

MODELADO Y SIMULACIÓN UNIDIMENSIONAL TRANSITORIA DEL FLUJO
BIFÁSICO EN TUBERÍAS DE POZOS PETROLEROS

MANUEL FERNANDO JEREZ CARRIZALES

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA
BUCARAMANGA
2015

MODELADO Y SIMULACIÓN UNIDIMENSIONAL TRANSITORIA DEL FLUJO
BIFÁSICO EN TUBERÍAS DE POZOS PETROLEROS

Presentado por:
MANUEL FERNANDO JEREZ CARRIZALES

Trabajo de investigación como requisito para optar al título de
Magíster en Ingeniería Mecánica

Director:
Ph.D. JULIAN ERNESTO JARAMILLO IBARRA
Codirector:
Ph.D. DAVID ALFREDO FUENTES DÍAZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS
MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA
BUCARAMANGA
2015

DEDICATORIA

A mis padres, a mi hermana,
y a mi sobrina Lucy que acaba de llegar.

A todas aquellas personas
que me han ayudado a
crecer como persona,

Manuel.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Centro Tecnológico de Transferencia de Calor de la UPC liderado por el Ph.D. Assensi Oliva. Durante la estadía en el laboratorio se recibió importantes sugerencias por parte del Ph.D. Sergio Morales Ruiz para el desarrollo del presente trabajo.

Agradezco a Colciencias y a la UIS que por medio de la VIE, el CEC, la Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas y la Escuela de Ingeniería Mecánica apoyaron económicamente cada fase del proyecto.

También quiero agradecer a mi director Ph.D. Julián Jaramillo y a mi codirector Ph.D. David Fuentes por las innumerables horas de asesorías brindadas.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	17
1 FLUJO BIFÁSICO EN TUBERÍAS DE POZOS PETROLEROS: DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	18
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	18
1.2 JUSTIFICACIÓN	20
1.3 CAMPO ESCUELA COLORADO Y LA DEPOSICIÓN DE PARAFINAS	21
1.4 LIMITACIONES Y ALCANCES DEL PROYECTO	22
1.4.1 Limitación del alcance respecto al proyecto global 8557 VIE- Campo Escuela Colorado	22
2 ESTADO DEL ARTE	24
2.1 INTRODUCCIÓN	24
2.2 MODELOS SIMPLIFICADOS Y MECANICISTAS	25
2.3 MODELO DRIFT-FLUX	27
2.4 MODELO DE DOS FLUIDOS: TWO FLUID MODEL (TFM)	30
2.5 DESAFÍOS EN EL FUTURO	32
3 ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN	34
3.1 FUNDAMENTOS	34
3.1.1 Principales variables	35
3.1.2 Sistemas de unidades	36
3.2 MÉTODO BLACK OIL: PROPIEDADES DEL CRUDO Y EL GAS	36
3.3 MALLADO Y ESTRATEGIAS DE AVANCE EN LA TUBERÍA	39

3.3.1	Mallado único para los métodos estacionarios	39
3.3.2	Mallas desplazadas para los modelos en régimen transitorio . . .	39
3.3.3	”Marching algorithm” para los métodos estacionarios	40
3.3.4	Estrategias de avance en la tubería para los métodos transitorios	41
3.4	INTEGRACIÓN A TRAVÉS DE UN VOLUMEN DE CONTROL Y DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES BASE	43
3.4.1	Ecuación de difusión transitoria	43
3.4.2	Ecuación de convección-difusión transitoria	44
3.5	MODELO MATEMÁTICO DE LOS MÉTODOS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO	45
3.6	MODELO DRIFT FLUX TRANSITORIO: MODELO MATEMÁTICO	49
3.6.1	Ecuaciones de continuidad del líquido y del gas	50
3.6.2	Ecuación de <i>drift flux</i>	51
3.6.3	Método de solución	52
3.7	MODELO DE DOS FLUIDOS TRANSITORIO: MODELO MATEMÁTICO	53
3.7.1	Ecuaciones de la conservación de la cantidad de movimiento . .	55
3.7.2	Ecuación de la fracción de líquido	56
3.7.3	Ecuación de corrección de presión	58
3.7.4	Condiciones de frontera	60
3.8	NOMENCLATURA	62
4	VALIDACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	65
4.1	VALIDACIÓN Y RESULTADOS DE LOS MODELOS ESTACIONARIOS	65
4.1.1	Influencia de las propiedades en los resultados de los modelos . .	65
4.1.2	Validación de los modelos estacionarios de cálculo de la caída de presión	66

4.1.3	Resultados de la comparación del pozo 37 del Campo Escuela Colorado	69
4.2	RESULTADOS DEL MODELO DRIFT FLUX TRANSITORIO	70
4.2.1	Caso 1	70
4.2.2	Caso 2	76
4.2.3	Caso 3	79
4.3	MODELO DE DOS FLUIDOS APLICADO AL FLUJO EN TUBERÍAS	83
4.3.1	Validación del modelo two fluid	83
4.3.2	Pruebas del modelo de dos fluidos para simular el flujo bifásico en tuberías de pozos petroleros	86
5	CONCLUSIONES	89
6	RECOMENDACIONES Y OBSERVACIONES	91
	BIBLIOGRAFÍA	92
	ANEXOS	99

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1 Algunos parámetros de las zonas B y C de la formación Mugrosa.	21
Tabla 2 Unidades de algunas propiedades en la industria del petróleo y el sistema internacional.	37
Tabla 3 Valores para los parámetros de la ecuación <i>drift flux</i> según Hasan et al.	49
Tabla 4 Nomenclatura usada en el capítulo 3.	62
Tabla 5 Subíndices usados en el capítulo 3.	64
Tabla 6 Influencia de los métodos de cálculo de las propiedades.	66
Tabla 7 Regresión lineal de los datos de la figura 13.	67
Tabla 8 Escalado del modelo MB.	67
Tabla 9 Comparación de resultados con información de laboratorio.	81

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1 Obstrucción de una tubería.	19
Figura 2 Pasos en el proyecto general para determinar la deposición.	23
Figura 3 Comparación de los resultados de tres metodologías para calcular el mapa de patrones de flujo.	28
Figura 4 Ejemplos simplificados de los patrones de flujo líquido-gas y flujo monofásico.	35
Figura 5 Malla única para los métodos en estado estable.	40
Figura 6 Malla empleada para la discretización de las variables en los modelos <i>drift flux</i> y dos fluidos.	41
Figura 7 Diagrama de flujo del algoritmo de avance implementado para los modelos en estado estable.	42
Figura 8 Procedimiento seguido en cada prueba.	46
Figura 9 Algoritmo de selección del patrón de flujo para el modelo de MB.	48
Figura 10 Condiciones de frontera de la ecuación de cantidad de movimiento para el flujo bifásico en tuberías.	61
Figura 11 Condiciones de frontera para α en las diferentes ecuaciones de continuidad.	61
Figura 12 Condiciones de frontera para p'	62
Figura 13 Comparación de los valores medidos de la caída de presión contra los valores predcidos por los modelos de Ansari et al., Mukherjee & Brill, Hagedorn & Brown y Hasan et al.	66

Figura 14	Resultados de escalar el modelo MB para lograr un mejor ajuste con los datos del grupo A.	68
Figura 15	Resultados de escalar el modelo MB para lograr un mejor ajuste con los datos del grupo B.	68
Figura 16	Predicción de la presión por los modelos de AN, MB, HB, HK. . .	69
Figura 17	Predicción de la fracción del líquido por los modelos de AN, MB, HB, HK.	70
Figura 18	Presión a lo largo de la tubería para el tiempo inicial y el tiempo final.	71
Figura 19	Comparación de los valores de la presión en la boca del pozo para diferentes tiempos y mallados.	72
Figura 20	Caudal inicial y final del líquido (parcial).	73
Figura 21	Caudal del líquido para los últimos tiempos calculados.	73
Figura 22	Caudal inicial y final del gas (parcial).	74
Figura 23	Caudal del gas para los tiempos finales(parcial).	75
Figura 24	Fracción del líquido para los instantes inicial y final.	75
Figura 25	Presión a lo largo de la tubería para diferentes valores del Courant.	76
Figura 26	Fracción de líquido a lo largo de la tubería para diferentes valores del Courant.	77
Figura 27	Caudal del líquido a lo largo de la tubería para diferentes valores del Courant.	78
Figura 28	Caudal del gas a lo largo de la tubería para diferentes valores del Courant.	78
Figura 29	Caudal del líquido para dos cantidades diferentes de volúmenes de control en varios tiempos.	79
Figura 30	Caudal del gas para dos cantidades diferentes de volúmenes de control en varios tiempos.	80

Figura 31	Presión a lo largo de la tubería.	80
Figura 32	Presión en la boca del pozo.	81
Figura 33	Comparación de la presión para los instantes inicial y final. . . .	82
Figura 34	Comparación de la fracción de líquido para los instantes inicial y final.	82
Figura 35	Descripción gráfica del problema de la llave del grifo.	83
Figura 36	Comparación del modelo implementado con la solución analítica para la fracción de vacío y la velocidad del líquido.	85
Figura 37	Valor del residuo másico para cada una de las iteraciones.	86
Figura 38	Valores iniciales del caudal para el caso desarrollado mediante el modelo de dos fluidos.	87
Figura 39	Valores del caudal a los 0.1 [s] para el caso desarrollado mediante el modelo de dos fluidos.	87
Figura 40	Valores del caudal a los 0.2 [s] para el caso desarrollado mediante el modelo de dos fluidos.	88
Figura 41	Caudal inicial y final del líquido (completa).	99
Figura 42	Caudal del líquido para los últimos tiempos calculados (completa). . . .	100
Figura 43	Caudal inicial y final del gas (completa).	101
Figura 44	Caudal del gas para los tiempos finales (completa).	102
Figura 45	Algoritmo de cálculo de las propiedades de la mezcla.	103
Figura 46	Algoritmo de cálculo del método de Mukherjee & Brill.	104

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. GRÁFICAS DETALLADAS DEL CASO 1 EN EL MÉTODO DRIFT FLUX TRANSITORIO.....	99
Anexo B. DIAGRAMA DE FLUJO: EJEMPLO.....	103

RESUMEN

TÍTULO: MODELADO Y SIMULACIÓN UNIDIMENSIONAL TRANSITORIA DEL FLUJO BIFÁSICO EN TUBERIAS DE POZOS PETROLEROS¹

AUTOR: MANUEL FERNANDO JEREZ CARRIZALES².

PALABRAS CLAVE: flujo bifásico, tubería, transitorio, mecanicista.

Se implementaron diferentes metodologías para simular el flujo bifásico en tuberías de pozos petroleros tanto para el régimen estacionario como para el régimen transitorio.

Todos los modelos fueron desarrollados para simular tuberías verticales con secciones circulares y se permite la variación del diámetro de la tubería a lo largo de esta, los cambios temporales en los caudales de los fluidos deben ser lentos. Las propiedades de los fluidos son calculadas a partir del modelo black oil con la posibilidad de seleccionar distintas correlaciones para algunas propiedades.

Primero se presenta el estado del arte enfocado pero no limitado a las predicciones del flujo bifásico en tuberías de pozos petroleros. En el estado del arte se explican las ideas básicas de los diferentes enfoques que se han adoptado para resolver este tipo de problemas. Así mismo, también se menciona algunos retos de investigación para el futuro.

Posteriormente se explican los detalles de cada uno de los modelos implementados y desarrollados, estos son: modelos simplificados de Hagedorn & Brown y Mukherjee & Brill, modelo mecanicista de Ansari et al, modelo drift flux estacionario de Hasan et al, y los modelos transitorios drift flux y de dos fluidos. La metodología drift flux fue usada en un modelo transitorio con una buena estabilidad al momento de realizar los cálculos.

Finalmente, se desarrollan una serie de comparaciones entre los distintos modelos y datos que permiten evaluar su desempeño. Las comparaciones estacionarias mostraron un mejor desempeño para los modelos de Hasan et al y Ansari et al. Las comparaciones del modelo drift flux transitorio fueron realizadas una vez se alcanza el estado estable.

¹Trabajo de investigación.

²Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas, Maestría en Ingeniería Mecánica, Director Ph.D. Julián Ernesto Jaramillo Ibarra, Codirector Ph.D. David Alfredo Fuentes Díaz.

ABSTRACT

TITLE: MODELING AND SIMULATION OF A TRANSITORY ONE DIMENSIONAL TWO PHASE FLOW IN OIL-PRODUCING PIPES¹.

AUTHOR: MANUEL FERNANDO JEREZ CARRIZALES².

KEY WORDS: two phase flow, pipeline, unsteady, mechanistic, vertical lift performance, drift flux.

It is implemented different approaches for simulating steady and unsteady liquid-gas two phase flow in tubes.

All models were developed for fluid simulation in cylindrical vertical tubes, also, it could be taken into account different diameters in the tubes. Changes in flow rate should be smooth. Moreover, fluid properties are calculating with a black oil model and it is possible to select different correlations for some properties.

First, it is shown a state of the art focused on predicting two phase flow in oil-producing pipelines with some references to refrigeration industry. Main ideas of different approaches were explained. Also, it was mentioned some research challenge for the future.

Afterwards, implemented models are explained in details: simplified models as Hagedorn & Brown and Mukherjee & Brill, mechanistic model as Ansari et al, drift flux steady model as Hasan et al, and unsteady drift flux and two fluid models.

Finally, it was developed some comparison between models and data from literature to evaluate performance. Stationary state comparison showed a better performance for Hasan et al and Ansari et al models than Hagedorn & Brown and Mukherjee & Brill models. Comparisons for transitory drift flux model were made when stationary state was reached.

¹Research work.

²Physical-Mechanical Engineering Faculty, Mechanical Engineering Master, Director Ph.D. Julián Ernesto Jaramillo Ibarra, Codirector Ph.D. David Alfredo Fuentes Díaz.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo, requisito para obtener el título de Magíster en Ingeniería Mecánica, nació de un proyecto aprobado en una convocatoria interna de la universidad cuyo objetivo, en términos generales, era predecir la deposición de parafinas, asfaltenos y otros materiales en las paredes de las tuberías de pozos petroleros.

El capítulo 1 presenta una descripción detallada del problema junto con la justificación para solucionarlo. Asimismo, se presenta las limitaciones que se han de tener en cuenta para los diferentes modelos matemáticos implementados.

Posteriormente se presenta el estado del arte en el capítulo 2, también se clasifican los diferentes modelos existentes para la simulación del flujo bifásico y sus principales diferencias.

Algunos conceptos que no han sido presentados hasta este punto y los modelos matemáticos usados serán descritos en el capítulo 3. La presentación de los diferentes modelos en un mismo capítulo facilita la comparación de los procedimientos necesarios en cada uno de ellos.

Casi para terminar, se presenta en el capítulo 4 los casos usados para validar los modelos junto con los resultados obtenidos por las simulaciones. Además, en esta parte del libro se presenta la sección más importante, el análisis de los resultados obtenidos.

Con una breve extensión, un valioso y necesario aporte, se presenta las conclusiones producto del trabajo de investigación en el capítulo 5. En este punto y siguiendo las normas para la presentación de trabajos, se incluye la bibliografía y se enumeran cada una de las referencias bibliográficas usadas a lo largo del libro.

Para terminar, se destaca que durante el desarrollo del presente proyecto se presentaron 2 artículos [Ref. 36,37] y 3 conferencias [Ref. 38–40] los cuales son debidamente referenciados a lo largo del libro. La aceptación de cada uno de estos trabajos demuestra la labor realizada en el tiempo de estudio.

1. FLUJO BIFÁSICO EN TUBERÍAS DE POZOS PETROLEROS: DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El presente trabajo de investigación nació de la necesidad del Campo Escuela Colorado de mitigar la deposición de parafinas en las tuberías de los pozos de petróleo. A continuación se presentan las razones por las cuales se propuso el presente proyecto como el trabajo de investigación a desarrollar en la maestría.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

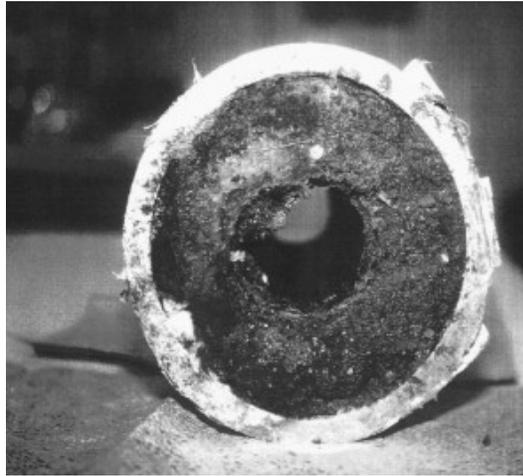
Las tuberías de los pozos de petróleo del Campo Escuela Colorado han sufrido del fenómeno de deposición de parafinas que obstruyen parcialmente las tuberías y ocasionan una baja en la producción [Ref. 16]. La reducción del área transversal de la tubería genera una modificación en el perfil de la velocidad de los fluidos en la tubería y con ésta, también se producen cambios en la caída de presión. El problema de la predicción de la obstrucción de las tuberías está por lo tanto acoplado con la predicción del flujo en la tubería. Este fenómeno depende, entre otros factores, de la composición del crudo, de la presión y temperatura en una sección de la tubería y de la velocidad de los componentes de la mezcla [Ref. 68]. Antes de determinar la obstrucción, se debe tener un modelo confiable que permita estimar las condiciones a las cuales fluye el crudo en cualquier punto de la tubería, este modelo de simulación de flujo en la tubería debe ser desarrollado en régimen transitorio debido a la naturaleza del fenómeno de obstrucción de la tubería [Ref. 46].

En la figura 1 se presenta una imagen de lo que podría llegar a ser la obstrucción de una tubería a causa de la deposición de parafinas.

El crudo, inicialmente a una alta presión y temperatura, puede encontrarse como líquido en el yacimiento y, a medida que disminuye la presión (al ser extraído del pozo) se puede liberar el gas disuelto en el crudo formando una mezcla bifásica. El flujo bifásico presente en la tubería de un pozo de petróleo es un fenómeno inherentemente complejo. La interacción entre los dos fluidos forman estructuras geométricas comúnmente conocidas como patrones de flujo. Los patrones de flujo hacen que el flujo bifásico sea un problema más difícil de modelar que su contraparte, el flujo monofásico [Ref. 11,34].

Los patrones de flujo formados por la interacción de los dos fluidos presentan una geometría significativamente diferente lo que ha causado que los métodos tradicionales de modelado del flujo bifásico planteen diferentes ecuaciones para los diferentes patrones de flujo [Ref. 1,19,31,55,63]. Las ecuaciones suelen ser discontinuas cuando ocurre el

Figura 1: Obstrucción de una tubería.



Fuente: Banki *et al.* [Ref. 4].

cambio a otro patrón de flujo, lo que conlleva a problemas de convergencia en los métodos y resultados que no reflejan fielmente el comportamiento real del flujo en la tubería [Ref. 1,63]. Cabe destacar que, el solo hecho de escoger un patrón de flujo incorrecto provoca errores significativos en la simulación [Ref. 31,67]. La selección del patrón de flujo presente en una sección de la tubería aún se encuentra en investigación [Ref. 2,24].

Los métodos tradicionales en la simulación del flujo bifásico en tuberías fueron basados en el estado estable, estos métodos pueden recibir el nombre de modelos simplificados o modelos mecanicistas. Los modelos simplificados usan una o varias ecuaciones que fueron obtenidas por la regresión de datos experimentales [Ref. 13,19,28,55,58], su aplicación está fuertemente limitada a las condiciones en las cuales los datos fueron tomados. Los modelos mecanicistas se basan en el desarrollo de las ecuaciones de la cantidad de movimiento que deben ser resueltas con ayuda de relaciones de cierre obtenidas por datos experimentales [Ref. 1,63,69,70].

El presente proyecto hace parte del proyecto No. 8557 *desarrollo de una herramienta computacional para la simulación del flujo multifásico de pozos petroleros del Campo Escuela Colorado* aprobado en una convocatoria interna de la Universidad Industrial de Santander. El proyecto No. 8557 busca desarrollar un software que permita determinar la deposición de parafinas y asfaltenos en las paredes de la tubería. Un estudiante de la Maestría en Ingeniería Química se encargó del modelado de la deposición para unas condiciones especificadas de presión, velocidad y temperatura. **El presente proyecto obtiene las condiciones de presión y velocidad** en cualquier punto de la tubería

de manera que se proporcionan los datos de entrada necesarios para el modelo de deposición de materiales en las paredes de la tubería.

En resumen, existen varios métodos para determinar la caída de presión en tuberías, sin embargo, estos métodos suelen tener un amplio margen de error, sobretodo, cuando son puestos a prueba en la amplia variedad de condiciones de flujo de la industria del petróleo.

1.2 JUSTIFICACIÓN

Uno de los problemas que pueden presentar los pozos con asfaltenos y parafinas es la obstrucción de las tuberías a causa de la deposición de estos materiales que finalmente disminuyen la rentabilidad del pozo.

En la industria del petróleo, al igual que en otras industrias, se busca optimizar los procesos para obtener los mayores beneficios económicos sin sacrificar la seguridad en el sitio de operación. La extracción de crudo no es la excepción; para optimizar el proceso de extracción del crudo se debe conocer el comportamiento de cada uno de los componentes usados, así como también conocer el comportamiento del pozo. Como mencionan Mukherjee & Brill en su monografía, un diseño preciso del pozo es la clave para alcanzar la tasa de flujo óptima [Ref. 11]. Una correcta predicción de la caída de presión en la tubería para un flujo de caudal dado le proporciona al ingeniero de diseño una fuente de información valiosa para determinar las mejores condiciones de operación de un pozo y los equipos necesarios. Una incorrecta estimación de la caída de presión como función del flujo de crudo conlleva a una incorrecta estimación de la cantidad de producto disponible para vender o un gasto energético imprevisto para los pozos con surgencia artificial.

La predicción, del flujo bifásico en tuberías, que el presente proyecto hace en conjunto con el modelo de deposición permitirán controlar la obstrucción de las tuberías, a partir de recomendaciones en los valores de los flujo.

Finalmente, el presente proyecto es un aporte a la capacidad investigativa de la Escuela de Ingeniería Mecánica en el campo de la simulación del flujo bifásico. Los modelos implementados son comparados para determinar cuál se comporta mejor bajo unas condiciones especificadas.

1.3 CAMPO ESCUELA COLORADO Y LA DEPOSICIÓN DE ASFALTENOS, PARAFINAS Y OTROS EN LAS PAREDES DE LA TUBERÍA

El Campo Colorado es un terreno de 6000 hectáreas que se encuentra ubicado en el municipio de San Vicente de Chucurí en el que se han perforado 75 pozos. Las primeras perforaciones se realizaron en el año 1923 y finalmente en el año 2006 se creó el Campo Escuela Colorado mediante un convenio inter-administrativo de cooperación empresarial con fines **científicos y tecnológicos** entre la UIS y ECOPETROL por 10 años [Ref. 71] [Ref. 59].

Los pozos del Campo Colorado se encuentran en seis bloques principales divididos por 7 fallas satélite [Ref. 59]. Las unidades productoras del Campo Colorado son las formaciones la Paz, Esmeraldas, Mugrosa y Colorado las cuales pueden alcanzar un espesor de hasta 1000[m], 1300[m], 823 [m] y 914[m], respectivamente. La formación Mugrosa se divide en varias zonas en las cuales se puede encontrar crudo de diversas composiciones y a diversas profundidades, la tabla 1 muestra unos valores representativos de dos zonas de la formación [Ref. 59].

Tabla 1: Algunos parámetros de las zonas B y C de la formación Mugrosa.

Parámetro	Zona B	Zona C	Unidad
Presión estática	900	3000	[psi]
Temperatura	114	174	[°F]
Gravedad API	41.2	39.7	[API]
Profundidad promedio	1700	3500	[ft]
Presión de burbuja (Pb)	648	2078	[psia]
Viscosidad a Pb	1.64	0.462	[Cp]
Factor de formación a Pb	1.091	1.401	[BBL/STB]
Solubilidad del gas en el crudo	140	648	[SCF/STB]
Crudo original	20.0	37.3	[MMBBL]
Porosidad promedio	13.2	17.6	[%]
Área	256	438	[ha]

De los 75 pozos perforados solo 20 pozos han producido más de 200000 [BBL] y solo el pozo Colorado 38 ha producido más de 500000 [BBL] [Ref. 16]. El promedio de la producción por pozo es de 112000 [BBL] y la máxima producción diaria del Campo Colorado se alcanzó en 1961 con 1771 barriles diarios [Ref. 16]. Así mismo, en el año

1963 Ecopetrol alcanzó el número máximo de pozos activos, 44 pozos [Ref. 59].

La principal causa de la caída de la producción del Campo Escuela Colorado es el taponamiento de las tuberías por parafinas [Ref. 16] y, también es la principal causa de inactividad en los pozos [Ref. 59]. Ortega explica que para el año 2010 solo se encontraban 7 pozos activos de los 75 pozos perforados en el campo.

1.4 LIMITACIONES Y ALCANCES DEL PROYECTO

La complejidad del tema a tratar obliga a que se tengan que realizar distintas simplificaciones y así poder desarrollar las metas propuestas. Algunas de estas complejidades podrán ser trabajadas en futuro proyectos tomando como punto de partida el presente proyecto.

Se enumeran a continuación las principales limitaciones asumidas en los modelos implementados:

1. El proyecto ha sido enfocado en el flujo bifásico líquido gas y no en el flujo monofásico. No se contemplará la simulación de transiciones de una a dos fases.
2. Entendiéndose el presente proyecto como un primer paso en la simulación del flujo bifásico para la Maestría en Ingeniería Mecánica, Los modelos trabajarán con secciones transversales circulares y no coronas circulares, y con ello, las simulaciones son realizadas en pozos con surgencia natural¹ y no se realizan en pozos con sistema de bombeo mecánico.
3. Los cambios temporales son lentos.
4. Se selecciona una temperatura promedio para el fluido en la tubería.
5. El cálculo de las propiedades se realiza con el modelo black oil.
6. Las simulaciones son realizadas con tuberías verticales.

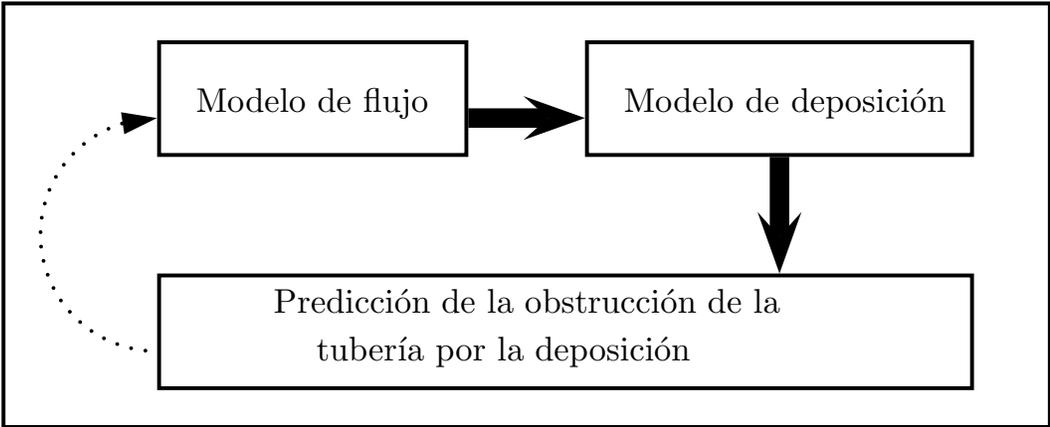
1.4.1 Limitación del alcance respecto al proyecto global 8557 VIE-Campo Escuela Colorado

La idea del presente trabajo de investigación de maestría nació del proyecto 8557 y corresponde a la solución de una parte de éste como se muestra en la figura 2. Con el presente proyecto se desea encontrar la presión y las velocidades de los fluidos en cada sección de la tubería que, en conjunto con sus derivadas, serán los datos de entrada

¹Para el caso de pozos con un sistema de bombeo electro sumergible es posible simular la tubería superior a la bomba, sin incluirla.

para el modelo de deposición de parafinas desarrollado en un trabajo de investigación de la maestría en Ingeniería Química.

Figura 2: Pasos en el proyecto general para determinar la deposición.



2. ESTADO DEL ARTE

En este capítulo se presenta una revisión de los métodos más relevantes en la industria del petróleo para modelar el flujo multifásico en tuberías. Se incluyen desde los modelos simplificados y mecanicistas hasta los principios de los modelos drift flux y two fluid.

Existe una gran cantidad de modelos en la literatura para simular el flujo multifásico en tuberías, sin embargo, ningún modelo es capaz de reproducir todas las condiciones de flujo multifásico presentes en la industria del petróleo. Finalmente, se mencionan algunos temas en los que se requiere más investigación que lleven a simulaciones con resultados más cercanos a los datos de pozos reales.

2.1 INTRODUCCIÓN

Los modelos para predecir la relación entre el flujo y la caída de presión pueden ser clasificados en modelos de gran escala y modelos de pequeña escala. Los modelos de gran escala son basados en promedios espaciales, son desarrollados para obtener un valor representativo de la velocidad y la presión en una región dada. Los modelos de gran escala más comunes son los modelos homogéneos, *drift flux* y modelos de dos fluidos. Por otro lado, los modelos de pequeña escala simulan el flujo multifásico siguiendo la interfase y pueden mostrar las burbujas, balas y sus formas; esto conlleva a métodos computacionalmente más costosos. Ayala *et al.* explicaron algunas ideas detrás de nuevas técnicas tales como la Simulación Numérica Directa (Hybrid Direct Numerical Simulation, HDNS) y el método de Lattice Boltzmann [Ref. 2].

Los modelos a gran escala fueron cronológicamente clasificados en [Ref. 11]:

1. *El periodo empírico, 1950-1975*: algunas correlaciones empíricas que trataban la mezcla líquido-gas como un fluido homogéneo fueron desarrolladas. Estas correlaciones fueron basadas en pocos experimentos hechos en laboratorios y campos. Así mismo, los investigadores empezaron a notar la existencia de patrones de flujo y el deslizamiento entre las fases. Algunas correlaciones publicadas en este periodo de tiempo fueron realizadas por Poettmann & Carpenter, Duns & Ros, Fancher & Brown, Orkiszewski y Hagedorn & Brown [Ref. 19,21,28,58,64].
2. *Los años del despertar, 1970-1985*: los computadores fueron usados por compañías para predecir las tasas de flujo y la distribución de la presión en la tubería. Además, la selección de los patrones de flujo no era satisfactoria y las predicciones del flujo en tuberías inclinadas conducían a errores. Algunos trabajos presentados en este periodo corresponden a Aziz, Chierici y Beggs & Brill [Ref. 3,7,13].

3. *El periodo de modelamiento, 1980s - 1994*: fueron presentados algunos modelos mecanicistas que incluían un mejor entendimiento del flujo multifásico. También, nuevos experimentos fueron llevados a cabo con instrumentos mejorados; Mukherjee & Brill, Hasan & Kabir y Ansari presentaron algunos modelos en este periodo de tiempo [Ref. 1,29,55]. Se plantearon las ecuaciones gobernantes para cada fluido: conservación de masa, momento y energía. Es importante añadir que, aparecieron nuevos métodos transitorios y software comercial dedicado al flujo multifásico en tuberías.

La fecha final del *periodo de modelamiento* fue limitada al año de publicación del artículo de Brill & Arirachakaran [Ref. 11], sin embargo, las investigaciones en las últimas dos décadas están enfocadas en tópicos similares: datos más exactos tomados de nuevos experimentos, modelos más elaborados que representen la física del flujo multifásico, correcciones para los mapas de patrones de flujo y modelos simplificados con la capacidad de ser ajustados. Algunos modelos mecanicistas para pozos desviados fueron presentados por Petalas & Aziz, Gomez *et al.*, Kaya y Khasanov [Ref. 25,42,43,63]. En cambio, un modelo *drift flux* desarrollado en este periodo de tiempo fue desarrollado por Hasan *et al.* [Ref. 31].

2.2 MODELOS SIMPLIFICADOS Y MECANICISTAS

Existen dos grandes grupos dentro de los cuales la mayoría de los modelos pueden ser clasificados, ellos son los modelos mecanicistas y los modelos simplificados. Sin importar a cual tipo pertenezcan, todos entregan como resultados el valor de la caída de presión por unidad de longitud y generalmente tienen en cuenta el cálculo de la fracción del líquido y del patrón de flujo. Además, la mayoría de los modelos no incluyen un enfoque termodinámico.

Los modelos simplificados usan un grupo de correlaciones empíricas para obtener sus resultados. Algunas de estas ecuaciones no tienen un fundamento físico, simplemente son ecuaciones ajustadas a los datos experimentales mientras que, los modelos mecanicistas utilizan diversas ecuaciones de balance del momento para cada patrón de flujo utilizado. A pesar de la definición de estas ecuaciones, aún es necesario utilizar algunas relaciones empíricas para el modelo. En las siguientes secciones se explicarán los modelos *drift flux* y de dos fluidos. Los modelos *drift flux* y de dos fluidos son casos especiales de los modelos simplificados y mecanicistas, respectivamente.

Otra forma de clasificar a los modelos es su dependencia con el tiempo. Los modelos en estado estable no necesitan de una ecuación de alta complejidad para el balance de masa, basta con igualar el flujo volumétrico a condiciones estándar en cada sección de la tubería. Por otro lado, el modelo en estado transitorio tiene que calcular adicional-

mente el caudal de salida de cada volumen de control en la tubería.

Los primeros artículos de métodos para predecir la caída de presión en tuberías verticales fueron publicados por Poettmann & Carpenter y Baxendell & Thomas [Ref. 6,64]. Los autores usaron una ecuación empírica para determinar el gradiente de presión. Esta ecuación depende de la presión hidrostática y el factor de fricción, cada grupo de autores presentaron su propia gráfica para calcular el factor de fricción. La principal restricción de estos modelos es la hipótesis de flujo homogéneo lo cual no es válido para todos los patrones de flujo, por ejemplo, en el flujo bala en el cual existe un deslizamiento entre las fases.

En 1963, Duns & Ros definieron un grupo de números adimensionales y desarrollaron un modelo junto con un mapa de patrones de flujo con 3 regiones principales.

Dos años después, Hagedorn & Brown usaron un pozo vertical de 1500 [ft] en Dallas para realizar pruebas con aire, agua y crudo además de recopilar los datos de Fancher & Brown para un total de 475 test y 2905 puntos de presión [Ref. 21,28]. El resultado fue un modelo que ha sido seleccionado por varios autores como punto de partida de nuevos modelos; por ejemplo, Ansari dijo que el método modificado de Hagedorn & Brown¹ presenta un excelente comportamiento [Ref. 1]. Una de las modificaciones comúnmente utilizadas resuelve el problema de valores físicamente imposibles para la fracción de líquido en flujo vertical [Ref. 27].

Orkiszewski propuso un modelo que es una extensión del modelo desarrollado por Griffith & Wallis en 1961, Orkiszewski usó el modelo de Griffith & Wallis para el patrón de flujo burbuja y el modelo de Duns & Ros para el flujo anular [Ref. 26,58]. Agregando a lo anterior, Orkiszewski usó los datos recolectados por Hagedorn & Brown. Luego, en 1974 Chierici *et al.* modificaron el modelo de Orkiszewski para el flujo bala [Ref. 13,28].

En 1973, Beggs & Brill fueron los primeros en desarrollar una correlación que puede ser usada para pozos desviados. Usando dos tuberías acrílicas de 90 [ft] de longitud y 1-1.5 [in] de diámetro llevaron a cabo 584 pruebas para diferentes ángulos con aire y agua [Ref. 7].

El primer modelo mecanicista fue desarrollado por Taitel & Dukler en 1976, desde entonces, muchos modelos han sido publicados. Por ejemplo, el modelo de Ansari *et al.* y el modelo de Petalas & Aziz [Ref. 1,63,70]. El primero está compuesto de varios métodos que describen matemáticamente cada patrón de flujo; la predicción del patrón de flujo fue basada en los trabajos de Taitel *et al.* y Barnea *et al.* [Ref. 5,69]. Finalmente, el modelo fue comparado con 1712 datos de pozos y 7 métodos. Ansari *et al.*

¹El método modificado de Hagedorn & Brown usado por Ansari es capaz de calcular la caída de presión en pozos desviados.

encontraron un mejor desempeño en su modelo comparado con los otros 7 métodos. Sin embargo, el desempeño de 4 métodos era cercano. Cabe resaltar que el método de Ansari no estaba enfocado en pozos desviados y su uso en estos casos puede conducir a grandes porcentajes de error.

En el año 2000, Petalas & Aziz definió otro modelo mecanicista teniendo en cuenta los siguiente patrones de flujo: flujo burbuja disperso, flujo estratificado, flujo anular, flujo burbuja, flujo bala y flujo espumoso². El flujo espumoso es calculado como una interpolación entre el flujo burbuja disperso y el anular, o el flujo bala y el anular; este enfoque resuelve los problemas de discontinuidad presentados por transiciones en medio de dos patrones de flujo. Los autores usaron una base de datos compuesta por 20000 mediciones de laboratorio y 1800 mediciones de pozos [Ref. 63].

En la figura 3 se presenta una comparación gráfica de tres formas de seleccionar patrones de flujo. El mapa de patrones de flujo fue generado con los métodos de Ansari *et al.* (AN), Mukherjee & Brill (MB) y Hasan *et al.* (HA) [Ref. 1,5,31,55,69]. Este ejemplo muestra las discrepancias entre estos tres métodos para seleccionar el patrón de flujo.

Una ecuación general que representa las tres causas de la caída de presión en tuberías en estado estable se muestra en (Eq 2.1). La caída total de la presión depende del factor de fricción, del cambio de altura y de la aceleración del fluido. La aceleración del fluido puede ser causada por expansión del fluido o por la entrada o salida del flujo a través de las paredes de la tubería [Ref. 30,60].

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{Total} = \left(\frac{dp}{dz}\right)_{Fricción} + \left(\frac{dp}{dz}\right)_{Altura} + \left(\frac{dp}{dz}\right)_{Aceleración} \quad (\text{Eq 2.1})$$

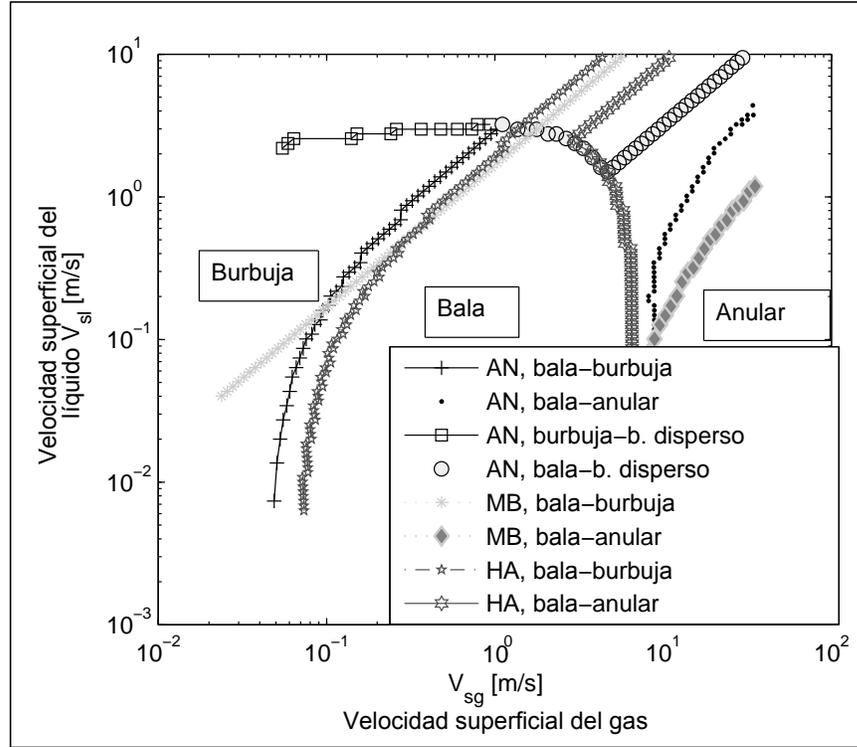
La mayoría de los modelos más antiguos fueron enfocados en flujo vertical u horizontal. Mandhane presentó una comparación de 16 correlaciones contra 10500 datos de presión [Ref. 51]. Ansari *et al.* hicieron una comparación similar pero para tuberías verticales e inclinadas, Ansari *et al.* llegaron a la conclusión que los resultados en tuberías inclinadas no eran satisfactorios [Ref. 1].

2.3 MODELO DRIFT-FLUX

Uno de los modelos de gran escala es el modelo *drift flux*. En algunos casos del flujo multifásico, el deslizamiento entre fases puede ser determinado precisamente con una

²La traducción de "espumoso" se realiza desde la palabra en inglés *froth*, esta traducción no se encuentra estandarizada.

Figura 3: Comparación de los resultados de tres metodologías para calcular el mapa de patrones de flujo.



ecuación básica llamada *drift flux* (Eq 2.2). La ecuación (Eq 2.2) describe la relación entre la velocidad del gas y la velocidad de la mezcla usando una velocidad de arrastre u_D y un parámetro de distribución C_0 [Ref. 9].

$$u_G = C_0 u_M + u_D \quad (\text{Eq 2.2})$$

Nicklin, Zuber & Findlay, Franca & Lahey, Danielson & Fan entre otros han hecho estudios acerca de la aplicabilidad de la (Eq 2.2) para el flujo líquido-gas bajo diferentes condiciones, como fue explicado por Choi *et al.* [Ref. 14,17,22,57,73].

Shi *et al.* presentaron un trabajo acerca del flujo de tres fases (crudo-agua-gas) en el cual fue explicado un procedimiento con procesos iterativos. El procedimiento consiste en encontrar primero la fracción de vacío con una mezcla representativa del líquido y entonces, calcular la fracción de cada líquido. Los autores encontraron que la mezcla crudo-agua se puede aproximar como una mezcla líquida y homogénea (sin deslizamiento) en un flujo crudo-agua-gas cuando la tubería es vertical o cercana a vertical y

la fracción de gas es mayor a 0.1 [Ref. 66].

El enfoque *drift flux* (Eq 2.2) resuelve un problema cinemático. Por tal razón, las ecuaciones conservativas son aplicadas a una mezcla como un modelo homogéneo con un deslizamiento. Por consiguiente, un problema complejo (flujo bifásico con ecuaciones acopladas) se resuelve fácilmente usando el modelo *drift flux* [Ref. 34].

En el año 2000 Ouyang & Aziz usaron un modelo *drift flux* y un enfoque segmentado para calcular la caída de presión en el boca del pozo. El gradiente de presión fue calculado como la suma de las componentes generadas por la fricción, la gravedad, el flujo en las paredes y la expansión del fluido. La ecuación de *drift flux* aplicada fue propuesta por Mishima & Ishii (1984) y es independiente del patrón de flujo [Ref. 60].

Cada autor define un valor o función para el parámetro de distribución y la velocidad de arrastre. Zuber & Findlay [Ref. 73] definieron sus propios valores mostrados en (Eq 2.3):

$$C_o = 1.2 \quad u_D = 1.53 \left(\frac{g \sigma \Delta \rho}{\rho_L^2} \right)^{1/4} \quad (\text{Eq 2.3})$$

En el año 2012 Choi *et al.* presentaron otros valores para C_o y u_D , (Eq 2.4). Los autores usaron 1000 datos de 7 proyectos TUFFP (Tulsa University Fluid Flow Project) de flujo bifásico. Más aún, usaron 463 datos del software OLGA (OiL and GAs simulator) para encontrar otros valores del modelo (Eq 2.4c). En ambos casos fue usado el mismo valor para C_o . Además, desarrollaron la ecuación (Eq 2.4a) para que fuera válida a diferentes ángulos de inclinación de la tubería. La diferencia entre el coeficiente A y B para los dos casos se muestra en (Eq 2.4b) y (Eq 2.4c). De las dos ecuaciones se puede concluir que la velocidad de arrastre calculada con los datos simulados es 7 veces más alta que el valor calculado usando los datos experimentales [Ref. 15].

$$u_D = A \cos(\theta) + B \left(\frac{g \sigma \Delta \rho}{\rho_L^2} \right)^{1/4} \sin(\theta) \quad (\text{Eq 2.4a})$$

$$A = 0.0246 \quad B = 1.606 \quad \text{De datos experimentales} \quad (\text{Eq 2.4b})$$

$$A = -0.191 \quad B = 12.59 \quad \text{De datos simulados} \quad (\text{Eq 2.4c})$$

En el año 2013, los valores hallados con datos experimentales por Choi *et al.* [Ref. 15] fueron usados por Choi *et al.* [Ref. 14] para desarrollar un solucionador rápido transitorio junto con un método *power law* para encontrar la caída de presión. Una de las mayores ventajas de este modelo considerada por los autores es su facilidad para ser ajustado lo que puede llevar a un mejor desempeño para casos específicos. El trabajo de Choi

et al. es un modelo en estado cuasi-estable, por lo tanto, algunas diferencias con datos experimentales son observados en las primeras etapas de la simulación cuando los cambios temporales son más notorios. La simplicidad del modelo implica que puede obtener soluciones de forma rápida [Ref. 14].

2.4 MODELO DE DOS FLUIDOS: TWO FLUID MODEL (TFM)

En los modelos de dos fluidos, se define el grupo de ecuaciones gobernantes para cada fluido o fase. A continuación se presenta la notación de Ishii respecto a este modelo [Ref. 34].

La ecuación de continuidad (Eq 2.5) está formada por un término transitorio, un término convectivo y un término de cambio de fase. Γ_k es la razón del acoplamiento entre las dos ecuaciones de continuidad debido a que la pérdida de masa del fluido $k = 1$ por unidad de volumen y unidad de tiempo es igual a la ganancia de la masa para $k = 2$. El término de cambio de fase es usado por Issa & Kempf, Liu *et al.*, Morales *et al.* y Lee *et al.* [Ref. 35,44,47,54] y es despreciado por Cazarez-Candia *et al.*, Henau & Raithby, Loilier *et al.*, Ma *et al.* y Shirdel & Sepehrnoori, [Ref. 12,32,49,50,67].

$$\underbrace{\frac{\partial \langle \alpha_k \rangle \rho_k}{\partial t}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \langle \alpha_k \rangle \rho_k \langle \langle v_k \rangle \rangle}_{\text{convectivo}} = \underbrace{\langle \Gamma_k \rangle}_{\text{c.fase}} \quad k = 1, 2. \quad (\text{Eq 2.5})$$

La ecuación de conservación del momento lineal (Eq 2.6) (Ishii [Ref. 34]) contiene en el lado derecho: el gradiente de presión en la dirección del flujo, el gradiente de la media del esfuerzo de corte en la dirección del flujo, el esfuerzo de corte con las paredes de la tubería, la fuerza gravitacional, la fuerza debida al cambio de fase, la fuerza de corte total en la interfase, la fuerza debida a la diferencia entre la presión de la interfase y el valor medio (importante para el flujo horizontal estratificado [Ref. 34]). La fuerza de corte total en la interfase es el término encargado de acoplar las dos ecuaciones de conservación del momento. El primer término dependiente del esfuerzo de corte no es usado en la mayoría de los análisis unidimensionales [Ref. 12,32,35,49,54,67].

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} [\langle \alpha_k \rangle \rho_k \langle v_k \rangle]}_{\text{Transitorio}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} [C_{vk} \langle \alpha_k \rangle \rho_k \langle v_k \rangle^2]}_{\text{Convectivo}} = \\
& \quad - \underbrace{\langle \alpha_k \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle p_k \rangle}_{\text{Presion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} [\langle \alpha_k \rangle \langle \tau_{kzz} + \tau_{kzz}^T \rangle]}_{\text{Esfuerzo corte}} - \underbrace{\frac{4\alpha_{kW} \tau_{kW}}{D}}_{\text{Friccion}} \\
& \quad - \underbrace{\langle \alpha_k \rangle \rho_k g_z}_{\text{Gravitacional}} + \underbrace{\langle \Gamma_k \rangle \langle v_{ki} \rangle}_{\text{C.fase}} + \underbrace{\langle M_k^d \rangle}_{\text{M.interfacial}} + \underbrace{\left\langle (p_{ki} - p_k) \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} \right\rangle}_{\text{D.presion}} \quad (\text{Eq 2.6})
\end{aligned}$$

Diferentes algoritmos son aplicados al resolver el sistema de ecuaciones para un conjunto de condiciones de frontera y valores iniciales. Dos de los métodos más usados son las iteraciones de Newton y el esquema de corrección de presión. Los esquemas de corrección de presión pueden causar problemas de convergencia debido al acoplamiento entre las ecuaciones, Morales *et al.* usaron el método SIMPLE y explicó algunas modificaciones para prevenir los problemas de convergencia [Ref. 35,45,54,67].

Con respecto al sistema de ecuaciones, la solución al modelo de dos fluidos es más difícil de encontrar comparado con un modelo *drift flux* debido a la mayor cantidad de ecuaciones acopladas. Sin embargo, con el modelo de dos fluidos se pueden obtener mejores resultados para la simulación con condiciones de frontera cambiantes comparado con el modelo *drift flux*. Por lo tanto, el modelo de dos fluidos es recomendado para fenómenos transitorios, propagación de onda y cambios en los regímenes de flujo [Ref. 34].

En el año 2008, Liao *et al.* realizaron un análisis numérico de un modelo de dos fluidos cerca a una condición inestable³ [Ref. 45]. En el flujo horizontal, el patrón de flujo cambia de estratificado a bala cuando la velocidad de deslizamiento entre las fases es mayor a un valor crítico, este problema de inestabilidad es comúnmente conocido como Kelvin-Helmholtz, KH. Un problema adicional a la inestabilidad KH es presentado cuando las ecuaciones de balance son resueltas numéricamente. Los autores evaluaron la inestabilidad de los siguientes esquemas: primer orden *upwind*⁴, segundo orden *upwind*, esquema de diferencias centradas y esquema QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) con una análisis de estabilidad Von Neumann. Al contrario de las expectativas, fue encontrado que el esquema de diferencias centradas es más preciso y estable que los otros esquemas, por lo que los esquemas de alto orden no siempre son la mejor opción desde el punto de vista de la convergencia del modelo.

El modelo de dos fluidos clásico define una serie de relaciones para cada patrón de flujo y necesita de una selección previa del patrón de flujo. Esta metodología no solo agrega

³El término original en inglés es *ill posedness*

⁴Aguas arriba

errores en la selección incorrecta del patrón de flujo, sino que además pueden aparecer discontinuidades cuando ocurre un cambio en el patrón. Una alternativa a esta estrategia consiste en utilizar una ecuación de transporte del área interfacial (IATE) [Ref. 34].

En el año 2012, Shirdel & Sepehrnoori usaron varios mapas de patrones de flujo: el mapa de patrones de flujo de Ouyang(1998) para flujo horizontal y el mapa de patrones de flujo de Shoham (2006) para flujo vertical. Para las tuberías inclinadas se basaron en el mapa de flujo para tuberías verticales. Finalmente, los autores señalaron la importancia de una selección correcta del patrón de flujo con un ejemplo, en el cual, el flujo estratificado y burbuja fueron comparados contra los resultados experimentales [Ref. 67].

Algunos trabajos fueron enfocados en patrones de flujo específicos, este fue el caso de Cazarez *et al.*. Cazarez *et al.* desarrollaron un modelo para flujo bala en dos partes, la primera parte simulaba una bala de líquido como un flujo burbuja y la segunda parte simulaba la burbuja de Taylor como un flujo estratificado (para tuberías inclinadas menos de 45° respecto a la horizontal) o flujo anular, para los demás ángulos de inclinación [Ref. 12].

2.5 DESAFÍOS EN EL FUTURO

En 1992 Brill & Arirachakaran concluyeron 10 temas en los cuales hacía falta investigación. La mayoría de ellos han sido investigados, sin embargo, aún hay algunos temas por trabajar. Las propiedades de los fluidos y la predicción de los patrones de flujo especialmente a altas presiones y temperaturas (*high pressure high temperature*, HPHT) son dos de ellos [Ref. 10].

Con respecto a las propiedades de los fluidos, Shadravan & Amani explicaron algunas líneas de investigación del National Energy Technology Laboratories (NETL) y la necesidad de una base de datos de fluidos (de crudo con otros componentes tales como sulfuro de hidrógeno, entre otros) a altas presiones y altas temperaturas. Esta base de datos ayudará a evaluar las correlaciones existentes y permitirá la creación de nuevas correlaciones [Ref. 65].

Con respecto a los patrones de flujo, Hasan *et al.* dieron un ejemplo de la selección incorrecta del patrón de flujo a altas presiones, en el cual, el flujo anular era precedido cuando el flujo *churn*, bala y burbuja disperso también eran posibles [Ref. 31]. Además, Gokcal *et al.*, Zhao *et al.* y Matsubara & Naito presentaron algunas diferencias entre los patrones de flujo calculados para fluidos con alta viscosidad [Ref. 24,52,72]. Ayala *et al.* sugirieron que las simulaciones 3D pueden usarse para obtener un mejor entendimiento de las transiciones en los patrones de flujo [Ref. 2].

Falcone *et al.* resaltaron dos temas de investigación: *transporte de arena en el crudo-gas e interacciones dinámicas entre el flujo en medios porosos y el flujo en tuberías bajo condiciones transitorias* [Ref. 20]. El modelado de flujo trifásico gas-crudo-arena debe mejorarse, más aún, es necesario desarrollar instalaciones a gran escala y a altas concentraciones de arena lo que ayudará a prevenir la deposición de arenas en la tubería. Por otra parte, también deben desarrollarse instalaciones acopladas de las tuberías y los yacimientos bajo condiciones transitorias, la mayoría de los modelos usan un modelo transitorio en la tubería con modelos en estado estable para el yacimiento lo que puede llevar a una incorrecta estimación de la presión del yacimiento [Ref. 8].

Vale la pena mencionar el trabajo de Ioannou en el que un fenómeno conocido como *terrain slugging* fue incorrectamente predecido por un software comercial [Ref. 33].

No existe un único método capaz de predecir apropiadamente el flujo en tuberías en todos los casos, por tal razón, las ventajas y desventajas de cada método deben considerarse cuando se va a abordar una simulación específica.

3. ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN

Se presentan a continuación algunas generalidades del flujo bifásico y del cálculo de las propiedades de los fluidos en la industria del petróleo. Es importante mencionar estos aspectos antes de entrar en detalle sobre los modelos de cálculo para lograr una mejor comprensión del tema.

Por ser este capítulo el de mayor cantidad de ecuaciones, al finalizar (en la página 62) se presenta dos tablas (4 y 5) con la nomenclatura de los diferentes términos usados en las ecuaciones.

3.1 FUNDAMENTOS

El flujo de crudo desde el yacimiento hasta la boca del pozo puede ser de una, dos o tres fases; una fase si todo el fluido se encuentra en estado líquido, dos fases si existe una mezcla de líquido-gas y tres fases si existe también arenas o sólidos suspendidos en la mezcla de líquido-gas. El presente trabajo ha sido enfocado al flujo bifásico líquido-gas y no se considerará el flujo líquido-sólido ni el flujo trifásico, por tal motivo, **siempre que en el presente trabajo se hable de flujo bifásico será con referencia al flujo bifásico líquido-gas.**

A medida que el fluido fluye por la tubería van cambiando sus propiedades debido a los grandes cambios en la presión y cambios moderados de temperatura. El mayor cambio que se puede presentar es la aparición y/o aumento de la fase gaseosa, existen dos mecanismos responsables de este proceso [Ref. 11]:

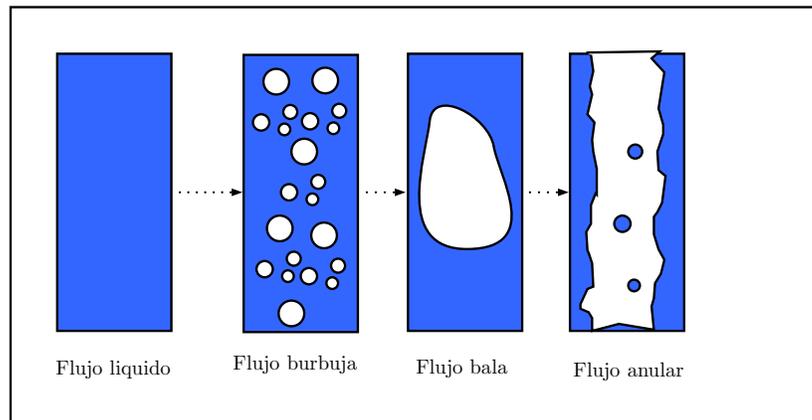
1. Vaporización de algunos componentes que se encontraban en estado líquido debido a la disminución de la presión: importante para yacimientos de condensación retrógrada del gas.
2. Liberación del gas disuelto en el líquido: este es el principal mecanismo de cómo la fase gaseosa aparece en la mayoría de los yacimientos de crudo.

En el presente proyecto se ha utilizado el modelo *black oil* (ver la sección 3.2) para calcular las propiedades de los fluidos debido a que la vaporización no es importante para los fluidos simulados.

Siempre que se hable del flujo bifásico es necesario hablar de los patrones de flujo. En la figura 4 se presentan de forma simplificada algunos de los patrones de flujo que se pueden presentar en el flujo vertical incluyendo el caso de presentarse el flujo monofásico. A medida que el gas aparece y aumenta en una sección de la tubería, se

puede tener la transición desde el flujo monofásico hasta el flujo anular pasando por flujo burbuja y posteriormente flujo bala, sin embargo, algunas de estas transiciones pueden ser omitidas en el proceso dependiendo de las velocidades superficiales y diámetro de la tubería, entre otros factores. Los modelos implementados en el presente proyecto, o son independientes de los patrones de flujo, o presentan su propio mapa de patrones de flujo.

Figura 4: Ejemplos simplificados de los patrones de flujo líquido-gas y flujo monofásico.



3.1.1 Principales variables

El gas y el crudo pasan del yacimiento a la boca del pozo a cierta velocidad y gradiente de presión. Posteriormente, asciende por la tubería hasta llegar a la superficie a una presión inferior, en la cual se encuentra un grupo de válvulas de seguridad llamada *Christmas tree*. Debido a los grandes cambios presentados en la presión, temperatura y propiedades de los fluidos a lo largo de la tubería es común encontrar en la literatura el uso de un punto de referencia para algunas propiedades del crudo y del gas. Para el crudo las condiciones de referencia son las condiciones de almacenamiento en el tanque, *stock tank conditions* y, para el gas, las condiciones de referencia corresponden a las condiciones estándar, *standard conditions*.

Para representar el flujo de crudo a las condiciones de almacenamiento se usa la nomenclatura $q_{o,ST}$ con las unidades $[STB/D]$ (barriles a las condiciones de almacenamiento¹ por día); junto con el valor de la gravedad API es relativamente fácil determinar el caudal másico del fluido.

¹La diferencia entre [BBL] y [STB] es que [BBL] son los barriles a condiciones particulares de presión y temperatura, en cambio [STB] corresponde al volumen que ocuparía el fluido a las condiciones de almacenamiento

Otros datos de flujo importantes son el flujo de agua $q_{w,ST}$ y el flujo de gas $q_{g,ST}$ a las condiciones estándar. En el presente proyecto, cuando se hable de los valores del flujo correspondientes a condiciones específicas de presión y temperatura en una sección de la tubería se omitirá el subíndice ST , ejemplo: q_o, q_g, q_w .

La densidad y la solubilidad del gas afectan la relación existente entre los caudales a condiciones de almacenamiento ($q_{o,ST}, q_{g,ST}, q_{w,ST}$) y a las condiciones de presión y temperatura (q_o, q_g, q_w). Por ejemplo, dado un flujo monofásico líquido de crudo $q_l > 0$ y $q_g = 0$ se puede tener un flujo de gas a las condiciones estándar mayor a 0 $q_{g,ST} > 0$.

Otra de las variables importantes durante la etapa de diseño y producción es la presión. A lo largo del yacimiento y de la tubería existen diferentes valores de presión los cuales restringen la velocidad a la que fluye el crudo. Si la presión en el yacimiento no es suficiente para que haya un flujo natural del crudo hacia la cabeza del pozo es necesario introducir equipos que agreguen energía al fluido y así obtener el flujo de crudo deseado. La presión también es un factor importante para determinar la aparición de obstrucciones en las tuberías a causa del depósito de parafinas, asfaltenos y otros.

Existen más propiedades que permiten caracterizar el crudo y que son necesarias para iniciar los cálculos de los métodos implementados en el presente proyecto, por ejemplo: la gravedad API y la gravedad específica del crudo.

El objetivo de los modelos de flujo bifásico en tuberías es determinar la caída de presión para un flujo determinado a lo largo de toda la tubería. La caída total de presión en la tubería es un dato necesario para el acoplamiento con modelos de predicción en los yacimientos.

3.1.2 Sistemas de unidades

La mayoría de las ecuaciones descritas en el presente proyecto usará el sistema de unidades internacional, metro-kilogramo-segundo. Sin embargo, en algunos casos se respetó el sistema de unidades usado por los autores de los artículos. Es por esto que se muestran en la tabla 2 algunas variables y las respectivas unidades en cada sistema de medida:

3.2 MÉTODO BLACK OIL: PROPIEDADES DEL CRUDO Y EL GAS

Se seleccionó el modelo *black oil* para calcular las propiedades de los fluidos el cual es válido para yacimientos de crudo con temperaturas inferiores al punto crítico.

Tabla 2: Unidades de algunas propiedades en la industria del petróleo y el sistema internacional.

Unidad	Símbolo	Unidades industria del petróleo	Unidades SI
Flujo volumétrico de crudo a condiciones de almacenamiento	$q_{O,ST}$	$[STB/D]$	$[m^3/s]$
Flujo volumétrico de agua a condiciones de almacenamiento	$q_{W,ST}$	$[STB/D]$	$[m^3/s]$
Flujo volumétrico de gas a condiciones de almacenamiento	$q_{G,ST}$	$[MMSCF/D]$	$[m^3/s]$
Flujo volumétrico de crudo	q_O	$[BBL/D]$	$[m^3/s]$
Flujo volumétrico de agua	q_W	$[BBL/D]$	$[m^3/s]$
Flujo volumétrico de gas	q_G	$[ft^3/D]$	$[m^3/s]$
Presión	p	$[psi]$	$[KPa]$

El modelo *black oil* asume que a una cierta presión, temperatura, gravedad API y gravedad del gas, el crudo tiene un único valor de solubilidad del gas y un único valor para el factor volumétrico [Ref. 11], es decir, se asume existe un equilibrio entre las fases líquida y gas.

Una de las propiedades más importantes encontradas en el modelo *black oil* es la solubilidad del gas en el crudo R_s . Existen diversas correlaciones para encontrar el valor de R_s , por ejemplo, Standing [Ref. 11] propuso la siguiente correlación :

$$R_s = \gamma_g \left[\left(\frac{p}{18.2} + 1.4 \right) 10^{0.0125\gamma_{API} - 0.00091T} \right]^{1.2048}$$

$$R_s = R_s(\gamma_{API}, \gamma_g, p, T) \quad [SCF/STB] \quad (\text{Eq 3.1})$$

Algunos ejemplos de las propiedades calculadas en base a R_s son: factor volumétrico, presión del punto de burbuja, densidad del crudo y viscosidad del crudo.

Antes de calcular la densidad del crudo es necesario hallar la presión de burbuja y el factor volumétrico del crudo. Standing propuso la siguiente ecuación para calcular la presión de burbuja:

$$p_b = 18.2 \left[\left(\frac{R_p}{\gamma_g} \right)^{0.83} 10^{(0.00091T - 0.0125\gamma_{API})} - 1.4 \right] \quad [psi] \quad (\text{Eq 3.2})$$

El factor volumétrico es una relación entre el volumen del crudo a las condiciones de almacenamiento y el volumen del mismo fluido a condiciones específicas de presión y

temperatura. De acuerdo a Standing el factor volumétrico se puede calcular como:

$$B_o = \frac{(V_0)_{p,T}}{(V_0)_{sc}} = 0.9759 + 0.00012[R_s(\frac{\gamma_g}{\gamma_o})^{0.5} + 1.25T]^{1.2} \quad [BBL/STB] \quad (\text{Eq 3.3})$$

La densidad del crudo puede ser calculada con el factor volumétrico del crudo:

$$\rho_o = \frac{62.4\gamma_o + 0.0136R_s\gamma_{gd}}{B_o} \quad [Lb/ft^3] \quad (\text{Eq 3.4})$$

La viscosidad del crudo es calculada a partir de la viscosidad del *dead oil* o crudo muerto. Begg y Robinson propusieron la (Eq 3.5) para la viscosidad del crudo sin gas disuelto y la Eq 3.6 para la viscosidad del crudo saturado.

$$\mu_{od} = 10^x - 1 \quad x = \frac{10^{(3.0324 - 0.02023\gamma_{API})}}{T^{1.163}} \quad (\text{Eq 3.5})$$

$$\mu_o = [10.715(R_s + 100)^{-0.515}] \mu_{od}^{5.44(R_s + 150)^{-0.338}} \quad [cp] \quad (\text{Eq 3.6})$$

Las propiedades del gas también se deben calcular en base a correlaciones; el factor más importante es la compresibilidad del gas del cual depende el factor volumétrico del gas $B_g = 0.0283 \frac{ZT}{p}$.

Para los casos en los que existe flujo de agua en conjunto con el flujo de crudo se deben calcular algunos valores dentro de los que se encuentra la solubilidad del gas en el agua:

$$\begin{aligned} R_{sw} &= A_1 + A_2p + A_3p^2 \quad [SCF/STB] \\ A_1 &= 2.12 + 3.45 \cdot 10^{-3} T - 3.59 \cdot 10^{-5} T^2 \\ A_2 &= 1.07 \cdot 10^{-2} - 5.26 \cdot 10^{-5} T + 1.48 \cdot 10^{-7} T^2 \\ A_3 &= -8.75 \cdot 10^{-7} + 3.9 \cdot 10^{-9} T - 1.02 \cdot 10^{-11} T^2 \end{aligned} \quad (\text{Eq 3.7})$$

Como se mostrará más adelante, el cálculo de la solubilidad del gas y otras propiedades pueden afectar los resultados de la caída de presión hasta en un 20%.

Una propiedad que afecta directamente la caída de presión debido a la gravedad del fluido y a la fricción es la fracción de líquido o *holdup*. Existen diferentes maneras de definirla², sin embargo, en el presente proyecto se definirá como: la fracción de líquido o holdup es la fracción del área y del volumen ocupada por el líquido respecto al área

²La fracción del líquido se puede definir según: la fracción del área transversal ocupada, la fracción del volumen, la fracción del tiempo en el que el líquido ocupa un determinado punto o la fracción del diámetro ocupada por el líquido en un instante determinado. Cada una de las cuatro formas de definir la fracción de líquido conducen a valores diferentes.

o volumen total de la tubería. El símbolo usado en este proyecto para representar la fracción del líquido es h_l y su valor no puede ser inferior a 0 ni superior a 1. En el caso de asumir un flujo homogéneo y por lo tanto que el líquido viaja a la misma velocidad que el gas se habla del *non-slip holdup* λ_l . En la industria de la refrigeración, se da una mayor relevancia a la cantidad de gas, en este caso, se habla de la *void fraction*³ α y se relaciona con la fracción de líquido por $h_l = 1 - \alpha$.

3.3 MALLADO Y ESTRATEGIAS DE AVANCE EN LA TUBERÍA

En el presente proyecto se usan dos tipos de malla y tres estrategias de avance en la tubería. Estas selecciones fueron necesarias debido a las grandes diferencias de los modelos implementados.

Ambas mallas tienen como característica común que son unidimensionales y por esta razón es necesario agregar ecuaciones empíricas para cerrar los modelos.

3.3.1 Mallado único para los métodos estacionarios

Para los modelos implementados en estado estable (Hagedorn & Brown, Hasan et al., Mukherjee & Brill, Ansari et al.) se usa una malla de diferencias finitas en la que los valores son calculados y guardados en la posición de cada nodo [Ref. 1,28,31,55]. Se muestra un ejemplo en la figura 5. Debido a la estrategia de avance seleccionado para este método es necesario calcular un gradiente promedio (puntos grises) con los valores de dos nodos consecutivos (puntos negros).

Todos los nodos vecinos de la malla se encuentran separados a la misma distancia.

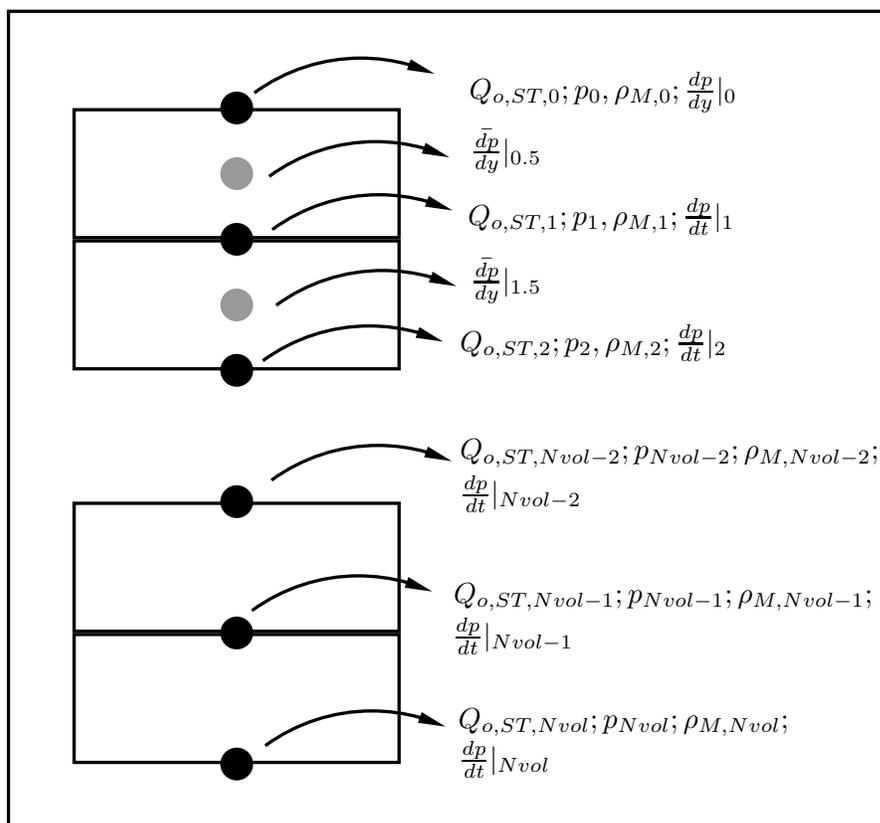
3.3.2 Mallas desplazadas para los modelos en régimen transitorio

Se han documentado casos en los que el uso de una sola malla genera comportamientos irreales en los resultados conocidos como "tablero de ajedrez". Este problema se puede evitar si se usan las mallas desplazadas y por esta razón, fueron seleccionadas en el presente proyecto para las simulaciones drift flux y two fluid.

En la figura 6 se presenta la posición de las variables cuando se tienen mallas desplazadas y se enumeran los volúmenes de control de la malla principal. Se usa una malla principal que almacena las propiedades escalares y una malla desplazada que almacena el valor

³En el presente libro se traducirá el término como fracción de vacío.

Figura 5: Malla única para los métodos en estado estable.



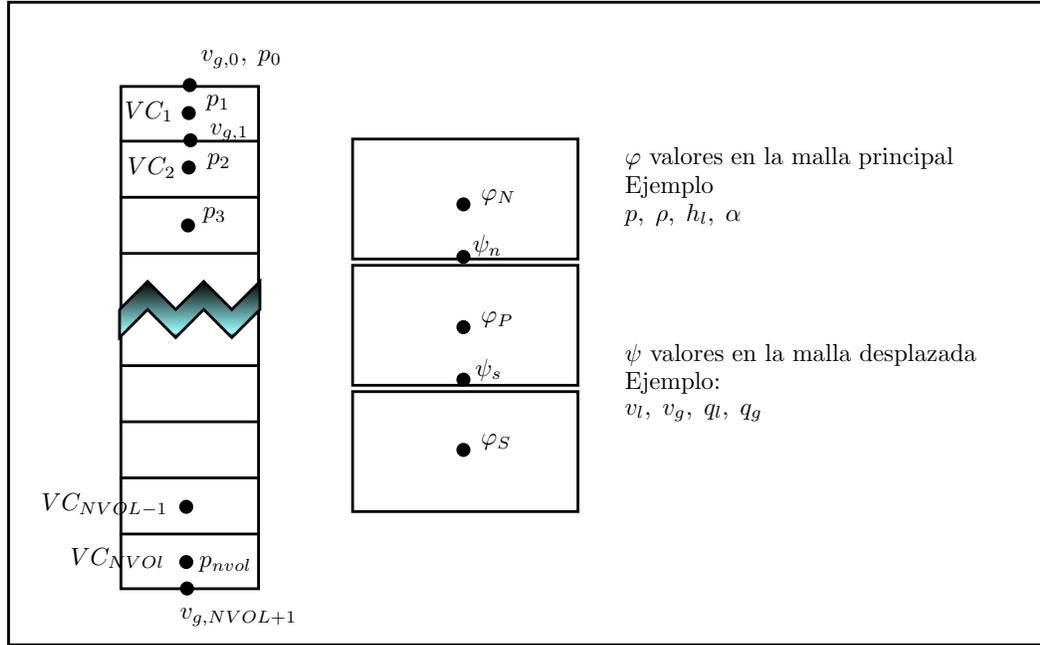
de los vectores (o que serían vectores si la malla usada fuera bidimensional) tales como los caudales de crudo, gas y agua.

3.3.3 "Marching algorithm" para los métodos estacionarios

Los métodos en estado estable no tienen que calcular los caudales ni flujos másicos porque esta información es considerada como dato de entrada para estos modelos (Hagedorn & Brown, Hasan et al., Mukherjee & Brill, Ansari et al.). Esta particularidad facilita su solución y permite concentrar los esfuerzos en la solución de las ecuaciones internas propias de cada modelo. Además, permiten implementar el *marching algorithm* como estrategia de avance y solución.

Marching algorithm o algoritmo de marcha consiste en encontrar todos los valores (gradiente de presión, fracción del líquido y otras propiedades) secuencialmente desde un lado de la tubería hasta finalizar en el lado opuesto [Ref. 11]. La aplicación del algoritmo de marcha puede hacerse desde la boca del pozo o desde la cabeza del pozo sin tener problemas de convergencia en los modelos implementados (Hagedorn & Brown,

Figura 6: Malla empleada para la discretización de las variables en los modelos *drift flux* y dos fluidos.



Hasan et al., Mukherjee & Brill, Ansari et al.) pero la mayor facilidad para conocer la presión en la superficie llevó a tomar la decisión de hacer la simulación en la dirección contraria al flujo.

La implementación realizada contempla un proceso iterativo porque el valor de p_{i+1} depende de $\frac{dp}{dy}|_{i+0.5}$ y viceversa. Se presenta un diagrama de flujo simplificado en la figura 7 en el cual se explica el proceso de avance en la tubería.

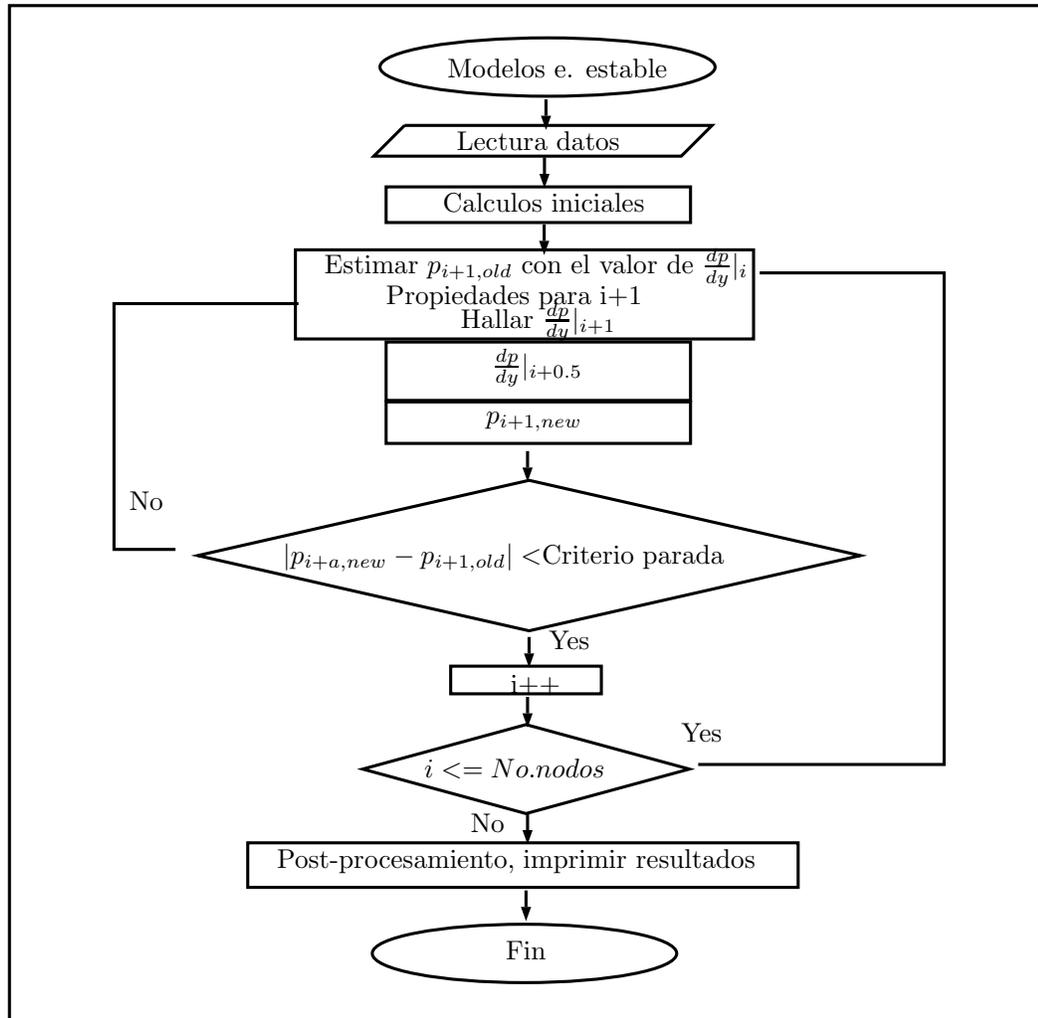
3.3.4 Estrategias de avance en la tubería para los métodos transitorios

El método *drift flux* implementado se puede resolver con el algoritmo de marcha pero solo en la dirección del flujo. Se realizaron pruebas en las que el avance de la simulación iba en la dirección contraria al flujo produciéndose serios problemas de convergencia por lo que se descartó esta posibilidad. Este método requiere de un proceso iterativo para que la presión en la salida de la tubería corresponda con la condición de frontera impuesta en la cabeza del pozo para la presión.

Con respecto al modelo de dos fluidos, el conjunto de ecuaciones resultantes depende tanto de las condiciones de frontera a la entrada como de las condiciones de frontera a la salida por lo que no es posible implementar un algoritmo de marcha. Es necesario

resolver las ecuaciones de todos los volúmenes de control simultáneamente y de variable en variable como lo describe el método SIMPLE. En el presente libro no se hará una descripción detallada del método SIMPLE y se recomienda ver Patankar y Jerez & Fuentes [Ref. 41,62].

Figura 7: Diagrama de flujo del algoritmo de avance implementado para los modelos en estado estable.



3.4 INTEGRACIÓN A TRAVÉS DE UN VOLUMEN DE CONTROL Y DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES BASE

Algunas de las ecuaciones resultantes en el método de dos fluidos son extensas, en vez de mostrar en el presente libro estas ecuaciones en su forma más amplia y demostrar para cada caso como fue obtenida, se presenta a continuación el resultado de discretizar dos tipos de ecuaciones base, esto es, la ecuación de difusión transitoria y la ecuación de convección-difusión transitoria.

3.4.1 Ecuación de difusión transitoria

Para las ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial(\rho_{EQ} \phi_{EQ})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(\Gamma_{EQ} \frac{\partial \phi_{EQ}}{\partial y}) + S_{EQ} \quad (\text{Eq 3.8})$$

En donde el subíndice EQ quiere decir equivalente. La (Eq 3.8) corresponde a una ecuación de difusión transitoria la cual se transforma en:

$$a_p * \phi_{EQ,p}^{t+\Delta t} - \sum_{j=1}^{2-nb} [a_j * \phi_{EQ,j}^{t+\Delta t}] = b \quad (\text{Eq 3.9})$$

La (Eq 3.9) es la ecuación discretizada resultante que depende de los siguientes términos:

$$a_p = a_{tr} + \sum_{j=1}^{2-nb} a_j + \sum_{h=1}^{nb} a_{b,h} \quad (\text{Eq 3.10a})$$

$$a_{tr} = \frac{\rho_{EQ} \Omega_p}{\Delta t} \quad (\text{Eq 3.10b})$$

$$a_j = U_j Ar_j \quad (\text{Eq 3.10c})$$

$$U_j = \frac{1}{\frac{\delta_{ej}}{\Gamma_{EQ,j}} + \frac{\delta_{pj}}{\Gamma_{EQ,p}}} \quad (\text{Eq 3.10d})$$

$$a_{b,h} = \begin{cases} \frac{\Gamma_{EQ} Ar_h}{\delta_h} & \text{si es Frontera tipo Dirichlet} \\ 0 & \text{si es Frontera tipo Neumann} \end{cases} \quad (\text{Eq 3.10e})$$

$$b = b_{gen} + \sum_{h=1}^{nb} b_{b,h} + a_{tr} \phi_{EQ,p}^t \quad (\text{Eq 3.10f})$$

$$b_{gen} = S_{EQ} \Omega_P \quad (\text{Eq 3.10g})$$

$$b_{b,h} = \begin{cases} \frac{\Gamma_{EQ} Ar_h}{\delta_h} [\phi_{EQ,h(wall)}] & \text{si es Frontera tipo Dirichlet} \\ \Gamma_{EQ} Ar_h \left(\frac{\partial \phi_{EQ}}{\partial n}\right)_{wall} & \text{si es Frontera tipo Neumann} \end{cases} \quad (\text{Eq 3.10h})$$

3.4.2 Ecuación de convección-difusión transitoria

A continuación se presenta la ecuación de convección-difusión en estado transitorio (Eq 3.11).

$$\frac{\partial(\rho_{EQ} \phi_{EQ})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_{EQ} V \phi_{EQ}) = \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(\Gamma_{EQ} \frac{\partial \phi_{EQ}}{\partial z}\right) + S_{EQ} \quad (\text{Eq 3.11})$$

Para el presente trabajo se usó el método upwind para discretizar las ecuaciones de convección-difusión. En la (Eq 3.12) se presenta la forma general de la ecuación a aplicar teniendo en cuenta las condiciones de frontera y en la (Eq 3.13) se definen los coeficientes usados en (Eq 3.12):

$$a_p * \phi_{EQ,p}^{t+\Delta t} - \sum_{e=1}^{n-nb} [a_e * \phi_{EQ,e}^{t+\Delta t}] = b \quad (\text{Eq 3.12})$$

En donde:

$$a_p = a_{tr} + \sum_{e=1}^{n-nb} [a_e + F_e] + \sum_{j=1}^{nb} [a_{b,j}] \quad (\text{Eq 3.13a})$$

$$a_{tr} = \frac{\rho_{EQ} \Omega}{\Delta t} \quad (\text{Eq 3.13b})$$

$$a_e = D_e + \text{máx}(0, -F_e) \quad (\text{Eq 3.13c})$$

$$F_e = \rho_{EQ,e} V_n S \quad (\text{Eq 3.13d})$$

$$D_e = \frac{Ar_e}{\frac{\delta_{ee}}{\Gamma_{EQ,e}} + \frac{\delta_{pe}}{\Gamma_{EQ,p}}} \quad (\text{Eq 3.13e})$$

$$a_{b,j} = \begin{cases} D_j + \text{máx}(F_j, 0) & \text{si es Frontera tipo Dirichlet} \\ F_j & \text{si es Frontera tipo Neumann} \end{cases} \quad (\text{Eq 3.13f})$$

$$b = b_{gen} + \sum_{j=1}^{nb} [b_{b,j}] + a_{tr} \phi_{EQ,p}^t \quad (\text{Eq 3.13g})$$

$$b_{gen} = S_{EQ} * \Omega \quad (\text{Eq 3.13h})$$

$$b_{b,j} = \begin{cases} [D_j + \text{máx}(-F_j, 0)] * \phi_{EQ,wall} & \text{si es Frontera tipo Dirichlet} \\ \left(\frac{\partial \phi_{EQ}}{\partial n}\right)_{wall} * Ar_j * \Gamma_{EQ} & \text{si es Frontera tipo Neumann} \end{cases} \quad (\text{Eq 3.13i})$$

3.5 MODELO MATEMÁTICO DE LOS MÉTODOS EN RÉGIMEN ESTACIONARIO

A continuación se describe brevemente cada uno de los cuatro procedimientos específicos para calcular el gradiente de presión, si se desea una descripción detallada de estos modelos se recomienda revisar las referencias bibliográficas [Ref. 1,28,31,55].

Para todos los modelos se calcula la caída total de la presión como la suma de las caídas debidas a la gravedad H , a la fricción F y a la aceleración A (Eq 3.14) en donde, cada modelo define un procedimiento para encontrar estos términos.

$$\left(\frac{dp}{dy}\right)_T = \left(\frac{dp}{dy}\right)_F + \left(\frac{dp}{dy}\right)_H + \left(\frac{dp}{dy}\right)_A \quad (\text{Eq 3.14})$$

En la figura 7 se presentó el *marching algorithm* sin entrar en detalle del procedimiento necesario para calcular el gradiente de presión. Ahora se muestra en la figura 8 el procedimiento necesario para evaluar el gradiente de presión en cada volumen de control de la tubería.

Modelo de Hagedorn & Brown (HB)

A pesar de la antigüedad del modelo, publicado en 1965, éste ha sido recomendado por importantes autores como Ansari [Ref. 1] en 1994. Una de las principales características del modelo HB es su independencia del patrón de flujo.

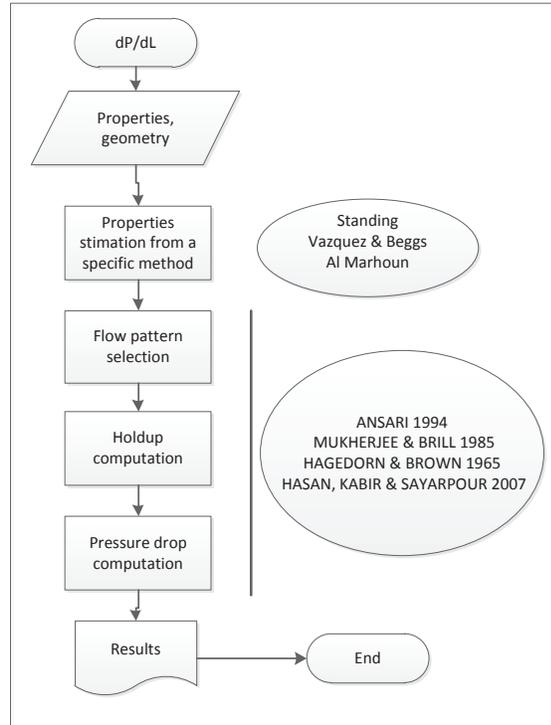
El modelo HB original usa 3 gráficas para calcular 3 factores: el coeficiente de viscosidad N_{LC} , el factor de corrección secundario ψ y la fracción de líquido⁴ h_l [Ref. 28]. La fracción del líquido es usada para determinar la densidad de la mezcla, la caída de presión a causa de la gravedad, la fricción y la aceleración.

En el presente trabajo se implementan dos modificaciones al método original:

1. Se implementa la regresión propuesta por Guo et al. para reemplazar los valores de las tres gráficas [Ref. 27].

⁴La fracción del líquido es determinada por $h_l = \psi f(N_{LC}, \dots)$.

Figura 8: Procedimiento seguido en cada prueba.



2. El valor mínimo de la fracción del líquido se restringe al *non-slip holdup* λ debido a que en todos los casos se considera flujo vertical ascendente.

Para el cálculo de la caída de presión se requiere, entre otras, de las siguientes ecuaciones:

Número de la velocidad del líquido N_{lv} :

$$N_{lv} = 1.938v_{sl} \sqrt[4]{\rho_l/\sigma_L} \quad (\text{Eq 3.15})$$

Número de la velocidad del gas N_{gv} :

$$N_{gv} = 1.938v_{sg} \sqrt[4]{\rho_l/\sigma_L} \quad (\text{Eq 3.16})$$

Número del diámetro de la tubería N_d :

$$N_d = 120.872D \sqrt{\rho_l/\sigma_L} \quad (\text{Eq 3.17})$$

Número de la viscosidad del líquido N_l :

$$N_L = 0.15726\mu_L \sqrt[4]{\frac{1}{\rho_L \sigma_L^3}} \quad (\text{Eq 3.18})$$

La primera regresión propuesta por Guo et al. [Ref. 27]:

$$\begin{aligned} N_L &= 10^Y \\ Y &= -2.69851 + 0.15841X_1 - 0.55100X_1^2 + 0.54785X_1^3 - 0.12195X_1^4 \\ X_1 &= \log(N_L + 3) \\ X_2 &= \frac{N_{vl} p^{0.1} C N_L}{N_{vg}^{0.575} p_a^{0.1} N_D} \\ X_3 &= \frac{N_{vg} N_L^{0.38}}{N_D^{2.14}} \end{aligned}$$

La segunda regresión:

$$\psi = 0.91163 - 4.82176X_3 + 1232.25X_3^2 - 22253.6X_3^3 + 116174.3X_3^4$$

Y la tercera regresión:

$$\begin{aligned} \frac{h_L}{\psi} &= -0.10307 + 0.61777[\log(X_2) + 6] - 0.63295[\log(X_2) + 6]^2 + \\ &\quad + 0.29598[\log(X_2) + 6]^3 - 0.0401[\log(X_2) + 6]^4 \end{aligned}$$

Hasta este punto solo se ha hallado la fracción de líquido, valor necesario para calcular $\rho_s = \rho_L h_l + \rho_g(1.0 - h_l)$, el número de Reynolds y la fricción para finalmente calcular el gradiente de la presión (Eq 3.19):

$$\frac{dp}{dZ} = \frac{f \rho_n^2 v_m^2}{2\rho_s d} + \rho_s g + \frac{\rho_s \Delta(v_m^2)}{2dZ} \quad (\text{Eq 3.19})$$

Modelo de Mukherjee & Brill (MB)

El modelo de Mukherjee & Brill [Ref. 55] es un método simplificado dependiente de los patrones de flujo y puede ser usado para pozos desviados. El modelo MB fue basado parcialmente en los números adimensionales propuestos por Duns & Ros [Ref. 19]; además, definieron nuevos números para predecir las transiciones entre los patrones como se muestra en la figura 9.

El método MB usa una ecuación exponencial para obtener la fracción del líquido. Esta ecuación depende de un grupo de coeficientes que son seleccionados de acuerdo a si el flujo es vertical ascendente, estratificado descendente u otros tipos de flujos descendentes.

Algunas de las ecuaciones usadas por el método de MB son las siguientes, en donde, se resaltan la ecuaciones del cálculo de la fracción del líquido (Eq 3.20) y el cálculo del gradiente de presión (Eq 3.21) por ser las ecuaciones que finalmente permiten calcular estos valores.

$$N_{LvB/S} = 10^x \quad x = \log(N_{gv}) + 0.940 + 0.074\sin(\theta) - 0.855\sin^2(\theta) + 3.695N_L$$

$$N_{gvS/M} = 10^{1.401-2.694N_L+0.521N_{LV}^{0.329}} \quad N_{gvB/S} = 10^y \quad N_{LVST} = 10^z$$

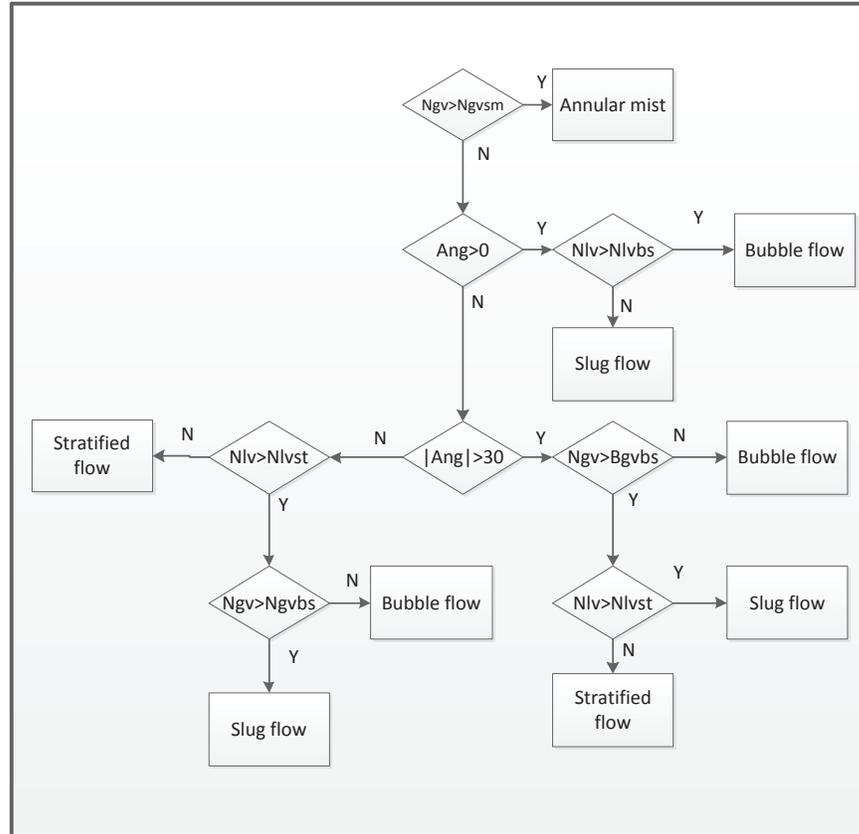
$$y = 0.431 - 3.003N_L - 1.138(\log N_{LV})\sin\theta - 0.429(\log N_{LV})^2\sin(\theta) + 1.132\sin(\theta)$$

$$z = 0.321 - 0.017N_{gv} - 4.267\sin(\theta) - 2.972N_l - 0.033(\log(N_{gv}))^2 - 3.925\sin^2(\theta)$$

$$H_L = e^{(C_1+C_2\sin\theta+C_3\sin^2\theta+C_4N_l^2)(N_{gv}^{C_5}/N_{LV}^{C_6})} \quad (\text{Eq 3.20})$$

$$\frac{dP}{dL} = \frac{\frac{f\rho_n V_m^2}{2d} + \rho_s g \sin\theta}{1 - E_k} \quad (\text{Eq 3.21})$$

Figura 9: Algoritmo de selección del patrón de flujo para el modelo de MB.



Valor de transición del flujo burbuja a flujo bala $N_{lvB/S}$. Transición del flujo bala al flujo anular o niebla $N_{gvS/M}$. Transición del flujo bala al flujo estratificado N_{lvST} . Información tomada de Brill & Mukherjee [Ref. 11].

Modelo de Ansari(AN)

El modelo de Ansari et al. [Ref. 1] es un método mecanicista (porque presenta un balance de fuerzas para cada patrón de flujo usado) basado en el mapa de patrones de flujo de Taitel et al. y Barnea et al. [Ref. 5,69].

Uno de los inconvenientes presentados por este método es la necesidad de implementar procesos iterativos para resolver algunas ecuaciones implícitas, convirtiéndose el modelo en un método computacionalmente más costoso que los demás modelos presentados en este capítulo. El artículo de Ansari et al. [Ref. 1] presenta más de 110 ecuaciones.

Modelo de Hasan et al. (HK)

El modelo de Hasan et al. [Ref. 31] ha sido basado en el enfoque *drift flux* (Eq 3.22) para calcular la fracción del líquido y la caída de presión en estado estable.

$$u_G = C_0 u_M + u_D \quad (\text{Eq 3.22})$$

Los valores seleccionados para C_0 y u_D por los autores se muestran en la tabla 3. Finalmente, presentaron un método de interpolación para u_D y C_0 cerca a las transiciones entre patrones de flujo.

Tabla 3: Valores para los parámetros de la ecuación *drift flux* según Hasan et al.

Patrón de flujo	C_0			u_D
	Ascendente	Contracorriente	Descendente	
Burbuja	1.2	2.0	1.2	$V_{\infty b}$
Bala	1.15	1.15	1.12	V_{∞}
Semi-anular	1.15	1.15	1.12	V_{∞}
Anular	1	1	1	0

3.6 MODELO DRIFT FLUX TRANSITORIO: MODELO MATEMÁTICO

Ya se presentó la formulación matemática de los modelos estacionarios implementados para simular el flujo de crudo en tuberías verticales de pozos petroleros. Estos modelos entregaban como resultados el perfil de la presión y la fracción de líquido a lo largo de la tubería. A continuación se presenta el modelo *drift flux* en régimen transitorio implementado en el presente proyecto.

El modelo seleccionado está basado en la metodología propuesta por Choi et al. [Ref. 14]. En el presente trabajo se permite la variación de la densidad dentro del volumen de control lo cual fue simplificado por Choi et al. [Ref. 14]. Asimismo, se reescriben las ecuaciones en términos del caudal a condiciones estándar en vez de usar la velocidad, finalmente, el modelo es puesto a prueba en flujo vertical ascendente y no en flujo horizontal. A diferencia de los modelos estacionarios, para los modelos en régimen transitorio se debe además evaluar el flujo de líquido y gas a lo largo de la tubería.

El método consiste en encontrar el caudal (de cada fluido) a la salida del volumen de control y la fracción de líquido en el volumen. En otras palabras, se tiene un sistema de tres ecuaciones (mostradas a continuación) no lineales que es resuelto antes de continuar al siguiente volumen de control. Estos cálculos se realizan desde el primer volumen de control en la zona de entrada del fluido hasta llegar a la cabeza del pozo.

3.6.1 Ecuaciones de continuidad del líquido y del gas

Se presenta la ecuación de continuidad del líquido (Eq 3.23) en la que se asume la no existencia del cambio de fase y se da la posibilidad de tener la liberación del gas disuelto en el crudo por los cambios de presión y temperatura.

$$\frac{\partial m_l}{\partial t} = \dot{m}_{L,in} - \dot{m}_{L,out} + \mathcal{V}_l^0 \quad (\text{Eq 3.23})$$

La (Eq 3.23) es discretizada como (Eq 3.24) en la que se desconoce el valor de h_l y $q_{out}^{O,sc}$:

$$Ar\delta_z\rho_L \frac{h_l - h_l^{t-\Delta t}}{\Delta t} = q_{in}^{O,sc}(\rho_{O,sc} + \beta_{4in}\rho_{W,sc}) - q_{out}^{O,sc}(\rho_{O,sc} + \beta_{4out}\rho_{W,sc}) \quad (\text{Eq 3.24})$$

En donde:

$$\beta_4 = \frac{B_O f_W}{B_W(1 - f_W)} \quad (\text{Eq 3.25})$$

La ecuación (Eq 3.24) es reordenada como $q_{out}^{O,sc} = f(h_l)$:

$$q_{out}^{O,sc} = \beta_{10} - \beta_{11}h_l \quad (\text{Eq 3.26})$$

En donde:

$$\beta_{10} = \frac{q_{in}^{O,sc}(\rho_{O,sc} + \beta_{4in}\rho_{W,sc}) + \frac{Ar\delta_z\rho_L}{\Delta t}h_l^{t-\Delta t}}{(\rho_{O,sc} + \beta_{4out}\rho_{W,sc})} \quad (\text{Eq 3.27})$$

Y

$$\beta_{11} = \frac{Ar\delta_z\rho_L}{\Delta t(\rho_{O,sc} + \beta_{4out}\rho_{W,sc})} \quad (\text{Eq 3.28})$$

La ecuación de continuidad del gas se presenta en (Eq 3.29):

$$Ar\delta_z \left[-\rho_g \frac{h_l - h_l^{t-\Delta t}}{\Delta t} + \beta_5(1 - h_l) \right] = q_{in}^{g,sc} \rho_{in}^{g,sc} - q_{out}^{g,sc} \rho_{out}^{g,sc} \quad (\text{Eq 3.29})$$

Y se reordena como (Eq 3.30):

$$q_{out}^{g,sc} = \beta_{132} + \beta_{12}h_l \quad (\text{Eq 3.30})$$

En donde:

$$\beta_5 = \frac{\partial \rho_g}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial \rho_g}{\partial T} \frac{dT}{dt} \quad (\text{Eq 3.31})$$

$$\beta_6 = Ar\delta_z \left[\frac{\rho_g h_l^{t-\Delta t}}{\Delta t} + \beta_5 \right] \quad (\text{Eq 3.32})$$

$$\beta_{12} = \frac{Ar\delta_z}{\rho_{g,sc}} \left[\frac{\rho_g}{\Delta t} + \beta_5 \right] \quad (\text{Eq 3.33})$$

$$\beta_{132} = q_{in}^{g,sc} - \frac{\beta_6}{\rho_{g,sc}} \quad (\text{Eq 3.34})$$

Para poder calcular β_5 es necesario conocer el factor de compresibilidad y el valor de $\frac{\partial P}{\partial t}$ el cual se toma de (Eq 3.35):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p - p^{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (\text{Eq 3.35})$$

3.6.2 Ecuación de *drift flux*

La ecuación de *drift flux* es una relación cinemática entre las velocidades de la mezcla y del gas la cual se presenta en (Eq 3.36) a partir de promedios debido a que las velocidades y la fracción del líquido deben ser evaluadas en el mismo punto, se recuerda que el presente método usa una malla desplazada para las velocidades y caudales.

$$\frac{1}{2} \frac{u_{SG,in} + u_{SG,out}}{1 - h_l} = \frac{C_0}{2} (u_{SG,in} + u_{SG,out} + u_{SL,in} + u_{SL,out}) + u_D \quad (\text{Eq 3.36})$$

La ecuación de *drift flux* (Eq 3.36) depende de las velocidades de los fluidos en el volumen de control, las cuales, son descritas en función de los caudales. La siguiente relación se propone con el fin de simplificar algunos términos de (Eq 3.36):

$$q_g = (q_{g,sc} - q_{o,sc}R_s - q_{w,sc}R_{sw})B_g = (q_{g,sc} - q_{o,sc}R_s - \beta_4 q_{o,sc}R_{sw})B_g$$

$$q_g = q_{g,sc}B_g - \beta_7 q_{o,sc} \quad (\text{Eq 3.37})$$

en donde:

$$\beta_7 = (R_s + \beta_4 R_{sw})B_g \quad (\text{Eq 3.38})$$

Se utiliza varias veces (Eq 3.37) en (Eq 3.36) y se obtiene:

$$\frac{q_{out}^{g,sc} B_{out}^g - \beta_{out} \beta_{out} q_{out}^{o,sc} + q_{in}^g}{1 - h_l} = \beta_8 + C_0 B_{out}^g q_{out}^{g,sc} + \beta_9 q_{out}^{o,sc} \quad (\text{Eq 3.39})$$

Con:

$$\beta_8 = C_0(q_{in}^g + q_{in}^l) + 2u_D Ar \quad (\text{Eq 3.40})$$

$$\beta_9 = \frac{B_{out}^o C_0}{f_{out}^o} - \beta_7 C_0 \quad (\text{Eq 3.41})$$

Para el parámetro de distribución C_0 (Eq 3.42) y la velocidad de arrastre u_D (Eq 3.43) se usan los valores sugeridos por Choi et al. [Ref. 14,15]:

$$C_0 = \frac{2}{1 + (Re/1000)^2} + \frac{1.2 - 0.2\sqrt{\rho_G/\rho_L}(1 - e^{-18\alpha_G})}{1 + (1000/Re)^2} \quad (\text{Eq 3.42})$$

$$u_D = 0.0246 \cos(\theta) + 1.606 \sqrt[4]{\frac{g\sigma\Delta\rho}{\rho_L^2}} \sin(\theta) \quad (\text{Eq 3.43})$$

3.6.3 Método de solución

Los flujos volumétricos del líquido (Eq 3.26) y del gas (Eq 3.30) son reemplazados en (Eq 3.39) y posteriormente reordenados para obtener una ecuación algebraica de segundo grado para h_l :

$$\beta_{13} h_l^2 + \beta_{14} h_l + \beta_{15} = 0 \quad (\text{Eq 3.44})$$

En donde:

$$\beta_{13} = \beta_9 \beta_{11} - C_0 B_{out}^g \beta_{12} \quad (\text{Eq 3.45})$$

$$\beta_{14} = -B_{out}^g \beta_{12} - \beta_{out} \beta_{11} + C_0 B_{out}^g \beta_{12} - \beta_9 \beta_{11} - \beta_8 - C_0 B_{out}^g \beta_{132} - \beta_9 \beta_{10} \quad (\text{Eq 3.46})$$

$$\beta_{15} = \beta_8 + C_0 B_{out}^g \beta_{132} + \beta_9 \beta_{10} - \beta_{132} B_{out}^g + \beta_{out} \beta_{10} - q_{in}^g \quad (\text{Eq 3.47})$$

La ecuación (Eq 3.44) se puede resolver por métodos directos y puede tener 0, 1 o 2 soluciones. La selección de la solución correcta se realiza basado en las limitaciones físicas del problema. Esto es, en general se debe satisfacer la inecuación $0 \leq h_l \leq 1$ y, para flujo vertical ascendente $h_l > \lambda_l$.

Una vez encontrado el valor de la fracción del líquido se prosigue a calcular los flujos volumétricos del líquido y del gas con las ecuaciones (Eq 3.26) y (Eq 3.30).

3.7 MODELO DE DOS FLUIDOS TRANSITORIO: MODELO MATEMÁTICO

En el capítulo 2 se dedicaron algunos párrafos para explicar las bases del modelo de dos fluidos; la nomenclatura, correspondiente a la usada por Ishii [Ref. 34], fue seleccionada por su detallada notación matemática. A continuación se presentan las ecuaciones junto con las simplificaciones que se tienen en cuenta para el modelo que fue implementado.

La ecuación de continuidad es mostrada en (Eq 3.48).

$$\underbrace{\frac{\partial \langle \alpha_k \rangle \rho_k}{\partial t}}_{\text{Término transitorio}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \langle \alpha_k \rangle \rho_k \langle \langle v_k \rangle \rangle}_{\text{Término convectivo}} = \underbrace{\langle \Gamma_k \rangle}_{\text{Término de cambio fase}} \quad k = 1, 2. \quad (\text{Eq 3.48})$$

En el flujo bifásico en tuberías de pozos de petróleo, el gas disuelto suele ser más importante que el cambio de fase de algunos componentes del crudo, este gas disuelto viaja a la misma velocidad que la fase líquida, por lo tanto, (Eq 3.48) debe incluir este fenómeno. El término $\langle \Gamma_k \rangle$, por definición, es la cantidad de gas que cambia de fase, sin embargo, puede ser modificado para incluir el gas liberado de la fase líquida, en este caso, es una función de la solubilidad del gas en el crudo R_s y agua R_{sw} (Eq 3.49) y no una función de la entalpía.

$$\Gamma = \frac{1}{Ar} \frac{\partial}{\partial z} [\rho_{G,ST}(q_{OST}R_s + q_{WST}R_{sw})] \quad (\text{Eq 3.49})$$

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento es (Eq 3.50):

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} [\langle \alpha_k \rangle \rho_k \langle \langle v_k \rangle \rangle]}_{\text{Término transitorio}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left[C_{vk}^1 \langle \alpha_k \rangle \rho_k \langle \langle v_k \rangle \rangle^2 \right]}_{\text{Término convectivo}} = \\ & - \underbrace{\langle \alpha_k \rangle \frac{\partial}{\partial z} \langle \langle p_k \rangle \rangle}_{\text{Gradiente de presión}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} [\langle \alpha_k \rangle \langle \langle \tau_{kzz} + \tau_{kzz}^T \rangle \rangle]}_{\text{Esfuerzo de corte en la dirección del flujo}} \quad \rightarrow 0 \\ & - \underbrace{\frac{4\alpha_{kW}\tau_{kW}}{D}}_{\text{Fricción con la pared}} - \underbrace{\langle \alpha_k \rangle \rho_k g_z}_{\text{Fuerza gravitacional}} + \underbrace{\langle \Gamma_k \rangle \langle \langle v_{ki} \rangle \rangle}_{\text{Momento debido al cambio de fase}} \\ & + \underbrace{\langle M_k^d \rangle}_{\text{Transferencia de momento en la interfase}} + \underbrace{\left\langle (p_{ki} - p_k) \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} \right\rangle}_{\text{Diferencia de presión entre el fluido y la interfase}} \quad \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq 3.50})$$

En la cual se usaron las simplificaciones:

1. El término convectivo de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento usa un parámetro de distribución C_{vk} para tener en cuenta el perfil radial de la

velocidad y el patrón de flujo en la tubería. Varios autores han aproximado C_{vk} a 1 y en éste trabajo también se realiza esta aproximación [Ref. 12,35,54,67].

2. La variación del esfuerzo cortante en la dirección del flujo es pequeña debido a las pequeñas variaciones de la velocidad, por tal motivo, se desprecia. Esta simplificación convierte la (Eq 3.50) en una ecuación de convección en regimen transitorio con un término fuente.
3. La diferencia de presión entre el fluido y la interfase es importante para el flujo estratificado. Teniendo en cuenta que el flujo estratificado no está presente en las tuberías verticales, este término también puede ser despreciado. En algunos artículos se puede encontrar términos adicionales en (Eq 3.50) para asegurar la estabilidad de la ecuación en el flujo horizontal.

Las ecuaciones de conservación necesitan de correlaciones adicionales para ser resueltas, estas correlaciones, que modifican significativamente el desempeño de la simulación, deben ayudar a definir el valor de los siguientes términos:

1. Fuerzas de interacción entre las dos fases $\langle M_k^d \rangle$.
2. Fricción con la pared $\frac{4\alpha_{kW}\tau_{kW}}{D}$.

El método usado para resolver el acoplamiento entre la presión y la velocidad es el SIMPLE, Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations. Diferentes enfoques han sido aplicados para implementar el método SIMPLE de acuerdo a la forma como se usan las ecuaciones de continuidad [Ref. 18]; existen dos categorías:

1. El MCBA usa la ecuación global de continuidad para encontrar la corrección de presión y la ecuación de continuidad de una de las fases para encontrar la fracción de líquido.
2. El GCBA usa la ecuación de corrección de presión para asegurar que la suma de las fracciones de líquidos y vacío sea igual a 1.

En el presente trabajo se usa el método MCBA.

En las siguientes páginas se omitirán los símbolos " $\langle \rangle$ " y " $\langle\langle \rangle\rangle$ " por simplicidad en la lectura de las ecuaciones. Vale la pena recordar su significado: " $\langle \rangle$ " representa un promedio de área sobre la sección transversal y " $\langle\langle \rangle\rangle$ " representa el promedio de la variable respecto a la distribución radial de la fracción de vacío.

A continuación se presentan las ecuaciones que finalmente fueron discretizadas e implementadas. En general, no se muestra el proceso de discretización de estas ecuaciones porque ya fue mostrado el procedimiento general en la sección 3.4. Sin embargo, si se

mostrarán los términos equivalentes en las ecuaciones.

En el presente trabajo se implementaron varias opciones con el fin de hallar la fracción de líquido y la corrección de presión.

3.7.1 Ecuaciones de la conservación de la cantidad de movimiento

Las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento del líquido (Eq 3.51) y del gas (Eq 3.53) son ecuaciones de convección en regimen transitorio y con un término fuente, por lo tanto, se discretizan como tal, las equivalencias se muestran en las ecuaciones (Eq 3.52) y (Eq 3.54):

$$\frac{\partial(\rho_L h_L v_L)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_L h_L v_L^2)}{\partial z} = -h_L \frac{\partial p}{\partial z} - g\rho_L - P_{wl}\tau_{wl} + P_i\tau_i - \Gamma v_L \quad (\text{Eq 3.51})$$

$$\begin{aligned} \phi_{EQ} &= v_L & \rho_{EQ} &= \rho_L h_l & \Gamma_{EQ} &= 0 & V &= v_L \\ q_{EQ} &= -h_L \frac{\partial p}{\partial z} - g\rho_L - P_{wl}\tau_{wl} + P_i\tau_i - \Gamma v_L \end{aligned} \quad (\text{Eq 3.52})$$

$$\frac{\partial(\rho_G \alpha_G v_G)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_G \alpha_G v_G^2)}{\partial z} = -\alpha_G \frac{\partial p}{\partial z} - g\rho_G - P_{wg}\tau_{wg} - P_i\tau_i + \Gamma v_L \quad (\text{Eq 3.53})$$

$$\begin{aligned} E.transitorio & \quad \phi_{EQ} = v_G & \rho_{EQ} &= \rho_G \alpha_G & \Gamma_{EQ} &= 0 & V &= v_G \\ q_{EQ} &= -\alpha_G \frac{\partial p}{\partial z} - g\rho_G - P_{wg}\tau_{wg} - P_i\tau_i + \Gamma v_L \end{aligned} \quad (\text{Eq 3.54})$$

Siguiendo la metodología del SIMPLE, las ecuaciones discretizadas de la cantidad de movimiento deben ser reordenadas como se muestran a continuación en (Eq 3.55) y (Eq 3.56):

$$a_p^{vl} v_{l,P}^{\vec{m}^*} = \sum_{i=1}^{n-nb} [a_i^{vl} v_{l,i}^{\vec{m}^*}] - \frac{1}{\Delta z} \frac{h_{l,P} + h_{l,E}}{2} [p_E - p_P] + b_p^{vl} \quad (\text{Eq 3.55})$$

$$a_p^{vg} v_{g,P}^{\vec{m}^*} = \sum_{i=1}^{n-nb} [a_i^{vg} v_{g,i}^{\vec{m}^*}] - \frac{1}{\Delta z} \frac{\alpha_P + \alpha_E}{2} [p_E - p_P] + b_p^{vg} \quad (\text{Eq 3.56})$$

Cálculo de la fricción entre los fluidos y la pared: se implementaron dos métodos para calcular la caída de presión en la tubería a causa de la fricción, el primer método está basado en los factores multiplicadores de Lockhart Martinelli y el segundo método está basado en la metodología de Hasan et al. [Ref. 31,48,53].

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{2\phi} = \begin{cases} \Phi_L^2 \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_l \\ \text{”Según Hasan et al.”} \end{cases} \quad (\text{Eq 3.57})$$

En donde:

$$\begin{aligned}\Phi_L &= 1.0 + \frac{C_{ch}}{Z} + \frac{1}{Z^2}; \\ \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)|_L &= f_{f,L} \frac{v_L^2 \rho_L}{2D}\end{aligned}\quad (\text{Eq 3.58})$$

$f_{f,L}$ es el factor de fricción de Darcy-Weisbach. El valor de $\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)|_L$ se calcula asumiendo que solo fluye líquido en la tubería y C_{ch} puede ser hallado por la ecuación de Chisholm [Ref. 23]:

$$C_{ch} = \frac{v_L}{v_G} \sqrt{\rho_L/\rho_G} + \frac{v_G}{v_L} \sqrt{\rho_G/\rho_L} \quad (\text{Eq 3.59})$$

Finalmente, se necesita calcular el esfuerzo de corte que cada fluido experimentará con las paredes de la tubería, para tal fin se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\tau_G &= \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)|_{2\phi} \left(\frac{1}{\alpha + (1-\alpha)Z^2}\right) \frac{A}{P_{wg}} \\ \tau_L &= (1-\alpha) \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)|_{2\phi} \left(\frac{1}{\alpha + (1-\alpha)Z^2}\right) \frac{A}{P_{wl}}\end{aligned}\quad (\text{Eq 3.60})$$

En donde:

$$Z^2 = \frac{f_L \rho_L v_L^2 \frac{\alpha_{LW}}{\alpha_L}}{f_G \rho_G v_G^2 \frac{\alpha_{GW}}{\alpha_G}}$$

Cálculo de la fricción entre el líquido y el gas: en ausencia de más correlaciones, se utiliza el procedimiento explicado por Morales-Ruiz [Ref. 53] en el que el esfuerzo de corte se calcula como:

$$\begin{aligned}\tau_{iG} &= \tau_{iL} = \frac{1}{2} C_{D,fr} \rho_G |v_G - v_L| (v_G - v_L) A \\ C_{D,fr} &= \text{máx} \left(\frac{64}{Re_i}, \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re_i}} \right) \\ Re_i &= \frac{D \rho_G |v_G - v_L|}{\mu_G}\end{aligned}\quad (\text{Eq 3.61})$$

3.7.2 Ecuación de la fracción de líquido

Se implementaron tres ecuaciones diferentes con el fin de evaluar que opción u opciones no generaban problemas en la convergencia del modelo. Las tres opciones son ecuaciones de convección en régimen transitorio:

1. Ecuación de continuidad del líquido (Eq 3.62) y (Eq 3.63):

$$\frac{\partial[(1-\alpha_G)\rho_L]}{\partial t} + \frac{\partial[(1-\alpha_G)\rho_L v_L]}{\partial z} = -\Gamma_G$$

La cual se reordena:

$$\frac{\partial(\alpha_G \rho_L)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_G \rho_L v_L)}{\partial z} = \Gamma_G + \frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_L v_L)}{\partial z} \quad (\text{Eq 3.62})$$

$$\begin{aligned} E.transitorio \quad \phi_{EQ} = \alpha_G \quad \rho_{EQ} = \rho_L \quad \Gamma_{EQ} = 0 \\ V = v_L \quad q_{EQ} = \Gamma_G + \frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_L v_L)}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{Eq 3.63})$$

2. Ecuación de continuidad del gas (Eq 3.64) (Eq 3.65):

$$\frac{\partial(\alpha_k \rho_k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_k \rho_k v_k) = \Gamma_k \quad (\text{Eq 3.64})$$

$$\begin{aligned} \phi_{EQ} = \alpha_G \quad \rho_{EQ} = \rho_G \quad \Gamma_{EQ} = 0 \\ V = v_g \quad q_{EQ} = \Gamma_G \end{aligned} \quad (\text{Eq 3.65})$$

A modo de ejemplo se muestra en (Eq 3.66) la ecuación discretizada de la continuidad del gas.

$$\begin{aligned} \left[\frac{\rho_G \alpha - \rho_G^{t-\Delta t} \alpha^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right]_P \delta A_P + \max(0, \rho_g v_g A)_n \alpha_P - \max(0, -\rho_g v_g A)_n \alpha_N + \\ \max(0, -\rho_g v_g A)_s \alpha_P - \max(0, \rho_g v_g A)_s \alpha_S = \Gamma_G \delta A_P \end{aligned} \quad (\text{Eq 3.66})$$

Las pruebas mostraron resultados con más fluctuaciones cuando se usa la (Eq 3.66) que con las otras dos opciones, (Eq 3.62) y (Eq 3.67), por lo tanto y en general, no se usa la (Eq 3.66) en el presente proyecto.

3. Ecuación de la resta de la continuidad del gas menos la continuidad del líquido Eq 3.67 y (Eq 3.68):

$$\frac{\partial[\alpha_G \rho_G]}{\partial t} + \frac{\partial[\alpha_G \rho_G v_G]}{\partial z} - \frac{\partial[(1 - \alpha_G) \rho_L]}{\partial t} - \frac{\partial[(1 - \alpha_G) \rho_L v_L]}{\partial z} = \Gamma_G - (-\Gamma_G)$$

Reordenando:

$$\frac{\partial[(\rho_G + \rho_L) \alpha_G]}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho_G v_G + \rho_L v_L) \alpha_G]}{\partial z} = 2\Gamma_G + \frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \frac{\partial[\rho_L v_L]}{\partial z} \quad (\text{Eq 3.67})$$

$$\begin{aligned} \phi_{EQ} = \alpha_G \quad \rho_{1,EQ} = \rho_G \quad \rho_{2,EQ} = \rho_L \quad \Gamma_{EQ} = 0 \\ V_{1,EQ} = v_G \quad V_{2,EQ} = v_L \quad q_{EQ} = 2\Gamma_G + \frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \frac{\partial[\rho_L v_L]}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{Eq 3.68})$$

3.7.3 Ecuación de corrección de presión

La ecuación de corrección de presión depende de las velocidades asterisco (calculadas en las ecuaciones de la cantidad de movimiento) y de la relación entre las correcciones de las velocidades y la corrección de presión. Mediante las ecuaciones (Eq 3.55) y (Eq 3.56) se calcularon los términos $v_{l,P}^{\vec{m}^*}$ y $v_{g,P}^{\vec{m}^*}$ y ahora, en (Eq 3.69) y (Eq 3.70), se encuentra una relación entre las velocidades corregidas y la corrección de presión.

$$(v_{g,P} - V_{g,P}^{m*}) = v'_{g,P}$$

$$a_p^{v_g} v'_{g,P} = -\frac{1}{\Delta z} \frac{\alpha_P + \alpha_E}{2} [p'_E - p'_P]$$

$$v'_{g,P} = -\frac{\alpha_P + \alpha_E}{2a_p^{v_g}} \frac{\partial p'}{\partial z} \quad (\text{Eq 3.69})$$

$$v'_{l,P} = -\frac{h_{LP} + h_{LE}}{2a_p^{v_L}} \frac{\partial p'}{\partial z} \quad (\text{Eq 3.70})$$

El método MCBA utiliza la ecuación de continuidad de la mezcla para obtener la ecuación de corrección de presión [Ref. 18]. Debido a la gran diferencia de densidades de los fluidos (crudo y gas) es necesario usar un factor de peso para la ecuación del gas, este factor se define en (Eq 3.71):

$$E_{sc} = \begin{cases} 1 & \text{si Sin escala} \\ \frac{\rho_L}{\rho_g} & \text{si Escala función de la densidad} \\ \frac{\rho_L v_L}{\rho_g V_g} & \text{si Escala función del momento lineal} \end{cases} \quad (\text{Eq 3.71})$$

Retomando la ecuación de continuidad de la mezcla junto con el factor de escala:

$$\frac{\partial [E_{sc} \rho_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L]}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha v_g A + \rho_L (1 - \alpha) v_L A] = [E_{sc} \Gamma_G - \Gamma_G]$$

Y reemplazando las velocidades por los valores calculados y las correcciones:

$$\frac{\partial [E_{sc} \rho_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L]}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha v_g^{m*} A + \rho_L (1 - \alpha) v_L^{m*} A] + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha v'_g A + \rho_L (1 - \alpha) v'_L A] = [E_{sc} \Gamma_G - \Gamma_G]$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha [-\frac{\alpha_P + \alpha_E}{2a_p^{v_g}} \frac{\partial p'}{\partial z}] A + \rho_L (1 - \alpha) [-\frac{h_{LP} + h_{LE}}{2a_p^{v_L}} \frac{\partial p'}{\partial z}] A] = -\frac{\partial [E_{sc} \rho_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L]}{\partial t} + \Gamma_G (E_{sc} - 1) - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha v_g^{m*} A + \rho_L (1 - \alpha) v_L^{m*} A]$$

Agrupando el término $\frac{\partial p'}{\partial z}$:

$$-\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left[E_{sc} \rho_g A \alpha \left[\frac{\alpha_P + \alpha_E}{2a_p^{v_g}} \right] + \rho_L A (1 - \alpha) \left[\frac{h_{LP} + h_{LE}}{2a_p^{v_L}} \right] \right] \frac{\partial p'}{\partial z} \right] =$$

$$-\frac{\partial [E_{sc} \rho_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L]}{\partial t} + \Gamma_G (E_{sc} - 1) - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha v_g^{m*} A + \rho_L (1 - \alpha) v_L^{m*} A]$$

Generalizando el subíndice E por VEC de vecino y reordenando como una ecuación de difusión en estado estable:

$$-\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{E_{sc} \rho_g A \alpha \alpha_{vec}}{a_p^{v_g}} + \frac{\rho_L A (1 - \alpha) h_{Lvec}}{a_p^{v_L}} \right) \frac{\partial p'}{\partial z} \right] =$$

$$-\frac{\partial [E_{sc} \rho_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L]}{\partial t} + \Gamma_G (E_{sc} - 1) - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha v_g^{m*} A + \rho_L (1 - \alpha) v_L^{m*} A]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{E_{sc} \rho_g \alpha \alpha_{vec}}{a_p^{v_g}} + \frac{\rho_L (1 - \alpha) h_{Lvec}}{a_p^{v_L}} \right) \frac{\partial p'}{\partial z} \right] =$$

$$\frac{\partial [E_{sc} \rho_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L]}{\partial t} + \Gamma_G (1 - E_{sc}) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha v_g^{m*} A + \rho_L (1 - \alpha) v_L^{m*} A]$$

(Eq 3.72)

En donde:

$$\phi_{EQ} = p' \quad \rho_{EQ} = 0 \quad \Gamma_{EQ} = \frac{E_{sc} \rho_g \alpha \alpha_{vec}}{a_p^{v_g}} + \frac{\rho_L (1 - \alpha) h_{Lvec}}{a_p^{v_L}}$$

$$q_{EQ} = \frac{\partial [E_{sc} \rho_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L]}{\partial t} + \Gamma_G (1 - E_{sc}) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha v_g^{m*} A + \rho_L (1 - \alpha) v_L^{m*} A]$$

(Eq 3.73)

La (Eq 3.72) es la ecuación de corrección de presión para fluidos incompresibles hallada mediante el método SIMPLE y el factor de peso. Sin embargo, el gas presenta un gran cambio de densidad y el líquido un cambio en menor grado, a continuación se presenta las correcciones de las densidades y la ecuación de corrección de presión resultante cuando se tiene en cuenta la variación de la densidad por la corrección de presión⁵.

$$\rho_g = \rho_g^* + \rho'_g \quad \rho_L = \rho_L^* + \rho'_L \quad (\text{Eq 3.74})$$

$$\rho'_g = C_{\rho G} p' \quad \rho'_L = C_{\rho L} p' \quad C_{\rho L} \ll C_{\rho G} \quad (\text{Eq 3.75})$$

$$\rho_g \alpha v_g A = (\rho_g^* + \rho'_g) \alpha (V_{g,P}^{m*} + v'_{g,P}) A =$$

$$\rho_g^* \alpha V_{g,P}^{m*} A + \rho_g^* \alpha v'_{g,P} A + \rho'_g \alpha V_{g,P}^{m*} A + \rho'_g \alpha v'_{g,P} A \xrightarrow{\approx 0}$$

$$\rho_l h_l v_l A = (\rho_l^* + \rho'_l) h_l (V_{l,P}^{m*} + v'_{l,P}) A =$$

$$\rho_l^* h_l V_{l,P}^{m*} A + \rho_l^* h_l v'_{l,P} A + \rho'_l h_l V_{l,P}^{m*} A + \rho'_l h_l v'_{l,P} A \xrightarrow{\approx 0}$$

⁵Se considera despreciable los términos $\rho'_g \alpha v'_{g,P}$ y $\rho'_l h_l v'_{l,P}$

Lo que implica que se debe agregar $\rho'_g \alpha V_{g,P}^{m*} A$ y $\rho'_l h_l V_{l,P}^{m*} A$ a (Eq 3.72), el resultado es una ecuación de convección-difusión en estado estable para la ecuación de corrección de presión, esto es:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha [-\frac{\alpha_P + \alpha_E}{2a_p^{v_g}} \frac{\partial p'}{\partial z}] A + \rho_L (1 - \alpha) [-\frac{h_{LP} + h_{LE}}{2a_p^{v_L}} \frac{\partial p'}{\partial z}] A + E_{sc} \rho'_g \alpha V_{g,P}^{m*} A + \rho'_l h_l V_{l,P}^{m*}] = -\frac{\partial [E_{sc} \rho_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L]}{\partial t} + \Gamma_G (E_{sc} - 1) - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha v_g^{m*} A + \rho_L (1 - \alpha) v_L^{m*} A]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \alpha V_{g,P}^{m*} A C_{\rho G} p' + h_l V_{l,P}^{m*} A C_{\rho L} p'] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{E_{sc} \rho_g A \alpha \alpha_{vec}}{a_p^{v_g}} + \frac{\rho_L A (1 - \alpha) h_{Lvec}}{a_p^{v_L}} \right) \frac{\partial p'}{\partial z} \right] - A \frac{\partial [E_{sc} \rho_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L]}{\partial t} + A \Gamma_G (E_{sc} - 1) - \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha v_g^{m*} A + \rho_L (1 - \alpha) v_L^{m*} A]$$

Finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial z} [(E_{sc} \alpha V_{g,P}^{m*} A C_{\rho G} + h_l V_{l,P}^{m*} A C_{\rho L}) p'] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{E_{sc} \rho_g A \alpha \alpha_{vec}}{a_p^{v_g}} + \frac{\rho_L A (1 - \alpha) h_{Lvec}}{a_p^{v_L}} \right) \frac{\partial p'}{\partial z} \right] + A \Gamma_G (E_{sc} - 1) - A \frac{\partial [E_{sc} \rho_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L]}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha v_g^{m*} A + \rho_L (1 - \alpha) v_L^{m*} A] \quad (\text{Eq 3.76})$$

En donde:

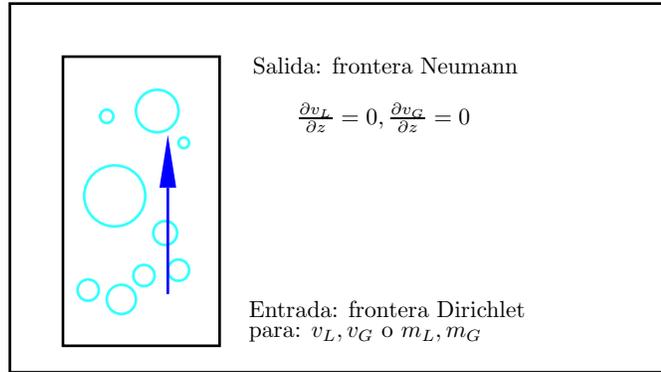
$$\begin{aligned} \phi_{EQ} &= p' & \rho_{1,EQ} &= E_{sc} \alpha A C_{\rho G} & v_{1,EQ} &= V_{g,P}^{m*} \\ \rho_{2,EQ} &= h_l A C_{\rho L} & v_{2,EQ} &= V_{l,P}^{m*} & \Gamma_{EQ} &= \frac{E_{sc} \rho_g A \alpha \alpha_{vec}}{a_p^{v_g}} + \frac{\rho_L A (1 - \alpha) h_{Lvec}}{a_p^{v_L}} \\ q_{EQ} &= A \Gamma_G (E_{sc} - 1) - A \frac{\partial [E_{sc} \rho_G \alpha + (1 - \alpha) \rho_L]}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} [E_{sc} \rho_g \alpha v_g^{m*} A + \rho_L (1 - \alpha) v_L^{m*} A] \end{aligned} \quad (\text{Eq 3.77})$$

3.7.4 Condiciones de frontera

En la figura 10 se muestran las condiciones de frontera para las ecuaciones de cantidad de movimiento. Para estas ecuaciones se implementan dos formas de introducir los valores en la frontera de entrada: ya sea el valor de la velocidad de cada fluido o el valor del gasto másico de cada uno. En el caso de usar el gasto másico como condición de frontera, se anula la dependencia de estas ecuaciones a las condiciones de frontera de la fracción de líquido, las cuales son halladas con fórmulas adicionales.

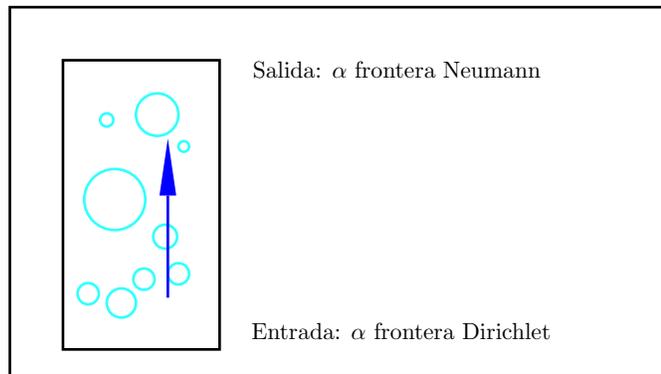
Inmediatamente después de calcular las velocidades, se recomienda modificar y extrapolar las velocidades en la frontera de salida de la tubería de tal manera que se satisfaga la ecuación de continuidad en esta zona.

Figura 10: Condiciones de frontera de la ecuación de cantidad de movimiento para el flujo bifásico en tuberías.



Para cualquiera de las tres posibilidades de hallar α se implementan los mismos tipos de condiciones de frontera⁶ los cuales son mostrados en la figura 11.

Figura 11: Condiciones de frontera para α en las diferentes ecuaciones de continuidad.



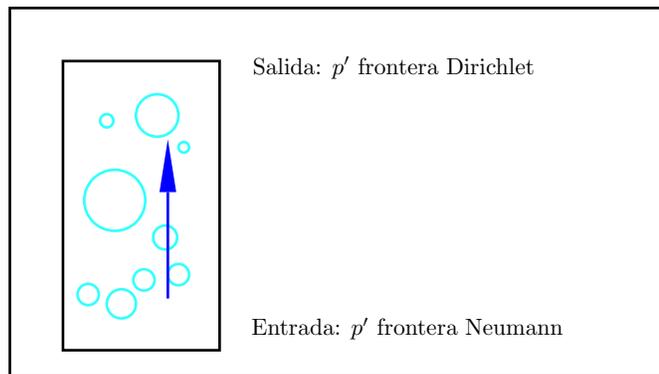
La frontera tipo Dirichlet a la entrada requiere del conocimiento del valor de α en esta sección el cual, es un valor que comúnmente no es medido. Con el fin de compensar esta situación, se utiliza una correlación externa que agrega una fuente de error adicional al modelo.

La frontera tipo Neumann es usada para hallar el valor de α a la salida de la tubería. Sin embargo, este no es el valor definitivo. Se recomienda extrapolar linealmente el valor de α para evitar problemas en la ecuación de corrección de presión y comportamientos anómalos.

⁶Estas condiciones de frontera corresponden al flujo bifásico en tuberías de pozos petroleros.

Con respecto a las condiciones de frontera para el flujo en tuberías de pozos petroleros, en la ecuación de convección difusión de la corrección de presión se debe tener en cuenta que en este caso el valor de la corrección de presión afecta directamente la densidad y la derivada afecta directamente la velocidad. Las condiciones de frontera se muestran en la figura 12.

Figura 12: Condiciones de frontera para p' .



La presión se conoce en la cabeza del pozo y no es necesario corregirla, por tal razón, se implementa una condición de frontera tipo Dirichlet en la frontera superior. En cambio, en la frontera inferior, siempre que la convergencia no haya sido alcanzada se registrará un valor de la corrección de presión diferente de cero; en esta región se implementa la condición de frontera tipo Neumann como suele ser recomendado para esta ecuación en los métodos basados en el SIMPLE.

3.8 NOMENCLATURA

Las tablas 4 y 5 presenta la lista de los terminos usados en el presente capítulo junto con los subíndices.

Tabla 4: Nomenclatura usada en el capítulo 3.

Símbolo	Unidades	Significado
a, A, b, β	-	Coefficientes
A_r	$[m^2]$	Área de la sección transversal de la tubería
α	$[-]$	Fracción de vacío
B	$[-]$	Factor volumétrico
C_0	$[-]$	Parámetro de distribución

Tabla 4: Nomenclatura usada en el capítulo 3 (continuación).

Símbolo	Unidades	Significado
D	$[m]$	Diámetro de la tubería
d_{min}	$[m]$	Diámetro mínimo para la existencia de flujo burbuja
f_m	$[-]$	Factor de fricción de la mezcla
g	$[m/s^2]$	Gravedad
γ	$[-]$	Gravedad específica
γ_{API}	$[^\circ API]$	Grado API
Γ	$-$	Difusividad de las ecuaciones base. Las unidades dependen de la ecuación de conservación a la cual pertenece.
h_l	$[-]$	Fracción de líquido
λ_l	$[-]$	<i>Non-slip holdup</i>
μ	$[cp]$	Viscosidad
N_{lv}	$[-]$	Número de la velocidad del líquido
N_{gv}	$[-]$	Número de la velocidad del gas
N_d	$[-]$	Número del diámetro de la tubería
N_l	$[-]$	Número de la viscosidad del líquido
$N_{lvB/S}$	$[-]$	Valor de transición del flujo burbuja a flujo bala
$N_{gvS/M}$	$[-]$	Transición del flujo bala al flujo anular o niebla
N_{lvST}	$[-]$	Transición del flujo bala al flujo estratificado
nb	$[-]$	<i>Number of boundaries</i> , número de condiciones de frontera para el volumen de control actual
p	$[Pa]$	Presión
q	$[m^3/s]$	Caudal
R_s	$[-]$	Solubilidad del gas en el crudo
ρ	$[kg/m^3]$	Densidad
S	$-$	Término fuente de las ecuaciones base. Las unidades dependen de la ecuación de conservación a la cual pertenece.
σ	$[N/m]$	Tensión superficial
T	$[^\circ C]$	Temperatura
u_G	$[m/s]$	Velocidad del gas
u_D	$[m/s]$	Velocidad de arrastre
V	$[m/s]$	Velocidad
v_{sk}	$[m/s]$	Velocidad superficial del fluido k
X, Y, ψ	$[\]$	Términos intermedios usados por Hagedorn & Brown
Z	$[-]$	Factor de compresibilidad
ϕ	$-$	Propiedad a calcular en la ecuación base. Las unidades dependen de la ecuación de conservación a la cual pertenece.
δ	$[m]$	Altura del volumen de control
Ω	$[m^3]$	Volumen del volumen de control

Tabla 4: Nomenclatura usada en el capítulo 3 (continuación).

Símbolo	Unidades	Significado
f_o	$[-]$	Fracción del crudo
m	$[Kg]$	Masa
Re	$[-]$	Número de Reynolds
M_k^d	$[N/m^3]$	Transferencia de momento en la interfase
Φ	$[-]$	Factor multiplicador de Lockhart Martinelli

Tabla 5: Subíndices usados en el capítulo 3.

Súbíndice	Significado
o	<i>Oil</i> , crudo
ST	Condiciones de almacenamiento en tanque o condiciones estándar
g	Gas
w	<i>Water</i> , agua
b	Punto de burbuja
d	<i>Dead oil</i> o crudo muerto
k	Contador de fluidos
i	Contador de volúmenes de control
j	Contador de caras del volumen de control actual
h	Contador del número de fronteras
M	Mezcla
y	Dirección axial de la tubería
NVOL	Último volumen de control
EQ	Término equivalente a las ecuaciones base de difusión y convección difusión
tr	Transitorio
T	Total
F	Fricción
H	<i>Height</i> Altura, gravitatorio
A	Aceleración
in	Entrada, cara inferior
out	Salida, cara superior

4. VALIDACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Al finalizar la implementación de los 4 modelos en estado estable (Hagedorn & Brown, Mukherjee & Brill, Ansari et al. y Hasan et al.) se procedió a realizar una serie de pruebas con datos de la literatura. Estas pruebas mostraron que los métodos usados en el cálculo de las propiedades influyen significativamente en los resultados. Posteriormente se realizó la comparación con un dato disponible del Campo Escuela Colorado.

El siguiente modelo implementado fue el *drift flux*. Para este modelo se calcularon 4 casos y se compararon con otros modelos cuando se alcanza el estado estable.

Finalmente, se presentan los resultados satisfactorios del modelo de dos fluidos durante la validación .

4.1 VALIDACIÓN Y RESULTADOS DE LOS MODELOS ESTACIONARIOS

Los cuatro modelos (Hagedorn & Brown, HB, Mukherjee & Brill, MB, Ansari et al., AN, y Hasan et al., HK) son validados con datos encontrados en la literatura [Ref. 3,6], los resultados son presentados a continuación.

4.1.1 Influencia de las propiedades en los resultados de los modelos

Se realizó la comparación de algunas correlaciones para determinar las propiedades de los fluidos descritas por Standing, Al Marhoun y Vazquez & Beggs [Ref. 11]. Específicamente, se calculó los valores de solubilidad del gas en el crudo y el factor de formación con las correlaciones presentadas por los autores. Si bien existen otras propiedades dependientes de correlaciones no se cuenta con modelos específicos de los mismos autores.

En la tabla 6 se muestra la influencia del cálculo de las propiedades en la caída de presión. A pesar que la diferencia promedio es pequeña, la máxima diferencia encontrada es significativamente mayor.

En este caso, las comparaciones se realizan contra los otros modelos y no contra datos experimentales porque los resultados se verían fuertemente influenciados por el modelo seleccionado para calcular la caída de presión lo cual no se está evaluando.

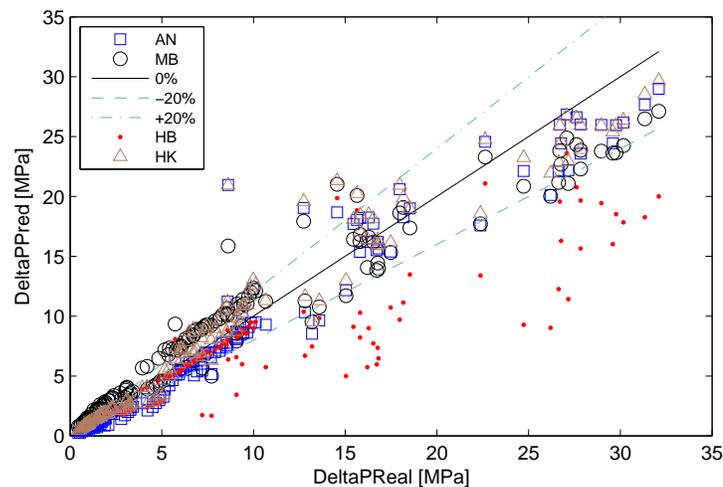
Tabla 6: Influencia de los métodos de cálculo de las propiedades.

Método	Valor [-]	HK [%]	MB [%]	HB [%]	AN [%]
Al Marhoun-Standing	Promedio	3.64	3.45	2.52	3.03
	σ	4.60	3.44	4.84	4.46
	Máximo	17.26	14.47	16.31	17.17
Vazquez-Standing	Promedio	1.76	1.86	3.25	1.92
	σ	2.23	2.61	5.49	2.43
	Máximo	8.12	10.37	21.25	9.76
Al Marhoun - Vazquez	Promedio	3.86	3.88	2.60	3.82
	σ	4.73	4.47	3.92	4.62
	Máximo	15.41	15.92	15.22	15.84

4.1.2 Validación de los modelos estacionarios de cálculo de la caída de presión

Se comparan 4 modelos (con las correlaciones de Standing para el cálculo de las propiedades) contra los datos experimentales para verificar la implementación de los modelos. Los resultados de la comparación se muestran en la figura 13 en la cual, entre más cerca estén los puntos de la línea central, mejor son los resultados, en esta figura también se incluye los márgenes de error comúnmente aceptados.

Figura 13: Comparación de los valores medidos de la caída de presión contra los valores predecidos por los modelos de Ansari et al., Mukherjee & Brill, Hagedorn & Brown y Hasan et al.



Finalmente, se realiza la regresión lineal de los resultados de cada modelo de la figura 13 para verificar numéricamente cuál modelo presenta el mejor desempeño. Los resultados de la regresión son mostrados en la tabla 7. El mejor modelo tendrá la pendiente m y el coeficiente de determinación R^2 más cerca a 1.

Tabla 7: Regresión lineal de los datos de la figura 13.

Modelo	m [-]	b [psi] ([KPa])	R^2 [-]	σ_{error} [psi] ([KPa])
AN	0.9713	53.1976 (366.8)	0.9521	266 (1834)
MB	0.9076	186.3821 (1285.1)	0.9538	244 (1682)
HB	0.7594	42.6434 (294.0)	0.8584	377 (2599)
HK	0.9898	185.3421 (1277.9)	0.9306	330 (2275)

El valor de R^2 es semejante para todos los modelos excepto HB. Similarmente, el valor de la pendiente del modelo HB es inferior y distante al valor encontrado para los demás modelos. Así mismo, el modelo MB tiene una pendiente m menor en 7% y 8% a la pendiente del modelo de AN y del HK. Como conclusión de las observaciones realizadas, se deduce de la tabla 7 que los modelos con un mejor comportamiento corresponden a los desarrollados por Ansari et al. y Hasan et al.

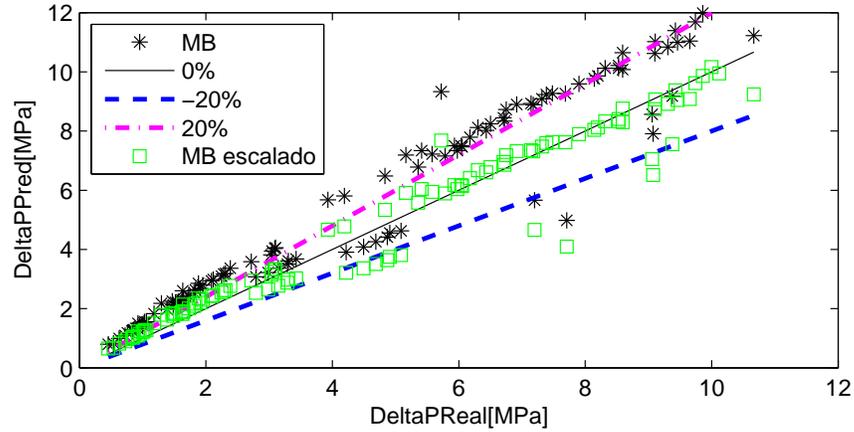
Se pueden realizar modificaciones a los modelos para mejorar el comportamiento con respecto a los datos de la muestra. Como ejemplo, se escogió el modelo de MB por tener la menor desviación estándar. Los resultados de este modelo fueron divididos en dos grupos, el grupo A de 0 a 1550 [psi] (10.7[MPa]) y el grupo B desde 1550 [psi] (10.7[MPa]). Para cada uno de los grupos se calculó un factor de escala para que m_{pend} sea igual a 1 en la ecuación $P_{predicida} = m_{pend}P_{medida}$. El valor del factor de escala es mostrado en la tabla 8, este factor puede verse como un ajuste tanto para el modelo MB o para la metodología usada para calcular las propiedades.

De la figura 14 se evidencia que la modificación permitió que la mayoría de las predicciones estén en el rango del 20%. De la tabla 8 se puede ver que la desviación estándar del grupo A de datos es la mitad que del modelo original para todos los datos.

Tabla 8: Escalado del modelo MB.

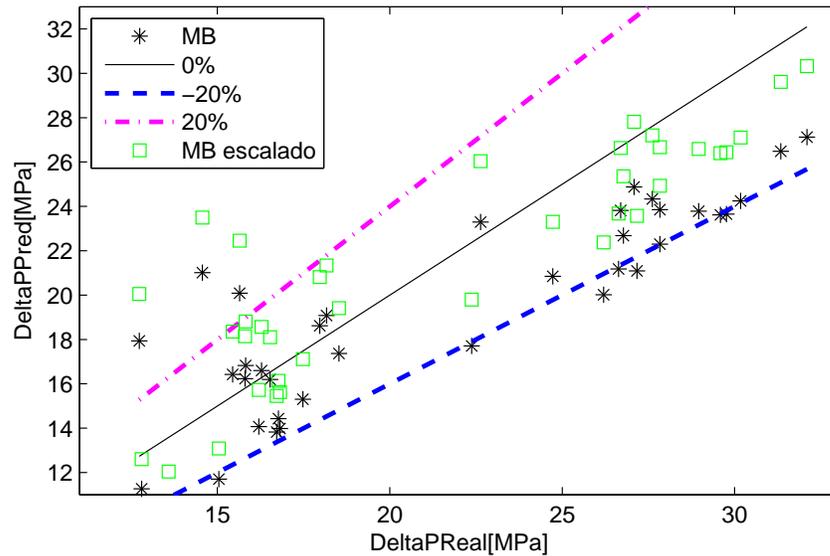
Grupo	Escala	m [-]	b [psi] ([KPa])	R^2 [-]	σ_{error} [psi] ([KPa])
A	0.823	0.929	47.8 (329)	0.926	117.9 (8129)
B	1.118	0.644	775.7 (5343)	0.760	450.6 (3103)

Figura 14: Resultados de escalar el modelo MB para lograr un mejor ajuste con los datos del grupo A.



En cambio, de la figura 15 no se puede apreciar una mejora significativa con el modelo corregido. De la tabla 8 se puede ver que la desviación estándar del grupo B es grande y el coeficiente de determinación muestra que el ajuste de los datos a la regresión es pobre. Por lo tanto, en este caso la modificación al modelo no produce mejores resultados.

Figura 15: Resultados de escalar el modelo MB para lograr un mejor ajuste con los datos del grupo B.



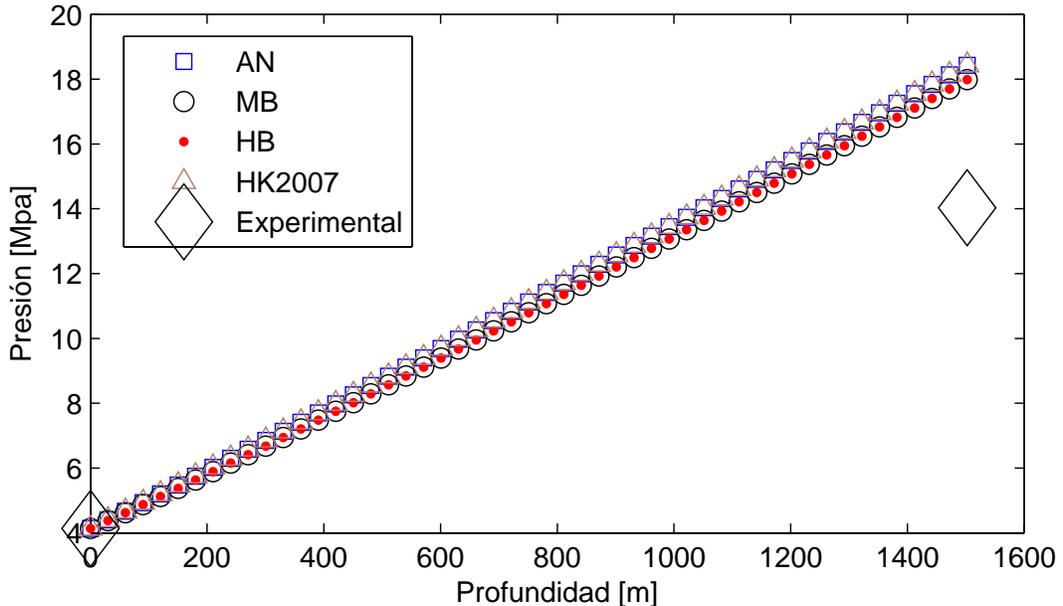
En resumen, se evidenció una mejora significativa para los datos de presión menores a 1550 [psi] y un resultado adverso para las demás presiones.

4.1.3 Resultados de la comparación del pozo 37 del Campo Escuela Colorado

La información experimental fue tomada de [Ref. 61] y los valores fueron medidos del pozo 37 de Campo Escuela Colorado. Dos pruebas fueron realizadas por el ICP (Instituto Colombiano del Petróleo) en enero 30 del 2008: una prueba del estado mecánico y una prueba PVT, presión-volumen-temperatura. Los datos medidos fueron presión y temperatura en la cabeza del pozo, en el yacimiento y en el boca del pozo. Además, también se determinó el flujo de crudo, de gas, de agua, el grado API, los componentes del gas, el diámetro de la tubería y la longitud de la tubería.

En las figuras 16 y 17 se presenta el perfil de la presión y la fracción de líquido a lo largo de toda la tubería para cada uno de los modelos junto con la presión en el pie del pozo 37, representado con un diamante gris. Esta figura también muestra que todos los modelos predicen flujo bifásico a lo largo de toda la tubería.

Figura 16: Predicción de la presión por los modelos de AN, MB, HB, HK.

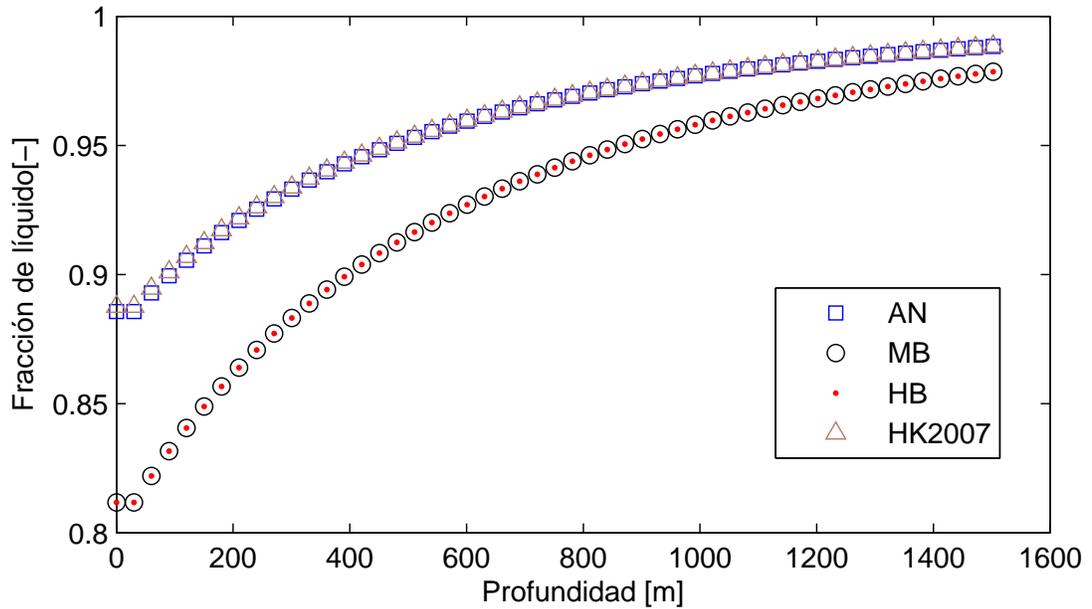


Como se puede ver en la gráfica anterior, todos los modelos sobre-predicen los resultados. La diferencia entre los valores calculados y el valor medido de la presión es $\%_{error,AN} = 33$, $\%_{error,MB} = 30$, $\%_{error,HB} = 30$, $\%_{error,HK} = 33$.

Los 4 modelos implementados predicen valores similares, si bien no se conoce las causas

reales¹ del porcentaje de error, se considera que la ausencia de información de las mejores correlaciones para predecir las propiedades del fluido del pozo 37 a lo largo de la tubería puede haber influido significativamente en los resultados.

Figura 17: Predicción de la fracción del líquido por los modelos de AN, MB, HB, HK.



4.2 RESULTADOS DEL MODELO DRIFT FLUX TRANSITORIO

A continuación se presentan tres casos que muestran el desempeño del método implementado:

4.2.1 Caso 1

En este caso se muestra la independencia de los resultados con el número de volúmenes de control, en el cual, las condiciones de frontera fueron impuestas de tal forma que, partiendo de un estado inicial ($t=0$ [s]) en equilibrio se aumentan los caudales de líquido $Q_{O,ST}$ y gas $Q_{G,ST}$ hasta alcanzar un nuevo estado de equilibrio, este cambio se

¹Se recuerda que todos los métodos usados usan correlaciones empíricas por lo que es de esperarse que siempre exista una diferencia con los valores reales.

realiza durante los primeros 10 [s]. La longitud de la tubería fue de 457[m].

Como primera aproximación se estimó el tiempo de simulación de acuerdo a la duración de una partícula que cruza la tubería a la mínima velocidad de la mezcla, es decir, 228 [s] a 2 [m/s], por simplicidad se llamará τ a este valor de tiempo. La simulación se realizó para un poco más de 4 veces este tiempo con un total de 960 [s]. A continuación se presentan 7 figuras que permiten comparar los diferentes mallados con respecto a la presión, los caudales y la fracción de líquido.

La figura 18 presenta los valores iniciales y finales de la presión a lo largo de la tubería para 500, 1000 y 2000 volúmenes de control. Se puede ver que los valores calculados por cada una de las simulaciones son idénticos. Para poder observar con más detalle la variación de la presión (en la boca del pozo) con el tiempo y el mallado se presenta la figura 19. Gracias a esta información se puede realizar una estimación más precisa del tiempo simulado para los demás casos. Como valor de referencia se toma el valor de la boca del pozo para el mallado más fino y el mayor tiempo y se calcula la diferencia porcentual con base en este valor.

La figura 19 muestra que existen pequeñas diferencias entre los tres mallados pero que también siguen el mismo comportamiento. La malla de 500 volúmenes de control alcanza el 1% de diferencia a los 3.5τ (800[s]), el mallado de 1000 volúmenes de control alcanza el valor cerca a los 2.1τ y la malla de 2000 volúmenes de control a los 1.75τ . Para los tres mallados, a partir de los 2.5τ (600[s]) la mejora en el cálculo es apenas apreciable. Teniendo en cuenta esto, se sugiere finalizar las simulaciones entre los 1.75τ y los 2.5τ (600[s]).

Figura 18: Presión a lo largo de la tubería para el tiempo inicial y el tiempo final.

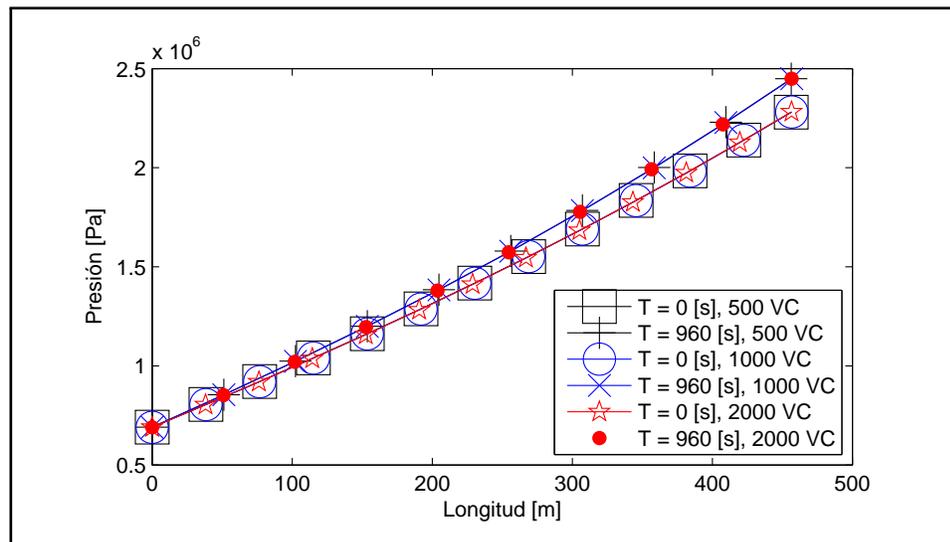
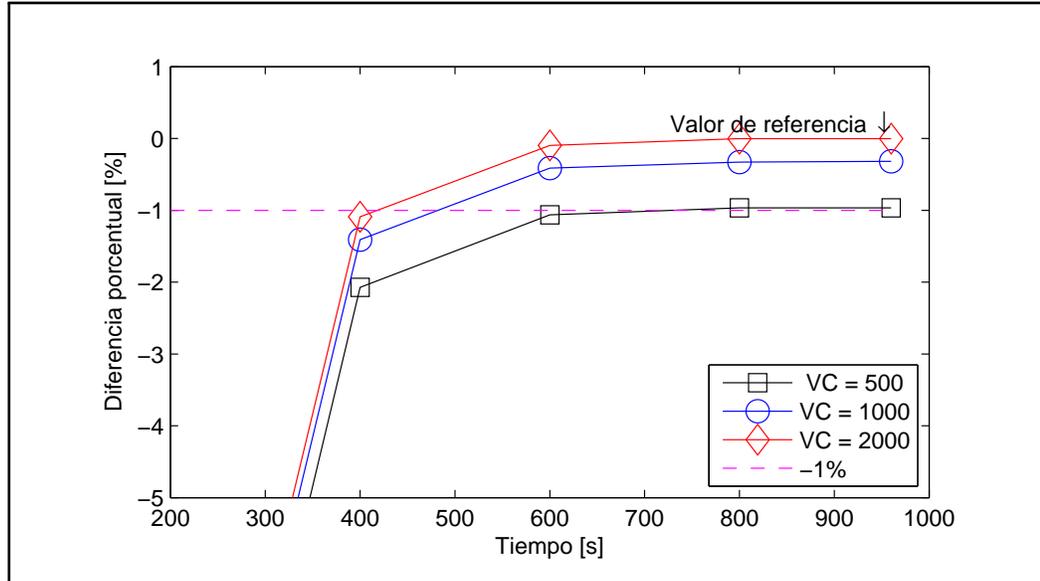


Figura 19: Comparación de los valores de la presión en la boca del pozo para diferentes tiempos y mallados.



A continuación se presentan una serie de gráficas las cuales, debido a la gran cantidad de datos que deseaban presentarse, fueron simplificadas en la presente sección y puestas de forma completa en el Anexo 6, asimismo, se realizan algunos comentarios adicionales a las gráficas en dicho anexo.

Se presenta en la figura 20 el caudal del líquido calculado para las tres mallas y para tres tiempos². Lo primero que se puede apreciar es una pequeña diferencia entre las tres mallas para 48[s] con 350[m] en las cuales existen un gran cambio en el caudal volumétrico, teniendo en cuenta que el fluido entra por la boca del pozo a los 456.9714[m] se calcula la "velocidad promedio" a la cual viajaría esta zona de transición³, el resultado es 2.2 [m/s] para t=48[s]. Recordando que los 2[m/s] es la velocidad mínima de la mezcla (en la boca del pozo) es de esperarse que la zona de transición tenga una velocidad superior a la velocidad mínima.

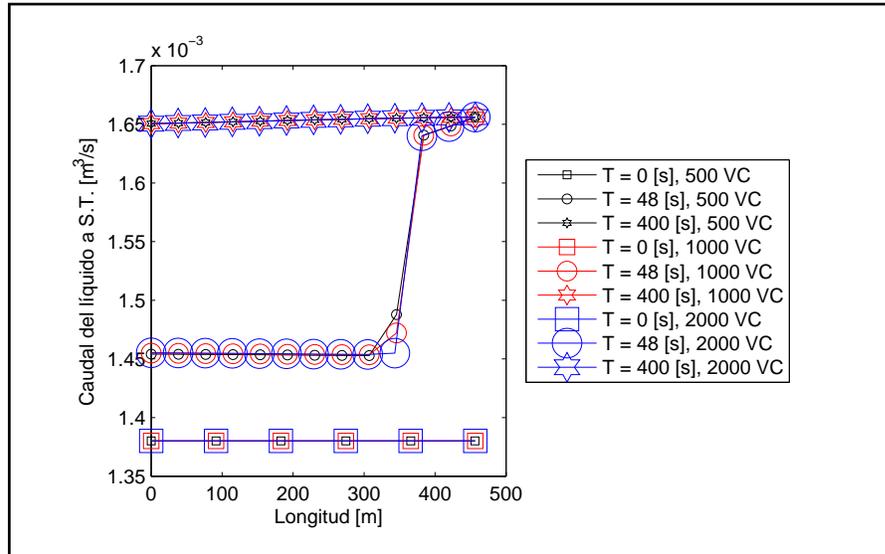
La figura 20 también muestra que el caudal cerca a la salida es relativamente constante (a lo largo de la tubería) pero varía para todos los tiempos.

Ahora se muestra en la figura 21 el detalle de lo que sucede desde 2.5τ (600[s]) hasta 4.2τ (960[s]) con el caudal del líquido para las tres mallas usadas. En esta figura se puede observar resultados idénticos para las tres mallas en t=600[s] y pequeñas diferencias para la malla de 1000 volúmenes de control a los 800 y 960[s]. Comparativamente,

²La figura 41 contiene 5 tiempos y es la correspondiente figura completa.

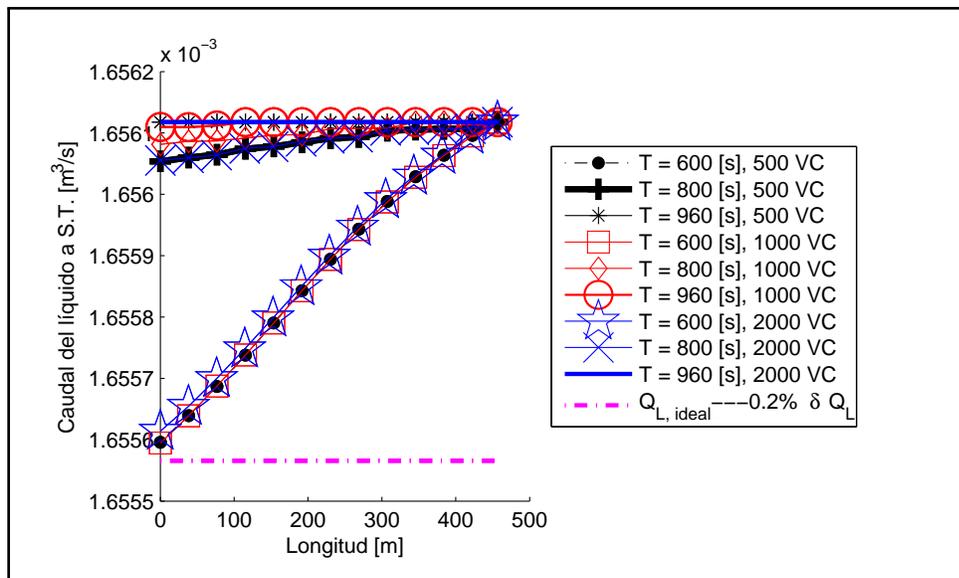
³La zona de transición aparece por el cambio en los valores impuestos para las condiciones de frontera de entrada.

Figura 20: Caudal inicial y final del líquido (parcial).



se muestra una línea punteada que representa el caudal ideal menos el 0.2% de la diferencia de caudales final e inicial en la que, todas las predicciones presentadas se encuentran entre este porcentaje y el 0%. Una revisión de los datos generados mostró que el 1% de la diferencia se obtiene para $t = 460$ [s] o aproximadamente 2τ .

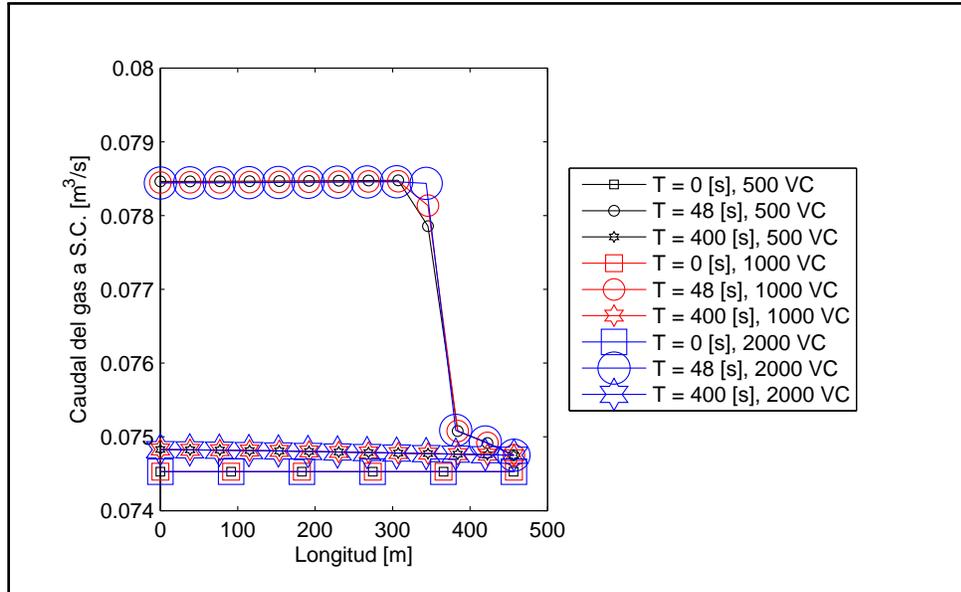
Figura 21: Caudal del líquido para los últimos tiempos calculados.



A continuación se muestra en la figura 22 la evolución del caudal del gas a lo largo

de la tubería hasta los 400 [s]. La variación del caudal del gas en la condición de frontera de entrada fue del 0.3% y como se puede ver en la figura, el caudal alcanzó valores superiores hasta que se estabilizó. En esta figura también se puede ver pequeñas diferencias en los resultados proporcionados por los diferentes mallados.

Figura 22: Caudal inicial y final del gas (parcial).



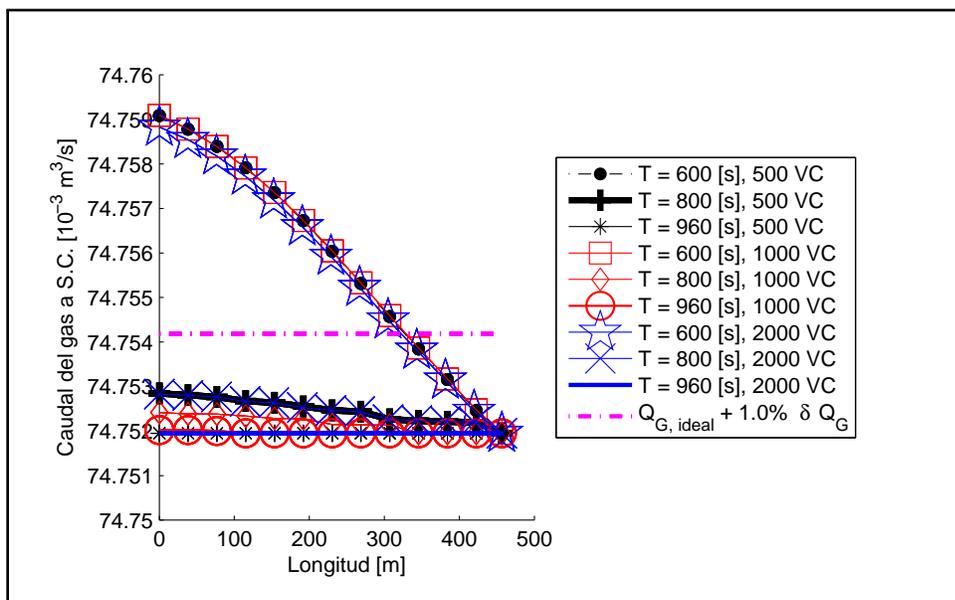
En la figura 23 se compara el caudal del gas para 600, 800, 960 [s] y para los tres mallados; se observan pequeñas diferencias en los resultados para los 600 y 800[s]. También se observa que los resultados para $t=600[s]$ están por encima de la línea de referencia $Q_{G,ST,final} + 0.01\Delta Q_{G,ST,f-i}$ correspondiente al 1% de diferencia con el valor ideal. La revisión de los datos mostró que se alcanza este valor a los 688 [s] o, 3τ .

Para finalizar, se muestra en la figura 24 los valores iniciales y finales calculados para la fracción del líquido con las tres mallas. En esta figura se puede observar un comportamiento idéntico de las diferentes mallas.

Como recomendación para que las simulaciones a realizar no requieran una mayor duración de cálculo de la necesaria y, en el caso de realizar simulaciones transitorias con condiciones de frontera de entrada de los caudales constantes se estima que, si el objetivo es comparar los valores de la presión es suficiente que el tiempo de simulación sea entre 1.75τ y $2.5\tau(600[s])$, por otro lado, si el objetivo es comparar el valor de los caudales se hace necesario un tiempo de simulación mayor a 3τ , por consiguiente, las siguientes simulaciones serán finalizadas cerca a estos valores de tiempo.

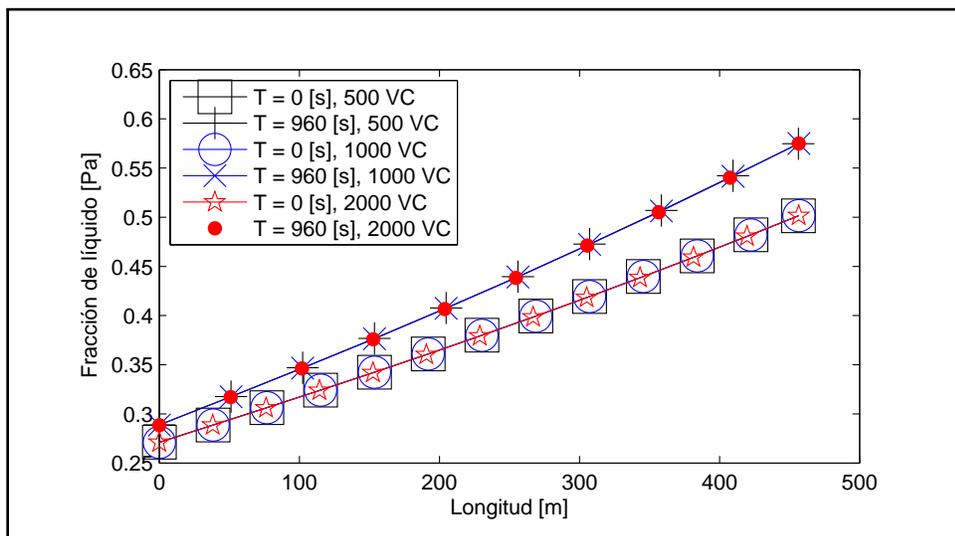
Como comentario final para el presente caso, se resalta que los resultados presentados

Figura 23: Caudal del gas para los tiempos finales (parcial).



para las tres mallas muestran que el modelo no se ve significativamente afectados por la resolución de las mallas.

Figura 24: Fracción del líquido para los instantes inicial y final.



4.2.2 Caso 2

Se compararán dos simulaciones con diferentes números de Courant en las que se mantiene constante el flujo de entrada de líquido y se aumenta el flujo de gas, el objetivo de esta comparación es evidenciar las inexactitudes provocadas por un número de Courant mayor a 1. Las dos simulaciones tardaron aproximadamente 12 horas en ser realizadas siendo el tiempo final de una 310[s] y para la otra, 1000[s]. La longitud de la tubería es de 304.7 [m] y la velocidad mínima de la mezcla es de 0.78[m], por consiguiente, se estimó el tiempo que tarda una partícula en recorrer la tubería en $\tau = 390$ [s] y la simulación se llevó a cabo hasta los $2.5\tau \approx 1000$ [s].

El perfil de la presión a lo largo de la tubería es presentado en la figura 25. En esta se observa que el valor del Courant no afectó significativamente los resultados de la simulación. La revisión de los datos numéricos mostró una diferencia de 667 [Pa] correspondiente al 0.03%.

La diferencia en la fracción de líquido para las dos simulaciones es de 0.0187 [-] correspondiente al 3% como se muestra cerca a los 170 [m] en la figura 26, esta diferencia se presenta en la zona donde se produce un cambio drástico de la fracción del líquido a causa del cambio de las condiciones de frontera.

Figura 25: Presión a lo largo de la tubería para diferentes valores del Courant.

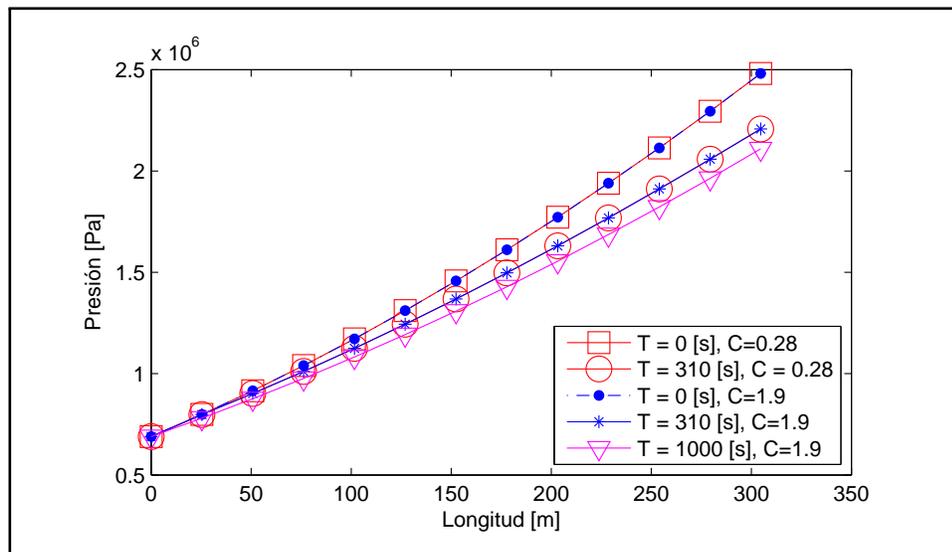
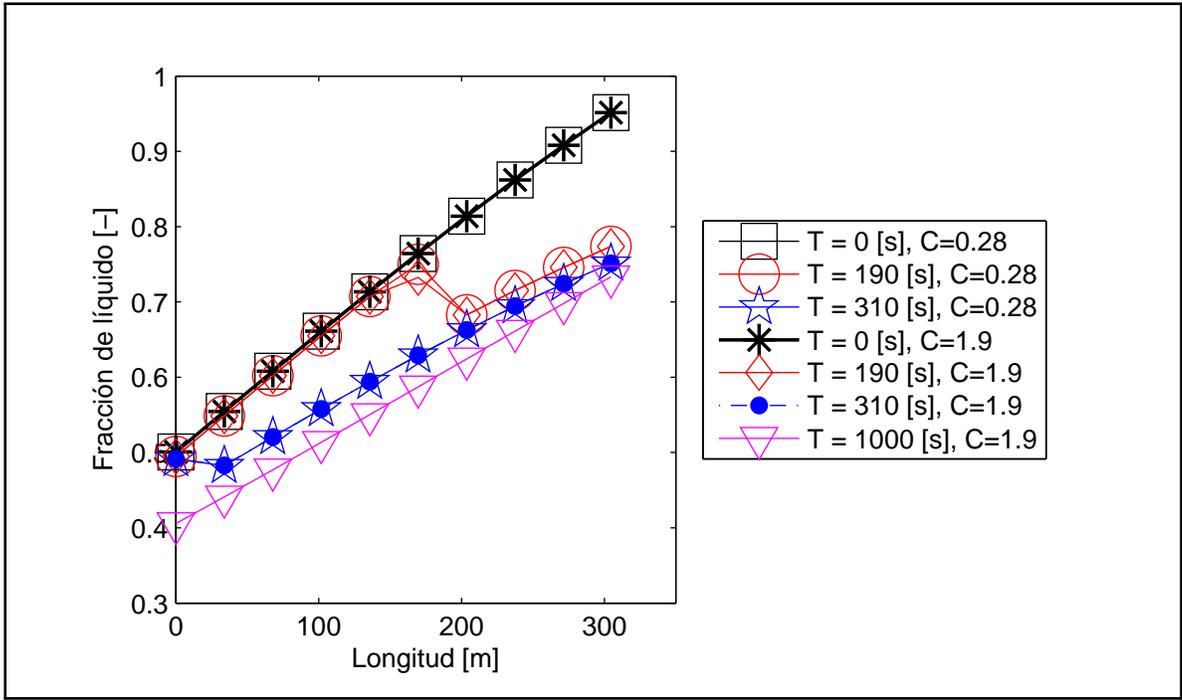


Figura 26: Fracción de líquido a lo largo de la tubería para diferentes valores del Courant.



Para el caso del caudal del líquido, figura 27, también se puede observar una pequeña diferencia cerca de los 170 [m] para los 190 [s] y a los 40 [m] para los 310 [s]. Adicionalmente, se aprecia el caudal constante en la boca del pozo (304.7 [m]) correspondiente a la condición de frontera impuesta para este caso.

Finalmente se presenta en la figura 28 el caudal del gas a condiciones estándar, en la cual, no se alcanza a evidenciar las pequeñas diferencias en las dos simulaciones que, según la revisión de los datos numéricos, es de 4.5×10^{-4} [m^3/s] ó 5%.

El hecho de variar el Courant y el avance del tiempo en la simulación genera una influencia muy pequeña en los resultados de la presión.

Figura 27: Caudal del líquido a lo largo de la tubería para diferentes valores del Courant.

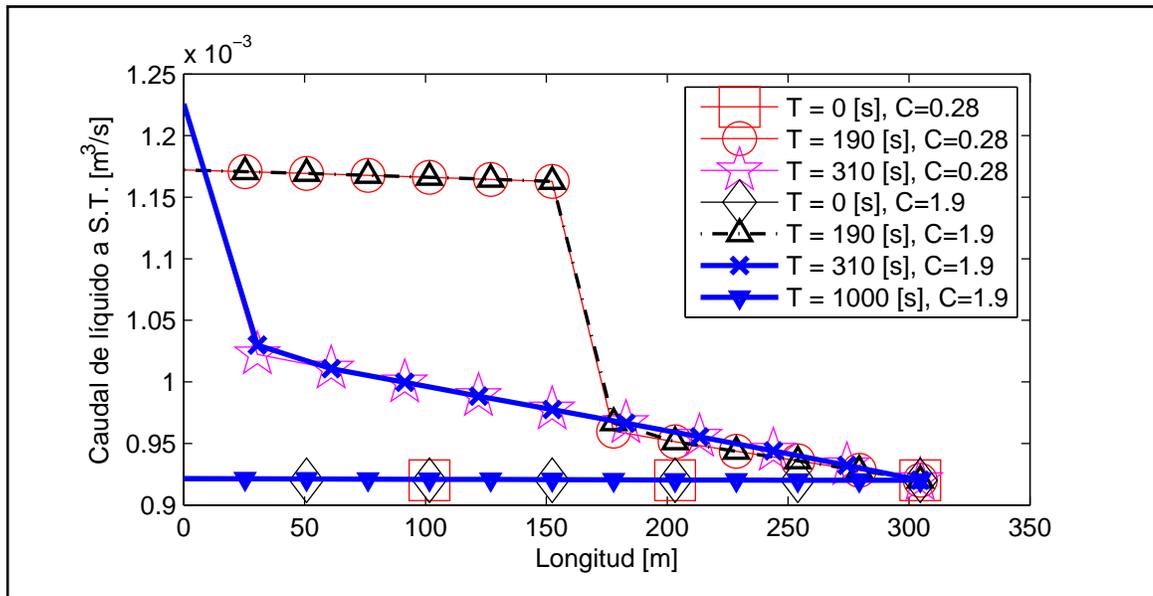
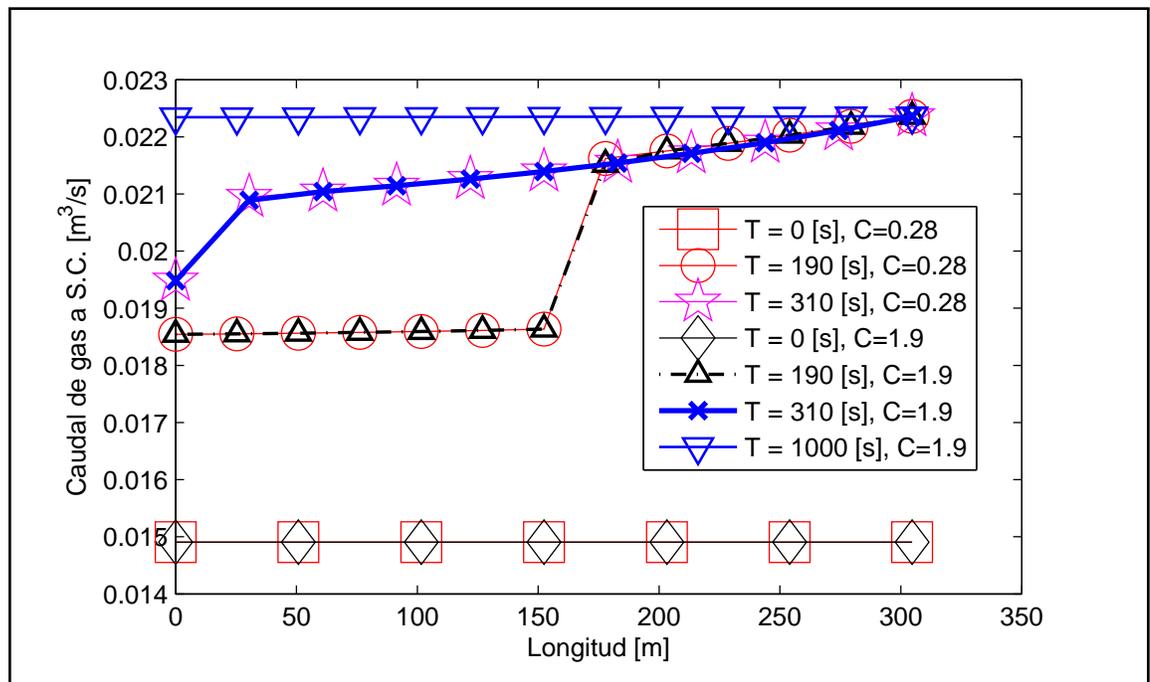


Figura 28: Caudal del gas a lo largo de la tubería para diferentes valores del Courant.



4.2.3 Caso 3

Finalmente, en este tercer caso se verifican los resultados obtenidos por el modelo transitorio con dos mallados diferentes y se comparan contra los resultados del modelo de Hasan et al. y datos tomados de la literatura. Los valores iniciales y finales fueron impuestos (junto con otros parámetros) de forma tal que permita la comparación con datos de laboratorio tomados de Baxendell & Thomas [Ref. 6].

Siendo la velocidad mínima de la mezcla 9.4 [m/s] y la longitud de la tubería 608.4 [m] ($\tau = 64[s]$) se estimó que el tiempo de simulación debía ser de 120 [s], este valor será tomado como el tiempo final para el presente caso.

Se presenta en las figuras 29 y 30 la evolución de los caudales (a condiciones estándar o de almacenamiento) a lo largo de la tubería y para cuatro tiempos diferentes. Lo primero que se puede apreciar en ambas figuras es que la predicción obtenida para 1000 volúmenes de control y 6000 volúmenes de control es casi idéntica. Una comparación numérica muestra una diferencia máxima de 0.037% para el caudal del líquido y del 0.0077% para el caudal del gas. Lo siguiente que se observa es la evolución temporal de los caudales, en este caso se observa un valor similar a lo largo de la tubería para el caudal del líquido y del gas los cuales, disminuyen a lo largo del tiempo.

Figura 29: Caudal del líquido para dos cantidades diferentes de volúmenes de control en varios tiempos.

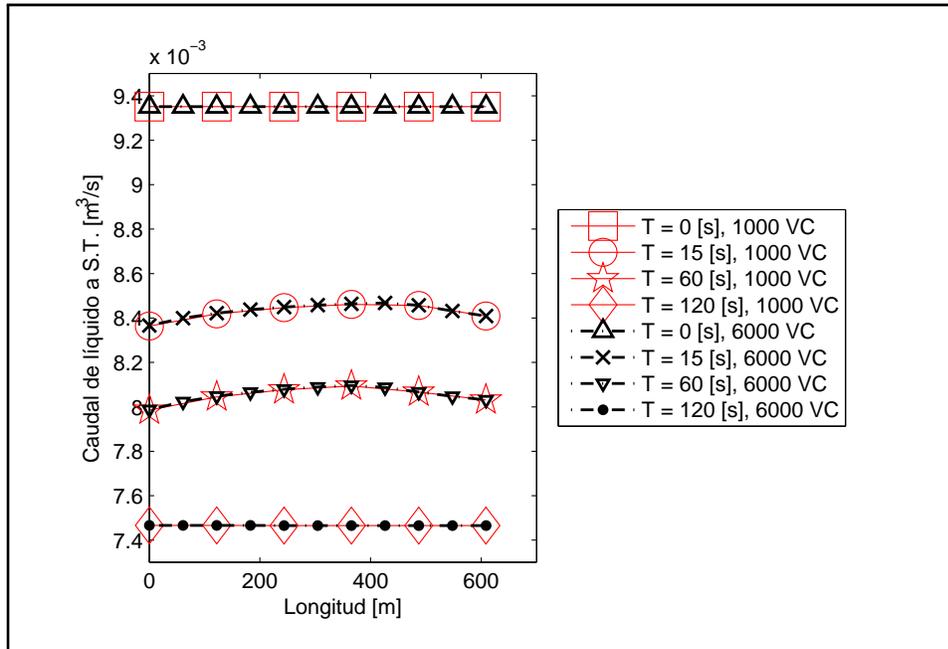
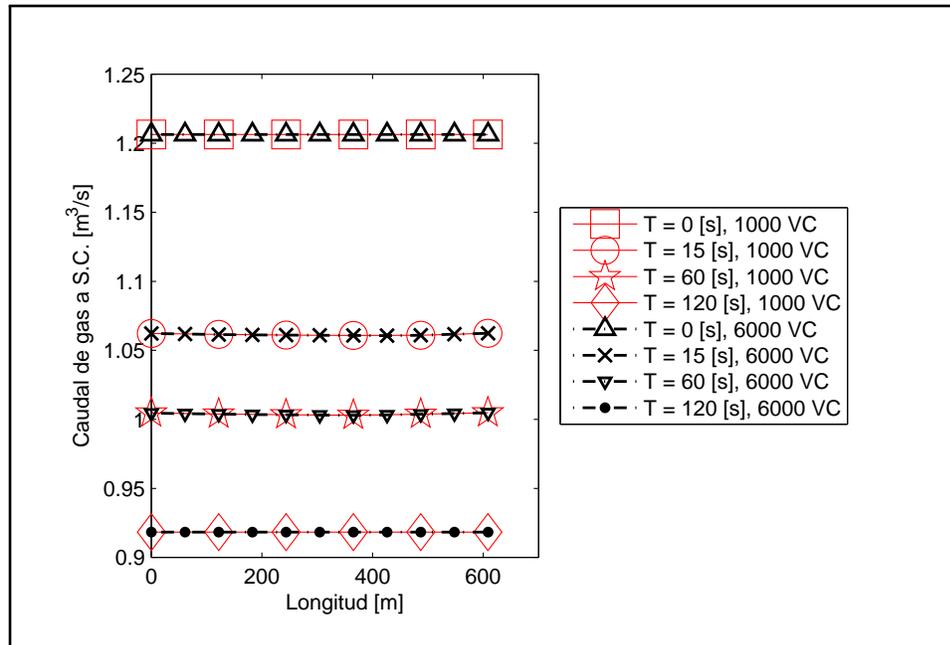
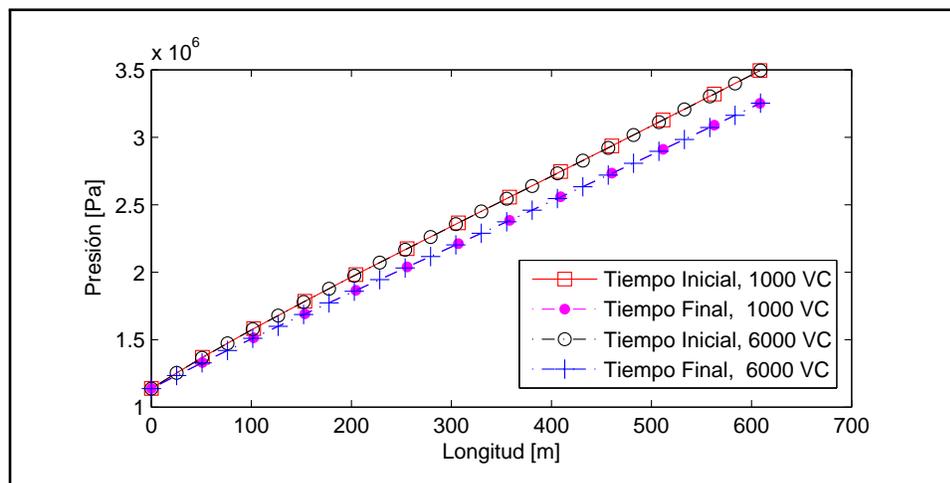


Figura 30: Caudal del gas para dos cantidades diferentes de volúmenes de control en varios tiempos.



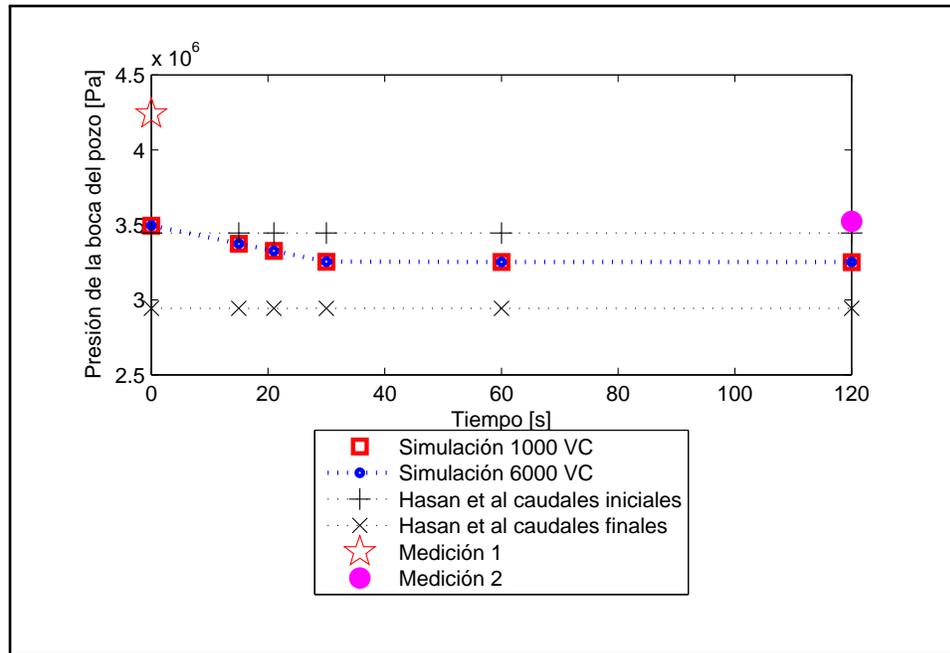
En la figura 31 y 32 se presentan dos gráficas de la presión a lo largo de la tubería y la presión de la boca del pozo a lo largo del tiempo, respectivamente. Los resultados muestran el mismo comportamiento para los dos mallados tanto para el instante inicial como para el instante final, por otro lado, la revisión de los valores numéricos mostró una diferencia máxima del 0.11%.

Figura 31: Presión a lo largo de la tubería.



De la figura 32 se puede ver que el modelo transitorio generó resultados similares al modelo de Hasan et al. para el instante inicial, sin embargo, la diferencia para el instante final fue mayor. Los datos de la presión medidos en el laboratorio [Ref. 6] son mayores a los calculados por ambos modelos.

Figura 32: Presión en la boca del pozo.



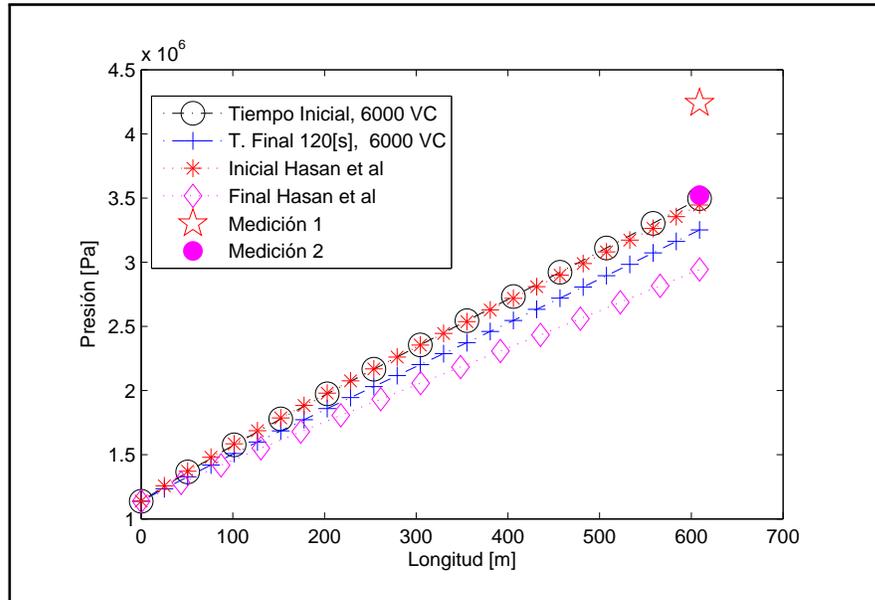
En la figura 33 se muestra el perfil de la presión a lo largo de la tubería tanto para el modelo transitorio como para el modelo de Hasan et al. y, también se muestran los puntos correspondiente a la presión medidos por [Ref. 6].

En la tabla 9 se comparan los resultados numéricos del modelo transitorio con el modelo de Hasan et al. y las mediciones realizadas por [Ref. 6]. Existe una mayor diferencia entre las presiones medidas y las calculadas por los dos modelos frente a la diferencia existente entre los dos modelos.

Tabla 9: Comparación de resultados con información de laboratorio.

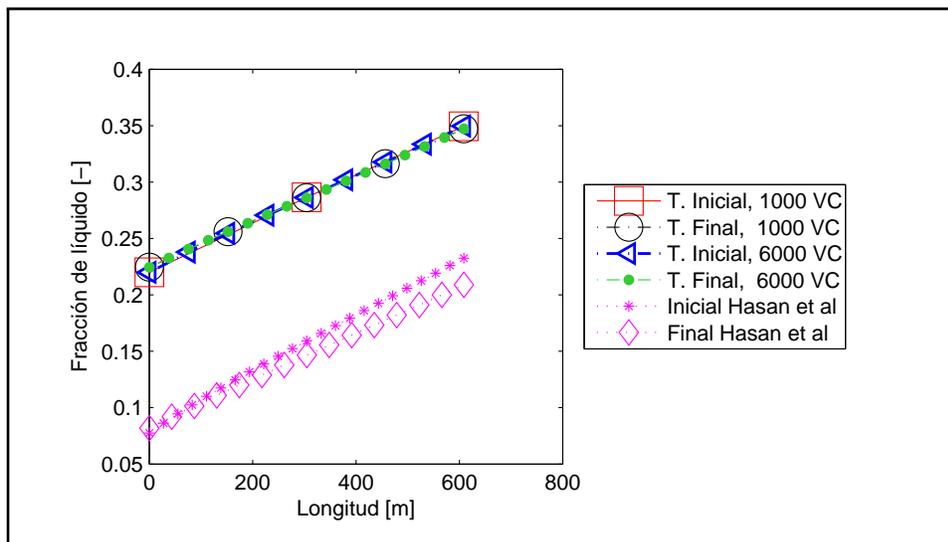
Tiempo	Presión Inicial [MPa]			Porcentaje de error [%]	
	Drift flux trans.	Hasan et al.	Medición	Drift flux trans.	Hasan et al.
Inicial	3.495	3.446	4.240	18	19
Final	3.252	2.943	3.523	8	16

Figura 33: Comparación de la presión para los instantes inicial y final.



Solo falta presentar la figura 34 en la cual se comparan las predicciones de la fracción del líquido por parte del modelo transitorio y el modelo de Hasan et al. Además de mostrar que la variación de la fracción del líquido es pequeña a lo largo del tiempo, también se puede ver que el modelo de Hasan et al. predice un valor muy inferior. Si bien estos valores son diferentes el resultado final del cálculo de la caída de presión en la tubería es muy similar.

Figura 34: Comparación de la fracción de líquido para los instantes inicial y final.

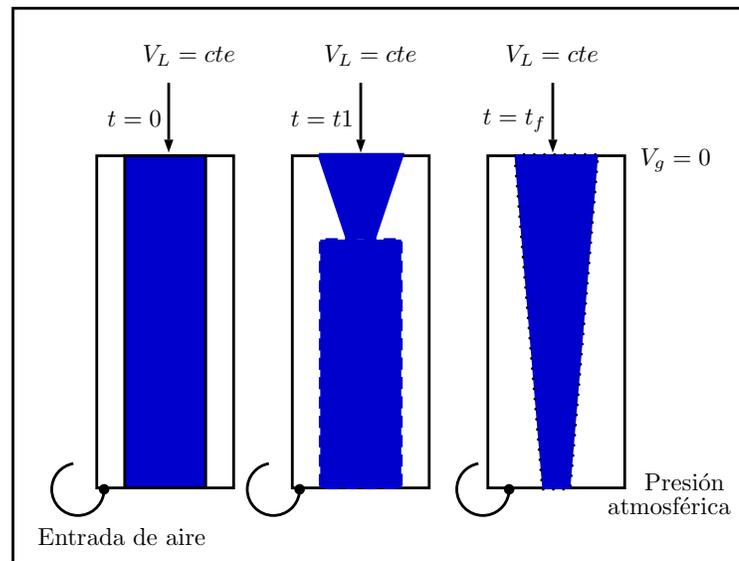


4.3 MODELO DE DOS FLUIDOS APLICADO AL FLUJO EN TUBERÍAS

4.3.1 Validación del modelo two fluid

Antes de realizar los cálculos con el flujo bifásico en tuberías de pozos petroleros se decidió realizar una prueba con un caso conocido como el problema de la llave del grifo el cual se muestra en la figura 35.

Figura 35: Descripción gráfica del problema de la llave del grifo.



El problema de la llave de grifo [Ref. 53] es comúnmente usado para probar los modelos de dos fluidos, y, ha sido seleccionado para verificar el comportamiento del modelo comparado con la solución analítica. Este problema consiste en una tubería vertical por la que fluye agua en la entrada superior de la tubería. En la entrada inferior se permite la entrada de aire a presión atmosférica; el agua fluye hacia afuera de la tubería y el aire entra para llenar los espacios dejados por el agua. La fracción de líquido en el tiempo inicial es constante a lo largo de la tubería y se debe especificar como parámetro para realizar la simulación.

Para resolver analíticamente este problema es necesario despreocuparse de la viscosidad del fluido y todas las fuerzas de fricción, como resultado, puede ser encontrado el valor de la fracción de vacío (Eq 4.1) y la velocidad del líquido (Eq 4.2) como una función del tiempo y del espacio [Ref. 56].

$$\alpha(x, t) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha_l^0 v_l^0}{\sqrt{2gx + (u_l^0)^2}} & \text{ssi } x \leq u_l^0 t + \frac{1}{2}gt^2 \\ 1 - \alpha_l^0 & \text{para los demás casos} \end{cases} \quad (\text{Eq 4.1})$$

$$u_l(x, t) = \begin{cases} \sqrt{2gx + (u_l^0)^2} & \text{ssi } x \leq u_l^0 t + \frac{1}{2}gt^2 \\ u_l^0 + gt & \text{para los demás casos} \end{cases} \quad (\text{Eq 4.2})$$

Las condiciones de frontera de este problema son las siguientes:

1. Velocidad:

- I. Superior (grifo): Se conocen los valores de la velocidad del líquido (diferente de 0) y del gas (igual a 0), fronteras tipo Dirichlet.
- II. Inferior (salida del agua a la atmósfera): Se asume no existe variación en la velocidad de los fluidos en esta zona.

2. Corrección de presión:

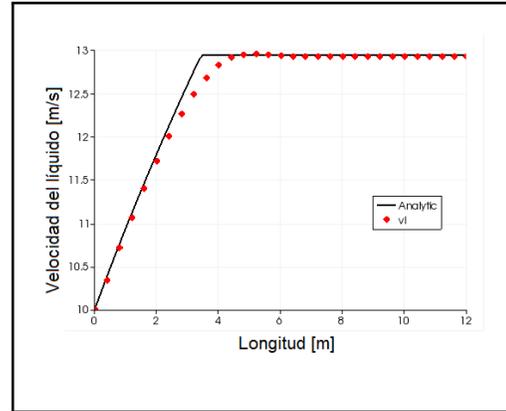
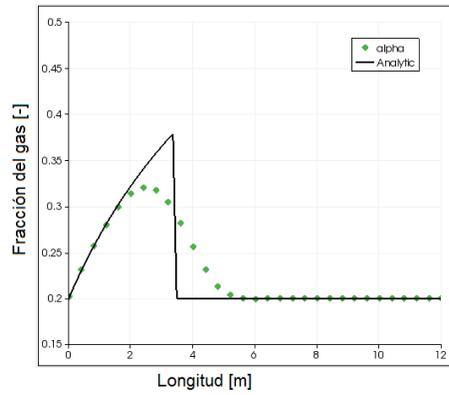
- I. Superior (grifo): frontera tipo Neumann.
- II. Inferior (salida del agua a la atmósfera): no hay corrección de la presión, $p' = 0$, frontera tipo Dirichlet.

3. Fracción de vacío:

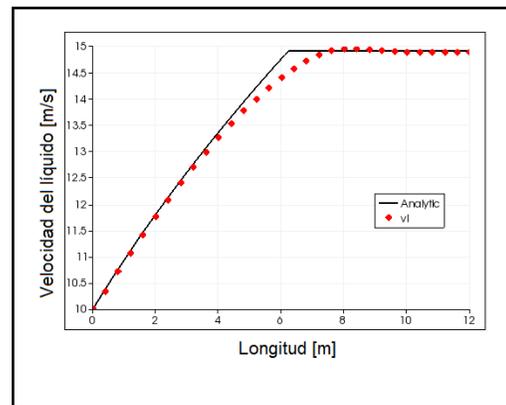
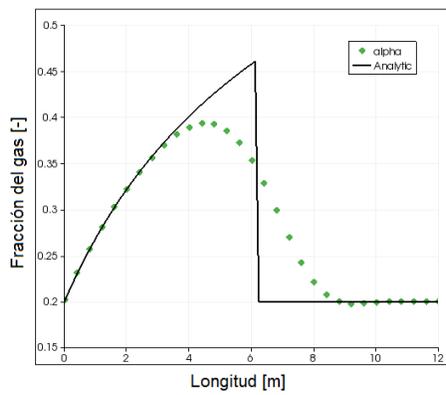
- I. Superior (grifo): la fracción de vacío se conoce y depende de la geometría del problema, frontera tipo Dirichlet.
- II. Inferior (salida del agua a la atmósfera): se asume que no existe una variación significativa de la fracción de vacío en esta zona.

Como resultado de la ejecución del código, se obtienen una serie de gráficas que componen la figura 36 y muestran la evolución de la fracción de vacío y la velocidad del líquido para tres tiempos diferentes. Los datos fueron obtenidos para una simulación de 200 volúmenes de control con un paso temporal de 0.01 [s]. La solución encontrada es similar a la solución analítica en las etapas transitorias y, casi igual cuando se alcanza el estado estable.

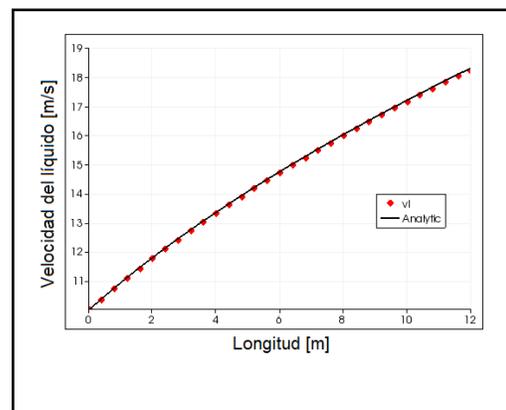
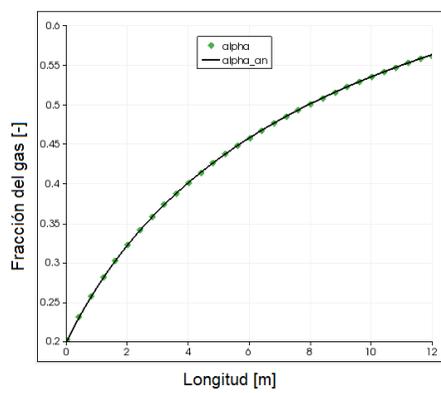
Figura 36: Comparación del modelo implementado con la solución analítica para la fracción de vacío y la velocidad del líquido.



$t = 0.3[s]$



$t = 0.5[s]$



$t = 2[s]$

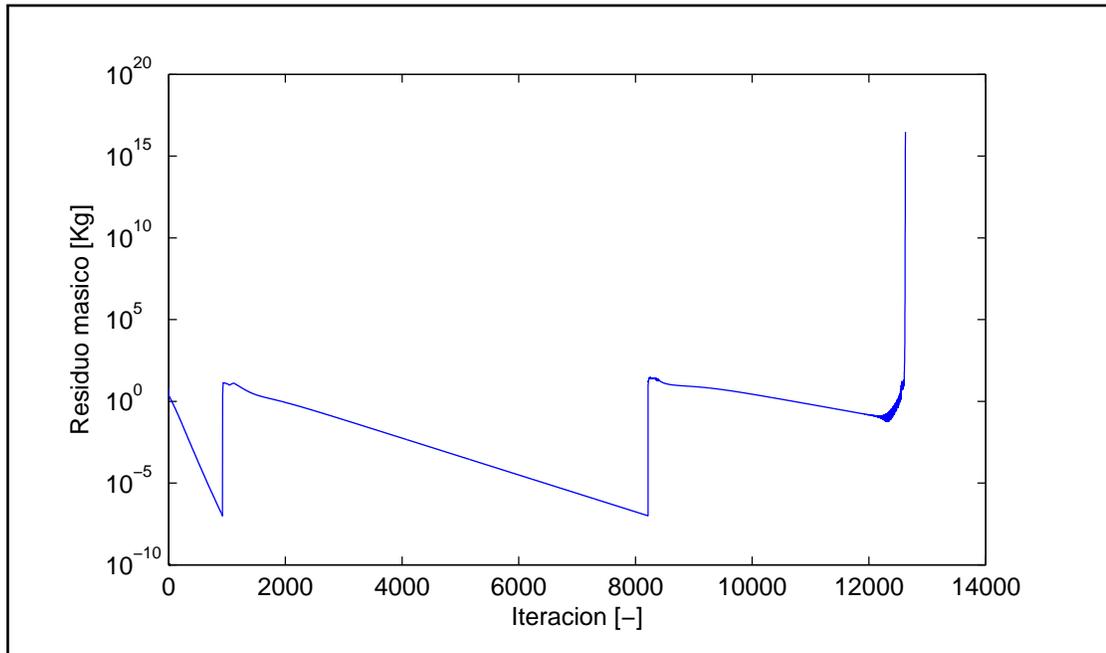
4.3.2 Pruebas del modelo de dos fluidos para simular el flujo bifásico en tuberías de pozos petroleros

Una vez se verificó que el modelo obtuviera unos resultados satisfactorios con la simulación de la llave del grifo se procedió a ejecutar las simulaciones del flujo bifásico en tuberías.

La realización de las simulaciones mostró la existencia de problemas de convergencia durante todas las simulaciones. Como ejemplo de dicho problema, en la figura 37 se muestra la evolución del residuo másico a lo largo de las iteraciones. Aún si parece que el modelo trabajó correctamente para los primeros dos tiempos, basta con mirar la figura 40 para darse cuenta que los resultados no son correctos.

En las figuras 38 y 39 se presentan las condiciones iniciales para los caudales y para el primer tiempo calculado.

Figura 37: Valor del residuo másico para cada una de las iteraciones.



El criterio de avance en el tiempo es el valor de la norma del residuo másico (menor a $1e-7$ [Kg]) , por lo consiguiente, los cambios abruptos presentados cerca a las iteraciones 1000 y 8000 corresponden a cambios en el tiempo.

Figura 38: Valores iniciales del caudal para el caso desarrollado mediante el modelo de dos fluidos.

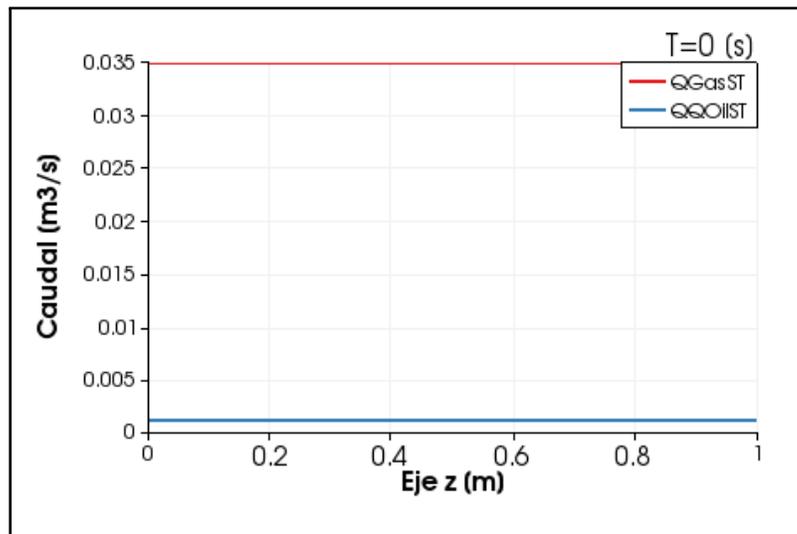
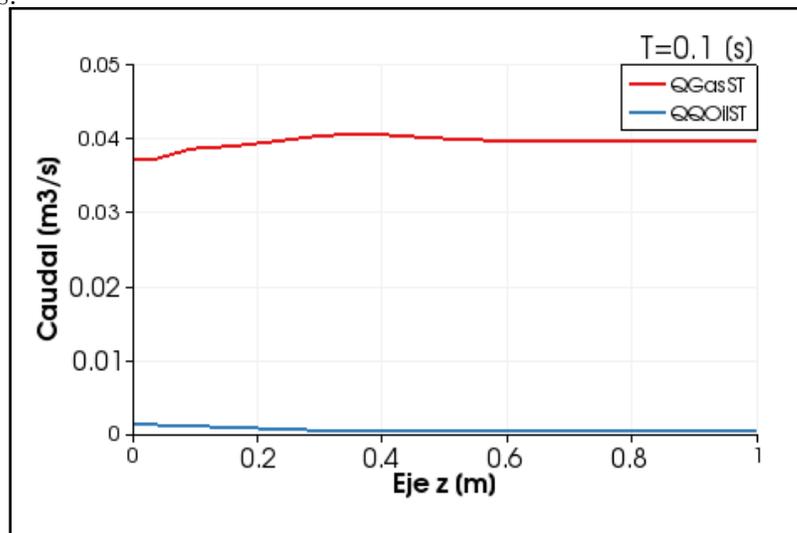
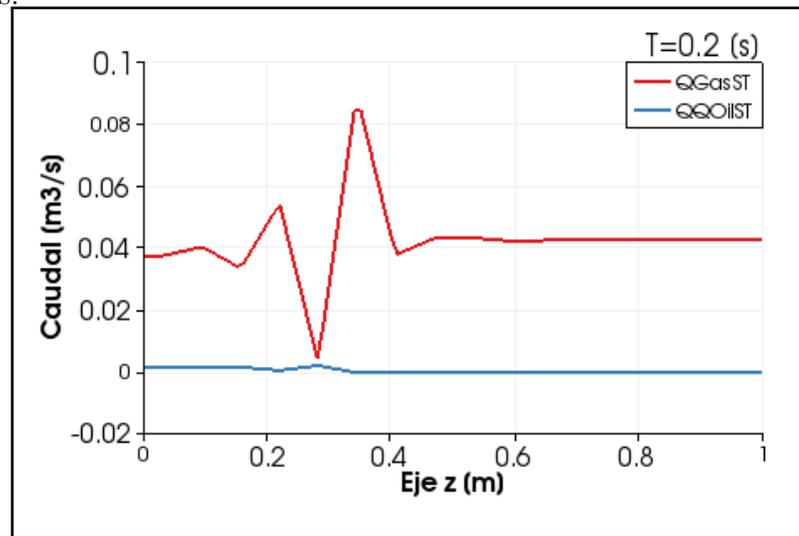


Figura 39: Valores del caudal a los 0.1 [s] para el caso desarrollado mediante el modelo de dos fluidos.



La figura 40 muestra oscilaciones en el valor del caudal del gas a condiciones estándar las cuales también están presentes en el caudal del crudo a condiciones de almacenamiento pero en menor grado. El modelo implementado, si es capaz de reducir el residuo másico en cada volumen de control, encuentra una solución no real para el problema.

Figura 40: Valores del caudal a los 0.2 [s] para el caso desarrollado mediante el modelo de dos fluidos.



En la literatura es común encontrar problemas de convergencia para los modelos de dos fluidos que tratan de simular la transición entre flujo estratificado y flujo bala en una tubería horizontal⁴, a pesar de ello, los autores del presente proyecto no han encontrado referencias que demuestren la existencia de condiciones de flujo para tuberías verticales que causen problemas de convergencia.

Dado que el problema del flujo bifásico en régimen transitorio se resolvió con el modelo drift flux, se decidió que los percances encontrados con el presente modelo no son de gran importancia para el desarrollo general del proyecto y, se espera en un trabajo futuro replantear de forma que cumpla satisfactoriamente su cometido, incluyendo la transición de una a dos fases y la realización de simulaciones partiendo con fluidos en reposo.

⁴La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz fue referenciada en el capítulo 2

5. CONCLUSIONES

1. Se revisaron más de 60 referencias bibliográficas desde el año 1949 hasta el año 2013 y se escribió un artículo en base a la información recopilada. La revisión de los diferentes métodos mostró un amplio rango de acuerdo a su complejidad presentando diferentes grados de exactitud en la simulación del flujo bifásico en tuberías. Así mismo, se encontró que no todas las metodologías dependen de la selección del patrón de flujo, agregando que, una incorrecta selección produce un error adicional en los resultados. Las metodologías independientes del patrón de flujo permiten la continuidad de los modelos y por lo mismo, presentan una ventaja matemática.
2. Se desarrolló un modelo matemático y numérico del modelo de dos fluidos y posteriormente se realizó la implementación en el lenguaje C++. Si bien el proceso de validación con el *problema de la llave del grifo* fue satisfactorio, para el caso estudiado en este proyecto no fue posible obtener una convergencia en el método numérico. A pesar de no haber encontrado referencias bibliográficas con problemas de convergencia en el modelo de dos fluidos para tuberías verticales si se encontró un artículo de Liao et al. relacionado con las inestabilidades que se pueden presentar para tuberías horizontales, y también se encontró un artículo de Darwish, Moukalled & Sekar con algunas sugerencias y opciones para la implementación del método SIMPLE las cuales fueron seguidos en el presente proyecto.
3. Se implementaron los modelos simplificados de Hagedorn & Brown y Mukherjee & Brill, el modelo drift flux estacionario de Hasan et al. y el modelo mecanicista de Ansari. Durante el proceso de validación de los modelos en estado estable, se encontró un mejor desempeño en los modelos de Ansari et al. y Hasan et al. destacando que el modelo de Hasan et al. es más sencillo que el primero y no necesita de bucles iterativos internos. Este proceso de validación también permitió ver que las correlaciones usadas para el cálculo de las propiedades de los fluidos influyen en promedio en un 3% a la caída total de presión, pero puede influir hasta en un 20 % en los resultados.
4. Cuando fueron comparados los modelos en estado estable con los datos del pozo 37 del campo escuela colorado, todos los modelos presentaron una desviación del 30% en la presión de la boca del pozo. Por lo tanto, se debe realizar un análisis adicional para entender la presencia de las diferencias presentadas en este caso, este análisis debe incluir el ajuste de las correlaciones para calcular las propiedades del crudo y la revisión de la tubería por la posible existencia de obstrucciones.

5. Se desarrolló e implementó un modelo drift flux transitorio el cual es capaz de simular el flujo ascendente líquido-gas en las tuberías de los pozos de petróleo. Posteriormente, se comparó con el modelo de Hasan et al. y dos datos experimentales de la presión cuando el modelo transitorio alcanzó el estado estable. El modelo transitorio obtuvo una diferencia entre el 8% y el 18% de la presión en la boca del pozo contra los datos experimentales. Así mismo, con el modelo de Hasan et al. se obtuvieron resultados similares al modelo transitorio.
6. La herramienta computacional desarrollada simula el flujo bifásico en estado estable y transitorio y obtiene como resultados la presión, la fracción de líquido y los caudales a lo largo de la tubería. Además de la selección del modelo de cálculo de la caída de presión también, se permite seleccionar las correlaciones para el cálculo de las propiedades. A partir de las diferentes pruebas realizadas se encontró que los resultados entregados por el código pueden tener una diferencia entre el 8% y el 30% comparado con datos experimentales.

6. RECOMENDACIONES Y OBSERVACIONES

Durante la maestría se realizaron los siguientes dos artículos:

1. Jerez-Carrizales, M.; Jaramillo, J. & Fuentes, D. Prediction of Multiphase Flow in Pipelines: Literature Review *Ingeniería y Ciencia*, 2015, Vol 11. Pp 213-233.
2. Jerez-Carrizales, M.; Jaramillo, J.E. & Fuentes, D. Comparison of simplified models in the prediction of two phase flow in pipelines. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2014, Vol 59.

Y las siguientes tres ponencias:

1. Jerez, M.; Jaramillo, J. & Fuentes, D. Comparison of simplified models in the prediction of two phase flow in pipelines. *International Mechanical Engineering and Agricultural Sciences Congress*, October 9-11, 2013.
2. Jerez, M.; Jaramillo, J. & Fuentes, D. Simulation of the two phase flow in a wellbore using two-fluid model 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI) 5th European Conference on Computational Mechanics (ECCM V) 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI), 2014.
3. Jerez, M.; Jaramillo, J. & Fuentes, D. Modelo drift flux transitorio para la predicción del flujo bifásico en tuberías *Memorias del XII Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica*, 2015.

Dentro de las recomendaciones para futuros trabajos se destacan las siguientes:

1. Modelado de secciones anulares concéntricas y excéntricas.
2. Realización de experimentos para que, con nuevos datos se puedan obtener nuevas relaciones de cierre para los diferentes modelos. E incluso, se podrían llegar a plantear modelos completos nuevos que logren un comportamiento más preciso en situaciones específicas.
3. Perfeccionamiento del modelo de dos fluidos unidimensional y realización de un modelo bi y tridimensional.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] ANSARI, A.M. AND SYLVESTER, N.D. AND SARICA, C. AND SHOHAM, O. AND BRILL, J.P. A comprehensive mechanistic model for upward two-phase flow in wellbores. *SPE Production & Facilities Volume 9, Number 2* (1994), p. 143–151.
- [2] AYALA, O. F. AND AYALA, L. F. AND AYALA, O. M. Multi-phase flow analysis in oil and gas engineering systems and its modelling. *Flow Analysis* (2007), p. 57–61.
- [3] AZIZ, K. AND GOVIER, G. AND FOGARASI, M. Pressure drop in wells producing oil and gas. *Journal of Canadian Petroleum Technology Volume 11, Number 3* (1972).
- [4] BANKI, R. AND HOTEIT, H. AND FIROOZABADI, A. Mathematical formulation and numerical modeling of wax deposition in pipelines from enthalpy-porosity approach and irreversible thermodynamics. *International Journal of Heat and Mass Transfer 51*, 13-14 (2008), 3387 – 3398.
- [5] BARNEA, D. AND SHOHAM, O. AND TAITEL, Y. Flow pattern transition for vertical downward two phase flow. *Chemical Engineering Science 37*, 5 (1982), 741 – 744.
- [6] BAXENDELL, P. AND THOMAS, R. The calculation of pressure gradients in high-rate flowing wells. *PETROLEUM TRANSACTIONS* (1961), p. 1023–1028.
- [7] BEGGS, D. AND BRILL, J. A study of two-phase flow in inclined pipes. *Journal of Petroleum Technology Volume 25, Number 5* (1973), p. 607–617.
- [8] BELLO, O. AND UDONG, I. AND FALCONE, G. AND TEODORIU, C. Hydraulic analysis of gas-oil-sand flow in horizontal wells.
- [9] BRENNEN, C. *Fundamentals of Multiphase Flow*. New York: Cambridge University, 2006.
- [10] BRILL, J. AND ARIRACHAKARAN, S. State of the art in multiphase flow. *Journal of Petroleum Technology 44*, 5 (1992), 538–541.
- [11] BRILL, J. AND MUKHERJEE, H. . *Multiphase flow in wells*. Texas: Henry L. Doherty Memorial Fund of AIME, Society of Petroleum Engineers., 1999.
- [12] CAZAREZ-CANDIA, O. AND BENÍTEZ-CENTENO, O. AND ESPINOSA-PAREDES, G. Two-fluid model for transient analysis of slug flow in oil wells. *International Journal of Heat and Fluid Flow 32*, 3 (2011), 762 – 770.

- [13] CHERICI, G.L. AND CIUCCI, G.M. AND SCLOCCHI, G. Two-phase vertical flow in oil wells - prediction of pressure drop. *Journal of Petroleum Technology Volume 26, Number 8* (1974), p. 927–938.
- [14] CHOI, J. AND PEREYRA, E. AND SARICA, C. AND LEE, H. AND JANG, I. AND KANG, J. Development of a fast transient simulator for gas-liquid two-phase flow in pipes. *Journal of Petroleum Science and Engineering 102* (2013), 27 – 35.
- [15] CHOI, J. AND PEREYRA, E. AND SARICA, C. AND PARK, C. AND KANG, J. An efficient drift-flux closure relationship to estimate liquid holdups of gas-liquid two-phase flow in pipes. *Energies 5, 12* (2012), 5284 – 5306.
- [16] CRISTANCHO, D. AND HOYOS, J. *Procedimientos metodológicos para la caracterización del fluidos de campos maduros. Aplicación a los fluidos del campo colorado.* Universidad Industrial de Santander, Escuela de Ingeniería de petróleos, tesis pregrado, 2008.
- [17] DANIELSON, T.J. AND FAN, Y. Relationship between mixture and two-fluid models. In *14th International Conference on Multiphase Production Technology* (2009), BHR Group.
- [18] DARWISH, M. AND MOUKALLED, F. AND SEKAR, B. A unified formulation of the segregated class of algorithms for multifluid flow at all speeds. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals 40, 2* (2001), 99–137.
- [19] DUNS, H. J. AND ROS, N. . Vertical flow of gas and liquid mixtures in wells. In *6th World Petroleum Congress* (1963), World Petroleum Congress, pp. p. 451–465.
- [20] FALCONE, G. AND TEODORIU, C. AND REINICKE, K.M. AND BELLO, O.O. Multiphase-flow modeling based on experimental testing: An overview of research facilities worldwide and the need for future developments. *SPE Projects, Facilities & Construction Volume 3, Number 3* (2008), p. 1–10.
- [21] FANCHER, G. H. AND BROWN, KERMIT E. Prediction of pressure gradients for multiphase flow in tubing. *SPE Journal Volume 3, Number 1* (1963), 59–69.
- [22] FRANCA, F. AND LAHEY, R.T. The use of drift-flux techniques for the analysis of horizontal two-phase flows. *International Journal of Multiphase Flow 18, 6* (1992), 787 – 801.
- [23] FUENTES, D. AND CORBERÁN, J. . *Estudio y modelado del flujo a través de tubos capilares adiabáticos en equipos de refrigeración.* PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia, 2006.
- [24] GOKCAL, B. AND WANG, Q. AND ZHANG, H. AND SARICA, C. Effects of high oil viscosity on oil/gas flow behavior in horizontal pipes. *SPE Projects, Facilities & Construction Volume 3, Number 2* (2008), p. 1–11.

- [25] GOMEZ, L. AND SHOHAM, O. AND SCHMIDT, Z. AND CHOKSHI, R. AND NORTHUG, T. Unified mechanistic model for steady-state two-phase flow: Horizontal to vertical upward flow. *SPE Journal* 5 (2000), 339 – 350.
- [26] GRIFFITH, P. AND WALLIS, G. Two phase slug flow. *Journal of Heat Transfer* 83 (1961), p. 307–327.
- [27] GUO, B. AND LYONS, W. AND GHALAMBOR, A. *Petroleum Production Engineering*. Elsevier Science & Technology Books, 2007.
- [28] HAGEDORN, A. AND BROWN, K. Experimental study of pressure gradients occurring during continuous two-phase flow in small-diameter vertical conduits. *Journal of Petroleum Technology Volume 17, Number 4* (1965), 475–484.
- [29] HASAN, A.R. AND KABIR, C.S. Predicting multiphase flow behavior in a deviated well. *SPE Production Engineering Volume 3, Number 4* (1988), p. 474–482.
- [30] HASAN, A.R. AND KABIR, C.S. *Fluid Flow and Heat Transfer in Wellbores*. Society of Petroleum Engineers, 2002.
- [31] HASAN, A.R. AND KABIR, C.S. AND SAYARPOUR, M. A basic approach to wellbore two-phase flow modeling. In *SPE Annual Technical Conference and Exhibition* (2007), Society of Petroleum Engineers.
- [32] HENAU, V. AND RAITHBY, G. A transient two-fluid model for the simulation of slug flow in pipelines - i. theory. *International Journal of Multiphase Flow. Vol. 21, No. 3.* (1995), p. 335–349.
- [33] IOANNOU, K. AND WIDENER, M. AND KASHOU, S. AND ESTANGA, D. Terrain slugging in a subsea tieback: When predictions fail. In *8th North American Conference on Multiphase Technology* (2012).
- [34] ISHII, M. AND HIBIKI, T. *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow*. Springer New York, 2011.
- [35] ISSA, R. AND KEMPF, M. Simulation of slug flow in horizontal and nearly horizontal pipes with the two-fluid model. *International Journal of Multiphase Flow* 29, 1 (2003), 69 – 95.
- [36] JEREZ-CARRIZALES, M. AND JARAMILLO, J.E. AND FUENTES, D. Comparison of simplified models in the prediction of two phase flow in pipelines. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 59, 1 (2014), 012010.
- [37] JEREZ-CARRIZALES, M. AND JARAMILLO, J.E. AND FUENTES, D. Prediction of multiphase flow in pipelines: Literature review. *Ingeniería y Ciencia* 11, 22 (2015), 213 233.

- [38] JEREZ, M. AND JARAMILLO, J. AND FUENTES, D. Comparison of simplified models in the prediction of two phase flow in pipelines. In *Program and abstract book The International Congress of Mechanical Engineering and Agricultural Sciences - CIIMCA2013* (2013), Universidad Pontificia Bolivariana- Seccional Bucaramanga, p. p.56. ISSN 2382-3305.
- [39] JEREZ, M. AND JARAMILLO, J. AND FUENTES, D. Simulation of the two phase flow in a wellbore using two-fluid model. In *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI) 5th European Conference on Computational Mechanics (ECCM V) 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI)* (2014), pp. p. 4642–4651.
- [40] JEREZ, M. AND JARAMILLO, J. AND FUENTES, D. Modelo drift flux transitorio para la predicción del flujo bifásico en tuberías. In *Memorias del XII Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica* (2015), FIMCP-ESPOL-FEIBIM.
- [41] JEREZ, MANUEL F. AND FUENTES, DAVID. *Modelado y simulación del flujo de un fluido sobre una placa mediante volúmenes finitos*. Universidad Industrial de Santander, Escuela de Ingeniería Mecánica, tesis pregrado, 2012.
- [42] KAYA, A. AND SARICA, C. AND BRILL, J. Mechanistic modeling of two-phase flow in deviated wells. *SPE Production & Facilities* 16 (2001), 156 – 165.
- [43] KHASANOV, M. AND KRASNOV, V. AND Khabibullin, R. AND PASHALI, A. AND GUK, V. . A simple mechanistic model for void-fraction and pressure-gradient prediction in vertical and inclined Gas/Liquid flow. *SPE Production & Operations* 24, 1 (Feb. 2009).
- [44] LEE, D.Y. AND LIU, Y. AND HIBIKI, T. AND ISHII, M AND BUCHISHII, J.R. A study of adiabatic two-phase flows using the two-group interfacial area transport equations with a modified two-fluid model. *International Journal of Multiphase Flow*, 0 (2013), –.
- [45] LIAO, J. AND MEI, R. AND KLAUSNER, J. A study on the numerical stability of the two-fluid model near ill-posedness. *International Journal of Multiphase Flow* 34, 11 (2008), 1067 – 1087.
- [46] LIRA-GALEANA, C. AND HAMMAMI, A. Chapter 21 wax precipitation from petroleum fluids: A review. In *Asphaltenes and Asphalts, 2*, T. F. Yen and G. V. Chilingarian, Eds., vol. 40, Part B of *Developments in Petroleum Science*. Elsevier, 2000, pp. 557 – 608.
- [47] LIU, Y. AND CUI, J. AND LI, W. A two-phase, two-component model for vertical upward gas-liquid annular flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow* 32, 4 (2011), 796 – 804.

- [48] LOCKHART, AND MARTINELLI. Proposed correlation of data for isothermal two phase, two component flow in pipes. *Chemical Engineering Progress Vol 45, No.1* (1949), P. 39–48.
- [49] LOILIER, P. AND OMGBA-ESSAMA, C. AND THOMPSON, C. Numerical experiments of two-phase flow in pipelines with a two-fluid compressible model. In *12th International Conference on Multiphase Production Technology*, (2005), BHR Group.
- [50] MA, Z. AND QIAN, L. AND CAUSON, D. AND MINGHAM, C. Simulation of solitary breaking waves using a two-fluid hybrid turbulence approach. In *The Twenty-first International Offshore and Polar Engineering Conference* (2011), The International Society of Offshore and Polar Engineers.
- [51] MANDHANE, J.M. AND GREGORY, G.A. AND AZIZ, K. Critical evaluation of friction pressure-drop prediction methods for gas-liquid flow in horizontal pipes. *Journal of Petroleum Technology Volume 29, Number 10* (1977), p. 1348–1358.
- [52] MATSUBARA, H. AND NAITO, K. Effect of liquid viscosity on flow patterns of gas-liquid two-phase flow in a horizontal pipe. *International Journal of Multiphase Flow Vol 37*. (2011), p. 1277–1281.
- [53] MORALES-RUIZ, S. *Numerical Simulation of the Thermal and Fluid Dynamics Behaviour of Liquid-Vapour Two-Phase Flow in Evaporators and Condensers*. PhD thesis, Universidad Politécnic de Cataluña, 2010.
- [54] MORALES-RUIZ, S. AND RIGOLA, J. AND RODRIGUEZ, I. AND OLIVA, A. Numerical resolution of the liquid-vapour two-phase flow by means of the two-fluid model and a pressure based method. *International Journal of Multiphase Flow 43* (2012), p. 118–130.
- [55] MUKHERJEE, H. AND BRILL, J. Pressure drop correlations for inclined two-phase flow. *Journal of energy resources technology 107, 4* (1985), 549–554.
- [56] MUNKEJORD, S. T. Partially-reflecting boundary conditions for transient two-phase flow. *Communications in Numerical Methods in Engineering 22, 7* (2006), 781–795.
- [57] NICKLIN, D. Two-phase bubble flow. *Chemical Engineering Science 17, 9* (1962), 693 – 702.
- [58] ORKISZEWSKI, J. Predicting two-phase pressure drops in vertical pipe. *Journal of Petroleum Technology Volume 19, Number 6* (1967), p. 829–838.
- [59] ORTEGA, A. *Nuevos enfoques de la ingeniería mecánica en la producción de campos petroleros. Aplicación Campo Escuela Colorado*. 2010.

- [60] OUYANG, L. AND AZIZ, K. A homogeneous model for gas-liquid flow in horizontal wells. *Journal of Petroleum Science and Engineering* 27, 3-4 (2000), 119 – 128.
- [61] OVIEDO, G. AND CHAPARRO, C. *Modelado y simulación del flujo de hidrocarburos en tuberías mediante el método de Mukherjee & Brill*. Universidad Industrial de Santander, Escuela de Ingeniería Mecánica, tesis pregrado, 2011.
- [62] PATANKAR, S. V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Taylor & Francis, 1980. p. 79-111.
- [63] PETALAS, N. AND AZIZ, K. A mechanistic model for multiphase flow in pipes. *Society of Petroleum Engineers [successor to Petroleum Society of Canada] Volume 39, Number 6* (2000).
- [64] POETTMANN, F, AND CARPENTER, P. The multiphase flow of gas, oil, and water through vertical flow strings with application to the design of gas-lift installations. In *Drilling and Production Practice* (1952), American Petroleum Institute, pp. 257–317.
- [65] SHADRAVAN, A. AND AMANI, M. HPHT 101: What every engineer or geoscientist should know about high pressure high temperature wells. Society of Petroleum Engineers.
- [66] SHI, H. AND HOLMES, J. AND DIAZ, L. AND DURLOFSKY, L. AND AZIZ, K. Drift-flux parameters for three-phase steady-state flow in wellbores. *SPE Journal* 10 (2005), 130 – 137.
- [67] SHIRDEL, M. AND SEPEHRNOORI, K. Development of a transient mechanistic two-phase flow model for wellbores. *SPE Journal Volume 17, Number 3* (2012), p. 942–955.
- [68] TABATABAEI-NEJAD, S.A. AND KHODAPANAH, E. An investigation on the sensitivity analysis of the parameters of proposed wax precipitation model. *Journal of Petroleum Science and Engineering* 68, 1-2 (2009), 89 – 98.
- [69] TAITEL, Y. AND BORNEA, D. AND DUKLER, A. Modelling flow pattern transitions for steady upward gas-liquid flow in vertical tubes. *AIChE Journal* 26, 3 (1980), 345–354.
- [70] TAITEL, Y. AND DUKLER, A. A model for predicting flow regime transitions in horizontal and near horizontal gas-liquid flow. *AIChE Journal* 22, 1 (1976), 47–55.
- [71] UIS. Presentación de campo escuela colorado. [online], 07 2015.
- [72] ZHAO, Y. AND YEUNG, H. AND ZORGANI, E. AND ARCHIBONG, A. AND LAO, L. High viscosity effects on characteristics of oil and gas two-phase flow in horizontal pipes. *Chemical Engineering Science* 95, 0 (2013), 343 – 352.

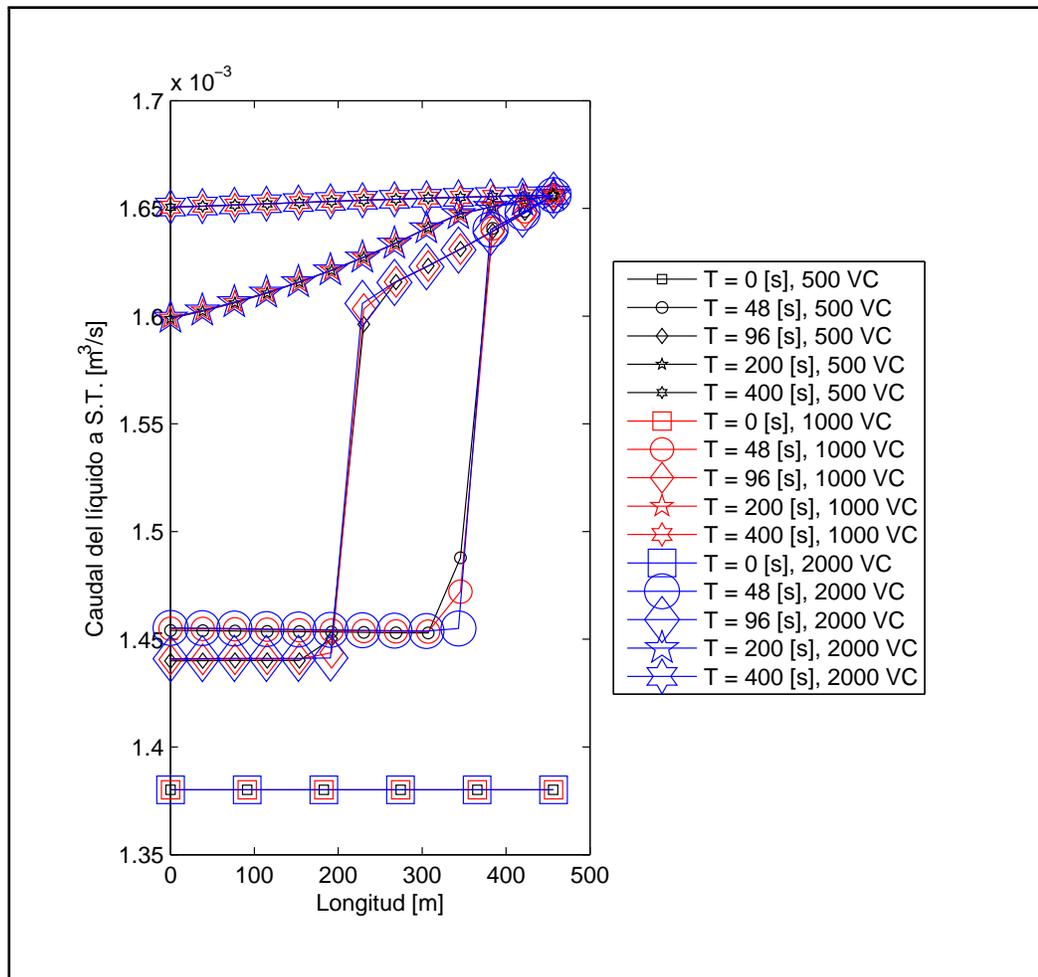
- [73] ZUBER, N. AND FINDLAY, J. Average volumetric concentration in two-phase flow systems. *Journal of Heat Transfer (U.S.)* Vol: 87 (Nov. 1965).

ANEXO A. GRÁFICAS DETALLADAS DEL CASO 1 EN EL MÉTODO DRIFT FLUX TRANSITORIO

En la sección 4.2.1 se presentará algunas gráficas simplificadas con el fin de comparar tres mallas diferentes en varios tiempos, a continuación, se presentan estas gráficas con una mayor comparación de tiempos que las originalmente presentadas en dicha sección.

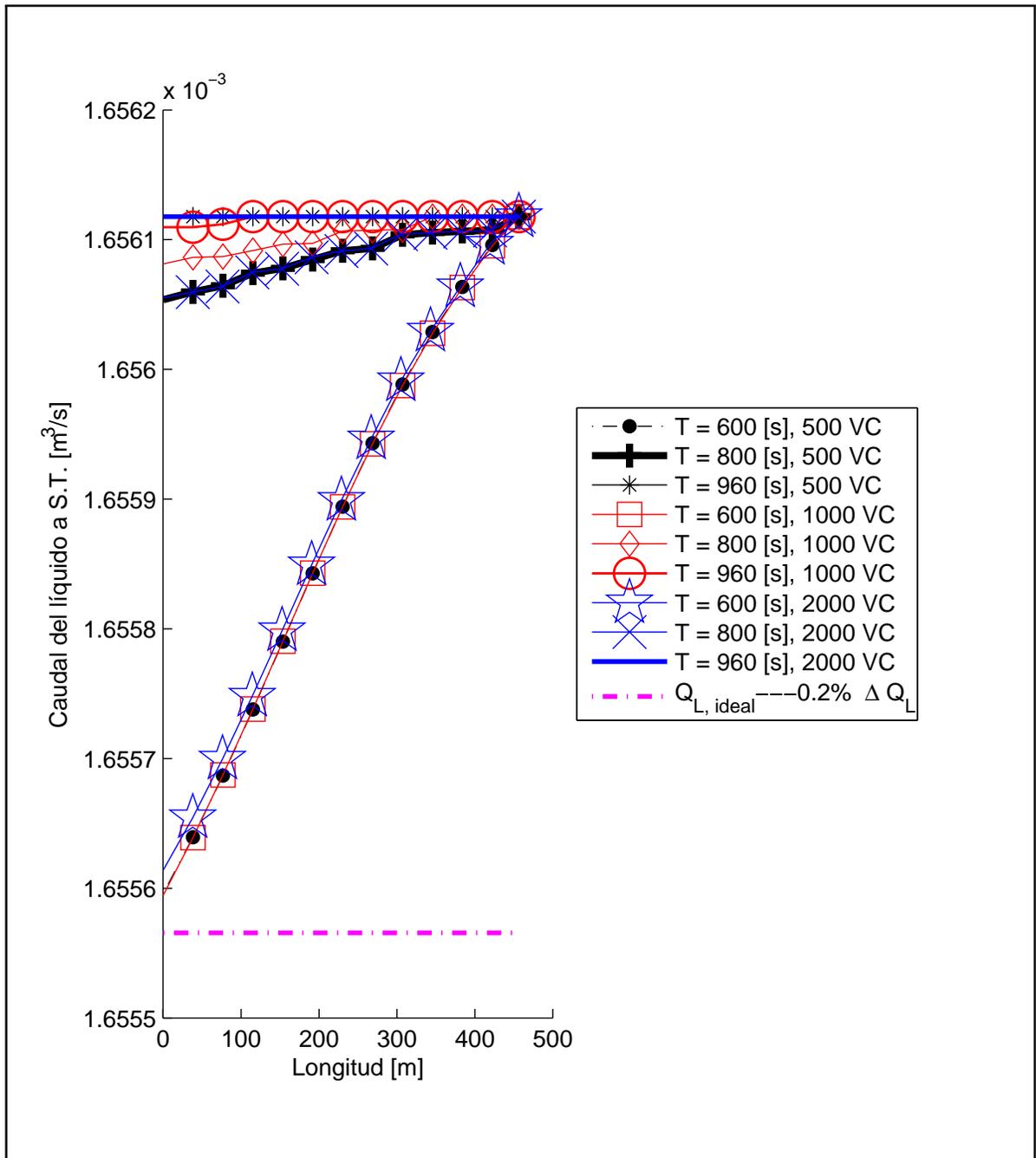
La figura 41 es la versión completa de la figura 20

Figura 41: Caudal inicial y final del líquido (completa).



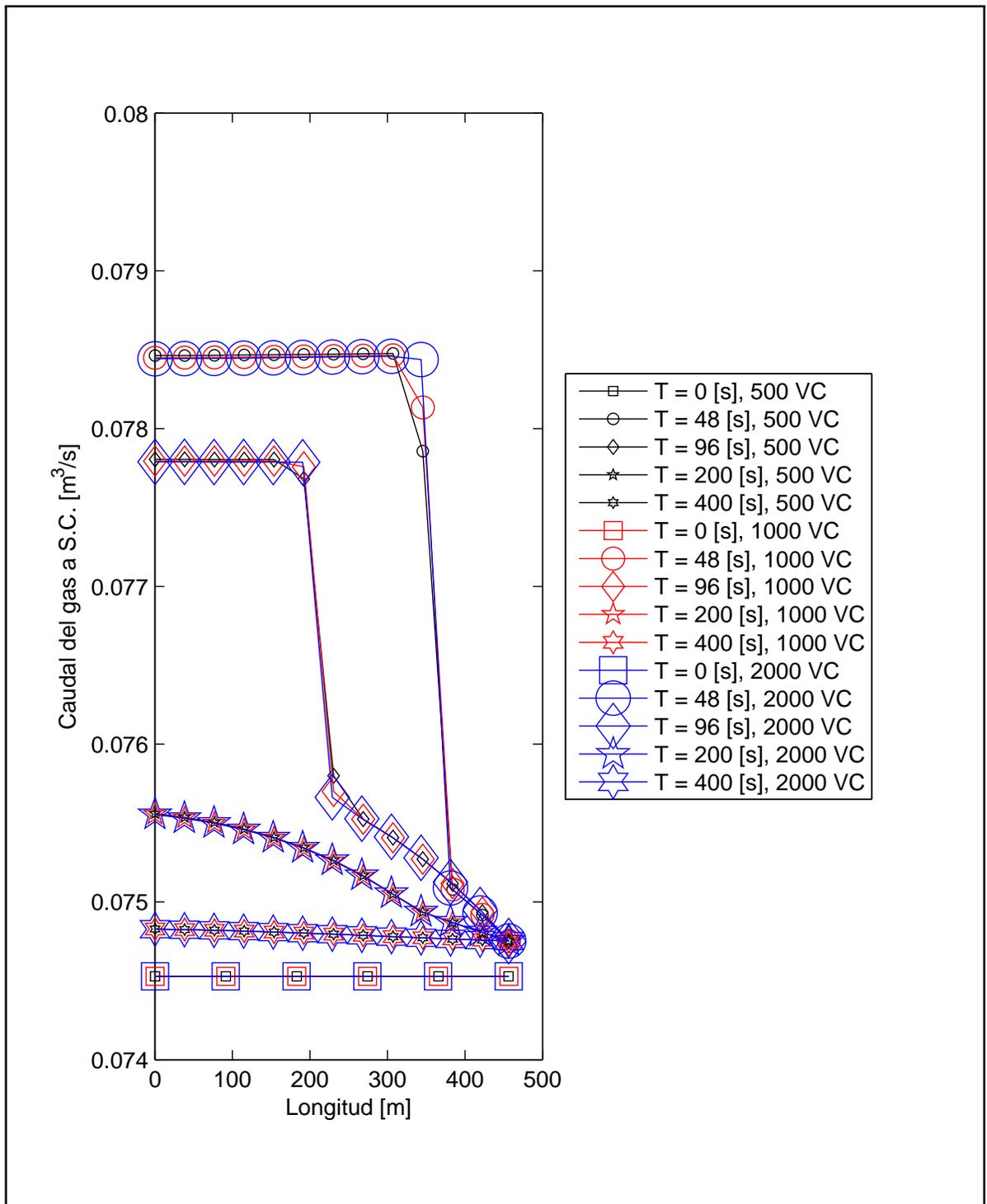
La figura 42 es la versión ampliada de la figura 21

Figura 42: Caudal del líquido para los últimos tiempos calculados (completa).



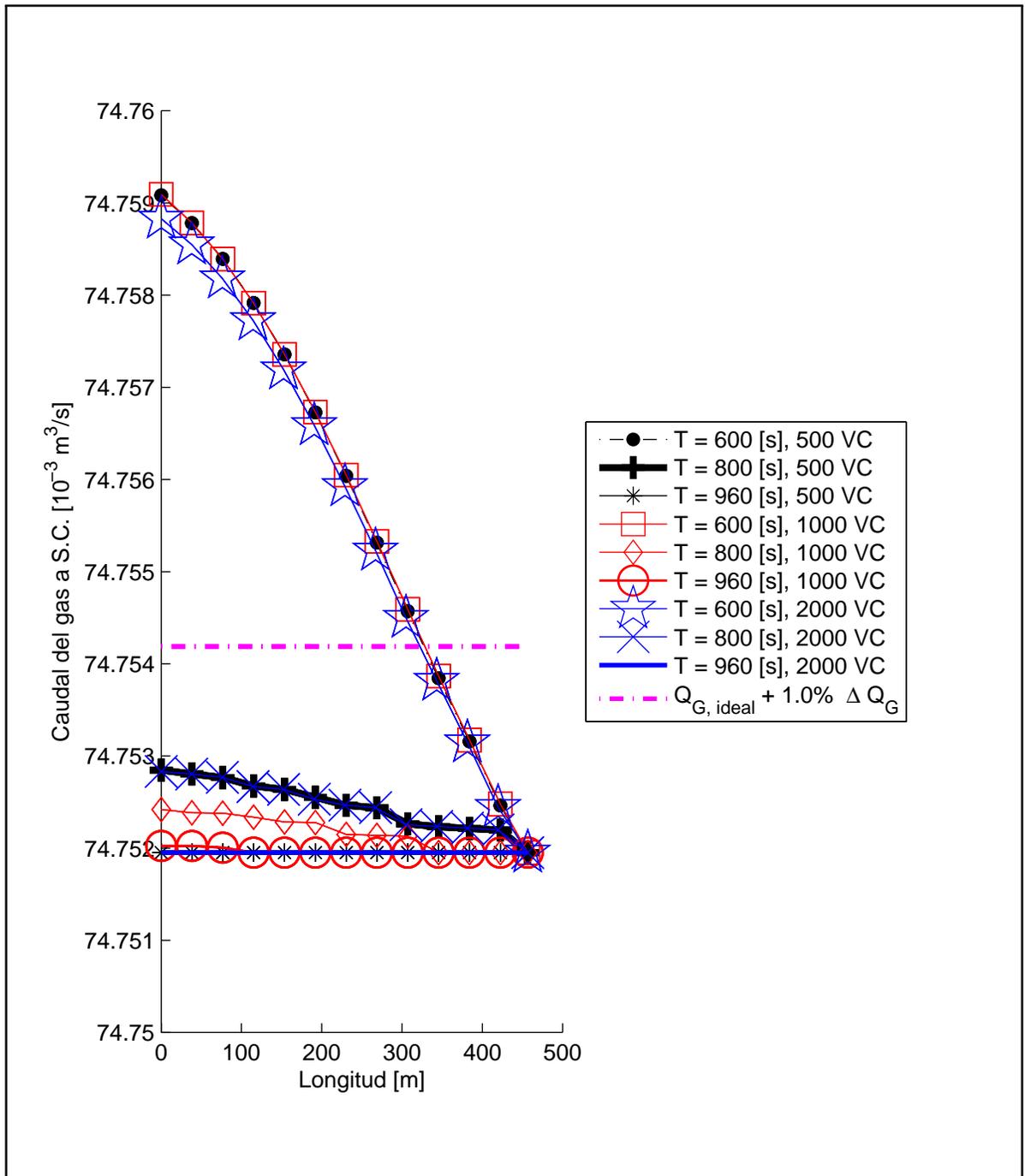
La figura 43 es la versión completa de la figura 22

Figura 43: Caudal inicial y final del gas (completa).



La figura 44 es la versión ampliada de la figura 23

Figura 44: Caudal del gas para los tiempos finales (completa).



ANEXO B. DIAGRAMA DE FLUJO: EJEMPLO

Para el presente proyecto se desarrollaron más de 28 clases las cuales contienen diferentes procedimientos de cálculo. A continuación se presenta a manera de ejemplo el diagrama de flujo de las propiedades de la mezcla (Figura 45) y el diagrama de flujo del método de Mukherjee & Brill, Figura 46.

Figura 45: Algoritmo de cálculo de las propiedades de la mezcla.

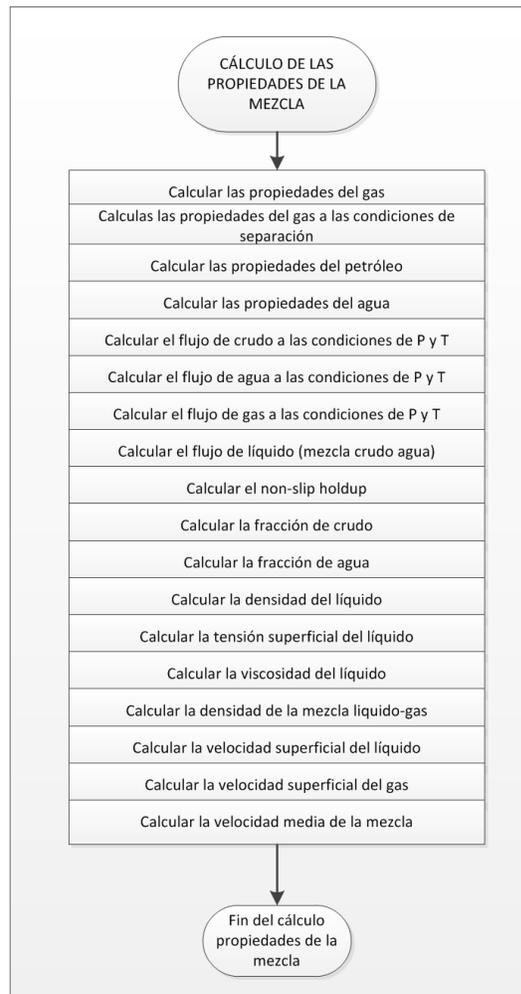


Figura 46: Algoritmo de cálculo del método de Mukherjee & Brill.

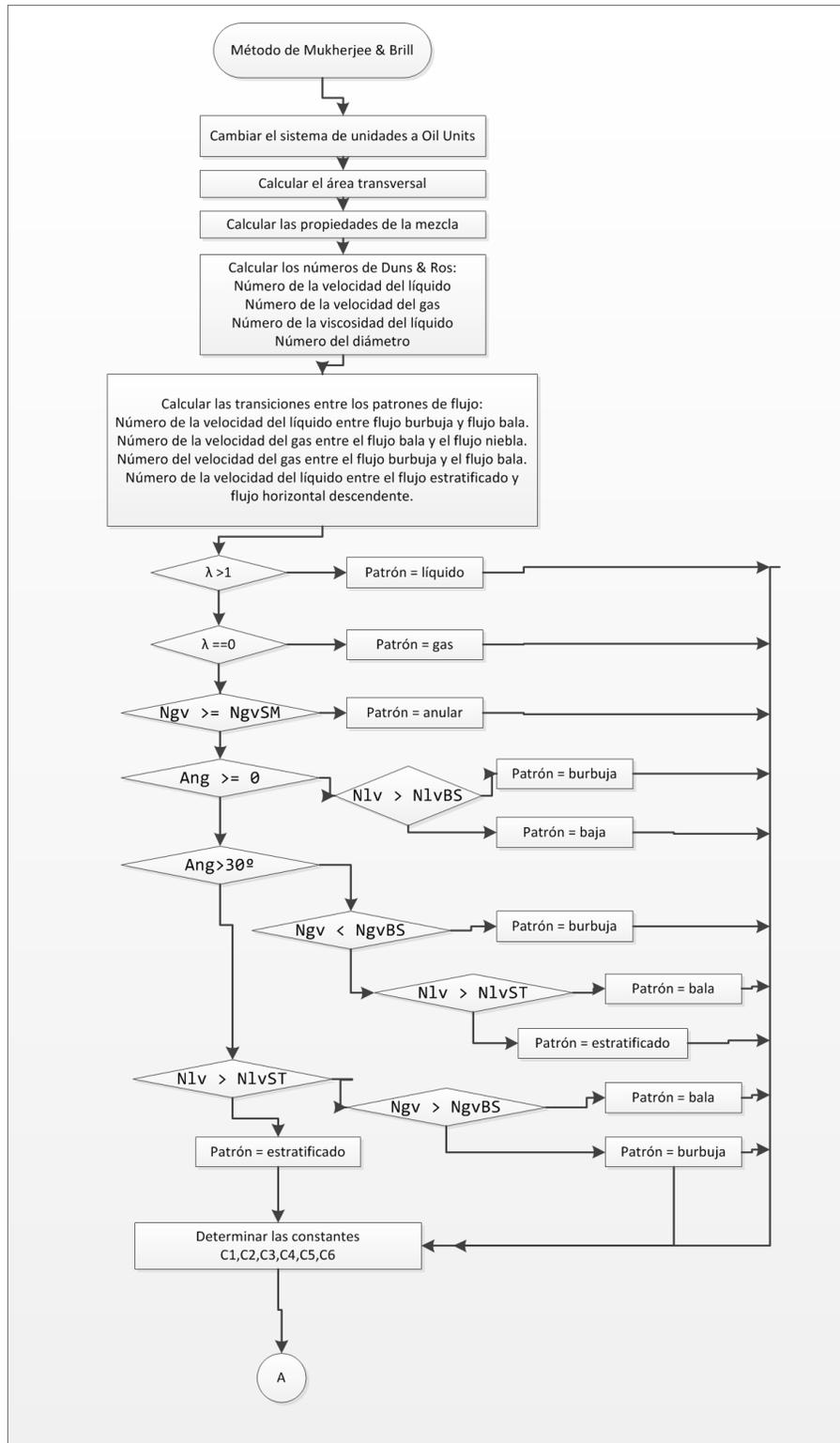


Figure 46. Algoritmo de cálculo del método de Mukherjee & Brill (continuación).

