

UN MODELO INFLACIONARIO SIN INFLATONES

LUIS GABRIEL GÓMEZ DÍAZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2009

UN MODELO INFLACIONARIO SIN INFLATONES

LUIS GABRIEL GÓMEZ DÍAZ¹

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR

YEINZON RODRÍGUEZ GARCÍA^{1,2}, PH. D.

¹GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN RELATIVIDAD Y GRAVITACIÓN - UIS

²GRUPO DE FÍSICA - FENOMENOLOGÍA DE PARTÍCULAS ELEMENTALES Y
COSMOLOGÍA - UAN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2009

Título : UN MODELO INFLACIONARIO SIN INFLATONES¹.

Autores : Gómez Díaz, Luis Gabriel ².

Palabras Claves : Cosmología, Inflación, Perturbaciones Cosmológicas.

Descripción : En la cosmología inflacionaria los modelos mas populares y exitosos son los del tipo slow-roll, los cuales satisfacen las condiciones rigurosas que impone inflación. Sin embargo, estos modelos requieren de la existencia de campos escalares fundamentales tales como el inflatón los cuales aún no han sido observados en la naturaleza. A esta “dificultad” se suma el hecho de que estos modelos requieren de potenciales prácticamente planos para generar inflación. En este trabajo de grado se construye un modelo inflacionario motivado por las dificultades que presentan los modelos del tipo slow-roll. En este modelo se considera nuestro Universo a gran escala como un fluido perfecto constituido por energía de vacío o constante cosmológica Λ (en cuyo caso es la única componente dominante) y radiación. Para dicho modelo la expansión acelerada del Universo se sigue a partir de la transferencia de energía de vacío a radiación (en el caso de que la constante cosmológica no varíe, no proporcionará una época inflacionaria exitosa) sin la necesidad de campos escalares fundamentales tales como el inflatón. A medida que ocurren las transiciones, la densidad de energía asociada al vacío decaerá exponencialmente a densidad de energía de radiación modificando el contenido energético del Universo y consecuentemente las ecuaciones de evolución que describen esta etapa inflacionaria. A partir de la dinámica del modelo se obtienen soluciones analíticas exactas para el parámetro de Hubble y de expansión. Bajo las condiciones necesarias para resolver los problemas de planitud, horizonte y de reliquias no deseadas, se calcula el monto de inflación y adicionalmente se determina la temperatura al final de este período inflacionario denominada temperatura post-inflacionaria.

¹Trabajo de Grado

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez (Director).

Title : AN INFLATIONARY MODEL WITHOUT INFLATONS¹.

Author : Gómez Díaz, Luis Gabriel ².

Keywords : Cosmology, Inflation, Cosmological Perturbations.

Description : In the inflationary cosmology the most popular and successful models are the slow-roll type ones, which satisfy the rigorous conditions inflation brings. However, these models require the existence of fundamental scalar fields such as the inflaton, that haven't seen yet in nature. In addition to this difficulty is the fact that these models require very flat potentials to generate inflation. Along this research project is constructed an inflationary model motivated by the difficulties shown by the slow roll models. In this model our universe is considered as a perfect fluid composed of vacuum energy or cosmologic constant (in which case is the only dominant component) and radiation. For this model, the universe accelerated expansion is followed by the energy transference from vacuum to radiation, without needing fundamental scalar fields such as inflaton. As transitions are occurred, the energy density associated to the vacuum will exponentially decrease to radiation energy density while it modifies the energy content of the universe and consequently the evolution equations that describe this stationary stage. From the dynamic model, exact analytical solutions for the Hubble and expansion parameter are obtained. Under the conditions to solve the flatness problems, horizon and unwanted relics, the enough inflation is calculated and the temperature is additionally determined at the end of this inflationary period called post-inflationary temperature.

¹Trabajo de Grado

²Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Yeinzon Rodríguez (Director).

TABLA DE CONTENIDO

1. Introducción	1
2. Generalidades de la cosmología estándar	3
2.1. La métrica de Friedmann-Robertson-Walker	3
2.2. Tensor momentum-energía	4
2.3. Ecuaciones de campo de Einstein	4
2.4. La ecuación de Friedmann	5
2.5. La ecuación de continuidad	6
2.6. El paradigma inflacionario	6
2.6.1. Monto de inflación	7
3. Poniendo a prueba un primer motor cósmico	8
3.1. Evolución de la densidad de energía de vacío y de radiación en un Universo en expansión	8
3.2. Solución del factor de escala y del parámetro de Hubble para un Universo dominado por constante cosmológica y radiación	9
4. Dinámica del modelo inflación sin inflatones	12
4.1. Ecuaciones de evolución para el fondo	12
4.2. Transferencia de energía entre los fluidos interactuantes	14
4.3. Ecuación de continuidad modificada	14
4.4. Ecuaciones de movimiento para el fondo considerando transferencia de energía de vacío a radiación	15
4.5. Parámetro de deformación para el modelo de inflación sin inflatones	21
4.5.1. Análisis del parámetro de deformación durante inflación	23
4.6. Parámetro de densidad	24
4.7. Estimativo del monto de inflación	25
4.8. Temperatura Post-inflacionaria	27

5. Teoría de perturbaciones cosmológicas	29
5.1. Describiendo las perturbaciones	30
5.1.1. Descomposición de cantidades tensoriales	30
5.1.2. Geometría de hipersuperficies espaciales	35
5.1.3. Tensor energía momentum para fluidos	36
5.1.4. Fluidos múltiples interactuantes	38
5.2. Teoría de perturbaciones cosmológicas para el modelo	39
5.2.1. Fluctuaciones en la densidad	40
5.2.2. Fluctuaciones en la entropía	43
6. Conclusiones	48
A. Notación y definiciones	50
A.1. Notación	50
A.2. Definiciones	50
B. Símbolos de Christofel para la métrica de FRW	52
C. Obtención de las ecuaciones de evolución para la métrica de fondo	53
D. Derivación de la ecuación de continuidad modificada	54
E. Cálculo de las constantes en la solución de $a(t)$	56
BIBLIOGRAFÍA	58

LISTA DE FIGURAS

3.1. Evolución del factor de escala	11
4.1. Evolución del factor de escala	19
4.2. Evolución del factor de escala	20
4.3. Evolución del parámetro de Hubble	21
4.4. Parámetro de deformación	23
4.5. Parámetro de densidad	24
4.6. Monto de inflación	26

CAPITULO 1

Introducción

Nuestro Universo debe presentar condiciones genéricas mediante las cuales el paradigma inflacionario a través de un modelo adecuado describa su evolución primordial (antes del Big Bang). A partir de esta idea se quiere obtener un modelo que reproduzca nuestro Universo actual bajo las condiciones rigurosas que implica inflación. La cosmología moderna se apoya en la inflación cosmológica propuesta por Alan Guth en 1981 [1] la cual se define como una etapa primordial del Universo en donde la energía de vacío domina sobre la densidad de energía total, caracterizada por presión negativa y repulsión gravitacional. Dicha etapa de expansión acelerada produce un incremento del factor de escala $a(t)$ de aproximadamente 27 ordenes de magnitud en un período de al menos 10^{-35} s, e irregularidades capaces de generar formación de estructuras a gran escala a partir de inestabilidad gravitacional [2, 3, 4, 5].

La teoría infacionaria, la cual fue propuesta como una posible solución a los problemas clásicos de la cosmología estándar, pasó de ser un fenómeno exótico apelado por los teóricos a una necesidad implícita en la naturaleza. Esto se ve reflejado en las predicciones exitosas (planitud del Universo y perturbaciones en la densidad de energía que dan origen a las estructuras a gran escala hoy en día) que han sido respaldadas fuertemente por los resultados observacionales en la radiación cósmica de fondo (RCF). Inflación se ha convertido en un paradigma de la ciencia y por lo tanto, la generación de ésta en una época primordial debe ser garantizada.

Existen dos categorías en las cuales se puede clasificar un modelo inflacionario [5], ellos son de vieja inflación y de nueva inflación. El primero se caracteriza por campos escalares que tunelan de un estado de energía de vacío falso o metaestable a un estado de energía verdadero. El segundo se caracteriza por un potencial practicamente plano en el cual el campo escalar cae cuesta abajo hasta un mínimo, generando de esta forma inflación. Es inevitable que la clase de modelos de inflación vieja no proporcione una salida exitosa de-

bido a ciertos inconvenientes como la imposibilidad de termalización en la nucleación de burbujas de vacío verdadero en el fondo de burbujas de vacío falso [6], debido a que toda su energía almacenada es concentrada en las paredes de ésta y no sufren cambios para colapsar.

La razón de que prevalezca la idea de la existencia de campos escalares fundamentales en la naturaleza se debe a la necesidad teórica que requieren algunas teorías generales tales como el Modelo Estándar de partículas elementales [7], que postula el bosón de Higgs para explicar el mecanismo mediante el cual las partículas adquieren masa, y la teoría de cuerdas [8], que postula como un ejemplo el Dilatón como componente de la materia oscura.

Sin embargo, el hecho de que no exista hasta la fecha evidencias observacionales de la existencia de tales campos escalares en la naturaleza (a pesar de los grandes esfuerzos en la búsqueda del Higgs en los experimentos en los aceleradores: Tevatron en el FERMILAB y LEP en el CERN) y de que estén presentes algunas dificultades en los modelos del tipo vieja y nueva inflación, motiva a proponer nuevos modelos inflacionarios alternativos a los tradicionales, siendo un ejemplo el de inflación vectorial [9] basada en campos vectoriales fundamentales. Cabe notar que los campos vectoriales implican preferencia en la dirección, y por lo tanto, generan violaciones de la isotropía estadística. No obstante, los campos vectoriales fundamentales están presentes en la naturaleza y desde luego sí se han observado: como es el caso del fotón y de los bosones W^\pm y Z^0 que son los mediadores de las interacciones electromagnética y débil respectivamente.

En el modelo “Inflación Sin Inflatones” [10] que se desarrolla en este trabajo, no se requiere la presencia de campos escalares para generar inflación, sino de dos fluidos acoplados mutuamente, y que en cuyo caso la componente dominante sea la energía asociada al vacío. Al igual que otros modelos inflacionarios este modelo debe ser capaz de solucionar los problemas clásicos de la cosmología estándar (problema de horizonte, de planitud y de reliquias no deseadas) [2, 3, 4, 5], y generar las condiciones primordiales requeridas por el Big Bang caliente [2, 3, 4, 5], tales como recalentamiento en el cual la densidad de energía de vacío se transforma en radiación.

También es cierto que este modelo debe ser consistente con los datos obtenidos recientemente acerca de las anisotropías de la RCF proporcionados por el satélite WMAP [11, 12] y con las observaciones de supernovas que evidencian la existencia de la energía oscura [11]. Tal confrontación con la observación es posible, con un desarrollo de la teoría de perturbaciones cosmológicas.

El análisis de la teoría de perturbaciones cosmológicas determina de una manera más rigurosa la viabilidad del modelo a partir de la obtención de cantidades observables, tales como la amplitud del espectro A_ζ , el índice espectral n_ζ y la razón tensor escalar r . Sin em-

bargo, el desarrollo completo de esta teoría requiere de elementos que están en un contexto científico mas profundo y que imposibilita su estudio detallado en este instante.

No obstante, en este trabajo de grado se hace un estudio “parcial” de la teoría de perturbaciones cosmológicas basado en las referencias [4, 5, 13, 14], con el objetivo de verificar que inicialmente este modelo puede proporcionar fluctuaciones adiabáticas en la densidad como una primera medida en el desarrollo de la teoría de perturbaciones cosmológicas.

Como una consideración a futuro para determinar la consistencia de este modelo con la naturaleza, se pretende desarrollar la teoría de perturbaciones cosmológicas que deriva en argumentos estadísticos sobre la perturbación primordial en la curvatura ζ , que está a su vez relacionada con las fluctuaciones en la temperatura $\frac{\delta T}{T}$ de la RCF [15].

CAPITULO 2

Generalidades de la cosmología estándar

2.1. La métrica de Friedmann-Robertson-Walker

La característica mas importante de nuestro Universo a gran escala, es la homogeneidad e isotropía que presenta en la distribución de galaxias. Esta característica constituye el *Principio Cosmológico* [5], el cual es válido para regiones observables del Universo mayores a 100 Mpc, $1 \text{ Mpc} = 3,26 \times 10^6$ años luz. Para regiones observables menores que dicha escala, el Universo presenta inhomogeneidades (galaxias, cluster, superclusters). Observaciones en la RCF evidencian que existen pequeñas fluctuaciones en la temperatura del orden de $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$ [11], es decir, que la distribución de densidad de energía a pequeñas escalas (menores que 100 Mpc) es inhomogénea.

La métrica que describe un Universo homogéneo e isotrópico a gran escala, es decir, una que cumpla el Principio Cosmológico, es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) [2, 3, 4, 5]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.1)$$

en donde t es el tiempo cósmico, r, θ, ϕ son las coordenadas espaciales comóviles, $a(t)$ es el factor de escala del Universo, y K es la constante de curvatura de una hipersuperficie tridimensional (3D).

2.2. Tensor momentum-energía

A partir de la característica de homogeneidad e isotropía que presenta nuestro Universo a gran escala, el contenido energético del Universo se puede modelar como un fluido perfecto descrito por el tensor momentum-energía

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

siendo ρ , P y u^μ la densidad de energía, la presión y la cuadrivelocidad del fluido respectivamente. Además dicho fluido cumple la condición

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (2.3)$$

Esta es la ley de conservación de momentum-energía. El punto y coma denota la derivada covariante¹.

En un sistema de referencia inercial local (comóvil en este caso), la densidad de energía ρ es definida como T^{00} , la densidad de momentum como T^{0i} , y el tensor de esfuerzos como T^{ij} . Si la presión P es isotrópica, el tensor de esfuerzos es definido como $T^{ij} = \delta_{ij}P$. Se está asumiendo que la variación del tensor momentum-energía con respecto a la posición es prácticamente despreciable, lo cual es equivalente a decir que estamos viajando con el fluido. En el espacio-tiempo el marco en reposo del fluido se define como aquél en que $T^{0i} = 0$ y $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, en donde u^μ es el cuadvivector velocidad.

2.3. Ecuaciones de campo de Einstein

En la teoría de Relatividad General [18, 19], la fuente del campo gravitacional es relacionada con la fuente del campo gravitacional en la teoría de Gravitación de Newton en un contexto “relativísticamente” más significativo, es decir, que no sólo la masa sirva como fuente para generar dicho campo, si no considerar una cantidad más general que involucre invarianza en cualquier sistema de referencia. Se estaría tentado a considerar como fuente para las ecuaciones de movimiento la densidad de energía total ρ , pero no sería satisfactorio debido a que la densidad de energía es medida por un único observador en un sistema de referencia inercial local, otros observadores medirían la componente T^{00} en su propio sistema de referencia. De tal forma que habría preferencia de un observador sobre los otros observadores, es decir, para quien ρ es la densidad de energía. Para evitar dicha preferencia, se usa el tensor momentum-energía $T^{\mu\nu}$ (como un todo) como la fuente del campo gravitacional. La fuente del campo gravitacional determina la métrica, y de esta manera, se relaciona la geometría espacial mediante el tensor de Einstein (el cual es función del tensor métrico $g_{\mu\nu}$), y el contenido energético descrito por $T^{\mu\nu}$. Dicha relación proporciona las

¹Otra manera de expresar la derivada covariante es a través del operador ∇_μ .

ecuaciones de campo de Einstein, que a su vez puede ser interpretada como la generalización de la ecuación de Poisson

$$G^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

en donde G es la constante de Newton. Dicha relación se debe a que las identidades de Bianchi se satisfacen mediante el tensor de Einstein y se garantiza la ley de conservación de momentum-energía.

$$G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (2.5)$$

Es de importancia indicar que las ecuaciones de campo de Einstein son consistentes con la teoría Newtoniana cuando el campo gravitacional es débil.

2.4. La ecuación de Friedmann

La ecuación mas importante de evolución de nuestro Universo es la ecuación de Friedmann [2, 3, 4, 5]

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3M_p^2} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (2.6)$$

en donde $H = \frac{\dot{a}}{a}$ es el parámetro de expansión de Hubble y el punto denota la derivación con respecto al tiempo cósmico t , y M_p es la masa de Planck que se relaciona con la constante de Newton mediante $M_p = (G)^{-1/2}$. K se relaciona con la geometría espacial del Universo, el Universo es plano si $K = 0$, finito o cerrado si $K > 0$, o infinito y abierto si $K < 0$.

Al definir $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda M_p^2}{8\pi}$, se toma ρ_t como la densidad de energía total² tal que $\rho_t = \rho + \rho_\Lambda$. De modo que la ecuación de Friedmann se pueda escribir como

$$H^2 = \frac{8\pi\rho_t}{3M_p^2} - \frac{K}{a^2}. \quad (2.7)$$

De la ecuación de Friedmann, vemos que para un valor dado del parámetro de Hubble, hay una densidad particular conocida como la densidad crítica, para el cual el Universo es espacialmente plano en la ausencia de una constante cosmológica

$$\rho_{cri} = \frac{3H^2 M_p^2}{8\pi}. \quad (2.8)$$

Es usualmente más simple medir la densidad de energía como una fracción de la densidad crítica, definiendo el parámetro de densidad $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cri}}$. Éste puede ser aplicado separadamente a diferentes componentes de materia del Universo, tal como materia no relativista, radiación y bariones. Se puede incluir también una contribución $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}$ asociada a la

²Aquí ρ puede considerar tanto materia como radiación.

constante cosmológica; tal que $\Omega_{tot} = \Omega + \Omega_{vacio}$. Entonces la ecuación de Friedmann puede ser descrita como

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{K}{a^2 H^2}. \quad (2.9)$$

2.5. La ecuación de continuidad

La dependencia temporal de ρ está dada por la ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (2.10)$$

La anterior ecuación se puede escribir en la forma

$$a \left(\frac{d\rho}{da} \right) = -3H(\rho + P). \quad (2.11)$$

A su vez, esto es equivalente a la ley de conservación de la energía para una expansión adiabática $dE = -PdV$, en donde $E = V\rho$, es la energía de un volumen comóvil $V \sim a^3$. La expansión de un Universo isotrópico es de hecho adiabática porque no puede haber transferencia de energía de una región a otra, en acuerdo con el principio cosmológico.

2.6. El paradigma inflacionario

La definición exacta de inflación es simplemente una época durante el cual la expansión del Universo es acelerada

$$INFLACION \Leftrightarrow \ddot{a} > 0. \quad (2.12)$$

Existe una expresión alternativa equivalente a la condición de inflación que proporciona una interpretación más física

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H^{-1}}{a} \right) < 0, \quad (2.13)$$

porque $\frac{H^{-1}}{a}$ es el horizonte de partículas³ comóvil.

La condición para inflación es que el horizonte de partículas comóvil, el cual es la más importante característica de escala del Universo en expansión, decrece con el tiempo. Dicha condición impone un requerimiento sobre la naturaleza de la materia que genera inflación. Directamente de la ecuación de Friedmann (2.7) se encuentra que

$$\rho + 3P < 0. \quad (2.14)$$

³Se define como la distancia física que hay desde un punto A (nosotros) hasta un punto B (emisión de la fuente) del cual se podría recibir información si la radiación siempre hubiese sido libre.

Puesto que siempre ρ es positivo, es necesario que P sea negativo para satisfacer esta condición, la cual es independiente de la curvatura del Universo. Inflación fue generada aparentemente por una forma similar de energía, una con $P < 0$, la cual se asociará con la energía oscura.

Una de las particularidades durante inflación es que el parámetro de Hubble H_I permanece constante. En este caso $\frac{da}{a} = H_I dt$, y el factor de escala evoluciona como

$$a(t) = a_e e^{H_I(t-t_f)}; t < t_f, \quad (2.15)$$

en donde t_f es el tiempo al final de la inflación.

2.6.1. Monto de inflación

La cantidad de inflación que ocurre normalmente es cuantificada por el cociente entre el factor de escala en el tiempo final t_f , y el factor de escala en el tiempo inicial t_i . Dado que este cociente es típicamente una cantidad grande, se toma el logaritmo natural de éste, el cual proporciona el monto de inflación cuantificado en *e-folds*

$$N(t) \equiv \ln \frac{a(t_{final})}{a(t_i)}. \quad (2.16)$$

Para resolver los problemas de horizonte, planitud, y reliquias no deseadas, alrededor de 70 e-folds de inflación deben ser requeridos [2].

CAPITULO 3

Poniendo a prueba un primer motor cósmico

En este capítulo se inicia la construcción de un modelo inflacionario partiendo de un fondo métrico espacialmente homogéneo e isótropo para un Universo constituido por dos fluidos desacoplados, uno de energía de vacío y otro de radiación. Dichos fluidos actúan como fuente en la inflación cósmica. A partir de la ecuación de Friedmann se encuentra una solución para la evolución del factor de escala la cual debe ser consistente con la de un periodo inflacionario primordial. Esta primera condición determina “la eficiencia de este primer motor cósmico”.

3.1. Evolución de la densidad de energía de vacío y de radiación en un Universo en expansión

Segun la definición de la densidad de energía de vacío $\rho_\Lambda = cte$, de aquí que su variación temporal sea nula. Considerando esta característica, se encuentra de la ecuación de continuidad (2.10) su ecuación de estado¹ $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$.

En el contexto cosmológico a sistemas que cumplan con la ecuación de estado $P = \frac{\rho}{3}$ se les llama radiación². Al reemplazar la ecuación de estado para la radiación en la ecuación de continuidad se encuentra que su variación corresponde a la ecuación diferencial

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r. \quad (3.1)$$

¹Esta ecuación de estado no es satisfecha por un ensamble de partículas sino por campos escalares en el estado de vacío.

²A estos sistemas se les considera relativistas debido a que poseen velocidades cercanas a la de la luz, de lo contrario se les denomina materia y satisfacen la ecuación de estado $P = 0$.

CAPITULO 3. PONIENDO A PRUEBA UN PRIMER MOTOR CÓSMICO 9

Expresando el parámetro de Hubble como $H = \frac{\dot{a}}{a}$ y separando las variables respectivas integradas bajo las condiciones iniciales $\rho_r(a_0) = \rho_{r0}$ se consigue determinar una ecuación de evolución de la densidad de energía de radiación con el factor de escala a

$$\int \frac{d\rho_r}{\rho_r} = -4 \int \frac{da}{a}, \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow \rho_r = \rho_{r0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4. \quad (3.3)$$

Esta expresión implica que la densidad de energía disminuye como $\rho_r \sim a^{-4}$ a medida que el Universo se expande. ρ_{r0} es la densidad de energía inicial de radiación.

De física moderna se conoce que la energía para cada fotón de radiación está dada por $E = h\nu$, en donde h es la constante de plank y ν su frecuencia. Por otra parte su frecuencia se da en términos de la velocidad de la luz c y su longitud de onda λ , $\nu = \lambda/c$. Reemplazando esta ecuación en la de la energía para el fotón y dividiendo por el volumen V para expresarla como una densidad de energía se encuentra que

$$\rho_\gamma \sim \frac{\lambda}{V}. \quad (3.4)$$

Consideremos como medida de longitud el factor de escala a , entonces

$$\rho_\gamma \sim \frac{a^{-1}}{a^4} = a^{-4}, \quad (3.5)$$

lo cual es consistente con lo encontrado en la ecuación de evolución (3.3) para la densidad de energía de radiación ρ_r .

3.2. Solución del factor de escala y del parámetro de Hubble para un Universo dominado por constante cosmológica y radiación

Al considerar un Universo plano ($K = 0$) dominado por constante cosmológica y radiación, es decir $\rho_T = \rho_r + \rho_\Lambda$, y al reemplazar la relación para la densidad de energía de radiación (3.3) en la ecuación de Friedmann (2.7) se obtiene

$$H^2 = \frac{8\pi\rho_{r0}a_0^4}{3M_p^2a^4} + \frac{8\pi\rho_\Lambda}{3M_p^2}. \quad (3.6)$$

Multiplicando y dividiendo por H_0^2 cada término y considerando las definiciones

$$\rho_c = \frac{3M_p^2H_0^2}{8\pi}, \quad (3.7)$$

CAPITULO 3. PONIENDO A PRUEBA UN PRIMER MOTOR CÓSMICO¹⁰

y

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (3.8)$$

se obtiene una ecuación diferencial en términos del factor de escala

$$\dot{a}^2 = \Omega_{r0} \frac{H_0^2 a_0^2}{a^2} + \Omega_{\Lambda 0} H_0^2 a^2, \quad (3.9)$$

en donde³ $\Omega_{r0} = \frac{8\pi\rho_{r0}}{3M_p^2 H_0^2}$, $\Omega_{\Lambda 0} = \frac{8\pi\rho_{\Lambda}}{3M_p^2 H_0^2}$, y H_0 es el parámetro de Hubble al inicio de este periodo.

La ecuación (3.9) es una ecuación diferencial de primer orden y de variables separables, por consiguiente se puede llevar a la forma

$$\frac{da}{dt} = \frac{H_0}{a} \sqrt{\Omega_{r0} + \Omega_{\Lambda 0} a^4}, \quad (3.10)$$

en donde se ha elegido que⁴ $a_0 = 1$. Separando variables y factorizando Ω_{r0} , se encuentra

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega_{r0}}} \int \frac{ada}{\sqrt{1 + a^4 \frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{r0}}}} = \int H_0 dt. \quad (3.11)$$

Integrando bajo las condiciones $a(t = 0) = 0$ y para un tiempo t su respectivo valor del factor de escala $a(t)$, y considerando adicionalmente las sustituciones $u = \sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda}}{\Omega_{r0}}} a^2$ y $u = \sinh \theta$ se encuentra que

$$a(t) = \left(\frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{\Lambda 0}} \right)^{\frac{1}{4}} \sinh^{1/2} \left[2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t \right]. \quad (3.12)$$

A partir de la definición $H = \frac{\dot{a}}{a}$ se obtiene para el parámetro de Hubble la solución

$$H = \frac{(\frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{\Lambda}})^{1/4} \frac{1}{2} \sinh^{-1/2} [2\sqrt{\Omega_{\Lambda}} H_0 t] \cosh [2\sqrt{\Omega_{\Lambda}} H_0 t] 2\sqrt{\Omega_{\Lambda}} H_0}{(\frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{\Lambda}})^{1/4} \sinh^{1/2} [2\sqrt{\Omega_{\Lambda}} H_0 t]}, \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow H(t) = \sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 \coth \left[2\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}} H_0 t \right]. \quad (3.14)$$

Si se sustituye la definición de cada parámetro de densidad asociado a cada componente en la ecuación (3.12) se determina la funcionalidad de la evolución del factor de escala. Dado

³Notese que la densidad de energía de vacío ρ_{Λ} no varía, a diferencia de la densidad de energía de radiación. De aquí que sea relevante denotar ρ_{r0} , como la densidad de energía de radiación inicial.

⁴Esto es posible debido a que el factor de escala no es una cantidad observable.

CAPITULO 3. PONIENDO A PRUEBA UN PRIMER MOTOR CÓSMICO 11

que $(\frac{\Omega_{r0}}{\Omega_\Lambda})^{1/4} = (\frac{8\pi\rho_{r0}}{\Lambda M_p^2})^{1/4} = c_0$ y el argumento del $\sinh^{1/2}$ equivale a $2\sqrt{\Omega_\Lambda}H_0t = \sqrt{\frac{4\Lambda}{3}}t$, se encuentra que la evolución temporal del factor de escala está en función de la densidad de energía inicial de radiación y de la constante cosmológica Λ .

$$a(t) = c_0 \sinh^{1/2} \sqrt{\frac{4\Lambda}{3}}t, \quad (3.15)$$

mientras que para el parámetro de Hubble, considerando que $\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}H_0 = \sqrt{\frac{8\pi\Lambda M_p^2}{3M_p^2 8\pi H_0^2}}H_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$, se encuentra que

$$H(t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \coth \left(\sqrt{\frac{4\Lambda}{3}}t \right). \quad (3.16)$$

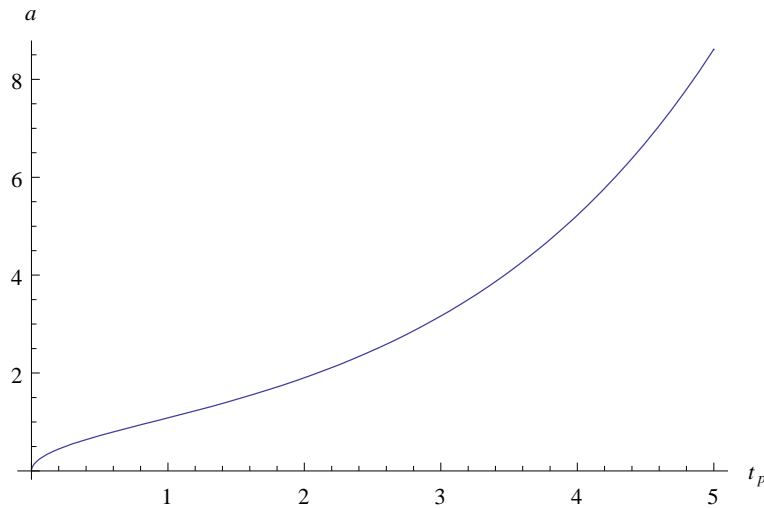


Figura 3.1: **Evolución del factor de escala**

Se puede apreciar que para un tiempo determinado t_i existe un punto de inflexión el cual está asociado con el inicio de un período inflacionario ($\ddot{a} > 0$). En donde $t_p = tM_p^{-1}$ en unidades de tiempo de Planck.

De la gráfica 3.1 se observa que este período inflacionario se prolonga indefinidamente⁵ y por consiguiente no proporciona un período inflacionario primordial⁶.

⁵Contrario del período inflacionario primordial el cual debe durar alrededor de 10^{-35} s.

⁶Por período inflacionario primordial se refiere a un período en el que surgen las primeras semillas para la generación de estructuras a gran escala (inhomogeneidades) y se identifica antes del Big Bang, a diferencia del período inflacionario que experimenta nuestro Universo actual que podría en esencia ser modelado con este primer motor cósmico.

CAPITULO 4

Dinámica del modelo inflación sin inflatones

Habiendo probado previamente la insuficiencia del primer motor cósmico, se prosigue a afinar su dinámica con el fin de que nuestro modelo sea consistente con un periodo inflacionario primordial. Por consiguiente, es necesario introducir un nuevo mecanismo para generar la expansión inflacionaria. Para ello es necesario considerar dos fluidos mutuamente acoplados en donde se produzca transferencia de energía de vacío a radiación.

A lo largo de la construcción de la dinámica de este modelo inflacionario, se debe considerar cada una de las condiciones rigurosas que impone inflación [2, 3, 4, 5] para poder determinar de esta manera la viabilidad del modelo.

4.1. Ecuaciones de evolución para el fondo

Nuestro Universo homogéneo e isotrópico es gobernado por la ecuación de evolución

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3M_p^2}. \quad (4.1)$$

A partir de la derivación de la ecuación de Friedmann con respecto al tiempo cósmico se obtienen ecuaciones de evolución “alternativas” (ver apéndice C) para el factor de escala y para el parámetro de Hubble¹

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3M_p^2}(\rho + 3P), \quad (4.2)$$

¹En realidad se tiene sólo una ecuación de evolución adicional dado que las ecuaciones (4.2) y (4.3) son equivalentes.

CAPITULO 4. DINÁMICA DEL MODELO INFLACIÓN SIN INFLATONES¹³

$$\dot{H} = -\frac{4\pi}{M_p^2}(\rho + P). \quad (4.3)$$

Lo anterior con el objetivo de expresar las nuevas ecuaciones de evolución en términos de parámetros que caracterizen el fluido, tales como la densidad y la presión (las cuales actúan como fuente).

Se considera como fuente para las ecuaciones de evolución un fluido constituido por energía de vacío y radiación, tal que

$$\rho = \rho_\Lambda + \rho_r, \quad (4.4)$$

$$P = P_\Lambda + P_r. \quad (4.5)$$

Dichas componentes del fluido se caracterizan mediante las relaciones

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda M_p^2}{8\pi}, \rho_r = \frac{\rho_{ro}}{a^4}, \quad (4.6)$$

y sus respectivas ecuaciones de estado

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda, P_r = \frac{\rho_r}{3}. \quad (4.7)$$

Sustituyendo en las ecuaciones de evolución las componentes para la densidad de energía y presión (ecuaciones (4.4) y (4.5) respectivamente) y las respectivas relaciones para la presión de cada componente del fluido (4.7), se encuentra

$$H^2 = \frac{8\pi}{M_p^2}(\rho_\Lambda + \rho_r), \quad (4.8)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi}{3M_p^2}(\rho_\Lambda - \rho_r), \quad (4.9)$$

$$\dot{H} = -\frac{16\pi}{3M_p^2}\rho_r. \quad (4.10)$$

De igual manera la ecuación de continuidad toma la forma

$$\dot{\rho}_\Lambda + \dot{\rho}_r = -3H(\rho_\Lambda + \rho_r + P_\Lambda + P_r), \quad (4.11)$$

$$\Rightarrow \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \quad (4.12)$$

dado que $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$ y $\dot{\rho}_\Lambda = 0$. De la ecuación (4.9) se determina que $\ddot{a} > 0 \Leftrightarrow \rho_\Lambda > \rho_r$, lo cual implica que la componente dominante del fluido debe ser la densidad de energía de vacío, mientras que la componente subdominante debe ser la densidad de energía de radiación. Así mismo, se ha impuesto una condición sobre el contenido energético del Universo para poder generar un período inflacionario².

²Esta condición proporciona un período inflacionario, pero no garantiza que sea primordial.

4.2. Transferencia de energía entre los fluidos interactuantes

En la solución (3.12) del factor de escala se tomó $\Lambda = cte$ o lo que es equivalente $\dot{\rho}_\Lambda = 0$ y como resultado de esta consideración se obtuvo una solución del factor de escala que no es consistente con la de una época inflacionaria primordial. Ahora, si se considera variaciones temporales de la densidad de energía de vacío³ [10], las cuales surgen como producto de la interacción mutua de dos fluidos acoplados, uno de energía de vacío y otro de radiación, se verá que dicho mecanismo conduce a un período inflacionario primordial.

Para cuantificar la interacción entre los fluidos es necesario definir la razón de transferencia de energía o la cantidad de densidad de energía transferida Q asociada a cada constituyente de nuestro Universo como

$$\nabla_\mu T_\Lambda^{\mu 0} = Q_\Lambda = -\Gamma \rho_\Lambda, \quad (4.13)$$

$$\nabla_\mu T_r^{\mu 0} = Q_r = \Gamma \rho_\Lambda, \quad (4.14)$$

en donde $\nabla_\mu T_{(\alpha)}^{\mu 0}$ es la derivada covariante del tensor momentum-energía. Γ es la razón de decaimiento y establece la razón a la que decae la densidad de energía de vacío en densidad de energía de radiación.

4.3. Ecuación de continuidad modificada

Al considerar la transferencia de energía de un fluido a otro, se produce una modificación sobre la ecuación de continuidad que describe cada fluido individual [14]

$$\dot{\rho}_\alpha = -3H(\rho_\alpha + p_\alpha) + Q_\alpha, \quad (4.15)$$

en donde Q_α determina la cantidad de energía transferencia entre los fluidos. Por esta razón, se encuentra que la nueva ecuación de continuidad para cada fluido (ver apéndice D) considerando la transferencia de energía según (4.13) y (4.14) es respectivamente

$$T_{\Lambda;0}^{00} = \dot{\rho}_\Lambda = Q_\Lambda, \quad (4.16)$$

$$T_{r;\nu}^{\nu 0} = \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = Q_r. \quad (4.17)$$

De esta manera se encuentra para cada componente del fluido su respectiva ecuación de continuidad modificada (4.16) y (4.17) en acuerdo con (4.15). Como consecuencia, se tiene

³Para este modelo se requiere no sólo que la densidad de energía de vacío domine sobre la densidad de energía de radiación, sino que también varíe temporalmente según (4.13).

que la densidad de energía de radiación no sólo varía a medida que se expande el universo⁴ sino que se produce una contribución a su variación debido a la transferencia de energía. De igual forma $\dot{\rho}_\Lambda \neq 0$.

Surge una pregunta con respecto a la ley de conservación energía-momentum y es ¿Cómo se modifica la ecuación (2.3) de la conservación de la energía si se considera transferencia de energía de un fluido a otro? Para fluidos múltiples el tensor energía-momentum es la suma de los tensores energía-momentum de los fluidos individuales o de las componentes del fluido total, tal que

$$T^{\mu\nu} = \sum_{\alpha} T_{(\alpha)}^{\mu\nu}. \quad (4.18)$$

Aplicando la derivada covariante para cada fluido se tiene que

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = \nabla_{\mu} (T_{\Lambda}^{\mu\nu}) + \nabla_{\mu} (T_r^{\mu\nu}), \quad (4.19)$$

y de (4.13) y (4.14) se concluye que

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (4.20)$$

es decir, se conserva el tensor energía-momentum total. Para cada fluido $T_{(\alpha)}^{\mu\nu}$ es conservado sólo localmente en el caso de que los fluidos no interactúen de modo que $Q_{(\alpha)} = 0$.

4.4. Ecuaciones de movimiento para el fondo considerando transferencia de energía de vacío a radiación

Sustituyendo las ecuaciones (4.13) y (4.14) en (4.16) y (4.17) respectivamente se obtiene que

$$\dot{\rho}_\Lambda = -\Gamma\rho_\Lambda, \quad (4.21)$$

y

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r + \Gamma\rho_\Lambda. \quad (4.22)$$

De la ecuación diferencial (4.21) se puede obtener una solución para la evolución de ρ_Λ en términos de la razón de decaimiento Γ

$$\int \frac{d\rho_\Lambda}{\rho_\Lambda} = \int -\Gamma dt, \quad (4.23)$$

con condición inicial $\rho_\Lambda(t=0) = \rho_{\Lambda 0}$ y para un tiempo t determinado su respectivo valor de ρ_Λ

$$\Rightarrow \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t}. \quad (4.24)$$

⁴Recordando que $\rho_r \sim a^{-4}$.

CAPITULO 4. DINÁMICA DEL MODELO INFLACIÓN SIN INFLATONES 16

De esta manera se ha determinado la forma funcional en que ocurre el decaimiento de la densidad de energía de vacío a radiación. Consecuentemente la fuente de las ecuaciones de evolución viene alterada acoplando las ecuaciones de evolución (4.1) y (4.3). Si se suma estas dos ecuaciones y si se considera la solución (4.24) se produce

$$2H^2 + \dot{H} = \frac{16\pi}{3M_p^2}(\rho_\Lambda + \rho_r) - \frac{16\pi}{3M_p^2}\rho_r, \quad (4.25)$$

y por consiguiente

$$2H^2 + \dot{H} = \frac{16\pi}{3M_p^2}\rho_\Lambda, \quad (4.26)$$

$$\Rightarrow 2H^2 + \dot{H} = \frac{16\pi}{3M_p^2}\rho_{\Lambda 0}e^{-\Gamma t}. \quad (4.27)$$

Este acople se mantiene prácticamente hasta que toda la densidad de energía de vacío se transforme en densidad de energía de radiación⁵. El paso a seguir es obtener una solución para la ecuación⁶ (4.27) por lo que se sugiere llevarla a otra forma y así poder obtener la solución del factor de escala. Reemplazando $H = \frac{\dot{a}}{a}$ y derivandola con respecto al tiempo cósmico se encuentra

$$\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{16\pi}{3M_p^2}\rho_{\Lambda 0}e^{-\Gamma t}, \quad (4.28)$$

$$\Rightarrow \ddot{a}a + \dot{a}^2 = a^2 \frac{16\pi}{3M_p^2}\rho_{\Lambda 0}e^{-\Gamma t}. \quad (4.29)$$

Por otra parte $\frac{d^2}{dt^2}(a^2) = 2(\ddot{a}a + \dot{a}^2)$, entonces

$$\frac{d^2}{dt^2}(a^2) = a^2 \frac{32\pi}{3M_p^2}\rho_{\Lambda 0}e^{-\Gamma t}. \quad (4.30)$$

Definiendo el parámetro adimensional $\tau^2 = \frac{128\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2\Gamma^2}e^{-\Gamma t} \equiv \tau_0^2 e^{-\Gamma t}$ se tiene que

$$\frac{d^2}{dt^2}(a^2) = \frac{1}{4}\tau^2\Gamma^2 a^2. \quad (4.31)$$

Realizando la sustitución $a^2 = y$, su primera derivada es

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dy/dt}{d\tau/dt} = \frac{2a(da/dt)}{-\frac{\Gamma}{2}\tau}, \quad (4.32)$$

⁵Al final del acoplamiento existirá un pequeño remanente de energía de vacío que permanecerá constante y dominará después de que la radiación se haya diluido a través de la expansión del Universo.

⁶Lo interesante de esta ecuación es la dependencia únicamente de la densidad de energía de vacío al inicio del periodo inflacionario y de como ésta decae en densidad de energía de radiación.

CAPITULO 4. DINÁMICA DEL MODELO INFLACIÓN SIN INFLATONES 17

y su segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{(d^2y/dt^2)(d\tau/dt) - (d^2\tau/dt^2)(dy/dt)}{(d\tau/dt)^2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right), \quad (4.33)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{(2\dot{a}^2 + 2a\ddot{a})(-\Gamma\tau/2) - (\Gamma^2\tau/4)2a\dot{a}}{\Gamma^2\tau^2/4} \left(\frac{-2}{\Gamma\tau} \right), \quad (4.34)$$

en donde $\frac{dt}{d\tau} = \frac{-2}{\Gamma\tau}$. Al simplificar esta ecuación de segundo orden se reduce a

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = \frac{4}{\Gamma^2\tau^2} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{\Gamma\tau^2} \frac{dy}{dt}, \quad (4.35)$$

la cual, despejando $\frac{d^2y}{dt^2}$ conduce a

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\Gamma^2\tau^2}{4} \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{\Gamma^2\tau}{4} \frac{dy}{d\tau}. \quad (4.36)$$

Al igualar con (4.31) se encuentra una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\frac{\Gamma^2\tau^2}{4} \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{\Gamma^2\tau}{4} \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{4}\tau^2\Gamma^2y, \quad (4.37)$$

$$\Rightarrow \tau^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + \tau \frac{dy}{d\tau} - \tau^2 y = 0. \quad (4.38)$$

Al identificar esta ecuación, se determina que es la ecuación de Bessel modificada [16, 17] y su solución es una combinación lineal de funciones de Bessel modificadas de primera especie I_0 y segunda especie K_0 ⁷ respectivamente y de orden cero. Entonces la solución del factor de escala es dada por

$$a^2 = \frac{4}{\Gamma}(\alpha_1 I_0(\tau) + \alpha_2 K_0(\tau)). \quad (4.39)$$

Se obtiene el parámetro de Hubble al igual que en la sección 3 a partir de su definición $H = \frac{\dot{a}}{a}$

$$2a\dot{a} = \frac{4}{\Gamma}(\alpha_1 I_0'(\tau) + \alpha_2 K_0'(\tau)) \frac{d\tau}{dt}, \quad (4.40)$$

en donde

$$\dot{I}(\tau) = I'(\tau) \left(\frac{-\Gamma\tau}{2} \right), \quad (4.41)$$

en donde la prima indica la derivada con respecto al parámetro τ y el punto denota la derivada con respecto al tiempo cósmico t . Las derivadas requeridas para las funciones de Bessel modificadas son

$$I_0'(\tau) = I_1(\tau), \quad (4.42)$$

⁷Las funciones de Bessel modificadas de primera especie presentan un crecimiento de tipo exponencial mientras que las de segunda especie presentan una atenuación también de tipo exponencial.

CAPITULO 4. DINÁMICA DEL MODELO INFLACIÓN SIN INFLATONES 18

$$K'_o(\tau) = -K_1(\tau). \quad (4.43)$$

Finalmente se encuentra que el parámetro de Hubble tiene la solución

$$H = \frac{\Gamma\tau}{4} \left(\frac{\alpha_2 K_1(\tau) - \alpha_1 I_1(\tau)}{\alpha_2 K_0(\tau) + \alpha_1 I_0(\tau)} \right). \quad (4.44)$$

Las constantes α_1 y α_2 ⁸ se determinan a partir de las condiciones iniciales $H(t = 0) = H_b$ y $a(t = 0) = 1$, y sus valores corresponden respectivamente a (ver apéndice E)

$$\alpha_1 = H_b \left[K_1 \left(\frac{4H_b}{\Gamma} \right) - K_0 \left(\frac{4H_b}{\Gamma} \right) \right], \quad (4.45)$$

$$\alpha_2 = H_b \left[I_1 \left(\frac{4H_b}{\Gamma} \right) + I_0 \left(\frac{4H_b}{\Gamma} \right) \right], \quad (4.46)$$

en donde se ha encontrado que $\tau(t = 0) = \tau_0 = \frac{4H_b}{\Gamma}$.

⁸Chequeando cual debe ser el valor de las constantes, se determina que $\alpha_2 \gg \alpha_1$ para que el término $\alpha_2 K_0(\tau)$ (en el cual $K_0(\tau)$ a medida que transcurre el tiempo crece debido a la relación inversa $\tau = \tau_0 e^{-\Gamma t/2}$) de la ecuación (4.39) domine sobre el otro término de tipo decreciente y proporcione una expansión acelerada.

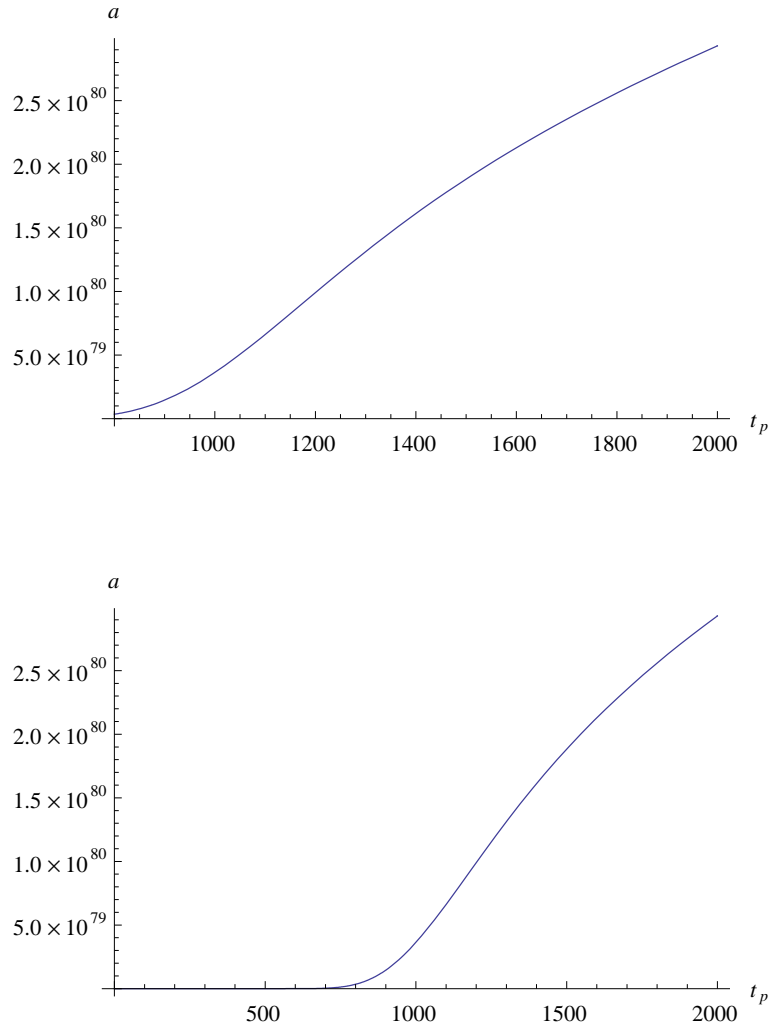


Figura 4.1: **Evolución del factor de escala**

Inflación termina justo cuando inicia $\ddot{a} < 0$, es decir en el punto de inflexión. Se ha tomado $H_b = 0,916$ y $\Gamma = 0,01$. En donde $t_p = tM_p^{-1}$.

En las figuras 4.1a y 4.1b se observa para diferentes intervalos de tiempo que el final de inflación ($t_e \simeq 1170$) está asociado con el inicio de un período que corresponde a $\ddot{a} < 0$.

De igual forma, se aprecia que el factor de escala evoluciona consistentemente a un período inflacionario primordial (ver figura 4.2a y 4.2b). Adicionalmente, se observa según la figura 4.2b que inflación inicia cuando $a(t = 0) = 1$ como se había elegido.

CAPITULO 4. DINÁMICA DEL MODELO INFLACIÓN SIN INFLATONES 20

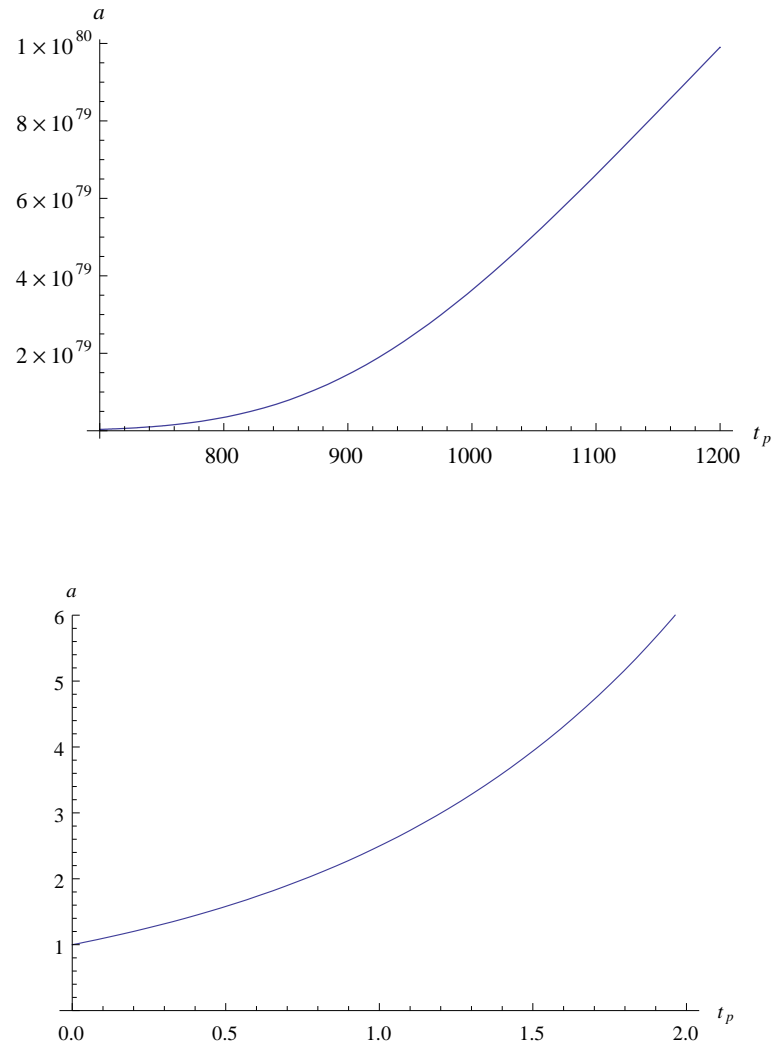


Figura 4.2: **Evolución del factor de escala**

Durante inflación se observa un incremento de tipo exponencial del factor de escala. Se ha tomado $H_b = 0,916$ y $\Gamma = 0,01$.

Durante inflación el parámetro de Hubble disminuye (ver figura 4.3). Se ha tomado como un ejemplo $H_b = 0,918$ y $\Gamma = 0,001$ y se ha determinado que el valor del parámetro de Hubble al final de inflación corresponde a $H_e \simeq 0,005$.

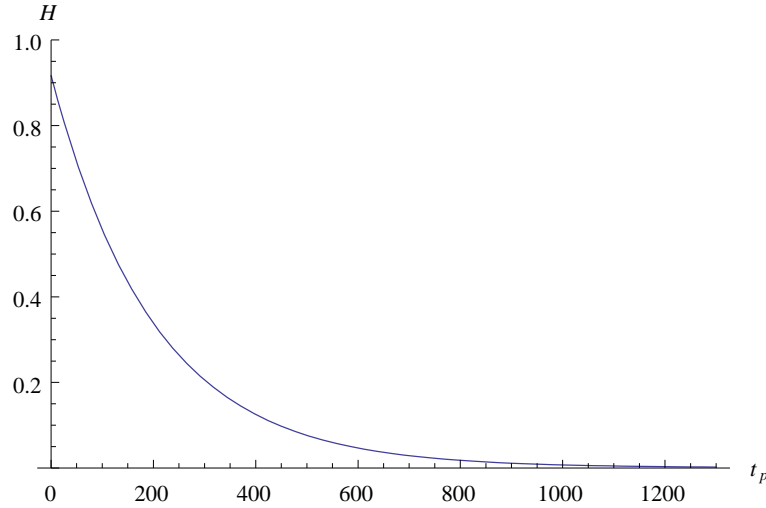


Figura 4.3: Evolución del parámetro de Hubble

Se aprecia que el parámetro de Hubble disminuye durante inflación. Se ha tomado $H_b = 0,916$ y $\Gamma = 0,01$.

4.5. Parámetro de deformación para el modelo de inflación sin inflatones

Similar al parámetro de deformación para los modelos del tipo slow-roll, se define el parámetro de deformación asociado al modelo inflación sin inflatones sin ninguna aproximación. Sin embargo, éste es una función dependiente del tiempo debido a la transferencia de energía, en contraste al análogo del slow-roll⁹ el cual permanece constante durante inflación:

$$\hat{\epsilon}(t) \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{-\frac{\ddot{a}}{a} + 1}{H^2}. \quad (4.47)$$

Reemplazando la ecuaciones (4.1) y (4.2) en la definición anterior se tiene

$$\hat{\epsilon}(t) = \frac{\rho + 3P}{2\rho} + 1 = \frac{3\rho + 3P}{2\rho}. \quad (4.48)$$

Sustituyendo las expresiones (4.4) y (4.5) se determina el parámetro de deformación

$$\hat{\epsilon}(t) = \frac{2\rho_r}{\rho_\Lambda + \rho_r}. \quad (4.49)$$

⁹Si $\epsilon \ll 1$ se dice que hay inflación del tipo de slow-roll. Esta es una condición suficiente mas no necesaria.

CAPITULO 4. DINÁMICA DEL MODELO INFLACIÓN SIN INFLATONES²²

Otra manera de expresar tal ecuación es multiplicar y dividir por la densidad crítica ρ_c , de tal forma que $\hat{\epsilon}(t)$ ¹⁰ quede expresado en términos del parámetro de densidad¹¹; así

$$\hat{\epsilon}(t) = \frac{2\Omega_r}{\Omega_\Lambda + \Omega_r} = 2\Omega_r. \quad (4.50)$$

Para obtener una expresión que dé cuenta de la evolución del parámetro de densidad en términos de la densidad de energía de vacío, se despeja de la ecuación de Friedmann para el fondo

$$2 = \frac{16\pi}{3M_p^2 H^2} (\rho_\Lambda + \rho_r), \quad (4.51)$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{16\pi\rho_\Lambda}{3M_p^2 H^2} + \frac{16\pi\Omega_r\rho_c}{3M_p^2 H^2} = \frac{16\pi\rho_\Lambda}{3M_p^2 H^2} + 2\Omega_r. \quad (4.52)$$

De (4.50) y de (4.24) se concluye que

$$\hat{\epsilon}(t) = 2 - \frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}e^{-\Gamma t}}{3M_p^2 H^2}, \quad (4.53)$$

y de esta forma se ha obtenido una expresión para la evolución del parámetro de deformación¹².

¹⁰ $\hat{\epsilon}(t)$ se puede interpretar segun la expresión (4.50) como una medida de la cantidad de radiación existente en la etapa inflacionaria.

¹¹El parámetro de densidad total cumple de la ecuación (2.9) para un Universo plano con la condición $\Omega_T = \Omega_\Lambda + \Omega_r = 1$.

¹²No hay que olvidar que ahora el parámetro de Hubble evoluciona segun la solución (4.44).

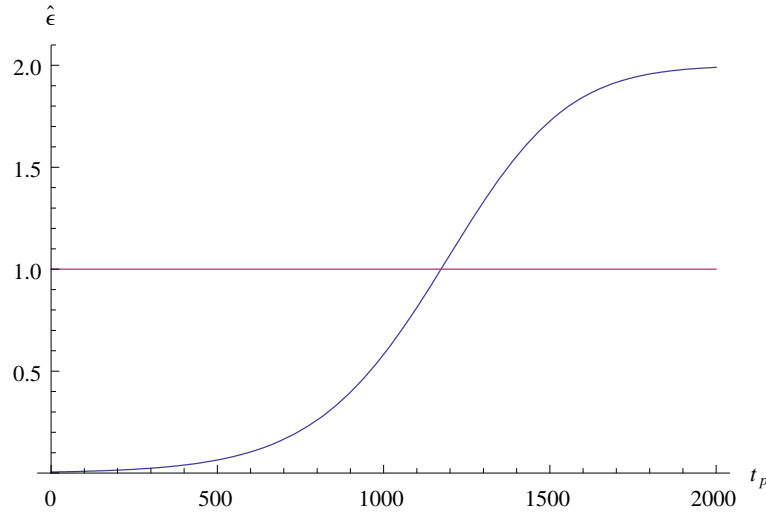


Figura 4.4: **Parámetro de deformación**

Inicialmente $\hat{\epsilon} \ll 1$ y además es proporcional a ρ_r . A medida que transcurre inflación más y más energía es transferida a radiación a través del acople Γ . La línea horizontal indica el final de inflación y corresponde a $\hat{\epsilon} \approx 1$. Se ha tomado $H_b = 0,916$ y $\Gamma = 0,01$

4.5.1. Análisis del parámetro de deformación durante inflación

Para el análisis del parámetro de deformación es conveniente dirigir nuestra atención a la ecuación (4.49) e ignorar por un instante su forma exacta (4.53). Al inicio de inflación existe sólo una pequeña contribución de la densidad de energía de radiación a la densidad de energía total, de modo que el denominador en (4.49) está controlado por ρ_Λ y como $\rho_\Lambda \gg \rho_r$ se obtiene que

$$\epsilon \ll 1. \quad (4.54)$$

Inflación termina cuando $\ddot{a} = 0$. Así, de (4.9) se tiene que $\rho_\Lambda \approx \rho_r$ y el parámetro de deformación toma el valor de

$$\epsilon \approx 1. \quad (4.55)$$

Cuando prácticamente “toda” la densidad de energía de vacío es convertida en densidad de energía de radiación, ρ_r controla el denominador y por tanto $\epsilon \approx 2$. El Universo en este momento está completamente lleno de radiación¹³, mediante la producción de partículas.

El anterior análisis puede ser visto en la figura 4.4. Al inicio de inflación se tiene que $\hat{\epsilon} \ll 1$ dado que $\hat{\epsilon} \sim \rho_r$. A medida que transcurre inflación la densidad de energía de

¹³Ésta es la época dominada por radiación.

radiación aumenta debido a la transferencia de energía hasta que domina el contenido energético del Universo, lo anterior ocurre cuando $\hat{\epsilon} \approx 2$.

4.6. Parámetro de densidad

La evolución de la densidad de energía de cada componente del fluido relativa a la densidad total se determina a partir de la condición $\Omega_T = \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1$. De la ecuación (4.50) se encuentra que $\Omega_r = \frac{\epsilon(\hat{t})}{2}$. Por tanto, $\Omega_\Lambda = 1 - \frac{\epsilon(\hat{t})}{2}$.

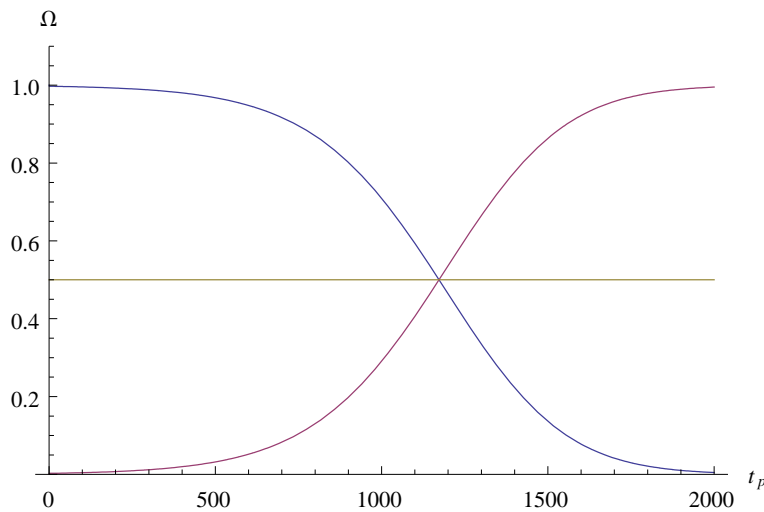


Figura 4.5: **Parámetro de densidad**

Al inicio de inflación la densidad de energía de vacío domina sobre la densidad de energía total. No obstante, decaerá posteriormente en densidad de energía de radiación. Inflación termina cuando $\rho_\Lambda = \rho_r$. La línea roja representa Ω_r mientras que la azul representa a Ω_Λ . Se ha tomado $H_b = 0,916$ y $\Gamma = 0,01$.

En la figura 4.5 se observa que la densidad de energía de vacío decae en densidad de energía de radiación. Cuando $\rho_r = \rho_\Lambda$ se tiene el final de inflación y es indicado por la línea horizontal. Sin embargo, el acople se mantiene hasta que prácticamente toda la densidad de energía de vacío se ha transferido en densidad de energía de radiación con $\Omega_r \simeq 1$ y un pequeño remanente de energía de vacío que permanecerá constante.

4.7. Estimativo del monto de inflación

La cantidad de inflación que ocurre normalmente es cuantificada por el cociente entre el factor de escala en el tiempo final t_e , y el factor de escala en el tiempo inicial t_b . Dado que este cociente es típicamente una cantidad grande, se toma el logaritmo natural de éste, el cual proporciona el monto de inflación cuantificado en *e-folds*

$$N(t) \equiv \ln \frac{a(t_e)}{a(t_b)}. \quad (4.56)$$

Usando la ecuación (4.53) se encuentra que

$$3H^2 = \frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}e^{-\Gamma t}}{M_p^2(2 - \epsilon(t))}. \quad (4.57)$$

Por otra parte

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{da}{dt} \frac{1}{a} = \left(\frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}e^{-\Gamma t}}{3M_p^2(2 - \epsilon(t))} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.58)$$

Separando las variables

$$\int \frac{da}{a} = \left[\frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \int \frac{e^{-\Gamma t/2}}{\sqrt{2 - \epsilon(t)}} dt, \quad (4.59)$$

e integrando esta ecuación en $a(t_b = 0) = a_b$ y en $a(t_e) = a_e$ para calcular el número de e-folds

$$N = \ln(a_e/a_b) = \left[\frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \int \frac{e^{-\Gamma t/2}}{\sqrt{2 - \epsilon(t)}} dt. \quad (4.60)$$

$$\Rightarrow N \approx \left[\frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{2}{\Gamma} \frac{e^{-\Gamma t/2}}{\sqrt{2 - \epsilon(t)}} \right] \Big|_0^{t_e}. \quad (4.61)$$

Como $\epsilon(t)$ varía ligeramente en el período inflacionario desde $\epsilon \ll 1$ hasta $\epsilon \approx 1$ el denominador de la expresión (4.61) varía entre $\sqrt{2}$ y 1, así mismo tomando $e^{-\Gamma t_e/2} \ll 1$ al final de inflación, se tiene que la integral se puede aproximar de modo que

$$N \approx \left[\frac{16\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad (4.62)$$

$$\Rightarrow N \sim \frac{8\rho_{\Lambda 0}^{1/2}}{M_p\Gamma}, \quad (4.63)$$

y de la ecuación de Friedmann evaluada al inicio de inflación se tiene que

$$H_b = \frac{\sqrt{8\pi\rho_{\Lambda 0}^{1/2}}}{\sqrt{3}M_p}. \quad (4.64)$$

Despejando de aquí $\rho_{\Lambda 0}^{1/2}$ y sustituyendo en el número de e-folds, se encuentra

$$N \sim \sqrt{8} \frac{H_b}{\Gamma}. \quad (4.65)$$

Como un ejemplo, se puede considerar la escala de inflación¹⁴ cerca a la escala de la masa de Planck de modo que $H_b \sim M_p \approx 10^{19}$ GeV. Para resolver los problemas de horizonte, planitud, y de reliquias no deseadas, se requiere que $N \geq 62$ e-folds. Entonces para conseguir un período inflacionario adecuado el valor de la razón de decaimiento¹⁵ Γ debe estar ligeramente por debajo de la escala de Hubble al inicio de inflación. De modo que $\Gamma \leq 10^{17}$ GeV.

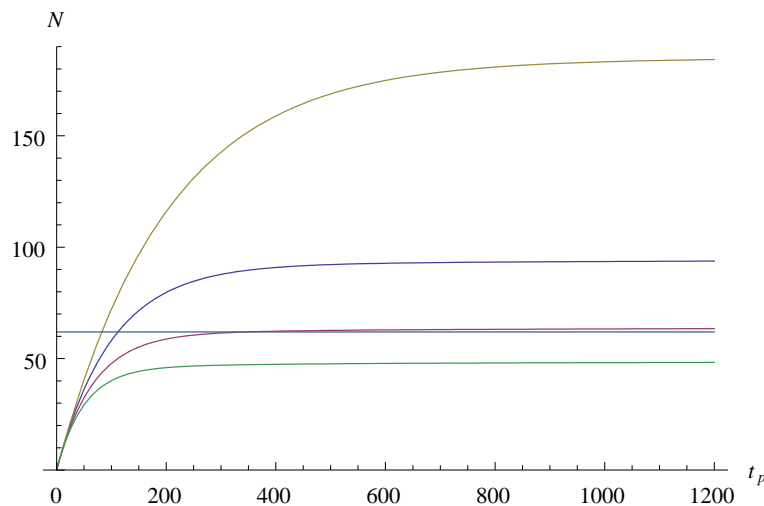


Figura 4.6: **Monto de inflación**

Curvas del monto de inflación para varios valores de Γ . De arriba a abajo: $\Gamma = 0,01, 0,02, 0,03, 0,04$. A mayor acople más rápido termina inflación con $t_e \approx 1170, 520, 320, 224$ para los respectivos valores de Γ . Se ha tomado $H_b = 0,916$.

¹⁴La escala de inflación es de hecho desconocida, sin embargo, debe ser consistente con la razón tensor-escalar dado que las ondas gravitacionales primordiales podrían haber sido creadas durante inflación.

¹⁵Las transiciones deben ocurrir a tal escala energética para conseguir que el Universo se infle adecuadamente y así poder satisfacer las condiciones rigurosas impuestas por inflación.

En la figura 4.6 se observa el monto de inflación $N = \ln a$ para diferentes valores de Γ . Antes de que termine inflación ($t = t_e$) cada acople debe proporcionar una cantidad de e-folds adecuada, de modo que se pueda resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar. La línea horizontal indica la cantidad de e-folds que se debe producir antes de que inflación termine ($N \geq 62$). De lo anterior se impone la restricción $\Gamma \leq 0,03$ siendo consistente con el valor tomado en la ecuación (4.65) para obtener el estimativo del monto de inflación.

4.8. Temperatura Post-inflacionaria

Al final de inflación gran parte de la energía de vacío ha sido convertida en energía de radiación y es en este justo instante en que la inflación cósmica termina. Para este punto crucial de la historia del Universo se tiene una temperatura la cual es característica según el modelo en consideración denominada temperatura post-inflacionaria¹⁶ T_r en la cual $\rho_r = \rho_\Lambda = \rho_{\Lambda 0} e^{-\Gamma t_r}$. De la ley de Stephan-Boltzman se obtiene una relación para la densidad de energía de radiación y la temperatura $\rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_*(T_r) T^4$ [2], en donde $g_*(T_r)$ es el número de grados de libertad internos de la colección de partículas elementales que se tiene según el modelo de física de partículas que se considere¹⁷. Así

$$T_r = \left[\frac{30}{\pi^2} \frac{1}{g_*(T_r)} \rho_{\Lambda 0} \right]^{1/4} e^{-\Gamma t_r/4}, \quad (4.66)$$

$$\Rightarrow T_r = 0,4 \rho_{\Lambda 0}^{1/4} e^{-\Gamma t_r/4}, \quad (4.67)$$

y se ha obtenido una expresión para la temperatura post-inflacionaria en términos de la densidad de energía de vacío inicial y la razón de decaimiento¹⁸.

Otra relación de utilidad es la ecuación de Friedman al inicio de inflación

$$H_b^2 = \frac{8\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2}, \quad (4.68)$$

de aquí que

$$\rho_{\Lambda 0}^{1/4} = \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/4} (M_p H_b)^{1/2}. \quad (4.69)$$

Se considera la escala de Hubble inicial $H_b \simeq 10^{19}$ GeV, entonces

$$\rho_{\Lambda 0}^{1/4} \approx 0,58 \times 10^{19} \text{ GeV}. \quad (4.70)$$

¹⁶Esta temperatura es análoga a la temperatura de recalentamiento para modelos del tipo Slow-roll de campos escalares.

¹⁷Para el caso de interés se tomará el modelo estándar de física de partículas con $g_*(T_r) = 106,75$.

¹⁸Se tiene también ρ_{r0} o, análogamente $\hat{\epsilon}$ al comienzo de inflación.

CAPITULO 4. DINÁMICA DEL MODELO INFLACIÓN SIN INFLATONES 28

En el estimativo del monto de inflación se exigió que $e^{-\Gamma t_e/2} \ll 1$ esto implica que $e^{-\Gamma t_e/2} \leq 10^{-2}$, es decir, que esté al menos dos cifras significativas por debajo de uno. De aquí que $\Gamma t_r \geq 9,21$. Reemplazando este valor y el de $\rho_{\Lambda 0}^{1/4}$ en la ecuación (4.67) se determina la temperatura post-inflacionaria para este modelo en particular

$$T_r \sim 10^{17} \text{GeV}. \quad (4.71)$$

A partir del momento en que inflación termine la radiación viene a dominar dando lugar a la época dominada por radiación [2, 3, 4, 5].

CAPITULO 5

Teoría de perturbaciones cosmológicas

Nuestro modelo actual del Big Bang describe satisfactoriamente nuestro Universo a gran escala acorde a la teoría de relatividad general [18, 19]. Sin embargo, es incapaz de describir nuestro Universo observable a escalas mucho mas pequeñas, dado que surgen pequeñas inhomogeneidades (galaxias, clusters y superclusters de galaxias) en la distribución de materia y energía impresas en la radiación cósmica de fondo con fluctuaciones del orden de $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$. Para una descripción mas detallada es necesario introducir una aproximación perturbativa, iniciando con una métrica de FRW homogénea e isotrópica como fondo y posteriormente se adiciona cantidades perturbadas de orden lineal.

En esta sección se introduce a la teoría de perturbaciones cosmológicas basados en las referencias [13, 14], en donde se estudia la evolución lineal de las perturbaciones alrededor de un fondo espacialmente homogéneo e isotrópico de FRW para ser aplicado al modelo en consideración. Más específicamente tratamos con perturbaciones métricas, las cuales nos conducen a las ecuaciones lineales desacopladas para la evolución de la perturbación en la densidad que describen la evolución de la formación de las estructuras observadas en el Universo actual y cuyo espectro está directamente relacionado con la fluctuación en la RCF [11] en el tiempo de recombinación.

Contrario a los capitulos 2 y 3, se toma la signatura $(-,+,+,+)$ en la clasificación de Misner, Thore, and Wheeler [19] para el estudio de las perturbaciones cosmológicas.

5.1. Describiendo las perturbaciones

La métrica que describe un Universo espacialmente plano homogéneo e isotrópico es la de FRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[\delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (5.1)$$

Si se introduce el tiempo conformal η cuya relación con el tiempo cósmico está dada por

$$dt = a(\eta)d\eta, \quad (5.2)$$

entonces la métrica de FRW se expresa como

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j], \quad (5.3)$$

siendo conformal a la métrica de Minkowski.

Nuestro Universo observable puede ser descrito aproximadamente por un Universo homogéneo e isotrópico de FRW, en donde las cantidades físicas pueden ser usualmente descompuestas en un fondo homogéneo y perturbaciones inhomogéneas. Por esta razón, cualquier cantidad tensorial puede ser dividida de la siguiente forma

$$T(\eta, x^i) = T_0(\eta) + \delta T(\eta, x_i), \quad (5.4)$$

donde el primer término de la descomposición corresponde al fondo y es una cantidad que depende solamente del tiempo conformal, mientras que el segundo término representa las perturbaciones las cuales dependen del tiempo conformal y de las coordenadas espaciales $x^\mu = (\eta, x^i)$.

La manera más usual de definir las perturbaciones es a través de una expansión en serie de potencias

$$\delta T(\eta, x_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \delta T_n(\eta, x^i), \quad (5.5)$$

en donde el índice n denota el orden de la perturbación y ϵ es un parámetro pequeño mucho menor que uno que controla la convergencia de la serie.

5.1.1. Descomposición de cantidades tensoriales

Vectores

Un vector u^μ se puede dividir en una parte temporal y en una parte espacial

$$u^\mu = (u^0, u^i), \quad (5.6)$$

Así mismo la parte espacial u^i puede ser descompuesta en una parte correspondiente a un escalar puro y a un vector puro

$$u^i \equiv u^i + u_{Vec}^i. \quad (5.7)$$

Lo anterior se debe al teorema de Helmholtz según el cual un vector puede ser dividido en un vector libre de rotacional y uno libre de divergencia $\partial_i u_{Vec}^i = 0$, con la salvedad de que en nuestro fondo de FRW no puede existir parte vectorial espacial (a orden cero) de acuerdo con el principio cosmológico, es decir $u_{(0)}^i = 0$, pero a ordenes mayores pueda que exista tal vector espacial.

Tensores

De igual manera se puede descomponer un tensor de segundo orden en su respectiva parte temporal y espacial, pero esta vez aparecen términos mixtos que corresponden a la parte espacio-temporal.

Al considerar el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, éste puede ser dividido según la ecuación (5.4), en la parte asociada al fondo y en la parte perturbada. A su vez esta parte perturbada puede ser dividida en diferentes partes renombradas como escalares, vectoriales y tensoriales expandidas en perturbaciones de primer orden y de orden superior según (5.5).

Dado que el tensor métrico es simétrico, existen sólo 10 componentes independientes en el espacio cuatridimensional; por esta razón el número de componentes del tensor métrico perturbado debe tener la misma cantidad de componentes que la parte correspondiente al fondo, y pueden ser escritas como

$$\delta g_{00} = -2a^2\phi, \quad (5.8)$$

$$\delta g_{0i} = a^2 B_i, \quad (5.9)$$

$$\delta g_{ij} = 2a^2 C_{ij}. \quad (5.10)$$

Las componentes $0 - i$ e $i - j$ del tensor métrico perturbado pueden ser descompuestas además en las respectivas partes escalares, vectoriales y tensoriales

$$B_i = B_{,i} - S_i, \quad (5.11)$$

$$C_{ij} = -\psi\delta_{ij} + E_{,ij} + F_{(i,j)} + \frac{1}{2}h_{ij}, \quad (5.12)$$

en donde ϕ , B , ψ y E son perturbaciones métricas escalares libre de rotacional, S_i y F_i son perturbaciones métricas vectoriales libre de divergencia y h_{ij} es una perturbación métrica tensorial la cual es trasversal, es decir, libre de divergencia $h_{ij}^j = 0$ y libre de traza $h_i^i = 0$. Adicionalmente, las expresiones (5.8-5.12) incluyen todos los ordenes para la perturbación

métrica.

Note que cuando se bajan o suben índices espaciales de vectores y tensores perturbados se usa la métrica espacial del fondo comóvil, δ_{ij} .

Incluyendo perturbaciones hasta segundo orden, el tensor métrico completo toma la forma

$$g_{00} = -a^2(1 + 2\phi_1 + \phi_2), \quad (5.13)$$

$$g_{0i} = a^2(B_{1i} + \frac{1}{2}B_{2i}), \quad (5.14)$$

$$g_{ij} = a^2(\delta_{ij} + 2C_{1ij} + C_{2ij}), \quad (5.15)$$

en donde las perturbaciones B_{1i} , B_{2i} , C_{1ij} y C_{2ij} pueden ser divididas según (5.11) y (5.12) respectivamente. Por otra parte, el tensor métrico contravariante se obtiene en términos del tensor métrico covariante a partir de la restricción

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta_{\mu}^{\lambda}. \quad (5.16)$$

Considerando perturbaciones hasta segundo orden se obtiene

$$g^{00} = -a^2[1 - 2\phi_1 - \phi_2 + 4\phi_1^2 - B_{1K}B_1^K], \quad (5.17)$$

$$g^{0i} = [B_1^i + \frac{1}{2}B_2^i - 2\phi_1 B_1^i - 2B_{1k}C_1^{ki}], \quad (5.18)$$

$$g^{ij} = a^{-2}[\delta^{ij} - 2C_1^{ij} - C_2^{ij} + 4C_1^{ik}C_{1k}^j - B_1^i B_1^j]. \quad (5.19)$$

El siguiente paso es encontrar los coeficientes de conexión hasta segundo orden correspondientes a las perturbaciones métricas. De la definición (A.6) se encuentra que

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\alpha}[g_{\alpha 0,0} + g_{0\alpha,0} - g_{00,\alpha}] = \frac{1}{2}g^{00}[2g_{00,0} - g_{00,0}] + \frac{1}{2}g^{0i}[2g_{0i,0} - g_{00,i}] \\ &= \frac{1}{2}(-a^{-2})[1 - 2\phi_1 - \phi_2 + 4\phi_1^2 - B_{1k}B_1^k][-2aa'(1 + 2\phi_1 + \phi_2) - a^2(2\phi_1' + \phi_2')] \\ &+ \frac{1}{2}a^{-2}[B_1^i + \frac{1}{2}B_2^i - 2\phi_1 B_1^i - 2B_{1k}C_1^{ki}](4aa'(b_{1i} + \frac{1}{2}B_{2i}) + 2a^2(B_{1i}' + \frac{1}{2}B_{2i}') \\ &+ a^2(2\phi_{1,i} + \phi_{2,i})) \\ &= \frac{a'}{a} + \frac{a'}{a}B_1^i B_{1i} + \phi_1' + \frac{1}{2}\phi_2' - 2\phi_1\phi_1' + B_1^i B_{1i}' + B_1^i \phi_{1,i}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\alpha}[g_{\alpha 0,i} + g_{i\alpha,0} - g_{0i,\alpha}] = \frac{1}{2}g^{00}[g_{00,i} + g_{i0,0} - g_{0i,0}] + \frac{1}{2}g^{0k}[g_{k0,i} + g_{ik,0} - g_{0i,k}] \\
 &= \frac{1}{2}g^{00}g_{00,i} + \frac{1}{2}g^{0k}[g_{k0,i} + g_{ik,0} - g_{0i,k}] \\
 &= -\frac{1}{2}a^{-2}[1 - 2\phi_1 - \phi_2 + 4\phi_1^2 - B_{1l}B_1^l][-a^2(\phi_{1,i} + \phi_{2,i})] + \frac{1}{2}a^{-2}(B_1^k + \frac{1}{2}B_2^k \\
 &\quad - 2\phi_1 B_1^k - 2B_{1l}C_1^{lk})[a^2(B_{1k,1} + \frac{1}{2}B_{2k,i}) + 2aa'(\delta_{ik} + 2C_{1ik} + C_{2ik}) \\
 &\quad + a^2(2C'_{1ik} + C'_{2ik}) - a^2(B_{1i,k} + \frac{1}{2}B_{2i,k})] \\
 &= \frac{a'}{a}[B_{1i} + \frac{1}{2}B_{2i}] - 2\frac{a'}{a}\phi_1 B_{1i} + \phi_{1,i} + \frac{1}{2}\phi_{2,i} - 2\phi_1\phi_{1,i} + B_1^k C'_{1ik} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(B_1^k B_{1k,i} - B_1^k B_{1i,k}), \tag{5.21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2}g^{i\alpha}[g_{\alpha 0,0} + g_{0\alpha,0} - g_{00,\alpha}] = \frac{1}{2}g^{i\alpha}[2g_{0\alpha,0} - g_{00,\alpha}] = \frac{1}{2}g^{i0}g_{00,0} + \frac{1}{2}g^{ij}[2g_{0j,0} - g_{00,j}] \\
 &= \frac{1}{2}a^{-2}[B_1^i + \frac{1}{2}B_2^i - 2\phi_1 B_1^i - 2B_{1k}C_1^{ki}][-2aa'(1 + 2\phi_1 + \phi_2) - a^2(2\phi_1' + \phi_2')] \\
 &\quad + \frac{1}{2}a^{-2}[\delta_{ij} - 2C_1^{ij} - C_2^{ij} + 4C_1^{ik}C_{1k}^j - B_1^i B_1^j][4aa'(B_{1j} + \frac{1}{2}B_{2j}) + 2a^2(B_{1j}' + \frac{1}{2}B_{2j}')] \\
 &\quad + a^2(2\phi_{1,j} + \phi_{2,j})] \\
 &= \frac{a'}{a}[B_1^i + \frac{1}{2}B_2^i] + (B_1^i + \frac{1}{2}B_2^i) + \phi_1^i + \frac{1}{2}\phi_2^i - \phi_1' B_1^i - 2C_1^{ij} B_{ij}' - 2C_1^{ij} \phi_{1,j} \\
 &\quad - 2\frac{a'}{a}B_{1j}C_1^{ij}, \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{j0}^i &= \frac{1}{2}g^{i\alpha}[g_{\alpha j,0} + g_{0\alpha,j} - g_{j0,\alpha}] = \frac{1}{2}g^{i0}[g_{0j,0} + g_{00,j} - g_{j0,0}] + \frac{1}{2}g^{ik}[g_{kj,0} + g_{0k,j} - g_{j0,k}] \\
&= -\frac{1}{2}a^{-2}[B_1^i + \frac{1}{2}B_2^i - 2\phi_1 B_1^i - 2B_{1k}C_1^{ki}][-a^2(2\phi_{1,j} + \phi_{2,j})] + \frac{1}{2}a^{-2}[\delta_{ik} - 2C_1^{ik} \\
&\quad - C_2^{ik} + 4C_1^{il}C_{1l}^k - B_1^i B_1^k][2aa'(\delta_{kj} + 2C_{1kj} + C_{2kj}) + a^2(2C'_{1kj} + C'_{2kj}) \\
&\quad + a^2(B_{1k,j} + \frac{1}{2}B_{2k,j}) - a^2(B_{1j,k} + \frac{1}{2}B_{2j,k}) \\
&= \frac{a'}{a}\delta_i^j - \frac{a'}{a}B_1^i B_{1j} - B_1^i \phi_{1,j} - 2C_1^{ik}C'_{ikj} + C_{1j}^i + \frac{1}{2}C_{2j}^i + \frac{1}{2}(B_{1,j}^i - B_{1j}^i) \\
&\quad + \frac{1}{4}(B_{2,j}^i - B_{2j}^i) - C_1^{ik}(B_{1j,k} - B_{1k,j}), \tag{5.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}g^{0\alpha}[g_{\alpha i,j} + g_{j\alpha,i} - g_{ij,\alpha}] = \frac{1}{2}g^{00}[g_{0i,j} + g_{j0,i} - g_{ij,0}] + \frac{1}{2}g^{0k}[g_{ki,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}] \\
&= -\frac{1}{2}a^{-2}[1 - 2\phi_1 - \phi_2 + 4\phi_1^2 - B_{1k}B_1^k][a^2(B_{1i,j} + \frac{1}{2}B_{2j,i}) + a^2(B_{1j,i} + \frac{1}{2}B_{2j,i}) \\
&\quad - 2aa'(\delta_{ij} + 2C_{1ij} + C_{2ij}) - a^2(2C'_{1ij} + C'_{2ij})] + \frac{1}{2}a^{-2}[B_1^k + \frac{1}{2}B_2^k - 2\phi_1 B_1^k \\
&\quad - 2B_{1l}C_{1lk}][a^2(2C_{1ki,j} + C_{2ki,j}) + a^2(2C_{1jk,i} + C_{2jk,i}) - a^2(2C_{1ij,k} + C_{2ij,k})] \\
&= -\frac{1}{2}[B_{1i,j} + \frac{1}{2}B_{2i,j} - 2\phi_1 B_{1i,j}] - \frac{1}{2}[B_{1j,i} + \frac{1}{2}B_{2j,i} - 2\phi_1 B_{1j,i}] + \frac{a'}{a}[\delta_{ij} \\
&\quad + 2C_{1ij} + C_{2ij} - 2\phi_1 \delta_{ij} - 4\phi_1 C_{1ij} - \phi_2 \delta_{ij} + 4\phi_1^2 \delta_{ij} - B_{1k}B_1^k \delta_{ij}] + \frac{1}{2}[2C'_{1ij} \\
&\quad + C'_{2ij} - 4\phi_1 C'_{1ij}] + B_i^k C_{1ki,j} + B_i^k C_{1jk,i} - B_1^k C_{1ij,k} \\
&= \delta_{ij} \frac{a'}{a}[1 - 2(\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2) + 4\phi_1^2 - B_{1k}B_1^k] + 2\frac{a'}{a}C_{1ij} + \frac{a'}{a}C_{2ij} - \frac{1}{2}(B_{1i,j} \\
&\quad + B_{1j,i}) - \frac{1}{4}(B_{2i,j} + B_{2j,i}) + C'_{1ij} + -\frac{1}{2}C'_{2ij} + B_1^k(C_{1ki,j} + C_{1jk,i} - C_{1ij,k}) \\
&\quad + \phi_1(B_{1j,i} + B_{1i,j} - 2C'_{1ij} - 4\frac{a'}{a}C_{1ij}), \tag{5.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}g^{i\alpha}[g_{\alpha j,k} + g_{k\alpha,j} - g_{jk,\alpha}] = \frac{1}{2}g^{i0}[g_{0j,k} + g_{k0,j} - g_{jk,0}] + \frac{1}{2}g^{il}[g_{lj,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}] \\
&= \frac{1}{2}a^{-2}[B_1^i + \frac{1}{2}B_2^i - 2\phi_1 B_1^1 - 2B_{1m}C_1^{mi}][a^2(B_{1j,k} + \frac{1}{2}B_{2j,k}) + a^2(B_{1k,j} + \frac{1}{2}B_{2k,j}) \\
&\quad - 2aa'(\delta_{jk} + 2C_{1jk} + C_{2jk}) - a^2(2C'_{1jk} + C'_{2jk})] + \frac{1}{2}a^{-2}[\delta^{il} - 2C_1^{il} - C_2^{il} + 4C_1^{ik}C_{1k}^l - B_1^i B_1^l] \\
&\quad [a^2(2C_{1lj,k} + C_{2lj,k}) + a^2(2C_{1kl,j} + C_{2kl,j}) - a^2(2C_{1jk,l} + C_{2jk,l})] \\
&= C_{1j,k}^i + C_{1k,j}^i - C_{1jk}^i + \frac{1}{2}(C_{2j,k}^i + C_{2k,j}^i - C_{2j,k}^i) + \frac{1}{2}B_1^i(B_{1j,k} + B_{1k,j}) \\
&\quad - 2C_1^{il}(C_{1lj,k} + C_{1kl,j} - C_{1jk,l}) + 2\frac{a'}{a}B_{1m}C_1^{mi}\delta_{jk} - \frac{a'}{a}\delta_{jk}(B_1^i + \frac{1}{2}B_2^i) \\
&\quad + B_i^i[2\frac{a'}{a}(\phi_1\delta_{jk} - C_{1jk}) - C'_{1jk}]. \tag{5.25}
\end{aligned}$$

5.1.2. Geometría de hipersuperficies espaciales

Al dividir el espacio-tiempo¹ en una familia de hipersuperficies de tiempo constante y de hipersuperficies de coordenadas espaciales constante definidas como slicing y threading respectivamente, se define implícitamente un vector tipo-tiempo ortogonal a las hipersuperficies de tiempo constante

$$n_\mu \propto \frac{\partial x^\mu}{\partial \eta}, \tag{5.26}$$

sujeto a la restricción $n^\mu n_\mu = -1$. Por esta razón dicho vector ortogonal sin perturbar se define como $n_\mu = (n_0, 0)$ y en general describe la cuadrivelocidad en coordenadas espaciales comóviles x^i de los observadores y corresponde al threading.

Es conveniente aclarar que en el espacio-tiempo perturbado n_μ no corresponde con la cuadrivelocidad de la materia a primer orden ni a ordenes superiores, sólo en el fondo de FRW ambas cuadrivelocidades coinciden y por lo tanto no hay distinción.

De la restricción $n^\mu n_\mu = g^{\mu\nu}n_\nu n_\mu = -1$ y de $n_\mu = (n_0, 0)$ se tiene

$$g^{00}n_0 n_0 = -1, \tag{5.27}$$

$$\Rightarrow n_0 = \pm(-g^{00})^{-1/2}, \tag{5.28}$$

¹A esta división del espacio-tiempo se le denomina foliación [20].

con $g^{00} = -a^2(1 - X)$, en donde $X = 2\phi_1 + \phi_2 - 4\phi_1^2 + B_{1k}B^{1k}$ en acuerdo con (5.17). Entonces se encuentra que

$$n_0 = \pm a(1 - X)^{-1/2}. \quad (5.29)$$

Expandiendo el término $(1 - X)^{-1/2}$ hasta segundo orden y considerando sólo términos hasta el mismo orden se tiene que

$$n_0 = -a[1 + \phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2 + \frac{1}{2}(B_{1k}B_1^k - \phi_1^2)]. \quad (5.30)$$

En conclusión el vector n_μ covariante hasta segundo orden es²

$$n_\mu = -a[1 + \phi_1 + \frac{1}{2}\phi_2 + \frac{1}{2}(B_{1k}B_1^k - \phi_1^2), 0]. \quad (5.31)$$

El procedimiento a seguir sugiere encontrar el vector contravariante para la cuadrivelocidad del observador n^μ . Partiendo de la restricción $n^\mu n_\mu = -1$ y escribiendo todos los posibles términos hasta segundo orden para n^0 se encuentra los coeficientes que satisfacen la restricción, por lo tanto

$$n^0 = \frac{1}{a}[1 - \phi_1 - \frac{1}{2}\phi_2 + \frac{3}{2}\phi_1^2 - \frac{1}{2}B_{1k}B_1^k]. \quad (5.32)$$

La parte espacial de n^μ se calcula considerando el tensor métrico perturbado, es decir

$$n^i = g^{i0}\eta_0 \quad (5.33)$$

$$\Rightarrow n^i = \frac{1}{a}[-(B_1^i + \frac{1}{2}B_2^i) + 2B_{1k}C_1^{ki} + \phi_1 B_1^i]. \quad (5.34)$$

5.1.3. Tensor energía momentum para fluidos

El tensor energía momentum para un único fluido caracterizado con presión P , densidad ρ y cuadrivelocidad u^μ se define como

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu + Pg^{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu}, \quad (5.35)$$

en donde $\pi_{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzos anisotrópico. Dado que el tensor energía momentum se compone como una suma de cantidades a perturbar, la manera de encontrar dicho tensor perturbado es calcular cada término perturbado correspondiente a la parte derecha de la

²De igual manera se pudo haber definido el vector contravariante de la forma $n^\mu = (n^\mu, 0)$ en vez del covariante. Esto nos lleva a pensar que aparentemente hay una posible ambigüedad en la elección del vector que debe tener sólo parte temporal, pero la razón de tomar el vector covariante con parte temporal únicamente (sin parte espacial) obedece a argumentos geométricos en la construcción de cantidades que caracterizan hipersuperficies espaciales.

ecuación (5.35) y sumar dichas cantidades considerando sólo términos que correspondan a perturbaciones de segundo orden.

La cuadrivelocidad para la materia asociada al fondo en el sistema de referencia inercial local cómovil toma la forma $u^\mu = (1, 0)$ y está sujeta a la restricción

$$u^\mu u_\nu = -1. \quad (5.36)$$

Cuando se considera perturbaciones sobre la materia la cuadrivelocidad necesariamente no permanece inalterada, y puede que aparezca una componente espacial correspondiente a dicha perturbación como es el caso en consideración. La componente espacial de la cuadrivelocidad se define en términos de perturbaciones vectoriales³ hasta segundo orden segun (5.5) como

$$u^i = \frac{1}{a} \left(v_1^i + \frac{1}{2} v_2^i \right), \quad (5.37)$$

sin considerar el término de orden cero de acuerdo con la isotropía espacial. A partir de la restricción (5.36) y de la definición (5.37) se obtienen las otras componentes de la cuadrivelocidad

$$u_0 = -a \left[1 + \phi_1 + \frac{1}{2} \phi_2 - \frac{1}{2} \phi_1^2 + \frac{1}{2} v_{1k} v_1^k \right], \quad (5.38)$$

$$u_i = a \left[v_{1i} + B_{1i} + \frac{1}{2} (v_{2i} + B_{2i}) - \phi_1 B_{1i} + 2C_{1ik} v_1^k \right], \quad (5.39)$$

$$u^0 = \frac{1}{a} \left[1 - \phi_1 - \frac{1}{2} \phi_2 + \frac{3}{2} \phi_1^2 + \frac{1}{2} v_{1k} v_1^k + v_{1k} B_{1k} \right]. \quad (5.40)$$

Ya calculado el tensor métrico y la cuadrivelocidad (ambas cantidades perturbadas), se prosigue a perturbar el último término de la expresión (5.35) que corresponde al tensor de esfuerzos anisotrópico. Para ello se define su perturbación según la expansión (5.5) como

$$\pi_{\mu\nu} \equiv \pi_{(1)\mu\nu} + \frac{1}{2} \pi_{(2)\mu\nu}, \quad (5.41)$$

estando sujeto a las restricciones

$$\pi_{\mu\nu} u^\mu = 0, \pi_\mu^\mu = 0. \quad (5.42)$$

No existe contribución a orden cero del tensor de esfuerzos anisotrópico debido a que el fondo se modela como un fluido perfecto.

³Es relevante indicar que este tipo de perturbaciones vectoriales difieren de las definidas para el tensor métrico y para la velocidad del observador debido a que describen en principio cosas diferentes cuando se consideran perturbaciones.

Para calcular el tensor de energía momentum perturbado simplemente hay que sumar cada término perturbado anteriormente y escribir la densidad y presión respectivamente como

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho_1 + \frac{1}{2}\delta\rho_2, \quad (5.43)$$

$$P = P_0 + \delta P_1 + \frac{1}{2}\delta P_2. \quad (5.44)$$

De esta manera se calcula el tensor de energía momentum a primer orden para las componentes

$${}^{(1)}\delta T_0^0 = -\delta\rho_1, \quad (5.45)$$

$${}^{(1)}\delta T_i^0 = (\rho_0 + P_0)(v_{1i} + B_{1i}), \quad (5.46)$$

$${}^{(1)}\delta T_j^i = \delta P_1 \delta_j^i + a^{-2}\pi_{(1)j}^i, \quad (5.47)$$

y a segundo orden

$${}^{(2)}\delta T_0^0 = -\delta\rho_2 - 2(\rho_0 + P_0)v_{1k}(v_1^k + B_1^k), \quad (5.48)$$

$${}^{(2)}\delta T_i^0 = (\rho_0 + P_0)[v_{2i} + B_{2i} + 4C_{1ik}v_1^k - 2\phi_1(v_{1i} + 2B_{1i})] + 2(\delta\rho_1 + \delta P_1)(v_{1i} + B_{1i}) + \frac{2}{a^2}B_1^k\pi_{1k}^i, \quad (5.49)$$

$${}^{(2)}\delta T_j^i = \delta P_2 \delta_j^i + a^{-2}\pi_{2j}^i - \frac{4}{a^2}C_1^{ik}\pi_{1jk} + 2(\rho_0 + P_0)v_1^i(v_{ij} + B_{1j}), \quad (5.50)$$

en donde se ha considerado que las componentes del tensor energía momentum para el fondo en un sistema de referencia inercial local se definen como

$$T_0^0 = -\rho_0, \quad (5.51)$$

$$T_i^0 = 0, \quad (5.52)$$

$$T_j^i = \delta_j^i P. \quad (5.53)$$

5.1.4. Fluidos múltiples interactuantes

En el caso de que nuestro Universo se constituya por más de dos fluidos, el tensor energía momentum total se define como la suma de los tensores energía momentum individuales de cada fluido, es decir

$$T^{\mu\nu} = \sum_{\alpha} T_{(\alpha)}^{\mu\nu}, \quad (5.54)$$

y de igual manera se cumple que

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (5.55)$$

siendo lo anterior la ley de conservación energía momentum. En el caso de que los fluidos múltiples interactúen no hay conservación local de $T_\alpha^{\mu\nu}$ que caracteriza cada fluido y por esta razón se define el vector transferencia energía momentum a través de la relación

$$\nabla_\mu T_\alpha^{\mu\nu} = Q_\alpha^\nu, \quad (5.56)$$

Al aplicar la derivada covariante en (5.54) y considerando (5.55) y (5.56) se encuentra que

$$\sum_\alpha Q_\alpha^\nu = 0. \quad (5.57)$$

5.2. Teoría de perturbaciones cosmológicas para el modelo

El elemento de línea que corresponde a un Universo de FRW expresado en términos del tiempo conformal η con perturbaciones de la forma (5.5) puede ser escrito como

$$ds^2 = [{}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}] dx^\mu dx^\nu, \quad (5.58)$$

de acuerdo con (5.4), y de aquí que se pueda identificar la parte asociada al fondo como

$${}^{(0)}g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta)[-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j]. \quad (5.59)$$

Teniendo en cuenta que la perturbaciones escalares, vectoriales y tensoriales evolucionan independientemente las unas de las otras, es de interés estudiar cada perturbación desacoplada para de esta manera obtener un elemento de línea que dé cuenta o que corresponda a cada tipo de perturbación. Si se considera perturbaciones en las componentes del tensor métrico según (5.8), (5.9), (5.10) que a su vez pueden ser descompuestas como (5.11) y (5.12) se encuentran las siguientes expresiones para cada tipo de perturbación.

Perturbaciones Escalares:

$$ds_{esc}^2 = a^2(\eta)[-(1 + 2\Phi)d\eta^2 + 2B_{,i}d\eta dx^i + ((1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij})dx^i dx^j]. \quad (5.60)$$

Perturbaciones Vectoriales:

$$ds_{vec}^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 - 2S_{,i}d\eta dx^i + (\delta_{ij} + 2F_{(i,j)})dx^i dx^j]. \quad (5.61)$$

Perturbaciones Tensoriales:

$$ds_{ten}^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j]. \quad (5.62)$$

Así mismo se puede obtener un elemento de línea que agrupe las perturbaciones anteriores haciendo uso del gauge longitudinal $B = E = 0$, [22] y despreciando las perturbaciones vectoriales⁴

$$ds^2 = a^2[-(1 + 2\Phi)d\eta^2 + ((1 - 2\Psi)\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j]. \quad (5.63)$$

En el gauge longitudinal existe una restricción para las perturbaciones invariantes de gauge

$$\Psi - \Phi = 8\pi G a^2 \Pi. \quad (5.64)$$

De aquí que $\Phi = \Psi$ en ausencia del tensor de esfuerzos anisotrópico.

5.2.1. Fluctuaciones en la densidad

Este tipo de perturbación se asocia a las perturbaciones escalares las cuales se caracterizan a través de las funciones ϕ , ψ y son de hecho las más importantes debido a que pueden llevar a la formación de estructuras a gran escala (galaxias, cluster de galaxias) para nuestro Universo observable.

Considerando el elemento de línea correspondiente a perturbaciones escalares se obtienen las ecuaciones de campo de Einstein perturbadas y linealizadas construidas de la misma manera sistemática que en RG⁵

$$\delta G^\mu_\nu = 8\pi\delta T^\mu_\nu, \quad (5.65)$$

o en sus componentes

$$\delta G^0_0 = 8\pi\delta T^0_0, \quad (5.66)$$

$$\delta G^0_i = 8\pi\delta T^0_i, \quad (5.67)$$

$$\delta G^i_j = 8\pi\delta T^i_j. \quad (5.68)$$

Si se considera únicamente perturbaciones de tipo escalar en la métrica, expresión (5.60) y reemplazando las componentes del tensor energía momentum perturbado hasta primer orden, expresiones (5.45), (5.46), (5.47), en las ecuaciones (5.66), (5.67), (5.68) respectivamente se obtienen las ecuaciones de campo⁶ para la perturbación en la densidad

$$\nabla^2\Phi - 3H(H\Phi + \Phi') = 4\pi G a^2 \delta\rho, \quad (5.69)$$

$$\partial_i(H\Phi + \Phi') = 4\pi G a(\rho + p)\delta u_i, \quad (5.70)$$

$$\Phi'' + 3H\Phi' + (2H' + H^2)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p, \quad (5.71)$$

en donde ∇ es el gradiente comóvil.

⁴Esto es posible debido a que las perturbaciones vectoriales decaen muy rápidamente y no son muy interesantes desde el punto de vista de la cosmología.

⁵Dada la métrica se encuentran los coeficientes de conexión y apartir de estos los tensores de Ricci, de Riemann y de Einstein.

⁶En un Universo estático ($H = 0$) la primera ecuación coincide exactamente con la ecuación de Poisson para el potencial gravitacional.

Relaciones Termodinámicas

El estudio de las propiedades termodinámicas de una sistema conlleva a caracterizar completamente el sistema termodinámico. Esto se logra a través de tres variables, dos de las cuales son independientes (se escoge la densidad de energía ρ y la densidad de entropía S como variables independientes), por tal razón que la presión p se escriba como $p = p(\rho, S)$, con derivada total de su fluctuación

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial p}{\partial S} \delta S, \quad (5.72)$$

$$\delta p = c_s^2 \delta \rho + \tau \delta S, \quad (5.73)$$

en donde c_s corresponde a la velocidad adiabática de sonido⁷ en el que las perturbaciones evolucionan durante inflación, a diferencia de la ecuación de estado paramétrica $w = \frac{p}{\rho}$ que depende de cantidades del fondo. τ es un parámetro que da cuenta de las fluctuaciones en la entropía.

Por otra parte $p = p(\vec{x}, t)$, y de aquí que se pueda escribir

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \rho} + \frac{\partial p}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \rho}. \quad (5.74)$$

Sobre grandes escalas $\frac{\partial p}{\partial x^i} = 0$ y se encuentra que $\frac{\partial p}{\partial \rho} \simeq \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \rho}$. Considerando perturbaciones adiabáticas ($\tau = 0$) se obtiene en comparación con (5.72) que $c_s^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho} \simeq \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}$. Esta expresión es la velocidad de sonido adiabática durante inflación válida sólo para grandes escalas. De aquí que la velocidad adiabática de sonido correspondiente a perturbaciones de longitudes de onda larga se exprese como

$$c_s^2 = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = \frac{\dot{p}_\Lambda + \dot{p}_r}{\dot{\rho}_\Lambda + \dot{\rho}_r}. \quad (5.75)$$

Reemplazando las respectivas ecuaciones de estado, ecuación (4.7) y de continuidad, ecuaciones (4.21) y (4.22) para cada fluido se encuentra que

$$c_s^2 = \frac{\Gamma \rho_\Lambda + \Gamma \rho_{\Lambda/3} - 4/3 H \rho_r}{-\Gamma \rho_\Lambda + \Gamma \rho_\Lambda - 4H \rho_r} = \frac{4/3(\Gamma \rho_\Lambda - H \rho_r)}{-4H \rho_r}. \quad (5.76)$$

Finalmente se obtiene una expresión para la velocidad adiabática de sonido en términos de parámetros que caracterizan nuestro modelo

$$c_s^2 = \frac{1}{3} - \frac{\Gamma \rho_\Lambda}{3H \rho_r}. \quad (5.77)$$

⁷Se da esta nominación en analogía con ondas de presión en una columna de gas.

Cuando no se produce transferencia de energía entre los fluidos interactuantes el término Γ se hace cero y la perturbación evoluciona como radiación pura $c_s^2 = \frac{1}{3}$; como resultado la constante cosmológica Λ no se propaga y se interpreta como una verdadera constante cosmológica.

La ecuación de estado paramétrica para el modelo en consideración se expresa como

$$w = \frac{p}{\rho} = \frac{p_\Lambda + p_r}{\rho_\Lambda + \rho_r} = \frac{-\rho_\Lambda + 1/3\rho_r}{\rho_\Lambda + \rho_r} = \frac{-3\rho_\Lambda + \rho_r}{3(\rho_\Lambda + \rho_r)}, \quad (5.78)$$

en donde se ha echo uso de las relaciones (4.4) y (4.5), y de las ecuaciones de estado para cada fluido. Escrita de otra forma, la ecuación de estado paramétrica corresponde a

$$w = \frac{3(\rho_\Lambda + \rho_r) + 4\rho_r}{3(\rho_\Lambda + \rho_r)} = -1 + \frac{4\rho_r}{3(\rho_\Lambda + \rho_r)}, \quad (5.79)$$

en donde el segundo término de esta expresión corresponde a $\frac{2}{3}$ del parámetro de deformación ϵ , ecuación (4.49). De esta manera se haya una relación entre la ecuación de estado paramétrica dependiente del tiempo y el parámetro de deformación

$$w(t) = -1 + \frac{2}{3}\epsilon(t). \quad (5.80)$$

Ecuación para la fluctuación en la densidad

Al notar que los coeficientes del conjunto de ecuaciones diferenciales (5.69)-(5.71) para la perturbación en la densidad no dependen de las coordenadas espaciales, se prosigue a encontrar la transformada de Fourier correspondiente a la perturbación escalar Φ y sus derivadas

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int \Phi_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k, \quad (5.81)$$

$$\partial_i \Phi(\mathbf{x}, t) = i \int \Phi_k(t) k_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \rightarrow ik\Phi_k, \quad (5.82)$$

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, t) = - \int \Phi_k(t) K_i^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \rightarrow -K^2 \Phi_k. \quad (5.83)$$

De esta manera, las ecuaciones (5.69) y (5.71) toman la respectiva forma

$$-k^2 \Phi_k - 3H(H\phi_K + \phi'_K) = 4\pi G a^2 \delta\rho, \quad (5.84)$$

$$\Phi_k'' + 3H\Phi_k' + (2H' + H^2)\Phi_k = 4\pi G a^2 (c_s^2 \delta\rho + \tau \delta S), \quad (5.85)$$

en donde se ha reemplazado δp segun (5.73). Combinando estas dos ecuaciones (dado que el primer término de la parte derecha de la ecuación (5.85) corresponde a la totalidad de la parte izquierda de la ecuación (5.84) multiplicada por un factor de c_s^2) se consigue que

$$\Phi_k'' + 3H\Phi_k' + (2H' + H^2)\Phi_k - c_s^2[-k^2\Phi_k - 3H(H\phi_K + \phi_K')] = 4\pi Ga^2\tau\delta S. \quad (5.86)$$

Reagrupando términos segun el orden de la derivación se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden en el espacio de momentum y con fuente la perturbación de la entropía δS

$$\Phi_k'' + 3H(1 + c_s^2)\Phi_k' + [c_s^2k^2 + 2H' + (1 + 3c_s^2)H^2]\Phi_k = 4\pi Ga^2\tau\delta S. \quad (5.87)$$

Esta ecuación se puede simplificar si se introduce los campos θ^2 y u_k definidos de la forma

$$\theta^2 \equiv \frac{8\pi M_p^{-2}}{3a^2(1+w)}, \quad (5.88)$$

$$u \equiv \frac{1}{4\pi G} \exp\left(\frac{3}{2} \int (1 + c_s^2) H d\eta\right). \quad (5.89)$$

Este último campo elimina el término de ϕ' y ademas puede ser reducido a una expresión más simple si se considera la definición de la velocidad adiabática de sonido dada en la ecuación (5.75) y H en términos de ρ y p mediante la ecuación de continuidad $H = \frac{-\rho'}{3(\rho+p)}$. Así

$$u_k = \frac{1}{4\pi G} \exp\left(-\frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{p'}{\rho'}\right) \frac{\rho'}{(\rho+p)} d\eta\right) \phi_k = \frac{\phi_k}{4\pi G(\rho+p)^{1/2}}. \quad (5.90)$$

A través de algunos cálculos extensos la ecuación (5.87) se reduce a una ecuación de tipo oscilador armónico con modos de entropía N como fuente

$$u_k'' + \left(k^2 c_s^2 - \frac{\theta''}{\theta}\right) u_k = N, \quad (5.91)$$

en donde $N = \rho^{1/2}\tau\delta S\sqrt{1+w}$.

5.2.2. Fluctuaciones en la entropía

La perturbación en la curvatura ζ juega un papel importante en la cosmología moderna. Ésta caracteriza la perturbación en la densidad a gran escala en nuestro Universo, en el cual las pequeñas perturbaciones evolucionan fuera del horizonte⁸ para formar estructuras a gran escala a través de inestabilidad gravitacional.

⁸Se estudia su evolución fuera del horizonte para comparar con la observación.

ζ fué inicialmente introducido por Bardeen en la referencia [21] como una variable invariante de gauge, la cual permanece constante para perturbaciones puramente adiabáticas⁹ sobre grandes escalas.

En esta sección se considera la perturbación en la entropía, la cual controla la evolución de ζ en un Gauge uniforme [22], para un Universo constituido completamente de múltiples fluidos interactuantes, considerando ambas componentes para la perturbación en la presión; denotadas como perturbaciones adiabáticas y de entropía.

La perturbación en la densidad $\delta\rho$ y la perturbación en la curvatura ψ son variables dependientes de Gauge, específicamente dependen del slicing que se escoja. Introduciendo el formalismo de Gauge se definen cada una de estas variables como la perturbación en la densidad sobre un slicing de curvatura constante y la correspondiente perturbación en la curvatura sobre un slicing de densidad uniforme respectivamente. De tal manera que ζ corresponde a la perturbación en la curvatura sobre una hipersuperficie espacial de densidad total uniforme, y puede ser escrita como [23]

$$\zeta = -H\xi, \quad (5.92)$$

en donde ξ corresponde al desplazamiento entre la hipersuperficie de densidad uniforme ($\delta\rho = 0$) y la hipersuperficie de curvatura constante ($\phi = 0$) e implica una definición invariante de Gauge

$$\xi \equiv \frac{\psi}{H} + \frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}. \quad (5.93)$$

Por consiguiente la cantidad ζ es un invariante de Gauge y queda en términos de la perturbación inicial ψ :

$$\zeta = \psi + H \frac{\delta\rho}{\dot{\rho}}. \quad (5.94)$$

Así mismo, la perturbación en la curvatura sobre una hipersuperficie espacial de densidad uniforme asociada a cada α -fluido se define de la forma

$$\zeta_\alpha = \psi + H \frac{\delta\rho_\alpha}{\dot{\rho}_\alpha}. \quad (5.95)$$

La perturbación en la curvatura total puede escribirse como

$$\zeta = -\psi - H \frac{\sum_\alpha \delta\rho_\alpha}{\dot{\rho}} = -\psi - \frac{1}{\dot{\rho}} \sum_\alpha H \delta\rho_\alpha, \quad (5.96)$$

⁹Con perturbaciones puramente adiabáticas se refiere a que no existe perturbación en la entropía ($\delta S = 0$) para la perturbación en la presión dada en la ecuación (5.73).

en donde la perturbación total de la densidad se relaciona con la perturbación de la densidad de cada α -fluido mediante

$$\delta\rho = \sum_{\alpha} \delta\rho_{\alpha}. \quad (5.97)$$

Al reemplazar el término $\sum_{\alpha} H\delta\rho_{\alpha}$ de la ecuación (5.96) por la ecuación (5.95) se encuentra que

$$\zeta = -\psi - \frac{1}{\dot{\rho}} \sum_{\alpha} (-\psi - \zeta_{\alpha}) \dot{\rho}_{\alpha} = -\psi + \frac{1}{\dot{\rho}} \psi \dot{\rho} + \frac{1}{\dot{\rho}} \sum_{\alpha} \zeta_{\alpha} \dot{\rho}, \quad (5.98)$$

entonces ζ se puede escribir con una suma de las perturbaciones individuales de cada fluido multiplicada por un factor de peso

$$\zeta = \sum_{\alpha} \frac{\dot{\rho}_{\alpha}}{\dot{\rho}} \zeta_{\alpha}. \quad (5.99)$$

Es conveniente descomponer la perturbación en la presión en sus componentes adiabática y de entropía, para identificar su contribución no adiabática y por consiguiente determinar la perturbación de la entropía. Esta componente de interés se define segun la ecuación (5.73) como [22]

$$\delta p_{nad} \equiv \tau \delta S = \delta p - c_s^2 \delta \rho, \quad (5.100)$$

y de aquí que la perturbación en la entropía δS pueda definirse como un invariante de Gauge

$$\delta S \equiv \frac{\delta p}{\dot{p}} - \frac{\delta \rho}{\dot{\rho}}, \quad (5.101)$$

y representa el desplazamiento entre hipersuperficies de presión y densidad uniforme.

En presencia de más de dos fluidos existen dos fuentes que originan la perturbación en la presión no adiabática, tal que puede ser descompuesta en dos partes

$$\delta p_{nad} \equiv \delta p_{nad}^{int} + \delta p_{nad}^{rel}. \quad (5.102)$$

Este primer término se debe a la perturbación en la entropía intrínica de cada fluido

$$\delta p_{nad}^{int} = \sum_{\alpha} \delta p_{nad,\alpha}^{int}, \quad (5.103)$$

en donde la perturbación en la presión no adiabática intrínica de cada fluido es dada por

$$\delta p_{nad,\alpha}^{int} = \delta p_{\alpha} - c_{\alpha}^2 \delta \rho_{\alpha}, \quad (5.104)$$

con velocidad adiabática de sonido para cada fluido $c_{\alpha}^2 = \frac{\dot{p}_{\alpha}}{\dot{\rho}_{\alpha}}$; y velocidad adiabática de sonido total

$$C_s^2 = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} = \frac{\sum_{\alpha} \dot{p}_{\alpha}}{\dot{\rho}} = \frac{\sum_{\alpha} \dot{\rho}_{\alpha} c_{\alpha}^2}{\dot{\rho}}. \quad (5.105)$$

Entonces c_s^2 se escribe como la suma de las velocidades adiabática de sonido de los fluidos individuales multiplicada por un factor de peso

$$C_s^2 = \sum_{\alpha} \frac{\dot{\rho}_{\alpha}}{\dot{\rho}} c_{\alpha}^2. \quad (5.106)$$

El segundo término es debido a la perturbación relativa de la entropía $S_{\alpha\beta}$ entre fluidos diferentes. Por lo tanto, de la ecuación (5.100) y considerando las ecuaciones (5.97) y (5.106) se expresa la perturbación de la presión no adiabática como

$$\delta p_{nad}^{rel} = \sum_{\alpha} \delta p_{\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{\dot{\rho}_{\alpha}}{\dot{\rho}} c_{\alpha}^2 \sum_{\beta} \delta \rho_{\beta} = \sum_{\alpha} \delta \rho_{\alpha} c_{\alpha}^2 - \sum_{\alpha} \frac{\dot{\rho}_{\alpha}}{\dot{\rho}} c_{\alpha}^2 \sum_{\beta} \delta \rho_{\beta}, \quad (5.107)$$

en donde se ha considerado que $C_{\alpha}^2 = \frac{\delta p_{\alpha}}{\delta \rho_{\alpha}}$. Ahora, descomponiendo cada término en dos partes con sus respectivos índices mudos α y β :

$$\delta p_{nad}^{rel} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \delta \rho_{\alpha} c_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\beta} \delta \rho_{\beta} c_{\beta}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{\dot{\rho}_{\alpha}}{\dot{\rho}} c_{\alpha}^2 \sum_{\beta} \delta \rho_{\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\beta} \frac{\dot{\rho}_{\beta}}{\dot{\rho}} c_{\beta}^2 \sum_{\alpha} \delta \rho_{\alpha}, \quad (5.108)$$

multiplicando y dividiendo el primer y cuarto término por $\dot{\rho}_{\alpha}$ y segundo y tercer término por $\dot{\rho}_{\beta}$ y si además se considera la relación (5.97) la ecuación se convierte en

$$\delta p_{nad}^{rel} = \frac{1}{2\dot{\rho}} \sum_{\alpha,\beta} \dot{\rho}_{\beta} \delta \rho_{\alpha} c_{\alpha}^2 \frac{\dot{\rho}_{\alpha}}{\dot{\rho}_{\alpha}} + \frac{1}{2\dot{\rho}} \sum_{\alpha,\beta} \dot{\rho}_{\alpha} \delta \rho_{\beta} c_{\beta}^2 \frac{\dot{\rho}_{\beta}}{\dot{\rho}_{\beta}} - \frac{1}{2\dot{\rho}} \sum_{\alpha,\beta} \dot{\rho}_{\alpha} c_{\alpha}^2 \delta \rho_{\beta} \frac{\dot{\rho}_{\beta}}{\dot{\rho}_{\beta}} - \frac{1}{2\dot{\rho}} \sum_{\alpha,\beta} \dot{\rho}_{\beta} c_{\beta}^2 \delta \rho_{\alpha} \frac{\dot{\rho}_{\alpha}}{\dot{\rho}_{\alpha}}. \quad (5.109)$$

Agrupando los términos que contienen la misma velocidad adiabática y factorizando $\dot{\rho}_{\alpha}\dot{\rho}_{\beta}$ se prosigue a encontrar que

$$\delta p_{nad}^{rel} = \frac{1}{2\dot{\rho}} \sum_{\alpha,\beta} \dot{\rho}_{\alpha}\dot{\rho}_{\beta} \left[c_{\alpha}^2 \left(\frac{\delta \rho_{\alpha}}{\dot{\rho}_{\alpha}} - \frac{\delta \rho_{\beta}}{\dot{\rho}_{\beta}} \right) - c_{\beta}^2 \left(\frac{\delta \rho_{\alpha}}{\dot{\rho}_{\alpha}} - \frac{\delta \rho_{\beta}}{\dot{\rho}_{\beta}} \right) \right], \quad (5.110)$$

en donde se ha hecho uso de la propiedad de linealidad de la sumatoria. Factorizando los términos entre paréntesis y multiplicando y dividiendo por $-3H$ se consigue expresar la perturbación de la presión no adiabática en términos de la perturbación relativa de la entropía $S_{\alpha\beta}$

$$\delta p_{nad}^{rel} = -\frac{1}{6H\dot{\rho}} \sum_{\alpha,\beta} \dot{\rho}_{\alpha}\dot{\rho}_{\beta} (c_{\alpha}^2 - c_{\beta}^2) \left[-3H \left(\frac{\delta \rho_{\alpha}}{\dot{\rho}_{\alpha}} - \frac{\delta \rho_{\beta}}{\dot{\rho}_{\beta}} \right) \right], \quad (5.111)$$

$$\delta p_{nad}^{rel} = -\frac{1}{6H\dot{\rho}} \sum_{\alpha,\beta} \dot{\rho}_{\alpha}\dot{\rho}_{\beta} (c_{\alpha}^2 - c_{\beta}^2) S_{\alpha\beta}. \quad (5.112)$$

Esta perturbación relativa de la entropía describe la diferencia entre dos perturbaciones en la curvatura correspondiente a cada fluido

$$S_{\alpha\beta} = 3(\zeta_\alpha - \zeta_\beta), \quad (5.113)$$

e introduciendo la definición para la perturbación en la curvatura de cada α -fluido dicha perturbación relativa toma la forma

$$S_{\alpha\beta} = -3H \left(\frac{\delta\rho_\alpha}{\dot{\rho}_\alpha} - \frac{\delta\rho_\beta}{\dot{\rho}_\beta} \right), \quad (5.114)$$

la cual es consistente con (5.112). Si el fluido tiene una ecuación de estado bien definida, es decir si $p_\alpha = p_\alpha(\rho)$, entonces la perturbación en la presión no adiabática intrínseca desaparece $\delta p_{nad}^{int} = 0$. Esto se cumple para nuestro caso, en donde $\delta p_\Lambda = -\delta\rho_\Lambda$ y $\delta p_r = \frac{1}{3}\delta\rho_r$, y la ecuación (5.104) se anula para cada componente del fluido. De esta manera se determina que la única contribución para la perturbación en la presión no adiabática en este modelo en particular se debe a la perturbación no adiabática relativa¹⁰

$$\delta p_{nad}^{rel} = -\frac{1}{6H\dot{\rho}} [\dot{\rho}_\Lambda \dot{\rho}_r (c_\Lambda^2 - c_r^2) S_{\Lambda r} + \dot{\rho}_r \dot{\rho}_\Lambda (c_r^2 - c_\Lambda^2) S_{r\Lambda}], \quad (5.115)$$

$$\delta p_{nad}^{rel} = -\frac{1}{3H\dot{\rho}} \dot{\rho}_\Lambda \dot{\rho}_r (c_\Lambda^2 - c_r^2) S_{\Lambda r}, \quad (5.116)$$

en donde se ha hecho uso de que $S_{r\Lambda} = -S_{\Lambda r}$. Directamente de (5.114)

$$S_{\Lambda r} = -3H \left(\frac{\delta\rho_\Lambda}{\dot{\rho}_\Lambda} - \frac{\delta\rho_r}{\dot{\rho}_r} \right). \quad (5.117)$$

Cuando cada fluido es perturbado de manera diferente cada uno produce una perturbación en la curvatura diferente y esto se traduce a una perturbación relativa en la entropía. En el caso de que el factor de acoplamiento $\Gamma = 0$ la fluctuación se propaga como radiación pura, es decir, $c_s^2 = \frac{1}{3}$ de la ecuación (5.77). Cuando existe acoplamiento entre los fluidos, las fluctuaciones se propagan a la misma velocidad a través de los términos $\pm\Gamma\rho_\Lambda$ en las ecuaciones de continuidad para cada fluido respectivo (4.21) y (4.22). Por lo tanto, se tiene que $S_{\Lambda r} = 0$.

Por otra parte, se conoce que la variación total de ζ está determinada a grandes escalas por [22]

$$\dot{\zeta} = \frac{-H}{\rho + p} \delta p_{nad}, \quad (5.118)$$

el cual implica que ζ es constante dado que no existe contribución no adiabática en la perturbación en la presión $\delta p_{nad} = 0$.

¹⁰Los índices α y β corren de 1 hasta 2 en la expresión (5.112).

CAPITULO 6

Conclusiones

En este trabajo de grado se construyó la dinámica de un modelo cosmológico para la evolución de nuestro Universo primitivo, y se verificó que este modelo puede generar un período de expansión acelerada cuando se considera transferencia de energía de vacío a radiación. Dicha expansión, se ve reflejada en la solución analítica del factor de escala $a(t)$. Adicionalmente, se determinó que nuestro modelo puede generar una cantidad de e-folds necesaria para resolver los problemas clásicos de la cosmología estándar con $N \geq 62$. De igual forma, se encontró que nuestro modelo puede proporcionar una temperatura al final de inflación con $T_r \sim 10^{15}$ GeV cuando la energía de vacío es convertida en radiación (reca-lentamiento) a través del decaimiento. Esta temperatura es consistente con nucleosíntesis, en donde la temperatura es de $T_N \sim 1\text{MeV}$, es decir, que inflación debe ocurrir mucho antes que este período para que no interfiera con la producción de elementos ligeros, lo cual es una de las bases observacionales del modelo estándar del Big Bang caliente. De esta manera los valores encontrados anteriormente para cada una de las cantidades de nuestro modelo, son consistentes con un período inflacionario primordial [2, 3, 4, 5].

Bajo las condiciones requeridas en los cálculos previos, se determinaron los valores de los parámetros correspondientes para este modelo:

Razón de decaimiento $\Gamma \leq 3,7 \times 10^{17}$ GeV,

Escala de Hubble al inicio de inflación $H_b \simeq 1,12 \times 10^{19}$ GeV,

Escala de Hubble al final de inflación $H_e \simeq 6,1 \times 10^{16}$ GeV,

Densidad de energía de vacío al inicio de inflación $\rho_{\Lambda 0}^{1/4} \simeq 0,58 \times 10^{19}$ GeV.

Haciendo uso de la teoría de perturbaciones cosmológicas se encontró que este modelo puede proporcionar fluctuaciones adiabáticas en la densidad y adicionalmente se obtiene que la perturbación en la curvatura ζ a grandes escalas permanece constante.

De esta manera, se determinó la viabilidad de un mecanismo alternativo de expansión

acelerada para el Universo primitivo sin recurrir a campos escalares fundamentales (tales como el inflatón) como un elemento indispensable en la teoría inflacionaria.

Apéndice A

Notación y definiciones

A.1. Notación

Se toma la signatura (+,-,-) con el fin de definir positivamente la densidad de energía.

Índices de los tensores:

Los índices griegos $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots$, corren de 0 a 3, mientras que los índices latinos como a, b, \dots, i, j, \dots , corren de 1 a 3 haciendo referencia sólo a dimensiones espaciales.

Valores de algunas constantes en cosmología:

Masa de Planck $M_p = 1,22 \times 10^{19}$ Gev.

Densidad crítica $\rho_c = 1,88h^2 \times 10^{-29} g.cm^{-3}$.

El tiempo de Hubble actual $H_0^{-1} = 9,78h^{-1}$ Gyr.

La distancia de Hubbel actual $cH_0^{-1} = 2998h^{-1}$ Mev.

Tiempo de Planck $t_{Pl} = 10^{-43}$ s.

A lo largo de este trabajo de grado se usa las unidades $c = \hbar = K_B = 1$.

A.2. Definiciones

La derivada parcial se denota por

$$X_{,i} \equiv \frac{\partial X}{\partial x^i}. \quad (\text{A.1})$$

La derivada covariante con respecto al tensor métrico $g_{\mu\nu}$ se denota por

$$;_{\mu} \equiv \nabla_{\mu}. \quad (\text{A.2})$$

Las derivadas covariante para cantidades escalares, vectores covariante y tensores $t_{\mu\nu}$ están dadas por

$$\varphi_{;\mu} = \varphi_{,\mu}, \quad (\text{A.3})$$

$$V_{\mu;\nu} = V_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} V_{\alpha}, \quad (\text{A.4})$$

$$t_{\mu\nu;\lambda} = t_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} t_{\alpha\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\beta} t_{\beta\mu}, \quad (\text{A.5})$$

en donde $\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$ son los coeficientes de conexión o símbolos de Christoffel denidos como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} [g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}]. \quad (\text{A.6})$$

Adicionalmente, cumplen la propiedad de simetría con respecto a los índices covariantes

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \Gamma_{\nu\mu}^{\beta}. \quad (\text{A.7})$$

El tensor de Riemann es definido como

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \Gamma_{\beta\nu,\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\mu,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\mu}^{\lambda}. \quad (\text{A.8})$$

El tensor de Ricci es una contracción del tensor de Riemann y está dado por

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}, \quad (\text{A.9})$$

y el escalar de Ricci está dado por la contracción del tensor de Ricci

$$R = R^{\mu}_{\mu}. \quad (\text{A.10})$$

El tensor de Einstein es definido como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (\text{A.11})$$

Simetrización y antisimetrización son definidas respectivamente como

$$V_{(i,j)} \equiv \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}), V_{[i,j]} \equiv \frac{1}{2}(V_{i,j} - V_{j,i}). \quad (\text{A.12})$$

Apéndice B

Símbolos de Christofel para la métrica de FRW

El tensor métrico para el elemento de línea definido en la ecuación (4.6) es de la forma

$$g^{\mu\nu} = a^2(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

y los coeficientes de conexión para la métrica asociada son

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2, \Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{B.1})$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{\dot{a}}{a}, \Gamma_{11}^1 = \frac{kr}{1-kr^2}, \Gamma_{22}^1 = -r(1-kr^2), \Gamma_{33}^1 = -1(1-kr^2) \sin^2 \theta, \quad (\text{B.2})$$

$$\Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a}, \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \Gamma_{23}^3 = \cot \theta. \quad (\text{B.4})$$

$$(\text{B.5})$$

Apéndice C

Obtención de las ecuaciones de evolución para la métrica de fondo

Nuestro Universo homogéneo e isotrópico es gobernado por la ecuación de evolución

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3M_p^2}. \quad (\text{C.1})$$

A partir de su derivación con respecto al tiempo cósmico se tiene

$$6H\dot{H} = \frac{8\pi\dot{\rho}}{M_p^2}. \quad (\text{C.2})$$

Sustituyendo la ecuación de continuidad y la relación $H = \frac{\dot{a}}{a}$ para expresar su derivada se obtiene

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3M_p^2}(\rho + P) + H^2. \quad (\text{C.3})$$

Por ultimo, se sustituye H^2 de la ecuación de Friedmann y se obtiene una ecuación de evolución adicional

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3M_p^2}(\rho + 3P). \quad (\text{C.4})$$

Si derivamos nuevamente la ecuación de Friedman pero esta vez reemplazando sólo la ecuación de continuidad se encuentra una segunda ecuación de evolución

$$\dot{H} = -\frac{4\pi}{M_p^2}(\rho + P). \quad (\text{C.5})$$

De esta manera se obtienen ecuaciones de evolución “alternativas” a la ecuación de Friedmann para el factor de escala y para el parámetro de Hubble.

Apéndice D

Derivación de la ecuación de continuidad modificada

Se debe encontrar la nueva ecuación de continuidad para cada fluido considerando la transferencia de energía según (4.13) y (4.14). De (2.2) con $\mu = 0$ y aplicando la derivada covariante, se tiene para la energía de vacío que

$$T_{\Lambda;\nu}^{0\nu} = [(\rho_{\Lambda} + P_{\Lambda})u^{\mu}u^{\nu} - P_{\Lambda}g^{0\nu}]_{;\nu}, \quad (\text{D.1})$$

con

$$P_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}. \quad (\text{D.2})$$

Como $g_{\mu\nu}$ es diagonal se toma $\nu = 0$ y la derivada covariante se transforma en derivada temporal

$$\Rightarrow T_{\Lambda;0}^{00} = \dot{\rho}_{\Lambda} = Q_{\Lambda}, \quad (\text{D.3})$$

y para la radiación

$$T_{r;\nu}^{0\nu} = (\rho_r + P_r)u^{\mu}u^{\nu} - P_r g_{;\nu}^{0\nu}, \quad (\text{D.4})$$

con

$$P_r = \frac{\rho_r}{3}. \quad (\text{D.5})$$

$$\Rightarrow T_{r;\nu}^{0\nu} = \left(\frac{4}{3}\rho_r\right)_{;\nu}u^0u^{\nu} + \left(\frac{4}{3}\rho_r\right)[u^0(u^{\nu}_{;\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu}u^{\alpha}) + u^{\nu}(u^0_{;\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^0u^{\alpha})] - \frac{1}{3}(\rho_r g^{0\nu})_{;\nu}. \quad (\text{D.6})$$

Desglosando la ecuación se tiene

$$T_{r;\nu}^{0\nu} = \left(\frac{4}{3}\rho_r\right)_{;\nu}u^0u^{\nu} + \left(\frac{4}{3}\rho_r\right)u^0u^{\nu}_{;\nu} + \left(\frac{4}{3}\rho_r\right)u^0\Gamma_{\alpha\nu}^{\nu}u^{\alpha} + \left(\frac{4}{3}\rho_r\right)u^{\nu}u^0_{;\nu} + \left(\frac{4}{3}\rho_r\right)u^{\nu}\Gamma_{\alpha\nu}^0u^{\alpha}] - \frac{1}{3}(\rho_r g^{0\nu})_{;\nu}. \quad (\text{D.7})$$

Escogiendo el sistema de referencia comóvil, la cuadrivelocidad del fluido se define como $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$ y dado que los coeficientes de conexión (requeridos en el cálculo) para la

métrica de FRW son $\Gamma_{0\nu}^\nu = 3\frac{\dot{a}}{a} = 3H$ y $\Gamma_{0\nu}^0 = 0$ se concluye que: en el primero, segundo y quinto término $\nu = 0$, en el tercer término $\alpha = 0$ y en el cuarto término $\alpha = \nu = 0$, por consiguiente el segundo y cuarto término se anulan por que no existe variación temporal de la velocidad y el tercer término desaparece porque $\Gamma_{0\nu}^0 = 0$. De esta manera se obtiene la expresión

$$T_{r;\nu}^{0\nu} = \frac{4}{3}\dot{\rho}_r + \frac{4}{3}\rho_r\Gamma_{0\nu}^\nu - \frac{1}{3}\dot{\rho}_r, \quad (\text{D.8})$$

$$\Rightarrow T_{r;\nu}^{0\nu} = \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = Q_r. \quad (\text{D.9})$$

Apéndice E

Cálculo de las constantes en la solución de $a(t)$

Si se elige que al inicio de inflación ($t = t_0$) el valor del factor de escala sea $a(\tau_0) = 1$ y que el parámetro de Hubble para este mismo instante sea $H(\tau_0) = H_b$, se tiene que

$$1 = \frac{4}{\Gamma}(\alpha_1 I_0(\tau_0) + \alpha_2 K_0(\tau_0)), \quad (\text{E.1})$$

y

$$H_b = \frac{\Gamma \tau_0}{4} \left(\frac{\alpha_2 K_1(\tau_0) - \alpha_1 I_1(\tau_0)}{\alpha_2 K_0(\tau_0) + \alpha_1 I_0(\tau_0)} \right). \quad (\text{E.2})$$

De (E.1) se encuentra que α_1 en términos de α_2 corresponde a

$$\alpha_1 = \frac{1}{I_0(\tau_0)} \left(\frac{\Gamma}{4} - \alpha_2 K_0(\tau_0) \right). \quad (\text{E.3})$$

Por otra parte, factorizando α_1 y α_2 en la ecuación (E.2) se tiene

$$\alpha_1 \left(H_b I_0(\tau_0) + \frac{\Gamma}{4} \tau_0 I_1(\tau_0) \right) = \alpha_2 \left(\frac{\Gamma}{4} \tau_0 K_1(\tau_0) - H_b K_0(\tau_0) \right). \quad (\text{E.4})$$

Reemplazando el valor de α_1 en esta ecuación, se obtiene una expresión en términos únicamente de α_2

$$\left(\frac{\Gamma}{4} - \alpha_2 K_0(\tau_0) \right) H_b + \left(\frac{\Gamma}{4} - \alpha_2 K_0(\tau_0) \right) \frac{1}{I_0(\tau_0)} \left(\frac{\Gamma}{4} \tau_0 I_1(\tau_0) \right) = \alpha_2 \left(\frac{\Gamma}{4} \tau_0 K_1(\tau_0) - H_b K_0(\tau_0) \right). \quad (\text{E.5})$$

Reagrupando los términos que contienen α_2 y multiplicando en ambos lados de la igualdad por $\frac{4}{\Gamma}$ se consigue

$$H_b + \frac{\Gamma \tau_0 I_1(\tau_0)}{4 I_0(\tau_0)} = \alpha_2 \left(\tau_0 K_1(\tau_0) + \frac{K_0(\tau_0) \tau_0 I_1(\tau_0)}{I_0(\tau_0)} \right). \quad (\text{E.6})$$

Así, despejando α_2 se obtiene

$$\alpha_2 = \frac{I_0(\tau_0)H_b + \Gamma\tau_0 I_1(\tau_0)/4}{I_0(\tau_0)\tau_0 K_1(\tau_0) + K_0(\tau_0)\tau_0 I_1(\tau_0)}, \quad (\text{E.7})$$

con lo que, factorizando τ_0 en el denominador

$$\alpha_2 = \frac{I_0(\tau_0)H_b + \Gamma\tau_0 I_1(\tau_0)/4}{\tau_0(I_0(\tau_0)K_1(\tau_0) + K_0(\tau_0)I_1(\tau_0))}. \quad (\text{E.8})$$

El denominador corresponde a una identidad y es igual a uno, por lo tanto

$$\alpha_2 = \frac{\Gamma\tau_0}{4}I_1(\tau_0) + H_b I_0(\tau_0). \quad (\text{E.9})$$

Reemplazando este valor para α_2 en (E.4) se tiene

$$\alpha_1 \left(H_b I_0(\tau_0) + \frac{\Gamma}{4}\tau_0 I_1(\tau_0) \right) = \left(\frac{\Gamma\tau_0}{4}I_1(\tau_0) + H_b I_0(\tau_0) \right) \left(\frac{\Gamma}{4}\tau_0 K_1(\tau_0) - H_b K_0(\tau_0) \right), \quad (\text{E.10})$$

entonces

$$\alpha_1 = \frac{\Gamma}{4}\tau_0 K_1(\tau_0) - H_b K_0(\tau_0). \quad (\text{E.11})$$

Por otra parte, considerando la definición del parámetro τ según la sección (4.4) se encuentra que

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{128\pi\rho_{\Lambda 0}}{3M_p^2\Gamma^2}}. \quad (\text{E.12})$$

Introduciendo a través de la ecuación de Friedmann el término H_b en la ecuación (E.12) se encuentra que

$$\tau_0 = \frac{4H_b}{\Gamma}. \quad (\text{E.13})$$

Se puede reescribir las constantes α_1 y α_2 de tal forma que se pueda reducir la dependencia (de tres a dos parámetros). Esto es posible si se introduce la relación (E.13) en (E.9) y en (E.11), entonces

$$\alpha_1 = H_b \left[K_1 \left(\frac{4H_b}{\Gamma} \right) - K_0 \left(\frac{4H_b}{\Gamma} \right) \right], \quad (\text{E.14})$$

$$\alpha_2 = H_b \left[I_1 \left(\frac{4H_b}{\Gamma} \right) + I_0 \left(\frac{4H_b}{\Gamma} \right) \right]. \quad (\text{E.15})$$

REFERENCIAS

- [1] A. Guth, *Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon and Flatness Problems*, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981).
- [2] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, (2000).
- [3] S. Dodelson, *Modern Cosmology*, Academic Press, (2003).
- [4] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, (2008).
- [5] V. F. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, (2005).
- [6] E. Witten, *Cosmic Separation of Phases*, Phys. Rev. D **30**, 272 (1984).
- [7] G. Kane, *Modern Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley, (1993).
- [8] J. Polshinski, *String Theory*, Cambridge University Press, (1998).
- [9] A. Golovnev, V. Mukhanov and V. Vanchurin, *Vector Inflation*, JCAP **0806**, 009 (2008).
- [10] S. Watson, M. J. Perry, G. L. Kane and F. C. Adams, *Inflation Without Inflaton(s)*, JCAP **0711**, 017 (2007).
- [11] E. Komatsu, *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **180**, 330, (2009).
- [12] G. Hinshaw, *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Data Processing, Sky Maps, and Basic Results.*, Astrophys. J. Suppl. Ser. **180**, 225, (2009).
- [13] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman and R. H. Brandenberg, *Theory of Cosmological Perturbations. Part 1. Classical Perturbations. Part 2. Quantum Theory of Perturbations. Part 3. Extensions*, Phys. Rep. **215**, 203 (1992).

- [14] K. A. Malik and D. Wands, *Cosmological Perturbations*, Phys. Rep. **475**, (2009).
- [15] R. K. Sachs and A. M. Wolfe, *Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background*, Astrophys. J. **147**, 73 (1967).
- [16] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, And Mathematical Tables*, New York: Dover, 9th printing, (1972).
- [17] G. B. Arfken, H. J. Weber *Mathematical Methods for Physicists*, Sixth Edition, International Edition, (2005).
- [18] B. F. Schutz, *A First Course Of General Relativity*, Cambridge University Press, (1985).
- [19] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman company (1973).
- [20] R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, *in Gravitation: an introduction to current research*, Louis Witten ed. (Wiley 1962), Chapter 7, pp 227-265, arXiv:gr-qc/0405109.
- [21] J. M. Bardeen, Phys. Rev. D **22**, 1882 (1980).
- [22] K. A. Malik, D. Wands, and C. Ungarelli, *Large-scale curvature and entropy perturbations for multiple interacting fluids*, Phys. Rev. D **67**, 063516 (2003).
- [23] D. Wands, K. A. Malik, D. H. Lyth and A. R. Liddle, *A new approach to the evolution of cosmological perturbations on large scales*, Phys. Rev. D **62**, 043527 (2000).