia. Se trabajaron los valores del parámetro c entre 1 y 3.2 para los cuales se observa el comportamiento de las órbitas con diferentes valores iniciales dados. Los estudiantes deben deducir que estas funciones siguen ciertos patrones al ser iteradas, y deben predecir sus comportamientos.

TALLER VI

ITERANDO $f(x) = cx(1-x)$ PARTE I.

Objetivo: Con este taller se pretende que incursiones en una familia de funciones muy especiales las de la forma $f(x) = cx(1-x)$ y descubras algunos aspectos importantes de las mismas utilizando el método de la iteración gráfica.

Materiales: Para este taller sólo necesitas de un lápiz, una regla y borrador.

Actividades: En este taller vamos a trabajar con una familia muy especial de funciones: las de la forma $f(x) = cx(1-x)$, donde el coeficiente c es un valor constante que determina una función específica dentro de esta familia.

1. Observa muy bien la forma de la función $f(x) = cx(1-x) = -cx^2 + cx$. ¿A qué clase de curva corresponde la gráfica de f ?

- Muy bien! Se trata de una parábola. ¿Hacia donde se abre esta parábola? ¿Cuáles son sus puntos de corte con el eje x ? Considera en primer lugar $c = 1$, es decir la función $f(x) = x(1-x)$. En este caso la recta $y = x$ es tangente a la parábola en el punto $(0,0)$ (ver figura 13)

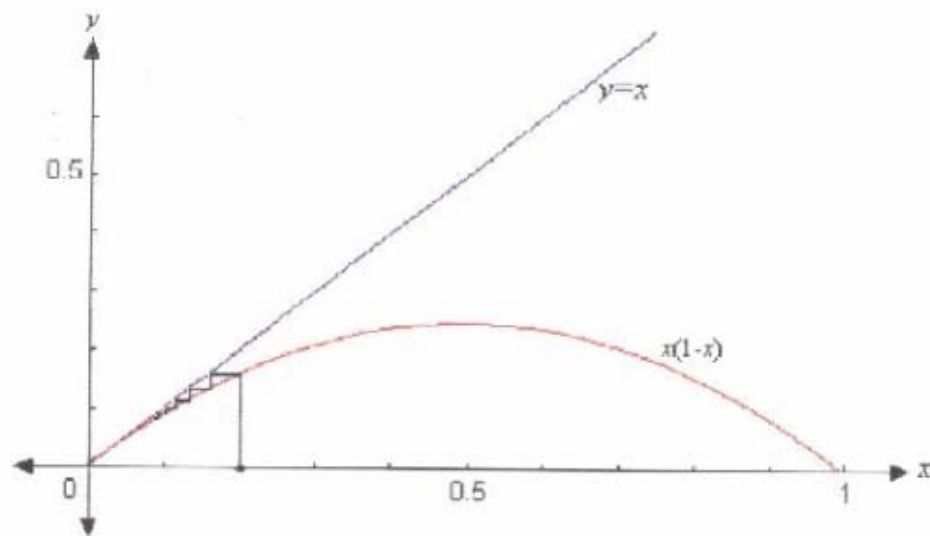


Figura 13. Iterando $f(x)=x(1-x)$.

2. Realiza el proceso de iteración gráfica partiendo de $x_0 = 0.3$ y describe su comportamiento.
3. Realiza el proceso de iteración gráfica partiendo ahora $x_0 = 0.7$ y compárala con la iteración anterior.
4. ¿Qué ocurre con las órbitas de valores entre 0 y 1? (puedes ensayar la iteración gráfica para valores mayores que 1, si lo consideras necesario).
5. Ahora realiza la iteración gráfica para valores mayores que 1 como 1.2, 1.5, para valores menores que cero (-0.5, -1 por ejemplo). ¿Qué observas? ¿Qué clase de punto fijo es (0,0)?
 - a. Tomemos ahora $c = 1.6$ y consideremos entonces la parábola $f(x) = 1.6x(1-x)$. (ver figura 14)

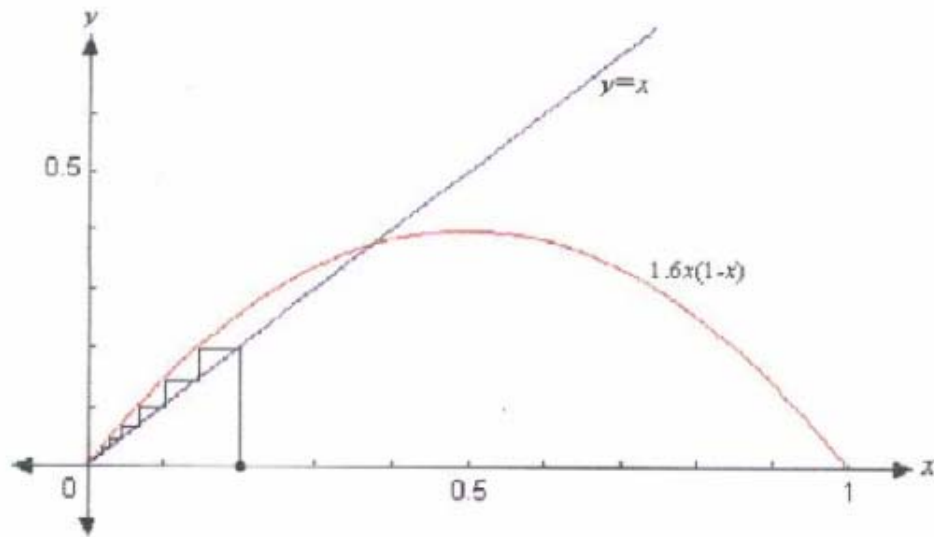


Figura 14. Iterando $f(x) = 1.6x(1-x)$.

6. ¿Cuáles son los puntos fijos de f ? (Encuentra su valor numérico y señálalos en la figura 14).

7. Realiza la iteración gráfica para: 0.2, 0.8, $3/8$, $5/8$, 1.3 y -0.5. Describe el comportamiento de cada órbita.

8. Clasifica cada uno de los puntos fijos en atractor o repulsor.

9. Escribe una semejanza (o más) y una diferencia (o más) entre este sistema dinámico y el anterior.

Sigamos aumentando el parámetro c . Tomemos ahora $f(x) = 2.8x(1-x)$ (ver figura 15).

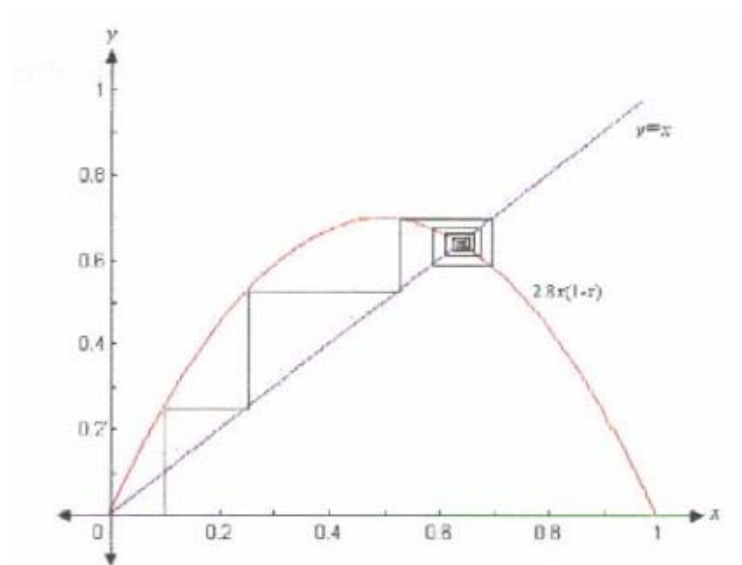


Figura 15 Iterando $f(x)=2.8x(1-x)$.

10. La curva y la diagonal se intersectan en el origen. Encuentra las coordenadas del otro punto de intersección.
11. Mediante iteración gráfica analiza y describe el comportamiento de diferentes órbitas tomando puntos en el intervalo $[0,1]$. Analiza en particular la órbita de 0.1.
12. Clasifica cada punto fijo en atractor o repulsor.
13. Usando el método de la iteración gráfica, encuentra:
 - a. El (único) valor inicial que al iterarlo una vez, “llega” a un punto fijo.
 - b. Dos valores que al iterarlos dos veces, llegan a un punto fijo.
 - c. Dos valores que al iterarlos tres veces, llegan a un punto fijo.

14. Especula sobre el comportamiento de las órbitas para valores fuera del intervalo cerrado $[0,1]$

- Cuando se toman valores de c , ligeramente mayores que 2.8 se pueden obtener resultados sorprendentemente diferentes. Tomemos por ejemplo $c = 3.2$ (ver figura 16)

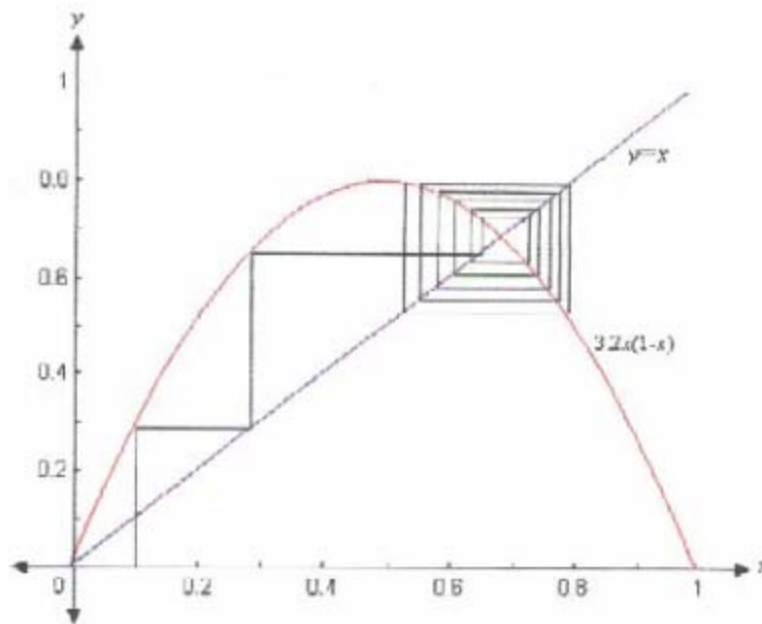


Figura 16. Iterando $f(x)=3.2x(1-x)$.

15. Considera los mismos valores que se analizaron para la función anterior ($f(x) = 2.8(1-x)$). Describe el comportamiento de las órbitas y compara los dos sistemas dinámicos.

16. Clasifica cada punto fijo en atractor o repulsor.

17. Describe y compara las órbitas de: 0.1, 0.35 y 0.65.

- Observa que en esta iteración gráfica, se forma una “caja cuadrada” con dos vértices sobre la diagonal y los otros dos vértices sobre la

gráfica de la función. Las iteraciones se alternan entre dos valores

$$x_a \rightarrow x_b \rightarrow x_a \rightarrow x_b \rightarrow x_a \rightarrow x_b \rightarrow \dots$$

Así $\{x_a, x_b\}$ lo podríamos llamar un ciclo de período 2.

18. Señala en la figura 16 los puntos x_a, x_b .
19. Describe las órbitas de: 0.6875, 1, un valor menor que 0, un valor mayor que 1.
20. Usa la iteración gráfica para encontrar valores tales que:
 - a. Al iterarlos una vez, “caen dentro de la caja cuadrada” descrita anteriormente.
 - b. Al iterarlos dos veces, caen dentro de esta caja.
 - c. Al iterarlos tres veces, caen dentro de esta caja.

En el primer punto de este taller se trabaja con una función específica dentro de esta familia de funciones, es el caso de $c=1$, $f(x)=x(1-x)$. Se itera la función con los diferentes valores iniciales y no se presentó ninguna dificultad en los estudiantes. Carlos comentaba lo siguiente:

“cualquier punto como punto inicial de la iteración me lleva a cero”

(Taller # 6, 30 de noviembre de 2004)

El estudiante se dio cuenta rápidamente de esta característica de la función, es decir, dedujo que al tomar cualquier punto inicial e iterarlo lleva al cero, que es el punto fijo de la función.

La gráfica que Daza (1999) presenta en este taller para el valor de $c=1.6$ está mal iterada, y no me pareció pertinente corregirla, por el contrario se la presenté así a los estudiantes para poder verificar si los jóvenes habían comprendido el proceso para iterar funciones gráficamente.

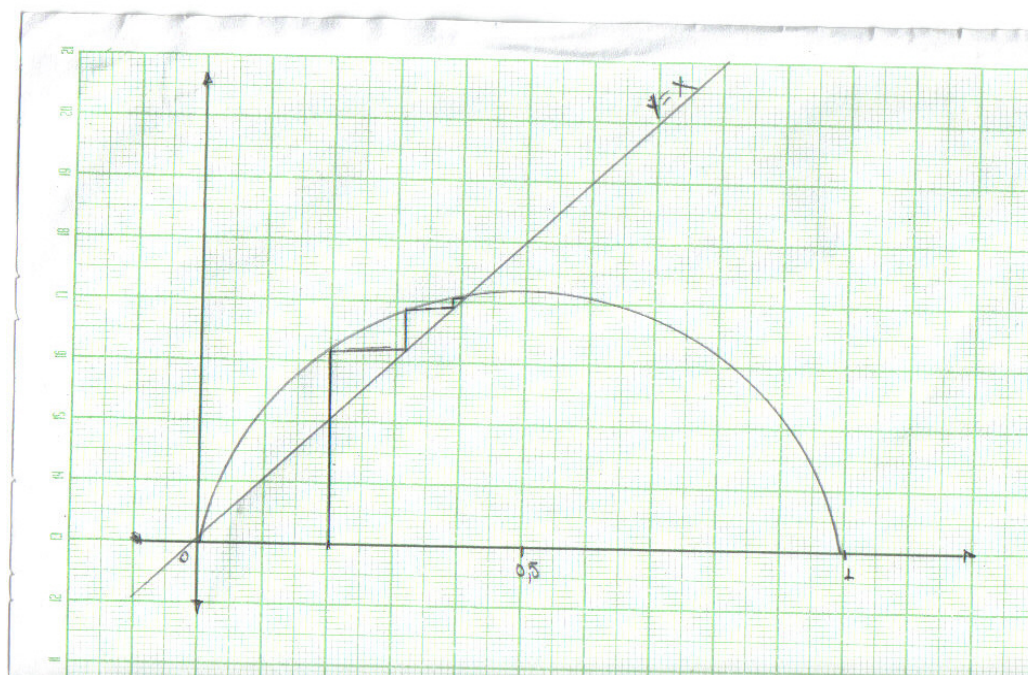
Efectivamente Omar, se dio cuenta de que la gráfica presentaba una inconsistencia para el valor inicial 0,2, al respecto el comentó:

“¿porqué la gráfica toma primero la recta $y=x$, acaso no es primero tomar los valores sobre la función?”

(Taller # 6, 30 de noviembre de 2004)

En ese instante le dije: muy bien por tu aporte, y lo invité a que realizara la socialización en el tablero para todos sus compañeros.

El estudiante realizó lo siguiente:



GRÁFICA OMAR

2. Manipulando la tecnología.

“tan chévere trabajar con esta calculadora”

William

La sociedad ha experimentado en los últimos tiempos un cambio de una sociedad industrial a una sociedad basada en la información; dicho cambio implica una transformación de las matemáticas que se enseñan en la escuela, si se pretende que los estudiantes de hoy sean ciudadanos realizados y productivos en el mañana.

Actualmente, con la aparición de la era de la informática, uno de los énfasis que se hace es la búsqueda y la construcción de modelos matemáticos. La tecnología moderna sería imposible sin las matemáticas y prácticamente ningún proceso técnico podría llevarse a cabo en ausencia del modelo matemático que lo sustenta.

Cuando hablamos de la actividad matemática en la escuela destacamos que el alumno aprende matemáticas “haciendo matemáticas”, lo que supone como esencial la resolución de problemas de la vida diaria, e implica que desde el principio se integre al currículo una variedad de problemas relacionados con el contexto de los estudiantes.

La resolución de problemas en un amplio sentido se considera siempre en conexión con las aplicaciones y la modelación. La forma de escribir ese juego o interrelacionar entre el mundo real y las matemáticas es la *modelación*.

El punto de partida de la modelación es una situación problemática real. Esta situación debe ser simplificada, idealizada, estructurada, sujeta a condiciones y suposiciones, y debe precisarse más, de acuerdo con los intereses del que resuelve el problema. Esto conduce a una formulación del problema (que se

puede manejar en el aula), que por una parte aún contiene las características esenciales de la situación original, y por otra parte, está ya esquematizado de modo que permite una aproximación con medios matemáticos.

Los datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones del problema enunciado matemáticamente deben trasladarse a las matemáticas, es decir, deben ser matematizados y así resulta un modelo matemático de la situación original. Dicho modelo consta esencialmente de ciertos objetos matemáticos, que corresponden a los “elementos básicos” de la situación original o del problema formulado y de ciertas relaciones entre éstos objetos, que corresponden también a relaciones entre esos “elementos básicos”.

El proceso de resolución de problemas continúa mediante el trabajo de sacar conclusiones, calcular y revisar ejemplos concretos, aplicar métodos y resultados matemáticos conocidos, como también desarrollando otros nuevos. Los computadores y las calculadoras graficadoras se pueden utilizar también para simular casos que no son accesibles desde el punto de vista analítico. En conjunto, se obtienen ciertos resultados matemáticos. Estos resultados tienen que ser validados, es decir, se tiene que volver a trasladar al mundo real, para ser interpretados en relación con la situación original. De esta manera, el que resuelve el problema también valida el modelo, si se justifica usarlo para el propósito que fue construido.

El proceso de modelación no solamente produce una imagen simplificada sino también una imagen fiel de alguna parte de un proceso real pre-existente. Más bien, los modelos matemáticos también estructuran y crean un pedazo de realidad, dependiendo del conocimiento, intereses e intenciones del que resuelve el problema. Para transferir la situación problemática real a un problema planteado matemáticamente, pueden ayudar algunas actividades como las siguientes:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general;
- esquematizar;
- formular y visualizar un problema en diferentes formas;
- descubrir relaciones;
- descubrir regularidades;
- reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas;
- transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido.

Una vez que el problema ha sido transferido a un problema más o menos matemático, este problema puede ser atacado y tratado con herramientas matemáticas, para lo cual se pueden realizar actividades como las siguientes:

- Representar una relación en una fórmula;
- probar o demostrar regularidades;
- refinar y ajustar modelos;
- utilizar diferentes modelos;
- combinar e integrar modelos;
- formular un concepto matemático nuevo;
- generalizar. (Lineamientos Curriculares MEN, 1998, p. 97)

Lo anterior da paso a esta categoría de análisis, en la cual se mostrará el proceso llevado por los estudiantes en la manipulación de la tecnología.

Originalmente Daza (1999) propone tres talleres (7, 8 y 9) en los cuales se debía aplicar un programa utilizando la calculadora *fx 3600 p – 3800 p*. para realizar unas iteraciones gráficas. Pero, se presentaron dos dificultades en el momento de realizar la experiencia con los estudiantes: la primera dificultad fue que no se contaba con dichas calculadoras en la Institución, y la segunda

dificultad fue la limitación del tiempo, puesto que ya se estaba acabando el año escolar, entonces me vi obligado a reunir estos tres talleres en un solo taller y adecuarlos para utilizar la calculadora Texas Instruments y para esto se debió modificar el programa planteado en los talleres que el autor proponía. Se escogió esta calculadora, dado que se me facilitaba conseguirlas para implementarlas en el colegio y además aprovechaba los conocimientos adquiridos durante la Especialización en el módulo de Nuevas Tecnologías. A continuación se muestra el programa que se aplicó en este taller:

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Control	I/O	Var	Find...	Mode	

```

:Iterar(0
:Prgm
:ClrIO
:ClrDraw
:Request "numero de iteraciones",m
:Expr(m)→m
:Disp "digite el valor c="
:Input a
:Disp "digite el valor inicial"
:Input i
:a*x*(1-x)→y1(x)
:DrawFunc y1(x)

```

MAIN	RAD APPROX	FUNC 9
------	------------	--------

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Control	I/O	Var	Find...	Mode	

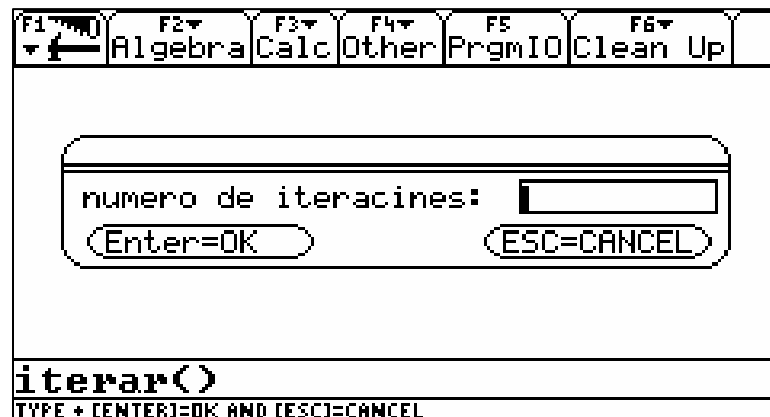
```

:DrawFunc x
:Line i,0,i,y1(i)
:For k,1,m
:Line i,y1(i),y1(i),y1(i)
:y1(i)+i
:Line i,i,i,y1(i)
:EndFor
:Pause
:For f,1,m
:y1(i)+i
:Disp y1(i)
:EndFor:EndPrgm

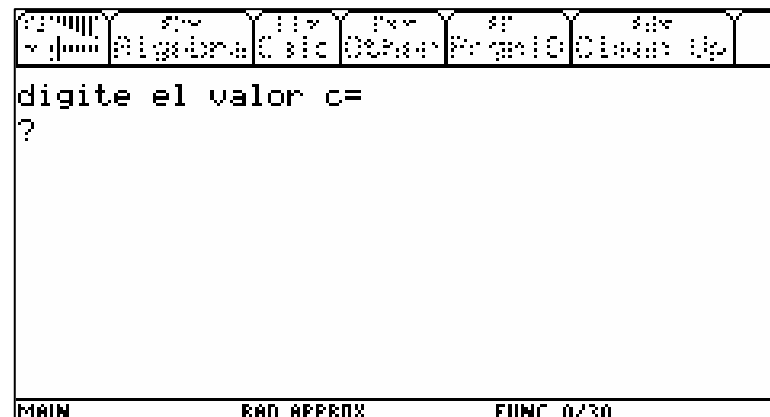
```

MAIN	RAD APPROX	FUNC
------	------------	------

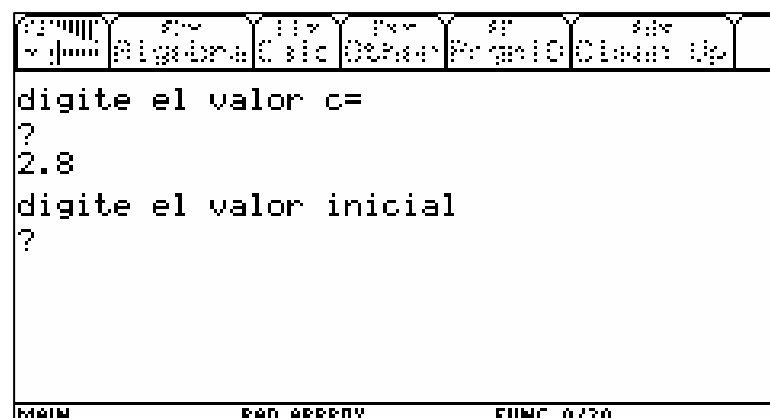
Ahora quiero realizar una breve explicación del programa que implementé: inicialmente el programa solicita el número de iteraciones:



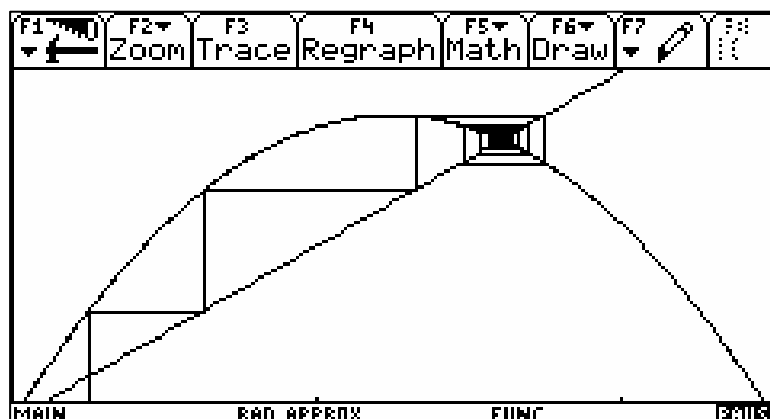
Después de escribir el número de iteraciones damos enter y nos solicita el valor de la constante c que determina la función particular que se va a graficar dentro de la familia de funciones $f(x) = cx(1-x)$.



Ya digitado el valor de c ($f(x) = 2,8x(1-x)$) posteriormente el programa nos solicita el valor inicial de la órbita.



Con el valor inicial de la órbita, y el valor de c se genera las iteraciones gráficas correspondientes, finalmente se muestra en la pantalla la iteración gráfica (hallar el punto fijo).



TALLER VII

(RECOPIACIÓN TALLRES 7, 8, 9)

ITERANDO $f(x) = cx(1-x)$ PARTE II, III Y

LA ITERACIÓN GRÁFICA A PARTIR DE LA TECNOLOGÍA.

Objetivo: El objetivo que perseguimos en éste taller es que conozcas, analices y utilices un sencillo programa que te ayudará a visualizar y agilizar el trabajo de la consecución de las órbitas para la familia de funciones $f(x) = cx(1-x)$.

Materiales: Además de lápiz y borrador, también necesitaras para desarrollar este taller una calculadora TEXAS INSTRUMENTS.

Actividades: En este taller vamos a trabajar las mismas funciones del taller VI usando en esta oportunidad una calculadora programable, para verificar el análisis que se hizo para cada una de las órbitas examinadas.

- **Instrucciones generales sobre el manejo y el uso de las teclas en la calculadora TEXAS INSTRUMENTS**

Tu calculadora es una amiga que te ayudará a economizar tiempo para que puedas avanzar más rápidamente en la rama científica de tu interés.

A continuación encuentras un programa muy sencillo, que te permite calcular las órbitas de puntos para la función $f(x) = cx(1-x)$.

1. Ingresa el programa a la calculadora y córralo con algunos de los parámetros y valores iniciales trabajados en el taller VI. Compara los resultados obtenidos anteriormente con los que acabas de conseguir con la calculadora.
2. Usando el programa completa cada tabla para la función $f(x) = x(1-x)$ y verifica la descripción que hiciste de cada órbita en el taller anterior.

$x_0 = 0.3$	$x_0 = 0.7$	$x_0 = 1.2$	$x_0 = 1.5$	$x_0 = -0.5$	$x_0 = -1$
$x_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{1cm}}$
$x_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{1cm}}$
$x_3 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{1cm}}$
$x_4 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{1cm}}$
$x_5 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{1cm}}$
$x_6 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{1cm}}$
$x_7 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{1cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{1cm}}$

3. Utiliza el programa anterior para calcular órbitas correspondientes a la función $f(x) = 1.6x(1-x)$. Completa y analiza:

$x_0 = 0.2$	$x_0 = 0.8$	$x_0 = 3/8$	$x_0 = 5/8$	$x_0 = 1.3$	$x_0 = -0.5$
$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$

4. Utiliza el programa anterior para calcular órbitas correspondientes a la función $f(x) = 2.8x(1-x)$. Completa y analiza:

$x_0 = 0.1$	$x_0 = 0.5$	$x_0 = 0.9$	$x_0 = 0.6$	$x_0 = 1.3$
$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$

$x_0 = 2$	$x_0 = -0.7$	$x_0 = -3$
$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$

5. Verifica los valores que encontraste en el punto 11 del taller anterior.

6. Ajusta de nuevo el programa, analiza $f(x) = 3.2x(1-x)$ y completa:

$x_0 = 0.1$	$x_0 = 0.35$	$x_0 = 0.65$	$x_0 = 0.9$	$x_0 = 0.6875$
$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$

$x_0 = 1$	$x_0 = -0.7$	$x_0 = 1.2$
$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$

7. Observa atentamente cada tabla y analiza el comportamiento de cada órbita.

8. Compara tus observaciones con las obtenidas mediante el proceso de iteraciones gráficas del taller anterior.

9. Realiza la iteración gráfica con el valor inicial $x_0 = 0.1$ y dibuja los primeros siete pasos del proceso iterativo. Procura ser muy cuidadoso al trazar los segmentos verticales y horizontales.

Completa la siguiente tabla, basándote únicamente en el dibujo (es decir sin usar calculadora).

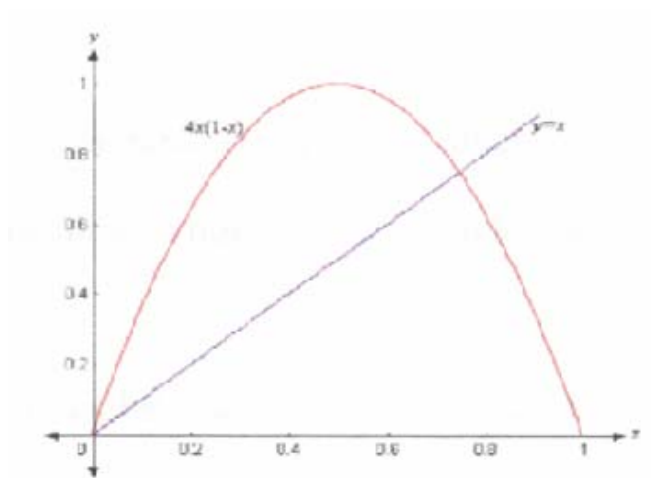


Figura 17. Iterando $f(x) = 4x(1-x)$.

$$x_0 = 0.1$$

$$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

9. Usando ahora la calculadora programable para determinar los valores de la tabla, compara con los resultados que habías obtenido mediante la iteración gráfica.

10. Usando nuevamente la calculadora programable completa la siguiente tabla. Observa y describe el comportamiento de cada órbita.

$$x_0 = 0.2$$

$$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_0 = 0.3$$

$$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_0 = 0.4$$

$$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

11. Explica con tus palabras la siguiente afirmación: *La iteración de la función cuadrática $f(x) = 4x(1-x)$ es sensible a pequeños errores.*

12. ¿Piensas que todos los valores entre 0 y 1, tienen órbitas con comportamiento caótico? ¿Por qué?

13. ¿Qué características comunes tienen las órbitas de 0.5, 0.75, 1 y 0.25? ¿y las órbitas de 1.3, y -0.4?

14. Realiza el mismo análisis para la parábola $f(x) = 3.6x(1-x)$

- Usando nuevamente la calculadora programable completa la siguiente tabla. Observa y describe el comportamiento de cada órbita.

$x_0 = 0.2$	$x_0 = 0.3$	$x_0 = 0.4$
$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_4 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_5 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_6 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$	$x_7 = \underline{\hspace{2cm}}$

- Explica con tus palabras la siguiente afirmación: *La iteración de la función cuadrática $f(x) = 3.6x(1-x)$ es sensible a pequeños errores.*
- ¿Piensas que todos los valores entre 0 y 1, tienen órbitas con comportamiento caótico? ¿Por qué?
- ¿Qué características comunes tienen las órbitas 0.5, 0.75, 1 y 0.25? ¿y las órbitas de 1.3, y -0.4?

15. Escribe una conclusión general sobre los sistemas dinámicos determinados por $f(x) = 4x(1-x)$ y $f(x) = 3.6x(1-x)$.

16. Utiliza nuevamente el programa ahora con valor inicial $x_0 = 0.1$ y con los parámetros dados, trata de ubicar los comportamientos de tales iteraciones marcadas sobre la tabla en la columna y fila que corresponda.

C	1.50	2.90	3.24	3.90
Caos				
Período – 2 atractor				
Punto fijo, espiral				
Punto fijo, escalera				

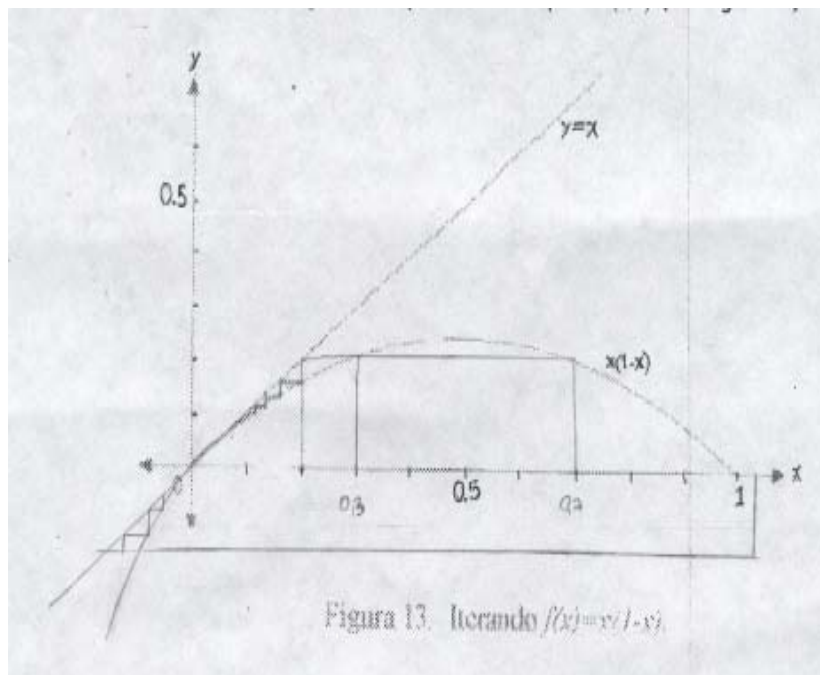
- Para muchos parámetros c , las primeras iteraciones no alcanzan a revelar el comportamiento final de la iteración. En este caso, puede ayudar a ejecutar algún número de pre-iteraciones antes de ir graficando el camino de iteración. Esto regularía el efecto transitorio de un caso particular de la condición inicial.

17. Ensayar los valores dados de c , y marcar la casilla correspondiente al comportamiento dinámico mostrado.

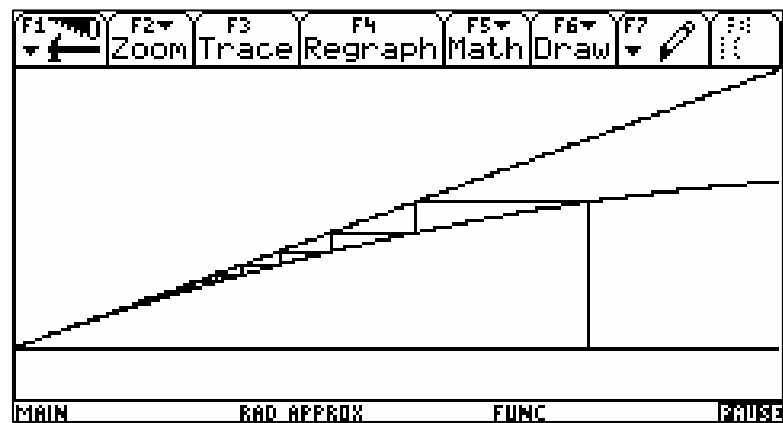
C	2.95	3.05	3.50	3.65	3.74	3.80	3.84
Caos							
Período – 5 atractor							
Período – 4 atractor							
Período – 3 atractor							
Período – 2 atractor							
Punto fijo							

Al desarrollar el punto 2 del taller 7: **“Usando el programa completa cada tabla para la función $f(x) = x(1-x)$ y verifica la descripción que hiciste de cada órbita en el taller anterior”** se vio claramente cual es el punto fijo con la ayuda de la calculadora. Al respecto Leidy expresó:

“es la misma gráfica que hicimos en el punto 1 del taller 6, pero al realizarlo con la calculadora, puedo hacer más rápido el proceso de las iteraciones y ver el dibujo, aunque esto me permite verificar lo que hice en el papel”



GRÁFICA DEL PAPEL DE LEIDY



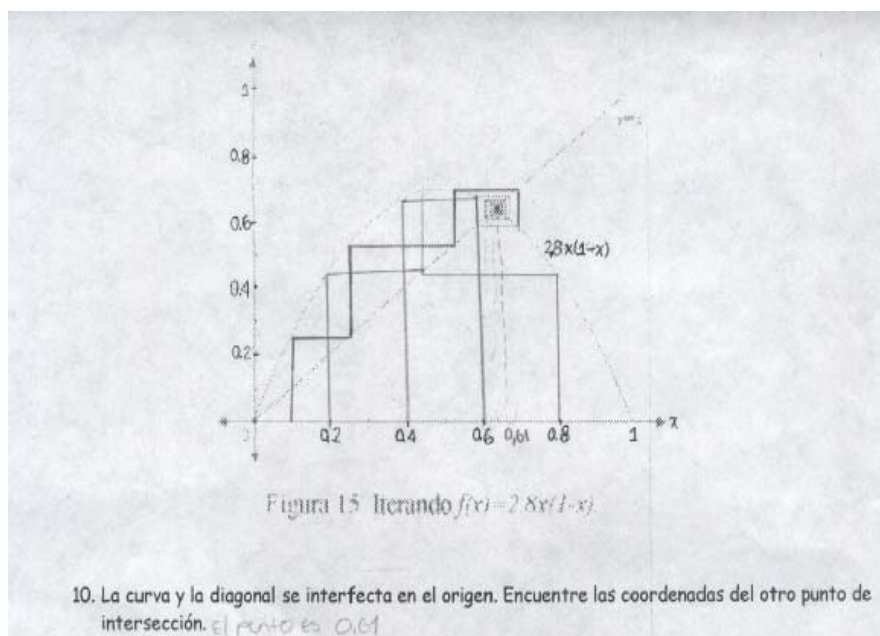
(Taller # 7, 1º de diciembre de 2004)

En el punto 10 del taller 6 se plantea lo siguiente: **“La curva y la diagonal se interceptan en el origen. Encuentre las coordenadas del otro punto de intersección”** Omar había respondido:

“el punto es 0,61”

(Taller # 6, 30 de noviembre de 2004)

El halló este valor al tanteo, revisando la gráfica que se encontraba allí propuesta



GRÁFICA DE OMAR

Pero cuando resolvió el punto 4 del presente taller: **“Utiliza el programa anterior para calcular órbitas correspondientes a la función $f(x) = 2.8x(1-x)$. Completa y analiza”** él halló el valor 0.64 con la ayuda de la calculadora y en el punto 5 donde se pide comparar este valor con el taller anterior él respondió:

“si es parecido cuando hicimos la iteración gráfica, aunque a mi me había dado 0,61 y ahora me dio 0,64”

(Taller # 7, 1º de diciembre de 2004)

La comparación que el estudiante hizo le sirvió para darse cuenta que manualmente le había dado un valor que estaba errado, pues estaba lejos del verdadero punto fijo y además era mejor trabajar con la ayuda de la calculadora para tener una mejor aproximación.

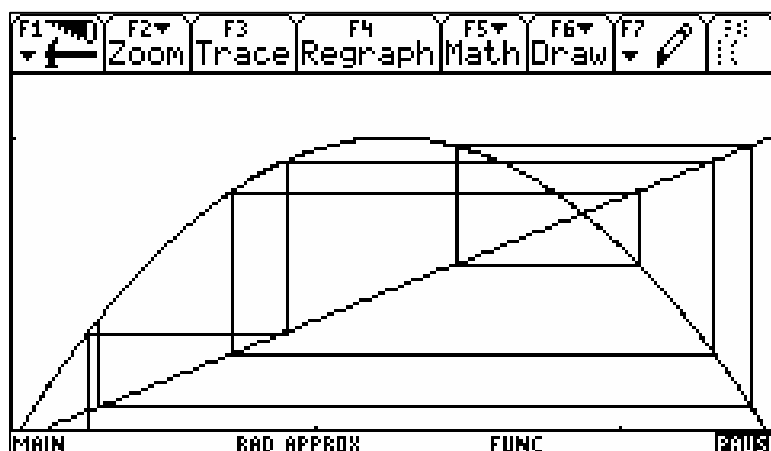
En el taller anterior, los estudiantes debían hacer las iteraciones gráficamente con lápiz y papel, las respuestas no eran tan exactas y el proceso se volvía muy tedioso para algunas funciones, por ejemplo para el caso de $f(x) = 4x(1-x)$ Carlos argumentó lo siguiente:

“no sé para donde va la función con ese punto inicial, ¿será que tiene punto fijo?”

(Taller # 6, 30 de noviembre de 2004)

Pero cuando lo hizo con la calculadora él mismo comentaba:

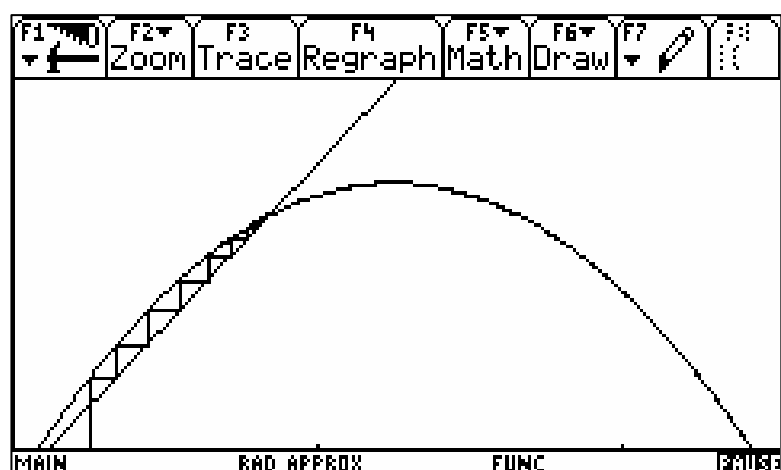
“en este caso es mejor realizar el ejercicio con la calculadora porque se puede ver claramente hacia donde va la gráfica y si tiene o no punto fijo”



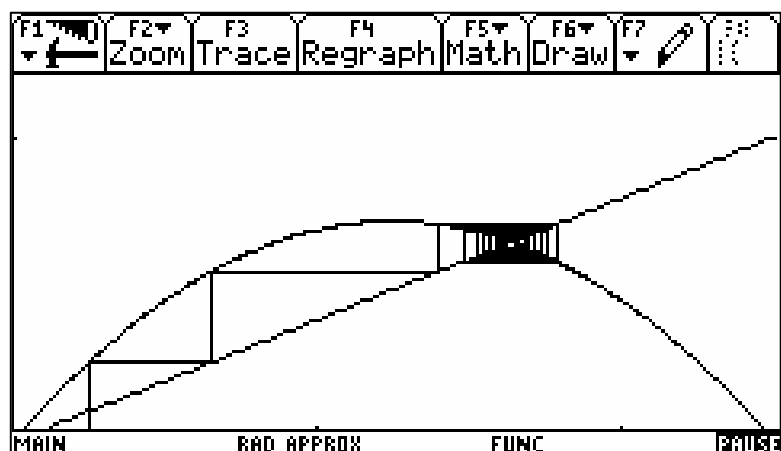
(Taller # 7, 1º de diciembre de 2004)

En el punto 17: “Utiliza nuevamente el programa ahora con valor inicial $x_0 = 0.1$ y con los parámetros dados, trata de ubicar los comportamientos de tales iteraciones marcadas sobre la tabla en la columna y fila que corresponda” el estudiante Carlos presentó dificultad al resolver este ejercicio, ya que para él todos eran puntos fijos escalera y a pesar de que tenía la calculadora no supo interpretar lo que estaba pasando con las iteraciones de esta función.

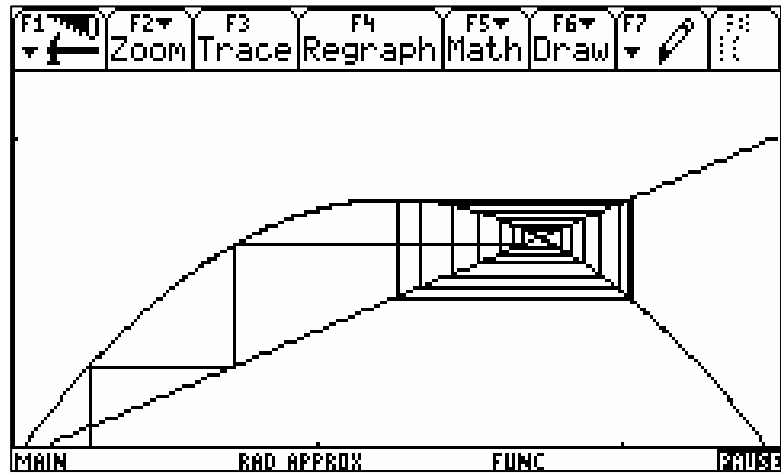
Veamos lo que la gráfica nos muestra para $c=1.50$:



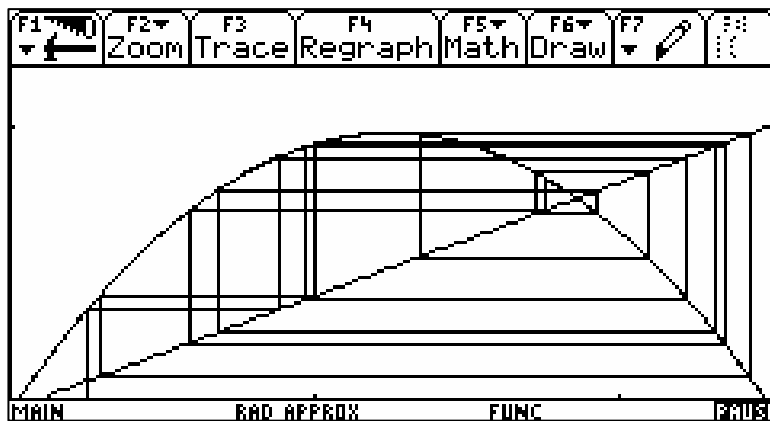
Para $c=2.9$:



Para $c=3.24$



Para $c=3.9$:



En la primera gráfica es punto fijo escalera, en la segunda es punto fijo espiral y las gráficas tres y cuatro es período dos atractor. Pero Carlos no reconocía estas diferencias entre las gráficas y seguía aferrado a que era punto fijo escalera. En ese momento intervino Leidy diciéndole:

“Carlos: ¿para usted el comportamiento de todas las gráficas que esta viendo son escalera? Porque claramente yo veo que solamente la primera gráfica lo es, pero las otras no”

(Taller # 7, 1º de diciembre de 2004)

En este momento, Carlos dijo:

“ah claro, todos no son escalera, que pena estaba confundido”

(Taller # 7, 1º de diciembre de 2004)

La mayoría de los estudiantes comprendieron que era mejor trabajar con la calculadora que manualmente, pues, las respuestas eran más exactas que las aproximaciones que ellos habían hecho en el taller anterior.

“no tenemos la medida exacta en el taller anterior, pero con la calculadora podemos decir un valor bastante aproximado”

(Taller # 7, pregunta # 8, 1º de diciembre de 2004)

Esto fue lo que argumentó Omar cuando estuvo resolviendo la presente actividad.

La experiencia con las calculadoras fue muy interesante y formativa para los estudiantes, ya que manipularon una herramienta muy completa y la cual ellos desconocían, por el nivel socio económico en el que viven. Pero les permitió aclarar las dudas que tenían en cuanto a las diferentes familias de funciones que se pueden construir.

3. Acercamiento a la geometría fractal.

Este último taller está enfocado hacia un conjunto muy importante en matemáticas, en particular en geometría fractal, y que se puede construir mediante sistemas dinámicos: el conjunto de Cantor. Su construcción parte de un segmento de recta al que se le suprime su tercio medio y se continúa infinitamente suprimiendo el tercio medio de todos los segmentos restantes, los puntos que quedan son los que conforman el conjunto de Cantor, el cual se trabaja en este taller, puede también formarse utilizando el método de iteración gráfica descrito y aplicado en los talleres anteriores.

TALLER VIII

EL CONJUNTO DE CANTOR

Objetivo: Al finalizar este taller se espera que conozcas algunos aspectos generales del conjunto de Cantor y puedas llegar a él haciendo uso del método de iteración gráfica sobre el cual ya has adquirido bastante habilidad.

Materiales: Para llevar a cabo este taller consigue nuevamente por lo menos dos hojas milimetradas, regla, lápiz, y borrador.

Actividades: Muchos de los trabajos realizados en lo que hoy se conoce como teoría del caos y geometría fractal, están contruidos sobre ideas generales referenciados originalmente por GEORGE CANTOR¹ en sus trabajos sobre la teoría de conjuntos. Uno de sus trabajos fundamentales lo constituye el llamado conjunto de Cantor, cuya construcción geométrica es muy sencilla: comienza con un segmento de recta de longitud una unidad, suprime el tercio medio como se muestra en el paso 1 (ver figura 18), quedando dos segmentos de longitud un tercio.

Suprime el tercio medio de cada uno de estos dos segmentos, teniendo ahora cuatro segmentos de longitud un noveno. Este proceso, (suprimir el tercio medio de los segmentos en cada paso) continúa indefinidamente. El número de segmentos aumenta mientras que su longitud tiende a cero.

¹ Cantor, George Ferdinand Ludwing Philipp:
Nació el 3 de marzo de 1841 en San Petersburgo, Rusia.
Murió el 6 de enero de 1918 en Halle, Alemania.

Fue uno de los matemáticos más brillantes de la humanidad y personificó al incansable empeño por comprender. Desde su juventud se interesó por el clásico problema del infinito tanto potencial como real he hizo importantes aportaciones al crear la teoría sobre conjuntos transfinitos. Aunque fue muy atacado en su época, su trabajo se llegó a considerar como el producto más fino del genio matemático, así como uno de los supremos logros de la actividad humana puramente intelectual. La complejidad de sus investigaciones junto con la incomprensión de sus colegas, lo condujeron a la locura.

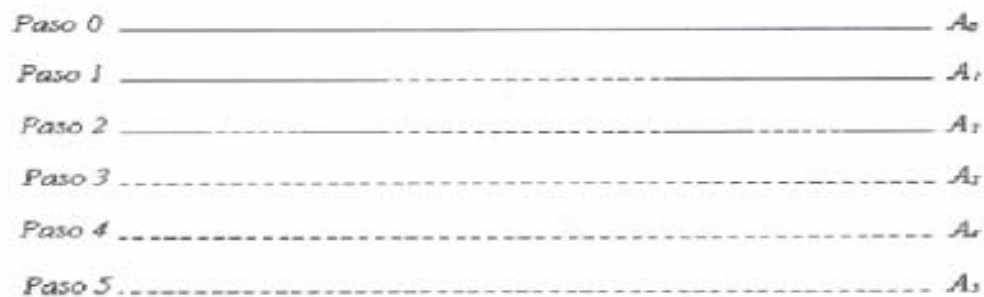


Figura 18.. El conjunto de Cantor.

1. Los primeros pasos para la construcción del conjunto de Cantor se muestran en la figura 18. Sobre las líneas punteadas, realiza los pasos 3, 4 y 5.
 2. ¿Cuántos subintervalos hay en el paso 5?, ¿en el paso 6? y ¿en el paso n ?
 3. ¿Cuál es la longitud de cada segmento en el paso 5? ¿en el paso 6? y ¿en el paso n ?
- Si llamamos A_n el conjunto que se obtiene en el paso n , entonces el conjunto de Cantor es la intersección de “todos” los conjuntos A_n , es decir:

$$\text{Conjunto de Cantor} = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_N \cap \dots,$$

También podemos decir que el conjunto de Cantor es el “conjunto límite” de la sucesión de conjuntos $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots, A_N, \dots$ es decir lo que quedaría “al final” del proceso.

4. ¿Cuántos puntos piensas que tiene el conjunto de Cantor? Argumenta tu respuesta.
5. ¿Cuál es la longitud del conjunto Cantor? Argumenta tu respuesta.
- El conjunto de Cantor también se puede construir mediante iteración gráfica. Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x \leq 1/2 \\ -3x + 3, & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

La gráfica de esta función es del mismo estilo de algunas funciones trabajadas en el taller tres (ver figura 19). Observa que tercio medio de la gráfica de la función queda “por encima” de la recta $y = 1$.

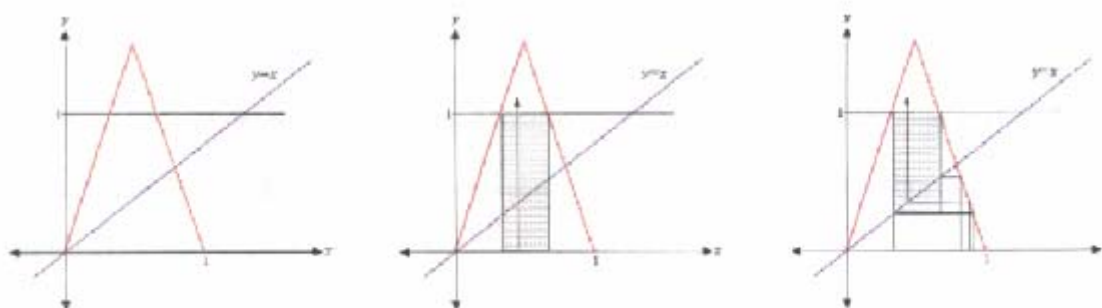


Figura 19. Construyendo el conjunto de Cantor.

6. Analiza mediante iteración grafica las órbitas de puntos tomados entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. ¿Qué características tienen estas órbitas? (ver figura 18 paso 1).
7. Ahora realiza el mismo análisis para puntos entre $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$.

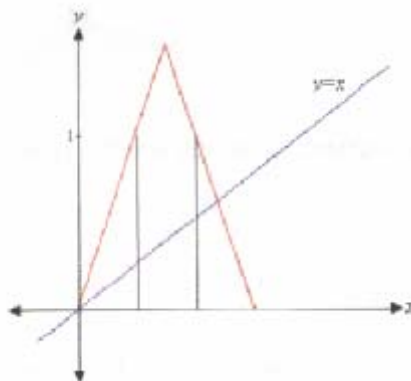
8. Verifica:

Un punto tomado entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ "escapa" del intervalo $[0,1]$ en el primer paso de la iteración gráfica, mientras que un punto tomado entre $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$ "escapa" del intervalo $[0,1]$ en el segundo paso de la iteración gráfica.

9. Encuentra otro intervalo entre 0 y $\frac{1}{3}$ cuyos puntos también escapen de $[0,1]$ en el segundo paso de la iteración gráfica. Sombrea el camino de escape de este intervalo de la misma manera como se hizo en la figura 19, paso dos.

10. ¿Qué ocurre con las órbitas de: 0, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{9}$? ¿y con los extremos del intervalo que encontraste en la pregunta 9?

11. De acuerdo con el desarrollo del punto 1, marca sobre la línea punteada bajo la gráfica de la figura mostrada a continuación, los intervalos que quedan en el paso tres de la construcción del conjunto de Cantor.



12. Usando iteración gráfica identifica dos nuevos “intervalos de escape”, uno entre 0 y $\frac{1}{9}$ y el otro entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{9}$. Sombrea los “caminos de escape”.

13. El intervalo $\left[\frac{7}{9}, \frac{8}{27}\right]$ escapa de la siguiente manera:

$$\frac{7}{27} \rightarrow \frac{7}{9} \rightarrow \frac{2}{3}; \quad \frac{8}{27} \rightarrow \frac{8}{9} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Muestra que el intervalo $\left[\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right]$ escapa de manera similar.

14. Existen tres subintervalos de $[0,1]$ que después de dos pasos de iteración gráfica han escapado. ¿Cuántos subintervalos escapan después de cuatro pasos?

15. Escribe una fórmula que relacione el número E de subintervalos que han escapado, con el paso N de iteración grafica. ¿Qué le ocurre a E cuando N tiende al infinito? (es decir a medida que N se va haciendo “más grande”).

16. ¿Cómo se comporta la órbita de un punto mayor que 1? ¿y de un punto menor que 0?

17. Escribe una conclusión sobre el sistema dinámico definido por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x \leq 1/2 \\ -3x + 3, & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

18. ¿Cuál es el conjunto de puntos cuya órbita no escapa?

Este es el último taller titulado por el autor como “**El Conjunto de Cantor**”, cuyo objetivo es que los estudiantes conozcan algunos aspectos generales del conjunto de Cantor y puedan llegar a él haciendo uso del método de iteración gráfica sobre el cual ya han adquirido bastante habilidad.

Se presentó a los estudiantes el conjunto de Cantor y su correspondiente construcción geométrica. A la mayoría de ellos se les facilitó hallar los primeros cinco pasos de la gráfica como el caso de William:

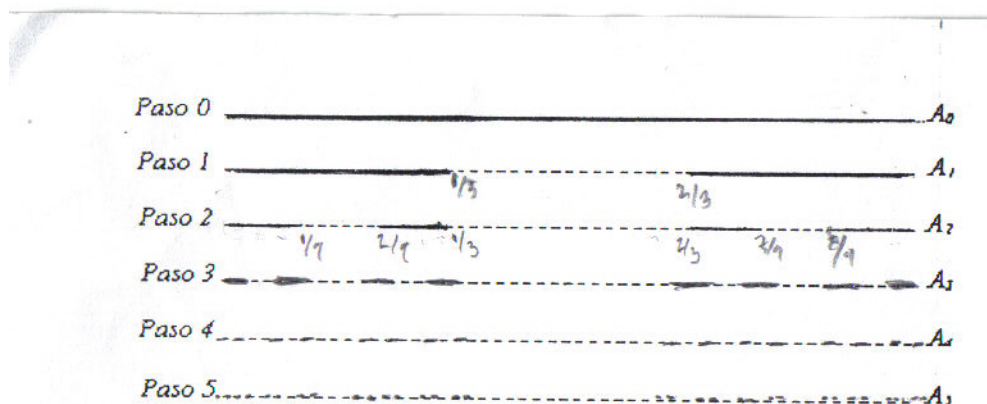


Figura 18.. El conjunto de Cantor.

GRÁFICA DE WILLIAM

Siguiendo con el desarrollo del taller, en papel milimetrado los estudiantes realizaron la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x \leq 1/2 \\ -3x + 3, & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}$$

Cuando se les pregunta en el punto 4: “**analiza mediante iteración gráfica las órbitas de puntos tomados entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$. ¿Qué características tienen**

estas órbitas?” a la mayoría de ellos se les presentó dificultad. Por ejemplo Carlos afirmaba que:

“llegan todos al mismo punto”

(Taller # 8, 3 de diciembre de 2004)

Lo cual no es cierto, claramente el intervalo (abierto) completo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ escapa

porque cuando $\frac{1}{3} < x_0 < \frac{2}{3}$ tenemos $x_1 > 1$ y $x_2 < 0$; pero entonces cada punto

que eventualmente aterriza en el intervalo también escapará bajo iteración y al iterarlo la gráfica escapa en el primer paso de la iteración.

Al preguntar por el mismo análisis en el intervalo $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, Carlos argumentó:

“que entre esos puntos se puede iterar la función pero se va lejos”

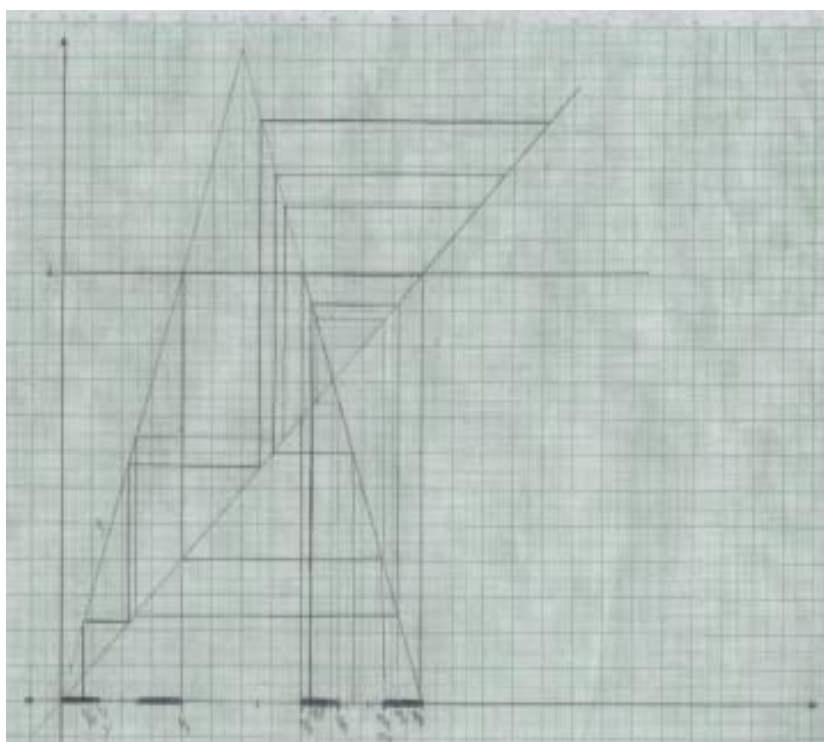
(Taller # 8, 3 de diciembre de 2004)

Carlos de alguna manera tiene razón, pero le faltó decir que en la segunda iteración la función escapa.

Cuando el autor propone: **Encuentra otro intervalo entre 0 y $\frac{1}{3}$ cuyos puntos también escapen de $[0,1]$ en el segundo paso de la iteración gráfica. Sombrea el camino de escape de este intervalo de la misma manera como se hizo en la figura 19, paso dos.**

La mayoría de los estudiantes encontraron este intervalo puesto que habían comprendido el concepto y estructura del punto anterior, y continuaron con el mismo proceso.

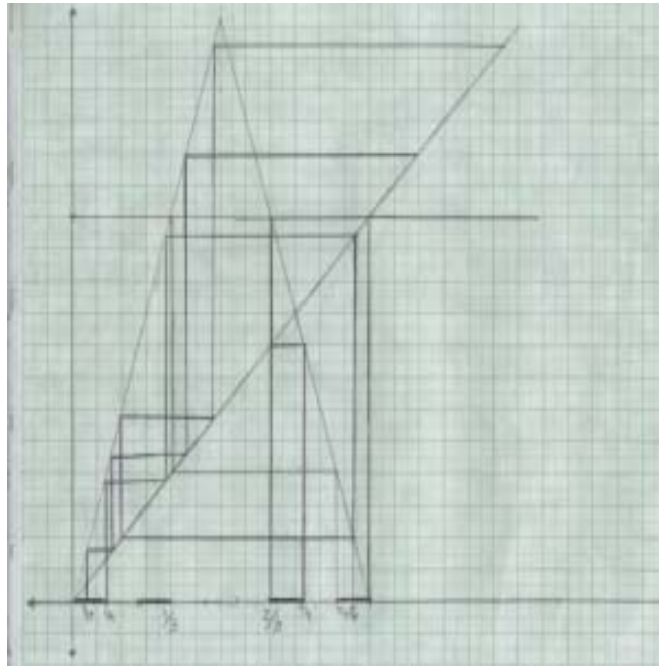
En el punto 11: **“de acuerdo con el desarrollo del punto 1, marca sobre la línea punteada bajo la gráfica de la figura mostrada a continuación, los intervalos que quedan en el paso tres de la construcción del conjunto de Cantor”** se observa en general que los estudiantes representaron adecuadamente el conjunto de Cantor, esto se puede ver, por ejemplo, en la gráfica elaborada por William



GRÁFICA DE WILLIAM

Este estudiante dibujó correctamente el conjunto de Cantor hasta donde lo pedían.

En la actividad que se pedía identificar los caminos de escape $\left(0, \frac{1}{9}\right)$, en $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right)$, el estudiante Omar lo hace correctamente:



GRÁFICA DE OMAR

Y afirma lo siguiente:

“que entre 0 y $\frac{1}{9}$ el camino de escape es con tres iteraciones”

(Taller # 8, 3 de diciembre de 2004)

Mientras que entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{9}$ el estudiante sombrea el camino de escape y afirma:

“que esto sucede en la iteración cuatro”

(Taller # 8, 3 de diciembre de 2004)

A los estudiantes se les dificultó identificar con cuántas iteraciones escapa un punto inicial si N es muy grande, reconociendo sólo los valores pequeños, es decir no lograron generalizar.

En la pregunta número 15 del taller 8 del comportamiento de la órbita para dar una respuesta acertada a la de un número mayor que 1, Omar responde:

“no puedo realizar la iteración”

(Taller # 8, 3 de diciembre de 2004)

Lo cual es una respuesta acertada, mientras que William afirma:

“que casi todos los puntos salen de la órbita”

(Taller # 8, 3 de diciembre de 2004)

Esta respuesta no es correcta y se le pidió a Omar socializar su respuesta para aclarar las dudas.

La mayoría de los estudiantes identificaron que esta función representa al conjunto de Cantor, mediante sistemas dinámicos y dieron las características del conjunto de la siguiente forma:

“hay más intervalos que escapan que los que no se escapan”

(Taller # 8, 3 de diciembre de 2004)

En este momento Leidy no comprendió el número de intervalos que escapan y no se escapan, en realidad la cantidad de puntos cuyo órbita escapa es igual a la cantidad de puntos cuya órbita no escapa (en ambos casos es $x_1 = c = |\mathfrak{R}|$). Ahora, los puntos que escapan parecieran más porque están

dispuestos en intervalos $(\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right] \cup \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right] \cup \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right] \cup \dots)$ mientras que los que no escapan son precisamente los del Conjunto de Cantor, el cual por ejemplo no contiene intervalos, y parecieran menos pero esto es aparente, ya que se tiene: $| \mathcal{G} | = | I - \mathcal{G} | = | \mathcal{R} |$ por eso Leidy se confundió, mientras que Carlos dijo:

“el conjunto de puntos cuya órbita no escapa es llamada el conjunto de Cantor”

(Taller # 8, 3 de diciembre de 2004)

CONCLUYENDO ESTA EXPERIENCIA DE AULA

A continuación daré unas conclusiones generales y posteriormente presentaré unas conclusiones de cada uno de los talleres que se desarrollaron en el aula de clase acerca de esta experiencia de aula.

CONCLUSIONES GENERALES

- Esta experiencia de aula fue enriquecedora tanto para los estudiantes como para mí, pues todos reconocieron y aplicaron conceptos matemáticos ya vistos en años anteriores haciendo de este proceso un aprendizaje significativo.
- Al introducir la tecnología en el aula, el estudiante está motivado y lleno de expectativas, esto facilita el aprendizaje y la manipulación del aparato tecnológico.
- En esta experiencia, la tecnología se utilizó como una herramienta facilitadora del proceso de aprendizaje; donde cada estudiante verificaba sus presaberes para hacer sus propias conclusiones.
- El desarrollo de estos talleres le permitió a los estudiantes de décimo grado del Instituto La Cumbre, un acercamiento a la geometría fractal por sistemas dinámicos, puesto que en ellos se cumplió con los objetivos propuestos por el autor.

- La actitud del grado décimo del Instituto La Cumbre frente al desarrollo de los talleres fue positiva, ya que percibí que querían adquirir nuevos conocimientos como es el caso de la geometría fractal.

CONCLUSIONES DE LOS TALLERES

TALLER UNO: Una Introducción al Concepto de Sistema Dinámico

- La mayoría de estudiantes tuvieron dificultades cuando se desarrollaron operaciones con fracciones.
- En el punto siete, tuvieron dificultades cuando encontraban el “n-ésimo” término de la secuencia.
- Se dificultó cuando se calcula el cuadrado de un número la concepción de los estudiantes es que si el número está al cuadrado entonces se multiplica por dos y así para cualquier potencia.
- Al desarrollar el taller podemos afirmar que a algunos estudiantes inicialmente les pareció muy mecánico en el sentido que preguntaban tres veces lo mismo en cada situación, pero a medida que lo iban desarrollando vieron las diferentes funciones.
- Durante el desarrollo del taller los estudiantes pudieron afianzar conocimientos ya adquiridos en años anteriores, como es el caso de calcular el doble de un número, el cuadrado de un número, la mitad de un número, el n-ésimo término de un número, etc.

- Quiero resaltar que este taller fue desarrollado mediante una situación problema de la vida cotidiana; en donde los estudiantes en la mayoría de los grados no habían trabajado de esta manera.

TALLER DOS: Composición de funciones

- En el punto siete, al iterar una función tomando como el punto inicial un decimal, se presentan dificultades si las operaciones se efectúan sin ayuda de la calculadora.
- Para los estudiantes fue más fácil comprender la composición de funciones gracias al diagrama que se presentó en el taller.
- Los estudiantes se aventuraron a lanzar hipótesis en el desarrollo del punto dos, lo que los llevó a verificar si tenían o no razón.
- Con este taller, los estudiantes afianzaron el concepto de composición de funciones.

TALLER TRES: La Iteración Gráfica

- Al hacer iteraciones gráficas, a los estudiantes en ocasiones se les dificultó el proceso de encontrar la función, pues ésta era una línea recta en comparación a la función $y = x$.
- En algunas iteraciones gráficas los estudiantes identificaron el comportamiento cuando era punto fijo o espiral de la iteración.

- Los estudiantes adquirieron habilidades para hacer las iteraciones gráficas, observando los resultados en forma analítica.

TALLER CUATRO: Órbitas y Puntos Fijos

- Percibí que los estudiantes tenían claro el concepto de órbita acotada y órbita no acotada, pero no sabían cómo expresarlos para que sus compañeros lo entendieran.
- Se les facilitó graficar las funciones y realizar las iteraciones gráficas ya que se trabajó en papel milimetrado, ayudando a una mejor comprensión del proceso.

TALLER CINCO: Iterando la Función Seno y Coseno

- Los estudiantes al iterar la función Seno en cualquier punto inicial concluyeron que siempre llegaba a cero identificando que era un punto fijo atractor.
- El objetivo de este taller se cumplió satisfactoriamente, pues los estudiantes comprendieron el proceso y no se les presentó ninguna dificultad.

TALLER SEIS: Iterando $f(x) = cx(1-x)$ Parte I

- En este Taller el autor, al plantear la pregunta número cinco de la parte a, dibujó erróneamente.

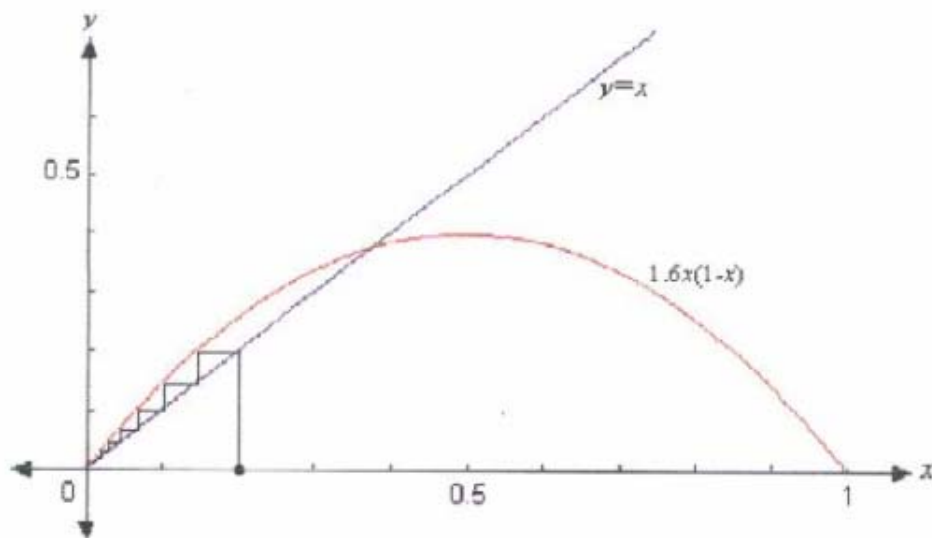


Figura 14. Iterando $f(x) = 1.6x(1-x)$.

Observamos que parte del punto inicial hacia la recta $y = x$, pero debería partir hacia la función y posteriormente ir horizontal hacia la recta $y = x$; para la aplicación no me pareció pertinente corregirla, por el contrario, se la presenté así a los estudiantes para verificar que los jóvenes habían comprendido el proceso de iteración de funciones gráficamente y efectivamente un estudiante se dio cuenta de que la gráfica presentaba una inconsistencia para el valor inicial 0,2 lo cual él socializó en el tablero para todos los compañeros.

- La mayoría de estudiantes han comprendido hasta este momento la iteración gráfica, al desarrollar este taller se les facilitó el proceso, puesto que ya se venía trabajando desde los talleres anteriores, encontraron cuando era punto fijo atractor y repulsor.

TALLER SIETE:

Inicialmente el autor planteaba resolver un Taller titulado “**Iterando** $f(x) = cx(1-x)$ **Parte II**”, el Taller ocho titulado “**Iterando** $f(x) = cx(1-x)$ **Parte III**” y el Taller nueve titulado “**La Iteración Gráfica a través de la Tecnología**”; para el desarrollo de estos tres talleres, fueron recopilados en uno sólo llamado: “**Recopilación de los Talleres 7 , 8, 9 Iterando** $f(x) = cx(1-x)$ **Parte II, III, y La iteración gráfica a partir de la tecnología**”

- Con el manejo de la tecnología los estudiantes tenían más disposición e interés; pues nunca habían manipulado una calculadora de este tipo como fue la Texas Instruments.
- Las expectativas eran muchas, respecto al funcionamiento de la calculadora, la mayoría de los estudiantes se les facilitó seguir las instrucciones.
- Relacionaron el taller siete con los talleres cinco y seis, donde después de trabajar con lápiz y papel pasaron a graficar con la calculadora, demostrando más habilidades para la tecnología.
- Deseo resaltar que en el aula de clase cuando hay manejo de material didáctico el estudiante tiene más expectativas hacía lo nuevo y desconocido.
- Con el programa de la calculadora afianzaron el conocimiento de punto fijo, este se veía claramente con ayuda de la tecnología.

- Los estudiantes manifestaron que el programa de la calculadora era preciso para encontrar el punto fijo; en comparación con una iteración gráfica usando lápiz y papel.
- La experiencia con las calculadoras fue muy interesante y formativa para los estudiantes, ya que manipularon una herramienta muy completa y que ellos desconocían, por el nivel socio económico en el que viven. Esto les permitió aclarar dudas que tenían en cuanto a las diferentes familias de funciones que se pueden construir.

TALLER OCHO: El Conjunto de Cantor

- Los estudiantes comprendieron la construcción geométrica del Conjunto de Cantor, y se les facilitó la construcción final del conjunto.
- Cuando el Conjunto de Cantor fue construido mediante la iteración gráfica, los estudiantes comprendieron el proceso.
- A los estudiantes se les dificultó identificar con cuántas iteraciones escapa un punto inicial en la construcción del Conjunto de Cantor mediante iteraciones gráficas.
- Finalizando este taller, los estudiantes tenían gran habilidad para hacer iteraciones gráficas, e identificaban cuándo un punto se escapa o no se escapa, pero tuvieron dificultades en identificar la cantidad de puntos que se escapan y no se escapan en un intervalo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. (1986) Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas.

CASTRO, F. (1994) Geometría fractal en el bachillerato. Bucaramanga: UIS

COBOS, J. (2002) Introducción a la Geometría Fractal. Básica Primaria. Bucaramanga: UIS.

DAZA C. (1999) Geometría Fractal en el Bachillerato. Acercamiento por Sistemas Dinámicos. Bucaramanga: UIS.

ESTRADA, W. (2004) Geometría fractal. Editorial Magisterio. Bogotá.

GIRALDO A. (2002) *Sistemas dinámicos discretos y caos*, Universidad Politécnica de Madrid, Facultad de Informática.

GIRALDO A.; SASTRES M. (2002) *Sistemas dinámicos discretos y caos*. Madrid: Fundación General de la U. P. M.

MEN Lineamientos Curriculares (1998) Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MÉNDEZ H. (2000) Iteración de funciones (notas para un curso de introducción a los sistemas dinámicos discretos). México: UNAM

ONTORIA, A. (1999) Mapas Conceptuales, una técnica para aprender.
Madrid: Narcea, S. A. de ediciones

OSORIO, R. (2002) Reseña histórica de la geometría. Aportes y Reflexiones.
Bucaramanga: UIS.

PARRA C. (1994) *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y Reflexiones.* :
Paidós.

PEITGEN H. O.; JÜRGENS H.; SAUPE D. (1992) *Fractals for the classroom
strategic activities*, volumen two. New York: Springer – Verlag.

<http://www.redcientifica.com/doc/doc199903310021.html>