

ANÁLISIS DE MODELOS INFLACIONARIOS CON CAMPOS
VECTORIALES MEDIANTE EL USO DE SISTEMAS DINÁMICOS

JOSÉ FERNANDO RODRÍGUEZ RUIZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2015

ANÁLISIS DE MODELOS INFLACIONARIOS CON CAMPOS VECTORIALES MEDIANTE EL USO DE SISTEMAS DINÁMICOS

JOSÉ FERNANDO RODRÍGUEZ RUIZ¹

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN FÍSICA

DIRECTOR
YEINZON RODRÍGUEZ GARCÍA^{1,2}.,PH.D.

¹GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN RELATIVIDAD Y GRAVITACIÓN - UIS

²GRUPO DE FÍSICA - FENOMENOLOGÍA DE PARTÍCULAS ELEMENTALES Y COSMOLOGÍA - UAN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2015

Contenido

Introducción	10
1. Cosmología estándar	13
1.1. El principio cosmológico e inflación con un campo escalar	13
1.1.1. Ecuaciones de campo	14
1.1.2. Inflación	14
1.1.3. Lagrangiano de punto y la formulación de Hamilton-Jacobi	18
1.2. Variables cinemáticas	19
1.2.1. Ecuaciones de Einstein en el formalismo de la tétrada	21
2. Sistemas Dinámicos	25
2.1. Definiciones generales	25
2.2. Estabilidad	26
2.2.1. Estabilidad alrededor de puntos hiperbólicos	27
2.3. Teorema de la variedad central	29
2.4. Dinámica de inflación con un campo escalar	30
2.4.1. Evolución temporal de λ	32
3. Inflación con campos vectoriales	34
3.1. Geometría del espacio-tiempo	34
3.2. Campos vectoriales abelianos	36
3.2.1. Dinámica de la parte temporal del campo	37
3.2.2. Dinámica de la parte espacial del campo	41
3.2.3. Dinámica conjunta de la parte temporal y espacial del campo	45
3.3. Campos vectoriales no abelianos	50
3.3.1. Dinámica de la parte temporal de los campos	51
3.3.2. Dinámica conjunta de la parte temporal y espacial de los campos	53
4. Conclusiones	57

Lista de figuras

1.1. Representación gráfica del problema de horizonte	15
2.1. Análisis gráfico de estabilidad unidimensional	26
2.2. Estabilidad de Lyapunov	27
2.3. Solución numérica de la dinámica del campo escalar	33
3.1. Gráficas de la solución numérica de la parte temporal de un campo vectorial $U(1)$ con un potencial $\lambda(-A_0^2)$	42
3.2. Gráficas de la solución numérica de la parte temporal de un campo vectorial $U(1)$. Se emplean los valores de $n = 2$, $\tilde{\lambda} = 0,001$ y $\xi = 4$	43
3.3. Gráficas de la solución numérica de la parte espacial de un campo vectorial $U(1)$	44
3.4. Gráficas de la solución numérica de la parte temporal y espacial de un campo vectorial $U(1)$. Se emplean los valores de $n = 1$, $\tilde{\lambda} = 2$ y $\xi = 1$	47
3.5. Gráficas de la solución numérica de la parte temporal y espacial de un campo vectorial $U(1)$. Se emplean los valores de $n = 2$, $\tilde{\lambda} = 0,4$ y $\xi = 1$	48
3.6. Gráficas de la solución numérica de la parte temporal y espacial de un campo vectorial $U(1)$. Se emplean los valores $n = 2$, $\tilde{\lambda} = 0,005$ y $\xi = 3$	49
3.7. Solución numérica del modelo con un campo vectorial $SU(2)$ en el conjunto invariante $A_i^a = \dot{A}_i^a = 0$	53

Resumen

TÍTULO: ANÁLISIS DE MODELOS INFLACIONARIOS CON CAMPOS VECTORIALES MEDIANTE EL USO DE SISTEMAS DINÁMICOS

AUTOR: RODRÍGUEZ RUIZ, José Fernando¹.

PALABRAS CLAVES: Campos vectoriales, inflación, sistemas dinámicos.

DESCRIPCIÓN: Inflación con un campo escalar provee una solución a los problemas de horizonte, de planitud y de reliquias no deseadas. Las perturbaciones cuánticas del campo φ , junto con la dinámica inflacionaria, proveen un mecanismo para generar la estructura a gran escala observada en el Universo. Sin embargo, este modelo presenta perturbaciones estadísticamente isótropas y, por consiguiente, no puede explicar la posible existencia de una dirección privilegiada en la radiación cósmica de fondo. Para responder a la posible existencia de expansión anisótropa y anisotropía estadística en la radiación cósmica de fondo, se plantean modelos cosmológicos que involucran campos vectoriales. Las ecuaciones dinámicas que gobiernan el mecanismo inflacionario son ecuaciones no lineales de segundo orden, lo cual provoca que el estudio de éstas sea complicado. Una alternativa para evadir esta dificultad consiste en tratar el sistema de ecuaciones como un sistema dinámico, en especial, estudiando el significado físico de los atractores. En este trabajo se presentan varios modelos cosmológicos que buscan generar un período inflacionario y explicar la posible existencia de una dirección preferida. Para este fin, se plantea una acción efectiva en la que se fija un gauge covariante y se estudian las implicaciones dinámicas del término que fija el gauge en esta acción. Más exactamente, se investigan en este trabajo algunos modelos mediante el uso de técnicas analíticas, numéricas y de sistemas dinámicos, verificando que existe un periodo inflacionario inducido por el término que fija el gauge, los cuales solucionan los problemas clásicos de la cosmología estándar y que generan montos de expansión anisótropa en concordancia con las observaciones.

¹Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez García (Director).

Abstract

TITLE: ANALYSIS OF VECTOR-INFLATION MODELS USING DYNAMICAL SYSTEMS

AUTHOR: RODRÍGUEZ RUIZ, José Fernando².

KEYWORDS: Vector fields, inflation, dynamical systems.

DESCRIPTION: Scalar field inflation provides a satisfactory solution to the flatness, horizon and unwanted relics problems. In addition, the quantum primordial fluctuations together with the expansion of the Universe generate the observed large-scale structure. However, the observations hint towards a privileged direction in the cosmic microwave background fluctuations. The scalar field perturbations are statistically isotropic, therefore, this version of inflation can not explain the privileged direction. One plausible scenario to explain such a privileged direction consists in adding vector fields to the inflationary mechanism. Due to the nonlinearity of the field equations, an analytical solution may be difficult, if not impossible. To overcome this difficulty, the field equations are studied as a dynamical system, specially, it is analyzed the physical meaning of the attractors. In this work we present various inflation model candidates, which involve vectors fields in order to explain the possible preferred direction. It is used an effective action which fix a covariant gauge and the cosmological implications of this term are studied. More exactly, in this work some vector field models are studied using analytical methods, techniques of dynamical systems and numerical methods, showing that there exist an inflationary era which solves the standard problems of classical cosmology, and that the amount of anisotropic expansion agrees with the observational data.

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez García (Supervisor).

Notación

La constante de gravitación universal es G y m_p es la masa reducida de Planck:

$$m_p = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}.$$

Los índices griegos representan cualquiera de los números $\{0, 1, 2, 3\}$ y los índices latinos cualquiera de los números $\{1, 2, 3\}$.

La derivada parcial $\partial_\mu A^\nu$ se denotará por $A^\nu_{,\mu}$ y la derivada covariante $\nabla_\mu A^\nu$ por $A^\nu_{;\mu}$.

La signatura de la métrica $g_{\mu\nu}$ es $(-, +, +, +)$.

Los símbolos de Christoffel están dados por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} [g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}],$$

Las componentes del tensor de Riemann y Ricci por:

$$\begin{aligned} R^\rho_{\mu\lambda\nu} &= \Gamma^\rho_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}, \\ R_{\mu\nu} &= R^\rho_{\mu\rho\nu}. \end{aligned}$$

En resumen, la notación es $(+, +, +)$ según la Ref. [\[Misner et al., 1973\]](#)

Introducción

A escalas cosmológicas, la interacción fundamental dominante es la gravedad; por lo tanto, para estudiar la dinámica del universo, se utiliza la teoría general de la relatividad de Einstein. Las observaciones muestran que el Universo luce homogéneo e isótropo en escalas superiores a 3×10^8 años luz [Wu *et al.*, 1999; Yadav *et al.*, 2005]. Por consiguiente, en una primera aproximación, se plantea como solución a las ecuaciones de Einstein una métrica homogénea e isótropa, la cual se conoce como la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [Weinberg, 2008]. El estudio de esta solución lleva a la conclusión de que la dinámica del Universo se caracteriza por una expansión del espacio [Weinberg, 2008]. De lo anterior se deduce que el Universo en una época muy temprana se encontraba en un estado muy denso. La evolución térmica del universo predice la existencia de una radiación cósmica de fondo (RCF), resultado de una etapa en la cual los fotones obtuvieron un camino medio libre infinito [Weinberg, 2008]; este momento se conoce como el momento de la última dispersión. La confirmación experimental de este hecho se dio en 1964 cuando Penzias y Wilson descubrieron que existía una radiación homogénea e isótropa de origen cósmico [Penzias & Wilson, 1965]. Sin embargo, la homogeneidad e isotropía descritas requieren que el Universo durante la época de la última dispersión estuviera conectado causalmente, y así existiera una interacción que llevara a un equilibrio termodinámico. Durante la época de la última dispersión, la zona conectada causalmente era mucho menor que la zona que observamos actualmente [Weinberg, 2008]; por consiguiente, la teoría estándar no puede explicar la homogeneidad e isotropía de la RCF. Este problema se conoce como el problema de horizonte. Adicionalmente, la densidad de energía crítica, $\rho_c = 3m_p^2 H^2$, en donde H es el parámetro de Hubble, era prácticamente igual, con una precisión de 62 cifras significativas, a la densidad de energía al comienzo de la historia del universo [Weinberg, 2008]. Las observaciones actuales [Ade *et al.*, 2013a] muestran que aún hoy en día la densidad de energía crítica es igual a la densidad de energía con 3 cifras significativas de precisión. Para que esto sea posible se requiere que el Universo sea prácticamente plano y que la densidad de energía siempre sea muy cercana a la densidad crítica. Este problema de ajuste fino se denomina el problema de planitud.

Al introducir correcciones cuánticas a las soluciones de las ecuaciones de Einstein [Starobinsky, 1980], Starobinsky llegó a la conclusión de que el Universo estuvo inicialmente en un estado dominado por una energía de vacío que varía muy lentamente. La importancia de

este período, aparte de introducir correcciones cuánticas, se encuentra en que soluciona los problemas anteriormente mencionados [Guth, 1981]. Mediciones posteriores mostraron que la RCF no es perfectamente homogénea e isotrópica [Smoot *et al.*, 1992], sino que exhibe perturbaciones las cuales son resultado de fluctuaciones cuánticas y que, mediante inflación, dan cuenta de la estructura a gran escala observada en el Universo [Bardeen *et al.*, 1983; Fischler *et al.*, 1985; Guth & Pi, 1982; Hawking, 1982; Mukhanov & Chibisov, 1981; Starobinsky, 1982]. Más tarde, y con el advenimiento de los datos de los satélites WMAP y Planck, el análisis de las perturbaciones en la RCF reveló la posible existencia de una dirección privilegiada [Bennett *et al.*, 2011; Groeneboom *et al.*, 2010; Hinshaw *et al.*, 2013; Ade *et al.*, 2013b]. Entre tanto, un modelo inflacionario con un campo escalar implica que las perturbaciones son estadísticamente isotrópicas y que, por lo tanto, no se puede explicar la existencia de esta dirección. Una posible explicación de la dirección privilegiada se encuentra en el papel de campos vectoriales agregados a los modelos [Adshead & Wyman, 2012; Dimopoulos, 2006, 2007; Dimopoulos & Karciuskas, 2008; Dimopoulos *et al.*, 2009, 2010; Golovnev *et al.*, 2008; Maleknejad & Sheikh-Jabbari, 2013; Watanabe *et al.*, 2009; Yokoyama & Soda, 2008]. La complejidad de las ecuaciones de campo conduce a buscar métodos que permitan un análisis más fácil de la física de los modelos. Un método consiste en analizar las ecuaciones de campo como un sistema dinámico autónomo [Bogoyavlensky & Gokhman, 2011; Collins, 1971]. En la Ref. [Wagstaff & Dimopoulos, 2011] se mostró, empleando técnicas de sistemas dinámicos, cómo un modelo que involucra un campo escalar y un campo vectorial tiene atractores que corresponden a un período inflacionario y a una producción de partículas invariante de escala la cual es requerida para generar exitosamente la estructura a gran escala en el universo.

Por otra parte, cuando se realiza la cuantización de un campo vectorial, por ejemplo el fotón, A_μ tiene cuatro componentes, pero el fotón posee solamente dos polarizaciones. De esta forma, existen grados de libertad no físicos debido a la invariancia de gauge [Cheng & Li, 1984]. El método propuesto por Faddeev y Popov para realizar una correcta cuantización, que además es explícitamente covariante, consiste en plantear una acción efectiva, la cual contiene términos relacionados con la fijación del gauge y los fantasmas de Faddeev-Popov [Cheng & Li, 1984; Faddeev & Popov, 1967; Weinberg, 1995]. Surge la pregunta de cuál es el papel de estos términos en un contexto cosmológico.

En este trabajo se presentan modelos inflacionarios que involucran campos vectoriales abelianos o no abelianos, los cuales tratan de solucionar los problemas expuestos anteriormente. Estos contienen un término de fijación del gauge lo cual nos lleva realizar un estudio de sus consecuencias cosmológicas. Los primeros modelos están motivados en los resultados presentados en las Refs. [Cembranos *et al.*, 2012, 2013], en donde se demostró que es posible modelar la materia oscura y la energía oscura mediante campos vectoriales. Más precisamente, la Ref. [Cembranos *et al.*, 2013] mostró que es posible obtener un fluido cósmico con un parámetro de estado $\omega = -1$ (energía de vacío); por lo tanto, es razonable esperar que a partir de estos modelos sea posible obtener un período inflacionario. Se estudiarán los modelos analíticamente, numéricamente, y especialmente a través del uso de sistemas dinámicos. Se encontrarán los atractores del modelo y se corroborará si éstos corresponden a períodos in-

flacionarios de rodadura lenta lo suficientemente prolongados para solucionar los problemas clásicos de la cosmología estándar. Además, se analizarán las predicciones de estos modelos acerca de la expansión anisótropa y se comparará con las cotas observacionales existentes.

En el primer capítulo se presentará un resumen de los problemas de cosmología estándar, una discusión de cómo inflación los soluciona, y se mostrarán métodos para plantear las ecuaciones de campo como un sistema dinámico. En el segundo capítulo se presentarán los conceptos básicos de sistemas dinámicos, y una pequeña aplicación a la dinámica del campo escalar, en donde se evidencia que inflación es un periodo natural del sistema. En el tercer capítulo se estudiará la dinámica de los modelos con campos vectoriales, buscando puntos críticos que correspondan a estados inflacionarios. Se analizará la estabilidad de estos y se corroborarán los resultados con las soluciones numéricas.

1

Cosmología estándar

1.1. El principio cosmológico e inflación con un campo escalar

El principio cosmológico afirma que el Universo es homogéneo e isótropo, pero debe ser entendido del mismo modo que se entiende la homogeneidad e isotropía en un gas [Weinberg, 1972], i.e. no deben realizarse comparaciones de los puntos individuales, sino comparaciones de celdas de tamaño superior a 3×10^8 años luz [Wu *et al.*, 1999; Yadav *et al.*, 2005]. Como primera aproximación (orden cero) en el análisis de la dinámica del Universo, se propone que éste se encuentre descrito por un espacio-tiempo máximamente simétrico [Weinberg, 1972, 2008], y como segunda aproximación (primer orden), se propone la introducción de perturbaciones en la métrica original, las cuales vendrían a ser las descripciones particulares dentro de cada celda [Weinberg, 2008].

La única métrica Lorentziana de cuatro dimensiones que cumple los requisitos de homogeneidad e isotropía es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW); sus componentes en un sistema comóvil de coordenadas cartesianas son

$$g_{ij} = a^2(t) \left[\delta_{ij} + K \frac{x_i x_j}{1 - K \mathbf{x}^2} \right], \quad g_{00} = -1, \quad g_{0i} = 0, \quad (1.1.1)$$

en donde $a(t)$ es una función del tiempo y K puede tomar cualquiera de los valores $\{-1, 0, 1\}$, indicando la geometría espacial del Universo como hiperbólica, plana o esférica, respectivamente. El elemento de línea definido a través de esta métrica es

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K \mathbf{x}^2} \right]. \quad (1.1.2)$$

Para entender el significado físico de la función $a(t)$ basta con observar el elemento de línea (1.1.2), y percatarse de que un desplazamiento netamente espacial, $dt = 0$, es igual al producto de $a(t)$ por el cambio infinitesimal en las coordenadas espaciales; por consiguiente,

1 Cosmología estándar

esta función puede ser vista como un «factor de escala» que transforma una distancia coordenada d_c en una distancia física medible: $d_f = a d_c$. Debido a que el factor de escala es dependiente del tiempo, la distancia física entre dos puntos cambia aunque las coordenadas permanezcan constantes:

$$\dot{d}_f = \dot{a} d_c = \frac{\dot{a}}{a} d_f. \quad (1.1.3)$$

La ecuación (1.1.3) es la expresión matemática de la ley de Hubble, la cual establece que las galaxias se están alejando mutuamente con una velocidad proporcional a la distancia que las separa; la cantidad \dot{a}/a se define como el parámetro de Hubble H . También se define el parámetro adimensional $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$. Como se puede inferir, cuando q es positivo el universo se expande desaceleradamente, y cuando es negativo se expande aceleradamente; por esta razón, recibe el nombre de parámetro de desaceleración.

1.1.1. Ecuaciones de campo

Como consecuencia del principio cosmológico, el Universo en todo punto debe ser isótropo; así, el contenido de materia es similar a un fluido que posee una presión igual en todas las direcciones. La expresión para este tipo de fluido (perfecto) es [Weinberg, 1972]:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (1.1.4)$$

en donde ρ y p corresponde a la densidad de energía y la presión en el sistema localmente inercial comóvil con el fluido, y u^μ es la cuadrivelocidad del fluido. Con esta fuente y a partir de las ecuaciones de Einstein se obtienen las ecuaciones de Friedmann-Lamaitre, las cuales describen por completo la dinámica de Universo:

$$H^2 = \frac{\rho}{3m_p^2} - \frac{K}{a^2}, \quad (1.1.5)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2m_p^2}(\rho + 3p). \quad (1.1.6)$$

1.1.2. Inflación

Cuando Starobinsky introdujo correcciones cuánticas a las ecuaciones de Einstein, la solución mostró la existencia de un período inicial caracterizado por un factor de escala $a \propto e^{Ht}$, en donde el parámetro de Hubble H es cuasi-constante [Starobinsky, 1980]. Guth mostró que este período podía solucionar los problemas de horizonte, de planitud y de reliquias no deseadas [Guth, 1981]. A continuación se presentará un breve resumen de los dos primeros problemas y cómo inflación provee solución a éstos. Es importante mencionar que un período de expansión acelerada del universo (inflación) se caracteriza por $q > 1$. Cuando H es constante, existe un período de expansión acelerada, pero esta una condición necesaria para tener inflación.

Problema de Horizonte

El horizonte de partículas es el límite en la distancia para el cual un evento pasado puede ser observado, i.e es la distancia física máxima desde donde se generó un evento hasta el lugar en donde se observa. El horizonte de partículas indica el tamaño de la zona causalmente conectada y está dado por ¹:

$$d_{\max}(t) = a(t) \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.1.7)$$

El horizonte de partículas en el momento de la última dispersión es $d_L \approx \frac{a(t_L)}{H_0 a(t_0)} \approx H_0^{-1} (1 + z_L)$ es el corrimiento al rojo en el momento de la última dispersión, en donde H_0 es el parámetro de Hubble hoy en día² y $z_L = [a(t_0) - a(t_L)]/a(t_L)$. Lo anterior corresponde a un ángulo subtendido de $1,6^\circ$ en el mapa de la RCF [Weinberg, 2008]. Es decir, la RCF debería tener zonas que subtienden un ángulo de $1,6^\circ$ con una misma temperatura. Puesto que no se

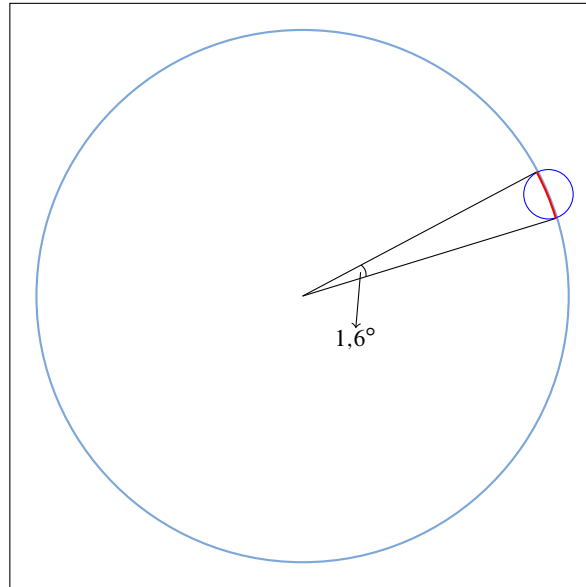


Figura 1.1 **Representación gráfica del problema de horizonte.** La circunferencia de color azul claro representa el tamaño del Universo observable hoy en día, mientras que la circunferencia pequeña de color azul representa la región causalmente conectada durante la época de la última dispersión. En color rojo se muestra la región que se observaría actualmente con una misma temperatura en el mapa de temperatura de la RCF. Las regiones contiguas a esta última no tienen ninguna relación, por lo tanto no se espera que sus temperaturas sean iguales. En conclusión, la cosmología estándar predice un mapa de temperatura altamente anisótropo, en contraste con las observaciones.

alcanzó el equilibrio termodinámico entre zonas, la temperatura de cada una de ellas debe ser diferente (véase la figura 1.1). No obstante, la RCF posee una alta homogeneidad e isotropía.

¹El horizonte de partículas en una época dominada por la materia o por la radiación es $3t$ o $2t$ respectivamente.

² t_0 representa el tiempo hoy en día y t_L el tiempo durante la última dispersión.

1 Cosmología estándar

Este problema se resuelve si antes de que comience la historia térmica del Universo existe una época que logre conectar el Universo causalmente y así lograr un equilibrio termodinámico previo. En esta época el factor de escala es $a \propto e^{H_I t}$, con H_I constante³. Reemplazando en (1.1.7) se obtiene:

$$d_{\text{inf}}(t_L) = \frac{a(t_L)}{a_I H_I} (e^{\mathcal{N}} - 1), \quad (1.1.8)$$

en donde $\mathcal{N} = H_I(t_I - t_{I_0})$ es el monto de inflación. La condición para resolver el problema de horizonte es:

$$e^{\mathcal{N}} > \frac{a_I H_I}{a_0 H_0}, \quad (1.1.9)$$

de tal manera que $d_{\text{inf}} > d_L$. El monto de inflación \mathcal{N} , para que se cumpla (1.1.9) debe ser mayor a 62 [Lyth & Liddle, 2009; Weinberg, 2008].

Problema de Planitud

Las mediciones de la RCF y de las supernovas tipo Ia reportan que $\Omega_{K0} = |K|/(a_0^2 H_0^2) < 1$ [Ade *et al.*, 2013a; Hinshaw *et al.*, 2013]. Durante la época dominada por la radiación el término $|K|/(a^2 H^2)$ creció como $t^{1/2}$, y en la época dominada por la materia creció como $t^{2/3}$. Si en la época actual Ω_{K0} es menor que uno, entonces al principio de la historia térmica era todavía mucho menor que uno. Por ejemplo, en la época de nucleosíntesis se requiere que $|\rho_{\text{nucl}}/(3m_p^2 H_{\text{nucl}}^2) - 1| \lesssim 10^{-16}$ [Lyth & Liddle, 2009], i.e. se requiere hacer un ajuste fino. Existe una explicación la cual no necesita de un ajuste fino para que actualmente $\Omega_{K0} < 1$. Ésta consiste en asumir que al principio existió una época caracterizada por un parámetro de Hubble constante (o casi constante), H_I . Para cuando finalizó esta época $a(t_I) = a(t_{I_0})e^{H(t_I - t_{I_0})}$ y por lo tanto Ω_K era del orden de $e^{-2\mathcal{N}}$. El valor actual sería entonces:

$$\frac{|K|}{a_0^2 H_0^2} \approx e^{-2\mathcal{N}} \frac{a_I^2 H_I^2}{a_0^2 H_0^2}. \quad (1.1.10)$$

Para solucionar el problema se requiere que $e^{\mathcal{N}} > (a_I H_I)/(a_0 H_0)$, lo cual corresponde al mismo requerimiento para solucionar el problema de horizonte (véase la Ec. (1.1.9)).

Inflación del Tipo Rodadura Lenta

La versión original de inflación de Guth está inspirada en un modelo de gran unificación. En esta versión, el campo escalar se mantiene durante un tiempo en un mínimo local, causando que la energía del vacío sea constante, lo que a su vez da lugar a una expansión acelerada caracterizada por un parámetro de Hubble H constante. Este período de expansión acelerada llega a su fin cuando el campo escalar abandona el mínimo local mediante efecto túnel, para finalmente dirigirse al mínimo global que corresponde al Universo actual. Sin embargo, esta versión de inflación causa que el Universo sea altamente inhomogéneo y anisótropo [Guth &

³Los subíndices I e I_0 indican el fin y el comienzo de inflación respectivamente.

1 Cosmología estándar

Weinberg, 1981]. En la Ref. [Linde, 1982] se presenta una nueva versión de inflación cuyo lagrangiano está descrito por:

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2}\varphi_{,\mu}\varphi^{,\mu} - V(\varphi). \quad (1.1.11)$$

En la métrica de FRW el campo φ es homogéneo; por lo tanto la ecuación del campo es:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0, \quad (1.1.12)$$

en donde la prima indica diferenciación con respecto a φ . Del lagrangiano en la ecuación (1.1.11) se puede deducir que la densidad de energía y la presión asociadas son $\rho = (1/2)\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)$ y $p = (1/2)\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)$ respectivamente.

Ahora, el requerimiento de que el parámetro de Hubble sea cuasi-constante, se expresa como la condición de que la variación relativa de H , durante un tiempo de Hubble, $1/H$, debe ser mucho menor que uno:

$$\left| \frac{\dot{H}}{H} \right| \frac{1}{H} = \frac{|\dot{H}|}{H^2} \ll 1. \quad (1.1.13)$$

Durante inflación la densidad energía asociada al campo escalar domina, por lo tanto, se desprecia el término relacionado con K en la ecuación (1.1.5). Ahora, a partir de las ecuaciones (1.1.5) y (1.1.12) se obtiene que

$$\dot{H} = -\frac{1}{2m_p^2}\dot{\varphi}^2. \quad (1.1.14)$$

Por consiguiente la condición (1.1.13) es equivalente a:

$$\dot{\varphi}^2 \ll |V(\varphi)|, \quad (1.1.15)$$

lo que a su vez conlleva a $p \approx -\rho$, i.e, el campo escalar se comporta aproximadamente como la energía de vacío. Adicionalmente, para que la variación en el tiempo del campo escalar sea realmente lenta, se exige que la variación relativa de $\dot{\varphi}$, durante un tiempo de Hubble, sea mucho menor que uno:

$$\left| \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \right| \frac{1}{H} \ll 1, \quad (1.1.16)$$

por lo cual, se puede despreciar el término $\ddot{\varphi}$ en la ecuación (1.1.12), y así

$$\dot{\varphi} = -\frac{V'(\varphi)}{3H}. \quad (1.1.17)$$

Lo anterior implica que (1.1.13) se pueda expresar como:

$$\epsilon = \frac{m_p^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1. \quad (1.1.18)$$

1 Cosmología estándar

Esta última se denomina la primera condición de rodadura lenta. Al derivar con respecto al tiempo la expresión (1.1.17), e imponer que $|\ddot{\varphi}| \ll |V'(\varphi)|$ se obtiene:

$$|\eta| = \left| m_p^2 \frac{V''}{V} \right| \ll 1. \quad (1.1.19)$$

Esta última expresión se denomina la segunda condición de rodadura lenta. Las condiciones anteriores aseguran que el campo rueda lentamente por el potencial y, en consecuencia, se puede generar el monto de inflación necesario para solucionar los problemas clásicos de la cosmología estándar. Las condiciones $\epsilon \ll 1$ y $|\eta| \ll 1$, aparte de asegurar la «planitud» del potencial, son necesarias para generar una perturbación en la curvatura viable durante inflación [Lyth & Liddle, 2009] y así generar la estructura a gran escala observada en el Universo.

1.1.3. Lagrangiano de punto y la formulación de Hamilton-Jacobi

Se presentará a continuación un método para el análisis de modelos cosmológicos, el cual consiste básicamente en hacer una analogía con mecánica clásica [Capozziello & De Felice, 2008]. Lo anterior permite que los métodos conocidos en la mecánica clásica sean utilizados para extraer fácilmente las consecuencias de los modelos cosmológicos en cuestión. Para esto, se reemplaza el lagrangiano original, el cual posee infinitos grados de libertad, por un lagrangiano equivalente con un número finito de grados de libertad. Este lagrangiano, el cual será llamado el lagrangiano de punto, puede ser visto como el lagrangiano de un sistema mecánico.

En particular, este método puede ser utilizado para estudiar la dinámica inflacionaria. Primeramente, el elemento de línea durante inflación, dado por la métrica de FRW plana, se expresa de la siguiente forma: ⁴

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha(t)}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (1.1.20)$$

Para obtener el lagrangiano de punto se necesita la acción completa del modelo, la cual es:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{2} \varphi_{,\mu} \varphi^{,\mu} - V(\varphi) \right]. \quad (1.1.21)$$

Al reemplazar los valores correspondientes de los términos en la métrica dada por (1.1.20), y eliminar las segundas derivadas con respecto al tiempo mediante integración por partes se obtiene:

$$S = \int dt e^{3\alpha} \left[-3m_p^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right]. \quad (1.1.22)$$

De aquí, el lagrangiano de punto es:

$$L_p = e^{3\alpha} \left[-3m_p^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \right]. \quad (1.1.23)$$

⁴El parámetro de expansión se reexpresa mediante la función del tiempo $\alpha(t)$.

1 Cosmología estándar

La restricción en el hamiltoniano $H_p = 0$, constituye la primera ecuación de Friedmann [Lidsey *et al.*, 1997]:

$$\frac{1}{6m_p^2} p_\alpha^2 + p_\phi^2 + 2e^{6\alpha} V(\phi) = 0, \quad (1.1.24)$$

en donde $p_\alpha = -6m_p^2 e^{e\alpha} \dot{\alpha}$ y $p_\phi = e^\alpha \dot{\phi}$. A partir de esta última expresión se obtiene la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{1}{6m_p^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 + 2e^{6\alpha} V(\phi) = 0, \quad (1.1.25)$$

cuya solución esta dada por:

$$S = -2m_p^2 e^{3\alpha} H(\phi), \quad (1.1.26)$$

en donde $H(\phi)$ satisface la siguiente ecuación diferencial ordinaria [Lidsey *et al.*, 1997]:

$$\left(\frac{dH}{d\phi} \right)^2 - \frac{2}{3m_p^2} H^2(\phi) = -\frac{1}{2m_p^4} V(\phi). \quad (1.1.27)$$

Esta expresión es llamada la ecuación de Hamilton-Jacobi [Lyth & Liddle, 2009] y permite definir unos nuevos parámetros de rodadura lenta:

$$\epsilon_{\text{HJ}} = 2m_p^2 \left(\frac{H'(\phi)}{H(\phi)} \right)^2 = -\frac{\dot{H}}{H}, \quad \eta_{\text{HJ}} = 2m_p^2 \frac{H''(\phi)}{H(\phi)} = -\frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}}, \quad (1.1.28)$$

las cuales en el límite de rodadura lenta tienden a $\epsilon_{\text{HJ}} \rightarrow \epsilon$ y $\eta_{\text{HJ}} \rightarrow \eta - \epsilon$. La segunda igualdad en las ecuaciones de la expresión (1.1.28) se obtienen a partir de (1.1.27) y (1.1.14) respectivamente. Se observa que el papel que tiene el potencial en las condiciones de rodadura lenta, vistas en la subsección anterior, es ahora reemplazado por una versión geométrica en donde el parámetro de Hubble cumple el papel principal.

1.2. Variables cinemáticas

Una congruencia⁵ tipo tiempo permite hacer una descomposición 1 + 3 del espacio tiempo⁶, y así expresar las ecuaciones de Einstein como un sistemas que incluye las «derivadas temporales» de cantidades llamadas *variables cinemáticas*. La cuadrivelocidad de la congruencia se denotará por u^μ y la cuadiaceleración $a_\mu = u_{\mu;\nu} u^\nu$. La congruencia tipo tiempo representa observadores comóviles, y por los tanto la derivada covariante en dirección de la congruencia se pueden interpretar como una derivada temporal, $\dot{A}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu;\alpha} u^\alpha$. El sistema también incluye ecuaciones de ligaduras las cuales contienen las variables y únicamente las derivadas

⁵Una congruencia es un conjunto de curvas que no se interceptan en una región del espacio-tiempo.

⁶El formalismo 1+3 se diferencia del formalismo 3+1 en que las derivadas temporales de este último son las derivadas de Lie en dirección de la congruencia, y en el primero las derivadas temporales son las derivadas covariantes a lo largo de la congruencia.

1 Cosmología estándar

ortogonales a la congruencia o «derivadas espaciales». Se mostrará que este procedimiento permite plantear fácilmente un *sistema dinámico*.

Para observar todo lo anterior, primero se define un operador proyección ortogonal a la congruencia:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu, \quad (1.2.1)$$

el cual permite la definición de «derivada espacial»:

$$\tilde{\nabla}_\nu A^{\alpha_1 \dots}_{\beta_1 \dots} = h^\mu_\nu h^{\alpha_1}_{\tau_1} h^{\lambda_1}_{\beta_1} A^{\tau_1 \dots}_{\lambda_1 \dots; \mu} \quad (1.2.2)$$

Se puede demostrar que $u_{\mu; \nu} = h^\alpha_\mu h^\beta_\nu u_{\alpha; \beta} - a_\mu u_\nu$. A continuación, se descompone la derivada covariante en la parte simétrica y sin traza, la parte antisimétrica y la traza:

$$u_{\mu; \nu} = \zeta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu} + a_\mu u_\nu, \quad (1.2.3)$$

en donde

$$\Theta = u^\mu_{; \mu}, \quad (1.2.4)$$

$$\zeta_{\mu\nu} = u_{(\mu; \nu)} + \frac{1}{3} \Theta h_{\mu\nu} + \dot{u}_{(\mu} u_{\nu)}, \quad (1.2.5)$$

$$\omega_{\mu\nu} = u_{[\mu; \nu]} + \dot{u}_{[\mu} u_{\nu]}. \quad (1.2.6)$$

El tensor $\zeta_{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos de corte y $\omega_{\mu\nu}$ es el tensor de vorticidad; ambos tensores son ortogonales a la congruencia. El tensor de esfuerzos de corte indica la tasa de cambio de la magnitud de un vector desplazamiento ortogonal a la congruencia, de acuerdo a su dirección; cuando el tensor esfuerzo de corte es nulo la expansión es isótropa. La presencia de campos vectoriales implica una dirección preferida, por lo tanto es de esperarse que en los modelos que incluyen campos vectoriales, el tensor de esfuerzo de corte no sea igual a cero. El tensor de vorticidad indica el cambio en la dirección del vector ortogonal. El esfuerzo de corte ζ es la magnitud del tensor $\zeta_{\mu\nu}$ i.e.

$$\zeta^2 = \frac{1}{2} \zeta_{\mu\nu} \zeta^{\mu\nu}. \quad (1.2.7)$$

El escalar Θ es el escalar de expansión y está relacionado con el parámetro de Hubble mediante:

$$H = \frac{1}{3} \Theta. \quad (1.2.8)$$

El vector ω^μ es el vector de vorticidad:

$$\omega^\mu = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} u_\nu \omega_{\alpha\beta}, \quad (1.2.9)$$

y $\omega = \omega^\alpha \omega_\alpha$ es la magnitud del vector de vorticidad. Todas las cantidades anteriores son las variables cinemáticas de una métrica asociadas con la congruencia tipo tiempo u^μ .

1 Cosmología estándar

El tensor proyección permite descomponer el tensor energía-impulso de la siguiente manera:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p h_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} + 2q_{(\mu} u_{\nu)}, \quad (1.2.10)$$

en donde,

$$\rho = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu, \quad (1.2.11)$$

$$p = \frac{1}{3} T_{\mu\nu} h^{\mu\nu}, \quad (1.2.12)$$

$$\pi_{\mu\nu} = (h_\mu^\alpha h_\nu^\beta + \frac{1}{3} h_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}) T_{\alpha\beta}, \quad (1.2.13)$$

$$q_\mu = -h_\mu^\alpha u^\beta T_{\alpha\beta}. \quad (1.2.14)$$

Para los observadores comóviles, ρ es la densidad de energía relativista, p la presión relativista, $\pi_{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos anisótropos y q_μ el flujo de calor relativo a u_μ

Finalmente, las ecuaciones de Einstein en la forma:

$$m_p^2 R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}, \quad (1.2.15)$$

pueden descomponerse en componentes paralelas y perpendiculares respecto a la congruencia:

$$R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \frac{1}{2m_p} (\rho + 3p), \quad (1.2.16)$$

$$R_{\mu\nu} u^\mu h_\alpha^\nu = -\frac{1}{m_p} q_\alpha, \quad (1.2.17)$$

$$R_{\mu\nu} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu = \frac{1}{2m_p} (\rho - p) h_{\alpha\beta} + \frac{1}{m_p} \pi_{\alpha\beta}. \quad (1.2.18)$$

La identidad de Ricci

$$u_{\alpha;\mu\nu} - u_{\alpha;\nu\mu} = R_{\alpha\tau\nu\mu} u^\tau, \quad (1.2.19)$$

y (1.2.3) implican que las ecuaciones anteriores son funciones de las variables cinemáticas.

1.2.1. Ecuaciones de Einstein en el formalismo de la tétrada

En esta subsección se mostrará como expresar las ecuaciones de Einstein respecto a una base noordenada y su relación con las variables cinemáticas. Los vectores base coordinados se denotarán por $\{\partial/\partial x^\mu\}$. Un vector \mathbf{A} con respecto a esta base tiene componentes A^μ :

$$\mathbf{A} = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (1.2.20)$$

1 Cosmología estándar

También existe una base coordenada de 1-formas la cual se denotará por $\{dx^\mu\}$. La base de vectores y de 1-formas satisfacen [Hawking & Ellis, 1973]:

$$\left\langle dx^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle = \delta_\nu^\mu \quad (1.2.21)$$

El conmutador de los vectores base coordenados es nulo:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right] = 0 \quad (1.2.22)$$

Para diferenciar las bases, los subíndices y superíndices entre paréntesis indicarán bases no coordenadas. Cualquier conjunto de vectores linealmente independientes es una base para el espacio vectorial, por lo tanto podemos elegir una base de vectores $\{\mathbf{e}_{(\mu)}\}$ que no cumpla (1.2.22). Al igual que en el caso coordenado, existe una base de 1-formas $\{\mathbf{e}^{(\mu)}\}$. Un tensor \mathbf{T} se puede expresar con respecto a una base (coordenada o no-coordenada) como:

$$\mathbf{T} = T^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \mathbf{e}_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{\nu_1} \otimes \mathbf{e}^{\nu_2} \dots \quad (1.2.23)$$

Las componentes de los miembros de las bases no-coordenadas con respecto a la base coordenadas están dadas por:

$$\mathbf{e}_{(\mu)} = E_{(\mu)}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad \mathbf{e}^{(\mu)} = E^{(\mu)}_\nu dx^\nu. \quad (1.2.24)$$

Las expresiones (1.2.23) y (1.2.24) implican que la matriz $E_{(\nu)}^\mu$ y su inversa $E^{(\mu)}_\nu$, son las matrices de transformación de las componentes de un tensor de una base coordenadas a una no-coordenada:

$$A^{(\mu)}_{(\nu)} = E_\alpha^{(\mu)} E_{(\nu)}^\beta A^\alpha_\beta \quad (1.2.25)$$

Como se verá a continuación, el conmutador de los vectores bases no-coordenados contiene las variables dinámicas del campo gravitatorio [Wainwright & Ellis, 2005]:

$$[\mathbf{e}_{(\mu)}, \mathbf{e}_{(\nu)}] = \gamma^{(\alpha)}_{(\mu)(\nu)} \mathbf{e}_{(\alpha)} \quad (1.2.26)$$

Cuando las componentes de la métrica con respecto a una base no-coordenada son iguales a $\eta_{(\mu)(\nu)}$, la base se denomina *una tétrada o base ortonormal*:

$$g_{\mu\nu} E_{(\alpha)}^\mu E_{(\beta)}^\nu = \eta_{(\alpha)(\beta)} \quad (1.2.27)$$

Las componentes de la derivada covariante con respecto a la tétrada son:

$$A^{(\mu)}_{;(\nu)} = \mathbf{e}_{(\nu)}(A^{(\mu)}) + \Gamma^{(\mu)}_{(\alpha)(\nu)} A^{(\alpha)} \quad (1.2.28)$$

en donde $\mathbf{e}_{(\mu)} = E_{(\mu)}^\alpha \partial_\alpha$ y:

$$\Gamma^{(\mu)}_{(\alpha)(\nu)} = \frac{1}{2} \eta^{(\mu)(\beta)} \left[\gamma^{(\tau)}_{(\nu)(\alpha)} \eta_{(\beta)(\tau)} + \gamma^{(\tau)}_{(\beta)(\nu)} \eta_{(\alpha)(\tau)} - \gamma^{(\tau)}_{(\alpha)(\beta)} \eta_{(\nu)(\tau)} \right] \quad (1.2.29)$$

1 Cosmología estándar

Las componentes del tensor de Riemann son:

$$R^{(\mu)}_{(v)(\alpha)(\beta)} = \mathbf{e}_{(\alpha)} \left(\Gamma^{(\mu)}_{(v)(\beta)} \right) - \mathbf{e}_{(\beta)} \left(\Gamma^{(\mu)}_{(v)(\alpha)} \right) + \Gamma^{(\mu)}_{(\tau)(\alpha)} \Gamma^{(\tau)}_{(v)(\beta)} - \Gamma^{(\mu)}_{(\tau)(\beta)} \Gamma^{(\tau)}_{(v)(\alpha)} + \Gamma^{(\mu)}_{(v)(\tau)} \gamma^{(\tau)}_{(\alpha)(\beta)}. \quad (1.2.30)$$

A partir de (1.2.15), (1.2.29) y (1.2.30), se deduce que los conmutadores (1.2.26) son las variables dinámicas relacionadas con el campo gravitatorio

Puesto que la congruencia es tipo tiempo, se puede elegir a la cuadrivelocidad \mathbf{u} asociada a la congruencia como el primer vector de la tétrada \mathbf{e}_0 . De esta manera, la tétrada está constuida por $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}_{(i)}\}$. Los conmutadores (1.2.26) quedan finalmente expresadas en términos de las variables cinématicas [Wainwright & Ellis, 2005] de la siguiente forma:

$$\gamma^a_{0(b)} = -\zeta^a_{(b)} - H\delta^a_{(b)} - \varepsilon^a_{(b)(c)}(\omega^{(c)} + \Omega^{(c)}), \quad (1.2.31)$$

$$\gamma^0_{0(a)} = \dot{u}_{(a)}, \quad \gamma^0_{(a)(b)} = -2\varepsilon_{(a)(b)(c)}\omega^{(c)}, \quad (1.2.32)$$

$$\gamma^a_{(b)(c)} = \varepsilon_{(b)(c)(d)}n^{(a)(d)} + A_{(b)}\delta^a_{(c)} - A_{(c)}\delta^a_{(b)}, \quad (1.2.33)$$

en donde,

$$\Omega^{(a)} = \frac{1}{2}\varepsilon^{(a)(b)(c)}e^\mu_{(b)}e_{(c)\mu;\nu}u^\nu, \quad (1.2.34)$$

siendo $n_{(a)(b)}$ es un tensor simétrico tridimensional y $A^{(a)}$ un vector tridimensional. De esta manera, al reemplazar las expresiones anteriores en (1.2.29), (1.2.30) se obtienen las ecuaciones de Einstein (1.2.15) en términos de las variables cinemáticas. Si la congruencia es geodésica, $a^{(a)} = 0$ y la componente 00, la componente $(a)(b)$ sin traza, la traza y la componente $0(a)$ de las ecuaciones de Einstein son:

$$D_0H = -H^2 - \frac{2}{3}\zeta^2 + \frac{2}{3}\omega^2 - \frac{1}{6}(\rho + 3p), \quad (1.2.35)$$

$$D_0\zeta_{(a)(b)} = -3H\zeta_{(a)(b)} + 2\varepsilon^{(c)(d)}_{((a)\zeta(b))(c)}\Omega_{(d)} - 2\omega_{((a)}\Omega_{(b)}) + \frac{2}{3}\omega^{(c)}\Omega_{(c)}\delta_{(a)(b)} - {}^3S_{(a)(b)} + \pi_{(a)(b)}, \quad (1.2.36)$$

$$\rho = 3H^2 - \zeta^2 + \omega^2 - 2\omega_{(a)}\Omega^{(a)} + \frac{1}{2}{}^3R, \quad (1.2.37)$$

$$q_{(a)} = 2D_{(a)}H - (D_{(b)} - 3A_{(b)})\zeta^b_{(a)} - \varepsilon^{(b)(c)}_{(a)}\zeta^d_{(b)}n_{(d)(c)} + \varepsilon^{(b)(c)}_{(a)}(D_{(b)} - A_{(b)})\omega_{(c)} - n^{(b)}_{(a)}\omega_{(b)}, \quad (1.2.38)$$

en donde,

$$D_{(\mu)} = e^\nu_{(\mu)}\partial_\nu, \quad (1.2.39)$$

$${}^3S_{(a)(b)} = D_{((a)}A_{(b)}) - \frac{1}{3}D_{(c)}A^{(c)}\delta_{(a)(b)} - (D_{(c)} - 2A_{(c)})n_{(d)((a)}\varepsilon^{(c)(d)}_{(b)}) + b_{(a)(b)} - \frac{1}{3}b^{(c)}_{(c)}\delta_{(a)(b)}, \quad (1.2.40)$$

1 Cosmología estándar

$${}^3R = 4D_{(a)}A^{(a)} - 6A_{(a)}A^{(a)} - \frac{1}{2}b_{(a)}^{(a)}, \quad (1.2.41)$$

con

$$b_{(a)(b)} = 2n_{(a)}^{(c)}n_{(c)(b)} - n_{(c)}^{(c)}n_{(a)(b)}. \quad (1.2.42)$$

Cuando la métrica no depende de las coordenadas espaciales, como en el caso de los espaciotiempos de Bianchi, las ecuaciones de campo no contienen los términos relacionados con el operador $D_{(a)}$. Por consiguiente, las ecuaciones de campo solo contienen derivadas temporales D_0 , y constituyen un sistema dinámico.

2

Sistemas Dinámicos

En el capítulo anterior se mostró que si se asume que el espacio-tiempo y los campos son homogéneos, las ecuaciones de Einstein se convierten en ecuaciones diferenciales ordinarias. De esta manera, el sistema de ecuaciones de campo es un sistema dinámico. De aquí la importancia de la teoría de los sistemas dinámicos en el estudio de cosmologías homogéneas pero, en general, anisótropas.

2.1. Definiciones generales

Un sistema dinámico consiste en un espacio geométrico, llamado el espacio de estados, con una regla para la evolución en el tiempo de los elementos que lo conforman [Wainwright & Ellis, 2005]. La regla de evolución temporal puede ser una función discreta, un algoritmo o una ecuación diferencial:

$$\dot{\chi} = f(\chi, t), \quad (2.1.1)$$

en donde χ describe las coordenadas del espacio geométrico y $f(\chi, t)$ es un campo vectorial. En espacio-tiempos de Bianchi el espacio de fase esta conformado por las variables cinemáticas, los campos y sus primeras derivadas con respecto al tiempo. Cuando f en (2.1.1) no depende del tiempo, el sistema se denomina *autónomo*. La solución de la ecuación (2.1.1) con condición inicial χ_0 , se conoce como la *órbita* que pasa por χ_0 . Los puntos que satisfacen:

$$f(\chi_c, t) = 0, \quad (2.1.2)$$

se denominan *puntos críticos*, *puntos de equilibrio* o *puntos estacionarios*. La órbita que pasa por un punto crítico es este mismo, i.e. el sistema permaneció y permanecerá en el mismo estado.

Existen ciertos conjuntos de gran utilidad llamados *conjuntos invariantes*. Estos conjuntos tiene la propiedad de que cualquier órbita que pasa por uno de sus elementos siempre está contenida dentro del conjunto. La dinámica dentro de un conjunto invariante se caracteriza

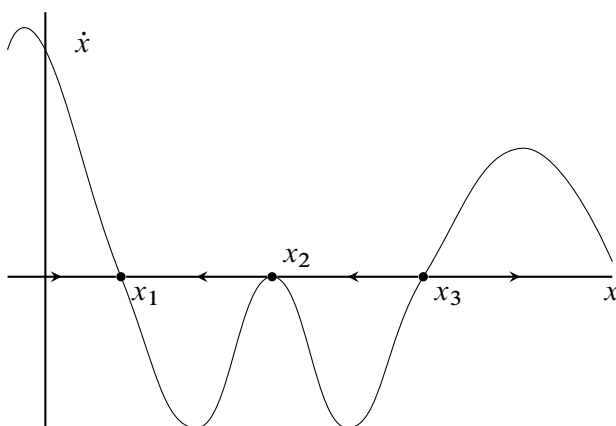


Figura 2.1 **Análisis gráfico de estabilidad unidimensional.** Se presenta la gráfica de $\dot{x} = f(x)$ versus x . Se pueden observar tres puntos críticos (x_1, x_2, x_3). En la vecindad del primer punto crítico la «velocidad» a la izquierda del punto es positiva, por lo tanto si el sistema se encuentra en esta zona se dirigirá a x_1 . A la derecha de x_1 la «velocidad» es negativa, por consiguiente cuando el sistema entra en allí se dirigirá a la izquierda aproximándose al x_1 . En conclusión, el primer punto de equilibrio es estable. Haciendo un análisis similar, se deduce que x_2 y x_3 son inestables.

porque las órbitas permanecen «encerradas» dentro de él. Se puede demostrar que si existe una función $h(\chi)$ tal que

$$\dot{h} = \nabla h \cdot f(\chi) = h(\chi) z(\chi), \quad (2.1.3)$$

en donde $z(\chi)$ es una función continua, entonces $h > 0, h < 0, h = 0$ son conjuntos invariantes del sistema dinámico [Wainwright & Ellis, 2005].

2.2. Estabilidad

La estabilidad de las soluciones alrededor de un punto crítico puede ser analizada fácilmente en sistemas unidimensionales. Si $\dot{x} = f(x)$ es la ecuación diferencial que describe la dinámica del sistema y x_c es un punto crítico, el criterio general para determinar la estabilidad es el cambio de signo de la función cuando pasa por el punto crítico. Cuando $f(x)$ cambia de signo positivo a negativo es estable, para todos los otros casos es inestable. Una condición suficiente para la estabilidad es que $f'(x_c) < 0$. Esta condición es suficiente mas no necesaria, ya que si $f(x_c) = 0$, puede ocurrir que el punto sea estable. El hecho de que la derivada sea igual a cero implica que x_c es un máximo, un mínimo o un punto de inflexión. Un máximo o un mínimo son inestables. Pero, un punto de inflexión puede ser estable si el cambio de signo es correcto. La gráfica de $f(x)$ permite determinar de manera definitiva la estabilidad de los puntos críticos (vease figura 2.1). La definición formal de estabilidad de soluciones alrededor de puntos de equilibrio se encuentra en la siguiente clasificación [Arnold & Silverman, 1973; José & Saletan, 1998]:

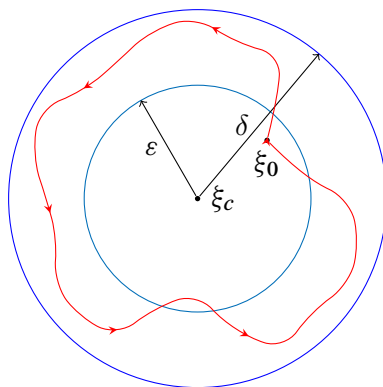


Figura 2.2 **Estabilidad de Lyapunov.** Esta figura ilustra las condiciones para que una órbita sea estable de Lyapunov. En el instante $t = t_0$ la órbita estuvo dentro de la region $\epsilon > \xi > 0$, se observa que para tiempos posteriores la órbita se mantiene dentro de la zona $\delta > \xi > 0$, por consiguiente es estable de Lyapunov.

Estabilidad de Lyapunov. El punto χ_c es estable de Lyapunov si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|\chi_c - \chi_0| < \delta$, entonces $|\chi_c - \chi| < \epsilon$. Dicho de otra forma, una órbita que en algún tiempo t_0 estuvo cerca del punto estacionario, se mantendrá cerca de él en el futuro $t > t_0$.

Estabilidad asintótica. El punto χ_c es asintóticamente estable si cumple dos condiciones. Primero, ser estable de Lyapunov, y segundo si cumple que siempre existe un $\alpha > 0$ tal que $|\chi_c - \chi_0| < \alpha$, el cual implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} |\chi_c - \chi| = 0$. Es decir, un punto χ_c es asintóticamente estable si todas las órbitas que estuvieron en algún tiempo cerca, convergen a él. La estabilidad de las soluciones permite hacer un análisis cualitativo de ecuaciones diferenciales ordinarias. Es de especial interés el criterio asintótico, ya que permite hallar los estados futuros de órbitas que inician estados típicos sin preocuparse por el comportamiento intermedio. También permite encontrar estados transitorios intermedios denominados puntos de silla.

2.2.1. Estabilidad alrededor de puntos hiperbólicos

El criterio para sistemas con varias dimensiones es una generalización del criterio unidimensional. En este último, la derivada o en otras palabras la linealización de la ecuación, permite obtener una condición suficiente de estabilidad. En el caso multidimensional, a partir del jacobiano de (2.1.1) se deducen las condiciones suficientes de estabilidad [José & Saletan, 1998]. Al igual que en el caso unidimensional, este método no provee condiciones suficientes y necesarias. Cuando la «derivada es cero», es necesario recurrir al teorema de la variedad central, el cual se presentará en una sección posterior. El primer paso consiste en realizar la transformación de coordenadas $\zeta = \chi - \chi_c$, con lo cual la ecuación (2.1.1) queda expresada de la siguiente manera:

$$\dot{\zeta} = f(\chi) = f(\chi_c + \zeta) = g(\zeta). \quad (2.2.1)$$

2 Sistemas Dinámicos

A continuación, se expande en una serie de Taylor y se toman únicamente los términos a primer orden:

$$\dot{\zeta}^i = g^i(0) + \left. \frac{\partial g^i(\zeta^j)}{\partial \zeta^k} \right|_{\zeta=0} \zeta^k + \mathcal{O}(\zeta^2) = A^i_k \zeta^k. \quad (2.2.2)$$

Si se denota el vector ζ^i por \mathbf{x} y la matriz A^i_j por \mathbb{A} , la solución de la Ec. (2.2.2) está dada por:

$$\mathbf{x} = e^{\mathbb{A}t} \mathbf{x}_0, \quad (2.2.3)$$

en donde \mathbf{x}_0 representa las n condiciones iniciales.

En general, la matriz \mathbb{A} posee valores propios imaginarios $\lambda_k = \alpha_k + \beta_k i$. La estabilidad o no estabilidad asintótica de los puntos críticos está determinada por el signo de la parte real. Cuando $\alpha_k > 0$ el punto es inestable y cuando $\alpha_k < 0$ el punto es estable asintóticamente. Cuando $\alpha_k = 0$, el punto se denomina no hiperbólico y se deben tomar términos de orden superior a uno en la expansión (2.2.2) para determinar la estabilidad [José & Saletan, 1998]. Por último, si algunos valores propios poseen una parte real positiva y otros una parte real negativa, el punto crítico es inestable y éste se denomina punto de silla. Todo lo anterior se puede resumir en el siguiente teorema: si todos los valores propios de \mathbb{A} tienen partes reales negativas, entonces el punto crítico alrededor del cual se hizo la linealización es asintóticamente estable [Wiggins, 2000]. Si el punto crítico es hiperbólico el *teorema de Hartman-Grobman* garantiza que existe una vecindad alrededor del punto en donde las órbitas del sistemas lineal (2.2.2) son topológicamente equivalentes a las órbitas del sistema original, i.e. la solución lineal cerca del punto crítico no es más que una deformación continua de la solución no lineal [Perko, 2001; Wainwright & Ellis, 2005].

Los vectores propios de la matriz (2.2.2) generan ciertos subespacios de acuerdo con el signo de la parte real de sus correspondientes valores propios:

El subespacio estable	$E^s = \text{gen}(s_1, \dots, s_{n_s}),$
El subespacio inestable	$E^u = \text{gen}(u_1, \dots, u_{n_u}),$
El subespacio central	$E^c = \text{gen}(c_1, \dots, c_{n_c}),$

en donde $(s_{n_s}, u_{n_u}, c_{n_c})$, son los vectores propios cuyos valores propios tiene parte real negativa, positiva y cero, respectivamente. La suma de las dimensiones de estos subespacios es igual a la dimensión del espacio de fase n . Si $\mathbf{x}_0 \in E^s$, el sistema se acercará exponencialmente al origen. Por el contrario, si $\mathbf{x}_0 \in E^u$, el sistema se alejará exponencialmente del origen. Debido a que los subespacios son generados por vectores, estos son planos dentro del espacio de fase. El *teorema de la variedad o superficie invariante*, garantiza que existe:

Una variedad estable M^s tangente en el origen a E^s ,
Una variedad inestable M^u tangente en el origen a E^u ,
Una variedad central M^c tangente en el origen a E^c .

Por último, pueden existir superficies compuestas enteramente de puntos críticos que se denominan conjuntos de equilibrio M [Wainwright & Ellis, 2005]. Estos conjuntos son especiales

debido a que la matriz de linealización alrededor de cualquier punto en M tiene necesariamente un valor propio igual a cero. A pesar de que los puntos en un conjunto de equilibrio no son hiperbólicos, existe un teorema que permite analizar la estabilidad. Si existe una variedad compacta de puntos críticos M y si la matriz de linealización tiene $n - \dim M$ valores propios con parte real diferente de cero entonces existe una vecindad N alrededor de M tal que cualquier solución que pasa por N está en la variedad estable de algún punto en M . Por ejemplo, si existe una curva compacta de puntos críticos y los valores propios del jacobiano son todos negativos, excepto uno que es nulo, la curva M es un conjunto de puntos críticos estables.

2.3. Teorema de la variedad central

Cuando algún valor propio es nulo, y el punto crítico no pertenece a un conjunto de equilibrio, no es posible determinar la estabilidad del sistema a partir de la linealización. Se asume que el punto crítico ha sido trasladado al origen del sistema de coordenadas. El teorema de la variedad central local [Perko, 2001] afirma que si la matriz en la ecuación (2.2.2) tiene c valores propios con cero parte real y $s = n - c$ valores propios con parte negativa, entonces el sistema puede ser escrito en la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = C\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.3.1)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = P\mathbf{y} + \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2.3.2)$$

en donde $\zeta = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, C es una matriz cuadrada con c valores propios con parte real nula y P es una matriz cuadrada con s valores propios con parte real negativa. Además, existe un $\delta > 0$ y una función \mathbf{h} que define la variedad central localmente y satisface:

$$\nabla \mathbf{h}(\mathbf{x})[C\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}))] - P\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})) = 0. \quad (2.3.3)$$

La dinámica en la variedad central para $|\mathbf{x}| < \delta$ está dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = C\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})). \quad (2.3.4)$$

Debido a que existen valores propios negativos, el teorema de superficie invariante garantiza que existe un conjunto invariante cuyas órbitas convergen al origen. La pregunta consiste en qué sucede con las órbitas fuera de ella, es decir en la variedad central. La ecuación (2.3.4) responde a esta pregunta.

Para aplicar el teorema de la variedad central local se expresa $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ como una serie de potencias y se utiliza la expresión (2.3.3) hallar tantos coeficientes de la expansión como se quieran. Luego, este resultado se reemplaza en la ecuación (2.3.4) y se analiza la estabilidad. Si esta última ecuación indica que la dinámica en la variedad central es estable, el punto es estable. Básicamente el teorema de la variedad central local permite desacoplar las ecuaciones y analizar la dinámica en una superficie con una dimensión menor a la original. Cuando

2 Sistemas Dinámicos

la variedad central es unidimensional, la determinación de la estabilidad a partir de (2.3.4) es casi inmediata.

Para ilustrar cómo el teorema permite analizar la estabilidad se aplicará al siguiente sistema dinámico:

$$\dot{x} = x^2y - x^2y^2 \quad (2.3.5)$$

$$\dot{y} = -y + x^2 \quad (2.3.6)$$

El origen es un punto de equilibrio. Las correspondientes matrices son $C = 0$ y $P = -1$, y $\mathbf{F}(x, y) = x^2y - x^2y^2$, $\mathbf{G}(x, y) = x^2$. Existe un valor propio nulo y uno negativo. Se expresa $h(x)$ en una serie de potencias de x :

$$h(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \mathcal{O}(x^4), \quad (2.3.7)$$

y se reemplaza en (2.3.3):

$$(a_2 - 1)x^2 + a_3x^3 + \mathcal{O}(x^5) = 0. \quad (2.3.8)$$

Por lo tanto $a_2 = 1$, $a_3 = 0$ y la ecuación que gobierna la dinámica local en la variedad central es:

$$\dot{x} = x^2 + \mathcal{O}(x^5). \quad (2.3.9)$$

El término que domina localmente es x^2 , lo cual implica que el punto es inestable. Se observa en este ejemplo, que si alguna ecuación del sistema dinámico no posee término lineal es necesario utilizar el teorema. En el siguiente capítulo se encontrarán sistemas con esta característica.

2.4. Dinámica de inflación con un campo escalar

A continuación se analizará la dinámica de un campo escalar con un potencial arbitrario en la métrica de FRW. Las ecuaciones de campo se presentaron en la sección 1.1.2. Por su significado físico y debido a que las ecuaciones resultan ser polinomios, se reescribirán en términos de las variables $X = (1/\sqrt{2}m_p)\dot{\phi}$ y $Y = \sqrt{V}/m_p$:

$$H^2 = \frac{1}{3}(X^2 + Y^2) \quad (2.4.1)$$

$$\dot{H} = -\left(\frac{3}{2}H^2 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2\right), \quad (2.4.2)$$

$$\dot{X} = -3HX - \lambda Y^2, \quad (2.4.3)$$

$$\dot{Y} = \lambda XY, \quad (2.4.4)$$

en donde se asume que es constante el parámetro $\lambda = (m_p/\sqrt{2})(V_{,\phi}/V)$. Sin embargo, λ realmente evoluciona en el tiempo, y por lo tanto se deberá verificar que esta varíe lentamente

2 Sistemas Dinámicos

en el tiempo. Esencialmente, para que esto suceda se requiere que $\dot{\phi} \approx 0$. La ecuación de Friedmann (2.4.1) es una ligadura en las condiciones iniciales.

A continuación se definirán las siguientes variables normalizadas:

$$x = \frac{X}{H} = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{2}m_p H} \quad y = \frac{Y}{H} = \frac{\sqrt{V}}{m_p H} \quad (2.4.5)$$

Debido a que el tiempo cosmológico está definido solamente en el intervalo $[0, \infty)$, no se tiene un flujo completo para definir un sistema dinámico. Se define un nuevo tiempo N que corresponde al número de e-folds:

$$a = a_0 e^N \quad (2.4.6)$$

$$dN = H dt \quad (2.4.7)$$

En general, al realizar este cambio de variable las ecuaciones sufren la siguiente transformación:

$$f' = \frac{df}{dN} = \frac{d}{dN} \left(\frac{F}{H} \right) = \frac{\dot{F}}{H^2} + \epsilon f \quad (2.4.8)$$

en donde, ϵ es el parámetro de rodadura lenta definido en la sección 1.1.2, F representa las variables originales y f las nuevas variables normalizadas por el parámetro de Hubble. Debido a que la parte derecha de las ecuaciones dinámicas son funciones cuadráticas, este cambio logra desacoplar el parámetro de Hubble:

$$3 = x^2 + y^2, \quad (2.4.9)$$

$$H' = -H x^2 \quad (2.4.10)$$

$$x' = -3x - \lambda y^2 + x^3, \quad (2.4.11)$$

$$y' = \lambda x y + x^2 y, \quad (2.4.12)$$

Se utiliza la ecuación de Friedmann para eliminar la variable y de las ecuaciones:

$$x' = g(x) = -3x - 3\lambda + \lambda x^2 + x^3 \quad (2.4.13)$$

Los puntos de equilibrio son $x_c = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\lambda)$. El parámetro de rodadura lenta ϵ evaluado en cada uno de estos puntos es $(3, 3, \lambda^2)$, respectivamente. Un periodo de expansión acelerada corresponde a $\epsilon = q + 1 < 1$; por consiguiente, el único punto que puede corresponder a inflación es $x_c = -\lambda$. Para analizar la estabilidad se halla la derivada de (2.4.13) evaluada en el punto crítico:

$$g'(-\lambda) = -3 + \lambda^2 \quad (2.4.14)$$

Si $-\sqrt{3} < \lambda < \sqrt{3}$, o de manera equivalente si $\lambda^2 = \epsilon < 3$, el punto crítico es estable. Debido a que inflación de rodadura lenta se caracteriza por $\epsilon \ll 1$ esta es estable.

2.4.1. Evolución temporal de λ

Puesto que λ evoluciona en el tiempo, para que el análisis sea válido, el tiempo característico de evolución del sistema debe ser mucho menor que el tiempo de evolución del punto crítico. Esta condición se puede expresar como:

$$\left| \frac{1}{x_c} \frac{dx_c}{dN} \right| < \left| \frac{1}{x} \frac{dx}{dN} \right|_{x=-\lambda} = |-3 + \lambda^2|, \quad (2.4.15)$$

i.e. la velocidad del punto crítico es menor que la velocidad del sistema cerca del punto crítico. A partir de $\epsilon = \lambda$ y de la definición de los parámetros de rodadura lenta, se deduce que $\lambda'/\lambda = 2\epsilon - \eta$, y por lo tanto para que λ evolucione lentamente se requiere que:

$$|2\epsilon - \eta| < |3 - \epsilon|. \quad (2.4.16)$$

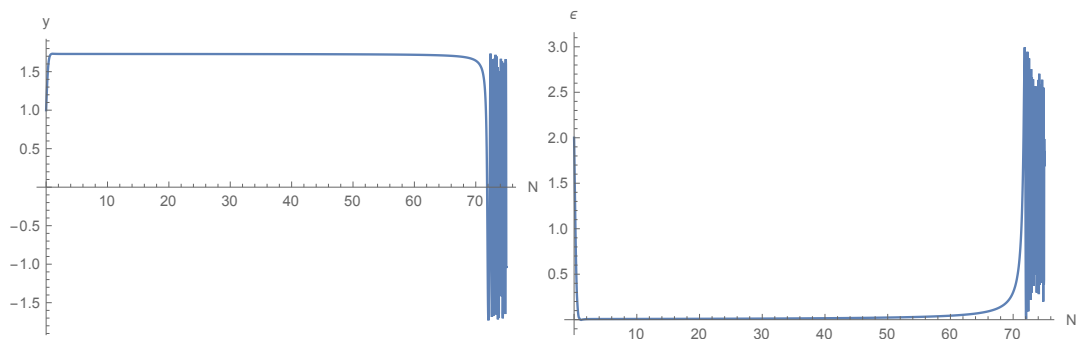
La condición anterior se satisface automáticamente con las condiciones de rodadura lenta. Por esta razón, se puede afirmar que inflación de rodadura lenta implica una lenta evolución de λ . Así, el análisis anterior es válido y se puede concluir que este tipo de inflación es estable. Finalmente, se observa que aunque λ evoluciona lentamente, existirá un tiempo cuando $\lambda^2 = 1$, lo cual indica que inflación tiene un fin¹. Lo anterior es de suma importancia ya que la inflación no debe ser eterna, o de lo contrario no sería posible un correcto desarrollo de la historia térmica del Universo.

El análisis anterior se hizo para un potencial arbitrario. Como ejemplo, se mostrará el análisis numérico con $V = m^2\phi^2/2$ para corroborar los resultados obtenidos. La condición para la existencia de inflación es $\lambda^2 < 1$, que en este caso es $2 < (\phi/m_p)^2$. Cuando esta condición no se cumple la trayectoria futura del sistema no incluye un periodo inflacionario. El punto $\lambda^2 = 3$ corresponde a un punto de bifurcación² en donde el sistema pasa de ser estable a inestable. Para que se solucionen los problemas clásicos de la cosmología se necesita que se empiece lo más alejado posible de este punto, i.e. $\lambda \ll 3$ o $2/3 \ll (\phi/m_p)^2$. La utilización de sistemas dinámicos permite obtener el conjunto de condiciones iniciales para que se puedan resolver los problemas de ajuste fino. Aunque no todas las condiciones iniciales inducen un periodo inflacionario, *no es necesario ajustar las condiciones iniciales* sino asegurarse de estar dentro del conjunto. Pueden hacerse perturbaciones de las condiciones y permanecer dentro del conjunto. En la figura 2.3 se muestran las gráficas de la solución numérica del modelo.

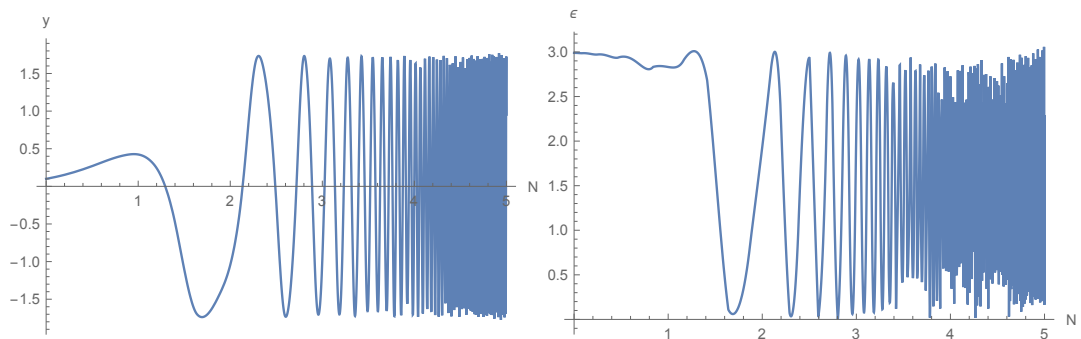
¹La evolución del parámetro λ crea una salida del estado inflacionario, de esta manera, inflación no es en realidad estable sino un punto de silla.

²En general un punto de bifurcación es aquel en donde las propiedades topológicas cambian.

2 Sistemas Dinámicos



(a) Solución numérica y vs N cuando $\lambda^2 \ll 3$. La energía potencial domina durante un periodo de más de 60 e-folds.
 (b) Si $\lambda^2 \ll 3$, se induce un periodo inflacionario finito que dura más de 60 e-folds. Se observa que esto corresponde cuando y domina.



(c) Solución numérica y vs N cuando $\lambda^2 > 1$. La energía potencial normalizada en promedio es cero.
 (d) Cuando no se cumple la condición $\lambda < 1$, ϵ oscila alrededor de $3/2$ y el sistema en promedio nunca experimenta por un periodo inflacionario.

Figura 2.3 Solución numérica de la dinámica del campo escalar. Evolución de las densidad de energía potencial normalizada por $m_p^2 H^2$, y del parámetro de rodadura lenta ϵ . Las subfiguras (a) y (b) muestran el comportamiento cuando se cumplen las condiciones necesarias para que se obtenga un periodo inflacionario del tipo rodadura lenta. Las otras dos subfiguras muestran el caso contrario.

3

Inflación con campos vectoriales

Como se vio anteriormente, inflación con un campo escalar provee solución a los problemas clásicos de la cosmología estándar. Sin embargo, no todas las observaciones son coherentes con esta versión de inflación. Uno de los problemas presentes consiste en la posible existencia de una dirección privilegiada en el Universo [Ade *et al.*, 2013b; Antoniou & Perivolaropoulos, 2010; Bennett *et al.*, 2011; Campanelli *et al.*, 2011; Groeneboom *et al.*, 2010; Hinshaw *et al.*, 2013]. Entre las soluciones propuestas a este problema se considera involucrar campos vectoriales a la dinámica inflacionaria [Adshead & Wyman, 2012; Dimopoulos, 2006, 2007; Dimopoulos & Karčiauskas, 2008; Dimopoulos *et al.*, 2009, 2010; Golovnev *et al.*, 2008; Maleknejad & Sheikh-Jabbari, 2013; Watanabe *et al.*, 2009; Yokoyama & Soda, 2008]. Los modelos que se presentarán más adelante están basados en este tipo de solución.

Por otro lado, cuando se cuantizan las teorías de gauge, se deben remover los grados de libertad no físicos, los cuales provienen de la invariancia de gauge de los modelos. Por ejemplo, al fijar gauge con $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (gauge de Coulomb) o $A_3 = 0$ (gauge axial) se pierde la covariancia explícita de Lorentz. Por razones prácticas es conveniente elegir gauges covariantes, en donde el resultado final no contiene «campos fantasma» [Cheng & Li, 1984]. Para esto, se utiliza una *acción efectiva*, la cual incluye los términos adicionales que eliminan los grados de libertad no físicos [Faddeev & Popov, 1967]. Uno de ellos es el encargado de fijar el gauge. En este capítulo se estudiará la *dinámica* de modelos que involucran campos vectoriales, y en especial las consecuencias dinámicas del término en la acción efectiva relacionado con la fijación de un gauge covariante.

3.1. Geometría del espacio-tiempo

Debido a que los modelos involucran campos vectoriales, el contenido energético del Universo no es isótropo. Por lo anterior, es razonable elegir una métrica que sea homogénea pero anisótropa. Una medida experimental de esta posible dirección consiste en una expansión anisótropa, la cual según los datos es muy pequeña [Campanelli *et al.*, 2011]. Existe una

3 Inflación con campos vectoriales

gran cantidad de espacio-tiempos homogéneos e isotrópos, los cuales fueron clasificados por Bianchi [Bianchi, 1898]. Se elegirá entre estos, el de tipo I en el cual la curvatura espacial es igual a cero y es el espacio-tiempo más sencillo dentro de este conjunto. La métrica está dada por el elemento de línea:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2(\alpha+\sigma)} [dx^2 + dy^2] + e^{2\alpha-4\sigma} dz^2, \quad (3.1.1)$$

en donde α y σ son funciones del tiempo. A continuación se hallan las variables cinemáticas presentadas en la sección 1.2. La métrica 3.1.1 está expresada en coordenadas síncronas y por lo tanto es conveniente escoger la congruencia cuya cuadrivelocidad es $u^\mu = \delta_0^\mu$. Se procede a hallar la tétrada, cuya matriz $e_{(v)}^\mu$ (1.2.27) es:

$$e_{(v)}^\mu = \text{diag}(1, e^{-(\alpha+\sigma)}, e^{-(\alpha+\sigma)}, e^{-(\alpha-2\sigma)}). \quad (3.1.2)$$

Las variables cinemáticas para la congruencia escogida tienen las siguientes componentes con respecto a la tétrada:

$$h_{(0)(0)} = h_{(0)(i)} = 0, \quad h_{(i)(j)} = \delta_{(i)(j)}, \quad (3.1.3)$$

$$a_{(\mu)} = 0, \quad \omega_{(\mu)(v)} = 0, \quad \Theta = 3\dot{\alpha}, \quad H = \dot{\alpha}, \quad (3.1.4)$$

$$\zeta_{(0)(0)} = \zeta_{(0)(i)} = 0, \quad \zeta_{(i)(j)} = \text{diag}(\dot{\sigma}, \dot{\sigma}, -2\dot{\sigma}). \quad (3.1.5)$$

Todas las otras variables son iguales a cero y así las variables dinámicas del campo gravitacional son H y $\dot{\sigma}$. Para entender facilmente el significado físico de las variables se define un parámetro de expansión promedio:

$$a(t) := (e^{\alpha+\sigma} \times e^{\alpha+\sigma} \times e^{\alpha-2\sigma})^{1/3} = e^\alpha. \quad (3.1.6)$$

El elemento de volumen de hipersuperficies espaciales con t constante es¹ $\sqrt{h} d^3x = e^{3\alpha} d^3x = a(t)^3 d^3x$. Es decir, la función $a(t)$ indica la expansión global del volumen espacial. A partir de la definición anterior, H indica la tasa de cambio relativa del volumen, lo cual es equivalente a un parametro de Hubble global:

$$H := \frac{\dot{a}}{a} = \dot{\alpha}. \quad (3.1.7)$$

Se observa de la forma de la métrica (3.1.1) que la expansión en el plano $x y$ es isotrópa, mientras que la expansión en la dirección z da lugar a la anisotropía. Si se define $H_\alpha = \dot{\alpha} + \dot{\sigma}$ como el parámetro de Hubble en el plano $x y$, el cual da cuenta de la expansión isotrópa, se puede obtener un parámetro que indica el nivel de expansión anisótropa. Este último parámetro se denomina el esfuerzo de corte cósmico y está dado por:

$$\Sigma := \frac{H_\alpha - H}{H} = \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\alpha}}. \quad (3.1.8)$$

Los datos experimentales indican que el esfuerzo de corte cósmico actual Σ_0 se encuentra en el siguiente intervalo [Campanelli *et al.*, 2011]:

$$-0,012 < \Sigma_0 < 0,012. \quad (3.1.9)$$

¹ h es la métrica inducida en las hipersuperficies.

3.2. Campos vectoriales abelianos

Se analizará el comportamiento cualitativo del modelo descrito por la acción:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\xi}{2} (A^\alpha{}_{;\alpha})^2 - V(A_\mu A^\mu) \right], \quad (3.2.1)$$

con un potencial de la forma $V(A_\mu A^\mu) = \lambda (A_\mu A^\mu)^n$ en donde n es un número natural, y un término de fijación del gauge [Cembranos *et al.*, 2013]. El tensor de energía-impulso para este fluido esta dado por:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{YM}} + T_{\mu\nu}^{\text{GF}} + T_{\mu\nu}^{\text{V}}, \quad (3.2.2)$$

en donde

$$T_{\mu\nu}^{\text{YM}} = F_{\alpha\mu} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}, \quad (3.2.3)$$

$$T_{\mu\nu}^{\text{GF}} = \frac{\xi}{2} \left[4A^\alpha{}_{;\alpha(\mu} A_{\nu)} - g_{\mu\nu} \left(A^\alpha{}_{;\alpha} + 2A^\alpha{}_{;\beta}{}^{;\beta} A_\beta \right) \right], \quad (3.2.4)$$

$$T_{\mu\nu}^{\text{V}} = 2V_{,A^2} A_\mu A_\nu - V g_{\mu\nu}, \quad (3.2.5)$$

son los tensores energía impulso relacionados con el término de Yang-Mills, el término de fijación del gauge y el potencial, respectivamente. $V_{,A^2}$ denota diferenciación del potencial con respecto a la norma al cuadrado del campo vectorial $A_\mu A^\mu$. Se procede a realizar la descomposición de los diferentes componentes de $T_{\mu\nu}$ con respecto a la tetrada ortonormal. Las cantidades relacionadas con el término de Yang-Mills son:

$$\rho^{\text{YM}} = \frac{\xi}{2} (g^{33} \dot{A}_3^2), \quad (3.2.6)$$

$$p^{\text{YM}} = \frac{\xi}{6} (g^{33} \dot{A}_3^2) = \frac{1}{3} \rho^{\text{YM}}, \quad (3.2.7)$$

$$q_{(i)}^{\text{YM}} = 0, \quad (3.2.8)$$

$$\pi_{(i)(j)}^{\text{GF}} = \text{diag} \left(\frac{2}{3} \rho^{\text{YM}}, \frac{2}{3} \rho^{\text{YM}}, -\frac{4}{3} \rho^{\text{YM}} \right). \quad (3.2.9)$$

Las cantidades relacionadas con el término de fijación del gauge son:

$$\rho^{\text{GF}} = \frac{\xi}{2} (A^\alpha{}_{;\alpha})^2 - 2A_0^2 V_{,A^2}, \quad (3.2.10)$$

$$p^{\text{GF}} = - \left[\frac{\xi}{2} (A^\alpha{}_{;\alpha})^2 + 2A_0^2 V_{,A^2} \right], \quad (3.2.11)$$

$$q_{(i)}^{\text{GF}} = \xi (A^\alpha{}_{;\alpha}) e^{-\alpha+2\sigma} A_3 \delta_{(i)}^3, \quad (3.2.12)$$

$$\pi_{(i)(j)}^{\text{GF}} = 0. \quad (3.2.13)$$

Finalmente, las cantidades relacionadas con el potencial son:

$$\rho^{\text{V}} = V + 2A_0^2 V_{,A^2}, \quad (3.2.14)$$

3 Inflación con campos vectoriales

$$p^y = -V + \frac{2}{3}V_{,A^2}g^{33}A_3^2, \quad (3.2.15)$$

$$q_{(i)}^y = 2V_{,A^2}e^{-\alpha+2\sigma}A_3\delta_{(i)}^3, \quad (3.2.16)$$

$$\pi_{(i)(j)}^y = \text{diag} \left(-\frac{2}{3}V_{,A^2}g^{33}A_3^2, -\frac{2}{3}V_{,A^2}g^{33}A_3^2, \frac{4}{3}V_{,A^2}g^{33}A_3^2 \right). \quad (3.2.17)$$

Las ecuaciones de campo son:

$$m_p^2 (\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2) = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}g^{33}\dot{A}_3^2 + 3V - g^{33}A_3^2V_{,A^2} \right] + \frac{\xi}{2} (\dot{A}_0 + 3\dot{\alpha}A_0)^2 + A_0^2V_{,A^2}, \quad (3.2.18)$$

$$m_p^2 (\ddot{\sigma} + 3\dot{\sigma}\dot{\sigma}) = \frac{1}{3} [g^{33}\dot{A}_3^2 - 2g^{33}A_3^2V_{,A^2}], \quad (3.2.19)$$

$$\ddot{A}_3 + \dot{A}_3(4\dot{\sigma} + \dot{\alpha}) = -2g^{33}A_3V_{,A^2}, \quad (3.2.20)$$

$$\xi (\dot{A}_0 + 3\dot{\alpha}A_0)' = -2A_0V_{,A^2}, \quad (3.2.21)$$

junto con la ecuación de Friedmann, la cual no es una ecuación dinámica sino una restricción en las condiciones iniciales:

$$3m_p^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\sigma}^2) = \frac{\xi}{2} (\dot{A}_0 + 3\dot{\alpha}A_0)^2 + \frac{1}{2}g^{33}\dot{A}_3^2 + V. \quad (3.2.22)$$

La ecuación (3.2.21) implica que $q_{(i)} = 0$, o sea que no hay flujo de calor. Las ecuaciones de campo también pueden obtenerse directamente a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange de la siguiente acción de punto (véase la sección 1.1.3):

$$S_p = \int e^{3\alpha} \left[m_p^2 (-3\dot{\alpha}^2 + 3\dot{\sigma}^2) + \frac{1}{2}g^{33}\dot{A}_3^2 + \frac{\xi}{2} (\dot{A}_0 + 3HA_0)^2 - \lambda (-A_0^2 + g^{33}A_3^2)^n \right] dt. \quad (3.2.23)$$

La ecuación de Friedmann corresponde a la ligadura en el hamiltoniano $H = 0$. La forma de (3.2.23) indica que cuando $\xi = 0$ la parte temporal del campo A_0 es una variable no dinámica. Se observa que la dinámica del sistema se puede dividir en dos conjuntos invariantes. El primer conjunto invariante es $A_3 = \dot{A}_3 = 0$ i.e. únicamente la parte temporal, y el segundo conjunto invariante es $A_0 = \dot{A}_0 = 0$ i.e. únicamente la parte parte espacial. Con el fin de obtener una intuición acerca del comportamiento cualitativo del sistema se analizará la dinámica por separado en cada uno de estos conjuntos invariantes.

3.2.1. Dinámica de la parte temporal del campo

Cuando las condiciones iniciales son $A_3 = \dot{A}_3 = 0$ el tensor de esfuerzos anisótopos es igual a cero y el fluido es perfecto. Esto indica que la parte temporal del campo vectorial no debe generar una dirección preferida. El parámetro de estado en este caso es:

$$\gamma = \frac{\rho + p}{\rho} = \frac{-2A_0^2V_{,A^2}}{\frac{\xi}{2}(A_{;\alpha}^\alpha)^2 + V}. \quad (3.2.24)$$

3 Inflación con campos vectoriales

Para el potencial escogido $-2A_0^2 V_{,A^2} = 2nV$. Por lo anterior, cuando el potencial es despreciable (comparado con la densidad de energía total), el fluido se comporta como una constante cosmológica. De ahí que la condición necesaria para que exista un periodo de expansión acelerada es que el potencial sea subdominante, en contraste con inflación con un campo escalar. A continuación se definen las siguientes variables normalizadas:

$$w = \frac{\sqrt{3\xi} A_0}{\sqrt{2}m_p}, \quad x = \frac{\sqrt{\xi/2}}{\sqrt{3}m_p H} \left[\dot{A}_0^2 + 3HA_0^2 \right],$$

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}m_p^{1-n} H}. \quad (3.2.25)$$

Las cantidades (3.2.10), (3.2.11), (3.2.14) y (3.2.15) en función de las nuevas variables son:

$$\rho^{\text{GF}} = 3m_p^2 H^2 \left[x^2 + 2n\Gamma^2 \left(-\frac{2w^2}{3\xi} \right)^n \right], \quad (3.2.26)$$

$$p^{\text{GF}} = -3m_p^2 H^2 \left[x^2 - 2n\Gamma^2 \left(-\frac{2w^2}{3\xi} \right)^n \right], \quad (3.2.27)$$

$$\rho^{\text{v}} = 3m_p^2 H^2 (1 - 2n)\Gamma^2 \left(-\frac{2w^2}{3\xi} \right)^n, \quad (3.2.28)$$

$$p^{\text{v}} = -3m_p^2 H^2 \Gamma^2 \left(-\frac{2w^2}{3\xi} \right)^n, \quad (3.2.29)$$

$$(3.2.30)$$

y en especial el parámetro de estado:

$$\gamma = \frac{2n\Gamma^2 (-2w^2/3\xi)^n}{x^2 + \Gamma^2 (-2w^2/3\xi)^n}. \quad (3.2.31)$$

Del mismo modo que en la sección 2.4, se cambia el tiempo cosmológico por el número de *e-folds* N . Una prima indica diferenciación con respecto a N . Las ecuaciones de campo son equivalentes al siguiente sistema dinámico *autónomo*:

$$H' = H\epsilon, \quad (3.2.32)$$

$$\Sigma' = -3\Sigma + \Sigma\epsilon, \quad (3.2.33)$$

$$w' = 3(x - w), \quad (3.2.34)$$

$$x' = \frac{2}{\xi} \Gamma^2 n w \left(-\frac{2w^2}{3\xi} \right)^{n-1} + x\epsilon, \quad (3.2.35)$$

$$\Gamma' = \epsilon\Gamma, \quad (3.2.36)$$

en donde el parámetro de rodadura lenta ϵ es:

$$\epsilon = q + 1 = \frac{3}{2} \left[(2n - 1)\Gamma^2 \left(-\frac{2w^2}{3\xi} \right)^n + \Sigma^2 + 1 - x^2 \right]. \quad (3.2.37)$$

3 Inflación con campos vectoriales

La ecuación de Friedmann es equivalente a la siguiente ligadura:

$$1 = \Sigma^2 + x^2 + \Gamma^2 \left(-\frac{2w^2}{3\xi} \right)^n + z^2. \quad (3.2.38)$$

A partir del teorema presentado en la sección 2.1, se deduce que el sistema dinámico posee los siguientes conjuntos invariantes:

$$H = 0, H > 0, H < 0, \Sigma = 0, \Sigma > 0, \Sigma < 0, \Gamma = 0, \Gamma > 0, \Gamma < 0. \quad (3.2.39)$$

La dinámica está separada por los ejes H, Σ, Γ . Esto implica, para un universo compuesto por este fluido, que existe una expansión eterna o una contracción eterna. También, mediante este teorema se puede demostrar que la ligadura de Friedmann es un conjunto invariante del sistema dinámico. Por otro lado, se observa que el parámetro de Hubble está desacoplado de las ecuaciones y de esta manera es lógico analizar la dinámica en el espacio de fase compuesto por (Σ, w, x, Γ) .

Puntos críticos y estabilidad

El primer punto crítico que se estudiará es $\chi_c = (\Sigma_c, w_c, x_c, \Gamma_c) = (0, \pm 1, \pm 1, 0)$. El parámetro ϵ evaluado en este punto es igual a cero, por lo tanto corresponde a un estado inflacionario con un parámetro de Hubble constante. Puesto que el valor del esfuerzo de corte cósmico en este punto es igual a cero, se concluye que durante inflación el universo se torna isótropo. Asimismo, en este periodo el parámetro de estado (3.2.24) es igual a cero, por lo cual el fluido se comporta como una constante cosmológica. Es importante mencionar que la existencia de este punto crítico es independiente del valor de ξ . Para analizar la estabilidad se procede de la manera expuesta en 2.2. Primero, se traslada el origen al punto crítico, $\tilde{w} = w - 1$, $\tilde{x} = x - 1$ y se expanden las ecuaciones a primer orden alrededor del origen. Los valores propios de la matriz (2.2.2) son $(-3, -3, -3, 0)$. Este punto crítico es no hiperbólico y no es posible determinar la estabilidad mediante la linealización de las ecuaciones. Antes de analizar la estabilidad del sistema mediante el teorema de la variedad central, es importante notar que el subespacio estable está generado por los vectores:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.40)$$

En consecuencia, la variedad estable debe ser tangente al plano $\Sigma, \tilde{w}, \tilde{x}$. Por simple inspección de los conjuntos invariantes (3.2.39), se concluye que la variedad estable es $\Gamma = 0$. Lo anterior implica que en el caso de un potencial trivial, el sistema tiende asintóticamente a un estado inflacionario. Esto es obvio puesto que la ecuación (3.2.21) con un potencial trivial implica que la densidad de energía del fluido es constante y por ende éste se comporta como constante cosmológica, i.e *el término de fijación del gauge en la acción efectiva se comporta como una constante cosmológica*.

3 Inflación con campos vectoriales

Al utilizar el teorema de la variedad central local se obtiene que esta última está dada por:

$$\Sigma = \mathcal{O}(\Gamma^3), \quad x = \frac{(-2)^{n-1}}{3\xi^m} \Gamma^2 + \mathcal{O}(\Gamma^3), \quad w = \frac{(-2)^{n-1}}{3\xi^m} \Gamma^2 + \mathcal{O}(\Gamma^3). \quad (3.2.41)$$

La dinámica en esta variedad está gobernada por:

$$\Gamma' = \left(\frac{-2}{\xi} \right)^n \frac{n}{3^{n-1}} \Gamma^3 + \mathcal{O}(\Gamma^5). \quad (3.2.42)$$

La ecuación anterior indica que cuando n es impar el punto es estable y el estado asintótico del sistema es inflación. Cuando n es par el punto crítico es inestable y por consiguiente inflación es un estado transitorio del sistema. En este caso, si la velocidad de recesión es lo suficientemente lenta, es posible inducir un periodo inflacionario que solucione los problemas de ajuste fino. Para hallar una estimación de cuan pequeña debe ser esta velocidad, se nota que el final de un periodo de expansión acelerada se caracteriza por $\epsilon = 1$. Al expresar esta condición cuando el sistema se encuentra en la variedad central, se obtiene una aproximación para el valor de la variable Γ al final de inflación:

$$\Gamma_{\max} \approx \left(\frac{3\xi}{2} \right)^{\frac{n}{2}} (3n)^{-1/2}. \quad (3.2.43)$$

De aquí, se define una velocidad máxima dada por el valor (3.2.43) dividido entre el número n de *e-folds*:

$$v_{\max} = \frac{1}{n} \left(\frac{3\xi}{2} \right)^{\frac{n}{2}} (3n)^{-1/2}. \quad (3.2.44)$$

Una condición *suficiente* para que inflación dure N *e-folds* es que la velocidad cerca al punto crítico sea mucho menor que esta velocidad máxima i.e.

$$\left(\frac{-2}{\xi} \right)^n \frac{n}{3^{n-1}} \Gamma^3 < v_{\max} \quad (3.2.45)$$

Reemplazando los valores de (3.2.55) se obtiene:

$$N^{2/3} < \frac{1}{\tilde{\lambda}} \frac{H^2}{m_p^2} \left(\frac{3\xi}{2} \right)^n (3n)^{-1}, \quad (3.2.46)$$

en donde $\tilde{\lambda}$ es la constante del potencial en unidades de la masa reducida de Planck. En conclusión, el monto de inflación N , está afectado por los valores de ξ , λ , n y H . Por ejemplo, si se desea un mayor número de *e-folds* se debe aumentar el valor de ξ o disminuir el valor de λ . Los resultados obtenidos hasta el momento se resumen en la tabla 3.1.

El segundo punto crítico es $\chi_c = (\Sigma_c, w_c, x_c, y_c) = (1, 0, 0, 0)$, que corresponde a un estado de anisotropía. Para analizar la estabilidad se procede de la misma manera que en el punto anterior. Los valores propios de la correspondiente matriz (2.2.2) son (6, -3, 3, 3), en consecuencia este punto es inestable, i.e. un estado de anisotropía es un estado transitorio del sistema.

3 Inflación con campos vectoriales

Existencia	Duración
$\tilde{\lambda} \ll 3m_p^2 H^2$	$N^{2/3} < \frac{1}{\tilde{\lambda}} \frac{H^2}{m_p^2} \left(\frac{3\xi}{2}\right)^n (3n)^{-1}$

Tabla 3.1 Condiciones de inflación en el caso abeliano con la parte temporal.

Dado que los puntos críticos son inestables y que el espacio de fase es acotado², intuitivamente se espera que el atractor futuro del sistema sea un ciclo límite. La solución numérica confirma esta conjetura (véase las figuras 3.1 y 3.2).

3.2.2. Dinámica de la parte espacial del campo

Este caso particular corresponde a las condiciones iniciales $A_0 = \dot{A}_0 = 0$. Se utilizan las siguientes variables normalizadas:

$$\Sigma \equiv \frac{\dot{\sigma}}{H}, \quad x \equiv \frac{\sqrt{\frac{1}{2}g^{33}\dot{A}^2}}{\sqrt{3}m_p H}, \quad y \equiv \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{3}m_p H}, \quad (3.2.47)$$

las cuales permiten obtener un sistema de ecuaciones en las cuales el parámetro de Hubble está desacoplado. La ecuación de Friedmann en términos de estas variables es:

$$1 = \Sigma^2 + x^2 + y^2, \quad (3.2.48)$$

mientras que el parámetro ϵ es:

$$\epsilon = q - 1 = 2x^2 + ny^2 + 3\Sigma^2. \quad (3.2.49)$$

La ecuación de Friedmann implica que en este caso el parámetro ϵ siempre es mayor que uno, es decir la parte espacial de los campos nunca genera un periodo inflacionario. Las siguientes ecuaciones constituyen un sistema dinámico *no autónomo* equivalente a las ecuaciones (3.2.18), (3.2.19) y (3.2.20):

$$H' = -H(2x^2 + ny^2 + 3\Sigma^2), \quad (3.2.50)$$

$$\Sigma' = -2(n+1)y^2 + \Sigma(-2\Sigma + \epsilon - 3) + 2, \quad (3.2.51)$$

$$x' = -2x - 2x\Sigma - 2n\Xi y^2 + \epsilon x, \quad (3.2.52)$$

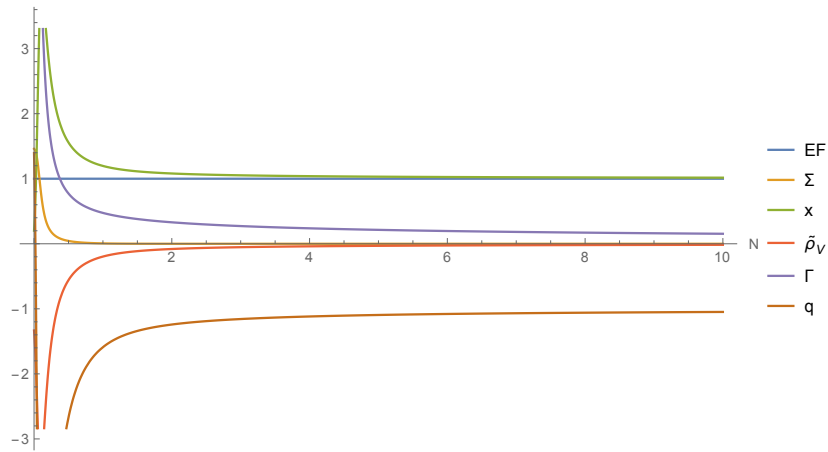
$$y' = ny(2\Sigma - 1) + 2n\Xi xy + \epsilon y, \quad (3.2.53)$$

en donde el parámetro Ξ es:

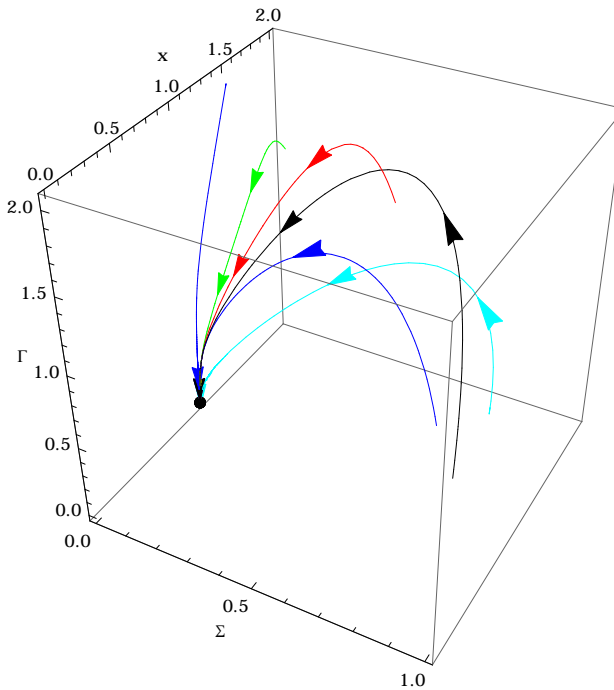
$$\Xi \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{m_p}{\sqrt{-g^{33}A}}. \quad (3.2.54)$$

²Esto es debido a que el sistema debe cumplir la ecuación de Friedmann.

3 Inflación con campos vectoriales



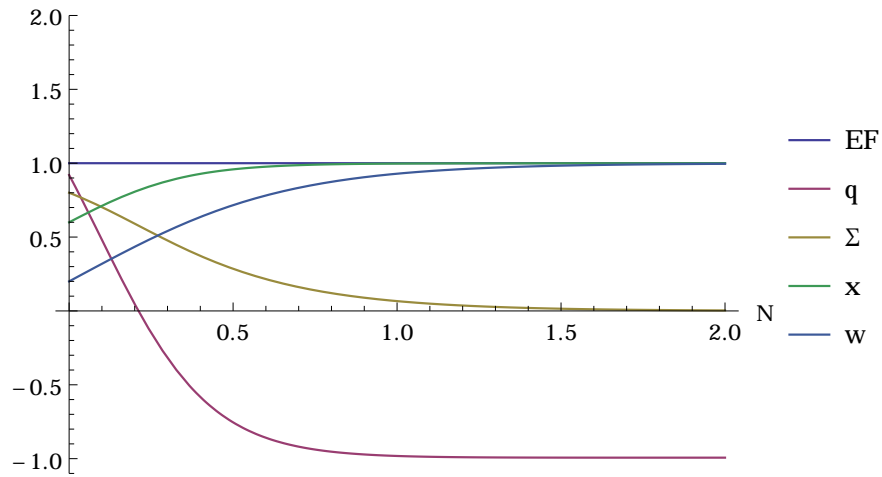
(a) Se muestra la solución numérica con parámetros $\tilde{\lambda} = 1, n = 1, \xi = 1$. El sistema tiende asintóticamente a un estado inflacionario $q = -1$, en donde la densidad de energía relacionada con el término de fijación del gauge domina. La anisotropía Σ y la densidad de energía potencial $\tilde{\rho}_V$ normalizada por $3m_p H^2$ se diluyen.



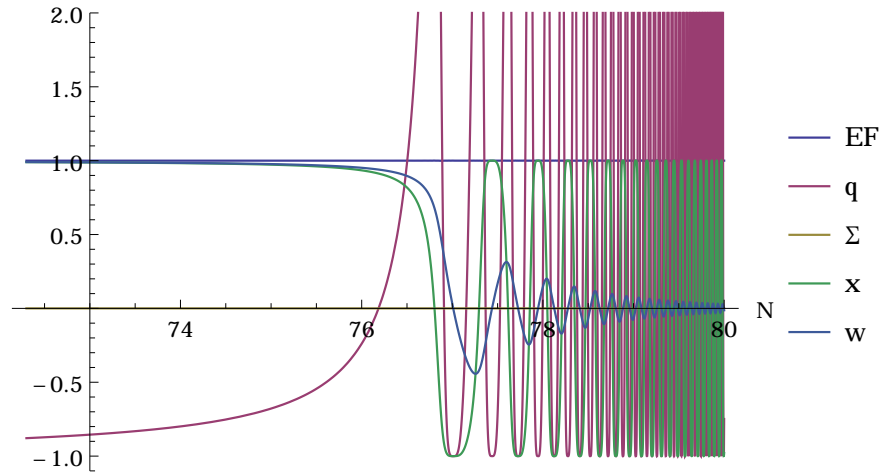
(b) **Órbitas en el subespacio de fase (Σ, x, Γ) con $n = 1$.** Se muestran las órbitas con diferentes condiciones iniciales; todas convergen al mismo punto $(0, 1, 0)$ que corresponde a un estado inflacionario.

Figura 3.1 Gráficas de la solución numérica de la parte temporal de un campo vectorial $U(1)$ con un potencial $\lambda(-A_0^2)$. La línea con rótulo EF corresponde a la ecuación de Friedmann, la cual se utilizó como un control numérico. Se observa que el atractor futuro del sistema es un estado inflacionario.

3 Inflación con campos vectoriales



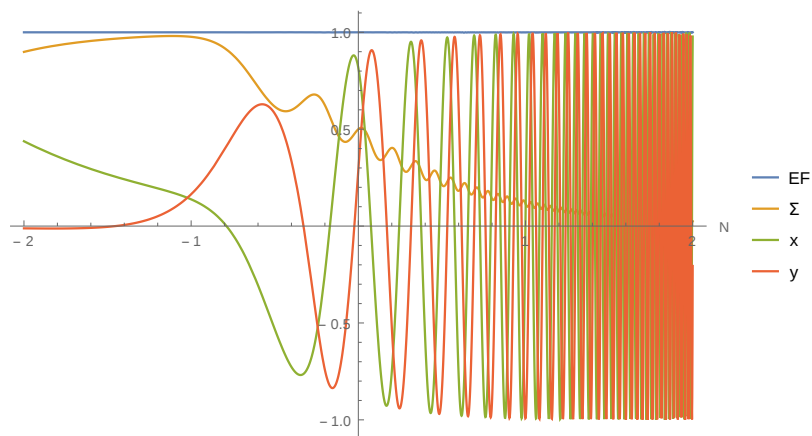
(a) Se observa que la densidad de energía relacionada con el término de fijación del gauge domina durante este periodo. La anisotropía se diluye rápidamente.



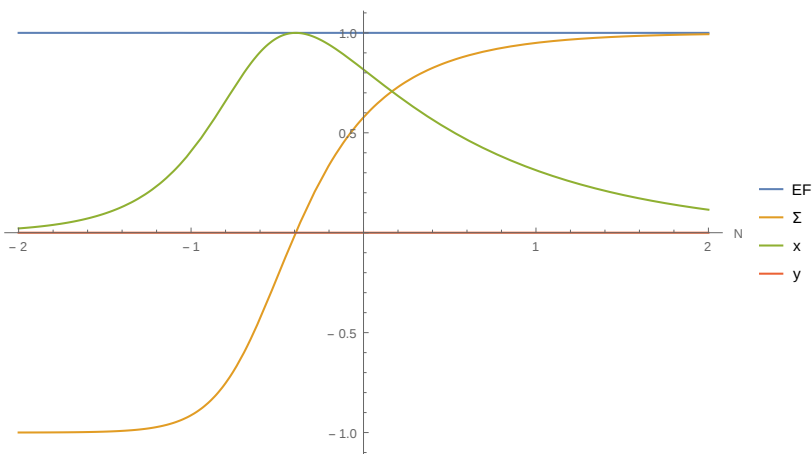
(b) En el periodo final de inflación, i.e. $N \approx 73$, la variable relacionada con el término de fijación del gauge deja de dominar y el sistema empieza a oscilar.

Figura 3.2 Gráficas de la solución numérica de la parte temporal de un campo vectorial $U(1)$. Se emplean los valores de $n = 2$, $\tilde{\lambda} = 0,001$ y $\xi = 4$. Se observa que existe un periodo inflacionario lo suficientemente prologando para resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar.

3 Inflación con campos vectoriales



(a) Comportamiento de la parte espacial de un campo vectorial $U(1)$ cuando el potencial V no es nulo. Se observan las rápidas oscilaciones, y que un estado de anisotropía es transitorio.



(b) Solución numérica cuando el potencial es nulo $V = 0$. Se observa que el atractor pasado es $\Sigma = -1$ y el atractor futuro es $\Sigma = 1$. No existen oscilaciones y el fluido se comporta como radiación.

Figura 3.3 Gráficas de la solución numérica de la parte espacial de un campo vectorial $U(1)$. Se observa que no es posible obtener un periodo inflacionario lo suficientemente prolongado para solucionar los problemas clásicos de la cosmología estándar.

3 Inflación con campos vectoriales

Se analizará la dinámica en el subespacio (Σ, x, y) . El punto $\chi_c = (\Sigma_c, x_c, y_c) = (\pm 1, 0, 0)$, es un punto de equilibrio que corresponde a un estado de anisotropía. Cuando $\Sigma_c = 1$ la matriz de linealización es $\text{diag}(-2, -1, n + 3)$, y los valores propios son los valores de la diagonal. Para $n \geq 1$ existe un valor propio positivo indicando que el punto es inestable. En el caso sin potencial, i.e. $y = 0$, ya no existe este último valor propio positivo y el punto es estable (atractor futuro). Cuando $\Sigma = -1$, la matriz de linealización es $\text{diag}(6, 3, 3 - 3n)$. Puesto que la diagonal posee números positivos, el punto es inestable. Ahora, cuando el potencial es nulo, la matriz de linealización se obtiene eliminando la última fila y columna. Así los valores propios son $(6, 3)$ implicando que el punto es el atractor pasado. En el caso cuando el potencial es nulo, el fluido se comporta como radiación. Se debe notar que aunque el sistema dinámico no es autónomo, ni los puntos críticos ni los autovalores dependen del parámetro Ξ . El análisis dinámico confirma que en estos modelos el potencial provoca que la anisotropía se diluya [Cembranos *et al.*, 2012]. Todos los resultados anteriores son corroborados por la solución numérica presentada en la figura 3.3.

3.2.3. Dinámica conjunta de la parte temporal y espacial del campo

En las subsecciones anteriores se mostró que la parte temporal induce un periodo inflacionario mientras que la parte espacial no. Para que exista un periodo inflacionario se requiere que el sistema tienda de manera natural a un estado en el cual la parte espacial es subdominante. Para evaluar esta suposición se planteará un sistema dinámico con las siguientes variables normalizadas:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\sqrt{3\xi} A_0}{\sqrt{2m_p}}, & x &= \frac{\sqrt{\xi/2}}{\sqrt{3m_p H}} \left[\dot{A}_0^2 + 3HA_0^2 \right], \\ v &= \frac{\sqrt{2g^{33}} A_3}{\sqrt{3m_p}}, & z &= \frac{\sqrt{g^{33}/2} \dot{A}_3}{\sqrt{3m_p H}}, & \Gamma &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3m_p^{1-n} H}}. \end{aligned} \quad (3.2.55)$$

El sistema dinámico es:

$$\Sigma' = -3\Gamma^2 n v^2 \left(\frac{3v^2}{2} - \frac{2w^2}{3\xi} \right)^{n-1} - 3\Sigma + 2z^2 + \Sigma\epsilon, \quad (3.2.56)$$

$$w' = 3(x - w), \quad (3.2.57)$$

$$x' = \frac{2}{\xi} \Gamma^2 n w \left(\frac{3v^2}{2} - \frac{2w^2}{3\xi} \right)^{n-1} + x\epsilon, \quad (3.2.58)$$

$$v' = (2\Sigma - 1)v + 2z, \quad (3.2.59)$$

$$z' = z(\epsilon - 2 - 2\Sigma) - 3\Gamma^2 n v \left(\frac{3v^2}{2} - \frac{2w^2}{3\xi} \right)^{n-1}, \quad (3.2.60)$$

$$\Gamma' = \epsilon\Gamma, \quad (3.2.61)$$

$$1 = \Sigma^2 + x^2 + \Gamma^2 \left(\frac{3v^2}{2} - \frac{2w^2}{3\xi} \right)^n + z^2, \quad (3.2.62)$$

3 Inflación con campos vectoriales

en donde la ecuación (3.2.62) es una ligadura correspondiente a la ecuación de Friedmann y el parámetro de rodadura lenta ϵ es:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left[3 \left(\Gamma^2 [3(2n-3)\xi v^2 + 4(1-2n)w^2] (9\xi v^2 - 4w^2)^{n-1} / (6\xi)^n + \Sigma^2 + 1 \right) - 3x^2 + z^2 \right]. \quad (3.2.63)$$

Evidentemente, el punto $\chi_c = (\Sigma_c, w_c, x_c, z_c, v_c, \Gamma_c) = (0, \pm 1, \pm 1, 0, 0, 0)$ es un punto crítico y corresponde a inflación. Los valores propios de la matriz de linealización son $(-3, -3, -3, -2, -1, 0)$. El subespacio estable está generado por

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.64)$$

La variedad estable es tangente a este subespacio. Por inspección la variedad estable es $\Gamma = 0$. De aquí se deduce que la parte espacial, i.e. las variables v y z , tienden de manera asintótica a cero. En este punto se debe notar que debido a que ya se demostró que la parte espacial tiende a cero, los resultados expuestos en 3.2.1 son válidos en el caso general. Sin embargo, se realizará el análisis de estabilidad completo para confirmar lo esperado. Puesto que uno de los valores propios es igual a cero se debe recurrir al teorema de la variedad central. La variedad central está dada localmente por:

$$\Sigma = \mathcal{O}(\Gamma^3), \quad v = \mathcal{O}(\Gamma^3), \quad z = \mathcal{O}(\Gamma^3), \quad (3.2.65)$$

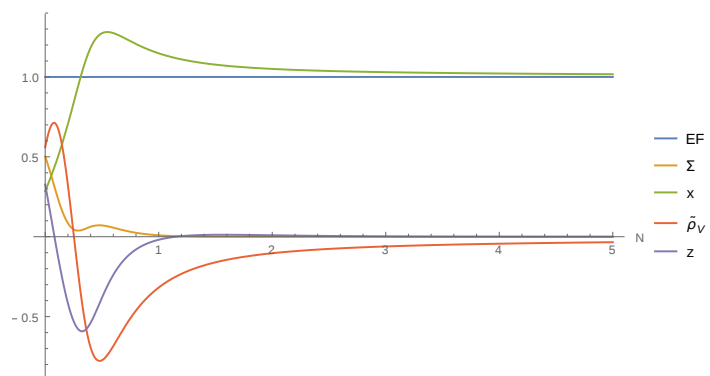
$$x = \frac{(-2)^{n-1}}{3\xi^m} \Gamma^2 + \mathcal{O}(\Gamma^3), \quad w = \frac{(-2)^{n-1}}{3\xi^m} \Gamma^2 + \mathcal{O}(\Gamma^3). \quad (3.2.66)$$

La dinámica en esta variedad está gobernada por:

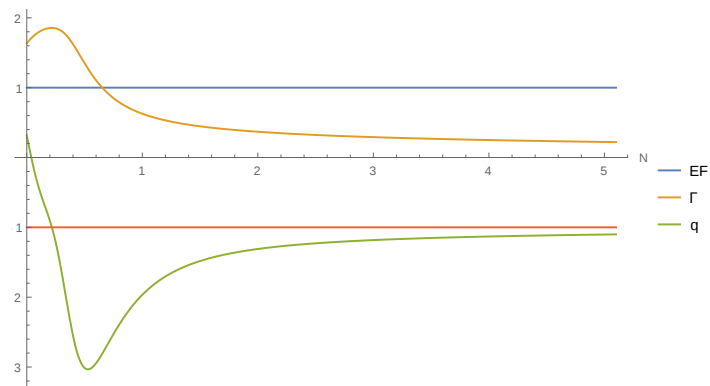
$$\Gamma' = \left(\frac{-2}{\xi} \right)^n \frac{n}{3^{n-1}} \Gamma^3 + \mathcal{O}(\Gamma^5). \quad (3.2.67)$$

Se observa que esto es prácticamente equivalente al análisis expuesto para la parte temporal. La ecuación anterior indica que cuando n es impar el punto es estable e inflación es un atractor. Cuando n es par el punto crítico es inestable. Con un análisis similar al de la sección 3.2.1 se obtienen las mismas condiciones para la existencia y duración de inflación cuando n es par (véase la tabla 3.1). En suma, el término relacionado con la fijación de un gauge *covariante*, se comporta como una constante cosmológica y se induce un periodo inflacionario en el cual la parte espacial es subdominante. El papel del potencial consiste en dar fin al periodo inflacionario cuando n es par; cuando n es impar o en el caso que no exista el potencial se obtiene una inflación eterna. Las soluciones numéricas mostradas en las figuras 3.4, 3.5 y 3.6, constatan los resultados presentados.

3 Inflación con campos vectoriales



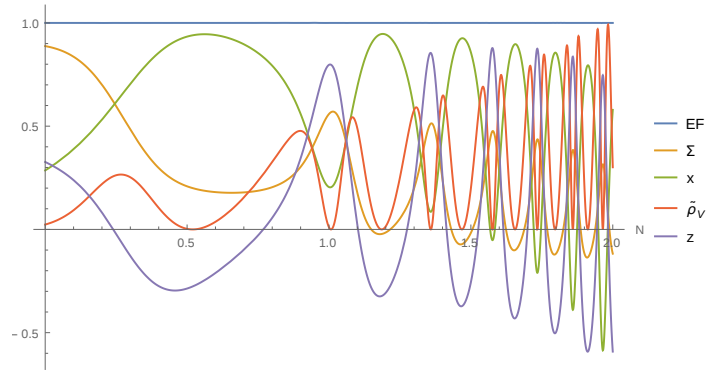
(a) Se observa que el sistema tiende a un estado de cero anisotropía, en donde la parte espacial es subdominante.



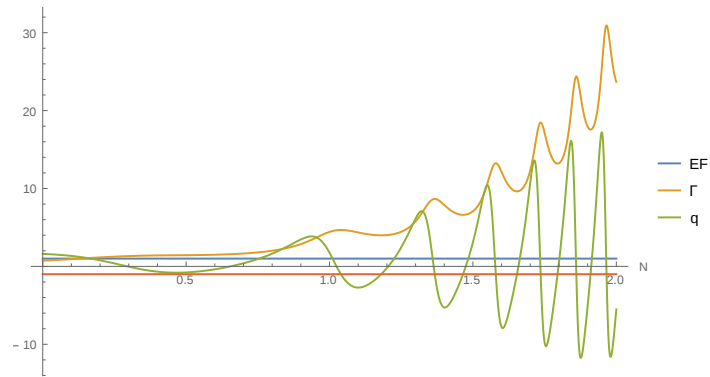
(b) Se aprecia que el sistema tiende asintóticamente a un periodo inflacionario $q = -1$ y la variable Γ tiende a cero.

Figura 3.4 Gráficas de la solución numérica de la parte temporal y espacial de un campo vectorial $U(1)$. Se emplean los valores de $n = 1$, $\tilde{\lambda} = 2$ y $\xi = 1$. Se observa que el estado asintótico es un periodo inflacionario.

3 Inflación con campos vectoriales



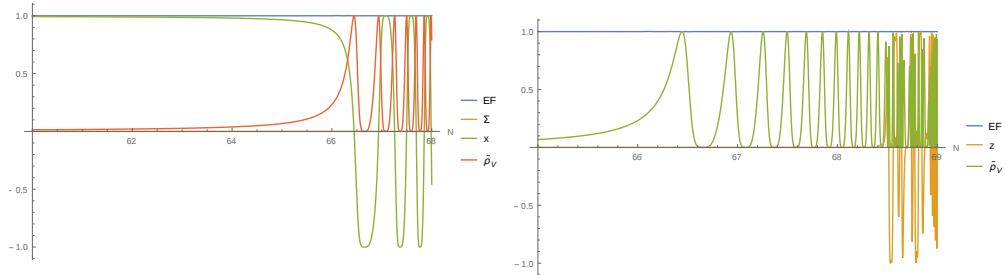
(a) Las variables del sistema oscilan rápidamente. La anisotropía posee una oscilación amortiguada tendiente a cero.



(b) El sistema pasa por un breve periodo inflacionario de alrededor de 0.5 *e-folds*. Luego, el parámetro de desaceleración en promedio es positivo.

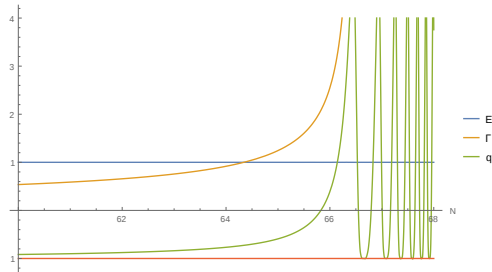
Figura 3.5 Gráficas de la solución numérica de la parte temporal y espacial de un campo vectorial $U(1)$. Se emplean los valores de $n = 2$, $\tilde{\lambda} = 0,4$ y $\xi = 1$. Los valores de los parámetros no cumplen las condiciones para la existencia de un periodo inflacionario lo suficientemente prolongado.

3 Inflación con campos vectoriales



(a) Durante más de 60 *e-folds* el potencial es despreciable, mientras que x domina el contenido energético del Universo. Después, comienzan las rápidas oscilaciones de las variables, excepto por la anisotropía que es nula.

(b) Se observa que la parte espacial también oscila cuando termina el periodo inflacionario. Durante inflación la parte espacial es despreciable.



(c) Durante mas de 60 *e-folds* el parámetro de desaceleración es igual a -1, mostrando un periodo de expansión acelerada. Luego q oscila con un valor promedio positivo.

Figura 3.6 Gráficas de la solución numérica de la parte temporal y espacial de un campo vectorial $U(1)$. Se emplean los valores $n = 2$, $\tilde{\lambda} = 0,005$ y $\xi = 3$. Los valores de los parámetros cumplen las condiciones para la existencia de un periodo inflacionario lo suficientemente prolongado.

3.3. Campos vectoriales no abelianos

La acción para este modelo está dada por [Cembranos *et al.*, 2012]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{m_p^2}{2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{\xi}{2} (A^{\mu a})^2 - V(M_{ab} A_\mu^a A^{b\mu}) \right], \quad (3.3.1)$$

donde $F_{\mu\nu}^a = A_{\nu,\mu}^a - A_{\mu,\nu}^a + g \varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$, con $a, b = 1, 2, 3$, y ε_{abc} es el símbolo de Levi-Civita. Es de gran utilidad expresar las cantidades en términos de la parte eléctrica y magnética de los campos vectoriales SU(2):

$$E_i^a \equiv F_{i0}^a, \quad B^{ai} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}^a. \quad (3.3.2)$$

Al asumir que los campos son homogéneos, las cantidades anteriores con respecto a la tétrada son:

$$E_{(i)}^a = -\dot{A}_{(i)}^a - H A_{(i)}^a - \zeta_{(i)(j)} A_{(j)}^a - g \varepsilon_{abc} A_0^b A_{(i)}^c, \quad (3.3.3)$$

$$B_{(i)}^a = \frac{g}{2} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{(i)(m)(n)} A_{(m)}^b A_{(n)}^c, \quad (3.3.4)$$

El tensor energía-impulso para cada uno de los componentes del fluido es:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\text{YM}} &= g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\beta}^a - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^a F^{a\alpha\beta} g_{\mu\nu} \\ &= 2\dot{A}_0^a \dot{A}_{(\mu}^a \delta_{\nu)}^0 - \dot{A}_\mu^a \dot{A}_\nu^a + g^{\alpha\beta} \dot{A}_\alpha^a \dot{A}_\beta^a \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 + 2g \varepsilon_{abc} \left(g^{\alpha\beta} \dot{A}_\alpha^a \dot{A}_\beta^c A_{(\mu}^b \delta_{\nu)}^0 \right. \\ &\quad \left. + A_0^c \dot{A}_{(\mu}^a A_{\nu)}^b \right) + g^2 \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ade} A_\mu^b A_\nu^d (-A_0^c A_0^e + g^{ij} A_i^c A_j^e) \\ &\quad - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{ij} \dot{A}_i^a \dot{A}_j^a + g \varepsilon_{abc} A_0^b g^{ij} \dot{A}_i^a A_j^c \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{abc} \varepsilon_{ade} g^2 \left(\frac{1}{2} A_0^b A_0^d g^{ij} A_i^c A_j^e - \frac{1}{4} A_i^b A_j^c g^{im} A_m^d g^{jn} A_n^e \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

$$T_{\mu\nu}^{\text{GF}} = \frac{\xi}{2} \left\{ 4 A_{;\alpha(\mu}^{a\alpha} A_{\nu)}^a - g_{\mu\nu} \left[(A_{;\alpha}^{a\alpha})^2 + 2 A_{;\alpha}^{a\alpha} A_{;\alpha}^a \right] \right\}, \quad (3.3.6)$$

$$T_{\mu\nu}^{\text{V}} = 2V_{,MA^2} M_{ab} A_\mu^a A_\nu^b - V g_{\mu\nu}, \quad (3.3.7)$$

donde $V_{,MA^2} = dV(x)/dx$. La homogeneidad de la métrica y de los campos permite obtener la siguiente acción reducida (véase la sub-sección 1.1.3):

$$\begin{aligned} S &= \int e^{3\alpha} \left[-3m_p^2 (H^2 - \dot{\sigma}^2) + \frac{1}{2} (E^2 - B^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi}{2} (\dot{A}_0^a + 3H A_0^a)^2 - V(-M_{ab} A_0^a A_0^b + M_{ab} g^{ij} A_i^a A_j^b) \right] dt, \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

3 Inflación con campos vectoriales

donde $E^2 = E_{(i)}^a E_{(i)}^a$, $B^2 = B_{(i)}^a B_{(i)}^a$. Las ecuaciones de campo para $A_{(\mu)}^a$ se obtienen fácilmente de la expresión anterior a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$0 = \dot{E}_{(i)}^a + 2HE_{(i)}^a - \zeta_{(i)(j)} E_{(j)}^a + g\varepsilon_{abc} A_0^b E_{(i)}^c - g\varepsilon_{abc} \varepsilon_{(i)(j)(m)} B_{(j)}^b A_{(m)}^c + 2V_{,MA^2} M_{ab} A_{(i)}^b, \quad (3.3.9)$$

$$0 = \xi (\dot{A}_0^a + 3HA_0^a) + g\varepsilon_{abc} A_{(m)}^b E_{(m)}^c - 2V_{,MA^2} M_{ab} A_0^b. \quad (3.3.10)$$

Se observa que existe un conjunto invariante, $A_0^a = E_{(i)}^a = 0$, i.e. solamente la parte temporal, pero en contraste con el caso $U(1)$ no existe un conjunto invariante con únicamente la parte espacial.

3.3.1. Dinámica de la parte temporal de los campos

Cuando se restringe la dinámica a este último conjunto invariante, la constante de acoplamiento de gauge g no aparece en las ecuaciones. Por consiguiente, tal como se verá a continuación, el caso es equivalente a la parte temporal de tres campos abelianos acoplados a través del potencial. Las ecuaciones de campo pueden deducirse del siguiente lagrangiano:

$$L = e^{3\alpha} \left[-3m_p^2 (H^2 - \dot{\sigma}^2) + \frac{\xi}{2} (v^2 + 6\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}H + 9r^2 H^2) - V \right], \quad (3.3.11)$$

en donde $A_0^a = \mathbf{r}$, $\dot{A}_0^a = \mathbf{v}$. Si la matriz M_{ab} es diagonal y sus elementos iguales, el lagrangiano es invariante ante rotaciones en el plano A_0^1, A_0^2, A_0^3 . De esta manera, existen tres cantidades conservadas, que corresponden al momentum angular relacionado con \mathbf{r} . Esto implica que la dinámica de \mathbf{r} se desarrolla en un plano. Se realiza a continuación un cambio de coordenadas a cilíndricas polares en donde el eje z es perpendicular al plano del sistema:

$$L = e^{3\alpha} \left[-3m_p^2 (H^2 - \dot{\sigma}^2) + \frac{\xi}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + 6\dot{r}rH + 9r^2 H^2) - V(r^2) \right] \quad (3.3.12)$$

La siguiente ligadura Hamiltoniana corresponde a la ecuación de Friedmann:

$$\mathcal{H} = -3m_p^2 (H^2 - \dot{\sigma}^2) + \frac{1}{2} \xi \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \xi r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{9}{2} H^2 \xi r^2 + 3H \xi \dot{r}r + V = 0. \quad (3.3.13)$$

Las ecuaciones de campo son:

$$\dot{H} = -\frac{rV_{,r}}{2m_p^2} - 3\dot{\sigma}^2, \quad (3.3.14)$$

$$\ddot{\sigma} = -3H\dot{\sigma}, \quad (3.3.15)$$

$$\ddot{r} = V_{,r} \left(\frac{3r^2}{2m_p^2} - \frac{1}{\xi} \right) - 3H\dot{r}, \quad (3.3.16)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{\dot{\theta} (3Hr + 2\dot{r})}{r}. \quad (3.3.17)$$

3 Inflación con campos vectoriales

Ahora bien, se definen las siguientes variables normalizadas:

$$x \equiv \frac{\sqrt{\xi}\dot{r}}{\sqrt{6}m_p H}, \quad w \equiv \frac{\sqrt{3\xi}r}{\sqrt{2}m_p}, \quad \Theta \equiv \frac{\dot{\theta}}{3H}, \quad \Gamma \equiv \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}m_p^{1-n}H}, \quad (3.3.18)$$

para plantear el siguiente sistema dinámico equivalente a las ecuaciones de campo:

$$\Sigma' = \Sigma(\epsilon - 3), \quad (3.3.19)$$

$$x' = 3nw\Gamma^2 \left(\frac{-2w^2}{3\xi}\right)^n - \Gamma^2 \left(\frac{-2w^2}{3\xi}\right)^n \frac{1}{w} + 3\Theta^2 w + 3\Sigma^2 w + x\epsilon - 3x, \quad (3.3.20)$$

$$w' = 3x, \quad (3.3.21)$$

$$\Theta' = -3\Theta - \frac{6\Theta x}{w} + \Theta, \epsilon \quad (3.3.22)$$

$$\Gamma' = \epsilon\Gamma, \quad (3.3.23)$$

$$1 = \Gamma^2 \left(\frac{-2w^2}{3\xi}\right)^n + \Sigma^2 + \Theta^2 w^2 + w^2 + 2wx + x^2, \quad (3.3.24)$$

en donde

$$\epsilon = 3\Gamma^2 \left(\frac{-2w^2}{3\xi}\right)^n + 3\Sigma^2. \quad (3.3.25)$$

Se encuentra el punto crítico $\chi_c = (\Sigma_c, x_c, y_c, w_c, \Theta_c) = (0, 0, 0, \pm 1, 0)$. El parámetro ϵ evaluado en este último es igual a cero; por ende, corresponde a inflación isótropa en donde el potencial es despreciable. La estabilidad de este punto está dada por los valores propios de la correspondiente matriz de linealización: $(-6, -3, -3, -3, 0)$. De nuevo, la variedad estable es $\Gamma = 0$. Dado que existe un valor propio nulo, se requiere utilizar el teorema de la variedad central, el cual conlleva a que esta es:

$$\Sigma = \mathcal{O}(\Gamma^4), \quad x = \mathcal{O}(\Gamma^4), \quad w = \frac{(-2)^{n-1}}{(3\xi)^n} \Gamma^2 + \mathcal{O}(\Gamma^4), \quad \Theta = \mathcal{O}(\Gamma^4). \quad (3.3.26)$$

La dinámica en la variedad central local es gobernada por:

$$\Gamma' = 3\left(\frac{-2}{3\xi}\right)^n \Gamma^3 + \mathcal{O}(\Gamma^5), \quad (3.3.27)$$

que es la misma ecuación que en el caso abeliano, (3.2.42) y por lo tanto el análisis presentado allí es equivalente. La solución numérica coincide con los resultados presentados (véase la figura 3.7). No obstante, como se presentará a continuación, la dinámica conjunta de las parte espacial y temporal es diferente al caso abeliano.

3 Inflación con campos vectoriales

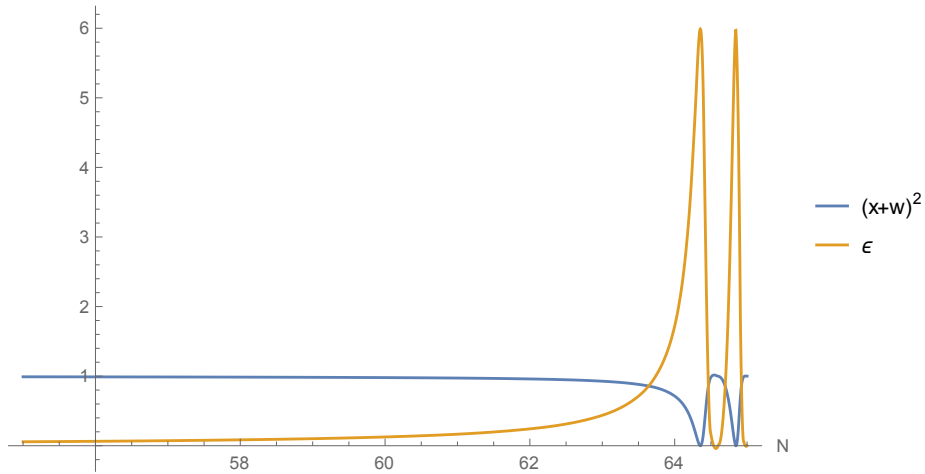


Figura 3.7 Solución numérica del modelo con un campo vectorial $SU(2)$ en el conjunto invariante $A_i^a = \dot{A}_i^a = 0$. Se emplean los valores $n = 2$, $\tilde{\lambda} = 0,0001$ y $\xi = 2,4$. Se observa que existe un periodo inflacionario con un monto de más de 60 e -folds. Durante este periodo domina la densidad asociada al término que fija el gauge covariante. El final de inflación sucede alrededor de $N = 63$, allí las variables x y w comienzan a oscilar y el parámetro ϵ es igual a 3 en promedio.

3.3.2. Dinámica conjunta de la parte temporal y espacial de los campos

Como se vio en la subsección anterior, cuando la parte temporal de los campos es dominante se induce un periodo inflacionario. Por consiguiente, se requiere mostrar que un estado con la parte espacial de los campos nula es estable. Se estudiará el caso cuando $V = 0$. Es conveniente expresar la descomposición del tensor energía-impulso en términos de las variables eléctricas y magnéticas, debido a que las ecuaciones dinámicas resultan ser funciones polinómicas. Las variables relacionadas con el término de Yang-Mills son:

$$\rho^{\text{YM}} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2), \quad (3.3.28)$$

$$p^{\text{YM}} = \frac{1}{3} \rho^{\text{YM}}, \quad (3.3.29)$$

$$\pi_{(i)(j)}^{\text{YM}} = E_{(i)}^a E_{(j)}^a + B_{(i)}^a B_{(j)}^a - \frac{1}{3} (E^2 + B^2) \delta_{(i)(j)}, \quad (3.3.30)$$

$$q_{(i)}^{\text{YM}} = \varepsilon_{(i)(j)(k)} E_{(j)}^a B_{(k)}^a = \frac{g}{2} \varepsilon_{abc} E_{(m)}^a A_{(m)}^b A_{(i)}^c. \quad (3.3.31)$$

Las variables relacionadas con el término de fijación del gauge son :

$$\rho^{\text{GF}} = \frac{\xi}{2} (A_{;\alpha}^{a\alpha})^2 + g \varepsilon_{abc} A_{(m)}^b E_{(m)}^c A_0^a, \quad (3.3.32)$$

$$p^{\text{GF}} = -\frac{\xi}{2} (A_{;\alpha}^{a\alpha})^2 + g \varepsilon_{abc} A_{(m)}^b E_{(m)}^c A_0^a, \quad (3.3.33)$$

3 Inflación con campos vectoriales

$$\pi_{(i)(j)}^{\text{GF}} = 0 \quad (3.3.34)$$

$$q_{(i)}^{\text{GF}} = g\varepsilon_{abc}A_{(m)}^b E_{(m)}^c A_{(i)}^a. \quad (3.3.35)$$

La expresión para el flujo de calor asociado con el término de fijación del gauge, se obtiene a partir de (3.3.6) y de las ecuaciones de campo (3.3.10). Por inspección se concluye que el flujo de calor es igual a cero. Las ecuaciones de campo Einstein (1.2.35), (1.2.36), (1.2.37) y (1.2.38) son :

$$H^2 - \frac{1}{3}\zeta^2 = \frac{1}{3m_p^2}\rho, \quad (3.3.36)$$

$$q_{(i)} = 0 \quad (3.3.37)$$

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{2}{3}\zeta^2 - \frac{1}{6}(\rho + 3p), \quad (3.3.38)$$

$$\dot{\zeta}_{(i)(j)} = -3H\zeta_{(i)(j)} + \pi_{(i)(j)}. \quad (3.3.39)$$

Con el fin de formular un sistema dinámico, se definen las siguientes variables normalizadas:

$$\mathcal{A}_0^a = \frac{\sqrt{3\xi}A_0^a}{m_p}, \quad x_a = \frac{\sqrt{\xi}(\dot{A}_0^a + 3HA_0^a)}{\sqrt{3m_p}H}, \quad (3.3.40)$$

$$\mathcal{A}_{(i)}^a = \frac{A_{(i)}^a}{\sqrt{3m_p}}, \quad \mathcal{E}_{(i)}^a = \frac{E_{(i)}^a}{\sqrt{3m_p}H}, \quad \mathcal{B}_{(i)}^a = \frac{B_{(i)}^a}{\sqrt{3m_p}H}. \quad (3.3.41)$$

El parámetro de desaceleración es:

$$q = 2\Sigma^2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{2}{3}\Gamma\varepsilon_{abc}\mathcal{A}_0^a\mathcal{A}_{(m)}^b\mathcal{E}_{(m)}^c, \quad (3.3.42)$$

Las ecuaciones de campo son equivalentes al siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \Sigma' &= (q+1)\Sigma - 3\Sigma - \frac{2}{3}\mathcal{E}_{(i)}^a\mathcal{E}_{(i),\dot{\sigma}}^a \\ &\quad - \frac{1}{2}([\mathcal{E}_{(i)}^{a'} - (q+1)\mathcal{E}_{(i)}^a]\mathcal{E}_{(i),\dot{\sigma}}^a + \mathcal{E}_{(i)}^a\mathcal{E}_{(i),\dot{\sigma}}^{a'}), \end{aligned} \quad (3.3.43)$$

$$\mathcal{A}_0^{a'} = 3(x_a - \mathcal{A}_0^a), \quad (3.3.44)$$

$$x_a' = -\frac{\Gamma}{\sqrt{\xi}}\varepsilon_{abc}\mathcal{A}_{(i)}^b\mathcal{E}_{(i)}^c + (q+1)x_a, \quad (3.3.45)$$

$$\mathcal{A}_{(i)}^{a'} = -\mathcal{E}_{(i)}^a - \mathcal{A}_{(i)}^a - \Sigma_{(i)(j)}\mathcal{A}_{(j)}^a - \frac{\Gamma}{3\sqrt{\xi}}\varepsilon_{abc}\mathcal{A}_0^b\mathcal{A}_{(i)}^c, \quad (3.3.46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(i)}^{a'} &= -2\mathcal{E}_{(i)}^a + \Sigma_{(i)(j)}\mathcal{E}_{(j)}^a - \frac{\Gamma}{3\sqrt{\xi}}\varepsilon_{abc}\mathcal{A}_0^b\mathcal{E}_{(i)}^c \\ &\quad - \Gamma\varepsilon_{abc}\varepsilon_{(i)(m)(n)}\mathcal{A}_{(m)}^b\mathcal{B}_{(n)}^c + (q+1)\mathcal{E}_{(i)}^a, \end{aligned} \quad (3.3.47)$$

3 Inflación con campos vectoriales

en donde

$$\Sigma_{(i)(j)} = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & -2\Sigma \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_{(i),\dot{\sigma}}^a = \frac{1}{\sqrt{3}m_p} \begin{pmatrix} -A_{(1)}^1 & -A_{(2)}^1 & 2A_{(3)}^1 \\ -A_{(1)}^2 & -A_{(2)}^2 & 2A_{(3)}^2 \\ -A_{(1)}^3 & -A_{(2)}^3 & 2A_{(3)}^3 \end{pmatrix}, \quad (3.3.48)$$

junto con la siguiente ligadura:

$$1 = \Sigma^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{E}^2 + \mathcal{B}^2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{\Gamma}{3\sqrt{\xi}}\varepsilon_{abc}\mathcal{A}_0^a\mathcal{A}_{(i)}^b\mathcal{E}_{(i)}^c. \quad (3.3.49)$$

La ecuación (3.3.43) no fue obtenida a partir de (3.3.39), sino a partir de la acción (3.3.1), en donde σ es un variable cíclica. De esta manera, el momento generalizado es una cantidad conservada, la cual se derivó con respecto al tiempo t para obtener la expresión (3.3.43), luego de hacer los respectivos cambios de variable. La ventaja de esta metodología consiste en que la acción indica que solo hay un grado de libertad relacionado con el tensor $\zeta_{(i)(j)}$ ³. El sistema dinámico no es autónomo ya que existe el parámetro $\Gamma = \sqrt{3}m_p g/H$. Para obtener un sistema autónomo se debe agregar la siguiente ecuación:

$$\Gamma' = (q + 1)\Gamma. \quad (3.3.50)$$

Sin embargo, se puede obtener resultados utilizando el sistema no autónomo, los cuales serán fácilmente confirmados en el análisis completo.

Existe el punto crítico $\chi_c = (\mathcal{A}_{0c}^a, \mathcal{A}_{(i)c}^a, \Sigma_c, x_{ac}, \mathcal{E}_{(i)c}^a) = (x_{ac}, 0, 0, x_{ac}, 0)$. Este punto crítico *es independiente* del valor de Γ . El valor x_{ac} , no es cualquiera sino que debe satisfacer $(x_{1c}^2 + x_{2c}^2 + x_{3c}^2)/2 = 1$, en concordancia con la ecuación de Friedmann. Lo anterior implica que debe existir al menos dos valores propios iguales a 0. El parámetro de desaceleración es igual -1, por lo tanto el punto corresponde a un estado inflacionario. Los valores propios son $(0, 0, -\sqrt{2}\Gamma/3\sqrt{\xi} - 2, \sqrt{2}\Gamma/3\sqrt{\xi} - 2, -\sqrt{2}\Gamma/3\sqrt{\xi} - 1, \sqrt{2}\Gamma/3\sqrt{\xi} - 1, -1 - i\sqrt{2}\Gamma/3\sqrt{\xi}, -1 + i\sqrt{2}\Gamma/3\sqrt{\xi}, -2 - i\sqrt{2}\Gamma/3\sqrt{\xi}, -2 + i\sqrt{2}\Gamma/3\sqrt{\xi}, -3, -3, -3, -3, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -1, -1, -1, -1, -1)$. Todos ellos tienen parte real negativa, excepto dos que son nulos y los valores propios $\sqrt{2}\Gamma/3\sqrt{\xi} - 2, \sqrt{2}\Gamma/3\sqrt{\xi} - 1$. Ahora, cerca al punto crítico $q \approx -1$ y por lo tanto $\Gamma \approx$ constante, es decir la estabilidad dependerá únicamente del valor Γ . El punto $\Gamma_b = 3\sqrt{\xi}/\sqrt{2}$ constituye un punto de bifurcación. Para confirmar esta aseveración, se debe analizar la dinámica incluyendo la ecuación (3.3.50). Dado que el punto inflacionario se caracteriza por $q = -1$, para cualquier valor de Γ , el estado expuesto anteriormente también es un punto de equilibrio del sistema dinámico extendido. En consecuencia, se obtiene un valor propio nulo adicional. Debido a el teorema sobre conjuntos de equilibrio, presentado en la sección 2.2, la estabilidad depende del valor de Γ . Es evidente que $(x_{1c}^2 + x_{2c}^2 + x_{3c}^2)/2 = 1$ es compacto. La variable Γ también lo es debido a dos razones. Primero, el valor de la constante de acoplamiento de gauge se restringe a $|g| < 1$, de tal manera que exista una teoría cuántica perturbativa. Segundo, los subsecuentes periodos del Universo dominados

³Las ecuaciones son equivalentes debido a que los dos métodos para obtenerlas lo son también.

3 Inflación con campos vectoriales

por radiación y materia indican que H decrece en el tiempo, por lo tanto el parámetro de Hubble durante inflación no puede ser menor que el valor actual, implicando que Γ tiene una cota máxima. Todo lo anterior garantiza la utilización del teorema, indicando que inflación es eterna cuando las condiciones iniciales de H son tales que $\Gamma_c < \Gamma_b$, y es un estado transitorio cuando $\Gamma_c > \Gamma_b$. El intervalo de valores para los cuales inflación es transitoria es $\Gamma_c \in (3\sqrt{\xi}/\sqrt{2}, \sim 10^{61})$, debido a que Γ tiene una cota superior del orden de 10^{61} . Lo anterior muestra que hay un amplio rango de condiciones iniciales evitando un ajuste fino, i.e., al cambiar el gauge existe un amplio intervalo de condiciones iniciales para H en donde la física es equivalente.

Por otro lado, se requiere que la velocidad a la que se aleja el sistema del punto crítico sea pequeña, de tal manera que inflación dure lo suficiente para resolver los problemas clásicos de la cosmología. El tiempo (número de e -folds) característico de evolución N_c del sistema está dado por:

$$\left| \frac{1}{\chi} \frac{d\chi}{dN} \right| = N_c^{-1}. \quad (3.3.51)$$

Cerca del punto crítico, este está relacionado con los valores propios de la matriz de linealización. Se requiere que el tiempo característico correspondiente a los valores propios positivos sea mayor a por lo menos 60 e -folds. Por esta razón, basta analizar el mayor valor propio m_+ (parte real), el cual corresponde al tiempo característico más pequeño:

$$m_+ < N^{-1} < \frac{1}{60}, \quad (3.3.52)$$

La condición anterior es equivalente a $\Gamma_b(N^{-1} + 1) > \Gamma_b$, lo cual implica que el monto de inflación depende de los valores de ξ , g y H :

$$\frac{\sqrt{3\xi}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{N} + 1 \right) > \Gamma_b \Big|_{\chi_c} = \frac{\sqrt{3}m_p g}{H} \Big|_{\chi_c}. \quad (3.3.53)$$

En las secciones anteriores se mostró que el potencial era el responsable de proveer una salida elegante del periodo inflacionario. Se acaba de demostrar que éste ya no es necesario debido a que su papel lo cumple el término relacionado con el acoplamiento de gauge. Como una prueba de autoconsistencia del análisis, se menciona que el caso estudiado también incluye los resultados abelianos imponiendo $g = 0$.

4

Conclusiones

El análisis cualitativo de las ecuaciones de campo del modelo descrito por la acción *efectiva* (3.2.1), la cual describe un campo vectorial de gauge abeliano $U(1)$, hecho a través del estudio de la estabilidad de puntos de equilibrio, muestra que el término relacionado con la fijación de un gauge *covariante* induce un periodo inflacionario del tipo de Sitter. La inclusión de este término en la acción efectiva no solo provee una solución al problema en teoría cuántica de campos de grados de libertad no físicos, sino que puede proveer una solución a los problemas clásicos de la cosmología estandar, ya que se comporta como una constante cosmológica. El estudio de la dinámica en los conjuntos invariantes: la parte temporal y la parte espacial del campo, llevó a la conclusión de que en un gauge temporal $A_0 = 0$, no es posible obtener un periodo inflacionario, mientras que en un gauge covariante si lo es.

Por otro lado, el papel del potencial $\lambda(A_\mu A^\mu)^n$ consiste en proveer una salida al periodo inflacionario. Así es posible un correcto desarrollo de la historia térmica del Universo. Se mostró que únicamente cuando n es par, el periodo inflacionario es finito. Mediante la utilización del teorema de la variedad central local, se mostró que el monto de inflación afectado por los valores de H , λ y σ . La existencia de un estado inflacionario no depende del valor de ξ escogido. El monto de inflación está afectado por el parámetro de fijación del gauge, pero no existe un ajuste fino. Variaciones pequeñas en σ inducen pequeñas variaciones en N . Debido a que se deben introducir correcciones radiativas, se espera que esta contribución pequeña se anule, causando que las implicaciones cosmológicas del término sean independientes de ξ . El término de fijación del gauge provoca las anteriores consecuencias físicas (que son de gran importancia), cuando los efectos de la gravedad se tiene en cuenta.

El monto de expansión anisótropa se diluyó rápidamente en presencia del término de fijación del gauge o del potencial. Cuando ninguno de estos últimos está presente, como se mostró en el caso de radiación, un estado de expansión anisótropa es el atractor del sistema. Lo anterior se puede entender a partir de dos hechos. Primero el término de fijación del gauge se comporta como una constante cosmológica cuando el potencial es despreciable, y segundo el potencial con ley de potencias, induce oscilaciones rápidas. Cuando el potencial es despreciable, el término de fijación del gauge va a dominar sobre la densidad de energía del sistema y en

4 Conclusiones

especial sobre la parte espacial, por esta razón la anisotropía se diluye durante inflación. Cuando el potencial ya no es despreciable el término de fijación del gauge deja de dominar y se inducen oscilaciones, las cuales provocan que en promedio el fluido se comporte como un fluido perfecto.

En cuanto al modelo con campos vectoriales no abelianos $SU(2)$, el análisis cualitativo mostró que existe el conjunto invariante donde solamente la parte temporal está presente. La dinámica allí es equivalente a la parte temporal de tres campos abelianos. Por los resultados mostrados en el caso abeliano, es posible obtener un periodo inflacionario independientemente del valor de ξ . No obstante, debido al término de acoplamiento de gauge, la dinámica en este caso no está separada en parte temporal y parte espacial. El análisis dinámico mostró que este término cumple la misma función del potencial para el caso abeliano. En contraste con el caso abeliano, el valor de ξ modifica la estabilidad de inflación. Sin embargo, el estudio mostró que un cambio en ξ es pequeño comparado con el intervalo de condiciones iniciales de órbitas que pasan por un periodo inflacionario transitorio. De esta manera no existe un ajuste fino en ξ . Aunque del mismo modo que en el caso abeliano, se espera que las correcciones cuánticas permitan una total independencia de ξ en los resultados concernientes a inflación.

Por último, es necesario mencionar que inflación surge de manera natural al utilizar una acción efectiva que fija un gauge covariante. Al utilizar otros gauge no covariantes no se obtienen los mismos resultados. Se conjetura que la discriminación de los gauge *no covariantes* es una consecuencia de haber estudiado una acción efectiva en un espacio-tiempo curvo, en donde están presentes los efectos de la gravedad.

Bibliografía

- ADE, P. *et al.* (2013a). Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters
arXiv:1303.5076.
- ADE, P. *et al.* (2013b). Planck 2013 results. XXIII. Isotropy and Statistics of the CMB
arXiv:1303.5083.
- ADSHEAD, P. & WYMAN, M. (2012). Chromo-Natural Inflation: Natural inflation on a steep potential with classical non-Abelian gauge fields. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 261302.
- ANTONIOU, I. & PERIVOLAROPOULOS, L. (2010). Searching for a Cosmological Preferred Axis: Union2 Data Analysis and Comparison with Other Probes. *JCAP* **1012**, 012.
- ARNOLD, V. & SILVERMAN, R. (1973). *Ordinary Differential Equations*. Massachusetts, USA: MIT Press.
- BARDEEN, J. M., STEINHARDT, P. J. & TURNER, M. S. (1983). Spontaneous Creation of Almost Scale - Free Density Perturbations in an Inflationary Universe. *Phys. Rev.* **D28**, 679.
- BENNETT, C. *et al.* (2011). Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Are There Cosmic Microwave Background Anomalies? *Astrophys. J. Suppl.* **192**, 17.
- BIANCHI, L. (1898). Sugli Spazii a Tre Dimensioni che Ammettono un Gruppo Continuo di Moviment. *Soc. Ital. Sci. Mem. di Mat.* **11**, 267.
- BOGOYAVLENSKY, O. & GOKHMAN, D. (2011). *Methods in the Qualitative Theory of Dynamical Systems in Astrophysics and Gas Dynamics*. London, UK: Springer.
- CAMPANELLI, L., CEA, P., FOGLI, G. & MARRONE, A. (2011). Testing the Isotropy of the Universe with Type Ia Supernovae. *Phys. Rev.* **D 83**, 103503.
- CAPOZZIELLO, S. & DE FELICE, A. (2008). $f(R)$ Cosmology by Noether's Symmetry. *JCAP* **0808**, 016.

Bibliografía

- CEMBRANOS, J., HALLABRIN, C., MAROTO, A. & JAREÑO, S. N. (2012). Isotropy Theorem for Cosmological Vector Fields. *Phys. Rev.* **D86**, 021301.
- CEMBRANOS, J. R., MAROTO, A. & JAREÑO, S. N. (2013). Isotropy Theorem for Cosmological Yang-Mills Theories. *Phys. Rev.* **D87**, 043523.
- CHENG, T. & LI, L. (1984). *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* Oxford, UK: Oxford University Press.
- COLLINS, C. (1971). More Qualitative Cosmology. *Commun. Math. Phys.* **23**, 137.
- DIMOPOULOS, K. (2006). Can a Vector Field be Responsible for the Curvature Perturbation in the Universe? *Phys. Rev.* **D74**, 083502.
- DIMOPOULOS, K. (2007). Supergravity Inspired Vector Curvaton. *Phys. Rev.* **D76**, 063506.
- DIMOPOULOS, K. & KARCIAUSKAS, M. (2008). Non-minimally Coupled Vector Curvaton. *JHEP* **0807**, 119.
- DIMOPOULOS, K., KARCIAUSKAS, M., LYTH, D. H. & RODRIGUEZ, Y. (2009). Statistical Anisotropy of the Curvature Perturbation from Vector Field Perturbations. *JCAP* **0905**, 013.
- DIMOPOULOS, K., KARCIAUSKAS, M. & WAGSTAFF, J. M. (2010). Vector Curvaton with Varying Kinetic Function. *Phys. Rev.* **D81**, 023522.
- FADDEEV, L. & POPOV, V. (1967). Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. *Phys. Lett.* **B 25**, 29.
- FISCHLER, W., RATRA, B. & SUSSKIND, L. (1985). Quantum Mechanics of Inflation. *Nucl. Phys.* **B259**, 730.
- GOLOVNEV, A., MUKHANOV, V. & VANCHURIN, V. (2008). Vector Inflation. *JCAP* **0806**, 009.
- GROENEBOOM, N. E., ACKERMAN, L., WEHUS, I. K. & ERIKSEN, H. K. (2010). Bayesian Analysis of an Anisotropic Universe Model: Systematics and Polarization. *Astrophys. J.* **722**, 452.
- GUTH, A. H. (1981). The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev.* **D23**, 347.
- GUTH, A. H. & PI, S. (1982). Fluctuations in the New Inflationary Universe. *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1110.
- GUTH, A. H. & WEINBERG, E. J. (1981). Cosmological Consequences of a First Order Phase Transition in the SU(5) Grand Unified Model. *Phys. Rev.* **D23**, 876.

Bibliografía

- HAWKING, S. (1982). The Development of Irregularities in a Single Bubble Inflationary Universe. *Phys. Lett.* **B115**, 295.
- HAWKING, S. & ELLIS, G. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press.
- HINSHAW, G. *et al.* (2013). Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. *Astrophys. J. Suppl.* **208**, 19.
- JOSÉ, J. V. & SALETAN, E. J. (1998). *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- LIDSEY, J. E. *et al.* (1997). Reconstructing the inflaton potential—an overview. *Rev. Mod. Phys.* **69**, 373.
- LINDE, A. D. (1982). A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett.* **B108**, 389.
- LYTH, D. H. & LIDDLE, A. R. (2009). *The Primordial Perturbation Density: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*. Cambridge, UK: Cambridge University Press (2009).
- MALEKNEJAD, A. & SHEIKH-JABBARI, M. (2013). Gauge-flation: Inflation From Non-Abelian Gauge Fields. *Phys.Lett.* **B 723**, 224.
- MISNER, C. M., THORNE, K. S. & WHEELER, J. A. (1973). *Gravitation* San Francisco, USA: W. H. Freeman and Company.
- MUKHANOV, V. F. & CHIBISOV, G. (1981). Quantum Fluctuation and Nonsingular Universe. *JETP Lett.* **33**, 532.
- PENZIAS, A. A. & WILSON, R. W. (1965). A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080-Mc/s. *Astrophys. J.* **142**, 419.
- PERKO, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York, USA: Springer.
- SMOOT, G. F. *et al.* (1992). Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps. *Astrophys. J.* **396**, L1.
- STAROBINSKY, A. A. (1980). A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett.* **B91**, 99.
- STAROBINSKY, A. A. (1982). Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations. *Phys. Lett.* **B117**, 175.
- WAGSTAFF, J. M. & DIMOPOULOS, K. (2011). Particle Production of Vector Fields: Scale Invariance is Attractive. *Phys. Rev.* **D83**, 023523.

Bibliografia

- WAINWRIGHT, J. & ELLIS, G. (2005). *Dynamical Systems in Cosmology*. Cambridge University Press.
- WATANABE, M.-A., KANNO, S. & SODA, J. (2009). Inflationary Universe with Anisotropic Hair. *Phys. Rev. Lett.* **102**, 191302.
- WEINBERG, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York, USA: John Wiley & Sons, Inc.
- WEINBERG, S. (1995). *The Quantum Theory of Fields, Volume 2: Modern Applications*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- WEINBERG, S. (2008). *Cosmology*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- WIGGINS, S. (2000). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Bristol, UK: Springer-Verlag.
- WU, K. S., LAHAV, O. & REES, M. J. (1999). *The Large-Scale Smoothness of the Universe*. *Nature* **397**, 225.
- YADAV, J., BHARADWAJ, S., PANDEY, B. & SESHADRI, T. R. (2005). *Testing Homogeneity on Large Scales in the Sloan Digital Sky Survey Data Release One*. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **364**, 601.
- YOKOYAMA, S. & SODA, J. (2008). Primordial statistical anisotropy generated at the end of inflation. *JCAP* **0808**, 005.