

**DESARROLLO DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO:  
CONSTRUCCIÓN DE UNA COMUNIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA**

**OMAR GILBERTO GARCÍA MOGOTOCORO**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS  
ESCUELA DE EDUCACION  
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA  
BUCARAMANGA**

**2018**

**DESARROLLO DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO:  
CONSTRUCCIÓN DE UNA COMUNIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA**

**OMAR GILBERTO GARCÍA MOGOTOCORO**

**Trabajo de grado para optar el título de Magister en Pedagogía**

**DIRECTORA  
SOLANGE ROA FUENTES  
DOCTORA EN EDUCACIÓN**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS HUMANAS  
ESCUELA DE EDUCACION  
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA  
BUCARAMANGA**

**2018**

## CONTENIDO

	<b>Pág.</b>
INTRODUCCIÓN .....	12
1. JUSTIFICACIÓN .....	15
2. ANTECEDENTES .....	17
2.1 ESTÁNDARES Y PRINCIPIOS QUE GUÍAN LA ACTIVIDAD DOCENTE .....	18
2.2 EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO .....	22
2.3 COMUNIDAD MATEMÁTICA .....	27
3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS .....	30
3.1 OBJETIVOS .....	32
3.1.1 Objetivo general .....	32
3.1.2 Objetivos específicos .....	33
4. MARCO CONCEPTUAL .....	34
5. DISEÑO METODOLÓGICO .....	46
5.1 DISEÑO Y ANÁLISIS DE TAREAS .....	47
5.2 IMPLEMENTACIÓN DE TAREAS Y DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD .....	48
5.3 RECOLECCIÓN Y SELECCIÓN DE DATOS .....	51
5.4 INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS TEÓRICO .....	52
6. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN .....	53
6.1 DISEÑO Y ANÁLISIS DE TAREAS .....	53
6.1.1 Prueba diagnóstica .....	54
6.1.1.1 Análisis a priori de la prueba diagnóstica .....	54
6.1.1.2 Análisis a posteriori de la Prueba diagnóstica .....	59
6.1.2 Intervenciones .....	75
6.1.2.1 Intervención 1 .....	75
6.1.2.2 Intervención 2 .....	82
6.1.2.3 Intervención 3 .....	90

6.1.2.4 Intervención 4. ....	101
6.2 ANÁLISIS A POSTERIORI .....	113
6.2.1 La Abducción. ....	114
6.2.2 Inducción.....	122
6.2.3 Deducción.....	128
6.3 ANÁLISIS A PRIORI DE LAS ENTREVISTAS GRUPALES .....	137
6.4 ANÁLISIS A POSTERIORI DE LAS ENTREVISTAS GRUPALES .....	144
6.4.1 Abducción. ....	144
6.4.2 Inducción.....	147
6.4.3 Deducción.....	150
6.5 COMUNIDAD MATEMÁTICA .....	154
7. CONCLUSIONES .....	163
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	172
ANEXOS .....	175

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
Figura 1. Resultados pruebas saber 5° grado matemáticas año 2.016. Resolución de problemas. ....	19
Figura 2. Porcentaje alcanzado en aprendizajes en resolución de problemas grado 5° 2016. ....	20
Figura 3. Secuencia figural de cuadrados dispuestos en filas. . ....	24
Figura 4. Prueba de identificación de patrones en una secuencia geométrica. ....	27
Figura 5. Relaciones en el proceso de aprendizaje académico. ....	36
Figura 6. Interacciones entre los componentes de una Comunidad Matemática...38	38
Figura 7. Secuencia de patrones en forma de rana creciente. ....	43
Figura 8. Diferencias entre los tipos de razonamiento inferencial. ....	45
Figura 9. Estructura Metodológica de la Investigación.....	47
Figura 10. Implementación de Tareas y desarrollo de la Actividad: Construcción de una Comunidad Matemática. ....	50
Figura 11. Secuencia gráfica 3, intervención 3. ....	115
Figura 12. Secuencia numérica, intervención 3. ....	119
Figura 13. Secuencia gráfica, intervención número 4.....	121
Figura 14. Secuencia gráfica, intervención 3. ....	125
Figura 15. Secuencia gráfica, intervención 2. ....	132
Figura 16. Secuencia gráfica, intervención 3. ....	134
Figura 17. Secuencia gráfica, intervención 4. ....	136

## LISTA DE FOTOGRAFIAS

	<b>Pág.</b>
Fotografía 1. Trabajo individual primera sesión.....	157
Fotografía 2. Trabajo individual segunda sesión.....	157
Fotografía 3. Trabajo individual tercera sesión .....	158
Fotografía 4. Trabajo individual cuarta sesión .....	158
Fotografía 5. Orientaciones sobre el trabajo en equipo .....	159
Fotografía 6. Trabajo en equipo Grupo (DIE1, DIE2, DIE20) primera sesión .....	160
Fotografía 7. Trabajo en equipo Grupo (DIE7, DIE14, DIE27) segunda sesión...	160

## LISTA DE CUADROS

	<b>Pág.</b>
Cuadro 1. Tipos de razonamientos inferenciales y sus características. ....	42
Cuadro 2. Explicación de la formación de la secuencia gráfica .....	94
Cuadro 3. Tabla de estado inicial de los niveles de razonamiento .....	167

## RESUMEN

**TÍTULO:** DESARROLLO DE PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO: CONSTRUCCIÓN DE UNA COMUNIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA\*.

**AUTOR:** OMAR GILBERTO GARCÍA MOGOTOCORO\*\*

**PALABRAS CLAVE:** Pensamiento Algebraico Temprano, Comunidad Matemática, Generalización de patrones, Procesos de razonamiento inferencial, Tarea.

### **DESCRIPCIÓN:**

Una de las perspectivas teóricas que orientan esta investigación se soporta en trabajos realizados por diferentes autores que han tratado el desarrollo del álgebra en la educación básica a través del estudio de patrones, por medio de tareas de secuencias numéricas y con figuras y el proceso de generalización de patrones en estas secuencias.

La estrategia metodológica utilizada es la conformación de una Comunidad Matemática, que se constituye en un espacio en el cual los estudiantes y el docente interactúan para intercambiar ideas, razonar, analizar, argumentar y debatir posibles soluciones al desarrollo de Tareas propuestas por el docente investigador; todo dentro de un marco de ética comunal que le permite a los actores de esta comunidad brindar lo mejor de sí, y transformar el papel del docente y de los estudiantes para construir conocimiento de manera colaborativa.

El enfoque utilizado en esta investigación es de la investigación acción, y entre las técnicas e instrumentos utilizados están los cuestionarios, la entrevista semiestructurada y el diario de campo. (Vergel, 2016). La población que participó de esta investigación la conforman jóvenes de 10 a 12 años, del grado sexto de una institución pública.

Uno de los resultados más importantes de esta investigación es el progreso alcanzado en cada una de las formas de razonamiento inferencial (abductivo, inductivo y deductivo) por parte de algunos de los estudiantes de grado sexto de esta institución. Se pudo observar que algunos de los estudiantes obtuvieron niveles que durante la prueba diagnóstica no lograban alcanzar. Durante la presentación de esta investigación se mostrará con mayor profundidad los logros alcanzados en el aula.

---

\* Trabajo de Grado

\*\* Facultad de Ciencias Humanas. Maestría en Pedagogía. Directora Solange Roa Fuentes

## ABSTRACT

**TÍTULO:** EARLY ALGEBRA DEVELOPING: CONFORMING A MATHEMATICS COMMUNITY IN THE CLASSROOM\*.

**AUTHOR:** OMAR GILBERTO GARCÍA MOGOTOCORO\*\*

**KEYWORDS:** Early Algebra, Mathematics Community, Pattern Generalization Process, Inferential Reasoning Process, Task.

### DESCRIPTION:

One of the theoretic perspectives that leads this researching is supported by works of different authors who have focused on early algebra developing in basics education through of pattern studies, by mean of figures and numeric sequences study and the pattern generalization process.

The methodologic strategy used is the Mathematics Community Developing, which has been seen saw like an space which the students and the teacher interact to share ideas, to reason, to analyze, to argue and to debate possible solutions to solve proposed Tasks by the researcher teacher; all is made up in a communal ethics, which lets to the actors of this community give all the best of them, to transform the teacher and the student paper to build knowledge such a collaborative way.

The approach used in this researching is action investigation, and between the technics and instruments used are: questionnaires, the semi-structured interview and the field diary. The people who participated in this researching is made up by young people between 10 and 12 years old, of sixth degree of a public Educational Institution.

One of the most important results of this researching is the achieved progress in everyone of the inferential reasoning ways (Abductive, Inductive and Deductive) developed by students of sixth degree of this public institution. Has been seen that some of the students who took diagnostics test achieved high levels that never achieved ever. During the presentation of this researching, it will show the achieves in the classroom.

---

\* Degree work

\*\* Faculty of Human Sciences. Master's Degree in Pedagogy. Director Solange Roa Fuentes

## INTRODUCCIÓN

La importancia del aprendizaje de las matemáticas en los últimos años y su aplicación en cada uno de los aspectos de la vida cotidiana ya no se pone en tela de juicio, dado que los tiempos actuales, tan cambiantes, exigen a las personas mejores habilidades matemáticas de lo que le exigían años atrás. En cualquier campo que se desempeñe un individuo, se le exige unos conocimientos básicos en matemáticas, lógica y razonamiento; y si se habla del campo científico y tecnológico, con mayor razón las capacidades en el dominio de las matemáticas es aún más exigente.

Un aspecto fundamental en el aprendizaje de las matemáticas se relaciona con la necesidad de que los estudiantes puedan utilizar eficientemente el conocimiento aprendido en un contexto o una situación para resolver problemas en la solución de otras tareas diferentes o novedosas<sup>1</sup>.

En este sentido se ha podido apreciar algunas deficiencias de los estudiantes cuando tienen que contextualizar las ideas matemáticas en un problema particular o en una situación nueva.

Una idea fundamental es considerar la resolución de problemas como una forma de pensar donde el estudiante continuamente tiene que desarrollar diversas habilidades y utilizar diferentes estrategias en su aprendizaje de las matemáticas. Es decir, los estudiantes tienen que problematizar el estudio de la disciplina. En esta perspectiva, es esencial que los estudiantes formulen preguntas al intentar resolver problemas o comprender ideas matemáticas<sup>2</sup>

Al intentar resolver problemas, los estudiantes tienen que echar mano de los mejores recursos, presaberes y conceptos previos, con el fin de hallar la solución, así mismo tienen que utilizar diversas estrategias y hacerse preguntas para llegar a

---

<sup>1</sup> SANTOS Trigo, Luz Manuel. La resolución de problemas matemáticos. México: Editorial Trillas. 2007. p. 10. Versión Digital.

<sup>2</sup> Ibid., p.11.

una solución más óptima del problema en estudio. “La propuesta de aprender matemáticas que identifica la resolución de problemas como importante, reconoce a las mismas como un cuerpo de conocimientos no terminado”<sup>3</sup>.

Esto implica que el estudiante puede utilizar diversas estrategias, y diferentes formas para llegar a la solución de un problema, lo cual le permite utilizar recursos para alcanzar dicha solución y construir su propio conocimiento matemático. El estudiante, en el aprendizaje de esta materia, discute estrategias, emplea ejemplos para validar su conjetura, y contraejemplos para refutarla, critica y valora los resultados, y comparte que la búsqueda de argumentos sólidos es esencial en la resolución de problemas<sup>4</sup>.

Esta propuesta se realiza desde el enfoque cualitativo, está dirigida a un grupo de estudiantes con edades comprendidas entre los 10 y 12 años de una institución educativa pública de la ciudad de Bucaramanga.

En esta propuesta se pretende que el estudiante se apropie de su papel como miembro de una Comunidad Matemática, realice las tareas y participe en el desarrollo de la actividad, para que pueda mejorar sus capacidades de razonamiento, comunicación, argumentación, y logre percibir y predecir los patrones de una secuencia numérica o figural. Esto le permitirá establecer buenas bases en su futuro abordaje del álgebra formal, lo cual le ayudará a ser más autosuficiente intelectualmente para este estudio y a prepararse mejor en las pruebas que enfrentará más adelante, como son: la universidad y la inserción en el campo laboral con las responsabilidades que esto conlleva.

Este documento está organizado en cinco capítulos. En el capítulo uno se encuentran los antecedentes de la investigación, es decir, algunos elementos que

---

<sup>3</sup> Ibid., p. 27

<sup>4</sup> Ibid., p. 27.

orientan esta propuesta. Entre ellas están, los estándares del MEN que guían la actividad docente de Colombia, los estándares traducidos por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática del documento del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos. En este capítulo además se aborda el concepto de pensamiento algebraico temprano, como uno de los elementos principales de la investigación, planteado por algunos autores. Y para terminar se trata otro concepto importante, el de Comunidad Matemática, una síntesis desde el punto de vista de Luz Manuel Santos Trigo, para abordar el tema de la resolución de problemas como una estrategia para la construcción de una comunidad matemática en el aula.

El capítulo dos aborda el planteamiento del problema, y los objetivos de la propuesta. El capítulo tres trata sobre el marco teórico. Aquí se especifican todos los referentes teóricos que fundamentan la propuesta, así como la teoría que hace de base de la misma. En el capítulo cuatro se explica el diseño metodológico de la propuesta, es decir aquellas etapas que se deben realizar cuando se desarrolle la intervención de la propuesta en el aula. Dentro de estas actividades están: el diseño y análisis de tareas, la implementación de tareas y el desarrollo de la actividad, la recolección y selección de los datos, la interpretación y el análisis de los datos, todo esto enmarcado en un proceso de retroalimentación para su mejoramiento.

El capítulo cinco trata acerca del alcance de la investigación, con los principales aspectos que se espera lograr con el desarrollo de la propuesta.

El capítulo seis se enfoca en las conclusiones, los hallazgos y el cumplimiento de los objetivos propuestos en la investigación.

## 1. JUSTIFICACIÓN

Las políticas educativas en diferentes documentos, Estándares y Lineamientos Curriculares (Ministerio de Educación Nacional, 1998; 2006), señalan la importancia del desarrollo del pensamiento matemático (pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento variacional y pensamiento aleatorio) dentro de la actividad matemática.

En particular, para el desarrollo del pensamiento variacional sugieren el estudio de patrones desde los primeros niveles educativos, según Vergel y Rojas (2013), "...el documento de Estándares se reafirma esta noción de pensamiento variacional como eje fundamental para dar estructura y sentido al aprendizaje del pensamiento algebraico en la escuela, y se muestra cómo el desarrollo del pensamiento variacional se puede potenciar desde los primeros años de la educación básica, centrado en lo que podríamos llamar el estudio de las regularidades y patrones. Podríamos afirmar, por ahora, el pensamiento variacional se entiende como una forma específica de pensar matemáticamente, orientada a la construcción de estructuras conceptuales que fundamentan el estudio de la variación y el cambio. Por su parte, el pensamiento algebraico refiere al conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional" (p.776).

Del mismo modo, esta propuesta curricular sugiere, como dice Radford (2010), dejar de ver el pensamiento algebraico como una simple materia en el currículo, para plantear diferentes formas de potenciar modos de razonamiento algebraico.

Sin embargo, los cursos de álgebra solo inician en la escuela secundaria y son enfocados generalmente al manejo de símbolos alfanuméricos. En este mismo

sentido, Kaput (2000) considera el razonamiento algebraico como una estructura compleja, compuesta por cinco tipos de razonamiento interrelacionados, que se puede desarrollar desde temprana edad. Los cinco tipos de razonamiento abarcan el estudio de generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el estudio de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y modelado y modelización de fenómenos. Desde esta perspectiva, Kaput (2000) expresa la necesidad de integrar el álgebra en todos los niveles de escolaridad, especialmente en la escuela elemental donde ha estado ausente.

En palabras de Kaput (2000) se trata de una “algebrización del currículo”, esto es, la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares para empezar a hacer accesible el álgebra a la mayoría de profesores y estudiantes.

Para esto, Kaput indica que el profesor debe identificar y nutrir estas raíces del razonamiento algebraico que inicialmente podrían estar expresadas en lenguaje natural, gestos, ritmo en lugar de símbolos alfanuméricos.

Por tanto resulta de interés analizar en un contexto particular cuáles son las directrices que guían el desarrollo del pensamiento algebraico temprano, en un contexto donde la solución de situaciones problema es la principal actividad dentro el aula. Como se estudia con más detalle en la siguiente sección, los resultados presentados en pruebas estandarizadas nacionales muestran el poco o nulo desarrollo de pensamiento algebraico siendo este transversal a todo el desarrollo curricular en matemáticas.

## 2. ANTECEDENTES

El desarrollo del pensamiento algebraico temprano, y la construcción de una Comunidad Matemática son dos temas muy importantes que se han venido estudiando, para guiar a los docentes en potenciar el pensamiento algebraico en los niños desde tempranas edades. Con el fin de que sean los orientadores de una juventud mejor preparada, para enfrentar los retos actuales de la educación, y que puedan ubicarse exitosamente en el mundo global en el que nos encontramos actualmente.

Hoy se exige a los jóvenes mejor preparación en matemáticas, en los procesos de razonamiento, la comunicación, la lógica, el análisis y de resolución de problemas, para acceder al estudio universitario formal, y también a un ambiente laboral. Actualmente demanda en los ciudadanos de ciertas capacidades, destreza y habilidades en el ámbito matemático, además de otras disciplinas, para enfrentar un mundo globalizado. En este orden de ideas, para la presentación de esta propuesta se inicia tratando los Estándares para Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, que guían la actividad docente; luego se analizan los estándares de Estados Unidos, también se aborda el pensamiento algebraico temprano, y cómo a través del estudio de generalización de patrones los estudiantes logran desarrollar el proceso de generalización. Finalmente se aborda el tema de la comunidad matemática, como una estrategia para mejorar las capacidades de razonamiento, argumentación, y las estrategias de solución a los problemas planteados en un salón de clases.

## 2.1 ESTÁNDARES Y PRINCIPIOS QUE GUÍAN LA ACTIVIDAD DOCENTE

Los estándares de la educación matemática del MEN (Ministerio de Educación Nacional) sugieren:

Por lo tanto, es necesario que en los procesos de enseñanza de las matemáticas se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento, para ejercer la iniciativa y la crítica y para aplicar ese conocimiento en diversas situaciones y contextos.

Para lograrlo hay que hacer énfasis en los actos comunicativos, de tal suerte que se le permita al grupo deliberar sobre las razones o la falta de ellas, sobre las conjeturas, opiniones o juicios y sobre las ventajas o desventajas de las posibles decisiones que deban tomarse dentro y fuera de la clase y que tengan resonancia colectiva<sup>5</sup>.

Por tanto es fundamental establecer comunidades matemáticas dentro del aula, que propicien la comunicación, la argumentación y el debate de los integrantes de la misma, a partir de la formulación y el planteamiento de una situación problémica; esto requiere lo mejor de los estudiantes para echar mano de todos los recursos con los que cuenta para buscar una solución al problema, y para saber comunicar dicha solución ante un grupo.

En Colombia cada año se realizan las pruebas SABER. Estas consisten en una secuencia de pruebas estandarizadas por grado, que buscan medir el nivel de conocimientos en diferentes disciplinas como: matemáticas, lenguaje, sociales, entre otras. Dentro de cada una de estas áreas, existen subtemas, que intentan demostrar hasta qué punto, los estudiantes de un determinado grado alcanzaron las competencias propuestas en la prueba.

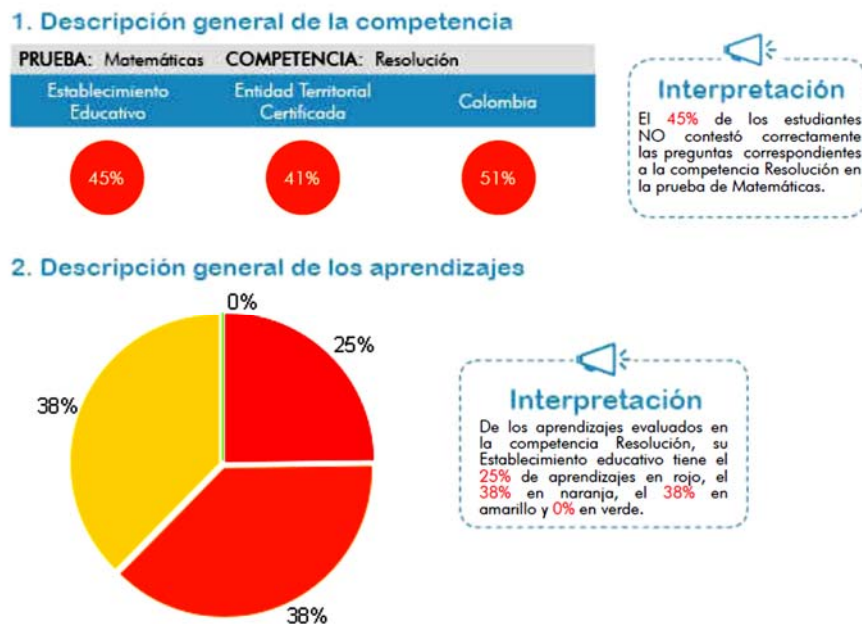
Para el caso de la institución educativa que interesa, se pudo extraer del archivo resumen **ISCE** del año 2016 algunos de estos resultados en el área de matemáticas, para el grado quinto. De este archivo se pudo obtener los siguientes resultados en

---

<sup>5</sup> Estándares básicos de competencias en matemáticas. MEN, 2006. p. 48 Documento digital. Disponible en: [http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042\\_archivo\\_pdf2.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf)

algunos desempeños que deben lograr los estudiantes para este nivel. Entre estos están:

**Figura 1. Resultados pruebas saber 5° grado matemáticas año 2.016. Resolución de problemas.**

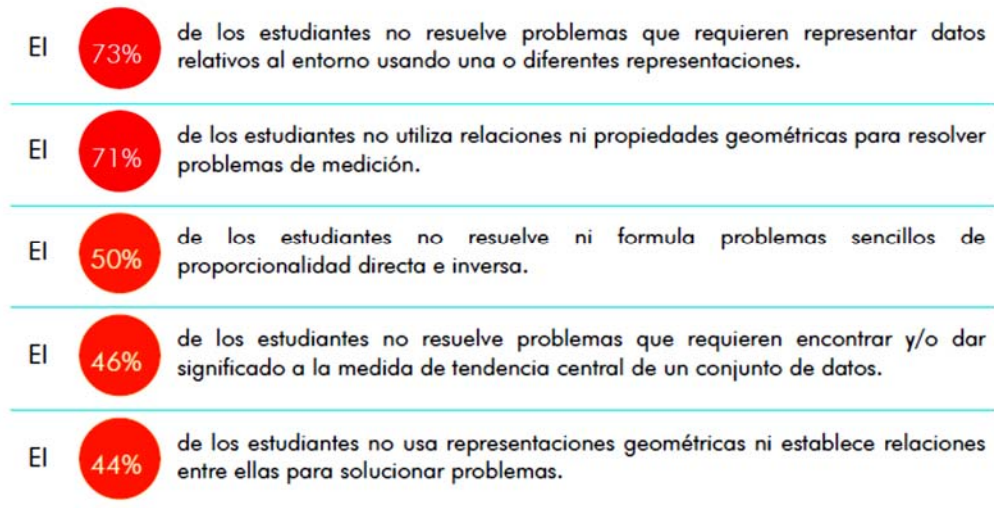


Fuente. Siempre día E, MEN, p. 27.

En uno de los procesos generales de la actividad matemática, específicamente en la resolución de problemas, para el quinto grado, se pudo evidenciar, siguiendo los resultados de la figura 1 que mucho de los estudiantes no lograron resultados satisfactorios en esta competencia. Es más, si se observa, los resultados de los aprendizajes de este proceso se obtuvo lo siguiente:

**Figura 2. Porcentaje alcanzado en aprendizajes en resolución de problemas grado 5° 2016.**

### 3. Aprendizajes



Fuente. Siempre Día E MEN, p. 27

Observando estos resultados, se puede deducir un déficit grande en los estudiantes de grado quinto en cuanto a la resolución de problemas basados en representaciones. Por otra parte, en lo que tiene que ver con el uso de propiedades y relaciones geométricas para resolver problemas de medición, se ve también una falencia grande. También se ve una debilidad en que los estudiantes no resuelven, ni formulan problemas sencillos de proporcionalidad directa e inversa. Por otro lado, en el pensamiento aleatorio, los estudiantes también presentan dificultades a la hora de encontrar y dar significado a la medida de tendencia central de un conjunto de datos. También se observa que muchos de los estudiantes no usan representaciones geométricas, ni establecen relaciones entre ellas para solucionar problemas.

Teniendo en cuenta, que el grado en el que se va realizar la intervención es grado sexto, se puede apreciar que el reto que se tiene para trabajar y mejorar en estas

competencias es grande. Muchos de los estudiantes de grado quinto, aún presentan dificultades para dominar los procesos matemáticos descritos, para llegar a ser competentes en matemáticas. En este sentido en el documento sobre los estándares del MEN se resalta que:

“Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos”<sup>6</sup>.

En el documento Principios y Estándares para la Educación Matemática, traducido y adaptado por la Sociedad Andaluza de Educación (Thales, 2003) se mencionan algunos principios y consejos sobre la enseñanza eficaz de las matemáticas, desde preescolar hasta el final de la educación secundaria, con las responsabilidades implícitas en este proceso. Los principios proporcionan ejes importantes para fundamentar y estructurar el conocimiento didáctico de los profesores de matemáticas, tanto desde la perspectiva curricular como desde la reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares, son guía y herramientas para tomar decisiones.

Uno de los contenidos que más se orienta en los primeros grados escolares, es el de los números, y en este sentido el documento expresa que: “la representación de los números con diversos materiales físicos debería constituir una parte principal de la instrucción matemática en los niveles elementales”<sup>7</sup>. Lo cual sugiere que el manejo de los números con materiales físicos se debe enseñar con mayor énfasis en los primeros grados escolares, con todos los procesos que esto implica para los estudiantes.

---

<sup>6</sup> Ibid., p. 49.

<sup>7</sup> Principios y estándares para la educación matemática. NCTM, Sociedad andaluza de educación matemática Thales. 2000. p. 35. Versión digital.

El documento también sugiere que “todos los estudiantes deberían aprender álgebra”<sup>8</sup>. Esto debería hacerse desde los primeros grados de escolaridad, y los niños deberían tener la oportunidad de abordar problemas que les permitan: comprender patrones, relaciones y funciones, representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, entre otras cosas.

Claramente desde la perspectiva de esta investigación: “El álgebra es más que manipular símbolos”<sup>9</sup>. Ya que además, los niños pueden aprender a identificar patrones en secuencias figurales o numéricas, pueden aprender a crear un elemento de la secuencia, y a identificar el término general de la secuencia, lo cual le preparará para adquirir las bases del álgebra formal.

Por otra parte “la resolución de problemas es una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas”<sup>10</sup>, esto involucra las cinco áreas de estudio en las matemáticas: los números, el álgebra, la geometría, las medidas, y el análisis de datos y probabilidad. En estas cinco áreas el trabajo al resolver problemas deben integrar múltiples temas e involucrar matemáticas significativas (Thales, 2003).

## **2.2 EL PENSAMIENTO ALGEBRAICO TEMPRANO**

Esta propuesta se soporta en trabajos realizados por diferentes autores que han tratado el estudio del álgebra en la educación básica a través del análisis de patrones, por medio de tareas de secuencias figurales y numéricas y su proceso de generalización. En primer lugar se presentan algunos antecedentes de

---

<sup>8</sup> Ibid., p. 39.

<sup>9</sup> Ibid., p. 40.

<sup>10</sup> Ibid., p. 55.

investigaciones que han estudiado la incorporación del pensamiento algebraico temprano, en aspectos relacionados con la naturaleza del razonamiento algebraico, herramientas que pueden promover el desarrollo de ideas algebraicas y propuestas de enseñanza. Luego, se propone la caracterización del proceso de generalización algebraica analizado desde diferentes perspectivas.

A la luz de las dificultades legendarias que el aprendizaje del álgebra representa para los estudiantes, se ha sugerido que una introducción progresiva al álgebra en los primeros grados facilita el acceso a los estudiantes a los conceptos algebraicos más avanzados a los que se enfrentarán más adelante (Carraher y Schliemann, 2007). Un desarrollo temprano del pensamiento algebraico puede en particular, facilitar el contacto de los estudiantes con el simbolismo algebraico (Cai y Knuth 2011).<sup>11</sup>

De acuerdo con Radford (2010b), el pensamiento algebraico está caracterizado por tres elementos estrechamente relacionados:

- El sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro) aquello como opuesto a la determinancia numérica.
- La analiticidad, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos.
- La designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos, esto es, como la manera específica de nombrar o referir los objetos.

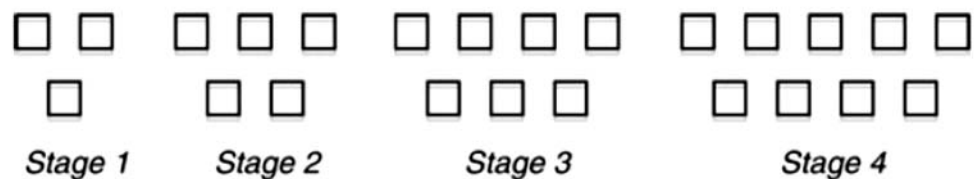
Radford (2010b), expresa que se debe dejar de ver el pensamiento algebraico como una simple materia en el currículo, para plantear diferentes formas de potenciar modos de razonamiento algebraico. Sin embargo, los cursos de álgebra solo inician

---

<sup>11</sup> RADFORD, Luis. Early Algebraic Thinking: Epistemological, Semiotic, and Developmental Issues. p. 209. Disponible en: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-12688-3\\_15](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-12688-3_15).

en la escuela secundaria y son enfocados generalmente al manejo de símbolos alfanuméricos.<sup>12</sup>

**Figura 3. Secuencia figural de cuadrados dispuestos en filas.** <sup>13</sup>.



Fuente. Rivera, Ferdinand. Teaching and Learning Patterns in School Mathematics. p. 1.

En la secuencia figural que aparece en la figura 3, por ejemplo, un estudiante puede en primer lugar realizar actos gestuales para analizar la secuencia, y hacer un conteo simple o solo gesto para expresar la comunalidad. Después de esto, el estudiante puede realizar un análisis más detallado y puede observar que en la fila de arriba hay más figuras que en las de abajo. Y si se fija con más detalle, el estudiante puede ser capaz de predecir un término posterior, y lo más importante, finalmente puede deducir una forma general para la secuencia; que en cursos superiores pueden llevarlo a pensar de manera simbólica, para encontrar el número de cuadrados de un término cualquiera de la secuencia.

En el mismo documento se menciona a Kaput, quien ve el pensamiento algebraico de otra forma:

En este mismo sentido Kaput (2000) considera el razonamiento algebraico como una estructura compleja, compuesta por cinco tipos de razonamiento

---

<sup>12</sup> MARTINEZ AVENDAÑO, Johana Carolina. Procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Bucaramanga, 2016. p. 13. Trabajo de grado (Magister en educación matemática). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de matemáticas.

<sup>13</sup> RIVERA, Ferdinand. Teaching and Learning Patterns in School Mathematic. p. 1.

interrelacionados, que se puede desarrollar desde temprana edad. Los cinco tipos de razonamiento abarcan el estudio de generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el estudio de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y modelado y modelización de fenómenos.<sup>14</sup> Para este autor implica un proceso, compuesto por una secuencia de etapas, a medida que el estudiante avanza de una etapa a otra logra un grado más de complejidad en su desarrollo matemático.

Por otra parte de acuerdo con el documento Principios y Estándares para la educación matemática, aclara: “En los últimos años, se ha reconocido ampliamente la posibilidad y necesidad que tienen los estudiantes de adquirir destreza con el pensamiento algebraico”<sup>15</sup>. Es necesario propiciar el estudio del álgebra temprana en los estudiantes de todos los grados, desde preescolar hasta secundaria, pero en los jóvenes de los grados sexto y séptimo es aún más importante ofrecer una amplia experiencia sobre este aspecto.

Especialmente en los primeros años de educación, a los niños se les debería enseñar temas muy importantes que se les oriente en el álgebra temprana por ejemplo: identificar o construir patrones numéricos y geométricos, describir patrones verbalmente y representarlos mediante tablas o símbolos, buscar y aplicar relaciones entre cantidades que varían, para hacer predicciones, utilizar gráficas para describir patrones y hacer predicciones, entre otros.

En lo que corresponde al estándar de álgebra, Thales (2003) propone que los estudiantes deberían:

- Comprender patrones, relaciones y funciones.
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.

---

<sup>14</sup> Ibid., p. 13.

<sup>15</sup> Thales (2003), Op. Cit., p. 215.

- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas.
- Analizar el cambio en contextos diversos.

Estas son las directrices que enmarcan el pensamiento algebraico desde el grado preescolar hasta el final de la educación secundaria, adaptado en cada grado de acuerdo con el nivel de conocimientos del estudiante, pero en todos los grados se trabajan con estos mismos principios rectores.

Para problematizar lo expuesto, consideremos el siguiente ejemplo presentado a un grupo de estudiantes de grado quinto. A partir de la observación y análisis de la gráfica se pide a los estudiantes expresar ciertas regularidades en los términos de la secuencia geométrica. Se les pide que describan de manera verbal los patrones que ven en la secuencia de “cuadrados crecientes” (ver Figura 4). También se les pide que representen dichos patrones con expresiones matemáticas.

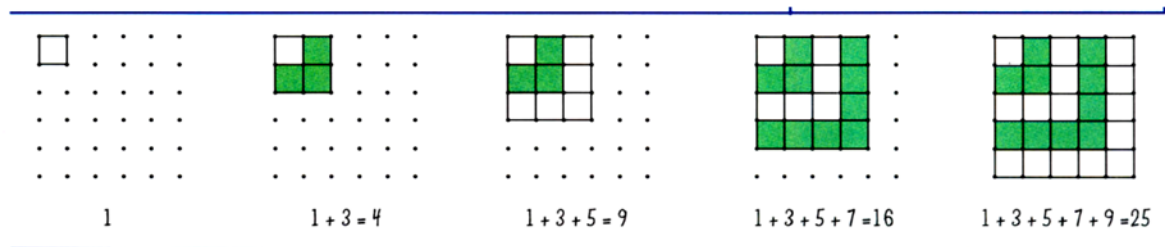
En este ejemplo, un alumno podría observar que el área varía de una forma predecible: aumenta en el siguiente número impar en cada nuevo cuadrado. Otro, podría notar que cualquier cuadrado encaja en la “esquina” del cuadrado mayor que le sigue. Estas observaciones podrían conducir a describir el área de un cuadrado como el área del cuadrado anterior aumentada en “la longitud de dos lados de este más una unidad”<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup> Ibid., p. 163

**Figura 4. Prueba de identificación de patrones en una secuencia geométrica.**

17.



Fuente. Principios y estándares para la educación matemática, p. 163.

En un ejercicio como este, los estudiantes tienen diferentes formas de ver la secuencia, de analizarla y de deducir el patrón de generalización de acuerdo con su creatividad e inteligencia. Con estos ejercicios el estudiante debe darse a la tarea de encontrar aquella regularidad, aquello que es fijo en una secuencia, aquello que se repite, así como lo que se mantiene constante para deducir un patrón regular. La primera interpretación que el estudiante hace puede ser de manera perceptual (pre simbólica), de los cambios que ocurren en la secuencia, después el estudiante puede hacer un análisis más profundo para encontrar una solución simbólica, para expresar una regla general de la secuencia. Luego, el docente tiene la posibilidad de animar a los estudiantes por ejemplo, a que dibujen una figura determinada más delante de la secuencia, partiendo de los términos de la secuencia dados, además que expliquen con una “fórmula” cómo hallaría un término cualquiera de la secuencia.

### 2.3 COMUNIDAD MATEMÁTICA

En los últimos años los investigadores en Educación Matemática se han venido planteando preguntas como: “¿Qué tipo de educación matemática debe considerarse en la formación de los estudiantes? ¿Cuál es el papel de las

<sup>17</sup> Thales (2003), Op. Cit., p. 163.

matemáticas en la educación general del individuo? ¿Qué tipo de problemas y actividades de instrucción promueve el aprendizaje de los estudiantes?”<sup>18</sup>

Para resolver estas preguntas, se ha planteado un nuevo enfoque de enseñanza y aprendizaje en el cual se dé oportunidad a los estudiantes de participar en la solución de problemas, donde ellos puedan debatir sus ideas, expresar verbalmente la solución a un problema, y compartir las diversas formas de abordar la solución de un problema. Por tanto uno de los objetivos que se debe proponer la escuela es:

Promover un ambiente de instrucción que motive a los estudiantes a participar en actividades donde resolver un problema o entender una idea matemática involucre la utilización y exploración de conjeturas, el uso de diversas representaciones, y la comunicación de resultados tanto en forma oral y escrita<sup>19</sup>.

Este nuevo enfoque es llamado “Comunidad Matemática”. Con este modelo se pretende desarrollar en los educandos capacidades que le permitan adquirir las destrezas, habilidades de este conocimiento matemático, potenciar el pensamiento algebraico que se debe promover desde edades tempranas. Con el fin de construir comunidades de aprendizaje, que promueva en los estudiantes la iniciativa para proponer soluciones a los problemas propuestos, que los conduzca a debatir ese conocimiento con otros miembros de la comunidad, y que incentive en ellos la comunicación y la habilidad de relacionarse y saber comunicar sus ideas y debatirlas; además, cómo argumentarlas con otros miembros de la comunidad a la cual pertenecen, para llegar a tener criterio matemático y algebraico.

Esto conduce a la idea de que se debe crear un ambiente propicio donde el estudiante y el docente establezcan una relación de simbiosis, en la cual tanto el estudiante como el facilitador lleguen a enriquecer sus bases matemáticas y algebraicas gracias a la interacción que se desarrolla entre los miembros de esta

---

<sup>18</sup> SANTOS Trigo, Luz Manuel. La resolución de problemas matemáticos. México: Editorial Trillas. 2007. p. 9. Versión Digital.

<sup>19</sup> Ibid., p. 10.

“Comunidad Matemática”, creada para plantear problemas, proponer soluciones y generar confianza para potenciar las capacidades cognitivas de los educandos.

Entre las premisas fundamentales de la propuesta de aprender matemáticas, dando énfasis a la resolución de problemas, está que el salón de clases ofrezca oportunidades a los estudiantes para reconstruir o desarrollar ideas matemáticas. En este contexto, el papel de los problemas y de las ideas que se discuten durante el proceso de resolución son parte sustancial que ayuda a crear una comunidad matemática entre los estudiantes<sup>20</sup>.

Anteriormente, dominar las matemáticas significaba, manejar al derecho y al revés las tablas de multiplicar, y saber utilizar una secuencia de algoritmos y procedimientos matemáticos para solucionar de manera mecánica una secuencia de ejercicios. Sin embargo, hoy día el enfoque que se le da a las matemáticas es distinto.

“En este contexto, un elemento crucial asociado con la competencia matemática es que el estudiante desarrolle diversas estrategias que le permitan resolver problemas que requieran cierto grado de independencia y creatividad”<sup>21</sup>.

En este sentido el docente debe escoger aquellos problemas que resulten más apropiados para que se motive al estudiante a desarrollarlos. No debe ser ni tan fáciles, que pierda el interés por resolverlos, ni tan difíciles, que no se atreva a mirarlos ni desarrollarlos, o que constantemente tenga que depender del docente para resolver cualquier ejercicio.

---

<sup>20</sup> Ibid.,p. 94.

<sup>21</sup> Ibid.,p. 95.

### 3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS

Una de las dificultades que la mayoría de los estudiantes enfrentan al iniciarse en el estudio del álgebra obedece a que ésta ha sido vista como una transición lineal, como una extensión de los cálculos numéricos al cálculo literal. Esto se debe en parte a que este contenido matemático se enseña, por lo general, a partir de fuentes de significados limitadas: usualmente, se toma como base el dominio numérico (simbolización numérica), dejando de lado ideas importantes que se interconectan con otros dominios matemáticos; por ejemplo, el geométrico.<sup>22</sup>

La enseñanza tradicional conduce al estudiante al estudio formal del álgebra, pasando desde el pensamiento numérico al algebraico de una manera repentina, sin crear primero las bases para el manejo de los símbolos alfanuméricos. Por lo cual, se hace muy importante pasar de lo numérico a lo algebraico, una forma de razonamiento más formal; de una manera gradual, para que este paso se de sin tantos traumatismos y dificultades, como las que enfrentan los estudiantes cuando empiezan su estudio formal del álgebra.

El acercamiento más tradicional empieza por enseñar la sintaxis algebraica, dándole énfasis a sus aspectos manipulativos. En ese abordaje se empieza por enseñar el trabajo con expresiones y ecuaciones y al final se resuelven problemas, aplicando este contenido sintáctico del álgebra.<sup>23</sup>

Debido a que los estudiantes se encuentran familiarizados inicialmente en el estudio del sistema numérico, con todos sus referentes conocidos, cuando abordan el estudio formal del álgebra experimentan dificultades, debido a que no están familiarizados o no encuentran una conexión entre el sistema numérico y el estudio alfanumérico del álgebra. Por lo cual se hace necesario en las edades anteriores al estudio del álgebra iniciar a los estudiantes en el reconocimiento y la generalización

---

<sup>22</sup> BUTTO, Christine María, ROJANO, María Teresa. Pensamiento algebraico temprano. P. 2. Disponible en: [http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area\\_tematica\\_05/ponencias/1391-F.pdf](http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/1391-F.pdf).

<sup>23</sup> Ibid., p. 2.

de patrones como una estrategia didáctica, que le ayude a establecer las relaciones entre el pensamiento numérico y el álgebra formal.

Al revisar los antecedentes del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas en Estados Unidos y también los Estándares del MEN se puede ver que los autores se enfocan en la necesidad de potenciar el pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes en el estudio de patrones numéricos y con figuras, debido a que este proceso potencia en el aprendiz el pensamiento algebraico temprano. Ya que le ayuda a predecir patrones, regularidades y a establecer relaciones que le sirven para encontrar un término posterior de la secuencia. Ahora, dado que los jóvenes en su etapa preadolescente se enfoca más en el proceso no simbólico y presimbólico, antes de enfrentar el estudio formal del álgebra, y para él es más fácil explicar el patrón de manera verbal, o por medio de figuras que intentar establecer representaciones por medio de símbolos y números, ya que su capacidad cognitiva todavía no alcanza este nivel de abstracción.

Otro aspecto a tener en cuenta es que la Institución cuenta con unas metas en sus planes de mejoramiento del año 2016, como son:

- Superar el promedio alcanzado en las pruebas ICFES de los años anteriores.
- Que el 80% de la Comunidad Educativa aprecie, valore y tenga sentido de pertenencia con la Institución.
- Fortalecer la investigación y la implementación de proyectos que coadyuven a la promoción de la cultura, la educación de calidad y el uso de nuevas tecnologías.
- Avizorar en el 2016 una fuerte apropiación y empoderamiento frente al conocimiento, las prácticas y las innovaciones pedagógicas y el fortalecimiento del modelo pedagógico.

Teniendo en cuenta estas metas propuestas por parte de la institución se puede ver que el presente proyecto puede contribuir para llevar adelante y mejorar en

aquellos indicadores académicos, que conduzcan al mejoramiento de la calidad y la excelencia académica. Ya que por una parte se está haciendo uso de prácticas innovadoras por parte del docente investigador, y por otra parte se están brindando espacios donde los estudiantes pueden analizar, razonar, comunicar y socializar a sus pares el conocimiento adquirido al estar involucrados en esta investigación, además de mejorar en su capacidad y sus habilidades de razonamiento inferencial (abductivo, inductivo y deductivo).

También, se puede ver la relevancia de establecer un espacio dentro del aula de clase en el cual se pueda desarrollar un ambiente apropiado, donde los estudiantes puedan enfrentar problemas retadores, que les permitan dar lo mejor de ellos para encontrar la solución a dichos problemas, presentar diferentes formas de presentar la solución a un problemas, y además les permita socializar y debatir las distintas soluciones a dichos problemas. Todo esto con el fin de ver las diferentes formas de abordar la solución de un problema, y permitirles a los estudiantes comunicar sus soluciones y sus puntos de vista sobre estas soluciones.

Teniendo en cuenta estas recomendaciones además de la problemática expuesta en las secciones anteriores surge la pregunta de investigación:

¿Qué caracteriza el pensamiento algebraico de los estudiantes de sexto grado de una Institución pública que pertenecen a una Comunidad Matemática, cuando resuelven Tareas relacionadas con el proceso de generalización de patrones?

### **3.1 OBJETIVOS**

**3.1.1 Objetivo general.** Propiciar la construcción de una comunidad matemática en el aula que transforme respectivamente el rol de profesor y el estudiante frente al

aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, a través del análisis de Tareas que potencien el pensamiento algebraico.

### **3.1.2 Objetivos específicos.**

- Realizar un diagnóstico inicial con el fin de reconocer las fortalezas y limitaciones que evidencian los estudiantes al resolver situaciones relacionadas con el pensamiento algebraico.
- Motivar la participación de los estudiantes como miembros activos de la Comunidad Matemática establecida en su aula a partir de las estrategias para incentivar el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.
- Proponer tareas a través de las cuales se potencie el desarrollo de las capacidades en los niños de 9 a 12 años, para fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico temprano mediante el desarrollo de las formas de razonamiento inferencial.
- Evaluar el impacto de la estrategia aplicada en el contexto de la Comunidad Matemática.

#### 4. MARCO CONCEPTUAL

En primer lugar se debe hablar del contexto socio cultural en el cual se desenvuelven los estudiantes que son partícipes de esta investigación. Vigotsky es quien mejor aporta en este sentido, para explicar la influencia del medio sociocultural en el desarrollo del niño durante las etapas del desarrollo tanto físico, como emocional y cognitivo. Todo esto relacionado con su capacidad para aprender y para apropiarse de ese conocimiento en un entorno en el que no se encuentra solo, sino que está rodeado por otros compañeros, y además la guía de un docente, que hace el papel de mediador entre el estudiante y el conocimiento. El docente actúa como un guía u orientador para el estudiante, quien asume una actitud ante los conceptos matemáticos presentados por el docente, y en este sentido el docente, debe hacer que dichos conceptos se construyan con significado y en lo posible, tengan un contexto de aplicación familiar para el estudiante.

Desde los planteamientos de Vigotsky (1987) el estudiante cumple un papel activo en la construcción del conocimiento. Vigotsky resalta la importancia de la interacción social en el aprendizaje, da especial relevancia a la manera cómo los individuos desarrollan sus procesos mentales, y cómo estos se mediatizan en el entorno a través de los signos, de las herramientas, o de diferentes contenidos, elementos que combinados orientan la actividad psicológica humana y facilitan el desarrollo de los procesos superiores de pensamiento (atención, memoria, lenguaje, etc.).<sup>24</sup>

Como lo plantea Vigotsky, el estudiante es un agente importante, ya que es él quien asume su compromiso para construir su propio conocimiento. También destaca Vigotsky el hecho de que este aprendizaje se da en un entorno, dentro del cual se ofrece una interacción entre los diferentes miembros de esta comunidad, se

---

<sup>24</sup> ZAPATA Rendón, Martha Cecilia. El papel mediador del profesor en el proceso de enseñanza aprendizaje. Universidad de Antioquia, 2016. P. 2. Recuperado de: [http://aprendeonline.udea.edu.co/lms/moodle/pluginfile.php/282329/mod\\_resource/content/1/Elpapelmediadordelprofesor\\_Julio29%202016.pdf](http://aprendeonline.udea.edu.co/lms/moodle/pluginfile.php/282329/mod_resource/content/1/Elpapelmediadordelprofesor_Julio29%202016.pdf)

desarrollan procesos mentales, y por medio de diversos elementos se pueden comunicar a través de signos, símbolos, el lenguaje, o herramientas para así incorporarlos a sus estructuras cognoscitivas.

La concepción constructivista nos presenta el aprendizaje académico como el resultado de un complejo proceso relacional establecido en torno a tres elementos: los alumnos que aprenden, los contenidos que se aprenden y el profesor que ayuda a esos alumnos a construir significados y a atribuir sentido a los contenidos que aprenden.<sup>25</sup>

Es decir, el profesor actúa como un mediador entre los estudiantes y los contenidos que construyen, en este rol el docente debe dar significado a esos contenidos para que sean comprendidos e incorporados por los estudiantes como nuevo conocimiento.

Estos mismos autores Serrano y Pons (2011 p.11), en trabajos posteriores plantean un cuarto elemento a saber: los objetivos de aprendizaje como metas a conseguir a través de los contenidos y hacen alusión a competencias, capacidades o habilidades como que los estudiantes han de alcanzar.<sup>26</sup>

---

<sup>25</sup> Serrano y Pons. El constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. En Redalyc. Documento digital. 2008. <http://www.redalyc.org/pdf/155/15519374001.pdf>. Citado por: ZAPATA Rendón, Martha Cecilia. El papel mediador del profesor en el proceso de enseñanza aprendizaje. Universidad de Antioquia, 2016. P. 2. Recuperado de: [http://aprendeonline.udea.edu.co/lms/moodle/pluginfile.php/282329/mod\\_resource/content/1/El\\_papel\\_mediator\\_del\\_profesor\\_Julio29%202016.pdf](http://aprendeonline.udea.edu.co/lms/moodle/pluginfile.php/282329/mod_resource/content/1/El_papel_mediator_del_profesor_Julio29%202016.pdf)

<sup>26</sup> Ibid., p.3.

**Figura 5. Relaciones en el proceso de aprendizaje académico.**



Fuente. ZAPATA Rendón, Martha Cecilia. El papel mediador del profesor en el proceso de enseñanza aprendizaje. Universidad de Antioquia, 2016. P. 3. Recuperado de: [http://aprendeonline.udea.edu.co/lms/moodle/pluginfile.php/282329/mod\\_resource/content/1/El\\_papel](http://aprendeonline.udea.edu.co/lms/moodle/pluginfile.php/282329/mod_resource/content/1/El_papel)

En la figura 5 se muestra la relación entre el docente mediador del aprendizaje, los contenidos y los estudiantes. En ella se puede ver como los estudiantes dependen de la orientación del docente para que los contenidos sean comprendidos y adquieran significado para motivarles a que aprendan con un sentido y propósito.

En este sentido, el docente además de mediador, debe fijar los objetivos del aprendizaje propuestos; el estudiante entonces debe encontrar motivación en los objetivos propuestos por el docente; es decir en las competencias o desempeños propuestos en el aprendizaje, para encontrarle sentido a lo que está aprendiendo, y construirlo como propio. Existe una interacción entre el docente, los estudiantes, los contenidos y los objetivos propuestos. Los estudiantes a través de la guía del docente, deben comprender y darle significado a esos contenidos. El docente establece los objetivos del aprendizaje (dominio conceptual, desarrollo de habilidades, actitudes, etc.), que constituyen las metas que los estudiantes deben

alcanzar; por otra parte el estudiante debe proponerse alcanzar esas metas, las cuales le generan expectativas y motivación por la búsqueda de sentido de lo aprendido.

El Profesor mediador fija las metas y objetivos de aprendizaje y orienta su consecución, organiza y dirige el ritmo del curso con lo que genera responsabilidad y disciplina. Diseña el proceso formativo orientado a proponer estrategias basadas en la interacción-interactividad, con el fin de lograr que todos los estudiantes participen en el proceso formativo. El profesor mediador hace de intermediario entre los contenidos y el estudiante, ofreciendo ayuda para que el estudiante descubra los significados compartidos a través de dichos contenidos<sup>27</sup>.

De esta manera el docente asume un papel muy importante como mediador de los procesos de enseñanza y aprendizaje, con lo cual genera un espacio participativo, adecuado, donde se respetan los ritmos de aprendizaje, y se establece un ambiente propicio para enseñar y aprender.

El profesor mediador hace de intermediario entre los contenidos y el estudiante ofreciendo ayuda para que el estudiante descubra los significados compartidos a través de dichos contenidos. Lo anterior, sin dejar de lado una función de profesor mediador muy necesaria en todo proceso formativo: diseñar la evaluación tanto de los aprendizajes como de la enseñanza. La evaluación de los aprendizajes permite identificar el nivel de logro de las metas y objetivos propuestos, mientras que la evaluación de la enseñanza permite identificar aspectos a mejorar del proceso de enseñanza y aprendizaje<sup>28</sup>.

Otra de las funciones importantes del docente como mediador es el diseño de la evaluación de los aprendizajes y también el reflexionar acerca de su propia práctica docente. Al evaluar los aprendizajes, el docente se asegura hasta qué punto se han alcanzado los objetivos propuestos los estudiantes, y por otra parte tiene la posibilidad de mejorar su propia práctica docente.

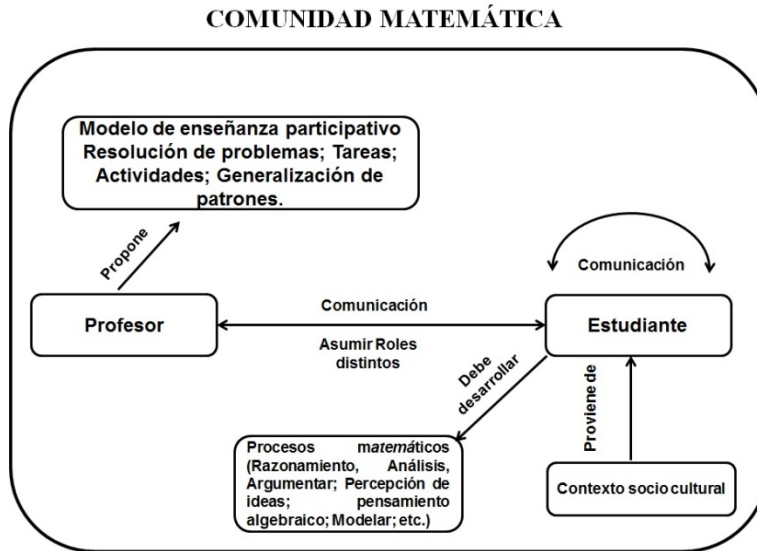
---

<sup>27</sup> Ibid., p. 5.

<sup>28</sup> Ibid., p. 5.

En la figura 6 se muestra el proceso de interacción que se genera entre los diferentes elementos de una comunidad educativa, y sus diferentes relaciones, cuando se desarrolla una comunidad matemática dentro de un aula de clase.

**Figura 6. Interacciones entre los componentes de una Comunidad Matemática.**



Fuente. Diseño del profesor investigador.

En esta figura se evidencia un ambiente de aprendizaje dinámico, en el cual tanto el docente como los estudiantes interactúan dentro de una comunidad matemática, con un modelo de enseñanza participativo, para que los jóvenes alcancen unos objetivos de aprendizajes y desarrollen unos procesos matemáticos; estos estudiantes provienen de un contexto, del cual traen ideas, valores, hábitos, actitudes, preconcepciones, etcétera, y con cada uno de los objetivos propuestos por el docente, deben darle significado a estos contenidos (soluciones, respuestas, modelos, etcétera), saber comunicar sus soluciones, argumentar y debatir para construir nuevo conocimiento.

En resumen, un punto de vista dinámico de las matemáticas conlleva a un ambiente de aprendizaje que tienda:

- Hacia la aceptación de un salón de clases como una comunidad matemática.
- Hacia el uso de la lógica y la evidencia matemática como un medio de verificación, contrapuesto a ver al maestro como la única autoridad para dar la respuestas correctas.
- Hacia el desarrollo del razonamiento matemático; es decir, no ubicar a las matemáticas como un conjunto de fórmulas o reglas para memorizar.
- Hacia la resolución de problemas y no sólo dar énfasis a la actividad de encontrar respuestas mecánicamente.
- Hacia la conexión y aplicación de las matemáticas; es decir, no concebirlas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos<sup>29</sup>.

Es decir se debe ver el aula como una Comunidad Matemática, en la cual se construya conocimiento por parte del estudiante, haciendo uso de la lógica y del razonamiento matemático, utilizando diferentes estrategias de resolución de problemas matemáticos, y estableciendo una conexión de las matemáticas con otras disciplinas y saberes, para dejar de verla como un campo aislado de conceptos y procedimientos.

En un modelo de enseñanza basado en problemas matemáticos, debe existir un ambiente en el cual los estudiantes también aporten en la construcción del conocimiento, planteando problemas que reten al estudiante para que busque las alternativas de solución; es decir, que cumplan con ciertas características, para que el estudiante tenga que ser exigido a echar mano de sus mejores capacidades para encontrar solución, sin que haya una sola forma de resolverlo.

En este sentido Santos Trigo, define un problema como:

Una tarea o situación en la cual aparecen ciertos componentes:.

---

<sup>29</sup> SANTOS Trigo, Luz Manuel. La resolución de problemas matemáticos. México: Editorial Trillas. 2007. p. 48. Versión Digital.

- La existencia de un interés; es decir, una persona o un grupo de individuos quiere o necesita encontrar una solución.
- La no existencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea.
- La presencia de diversos caminos o métodos de solución.
- La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendientes a resolver esa tarea<sup>30</sup>.

En otras palabras, lo importante al resolver un problema, es que el estudiante tenga la posibilidad de utilizar diversas estrategias de solución, y que puedan existir varias formas de solucionarlo, es decir, en el entendimiento del problema en el diseño e implementación de algún plan de solución, y en la verificación de la solución y la búsqueda de conexiones, el estudiante tendrá que usar diagramas, gráficos, representaciones, tablas, ejemplos, contraejemplos, así como los ajustes para avanzar o resolver el problema.

Uno de los problemas que exige a los estudiantes el análisis, la observación de regularidades, el razonamiento, encontrar aspectos comunes y diferencias en una secuencia de tipo numérico o con figuras, son aquellos asociados con la generalización de patrones. En este tipo de problemas, se da a los estudiantes una secuencia de figuras o números, con algunos términos, para que la observen, analicen, y encuentren las diferencias, las similitudes que observa, y sea capaz de encontrar, si es posible, una fórmula general que le permita hallar cualquier término de la secuencia.

En este tipo de ejercicios a los estudiantes se les pide que hallen un término siguiente a los términos dados, que calculen el número de figuras de un término posterior, encontrar diferencias entre un término y otro, o explicar de manera verbal

---

<sup>30</sup> Ibid., p. 51.

cómo hallar un término posterior, o que explique de manera verbal el número de figuras de un término más allá de los términos dados, o que explique el procedimiento que realiza para obtener la respuesta al hallar un término en una secuencia numérica.

Aquí surge una pregunta: ¿Cómo categorizar el procedimiento realizado por un estudiante cuando analiza una secuencia numérica o figural que implica la generalización de un patrón?

En el documento de Ferdinand Rivera se encuentra una tabla que nos muestra el grado o nivel de inferencia alcanzado por un estudiante cuando realiza conjeturas en la búsqueda de una generalización de patrones<sup>31</sup>.

En la tabla 1 se puede observar los tres tipos de razonamiento inferencial que entran a jugar cuando se expresa una generalidad. El primer tipo de razonamiento inferencial llamado abducción, involucra inicialmente generar una hipótesis o estrechar un rango de hipótesis, que van a ser verificadas por medio de la inducción. La abducción es la fuente de ideas originales y es frecuentemente influenciada por conocimientos y experiencias previas, a diferencia de la inducción que ejecuta una afirmación abducida mediante la prueba de casos específicos en la esperanza de que los posibles errores se corrigen en el camino con más datos. La deducción a diferencia de la abducción y de la inducción, establece primeramente la necesidad de una conclusión válida simple, y como la inducción, no genera ideas originales.

---

<sup>31</sup> RIVERA, Ferdinand. Teaching and learning patterns in school mathematics. Psychological and pedagogical considerations. Springer Dordrecht Heidelberg New York London. p. 25. Documento digital.

## Cuadro 1. Tipos de razonamientos inferenciales y sus características.<sup>32</sup>

Tipos inferenciales y sus características

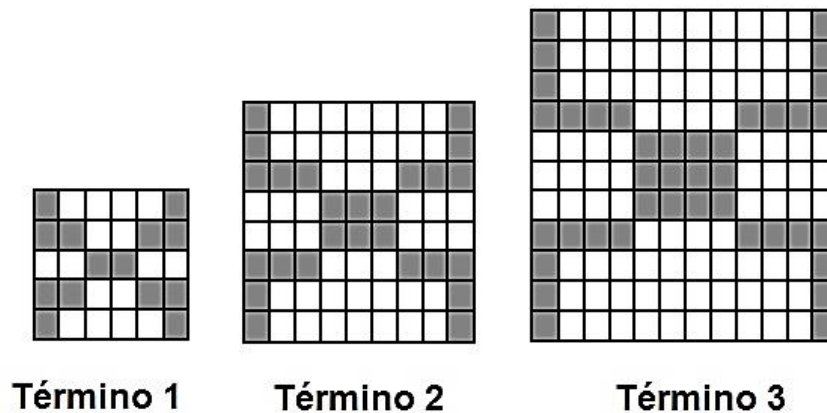
Tipo Inferencial	Forma Inferencial	Intención	Actitud inferencial	Fuentes	Construcción deseada	Verificación y justificación
Abducción	De resultado y ley a un caso	Profundidad (intencional)	Considera una posible inferencia hacia una regla; genera y selecciona una teoría <u>explicativa</u> - "ese algo puede ser" (conjetura)	Impredecible (hechos sorprendentes; destellos; conjeturas inteligentes; conjeturas espontáneas.	No estructurada	Se estructura por medio de la inducción
Inducción	(De resultado y más casos a ley)	Amplitud (extensional)	Prueba una inferencia abducida; mide el valor y el grado de concordancia de una teoría <u>explicativa</u> a casos - ese "algo actualmente es operativo" (aproximado)	Predecible (ejemplos)	Estructural basado en la abducción	Empírico (por ejemplo: enumeración, analogía, y experimentos)
Deducción	De ley y caso a resultado	Prueba lógica	Predice de una manera metódica un resultado válido - ese "algo debe ser" (cierto)	Predecible (premisas)	Estructural (forma canónica)	Pasos en una prueba

Fuente. RIVERA, Ferdinand. Teaching and learning patterns in school mathematics. Psychological and pedagogical considerations. Springer Dordrecht Heidelberg New York London. p. 28. Documento digital.

En la figura 7 se puede apreciar una secuencia de términos en forma de rana creciente, elaborados con cuadrados grises. A continuación se digita la entrevista con una niña de séptimo grado llamada Diana, a quien se le pidió que realizara algunos razonamientos sobre dicha secuencia.

<sup>32</sup> Ibid., p. 28.

**Figura 7. Secuencia de patrones en forma de rana creciente.** <sup>33</sup>.



Fuente: RIVERA, Ferdinand. Teaching and learning patterns in school mathematics. Psychological and pedagogical considerations. Springer Dordrecht Heidelberg New York London. p. 25. Documento digital.

- a. ¿Cómo representaría el término 4? Descríbalo o dibújelo en un papel cuadriculado.
- b. Encuentre una fórmula directa para el número total de cuadrados grises en cada figura. Explique su fórmula.
- c. ¿Cuántos cuadrados grises hay en el término 11? ¿Cómo los hallaría?
- d. ¿Qué término contiene un total de 56 cuadrados grises? Explique.

Diana: (D; grado 7; edad: 12 años): Bien, básicamente, si usted mira este número aquí, esta parte aquí (refiriéndose al término 2 en la figura 7), agrega un cuadrado en la parte superior, y sobre este lado agrega un cuadrado para hacerla más grande (refiriéndose a las patas que crecen en cada esquina). Siempre le agrega uno a todo para hacer las piernas más grandes. En vez de multiplicar 2 x 2, debe multiplicar 3 x 3. Y para este también (refiriéndose al rectángulo del medio), en lugar de multiplicar 1 x 2, debe multiplicar 2 x 3. Ella entonces escribe la siguiente fórmula directa:  $x(x + 1)(2x + 1) = n$ .

---

<sup>33</sup> Ibid., p. 25.

I (Investigador): Dígame que está sucediendo aquí. ¿De dónde sale  $x(x + 1)$ ?

D: Esto es, el pequeño cuadrado multiplicado  $x$  veces por  $x + 1$ .

I: Así que, donde está  $x(x + 1)$  aquí. (Refiriéndose a la figura 3 de la figura dada).

D: Como  $3 \times 3$ , o  $3 \times 4$ .

I: ¿De dónde sale  $(2x + 1) = ?$

D: Yo puedo ver esto como dos veces  $(x+1)$  menos 1, pero yo solo lo hice como  $3,3$  y 1 (refiriéndose al término 3 en la figura dada), así que  $2x + 1$ . (Note que ella inicialmente vio que cada pierna tenía dos lados traslapados que compartían un cuadrado en una esquina común).

I: Pero este  $(2x + 1) =$  es solamente para este lado derecho (refiriéndose a una pierna)?

D: Para todas las piernas, oh (ella agregó un coeficiente de 4 para su fórmula),  $x(x+1) \cdot 4(2x+1) = n$ .

I: ¿Se siente feliz con su fórmula?

D: Diana simplifica su fórmula a:  $x^2 + 9x + 4 = n^{34}$ .

Considere las siguientes declaraciones que propone Rivera, éstas han sido extraídas de las generalización de Diana, del patrón figural mostrado en la figura 7.

*Ley (L):* Todos los términos relacionados con el patrón de la figura No. 7, siguen la

---

<sup>34</sup> Ibid., p. 26.

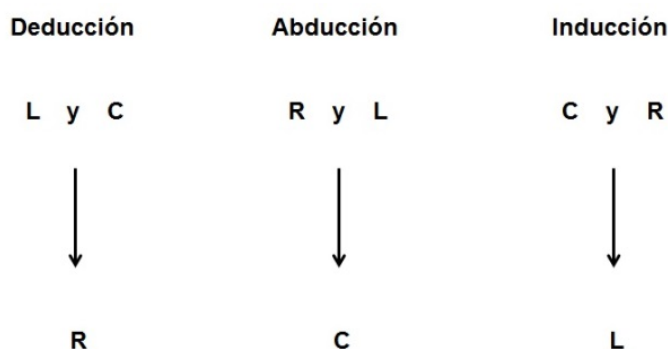
fórmula directa:  $x^2 + 9x + 4 = n$ .

Caso (C): Los términos 1, 2, 3 y 4 son casos específicos del patrón dado.

Resultado (R): Los términos 1, 2, 3 y 4 siguen la regla  $x^2 + 9x + 4 = n$ <sup>35</sup>.

La deducción asume una ley general y casos observados, que luego lógicamente infiere un resultado válido, que no tiene que depender de un conocimiento real o empírico para su verificación. Los casos son ocurrencias específicas o instancias de la ley general. Cuando intercambiamos las tres declaraciones de dos formas diferentes, obtenemos la estructura canónica para la abducción y la inducción. La figura 8 muestra estas diferencias entre los tres tipos de razonamientos inferenciales.

**Figura 8. Diferencias entre los tipos de razonamiento inferencial.** <sup>36</sup>.



Fuente. RIVERA, Ferdinand. Teaching and learning patterns in school mathematics. Psychological and pedagogical considerations. Springer Dordrecht Heidelberg New York London. p. 29. Documento digital.

---

<sup>35</sup> Ibid., p. 29.

<sup>36</sup> Ibid., p. 29.

## 5. DISEÑO METODOLÓGICO

El proceso metodológico adoptado para esta investigación se basa principalmente en la construcción de una Comunidad Matemática en el aula propuesta por Santos (2007). Esta metodología permite realizar un seguimiento a los procesos que se generan en los estudiantes y profesores en la resolución de problemas como miembros activos de una comunidad matemática con el fin de analizar el rol de cada una de las partes.

Por tanto es de interés en esta investigación entender el sujeto en el aula, estudiar el rol de los estudiantes y del profesor frente a una Tarea matemática, analizar los procesos de formular, emplear e interpretar las matemáticas como forma de modelar un problema en contexto. Por tanto la metodología está compuesta por cuatro etapas: diseño y análisis de Tareas; Implementación de las Tareas y desarrollo de la Actividad; Recolección y Selección de datos, e Interpretación y análisis teórico de los datos.

**Figura 9. Estructura Metodológica de la Investigación.**



Fuente. Adaptado del modelo propuesta por Radfor (2015)

Como se muestra en la figura 9 la primera etapa se centra en el diseño y análisis de Tareas que es retroalimentada por la aplicación completa de las etapas del ciclo. La aplicación de este ciclo de investigación le permite al investigador presentar un conjunto de Tareas matemáticas validadas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de 10 a 12 años de edad.

A continuación se presenta una descripción de las principales características de cada una de las etapas del ciclo; particularmente cómo se constituye la Etapa 2 a través de los elementos característicos de una Comunidad Matemática.

### **5.1 DISEÑO Y ANÁLISIS DE TAREAS**

Esta etapa tiene en cuenta los objetivos del currículo, los resultados de las Pruebas saber en el grado quinto de la I. E., los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), respecto al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y

analíticos. Además de los resultados obtenidos de la aplicación de una prueba Diagnóstica que será analizada con detalle en el desarrollo de esta Etapa.

Desde la perspectiva teórica descrita en la Sección anterior se analizan los resultados obtenidos en matemáticas en el grado quinto en cada una de las competencias logradas en los procesos de matemáticas: comunicación, razonamiento y resolución de problemas. Se puede observar que en su gran mayoría los estudiantes de grado quinto presentan deficiencias y dificultades en cada uno de estos procesos matemáticos.

Es importante aclarar que en esta investigación se hace una distinción entre la Tarea y la Actividad en términos de Radford (2013). El diseño de las Tareas es potestad del profesor-investigador quien planifica y tiene una idea de lo que puede llegar a suceder en el aula. Pero es a través de la Actividad que dicha tarea promueve que los estudiantes pueden progresivamente tomar conciencia de los significados culturales que han sido históricamente constituidos.

## **5.2 IMPLEMENTACIÓN DE TAREAS Y DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD**

Con base en el diseño y el análisis a priori sustentado en la etapa anterior se da paso a la implementación de las Tareas en el aula. Dicha implementación así como el desarrollo de la Actividad están guiados en esta investigación por la construcción de una Comunidad matemática en el aula. Santos-Trigo (2007) propone:

Entre las premisas fundamentales de la propuesta de aprender matemáticas dando énfasis en la resolución de problemas, está que el salón de clases ofrezca oportunidades a los estudiantes para reconstruir o desarrollar ideas matemáticas. En este contexto el papel de los problemas y las ideas que se discuten durante el proceso de resolución parte sustancial que ayuda a crear una comunidad matemática entre los estudiantes<sup>37</sup>.

---

<sup>37</sup> SANTOS Trigo, Luz Manuel. La resolución de problemas matemáticos. México: Editorial Trillas. 2007. p. 94. Versión Digital.

Bajo esta mirada, cada estudiante se concibe como un sujeto activo que necesita de una comunidad para discutir y comunicar de manera eficaz sus ideas matemáticas. Esto propicia el desarrollo de los procesos matemáticos fundamentales, que en esta investigación se sustentan en las directrices dadas por la OCDE (2012):

1. Formulaciones matemáticas de situaciones.
2. Empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos.
3. Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos.

El desarrollo de la Actividad dentro de la Comunidad Matemática transforma el rol del profesor y del estudiante frente a la construcción de conocimiento matemático. Cada estudiante encuentra en el salón de clase un ambiente que le permite pensar y razonar sobre las matemáticas involucradas en la solución de una tarea, razonar sobre ellas y comunicar sus ideas. Esta interacción permite la formulación de ideas, el desarrollo de argumentos, la validez, verificación y en su medida la demostración que aquello que se propone como verdadero (Santos-Trigo, 2007).

El desarrollo histórico y epistemológico de las matemáticas muestra que la comunicación y la interacción social son fundamentales para la construcción y consolidación de conocimiento matemático. Por tanto en esta Etapa de la investigación cada estudiante, así como el profesor, como miembros de su Comunidad deben desarrollar una ética comunitaria donde muestren que:

- a. Participan activamente en el espacio público de la Comunidad.
- b. Muestran un espíritu abierto a las discusiones y debates.
- c. Son solidarios con los otros miembros (compañeros y profesores).
- d. Trabajan por la construcción de una conciencia crítica generada a través del trabajo colectivo que genera la solución de una Tarea.

Estas características propuestas por Radford (2013) transforman la manera de concebir las matemáticas y las formas de conocer en el aula. Este ambiente establecido por la comunidad potencia el desarrollo de una forma independiente de pensar sobre las ideas y/o nociones matemáticas, generando procesos creativos y por tanto formas significativas para los sujetos de construir conocimiento matemático.

La figura 10 muestra los principales constructos que guían el diseño y desarrollo de esta Etapa de la investigación. Allí aparecen los elementos iniciales que son el insumo para a partir de las interacciones entre los miembros de la comunidad, generan un ambiente de aula que se caracteriza por los procesos que guían la construcción, desarrollo y consolidación de una Comunidad Matemática en el aula.

**Figura 10. Implementación de Tareas y desarrollo de la Actividad: Construcción de una Comunidad Matemática.**



Fuente. Diseño del docente investigador

La Comunidad Matemática propicia el trabajo cooperativo que puede iniciar en parejas y motivar la conformación de equipos alrededor de los intereses comunes y las necesidades individuales. Claramente esta manera de concebir el aula y la

interacción entre el profesor, el estudiante y el saber dinamiza el rol de los estudiantes y profesores.

Al finalizar el Ciclo de investigación propuesto, se podrá dar cuenta de la viabilidad de la conformación de la comunidad, además se podrán plantear características específicas de sus miembros, así como los intereses que deben priorizarse en su conformación, consolidación y permanencia.

### **5.3 RECOLECCIÓN Y SELECCIÓN DE DATOS**

Esta investigación es de tipo cualitativo, su enfoque es investigación acción, en el cual el docente actúa como maestro y como investigador; en particular busca dar cuenta del desarrollo del pensamiento algebraico temprano en estudiantes de 10 a 12 años, a través de la conformación de una comunidad matemática. Para una recolección amplia de la información que permita una selección de datos exitosa se toman como fuentes:

- Análisis de la prueba diagnóstica.
- Videos y Audios de las sesiones de clase: con base en las transcripciones de los videos y de las observaciones del profesor-investigador, se construye el diario de campo que permite un análisis más profundo de la Actividad Matemática generada en el aula.
- Análisis de la prueba final. Una vez finalizada la tercera etapa de la investigación se diseña y aplica una prueba final. Esta busca evidenciar que aspectos fueron logrados y que aspectos no lo fueron; también se puede mostrar si en este caso particular fue posible la conformación de una comunidad matemática, o por qué no fue posible.
- Entrevista didáctica.

#### **5.4 INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS TEÓRICO**

En esta Etapa con base en los elementos teóricos que sustentan la investigación se sistematizan los principales resultados de la aplicación. Se realiza una triangulación de la información y se llega a un consenso entre los miembros del Colectivo de Investigación sobre el trabajo realizado por los estudiantes para a la luz de los elementos del marco conceptual determinar si se lograron o no los objetivos propuestos; por un lado el objetivo general, analizando cada uno de los objetivos específicos, para poder llegar a una conclusión sobre la viabilidad de implementar una comunidad matemática en el aula, y sobre el desarrollo de los procesos matemáticos ejercidos por los estudiantes en la resolución de tareas y actividades que pudieron o no potenciar el pensamiento algebraico temprano, o su no realización en este caso particular.

## **6. DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN**

Esta investigación se desarrolló siguiendo un enfoque en investigación cualitativa, el cual permite diversas formas de análisis de los datos, y dejan la puerta abierta para futuras investigaciones.

Se ha utilizado la estrategia de generalización de patrones en secuencias numéricas y figurales como un recurso que permite el surgimiento de diversas formas de expresión del pensamiento algebraico en jóvenes de 10 a 12 años de una Institución Pública.

El interés de esta investigación es identificar aquellas formas de interpretación y de inferir razonamientos al reconocer formas comunes y patrones en secuencias numéricas y figurales, ya que en este proceso de generalización los estudiantes desarrollan procesos de pensamiento algebraico temprano.

### **6.1 DISEÑO Y ANÁLISIS DE TAREAS**

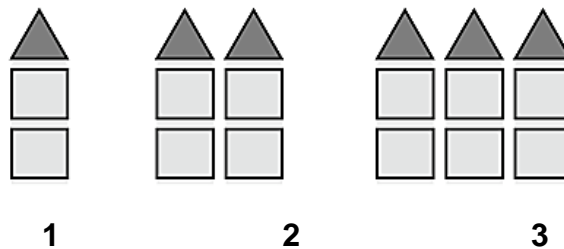
En esta etapa el docente investigador planifica y diseña las Tareas que deben desarrollar los estudiantes durante la prueba diagnóstica y cada una de las intervenciones. El docente investigador además lleva a cabo el análisis a priori de la prueba diagnóstica y de cada una de las intervenciones, reflexiona en cada una de ellas con el fin de determinar antes de presentar una nueva Tarea a los estudiantes cuáles son las cosas que deben mejorar y en cuáles han alcanzado un buen progreso; el investigador le hace los ajustes a las Tareas que va a presentar para que les ayude a los jóvenes a progresar en el análisis de las secuencias y en la obtención de la regla de formación. El análisis a posteriori de la prueba

diagnóstica y de cada una de las intervenciones le ayuda al docente investigador a reflexionar acerca de aquellas cosas que debe ir mejorando en cada una de las Tareas para que los estudiantes logren avances en el proceso de generalización de patrones.

### 6.1.1 Prueba diagnóstica.

**6.1.1.1 Análisis a priori de la prueba diagnóstica.** La prueba diagnóstica consta de tres 3 puntos. En el primer punto se les presenta a los jóvenes una secuencia gráfica; en el segundo punto los estudiantes deben analizar una secuencia numérica; y en el tercer punto deben descubrir el patrón de una secuencia geométrica. Esta prueba se realizó de manera individual, en ella cada uno de los estudiantes contó con cerca de una hora para desarrollarla. A continuación se presenta primero la prueba diagnóstica como tal, luego se muestra el análisis a priori de la misma, y más adelante el análisis a posteriori de la prueba diagnóstica.

#### 1. Construcción de Casas



- Construya las figuras 4 y 5.
- ¿En qué se diferencia la figura 1 de la figura 2?
- Explique cómo construyó las figuras 4 y 5.
- ¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos se necesitan para construir la figura 4?
- ¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos se necesitan para construir la figura 7?

- f. ¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos se necesitan para construir la figura 10? Puede dibujar la figura.
- g. Escribe cómo puede conocer el número triángulos y cuadrados que son necesarios para construir cualquier figura de la secuencia.

Se presenta una secuencia geométrica formada por cuadrados, con un triángulo encima, que simula el dibujo de una casa. En esta secuencia los estudiantes pueden evidenciar una relación entre los cuadrados y los triángulos y su relación con los números pares. Por cada triángulo existen 2 cuadrados. A continuación se señala una posible manera de resolver la situación.

- a. Inicialmente se espera que los estudiantes analicen que en la posición 1 se encuentran 2 cuadrados y un triángulo, en la posición 2 se encuentran 4 cuadrados y 2 triángulos; mientras que en la posición 3 se encuentran 6 cuadrados y 3 triángulos; de manera que en cada posición nueva el aumento es de dos cuadrados y un triángulo. Se espera que mediante un razonamiento abductivo el estudiante comprenda el patrón e identifique el número de cuadrados y el número de triángulos en cada nueva posición para escribir una conjetura por parte del estudiante que conlleve a dibujar las dos siguientes figuras, como se muestra a continuación.



- b. Aquí se espera que el estudiante observe las 2 primeras figuras de la secuencia, las compare y describa las diferencias o similitudes; por ejemplo: que en la figura 1 hay 2 cuadrados, mientras que en la figura 2 hay 4 cuadrados, que en la figura 1 hay 1 sólo triángulo, mientras que en la figura 2 hay 2 triángulos. Esta

comparación es posible gracias a un razonamiento abductivo. Otra conclusión podría ser, que por cada triángulo hay el doble de cuadrados.

- c. En este ítem se espera que el estudiante después de haber asociado la relación entre el número de cuadrados y de triángulos, describa a través de una regla abductiva que, gracias a esa relación de proporcionalidad entre el número de triángulos y de cuadrados se logró construir las dos figuras propuestas.
- d. Para la solución de este ítem, se espera que el estudiante se valga de la deducción para establecer la relación entre los triángulos y los cuadrados, para especificar el número total de cuadrados y de triángulos para construir las figuras 4 y 7.
- e. Aquí también se espera que a partir de una forma de razonamiento deductivo el estudiante responda la pregunta lo mismo que para el ítem d.
- f. Basados en la relación de cantidad entre los triángulos y los cuadrados, se espera que el estudiante deduzca el número total de cuadrados y triángulos para construir la figura 10. Con esta información el estudiante debería poder dibujar la figura.
- g. Aquí se espera que el estudiante mediante un razonamiento inductivo logre establecer una regla, o una fórmula para hallar cualquier término de la secuencia. Habiendo establecido de antemano el número de cuadrados necesarios para cada figura, por cada triángulo y asociándolo con la posición de la figura. Se espera que el estudiante relacione el número de la figura con igual número de triángulos, y el doble de cuadrados. Por ejemplo para la figura 8, le corresponden 8 triángulos, y 16 cuadrados.

2. Dada la siguiente secuencia numérica, contesta las preguntas que aparecen a continuación:

8	13	18	...
<b>Término 1</b>	<b>Término 2</b>	<b>Término 3</b>	

- ¿Cuáles son los números correspondientes a los términos 4, 5 y 6 de la secuencia?
- ¿Cuál es el número que corresponde al término 15? Explique sus respuestas.
- ¿Cuál es el número que corresponde al término 100? Explique el procedimiento que realiza para obtener la respuesta.
- ¿A qué término corresponde el número 78? Escriba cómo le explicaría a un amigo, con todos los detalles, la manera cómo encuentra la respuesta.
- ¿Un amigo del salón piensa en el número 902? ¿Pertenece ese número a la secuencia dada? Explique por qué sí o por qué no.
- Escriba un mensaje a un compañero que no asistió a clase, donde le explique con claridad y con todos los detalles qué debe hacer para calcular rápidamente el número que corresponde al término 2017.

Se presenta una secuencia numérica, con tres términos iniciales. La secuencia arranca desde el número 8, luego continua con el número 13 y sigue con el próximo término el número 18. Se establece aquí una relación numérica, una relación de suma del término anterior con respecto al siguiente término. Aquí se describe la posible solución de este ejercicio.

- En este ítem se espera que el estudiante observe, analice y a partir de un razonamiento deductivo establezca la relación entre el término anterior y el siguiente término de la secuencia, que en este caso es de 5 unidades. Al darse cuenta de que el nuevo término se obtiene al sumar 5 unidades al término

anterior, entonces espera que logre explicar y escribir los términos 4, 5 y 6 de la secuencia.

- b. Aquí se espera que el estudiante empiece a razonar deductivamente, gracias a la relación establecida en la solución del primer ítem cada uno de los términos de la secuencia desde el término 1 hasta el término solicitado, es decir el término 15. Se espera que el estudiante logre establecer la relación de suma entre cada término de la secuencia, y por lo tanto, logre hallar cualquier término posterior de la secuencia.
- c. Sabiendo el estudiante la relación entre un término y el próximo de la secuencia, es decir una vez establecido el patrón de construcción, el estudiante está en capacidad de deducir cualquier término de la secuencia, bien sea sumando hasta llegar al término exigido, o realizando la multiplicación del caso para encontrar un término un poco más lejano de la secuencia.
- d. Se espera que el estudiante descubra alguna una regla o una fórmula para hallar el término  $n$ ésimo de la secuencia. De esta manera, al contar con la fórmula, le permitirá encontrar cualquier término. Como se trata de una secuencia aritmética, al observar la secuencia, se puede observar que si a cada término se le suma cinco, se puede generar el siguiente término, y así sucesivamente. Por lo tanto:

$$8 + 5 = 13 \quad \text{Término 2}$$

$$13 + 5 = 18 \quad \text{Término 3}$$

$$18 + 5 = 23 \quad \text{Término 4}$$

$$23 + 5 = 28 \quad \text{Término 5}$$

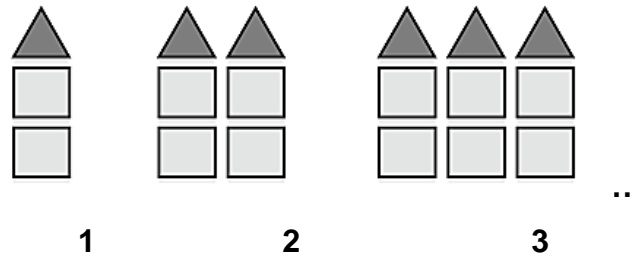
La fórmula es:  $(5 * \text{el número del término}) + 3$

- e. Para resolver este ítem se espera que el estudiante primero realice una resta del término que se pide menos el primer término. Luego de la resta el estudiante deberá hacer una división por 5 para luego, si el residuo es cero, entonces el término es un término de la secuencia de lo contrario pues no lo es. En este ítem el estudiante deberá hallar mediante un razonamiento inductivo, es decir a partir de la regla general y un caso particular, el término más cercano, si este número pertenece o no a la secuencia dada.
  
- f. En esta situación se espera que el estudiante basado en la regla y siguiendo algunos términos de la secuencia, o explicando cómo se genera el nuevo término sumándole cinco al término anterior, el otro estudiante pueda comprender cómo llegar a obtener el término 2017 de la secuencia aplicando de manera inductiva la regla obtenida a partir de los casos hallados.

**6.1.1.2 Análisis a posteriori de la Prueba diagnóstica.** En esta sección se presenta el análisis después de que los estudiantes presentaron la prueba diagnóstica. Se analizan las respuestas de algunos estudiantes en cada uno de los puntos de cada una de las tareas propuestas analizadas desde el marco conceptual.

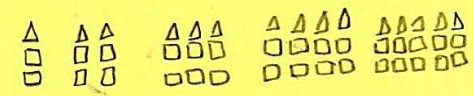
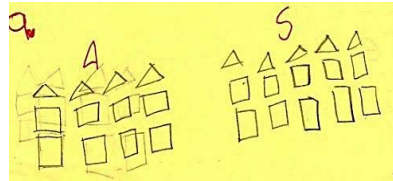
Se seleccionaron las evidencias de algunos estudiantes que presentaron la prueba diagnóstica; en el proceso de selección de los datos se presentan las evidencias de los jóvenes que tuvieron un mejor desempeño en el proceso de generalización de patrones para mostrar los mejores razonamientos cada una de las categorías. También se escogieron las evidencias de algunos de los estudiantes que mostraron un nivel de razonamiento pobre o que no lo hicieron de la mejor forma.

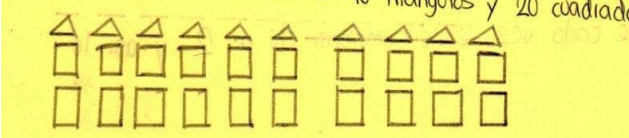
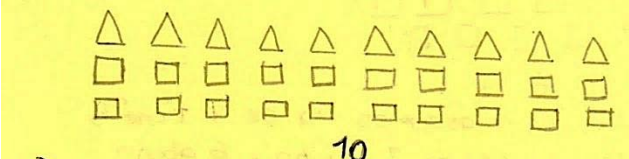
## 1. Construcción de Casas



- Construya las figuras 4 y 5.
- ¿En qué se diferencia la figura 1 de la figura 2?
- Explique cómo construyó las figuras 4 y 5.
- ¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos se necesitan para construir la figura 4?
- ¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos se necesitan para construir la figura 7?
- ¿Cuántos cuadrados y cuántos triángulos se necesitan para construir la figura 10? Puede dibujar la figura.
- Escribe cómo puede conocer el número triángulos y cuadrados que son necesarios para construir cualquier figura de la secuencia.

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE33		El estudiante construye los dos términos, el 4° y el 5°, identificando los rasgos comunes de la secuencia como son: un triángulo por cada dos cuadrados en cada término.
DIE34	<p>B) como vemos la figura 1 tiene un triángulo y dos cuadrados                  figura dos tiene dos triángulos y cuatro cuadrados.</p> <p>C) Para la 4 dibujo dibujo uno 4 triángulo y 8 cuadrados y                  5 dibujo 5 triángulos y 10 cuadrados</p>	El estudiante conjetura, y describe de manera textual para explicar el desarrollo de estos ítems.

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE29	<p>b. En que la 2 tiene el doble de la 1  c. La 4 sumando el doble de la 2 y la 5 con una mas de l</p>	<p>(Razonamiento abductivo).  Lo hace con claridad.</p> <p>El estudiante utiliza ya una relación de multiplicación entre varias de las figuras. Se evidencia un razonamiento abductivo en esta conjetura.</p>
DIE8	<p>1.  a)</p>  <p>Esto no  b) (En que se difer) Que una figura tiene mas cuadrados y triang  c) Poniendo dos cuadrados mas y un triangulo mas</p>	<p>Aquí se puede observar que el estudiante tuvo que dibujar la secuencia completa para poder construir las figuras 4 y 5. El estudiante siempre describe de manera verbal la explicación a las preguntas de manera simple. Sin embargo, no hay claridad en las respuestas.</p>
DIE3	<p>a.</p>  <p>La diferencia entre el 1 y el 2 son que el uno es el doble del 2  Con el 4 la hice en el doble del 2 el 5 el doble de</p> <p>La diferencia entre el 1 y el 2 son que el uno es el doble del 2.</p>	<p>Este estudiante no tiene clara una relación entre los cuadrados y los triángulos de una y otra figura. Las respuestas son muy ambiguas. Las conjeturas no son claras.</p>

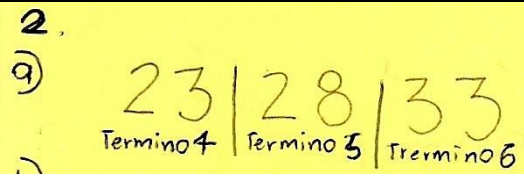
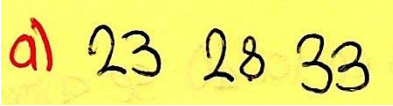
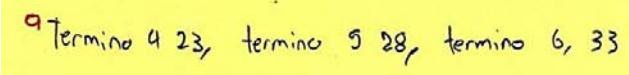
Est.	Evidencia	Razonamiento
	Bueno el 4 lo hice en el doble del 3, el 5 lo hice el doble del 4.	
DIE34	<p>D) Se necesitan 4 triángulos y 8 cuadrados</p> <p>E) para la figura 7 se necesitan 7 triángulos y 14 cuadrados</p> <p>F) para la figura 10 se necesitan 10 triángulos y 20 cuadrados</p> 	En este nivel de razonamiento inferencial (inductivo), el estudiante todavía no ha establecido una regla general. Simplemente lo hacen como un cálculo mental, pero no hay una explicación o una fórmula con rigor matemático.
DIE33	<p>d) 8 cuadrados y 4 triángulos</p> <p>e) 14 cuadrados y 7 triángulos</p> <p>f) 20 cuadrados y 10 triángulos</p> 	En esta situación la estudiante se limitó a escribir la cantidad exacta de triángulos y cuadrados para cada figura. De hecho, dibujó bien la figura 10, sin embargo no estableció una regla o fórmula general, por ahora se encuentra en un nivel de razonamiento abductivo.
DIE33	<p>Aquí los estudiantes responden el punto g de la primera tarea que dice: Escriba cómo puede conocer el número de triángulos y cuadrados que son necesarios para construir cualquier figura de la secuencia.</p> <p>g) Es fácil el 1 tiene una columna formada por 1 triángulo y 2 cuadrados, la figura dos tiene dos columnas formadas por 2 triángulos y 4 cuadrados... y así sucesivamente lo único que tenía que hacer es agregar una columna a la de 3 para formar una de 4 y después cuento las figuras</p>	Esta estudiante aun cuando no utiliza una fórmula específica para hallar la cantidad de cuadrados y triángulos, hace un análisis bastante simple, pero muy efectivo para responder a esta pregunta. Mediante la suma progresiva de los triángulos y los cuadrados en cada término logra establecer mediante una suma la cantidad total de

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE26	<p><i>g. (Porque) puede conocer porque cada figura tiene 1 triángulo y dos cuadros esto por estarse cada figura se hace depende de el número correspondiente.</i></p> <p>(Porque) puede conocer porque cada figura tiene un triángulo y dos cuadros, entonces cada figura se hace depende del número correspondiente.</p>	<p>figuras para cada término. Para términos posteriores se haría engorroso, o debería llevar una tabla.</p> <p>Este estudiante asocia el número de triángulos y cuadrados dependiendo del número del término de la figura. Sin embargo no hay una conexión entre una fórmula general y el número del término.</p>
DIE23	<p><i>g. para saber el número de triángulos</i></p>	<p>Esta estudiante dejó en blanco la respuesta. No se evidencia ningún análisis al respecto.</p>
DIE29	<p><i>g. por las formas que tienen</i></p>	<p>Este estudiante no se atrevió a establecer ninguna relación matemática en las figuras, más bien optó por responder a la pregunta de acuerdo con las formas de la figuras.</p>

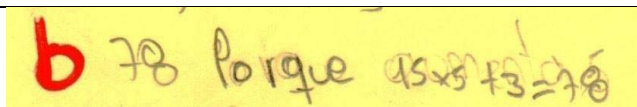
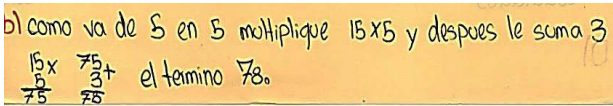
**2. Dada la siguiente secuencia numérica, contesta las preguntas que aparecen a continuación:**

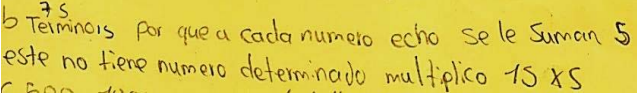
8	13	18	...
<b>Término 1</b>		<b>Término 2</b>	<b>Término 3</b>

a. ¿Cuáles son los números correspondientes a los términos 4, 5 y 6 de la secuencia?

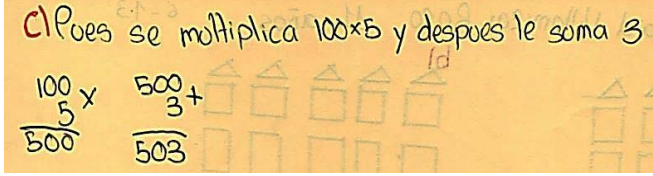
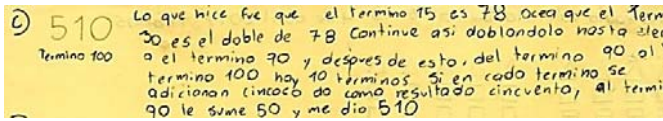
Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE33		La estudiante encontró los términos 4, 5 y 6 de manera abductiva, sumándole cinco al término anterior de la secuencia.
DIE34		Este estudiante sumó de a cinco a cada término de la secuencia para escribir los términos solicitados. Demostró un razonamiento abductivo.
DIE8		Este joven también escribió los términos siguiendo un razonamiento abductivo.

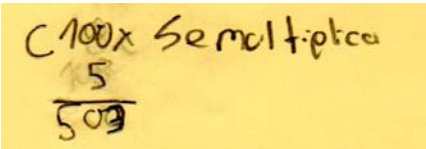
b. ¿Cuál es el número que corresponde al término 15? Explique su respuesta.

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE28		Este estudiante encontró el término realizando una operación combinada, es decir, aplicó una fórmula. Evidencia un razonamiento inductivo.
DIE34		Este estudiante también encontró a partir de una multiplicación más una suma

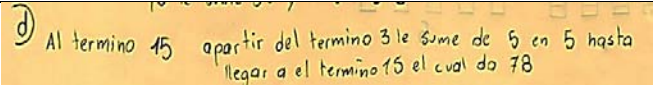
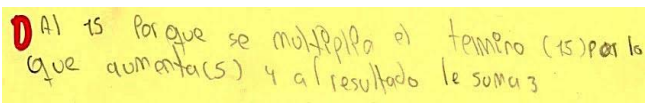
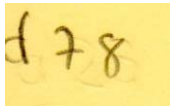
DIE31		<p>el número correcto; usó razonamiento inductivo.</p> <p>Este estudiante intentó encontrar este número usando una multiplicación, pero olvidó que la secuencia no empieza con un múltiplo de 5. Fue un buen intento, pero no usó la fórmula correcta.</p>
-------	--	--

c. ¿Cuál es el número que corresponde al término 100? Explique el procedimiento que realiza para obtener la respuesta.

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE34		<p>La respuesta de este estudiante evidencia un razonamiento inductivo, pues echa mano de una fórmula para hallar el número correspondiente al término 100.</p>
DIE33		<p>Esta estudiante echó mano de la recursividad para hallar la respuesta a esta pregunta. Sin embargo, se equivocó al hacer multiplicaciones sucesivas en el resultado final.</p>

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE32		Al resolver esta pregunta este estudiante encontró la respuesta correcta, sin embargo se puede ver claramente que aunque usó un razonamiento inductivo, el resultado no fue el correcto.

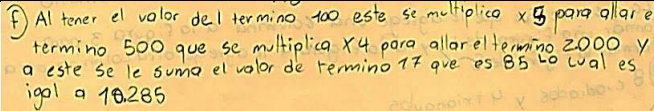
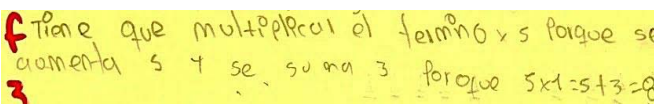
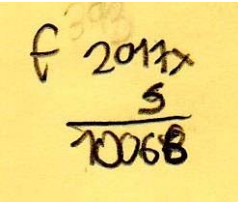
d. ¿A qué término corresponde el número 78? Escriba cómo le explicaría a un amigo, con todos los detalles, la manera cómo encuentra la respuesta.

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE33		Esta estudiante hace uso del razonamiento abductivo para ir sumando de un término a otro hasta que encuentra el término correspondiente.
DIE28		Este estudiante logró utilizar la misma fórmula que le sirvió para hallar el número 78, para encontrar el término correspondiente al número 78, usando un razonamiento deductivo.
DIE31		Este estudiante confunde el número del término con el número correspondiente al término. Piensa que el número correspondiente al término es lo mismo que el término de la secuencia.

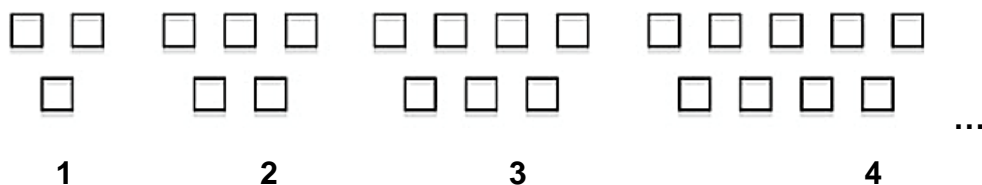
e. ¿Un amigo del salón piensa en el número 902? ¿Pertenece ese número a la secuencia dada? Explique por qué sí o por qué no.

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE34	<p>e) No porque los numeros de 5 tienen que terminar en 5 o 0</p>	<p>Aquí se ve claramente que el estudiante trata de resolver esta pregunta conjeturando, es decir hace uso de su razonamiento abductivo.</p>
DIE32	<p>e No por que tienen que terminar en 8 o en 3</p>	<p>Este estudiante sabe por simple razonamiento lógico que los números de la secuencia deben terminar en 8 o en 3, y de esta manera deduce que el número en cuestión no pertenece a la secuencia.</p>
DIE29	<p>e. No</p>	<p>Este estudiante escribe que no pertenece a la secuencia, pero no explica la razón, no aplica razonamiento deductivo.</p>

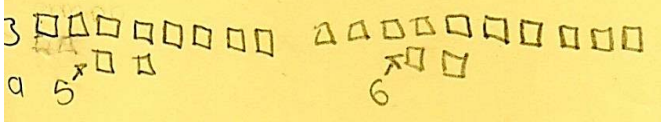
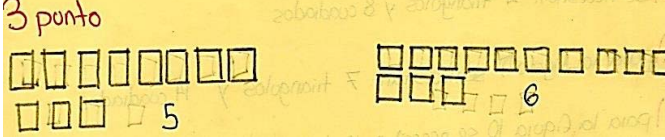

- f. Escriba un mensaje a un compañero que no asistió a clase, donde le explique con claridad y con todos los detalles qué debe hacer para calcular rápidamente el número que corresponde al término 2017.

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE33		<p>Esta estudiante hizo un intento por encontrar el número correspondiente al término 2017 utilizando una fórmula, sin embargo cometió un error en la fórmula, pero estuvo cerca.</p>
DIE28		<p>Este estudiante resumió de manera sencilla la fórmula para encontrar cualquier término de la secuencia, haciendo uso del razonamiento deductivo.</p>
DIE32		<p>Este estudiante utilizó una fórmula, le sumó tres pero cometió un error, ya que hizo mal la multiplicación, sin embargo utilizó un razonamiento deductivo.</p>


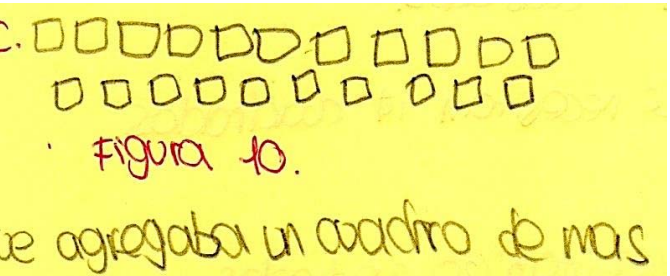
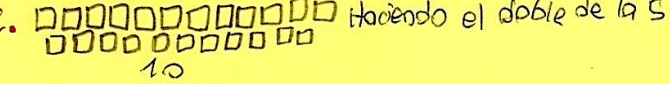
**3. Considere la secuencia geométrica que aparece a continuación.**



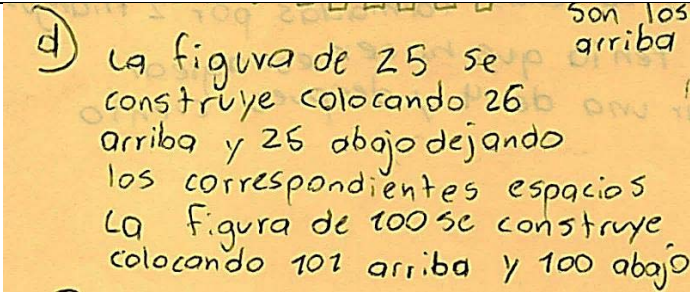
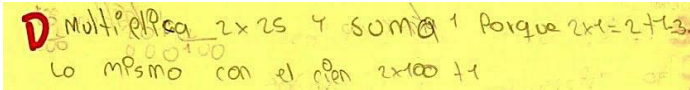
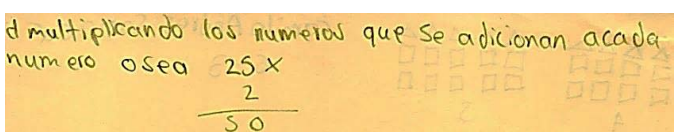
a. Dibuja la figura 5 y 6 de la secuencia.

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE31		<p>El estudiante dibuja sin ninguna dificultad las figuras 5 y 6 conjeturando a partir de los dibujos dados en la secuencia. Se evidencia un razonamiento abductivo. Sin embargo, las figuras no hacen parte de la secuencia.</p>
DIE34		<p>Se evidencia que el estudiante aplica un razonamiento abductivo partir de las figuras de la secuencia de manera lógica. Las figuras son correctas.</p>
DIE26		<p>Se puede evidenciar que al observar las figuras de la secuencia este estudiante logra dibujar las figuras próximas de las secuencias conjeturando, aplicando un razonamiento abductivo. Las figuras dibujadas sí corresponden a la secuencia dada.</p>

c. Dibuje la figura 10 de la secuencia. Explique cómo lo hace.

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE26		<p>El estudiante dibujó correctamente la figura 10 de la secuencia, con el número de cuadrados exacto. Este estudiante evidenció un buen razonamiento inductivo, pues construyó la figura con base en las figuras previas de la secuencia.</p>
DIE23		<p>La estudiante establece una relación entre el número de la figura y el número de cuadrados. Evidencia un razonamiento inductivo, ya que su elaboración se realizó a partir de las figuras anteriores.</p>
DIE29		<p>Este estudiante aun cuando aplica un factor multiplicativo entre las figuras 5 y 10 no dibuja bien la figura 10, y que la relación no es directa, sino que es una fórmula compuesta.</p>

- d. Escribe un mensaje a un compañero indicando cómo puede construir la figura 25 de la secuencia. Ahora explícale cómo puede construir la figura 100.

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE33		<p>Esta estudiante responde correctamente a la pregunta formulada, evidencia un razonamiento deductivo, y explica de manera simple la solución.</p>
DIE28		<p>Este estudiante utilizó una fórmula muy acertada para hallar el número de cuadrados para cada término posterior de la secuencia, con base en las observaciones preliminares. Utiliza un razonamiento deductivo para explicar la situación.</p>
DIE31		<p>En este caso este joven se atrevió a usar una fórmula matemática para estimar el número aproximado de cuadrados de la figura. Sin embargo se equivocó al aplicar la fórmula, ya que el número de cuadrados de esta figura es de 101.</p>

Est.	Evidencia	Razonamiento
		Utilizó un razonamiento deductivo, aun cuando se equivocó.

e. ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 500?

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE33	e) 1.001 cuadrados (500 + 1) 501 arriba y 500 abajo f) 201 cuadrados <sup>esta</sup> <sub>mal</sub>	Esta joven determinó correctamente el número de cuadrados del término solicitado. Evidencia un razonamiento inductivo a partir de la observación y el análisis de la secuencia.
DIE23	2. La figura 500 tiene 1001 cuadrados en total	Esta joven halló correctamente el número de cuadrados de la figura 500, sin embargo no aparece ninguna explicación para esta respuesta. Así que solo se puede evidenciar un razonamiento abductivo.
DIE26	La figura 500 tiene 507 cuadrados	Este joven determinó correctamente el número de cuadrados del término 500. Sin embargo, no escribió ninguna explicación sobre la razón de este

Est.	Evidencia	Razonamiento
		resultado. Usó un razonamiento abductivo ya que solo conjeturó este resultado.

f. ¿Cuántos cuadrados tiene la figura 100?

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE33	<p>f) 201 cuadros <sup>esta</sup> 101 <sup>mal</sup> arriba y 100 abajo</p> <p>g) No, es falsa <del>porque la falta</del></p>	Esta joven halló correctamente el número de cuadrados de la figura 100, lo hizo analizando la secuencia de manera gráfica. Se evidencia un razonamiento inductivo.
DIE31	f la figura 100 tiene 200 Cuadrados	Este estudiante no determinó correctamente el número de cuadrados del término 100. Tampoco escribió ninguna explicación sobre la razón de este resultado. Usó un razonamiento abductivo ya que solo conjeturó este resultado.
DIE23	tiene en total 201 cuadros	En este caso el estudiante DIE23 escribe correctamente el número de cuadros del término 100; sin embargo, no justificó su respuesta; por lo tanto, evidencia un razonamiento abductivo.

- g. David propone que una figura de la secuencia está formada por 310 cuadrados.  
¿La afirmación de David es verdadera o falsa? Explique su respuesta.

Est.	Evidencia	Razonamiento
DIE33		Esta joven trata de explicar que la cantidad de cuadros de la figura es impar porque el número es par; y según la secuencia debe ser impar el número de cuadrados.
DIE23		Esta joven evidencia un razonamiento abductivo, ya que solamente dice que es falso sin justificar su respuesta.
DIE28		Este joven dio una respuesta muy lógica esta pregunta; sin embargo, aplicó un razonamiento abductivo, ya que se justificó conjeturando esta respuesta.

De acuerdo con las evidencias de los estudiantes se puede observar que los estudiantes en la mayoría de los casos muestran una forma de razonamiento abductivo. Según esto, es prudente ayudar a los estudiantes a mejorar para alcanzar niveles de razonamiento superiores. Por lo tanto, en el diseño de Tareas de las intervenciones se planean Tareas en un comienzo más sencillas y se debe ir aumentando en complejidad para que los estudiantes vayan progresando poco a poco hasta alcanzar niveles de razonamiento más complejos. Así que, el diseño de las intervenciones se deben escoger secuencias sencillas en un comienzo, particularmente con figuras, y luego se debe ir buscando secuencias con más

complejidad para ayudar a los estudiantes a progresar en sus niveles de razonamiento.

**6.1.2 Intervenciones.** Como parte del proceso de recolección de datos, además de aplicar la prueba diagnóstica, se llevaron a cabo 4 intervenciones. En cada una de ellas se aplicaron Tareas para desarrollar con secuencias figurales y numéricas, presentándolas de manera gradual, desde las más fáciles hasta las más complejas en la última intervención. En cada una de estas pruebas, se presentaron secuencias numéricas y figurales; pero siempre se les exigió a los estudiantes observar, analizar e inferir a partir de los datos que dan inicialmente.

Como se señala en los estándares del MEN, cuando se presenta a los estudiantes una situación problémica deben desarrollar diversas habilidades descritas en la resolución de problemas como: el razonamiento, la representación, la formulación, comparación y ejecución de procedimientos y algoritmos y la comunicación de argumentos. En este sentido, cada una de las sesiones se trabajaron en tres momentos distintos; en un primer momento los estudiantes desarrollaron la prueba de manera individual; en un segundo momento los estudiantes trabajaron de manera grupal; y en un tercer momento los estudiantes socializaron sus soluciones, argumentaron y debatieron cada una de los resultados propuestos al desarrollar cada una de las tarea cada intervención.

Para el análisis de los datos, se desarrolló primero el análisis a priori de cada una de las intervenciones; mientras que, el análisis a posteriori se llevó a cabo de manera simultánea para todas las intervenciones, teniendo presente las categorías establecidas desde el marco conceptual.

**6.1.2.1 Intervención 1.** En esta intervención se presentaron 4 Tareas, tres secuencias figurales y una numérica. Después de la prueba diagnóstica, se reflexionó para diseñar una prueba básica sencilla como punto de partida para ir

potenciando la habilidad de reconocer patrones en secuencias. Y en la medida en la que se fueron presentando las intervenciones se fue aumentando el nivel de dificultad de cada una de las pruebas a los estudiantes.

A continuación se presenta la prueba y el análisis de lo que se espera pudiesen responder los estudiantes en cada una de las tareas propuestas.

1. Dada la siguiente secuencia con figuras geométricas, determine cuál es una regla de formación. Escríbala con sus palabras.



Regla de formación:

---

---

---

---

---

---

---

---

La figura en el lugar 16 será:\_\_\_\_\_.

La figura en el lugar 21 será:\_\_\_\_\_.

Se presenta una secuencia con cuadrados. En esta primera tarea los estudiantes deben encontrar la regla de formación, también se les pide que represente la figura 16 y la figura 21. A continuación se señala una posible manera de resolver la situación.

Para el caso de la regla de formación se espera que el alumno observe la secuencia, la analice, y comprenda que con solo dos figuras, un cuadrado grande y uno pequeño se puede generar la secuencia figural, repitiendo de manera secuencial las dos figuras iniciales se genera entonces la secuencia dada. El término impar de la secuencia corresponde al cuadrado grande, mientras que el término par de la secuencia corresponde al cuadrado pequeño.

La pregunta que les pide a los estudiantes que representen la figura 16 la deben responder basada en esa regla de formación anterior. Al comprender que la secuencia se basa solo en dos cuadrados, para hallar la figura 16 corresponderá al término de la figura par, por lo tanto el estudiante debería dibujar un cuadrado grande.

Con respecto a la pregunta que le pide al estudiante que represente la figura 21, deberá hacer el análisis como en la situación anterior. Como le están pidiendo que halle un término impar, el alumno identifica que es un término impar, y por lo tanto corresponde al cuadrado pequeño, que es el que debe dibujar para este término de la secuencia.

2. Dadas la siguiente secuencia con figuras geométricas, determine cuál es una regla de formación. Escríbala con sus palabras.



Regla de formación:

---

---

---

---

La figura en el lugar 25 será: \_\_\_\_\_.

La figura en el lugar 31 será: \_\_\_\_\_.

Se presenta una secuencia con varias figuras geométricas. En esta primera tarea los estudiantes deben encontrar la regla de formación, también se les pide que represente la figura 25 y la figura 31. A continuación se describe una posible manera de resolver la situación.

Para el caso de la regla de formación se espera que el alumno observe la secuencia, la analice, y comprenda que hay varias figuras, un triángulo, un cuadrado, un pentágono y un hexágono, con las cuales se puede generar la secuencia figural. El primer término de la figura es un triángulo, el segundo término es un cuadrado, el tercer término corresponde a un pentágono, y el cuarto término corresponde a un hexágono.

La pregunta que les pide a los estudiantes que representen la figura 25 la deben responder basada en esa regla de formación anterior. Al comprender que la secuencia se basa en esas cuatro figuras, y que cada corresponde a un término de la secuencia, para hallar el término 25 de la misma, corresponderá al triángulo, por lo tanto el estudiante debería dibujar un triángulo.

La siguiente pregunta les pide a los estudiantes que representen la figura 31 deben responder basada en esa misma regla de formación. Al comprender que la secuencia se basa en esas cuatro figuras, y que cada corresponde a un término de la secuencia, para hallar el término 31 de la misma, corresponderá al triángulo, por lo tanto el estudiante debería dibujar un pentágono.

**3. En la siguiente secuencia numérica, determine cuál es una regla de formación. Escríbala con sus palabras.**

**1, 3, 5, 7, 9,...**

Regla de formación:

---

---

---

---

---

- ¿Cuáles son los números correspondientes a los términos 6, 7 y 8 de la secuencia?
- ¿Cuál es el número que corresponde al término 15? Explique sus respuestas.
- ¿Cuál es el número que corresponde al término 30? Explique el procedimiento que realiza para obtener la respuesta.
- ¿A qué término corresponde el número 67? Escriba cómo le explicaría a un amigo, con todos los detalles, la manera cómo encuentra la respuesta.

En este caso se presenta al estudiante una secuencia numérica. Esta secuencia está conformada por una secuencia de números que siguen un patrón particular. Los estudiantes se encuentran con una secuencia de los números impares. Es fácil de reconocer los números impares, y generar términos posteriores de la secuencia.

- En este ítem el estudiante debe encontrar los términos 6,7 y 8 de la secuencia numérica. Primero que todo el estudiante ya debería haberse dado cuenta de que se trata de la secuencia de los números impares y, por lo tanto, debería escribir los números correspondientes a los términos 6, 7 y 8 que son: el 11, el 13 y el 15 respectivamente aplicando un razonamiento abductivo.

- b. Para hallar el número que corresponde al término 15, el estudiante puede mediante un razonamiento abductivo escribir los números de la secuencia uno por uno hasta llegar al término 15, el cual es el número 29, o de manera inductiva puede establecer una regla general a partir de los términos hallados en el numeral a.

Una regla general para esta secuencia sería:  $2 \times N - 1$ . Por ejemplo, para el caso del término 11 el valor correspondiente sería:  $2 \times 11 - 1 = 22 - 1 = 21$ . Para el caso del término sería:  $2 \times 13 - 1 = 26 - 1 = 25$ .

- c. De la misma forma como se halló el término 15, el término 30 también puede hallarse de forma inductiva, basado en la regla general hallada.
- d. Aplicando la regla general, y reemplazando el valor de  $n$  por el número requerido, se puede a partir de un razonamiento deductivo encontrar el término para el número 67.

**4. Observe la siguiente secuencia y complete las oraciones (complete la tabla):**



Lugar	Cantidad de círculos
1	
2	
3	
4	
5	
n	

- a. Construya las figuras 4 y 5.
- b. La cantidad de círculos en la figura 4 sería:\_\_\_\_\_.
- c. La cantidad de círculos en la figura 6 sería:\_\_\_\_\_.
- d. La figura\_\_\_\_\_tendría 24 círculos.
- e. Si una figura tiene 30 círculos a cuál figura corresponde  
a:\_\_\_\_\_.

Para desarrollar esta tarea se les presenta una secuencia gráfica con tres términos. Cada término está compuesto con determinada cantidad de círculos. El primer término se compone de dos círculos, el segundo término contiene cuatro círculos, y el tercer término muestra seis círculos. Aquí se le presentan una secuencia de situaciones al estudiante para desarrollar los diferentes tipos de razonamiento.

- a. En este ítem se le pide al estudiante que dibuje las figuras correspondientes a los términos 4 y 5. Este es un tipo de razonamiento abductivo, ya que a partir de unos términos ya dados, el alumno tiene la oportunidad de representar basado en sus propias percepciones y apreciaciones los términos próximos a los tres iniciales de la secuencia.
- b. Al llenar los datos de la tabla, el estudiante tiene la oportunidad de ir descubriendo la regla o fórmula general que podrá utilizar para ir hallando los términos posteriores de la secuencia o los que les sea requerido.
- c. Para resolver esta pregunta se espera que el estudiante utilice la tabla, siga la secuencia dada en la tabla y descubra el patrón para el número de círculos, que en este caso sería del doble número de círculos por cada término, determinando así que para el sexto término sería de 12 círculos, ya que  $6 \times 2 = 12$  círculos.

- d. Esta pregunta sería fácil de resolver si el estudiante ya sabe que por cada término debe haber el doble de círculos, entonces si la figura tiene 24 círculos, se puede determinar por la cantidad de círculos que el término es el término 12.
- e. Observando la secuencia gráfica y con la relación ya establecida, la cual es, que por cada término se le asigna el doble de círculos, para el estudiante que ya haya tenido claro esta relación multiplicativa, sería fácil inferir que la figura que tiene 30 círculos corresponde al término 15, pues la figura 15 tendría el doble de círculos del número del término, esto es 30 círculos.

**6.1.2.2 Intervención 2.** Después de haber reflexionado sobre los resultados de la primera intervención, aquí se presenta a los estudiantes una prueba con tres tareas, dos secuencias gráficas y una secuencia numérica. Como novedad se presenta el hecho de cada una de las secuencias lleva una tabla, la cual tienen que ir llenando, y que les servirá de soporte para ir descubriendo el patrón, obtener una fórmula general o generar un factor multiplicativo que les ayude a determinar cualquier término de la secuencia.

A continuación se presenta en análisis a priori de la segunda intervención, resolviendo punto por punto cada una de las tareas propuestas.

**1. Observa las siguientes figuras formadas con palitos de fósforos:**



Figura 1

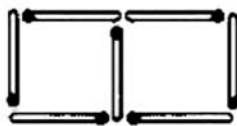


Figura 2

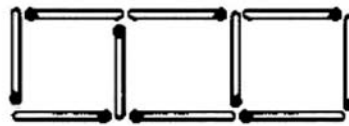


Figura 3

- a) ¿Cuántos fósforos se necesitan para formar la figura 4 formada por 4 cuadrados siguiendo la secuencia mostrada en la figura?

b) ¿Y cuántos fósforos se necesitan para formar la figura 5 formada por 5 cuadrados?

Al observar la secuencia gráfica se puede ver que por cada término hay tantos cuadrados como indica el número del término. Para determinar el número de fósforos, se puede ver que hay una relación multiplicativa, pues a medida que aumenta el número de términos, se aumenta la cantidad de fósforos. A partir del término 2 y de ahí en adelante se incrementa en 3 la cantidad de fósforos que se requieren para completar los cuadrados de un determinado término de la secuencia. Así que, observando la secuencia, la cantidad de fósforos que se requieren para armar la figura 4 es igual a la cantidad de fósforos del término 3 más 3 fósforos, es decir,  $10 + 3 = 13$  fósforos. Por otra parte, para hallar la cantidad de fósforos que se necesitan para armar los 5 cuadrados que conforman el término cinco de la figura se requieren 16 fósforos de la figura 4 más 3 fósforos. Por lo tanto, el número de fósforos requeridos para armar el término 5 de la figura es de  $13 + 3 = 16$  fósforos.

c) Completa la siguiente tabla:

Como parte de la estrategia para determinar la fórmula y encontrar términos posteriores de la secuencia gráfica, se les dejó como tarea a los estudiantes, llenar la tabla que sigue a continuación, con el fin de ayudarles a encontrar la fórmula o regla general para cualquier término de la secuencia. La tabla quedaría de la siguiente manera.

	<b>Figur a 1</b>	<b>Figur a 2</b>	<b>Figur a 3</b>	<b>Figur a 4</b>	<b>Figur a 5</b>	<b>Figur a 6</b>	<b>Figur a 7</b>	<b>...</b>	<b>Figur a N</b>
<b>No. de cuadrado s</b>	1	2	3	4	5	6	7	<b>...</b>	N
<b>No. de fósforos</b>	4	7	10	13	16	19	22	<b>...</b>	$3.N+1$

d) Escriba la fórmula para hallar el número de fósforos para cualquier figura de la secuencia. Observe la tabla y explique cómo halló esa fórmula general.

Al llenar la tabla los estudiantes cuentan ahora con una herramienta muy útil para determinar la cantidad de cuadrados en cada término de la secuencia, por otra parte, también pueden hallar la cantidad de fósforos que se requieren para armar la figura en cada término.

Para determinar la cantidad de cuadrados que se requieren para un término en particular Al observar la tabla se puede ver que para cada término de la secuencia, se requieren igual cantidad de cuadrados al número del término. Por otra parte, para encontrar el número de fósforos que se requieren para un determinado término de la secuencia, se puede observar que para cada término el número de fósforos se aumentan en tres para cada término. Hay al menos dos formas de encontrar el número de cuadrados y la cantidad de fósforos de cualquier término de la secuencia. Se puede encontrar una fórmula general siguiendo la información de la tabla llena. De esta tabla se puede generar una fórmula para el número de cuadrados, si se observa la tabla en la fila de arriba del número de cuadrados por simple observación se puede ver que para cualquier término de la secuencia el número de cuadrados coincide con el número del término; por ejemplo, si se observa la figura 5 el número de cuadrados de este término es 5, y si se observa el término 6, el número de cuadrados para este término es 6. Por lo tanto, se puede concluir que el número de cuadrados para cada término es  $N$ , donde  $N$  representa el número del término.

Para encontrar el número de fósforos para cada término hay que seguir también la información de la tabla, la cual da pistas para encontrar la fórmula que puede generar cualquier término de la secuencia. Si el estudiante analiza la información de la fila de debajo de la tabla, se puede determinar que para cada nuevo término el número de fósforos se aumenta en tres por cada término siguiente; aquí se puede escribir una relación multiplicativa para hallar el número de fósforos de cualquier

término. Al ir pasando de un término a otro de la secuencia se puede ver que el  $3N$  se repite, pero le falta algo para que coincida con los números de la tabla, y ese algo es:  $3N + 1$ . En este momento se ha hallado la fórmula para encontrar el número de fósforos de cada término de la secuencia.

**2. En la siguiente secuencia numérica, determine la regla de formación. Escríbala con sus palabras. Complete la tabla para ayudar a encontrarla.**

2,      5,      8,      11,      14, ...

Término 1      Término 2      Término 3      Término 4      Término 5

<b>Término</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>...</b>	<b>N</b>
<b>Número</b>	<b>2</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>11</b>	<b>14</b>				<b>...</b>	

- ¿Cuáles son los números correspondientes a los términos 6, 7 y 8 de la secuencia?
- ¿Cuál es el número que corresponde al término 12? Explique sus respuestas.

Al observar la secuencia se puede apreciar que cada uno de los términos de la secuencia se van generando al sumarle 3 a cada nuevo término de la secuencia, empezando desde el número 2, que es el primer término. Entonces, para responder la primera pregunta que dice que cuáles son los números correspondientes a los términos 6, 7 y 8 de la secuencia, se puede seguir desarrollando hasta llegar al término 5 que es el número 14, y al continuar el conteo se puede inferir que para el término 6 el número es el 17, para el término 7 el número que le corresponde es el 20, y el número 3 es el número que le corresponde al término 8. Todo esto se alcanza solo con sumar de tres en tres cada nuevo término de la secuencia

numérica.

Para encontrar el número que corresponde al término 12, se puede seguir sumando de 3 en 3 desde el término 8 hasta llegar al término 12; así que, si le sumamos 3 al término 8 nos da 26, que corresponde al término 9, luego si le sumamos 3 al término 9 nos da 29, que corresponde al término 10, si al término 10 le sumamos 3 nos da 32, que corresponde al término 11, y finalmente si le sumamos 3 al término 11, nos da 35 que corresponde al término 12 de la secuencia. Hallar estos términos de la secuencia solo requirió de ir sumando de 3 en 3 hasta llegar al término 12. Sin embargo para encontrar números para términos más lejanos de la secuencia el proceso se vuelve un tanto tedioso y propenso a errores matemáticos, por lo que la búsqueda de una fórmula matemática se hace más importante y más práctica.

- c. ¿Cuál es la fórmula general para esta secuencia? Observe la tabla y explique su respuesta.

Luego de haber encontrado los números correspondientes a los términos 6, 7 y 8 los jóvenes se encuentran con el desafío de hallar la fórmula general, para determinar cualquier término de la secuencia. Hay que observar la tabla para fijarse en las regularidades o cosas comunes que van pasando a medida que se recorre la tabla. En primer lugar, como se mencionó antes, cada nuevo término de la secuencia se halla sumándole 3 al término anterior; sin embargo, hay un problema cuando se observa el primer término de la secuencia, ya que no empieza en 3, sino en 2. Ahí podrían encontrar su primera dificultad los estudiantes; sin embargo, si se fijan más detenidamente, al multiplicar cada número de la secuencia por 3 y restarle 1 se va generando cada número de la secuencia. De esta manera la fórmula de la secuencia será algo como esto:  $3N - 1$ . Esta fórmula la pueden ir aplicando para cada uno de los términos de la secuencia y la van verificando uno a uno.

Por ejemplo, si  $N = 1$ , se puede ver que  $3 \times 1 = 3$  menos 1, igual a 2.

Si  $N = 2$ ,  $3 \times 2 = 6$  menos 1, igual a 5.

Cuando  $N = 3$ ,  $3 \times 3 = 9$ , menos 1, igual a 8.

Y así sucesivamente, se puede extender esta fórmula para cualquier término de esta secuencia numérica.

- d. ¿Cuál es el número que corresponde al término 25? Explique el procedimiento que realiza para obtener la respuesta.

Habiendo hallado la fórmula general, los estudiantes ya cuentan con una herramienta muy importante para encontrar cualquier término de la secuencia. Sin embargo, algunos estudiantes encuentran términos posteriores de la secuencia de manera verbal, o de alguna otra manera, aunque algunas veces se equivocan en el intento.

Aplicando la fórmula se puede encontrar el número correspondiente al término 25 de la secuencia así:

$$2 \times N - 1 = (3 \times 25) - 1 = 75 - 1 = 74.$$

Hay que tener presente que no todos los estudiantes resuelven este punto aplicando la fórmula general, no obstante, algunos utilizan operaciones matemáticas, o siguen estrictamente la secuencia de manera ordenada hasta llegar al término que se les requiere, y sus justificaciones se hacen de manera verbal o descriptiva.

- e. ¿A qué término corresponde el número 67? Escriba cómo le explicaría a un amigo, con todos los detalles, la manera cómo encuentra la respuesta.

Una vez más se puede echar mano de la fórmula para verificar si el número 67 corresponde a alguno de los términos de la secuencia matemática. Aplicando la fórmula se puede aproximar al valor más cercano para determinar si es o no es

parte de la secuencia. Sabiendo que la fórmula contiene los múltiplos de 3, en este caso se puede probar con el término número 23, que se aproxima al número 67, y al aplicar la fórmula daría lo siguiente:

$$= 3 \times 23 - 1 = 69 - 1 = 68.$$

Si se prueba con un número más pequeño, es decir, por debajo del número solicitado, se puede verificar con la fórmula, y da lo siguiente:

$$= 3 \times 22 - 1 = 66 - 1 = 65.$$

Habiendo analizado los dos valores posibles más cercanos se puede concluir que el número 67 no pertenece a ningún término de la secuencia

**3. Observe la siguiente secuencia gráfica y complete las oraciones (complete la tabla):**

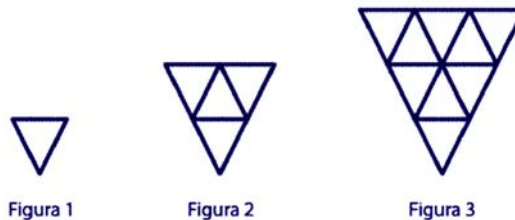
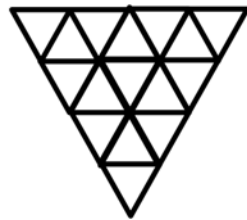


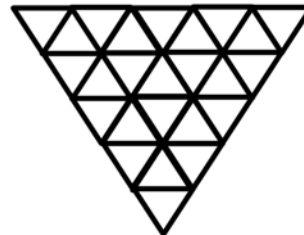
Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	...	N
Número de triángulos	1	4	9	16	25	36	49	64	...	N <sup>2</sup>

- Construya las figuras 4 y 5.
- La cantidad de triángulos en la figura 4 sería: \_\_\_\_\_.
- La cantidad de triángulos en la figura 5 sería: \_\_\_\_\_.

En este ejercicio se le sugiere a los jóvenes que completen primero la tabla, de esta manera podrán observar mejor el patrón que se repite en la secuencia gráfica. El primer punto es construir las figuras 4 y 5, para construir las figuras los estudiantes deben determinar la cantidad de triángulos que son necesarios para construir cada término, al seguir los tres primeros términos de la secuencia gráfica. Si el estudiante ha llenado toda la tabla le será más fácil observar con detenimiento la cantidad de triángulos necesarios para construir las figuras 4 y 5. Aquí el estudiante dibujará las figuras de los términos 4 y 5 siguiendo los modelos de las figuras de los términos 1, 2 y 3. Los puntos b y c serán fáciles de responder pues el estudiante tendrá la respuesta en la tabla.



**Figura 4**



**Figura 5**

- d. ¿Cuál es la fórmula general para esta secuencia? Observe la tabla y explique su respuesta.

Una vez que el estudiante ha llenado completamente la tabla con sus valores, esta tabla le da pistas para identificar una posible regla de formación de esta secuencia. Si el estudiante observa la tabla varias veces y la mira con detenimiento, podrá ver que para cada valor de cada número natural existe una forma común en cada uno de ellos que se repite por cada término de la secuencia. Así podrán descubrir que el número de triángulos para cada término se halla escribiendo el cuadrado de cada número natural. Para el término 1, el cuadrado de 1 es 1. Para el término 2 el cuadrado del número 2 es 4. Para el término 3 el cuadrado del término 3 es 9. Para el término 4 el cuadrado del término 4 es 16, y así sucesivamente.

El número de triángulos de cada término de la secuencia queda definido por la expresión matemática:  $N^2$ .

e. La figura \_\_\_\_\_ tendría 81 triángulos.

Este punto lo pueden resolver los estudiantes al saber la fórmula hallada en el punto anterior o a prueba y error. Algunos estudiantes podrían utilizar la estrategia de dibujar las figuras una a una hasta llegar al término 9, y luego contar la cantidad de triángulos en cada término, hasta darse cuenta de que la figura 9 es la que contiene 81 triángulos. Por otra parte, los que hayan determinado la regla de formación con la expresión matemática, podrán aplicarla para verificar para cada uno de los términos de la secuencia, en cuál de ellos se cumple que para  $N^2 = 81$ ; en este caso podrán determinar aplicando la fórmula que para el término 9, la figura correspondiente que contiene 81 triángulos es la figura 9.

f. Si una figura tiene 100 triángulos a cuál figura corresponde:  
\_\_\_\_\_.

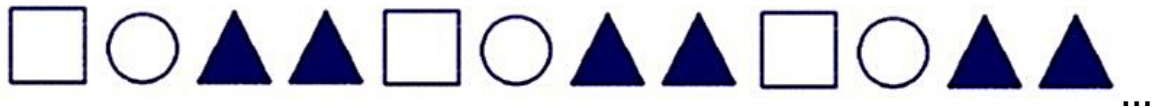
En este caso los estudiantes pueden hallar el término que contiene 100 triángulos a prueba y error dibujando cada una de la figuras hasta llegar a una que contenga 100 triángulos. O también podrán echar mano de la fórmula para encontrar el término que contiene 100 triángulos. Si se utiliza la fórmula aplicar para cuando  $N = 10$ , y se halla el valor, y que da:  $10^2 = 100$ . Este resultado le indica al estudiante que para el término 10 el número de triángulos es 100, y la respuesta es evidente, que el término 10 contiene 100 triángulos.

**6.1.2.3 Intervención 3.** Después de revisar los resultados de la segunda intervención, en esta prueba se presenta a los estudiantes tres tareas, dos secuencias gráficas y una numérica. Cada una de las secuencias lleva una tabla, la cual deben desarrollar por completo, ya que les servirá de apoyo para encontrar

una regla de formación de cada secuencia, y así obtener una fórmula general o generar un factor multiplicativo que les ayude a determinar cualquier término de la secuencia.

A continuación se presenta en análisis a priori de la tercera intervención, resolviendo punto por punto cada una de las tareas propuestas.

**1. Observa la siguiente secuencia formada con figuras geométricas:**



a) Complete la siguiente tabla.

	Término 1	Término 2	Término 3	Término 4	Término 5	Término 6	Término 7	Término 8	...	Término N
Figura									...	?

En este punto los jóvenes deben llenar completamente la tabla, ir dibujando el siguiente término de la secuencia gráfica; esto les ayudará a determinar la regla de formación de la secuencia, para encontrar cualquier término posterior de la secuencia. Los estudiantes deberán observar con detenimiento el patrón que se repite para entender el comportamiento de la secuencia.

b) Dibuje la figura en el lugar 17:









El estudiante debe observar detenidamente cómo se va generando la secuencia. Si observa bien, solo cuatro figuras (polígonos) forman la secuencia gráfica, y estas cuatro figuras geométricas se van repitiendo una y otra vez para generar los términos posteriores de la secuencia. Así que, el estudiante puede ir llevando un conteo de las figuras para determinar en qué posición cae un determinada figura

geométrica, para ir identificándola con un número y así poder encontrar cualquier término posterior. Por ejemplo, al cuadrado puede asignársele el número 1, al círculo el número 2, el primer triángulo el número 3, y al segundo triángulo el número 4. Después, estas figuras vuelven a repetirse, y los números vuelven a empezar, entonces la segunda vez que vuelven a aparecer las figuras los números que se les asignan son: al cuadrado el número 5; al círculo el número 6; al primer triángulo el número 7; y al segundo triángulo el número 8.

Por tercera vez estas figuras vuelven a repetirse, y los números vuelven a continuar, los números asignados a cada figura son: al cuadrado el número 9; al círculo el número 10; al primer triángulo el número 11; y al segundo triángulo el número 12. Como puede verse, las figuras se vuelven a repetir cada 4 números, porque son cuatro figuras, y estas figuras se vuelven a repetir cada 4 números de la secuencia.









Teniendo en cuenta estas observaciones, se puede determinar con facilidad la figura correspondiente al término 17, se multiplica el número 4 hasta llegar al valor más cercano al número solicitado, en este caso el 17 y se obtiene que  $4 \times 4 = 16$ , el cual es el número más cercano. Entonces siguiendo el patrón de formación la figura que sigue es el cuadrado.

La tabla me muestra siguiendo el patrón de múltiplos de 4, la figura que sigue a partir de 16, el múltiplo más cercano.

	Término 17	Término 18	Término 19	Término 20	Término 21	Término 22	Término 23	Término 24	...	Término N
Figura									...	?









c) Dibuje la figura en el lugar 26:

Como en el punto anterior, cada figura tiene asignado un número, y teniendo en cuenta que cada 5 términos las figuras vuelven a repetirse, entonces se divide el número 26 entre 4 para poder asignarle un número a cada una de las figuras de la secuencia. El múltiplo más cercano del número 4 es el número 24, y aquí hay que empezar a contar de 1 a 4 para identificar la figura que cae en el número 26, entonces siguiendo la secuencia la figura 25 corresponde al cuadrado; mientras que la figura 26 corresponde al círculo, así que, la figura 26 es un círculo.

	Término 21	Término 22	Término 23	Término 24	Término 25	Término 26	Término 27	Término 28	...	Término N
Figura									...	?

d) Dibuje la figura en el lugar 35:





Aquí se sigue el procedimiento anterior, encontramos el múltiplo de 4 más cercano a 35 y se obtiene el número 32, desde aquí se empieza a sacar el número siguiente y la figura correspondiente, por ejemplo, al número 33 le corresponde el cuadrado, al número 34 le corresponde el círculo, y al número 35 le corresponde el triángulo. Así que, la figura correspondiente al número 35 es el triángulo.

	Término 33	Término 34	Término 35	Término 36	Término 37	Término 38	Término 39	Término 40	...	Término N
Figura									...	?

- e) Escriba la regla de formación de la secuencia. Observe la tabla y explique cómo halló esa regla de formación.

El estudiante cuenta con una gran herramienta para resolver este punto ya que, la tabla brinda una información importante para entender cómo se genera esta secuencia gráfica. Se puede ver que las figuras se repiten cada 5° término, es decir, la secuencia está constituida solo por 4 figuras, y vuelve a empezar la secuencia de estas 4 figuras y así se repite la secuencia indefinidamente. Por lo tanto, es predecible que esa misma secuencia se repite con los múltiplos de 4, ahí vuelve a empezar la secuencia de esas mismas 4 figuras. En este orden de ideas es fácil predecir que figura corresponde en los términos posteriores ya que siempre sigue un patrón en los términos posteriores durante toda la secuencia; esto es, que siempre esas mismas 4 figuras se repiten durante toda la secuencia. Se puede describir entonces la formación de la siguiente manera:

### Cuadro 2. Explicación de la formación de la secuencia gráfica

Figura	Formación de la secuencia
	Esta figura se presenta inmediatamente después de los términos que son múltiplos de 4. Por ejemplo, $4+1 = 5$ , $8+1 = 9$ , $12+1 = 13$ , etcétera.
	Esta figura se presenta dos lugares después de los términos que son múltiplos de 4. Por ejemplo, $4+2 = 6$ , $8+2 = 10$ , $12+2 = 14$ , etcétera.
	Esta figura se presenta tres lugares después de los términos que son múltiplos de 4. Por ejemplo, $4+3 = 7$ , $8+3 = 11$ , $12+3 = 15$ , etcétera.
	Esta figura se presenta en los términos que son múltiplos de 4. Por ejemplo, 4, 8, etcétera.

Fuente. Diseño del docente investigador

2. En la siguiente secuencia numérica, determine la regla de formación. Escríbala con sus palabras. Complete la tabla para ayudarla a encontrarla.

2,	4,	6,	8,	10,	...					
<b>Término 1</b>	<b>Término 2</b>	<b>Término 3</b>	<b>Término 4</b>	<b>Término 5</b>						

<b>Término</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>...</b>	<b>N</b>
<b>Número</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>18</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>14</b>	<b>16</b>	<b>...</b>	<b>2 x N</b>

a. ¿Cuáles son los números correspondientes a los términos 6, 7 y 8 de la secuencia?

Al observar la secuencia numérica se puede observar que cada nuevo término se va produciendo sumándole dos al término anterior. Esta secuencia es muy sencilla de trabajar, ya que para obtener un nuevo término se le debe ir sumando de a dos al término anterior. Así que, la secuencia se vuelve muy fácil desarrollar, el número correspondiente al término 6 es el 12, el número correspondiente al término 7 es el 14 y el número correspondiente al término 8 es el 16.

b. ¿Cuál es el número que corresponde al término 15? Explique su respuesta.

Hay dos formas de resolver este punto, una sería ir sumando de dos en dos desde el primer término hasta llegar al término 15 y dar la respuesta. Si se suma de dos en dos hasta llegar al término 15 se obtiene como respuesta el número 30, para el término correspondiente al número 15, el estudiante razona de manera inductiva. La otra forma es por medio de una fórmula matemática. Si se observa detenidamente la secuencia matemática, se puede ver que la secuencia lleva un patrón de formación implícito, esto es, que para obtener el siguiente término hay que sumarle de a dos, lo cual me lleva al principio de la multiplicación que es una suma abreviada. Así que, cada nuevo término se obtiene multiplicando el término por el número 2. Por lo tanto, para el término 15 el número correspondiente es el

número 30, ya que si se multiplica el número del término, en este caso el número 15 por 2 se obtiene el número 30. Aquí el estudiante debe evidenciar un razonamiento inductivo.

- c. ¿Cuál es la fórmula general para esta secuencia? Observe la tabla y explique su respuesta.

Al observar detenidamente la tabla completamente llena, se puede observar que para obtener el término siguiente de la tabla hay que ir sumando de a dos al término anterior para así ir obteniendo el nuevo término; es decir esta secuencia se forma con los números naturales pares. Pero, si se mira con más detenimiento la tabla, se puede ver que para cada término de la secuencia si se multiplica el número del término por dos, se obtiene el número correspondiente para este término. De esta forma, lo que se ha hallado es la fórmula general para encontrar cualquier término de la secuencia numérica. Esta expresión matemática representa la regla de formación, a saber:

Número a hallar =  $2 \times N$ . Donde  $N$  es el número del término.

Por ejemplo, si se quiere hallar el número correspondiente al término 21, lo que se debe hacer es aplicar la fórmula matemática para el término 21, y nos queda:

Número para el término (21) =  $21 \times 2 = 42$ . De manera que, el número es el 42 y corresponde al número del término 21 de la secuencia numérica.

- d. ¿Cuál es el número que corresponde al término 25? Explique el procedimiento que realiza para obtener la respuesta.

Hay dos formas de resolver este punto. Primero se puede ir sumando de dos en dos hasta llegar al término 25, y así encontrar el número solicitado, que en este caso es el número 50.

La otra forma de resolver el ejercicio es aplicando la expresión matemática que se encontró para hallar cualquier término de la secuencia. Para hallar este término simplemente aplicamos la fórmula:  $2 \times N$ . En ambos casos el estudiante razona de manera deductiva valiéndose del factor sumativo y de la fórmula hallada.

Número para el término (25) =  $25 \times 2 = 50$ .

Así que el número solicitado es el 50 correspondiente al término 25.

- e. ¿A qué término corresponde el número 32? Escriba cómo le explicaría a un amigo, con todos los detalles, la manera cómo encuentra la respuesta.

Este punto es fácil de resolver si ya se tiene una regla de formación, o si se sabe la fórmula matemática para encontrar cualquier término de la secuencia. Como se sabe que cada término está asociado con los números pares, entonces es de esperar que cualquier término de la secuencia termine en número par; por lo tanto, es de esperar que el número 32 haga parte de esta secuencia porque es un número par. Ya se sabe que el número 32 hace parte de la secuencia numérica por ser par, pero si se quiere saber a cuál término de la secuencia hace parte, entonces hay que dividir el número entre 2 para saber a cuál término de la secuencia corresponde, o también se puede hallar desglosando los múltiplos del número 2 hasta llegar hasta el número 32. Podemos hallar el término de la secuencia por el primer método, es decir dividiendo el número por 2 para obtener el término que le corresponde al número 32. Se calcula así:

$32 \div 2 = 16$ . Corresponde al término 16 de la secuencia.

3. Observe la siguiente secuencia gráfica y complete las oraciones (complete la tabla):

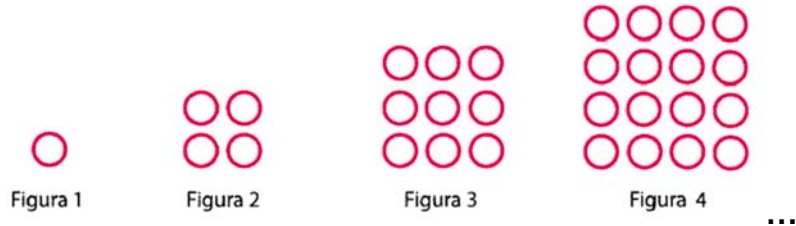


Figura	1	2	3	4	5	6	7	8	...	N
Número de círculos	1	4	9	16	25	36	49	64	...	$N^2$

a. Dibuje las figuras 5 y 6.

Este primer punto de esta tarea consiste en dibujar las figuras 5 y 6 de la secuencia gráfica. El estudiante debe observar con detenimiento la secuencia para observar que en cada término debe hacer un cuadrado compuesto por igual número de filas y columnas de círculos.

Las figuras quedan de la siguiente manera:

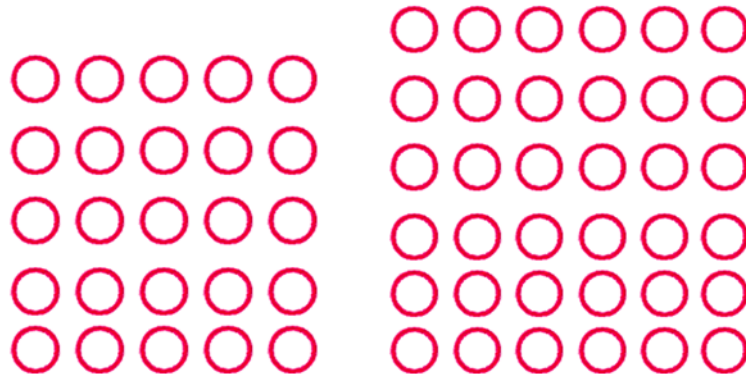


Figura 5

Figura 6

b. La cantidad de círculos en la figura 5 sería: 25

c. La cantidad de círculos en la figura 6 sería: 36.

De acuerdo con la secuencia y observando cada término de la misma, se puede ver que para cada término de la secuencia, cada figura tiene igual cantidad de filas y columnas de la misma cantidad de círculos. Por ejemplo, para el término 2, la figura 2 contiene 2 filas y 2 columnas de círculos, para un total de 4 círculos.

d. ¿Cuál es la fórmula general para esta secuencia? Observe la tabla y explique su respuesta.

El estudiante cuenta ya con varias ayudas para encontrar la regla de formación de esta secuencia; en primer lugar observando la secuencia gráfica, se puede ver que para cada término, cada figura tiene la forma de un cuadrado, los círculos se organizan en filas y columnas, donde la cantidad de filas es igual al número de término; mientras que, la cantidad de columnas es igual al número del término, así que, la cantidad de círculos viene dada por la fórmula:

Cantidad de círculos del término =  $N \times N = N^2$ . Donde N es el número del término.

Por ejemplo, para encontrar el número de círculos del término 15, el número de círculos de la figura sería:

Cantidad de círculos del término 15 =  $15 \times 15 = 225$ .

e. ¿Cuál figura tendría 100 círculos?

Para dar respuesta a esta pregunta, el estudiante puede aplicar la fórmula directamente en cada término de la secuencia para ir calculando término a término

hasta llegar al término buscado. O también puede aplicar la fórmula para realizar la operación inversa a la potenciación, que en este caso es la radicación, al sacar la raíz cuadrada del número de círculos se puede obtener el número del término.

Entonces, aplicando la primera opción, se puede seguir la secuencia de la secuencia aplicando la fórmula de la potencia, hasta llegar al término que contiene la cantidad de círculos especificado en la pregunta. El estudiante debe evidenciar aquí un razonamiento deductivo.

Se puede llenar la tabla, hasta encontrar el término que contiene la cantidad de círculos dado, de esta manera:

<b>Figura</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>Número de círculos</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>9</b>	<b>16</b>	<b>25</b>	<b>36</b>	<b>49</b>	<b>64</b>	<b>81</b>	<b>100</b>

Al ir llenando la tabla, el estudiante aplicando la fórmula de la potencia logra encontrar el término que contiene 100 círculos, y se da cuenta de que el término 100 es el término que contiene 100 círculos.

La otra forma de hallar el término es sacar la raíz cuadrada de la cantidad de círculos para encontrar el término y que da de la siguiente forma:

Número del término =  $\sqrt{100} = 10$ . Por lo tanto, el término que contiene 100 círculos es el término 10. Mediante estas expresiones matemáticas el estudiante razona de manera deductiva.

f. Si una figura tiene 144 círculos corresponde a la figura:

En este punto se espera que el estudiante exprese un razonamiento deductivo, ya que después de haber hallado la fórmula general, utilice la expresión matemática para hallar el término buscado. Así que, al igual que en el punto anterior el estudiante puede aplicar la fórmula de potencia, o la fórmula de la raíz para encontrar la solución a esta pregunta.

La solución se puede encontrar de esta forma:

Número del término =  $\sqrt{144} = 12$ . Por lo tanto, el término que contiene 144 círculos es el término 12.

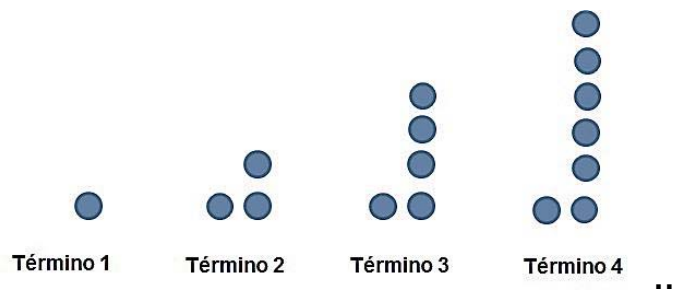
La otra forma de hallarlo es utilizando la fórmula de las potencias; en este caso el estudiante amplía la tabla inicial, y la extiende hallando las potencias después del término 8, va desarrollando las potencias para términos posteriores hasta llegar al término que se busca, el cual contiene 144 círculos, de esta forma también encuentra que el término buscado es el término 12.

**6.1.2.4 Intervención 4.** En esta prueba se presentan tres Tareas; la Tarea consiste en una secuencia figural, la cual está conformada por círculos; la segunda Tarea consiste en descifrar una secuencia numérica que empieza en 6 y se va incrementando de 4 en 4. Por otra parte, la tercera Tarea consiste en una secuencia figural compuesta de cuadrados. Después de haber analizado el desempeño y los progresos de los estudiantes en el proceso de generalización de patrones, se presentan estas tres tareas para lograr afianzar el proceso de desarrollo de la regla de formación tanto en las secuencias gráficas como numéricas. A continuación se muestra el análisis a priori de la intervención número 4. En este punto los estudiantes ya han progresado en este proceso de generalización de patrones en

secuencias numéricas y gráficas, y se espera que el proceso de establecer la regla de formación de cada secuencia se haga de manera más ágil y eficiente.

A continuación se presenta el análisis a priori de esta prueba empezando con la primera secuencia gráfica, la cual está compuesta de un arreglo de círculos, dispuestos de manera gradual en forma ascendente.

**1. Observa la siguiente secuencia formada con figuras geométricas:**



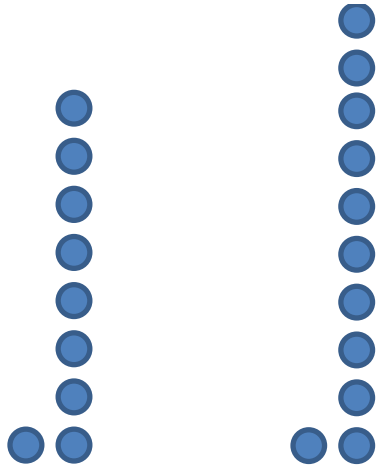
Complete la siguiente tabla.

<b>Término</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>...</b>	<b>N</b>
<b>Número de círculos</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>11</b>	<b>13</b>	<b>15</b>	<b>...</b>	<b>2N - 1</b>

a. Dibuje las figuras 5 y 6.

Para resolver este punto, los estudiantes echan mano en su proceso abductivo a partir de la observación de los primeros términos de la secuencia. Aquí los jóvenes pueden conjeturar para encontrar la relación que existe entre cada figura y el número de círculos. En este momento los jóvenes pueden empezar a dibujar las figuras, contando el número de círculos de cada figura, y determinando cuántos círculos se necesitan para dibujar las figuras 5 y 6.

El estudiante puede determinar el patrón que se repite, ya que para cada nuevo término, la nueva figura se pinta con 2 nuevos círculos; así que valiéndose de esta simple observación, puede dibujar la figura 5 que tendría 9 círculos, mientras que la figura 6 tendría 11 círculos. Las figuras se pueden apreciar así:



**Figura 5**

**Figura 6**

b. La cantidad de cuadrados en la figura 5 sería:

c. La cantidad de cuadrados en la figura 6 sería:

Luego de que los jóvenes han dibujado las figuras, y ya habiendo hecho el análisis abductivo de la cantidad de círculos de las figuras, los estudiantes pueden responder muy bien a estas dos preguntas, porque además de haber dibujado las dos figuras se ha hecho a un análisis previo para responder con acierto. Por lo tanto, la figura 5 tiene 9 círculos, mientras que la figura 6 tiene 11 círculos. Los estudiantes deben evidenciar un razonamiento abductivo.

- d. ¿Cuál es la fórmula general para esta secuencia? Observe la tabla y explique su respuesta.

Partiendo de la tabla que han llenado los jóvenes, el estudiante puede ir observando el patrón de cambio de esta secuencia gráfica.

<b>Término</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>...</b>	<b>N</b>
<b>Número de círculos</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>11</b>	<b>13</b>	<b>15</b>	<b>...</b>	<b>2N - 1</b>

Al pasar de un término a otro el joven puede darse cuenta que a cada figura va agregando dos círculos más, si se observa por ejemplo la figura 1 tiene solo un círculo, la figura 2 contiene 3 círculos, la figura 3 contiene 5 círculos, la figura 4 contiene 7 círculos, y así sucesivamente, el estudiante puede ir analizando y estableciendo conjeturas acerca de la cantidad de círculos que contiene cada nuevo término. A medida que se van generando más términos el educando puede ir descubriendo la regla de formación de la secuencia la cual es:  $2 \times N - 1$ . Esta expresión matemática se puede aplicar en la tabla para ir generando el número de círculos de cada término de la tabla. Por ejemplo para el primer término se ve que hay  $2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$  círculo, para el término 8 el número de círculos es  $2 \times 8 - 1 = 16 - 1 = 15$  círculos, y así para cualquier término posterior de la secuencia. Aquí el estudiante tiene la oportunidad de expresar su razonamiento deductivo.

- e. ¿Cuál figura tendría 29 círculos?

Al conocer la expresión o fórmula general para hallar cualquier término de la secuencia, el estudiante puede encontrar ese término. A medida que aplica la fórmula para cada término el estudiante puede por ensayo y error ir descubriendo cuál es el término más cercano. Entonces se puede llegar hasta el término más cercano. La otra forma es mediante una representación tabular, el joven puede ir generando una tabla, y en la medida en que va desarrollando la tabla, el estudiante

puede descubrir el término más cercano. La otra forma es mediante la ecuación que representa el número de círculos de cada término, ahí se puede hallar el término aplicando la fórmula  $2 \times N - 1 = 29$ . Entonces se puede hallar el término que contiene 29 círculos. Al despejar la N nos queda:

$$N = (29 + 1) / 2 = 30 / 2 = 15.$$

Entonces, la respuesta a esta pregunta es el término que contiene 29 círculos es el término 15.

f. Si una figura tiene 39 círculos corresponde a la figura:

Como en el punto anterior, el estudiante puede echar mano de la fórmula para encontrar el término que contiene 39 círculos. El término es aplicando la fórmula:

$$N = (39 + 1) / 2 = 40 / 2 = 20.$$

Por lo tanto el término que contiene 40 círculos es el término 20. Hay que aclarar que el estudiante también puede hallar el término a prueba y error cuando llena la tabla y empieza a hallar el número de círculos para diferentes valores de N. Y la otra forma es crear una tabla para ir hallando de término en término hasta encontrar uno que cumpla con la condición exigida del término que contenga 39 círculos.

2. En la siguiente secuencia numérica, determine la regla de formación. Escríbala con sus palabras. Complete la tabla para ayudarla a encontrarla.

6,      10,      14,      18,      22,    ...  
 Término 1      Término 2      Término 3      Término 4      Término 5

<b>Término</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>...</b>	<b>N</b>
<b>Número</b>	<b>6</b>	<b>10</b>	<b>14</b>	<b>18</b>	<b>22</b>	<b>26</b>	<b>30</b>	<b>34</b>	<b>...</b>	<b><math>4N+2</math></b>

a. ¿Cuáles son los números correspondientes a los términos 6, 7 y 8 de la secuencia?

Contando con la ayuda de la tabla, los estudiantes pueden empezar a hacer conjeturas para encontrar los términos 6,7 y 8 de la secuencia numérica. En este proceso abductivo los estudiantes al observar detenidamente la secuencia deben completar la tabla para ayudarse en la tarea de encontrar estos términos. Si se dan cuenta, los jóvenes se pueden dar cuenta que el término siguiente se halla sumándole 4 al término anterior. Así que es fácil encontrar el término 6 sumándole 4 al término 5; lo mismo sucede con el término 7, el cual se obtiene sumándole 4 al término 6; y ocurre algo parecido con el término 8, el cual se obtiene sumándole al término 7.

b. ¿Cuál es el número que corresponde al término 13? Explique su respuesta.

En el punto anterior a los estudiantes les fue muy fácil encontrar los términos inmediatos al término 5, con simplemente sumarle 4 al término 5; sin embargo, ahora deben encontrar el término 13, es decir, un número posterior de la secuencia. Ahora la tarea es un poco más difícil, los estudiantes cuentan con varias alternativas para resolver este punto. La primera es seguir la estrategia anterior, es decir, ir generando el siguiente término, sumándole 4 al término anterior hasta llegar al

término buscado, en este caso el término 13, es un poco más larga pero seguro los estudiantes lograrán encontrar el número siguiendo esta estrategia.

La siguiente estrategia consiste en descubrir una regla de formación. En este proceso inductivo, los jóvenes pueden hacer un análisis un poco más exhaustivo para encontrar una expresión matemática que logre obtener cualquier término de la secuencia numérica. Este punto es el próximo que deben desarrollar los estudiantes

c. ¿Cuál es la fórmula general para esta secuencia? Observe la tabla y explique su respuesta.

Como parte de la solución de esta Tarea los jóvenes tienen el reto de encontrar la regla de formación de esta secuencia numérica. El estudiante debe observar con detenimiento la secuencia para apreciar ciertas cosas particulares de la secuencia: por ejemplo, que la secuencia no empieza en 1, de hecho, empieza en 6; que cada nuevo término se obtiene sumándole 4 al anterior; también puede observar que los números de la secuencia se obtienen a partir de múltiplos de 4, ya que cada nuevo término se obtiene sumándole 4 al anterior.

En este orden de ideas los jóvenes cuentan con ciertas herramientas para descifrar la expresión matemática que genera la secuencia numérica.

Se espera que algunos jóvenes logren encontrar la fórmula matemática para generar esta secuencia, la cual se expresa así:  $4 \times N + 2$ .

Con esta expresión matemática, el estudiante puede generar cada uno de los términos de la secuencia numérica. Po ejemplo, para encontrar el término 6, N es igual a 6, y si lo reemplazamos en la fórmula nos queda:}

$$\text{Término 6} = (4 \times 6) + 2 = 24 + 2 = 26.$$

Por lo tanto, 26 es el número que corresponde al término 6.

Tomando otro ejemplo, para hallar el número correspondiente al término 8, entonces volvemos a reemplazar a N por el número 8.

$$\text{Término 8} = (4 \times 8) + 2 = 32 + 2 = 34.$$

Y esta misma expresión matemática podemos utilizarla para encontrar cualquier término posterior de la secuencia numérica.

- d. ¿Cuál es el número que corresponde al término 21? Explique el procedimiento que realiza para obtener la respuesta.

Para responder a esta pregunta los estudiantes pueden utilizar su razonamiento deductivo. Valiéndose de la fórmula matemática simplemente hay que reemplazar el número del término para encontrar el número correspondiente a ese término.

Aplicando el valor del término, en este caso, el número  $N = 21$ , y reemplazando en la fórmula queda:

$$\text{Término 21} = (4 \times 21) + 2 = 84 + 2 = 86.$$

Para explicar por qué obtuvo esa respuesta el estudiante puede argumentar en su proceso deductivo que llegó a esa respuesta aplicando la expresión matemática hallada en su proceso de razonamiento inductivo.

- e. Si un amigo le dice que uno de los términos es el número 51. Explíquelo a ese amigo por qué si existe o por qué no existe ese término en esta secuencia.

Aquí el estudiante tiene que validar o verificar de manera deductiva, si se cumple para este caso particular si el número 51 hace parte de la secuencia numérica, es decir, si pertenece a un término de la secuencia. Se puede despejar el valor de N para encontrar el término que corresponde al número 51.

$$\text{Número} = 4 \times N + 2.$$

Despejando N queda:

$N = (\text{Número} - 2) / 4$ . Donde el número es el número 51, del cual se quiere saber si hace parte o no de la secuencia.

Reemplazando entonces queda:

$$N = (51-2) / 4 = (49) / 4.$$

Que da como resultado = 12,25.

Como el resultado da un número decimal, y no nos da un número entero, entonces se puede concluir que ese número no hace parte de la secuencia.

Otra forma en la que el estudiante puede determinar si este número hace parte de la secuencia numérica es aplicar la expresión matemática para hallar cualquier término de la secuencia y ver si coincide con algún término de la secuencia. Para el caso se puede ir siguiendo la tabla hasta llegar al término que más se aproxime aplicando esta fórmula. Por lo tanto, por prueba y error el joven puede ir hallando los términos uno a uno de forma secuencial hasta encontrar por ejemplo que:

Para  $N = 12$ , es decir el término 12 se halla un valor cercano al número buscado.

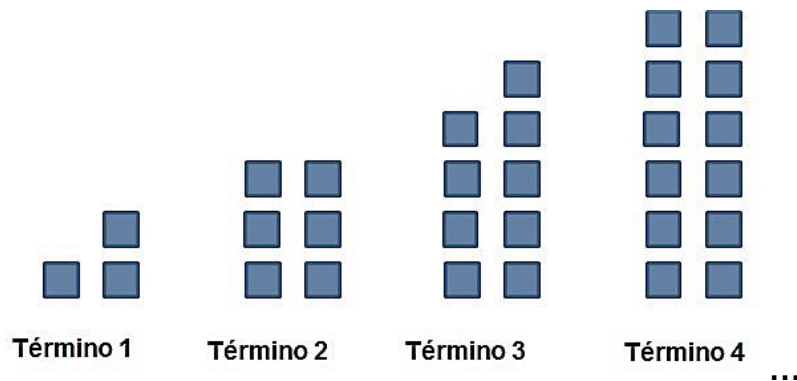
Número =  $(4 \times 12) + 2 = 48 + 2 = 50$ .

Para  $N = 13$ , en este caso el término 13 se encuentra un valor cercano al número solicitado.

Número =  $(4 \times 13) + 2 = 52 + 2 = 54$ .

De acuerdo con los resultados obtenidos a aplicar estos dos valores de  $N$ , para los términos 12 y 13 se puede concluir que el número 51 no hace parte de la secuencia numérica. Queda evidenciado al efectuar un razonamiento deductivo que el número en cuestión no hace parte de la secuencia.

**3. Observe la siguiente secuencia gráfica y responda las preguntas (complete la tabla):**



<b>Término</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>...</b>	<b>N</b>
<b>Número de cuadrados</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>9</b>	<b>12</b>	<b>15</b>	<b>18</b>	<b>21</b>	<b>24</b>	<b>...</b>	<b>3N</b>

a. Dibuje las figuras 7 y 8.



**Figura 7**



**Figura 8**

Los estudiantes pueden dibujar estas dos figuras siguiendo la tabla que han llenado. Cuando observan la tabla, analizan de manera abductiva que la cantidad de cuadrados se aumenta en 3 en la medida en que se incrementan los términos de la secuencia, ellos pueden conjeturar y establecer la cantidad exacta de cuadrados necesarios para dibujar las figuras 7 y 8.

b. La cantidad de cuadrados en la figura 5 sería:\_\_\_\_\_.

c. La cantidad de cuadrados en la figura 6 sería:\_\_\_\_\_.

Aquí el estudiante mediante un razonamiento abductivo puede responder estas preguntas observando la tabla, al llenar la tabla, y dibujar las figuras el estudiante puede responder con claridad a estas preguntas y darse cuenta que la figura 5 contiene 15 cuadrados, mientras que, la figura 16 contiene 18 cuadrados. Las figuras se parecen a estas:



Figura 5



Figura 6

- d. ¿Cuál es la fórmula general para esta secuencia? Observe la tabla y explique su respuesta.

Si se observa la tabla y se va llenando paso a paso, el estudiante puede aplicar un análisis inductivo para encontrar la regla de formación de esta secuencia gráfica. En la medida en que se va llenando la tabla el estudiante puede ir dándose cuenta que cada uno de los términos de la secuencia son múltiplos de 3. Aquí puede establecer una relación muy simple entre el número del término y el número de cuadrados del término. Si el joven mira detenidamente se puede dar cuenta que para cada nuevo término hay que sumarle 3 cuadrados al término anterior.

Por lo tanto la relación entre el número del término y el número de cuadrados de cada término es:

Número de cuadrados =  $3 \times N$ . Donde N es el número del término.

Por ejemplo, para el término número 6 el número de cuadrados es:  $3 \times 6 = 18$  cuadrados. Para el término número 7 es:  $3 \times 7 = 21$  cuadrados.

- e. ¿Cuál figura tendría 27 cuadrados? \_\_\_\_\_.

f. Si una figura tiene 36 cuadrados corresponde a la figura:\_\_\_\_\_.

Para responder a estas dos preguntas el estudiante puede echar mano de la expresión matemática de la fórmula general. El joven al aplicar la fórmula e ir la desarrollando término a término puede hacer coincidir el número del término con la cantidad de cuadrados especificada en la pregunta y hallar que el término es el número 9, el cual contiene 27 cuadrados. También puede utilizar la estrategia de escribir los múltiplos de 3 y contar de uno en uno hasta llegar al término 9, el cual contiene la cantidad de 27 cuadrados. La otra forma es crear una tabla, que contenga dos columnas, una columna contiene el número del término, y la otra columna contiene la cantidad de cuadrados de cada término correspondiente. Así el estudiante, puede hacer coincidir el número del término con la cantidad de cuadrados solicitada en la pregunta.

## 6.2 ANÁLISIS A POSTERIORI

Existen dos tareas básicas que los aprendices deben enfrentar en la tarea de reconocer patrones. Por un lado está la diversidad perceptual, es decir, lo que una persona considera invariante y / o cambiante puede ser probablemente irreconocible o trivial para otra persona.<sup>38</sup>

La segunda, los estudiantes necesitan adquirir la práctica matemática para reconocer un patrón con tan solo algunos términos conocidos y cómo este se comporta de acuerdo con una expresión general extraída de una estructura interpretada, la cual es luego proyectada en términos conocidos y posteriores del patrón. En otras palabras, los jóvenes extienden esas conjeturas para convertirlas en hipótesis, y luego validarlas en etapas posteriores mediante un razonamiento inductivo.

---

<sup>38</sup> RIVERA, Ferdinand. Teaching and learning pattern in school mathematics, p. 5. 2013. Versión Digital.

De acuerdo con el procedimiento de generalización realizado por los estudiantes en el análisis de las secuencias y la generalización de patrones se han tomado en cuenta tres categorías básicas del razonamiento inferencial a saber: la abducción, la inducción y la deducción. Cada una de ellas constituye una categoría que es analizada en diversos casos, en cada una de las intervenciones, y la manera cómo fueron aplicadas y evidenciadas por los estudiantes cuando tuvieron que desarrollar una secuencia gráfica o numérica para extraer la regla de formación que genera dicha secuencia.

Cada sesión estuvo distribuida en tres partes: en la primera parte los estudiantes desarrollan la prueba de manera individual para que afiancen y ordenen sus ideas y plasmen en el papel sus argumentos sobre el desarrollo de las secuencias propuestas; en la segunda parte el docente hace que los estudiantes se reúnan en grupos pequeños con el fin de que en esos grupos los jóvenes discutan las soluciones encontradas a los ítems de cada Tarea, también para que lleguen a acuerdos sobre la mejor solución que deben presentar a toda la clase cuando se lleve a cabo la socialización a todo el grupo de las respuestas a las preguntas propuestas para cada uno de los ejercicios propuestos.

En la tercera parte de la sesión los jóvenes socializan las respuestas y las soluciones ante todo el grupo, las confrontan con los miembros de otros grupos, presentan diversas estrategias de solución de cada ejercicio, también expresan su parecer sobre cada solución presentada y en un ambiente de aprendizaje participativo exponen sus ideas ante su grupo de trabajo y ante toda la clase.

**6.2.1 La Abducción.** Cuando los estudiantes analizan etapas en un patrón con figuras, por ejemplo, ellos hacen conjeturas y producen interpretaciones posibles que representan juicios relativos a las etapas en el patrón. Consiguientemente, algunas de estas observaciones posibles evolucionan en hipótesis, esto es en abducciones. De esta manera, se puede afirmar que una abducción es una

hipótesis que un estudiante tiene que validar para los términos cercanos o posteriores de una secuencia gráfica o numérica.

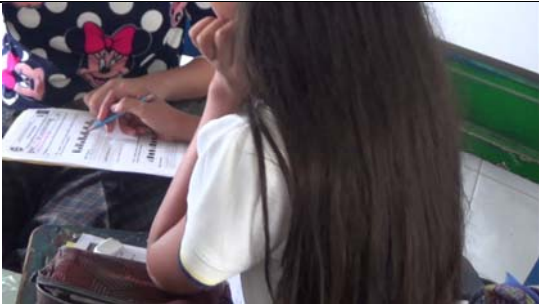
El proceso de razonamiento abductivo implica desarrollar una inferencia hacia una ley que se espera sea probada a través de la inducción, produciendo por tanto, una inferencia sobre un caso.

Para el presente estudio se han extraído algunos de los mejores análisis de los jóvenes que lograron desarrollar y generalizar mejor el patrón de una secuencia numérica y gráfica, soportado por las herramientas que les fueron dadas en cada una de las situaciones propuestas en cada una de las Tareas de cada una de las intervenciones.

Debido a que el tema de patrones es nuevo para los estudiantes, en la intervención número 1 se les presentó a los estudiantes una secuencia gráfica con círculos, la cual requirió de cierto nivel de dificultad a los estudiantes para hallar la expresión matemática que genere la secuencia.

**Figura 11. Secuencia gráfica 3, intervención 3.**



<b>EVIDENCIA</b>	
	
<b>ARGUMENTACIÓN</b>	
<p>La estudiante DIE32 explica a sus compañeras el ejercicio número 1 de la secuencia figural. Esta secuencia está compuesta de una secuencia de cuadrados que se repiten, solo hay dos cuadrados que se repiten, el cuadrado grande y el pequeño.</p> <p>DIE32: Explique cómo resolvieron los ejercicios.</p> <p>DIE30: Yo lo resolví siguiendo las figuras cuadrado grande, cuadrado chico.</p> <p>DIE33: Yo lo resolví asignándoles números a las figuras, por ejemplo al cuadrado grande le asigné el número 1, al cuadrado pequeño le asigné el número 2, al cuadrado grande le asigné el número 3, y así sucesivamente. La figura en el lugar 16 es el cuadrado pequeño.</p>	
<b>ANÁLISIS</b>	
<p>El razonamiento abductivo parte de conjeturas e hipótesis desarrolladas por los jóvenes a partir de la observación, la comparación y el comportamiento de la secuencia. Especialmente cuando los estudiantes empiezan a descifrar los primeros términos de la secuencia gráfica o numérica los alumnos utilizan inferencias abductivas para explicar cuál es el término más próximo que sigue en una secuencia.</p>	

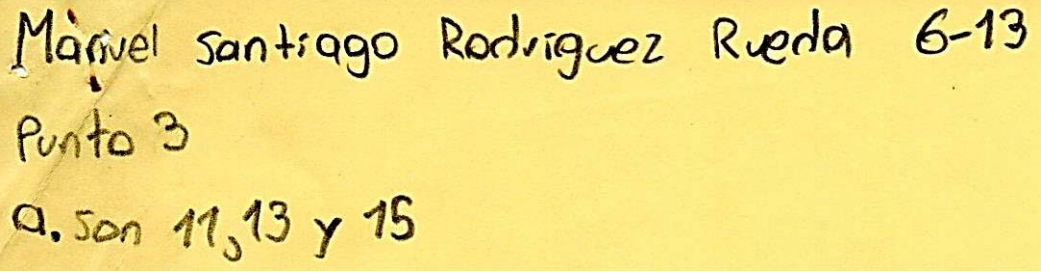
En la primera intervención, una de las Tareas consiste en el análisis de una secuencia numérica, la cual deben de analizar para encontrar su regla de formación y los términos próximos y los más lejanos. En este momento el estudiante deja de analizar las secuencias gráficas para empezar a analizar una secuencia numérica, dando paso al razonamiento puramente numérico. Aquí se presenta la secuencia en estudio.

1, 3, 5, 7, 9,...

**Secuencia numérica, intervención 1.**

La pregunta es: ¿Cuáles son los números correspondientes a los términos 6, 7 y 8 de la secuencia?

A continuación se presenta un ejemplo que muestra la evidencia de un estudiante que respondió de manera abductiva a esta pregunta. Al observar la secuencia el estudiante logró identificar la secuencia de los números impares.

<b>EVIDENCIA</b>

<b>ARGUMENTACIÓN</b>
El estudiante DIE29 claramente logra reconocer la secuencia de los números impares. De manera que es fácil para él escribir que los números 11, 13 y 15 corresponden a los términos 6, 7 y 8 de la secuencia numérica. Esta es una forma de razonamiento abductivo.
<b>ANÁLISIS</b>
Una de las características del razonamiento abductivo es que a partir de una secuencia dada el estudiante logra inferir a partir de unos cuantos términos dados algunos términos próximos o cercanos de una secuencia en el proceso de generalización, y este estudiante lo hizo bastante bien.

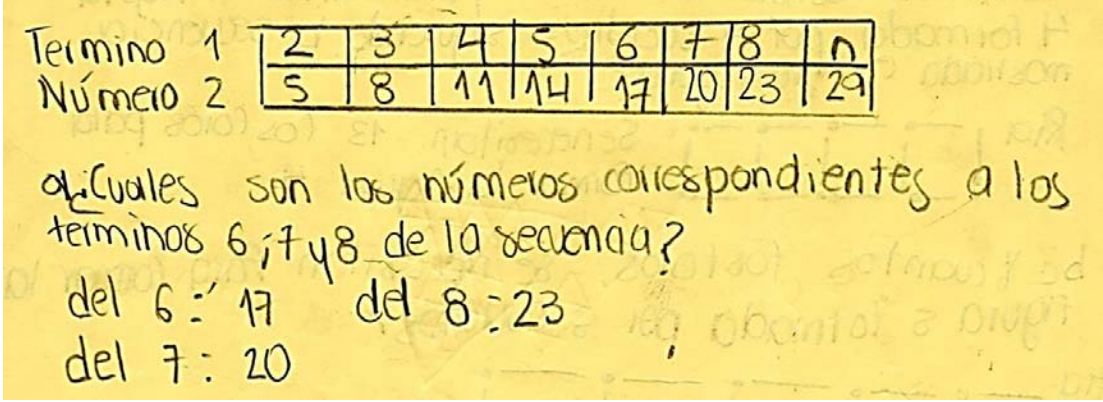
Durante la sesión de grabación número 2 una de las tareas que tuvieron que desarrollar los estudiantes fue el analizar una secuencia numérica, esta secuencia

distinta a la presentada anteriormente ya no empieza en uno, sino que comienza en un número distinto a uno.

2,	5,	8,	11,	14,...
Término 1	Término 2	Término 3	Término 4	Término 5

**Secuencia numérica, intervención 2.**

A continuación se hace un resumen del proceso que realiza la estudiante DIE7 al analizar esta secuencia numérica.

<b>EVIDENCIA</b>	
	
<b>ARGUMENTACIÓN</b>	
<p>La estudiante se vale de la tabla para encontrar los números que le están preguntando en este ítem, ella simplemente completa la tabla y logra encontrar estos términos cercanos de la secuencia de manera simple y contundente.</p>	
<b>ANÁLISIS</b>	
<p>La estudiante DIE7 se ayuda con una tabla para generar los términos más cercanos de la secuencia numérica, aquí queda evidenciado un razonamiento abductivo de parte de esta joven muy estructurado y soportado por un tabla que ella misma construyó.</p>	

En la intervención número 3 se les presenta a los estudiantes una secuencia numérica muy sencilla. Esta secuencia hace parte de una prueba de tres puntos, los cuales deben desarrollar como en las demás sesiones, primero de manera

individual, luego en grupos pequeños y posteriormente socializar ante el grupo completo todas las respuestas a cada una de las preguntas.

La secuencia numérica que les presenta a los jóvenes es esta:

**Figura 12. Secuencia numérica, intervención 3.**

<b>2,</b>	<b>4,</b>	<b>6,</b>	<b>8,</b>	<b>10, ...</b>
<small>Término 1</small>	<small>Término 2</small>	<small>Término 3</small>	<small>Término 4</small>	<small>Término 5</small>

<b>Término</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>...</b>	<b>N</b>
<b>Número</b>	2	4	6	18	10				...	

Como con las demás tareas que se les han asignado a los estudiantes, el docente ha motivado a los jóvenes para que participen, analicen bien las secuencias, logren encontrar la regla de formación y afiancen sus ideas para debatirlas en grupos pequeños y ante toda la clase. Aquí se presenta un ejemplo en esta sesión, que sirve como evidencia de la forma de razonamiento abductivo, presentado por un estudiante del grupo.

## EVIDENCIA

termino 1 termino 2 termino termino

termino	1	2	3	4	5	6	7	8	...	N
Numero	2	4	6	8	10	12	14	16	...	20

a cuales son los terminos correspondientes al termino 6, 7, 8  
Los terminos son 12, 14, 16  
Por que  
 $12 = 6 \times 2$   
 $14 = 7 \times 2$   
 $16 = 8 \times 2$

## ARGUMENTACIÓN

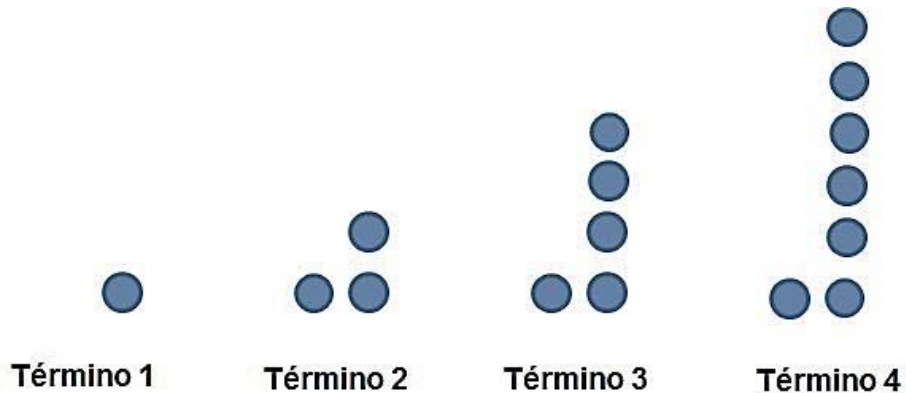
El estudiante se apoya en la tabla para ir generando los términos próximos en la secuencia numérica. De esta manera halla muy bien los números que se le requirió encontrar. Además de la tabla, el estudiante utiliza una expresión multiplicativa para encontrar los términos solicitados, estableciendo una relación entre el término y el número.

## ANÁLISIS

El estudiante DIE31 utiliza una relación multiplicativa entre el número del término y el número de la secuencia. Aquí se ve un avance de parte del joven para encontrar ya una regla de formación de la secuencia apoyado en la tabla que le ayuda a encontrar los términos solicitados de la secuencia. Se evidencia un razonamiento abductivo con una progresión inductiva por la relación establecida con la expresión matemática.

En la sesión de grabación número cuatro los jóvenes son bastante participativos y demuestran más confianza para resolver los procesos de generalización en las secuencias propuestas. Las tareas propuestas para esta secuencia se muestran interesantes para los estudiantes. Una de ellas es una secuencia gráfica, la cual se muestra a continuación.

**Figura 13. Secuencia gráfica, intervención número 4.**



En este punto los estudiantes ya han adquirido más habilidad para comprender el proceso de generalización de patrones en secuencias gráficas y numéricas, apoyándose en las tablas como herramienta de análisis efectiva para encontrar la regla de formación de las secuencias.

A continuación se presenta otro ejemplo que muestra la forma como una joven da respuesta de manera abductiva a la primera pregunta en esta actividad.

<b>EVIDENCIA</b>
<b>ARGUMENTACIÓN</b>
<p>La estudiante DIE23 dibuja las figuras 5 y 6 de la secuencia observando y analizando la secuencia y la cantidad de círculos entre uno y otro término, en este caso son dos círculos que se van sumando a cada nuevo término. Por lo tanto, ella encuentra un factor sumativo para cada nuevo término de la secuencia.</p>

## ANÁLISIS

La estudiante DIE23 se soporta en la tabla para dibujar encontrar los términos solicitados. Ella observa que para cada nuevo término se van agregando dos círculos más a la siguiente figura, de esta manera halla que el número de círculos para la figura 5 es de 9 círculos, mientras que para la figura 6 el número de círculos es de 11 círculos. Queda evidenciado aquí un razonamiento abductivo.

**6.2.2 Inducción.** Después de que los estudiantes han conjeturado sobre algunos casos de la secuencia, los jóvenes extienden estas características de las secuencias a términos más lejanos para validar una ley, que va servir como fórmula general, esta se puede manifestar como una fórmula general, o una expresión matemática que sirve como base para generar cualquier término de la secuencia. En este sentido Ferdinand Rivera ha expresado lo siguiente:

La inducción prueba una inferencia abducida preliminar o en curso con el objetivo de apoyar una ley que vincula los casos conocidos con los proyectados. Al probar una afirmación abductiva en varios casos, la inducción determina si la afirmación es correcta o incorrecta. De manera que, una inducción correcta no produce un nuevo concepto que explica cuál es el propósito de un procesamiento abductivo. En lugar de eso, busca mostrar que una vez que las premisas son validadas, entonces las conclusiones relevantes deben ser verdaderas por enumeración (número de casos observados), por analogía (similitudes de características estructurales o relacionales entre casos) o por análisis científico (por medio de experimentos mentales o actuales).<sup>39</sup>

En este orden de ideas, cuando los estudiantes se dan a la tarea de encontrar un número para términos posteriores de la secuencia, o de encontrar el número de figuras de una secuencia gráfica para términos más lejanos, está aplicando un razonamiento inductivo, es decir, está probando una regularidad para casos particulares que se puede extender más adelante para cualquier término de la secuencia por medio de una fórmula general o de una expresión matemática para extenderla a casos particulares (forma deductiva).

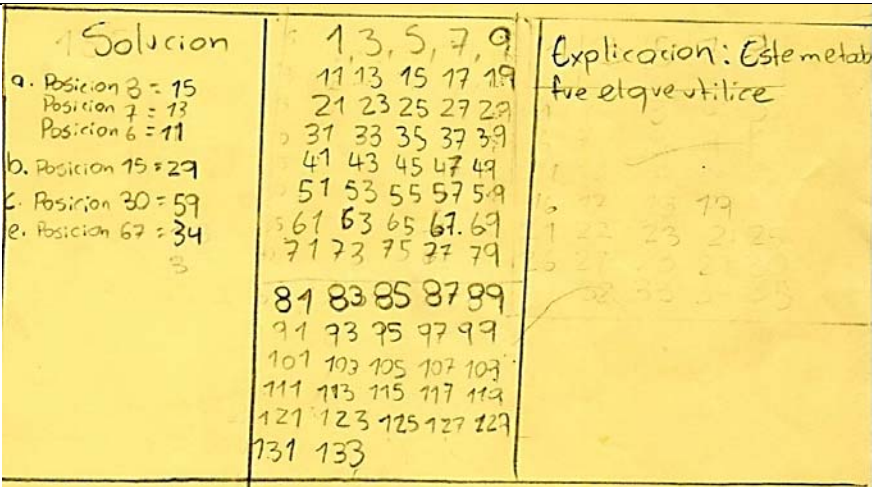
En la actividad desarrollada en la intervención número uno, los estudiantes se toparon con una secuencia numérica para analizar, esta secuencia es la siguiente:

---

<sup>39</sup> Ibid, p. 32-33.

1, 3, 5, 7, 9,...

A continuación se presenta un ejemplo de la manera como uno de los estudiantes del grupo de observación abordó este análisis.

EVIDENCIA		
		
ARGUMENTACIÓN		
<p>La estudiante DIE33 desarrolló una configuración muy interesante para encontrar los términos de esta secuencia. Ella creó un arreglo de filas y columnas compuesto de los términos de la secuencia de cinco en cinco. De esta forma puede ubicar hasta los 67 primeros términos de la secuencia.</p>		
ANÁLISIS		
<p>La estudiante DIE33 utilizó un método muy simple pero creativo para encontrar y generar los primeros 67 términos de la secuencia numérica. Ella se vale de esta herramienta para encontrar cualquier término posterior de la secuencia. Aquí se evidencia un tipo de razonamiento inductivo con ayuda de un arreglo matricial, muy interesante la configuración para esta solución.</p>		

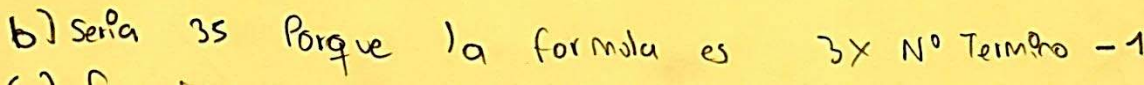
En la segunda intervención también se pueden ver muchas evidencias de razonamiento inductivo. Una de las tareas propuestas a los estudiantes les muestra una secuencia numérica, y en uno de los ítems se les pide a los estudiantes que el

número que corresponde al término 12. Aquí aparece la secuencia que se mencionó anteriormente.

2,	5,	8,	11,	14, ...
<b>Término 1</b>	<b>Término 2</b>	<b>Término 3</b>	<b>Término 4</b>	<b>Término 5</b>

La pregunta que se le plantea a los jóvenes es:

¿Cuál es el número que corresponde al término 12? Explique sus respuestas.

<b>EVIDENCIA</b>

<b>ARGUMENTACIÓN</b>
<p>Aquí se ve una respuesta muy formal en matemáticas para explicar la manera cómo encontró el término buscado. El estudiante DIE28 utiliza una expresión matemática para hallar el término solicitado en la pregunta, y efectivamente lo encuentra con la ayuda de la fórmula. Reemplazando a N por 12. Queda entonces <math>3 \times N - 1 = (3 \times 12) - 1 = 36 - 1 = 35</math>.</p>
<b>ANÁLISIS</b>
<p>El estudiante DIE28 evidencia un razonamiento inductivo y ya a esta altura de las sesiones demuestra un progreso enorme en el proceso de generalización, ya que se vale de una expresión matemática para encontrar cualquier término de la secuencia. Es un adelanto notable el que experimenta este joven con su argumento.</p>

Para cuando se llega a la intervención número tres ya algunos estudiantes han mejorado notablemente en su progreso del proceso de generalización y evidencian formas de razonamiento inductivo muy buenas, a tal punto que ya son capaces de formalizar la regla de formación usando expresiones matemáticas y arreglos de figuras icónicas para dar explicación en el hallazgo de regularidades en secuencias gráficas y numéricas. En esta actividad se presenta una secuencia gráfica muy

interesante que exige a los estudiantes muy buenas ideas para encontrar los términos de esta secuencia. A continuación se muestra la secuencia gráfica.






**Figura 14. Secuencia gráfica, intervención 3.**



La pregunta planteada es:

Dibuje la figura en el lugar 35.

Ahora se presenta el análisis de esta secuencia para una joven que argumenta de una forma muy inteligente la formación de esta secuencia.

<b>EVIDENCIA</b>
<p style="text-align: center;">d) Dibuje la figura en el lugar 35.</p> <p style="text-align: center;">  → Triángulo         </p> <p> <b>Regla de formación:</b>            Esta serie está compuesta por cuadrados, círculos y triángulos.            Estas figuras se llaman figuras geométricas. Cada figura tiene un número natural         </p> <p style="text-align: center;">           1    2    3    4      ...         </p>
<b>ARGUMENTACIÓN</b>
<p>La estudiante DIE23 usa una forma muy sencilla para hallar el término solicitado en la pregunta. A cada forma icónica le asigna un número natural, es esta manera convierte los términos de la secuencia en múltiplos de 4. Así al cuadrado le asigna el número 1, al círculo el número 2, al primer triángulo el número 3 y al segundo triángulo el número 4. De esta forma logra encontrar cualquier término de la secuencia a partir de los múltiplos de 4. Por ejemplo el múltiplo más cercano a 35 es 32, de ahí empieza a asignar el número natural correspondiente a las figuras iniciales, el 33 le corresponde al cuadrado, el número 34 le corresponde al círculo y el número 35 le corresponde al triángulo.</p>
<b>ANÁLISIS</b>
<p>Aquí la estudiante DIE23 se vale de un arreglo de figuras icónicas a las cuales se les ha asignado un número natural, como en la primera fila se les ha asignado a las 4 figuras un número natural, las filas siguientes tendrán asignadas los</p>

números naturales en secuencia. Se evidencia en este ejemplo un razonamiento inductivo muy simple para las cuatro figuras que conforman la secuencia.

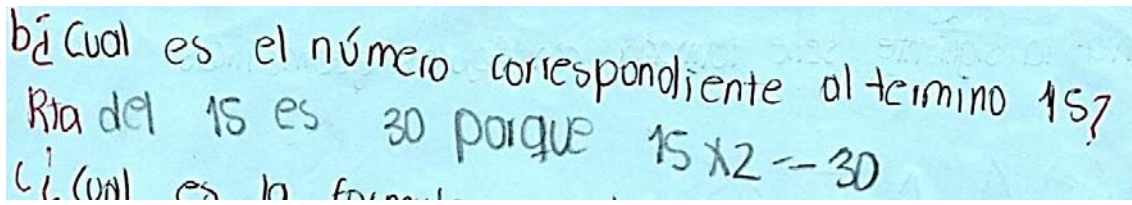
En la intervención número 3 se les presenta a los estudiantes una secuencia numérica. En esta sesión se puede ver cómo los estudiantes son más participativos, se esfuerzan por mejorar en el proceso de generalización y dan soluciones más formales en la regla de formación de las secuencias gráficas y numéricas. La actividad es muy intensa en este punto de las intervenciones, el rol del profesor está cambiando debido a que los estudiantes se han involucrado más en el proceso de generalización.

Aquí se muestra la secuencia numérica en estudio.

2,	4,	6,	8,	10, ...
<b>Término 1</b>	<b>Término 2</b>	<b>Término 3</b>	<b>Término 4</b>	<b>Término 5</b>

La pregunta por resolver es: ¿Cuál es el número que corresponde al término 15? Explique su respuesta.

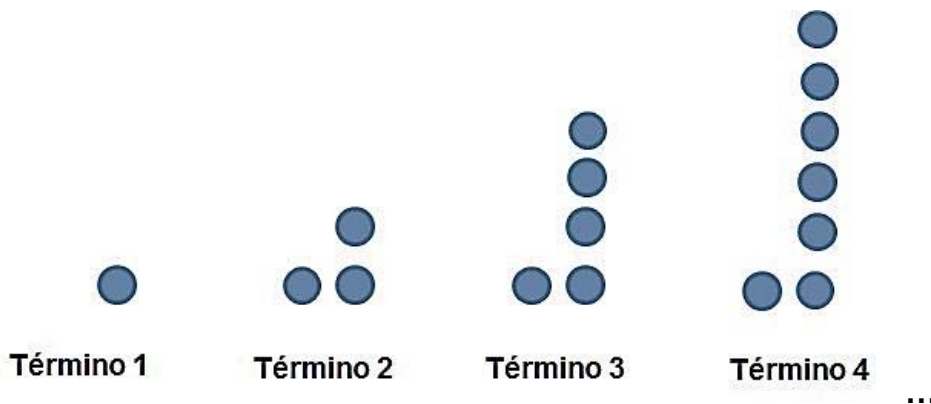
En este punto se muestra la actividad llevada a cabo por la estudiante DIE7.

<b>EVIDENCIA</b>

<b>ARGUMENTACIÓN</b>
La estudiante DIE7 ha establecido una relación muy clara entre el término y el número. Para ella es claro que el número se obtiene multiplicando por 2 el número del término. De hecho en la respuesta escribe la multiplicación y muestra cómo se obtiene el número correspondiente al término 15. La respuesta es correcta gracias a la relación multiplicativa establecida entre el término y el número.

### ANÁLISIS

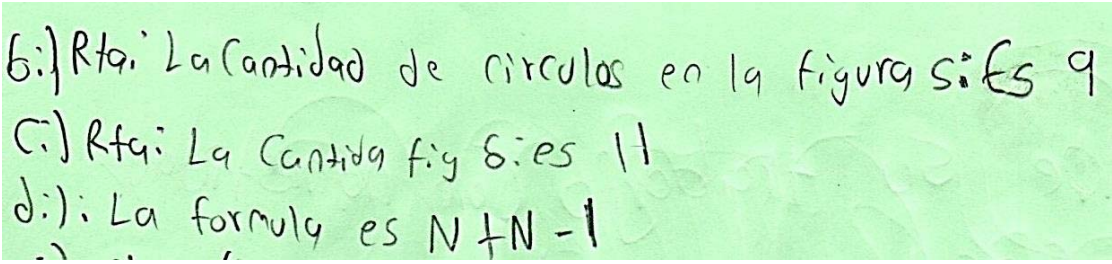
La estudiante DIE7 ha establecido una relación entre el término y el número del término por un factor multiplicativo. Esta es una forma de pensar inductiva, ya que gracias a esa relación esta joven puede hallar cualquier número de la secuencia por la relación multiplicativa que ella ha encontrado entre el término y su número correspondiente en la secuencia, de hecho gracias a esta expresión matemática ella puede encontrar cualquier número de la secuencia.

Una de las tareas por resolver durante la intervención número cuatro es la de resolver una secuencia gráfica compuesta por círculos apilados de manera vertical. Durante esta sesión la actividad matemática se ha intensificado, los jóvenes se muestran bastante participativos, las respuestas de algunos de los estudiantes muestran más formalidad matemática, y están llegando a un buen nivel de comprensión en el proceso de generalización de patrones. Uno de los puntos por resolver fue la secuencia gráfica que se muestra en este momento:



La pregunta por resolver acerca de este tema es: la cantidad de círculos en la figura 6 sería...

A continuación se muestra el análisis del estudiante DIE26.

<b>EVIDENCIA</b>

<b>ARGUMENTACIÓN</b>
<p>El estudiante se vale de una fórmula matemática, la cual sirve de base para establecer la regla de formación. Por medio de esta expresión matemática el joven halla el número de círculos para cualquier término de la secuencia. Así que aplicando la fórmula el estudiante logra determinar la cantidad de círculos para la figura 6. La fórmula que utiliza es: <math>N + N - 1 = 2N - 1</math>.</p>
<b>ANÁLISIS</b>
<p>En este momento de las sesiones los jóvenes han alcanzado un mejor nivel para hallar la fórmula general que explique la regla de formación de una secuencia gráfica o numérica. Este joven se vale de la fórmula matemática para determinar el número de círculos que contiene cualquier figura de la secuencia gráfica. Y efectivamente la fórmula escrita calcula correctamente el número de círculos de cualquier término de la secuencia. Se evidencia aquí un razonamiento inductivo, con un avance notable por anticipar al razonamiento deductivo al incluir la expresión matemática.</p>

**6.2.3 Deducción.** Como lo expresa Rivera en su libro: “La abducción es un requisito para la inducción”<sup>40</sup>. De hecho cuando los estudiantes empiezan a generar los primeros términos de una secuencia gráfica o numérica están dando los pasos para aplicar el razonamiento inductivo que va de lo particular a lo general.

<sup>40</sup> Ibid, p. 35.

Los estudiantes aprendices tienden a producir una afirmación abductiva como un mecanismo práctico o una forma de poner orden a una estructura que parece no tenerla en un comienzo.

Mientras que la abducción y la inducción proveen apoyo en la construcción de una generalización, una deducción válida demuestra básicamente necesidad de una conclusión válida. En la actividad de patrones, los aprendices utilizan la abducción y la inducción para obtener una generalización algebraica razonable. Un cierre deductivo entonces puede ocurrir al menos de dos maneras dependiendo de las expectativas del grado o nivel.<sup>41</sup>

Durante las sesiones se ha evidenciado la capacidad de los estudiantes para analizar patrones en secuencias numéricas y gráficas. En algunas ocasiones los estudiantes utilizan explicaciones gráficas o pictóricas, en otras ocasiones se valen de tablas para ir generando la secuencia de los términos, y en otras utilizan expresiones matemáticas para generar la regla de formación de una secuencia o una combinación de las formas anteriores. Estas son estrategias que usan los estudiantes para hallar el patrón de una secuencia gráfica o numérica como lo expresa Rivera: “Los estudiantes de escuela secundaria y primaria pueden formar implícitamente una afirmación deductiva. Sin embargo, es más probable que ellos den una explicación estructural empírica (numérica o visual) en lugar de una prueba formal deductiva para justificar sus generalizaciones.”<sup>42</sup>

Como lo expresa Rivera: “La deducción supone una ley general y un caso (o casos) observados que luego deduce lógicamente un resultado válido necesario que no tiene que depender del conocimiento real o empírico para la verificación”<sup>43</sup>

Cada uno de los procesos inferenciales lleva a un resultado distinto: “La deducción, por una parte, ejemplifica el razonamiento demostrativo, el cual es la base de la seguridad de nuestro conocimiento matemático. La abducción y la inducción, por otra parte, ejemplifica el razonamiento creíble, el cual soporta nuestras conjeturas”<sup>44</sup>

---

<sup>41</sup> Ibid, p. 37.

<sup>42</sup> Ibid, p. 37.

<sup>43</sup> Ibid, p. 29.

<sup>44</sup> Ibid, p. 29.

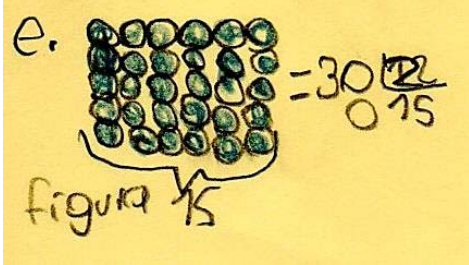
En cada una de las sesiones los jóvenes son retados con secuencias numéricas y figurales para encontrar la regla de formación de la secuencia. En algunos casos cuentan con el apoyo de una tabla para encontrar la fórmula, en otras ocasiones no cuentan con esa ayuda. Pero de una u otra manera, los estudiantes son bastante hábiles en la mayoría de los casos para hallar esa expresión matemática que genere la secuencia en estudio. Especialmente al final de las sesiones, los jóvenes ya han adquirido más destreza y confianza para encontrar con más facilidad la fórmula o expresión matemática que genera la secuencia.

A continuación se presenta un ejemplo para una secuencia en la intervención número uno, en el cual se demuestra la forma cómo un joven usa el razonamiento deductivo para dar respuesta a la pregunta propuesta.

En este ejemplo se muestra la secuencia con la cual trabajaron los estudiantes.

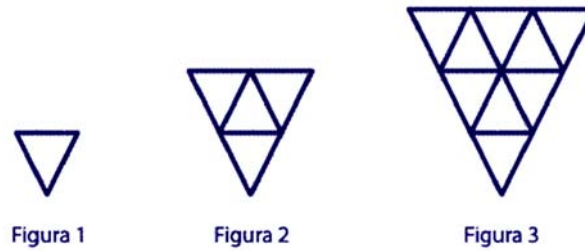


Los estudiantes deben responder a la pregunta: Si una figura tiene 30 círculos a cuál figura corresponde: \_\_\_\_\_.

EVIDENCIA

ARGUMENTACIÓN
<p>El estudiante DIE29 realiza una representación pictórica del término solicitado, para ello utiliza una expresión matemática con la cual hace el cálculo del número del término. Por medio de esta expresión matemática el joven encuentra la relación entre el número de círculos y el término de la secuencia. Así que, aplicando la fórmula el estudiante logra determinar que el término solicitado es el número 15, de acuerdo a la fórmula establecida. La relación para saber el número de círculos de cada término es: <math>2 \times N</math>. Entonces para hallar el número del término sería: <math>N \div 2</math>. Esta fue la fórmula usada por el estudiante DIE29.</p>
ANÁLISIS
<p>En este momento de las sesiones los jóvenes han alcanzado un mejor nivel para hallar la fórmula general que explique la regla de formación de una secuencia gráfica o numérica. Este joven se vale de la fórmula matemática para determinar el número de círculos que contiene cualquier figura de la secuencia gráfica. Y efectivamente la fórmula escrita calcula correctamente el número de círculos de cualquier término de la secuencia. Se evidencia aquí un razonamiento inductivo, con un avance notable por anticipar al razonamiento deductivo al incluir la expresión matemática.</p>

En el siguiente ejemplo se muestra una secuencia compuesta por triángulos apilados dentro de un triángulo grande. En la intervención número dos los estudiantes deben solucionar un caso particular de una secuencia cuya regla de formación son potencias. La secuencia gráfica que se menciona es la siguiente.

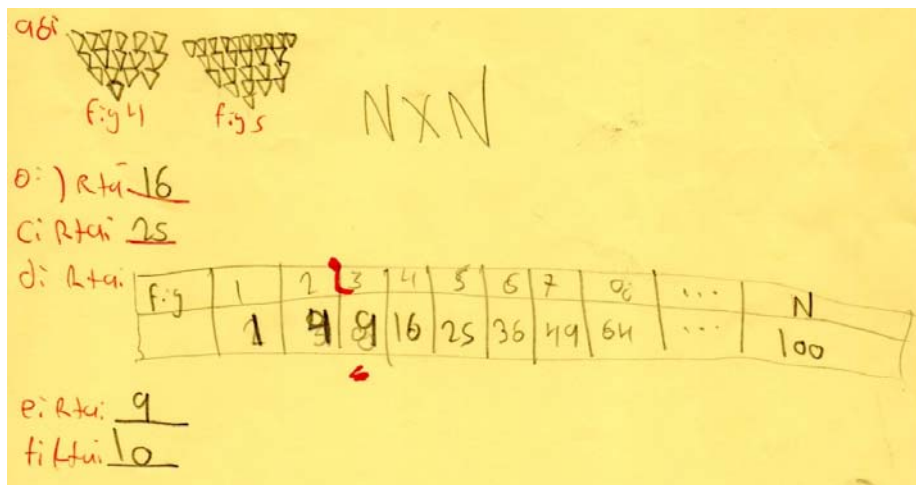
**Figura 15. Secuencia gráfica, intervención 2.**



**Fuente. Diseño del docente investigador.**

La pregunta que deben resolver los jóvenes es: Si una figura tiene 100 triángulos a cuál figura corresponde:\_\_\_\_\_.

**EVIDENCIA**



**ARGUMENTACIÓN**

El estudiante DIE26 ha encontrado una fórmula para contar el número de triángulos de cualquier término de la secuencia. La fórmula que usa el estudiante es  $N \times N = N^2$ . Esta misma fórmula si se utiliza de manera inversa halla la raíz cuadrada para encontrar el término según el número de triángulos del término. El estudiante se vale de la tabla para encontrar el término que contiene 100 triángulos y da la respuesta correcta, en este caso el término buscado es el término 10.

### ANÁLISIS

El estudiante tiene en su haber un as bajo la manga ya que cuenta con la expresión matemática que determina la cantidad de triángulos para cualquier término. Además el estudiante ha desarrollado una tabla para apoyarse en la obtención de la fórmula. Se evidencia aquí un razonamiento deductivo soportado por la expresión matemática  $N \times N = N^2$ . En este caso el estudiante se ha centrado más en la fórmula que en la estructura de la forma pictórica.

En la intervención número tres los estudiantes deben encontrar la regla de formación para una secuencia numérica, la secuencia de los números pares, como se muestra en la figura:

2,	4,	6,	8,	10, ...
<b>Término 1</b>	<b>Término 2</b>	<b>Término 3</b>	<b>Término 4</b>	<b>Término 5</b>

Se les pide a los estudiantes que escriban la fórmula general para esta secuencia. Y adicionalmente se les pregunta a los jóvenes ¿A qué término corresponde el número 32?

A continuación se presenta un análisis del estudiante DIE29, el cual se vale de una fórmula para encontrar cualquier término de la secuencia.

### EVIDENCIA

c) La fórmula general es  $=N \times 2$

d) el número es 50

$$25 = N \times 2$$

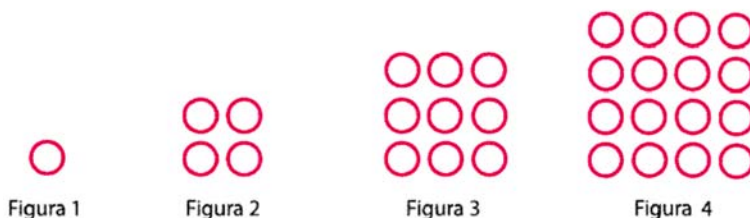
e) al término 16 corresponde

$$32 = N \div 2$$

<b>ARGUMENTACIÓN</b>
El estudiante DIE29 ha encontrado una fórmula para encontrar cualquier término de la secuencia numérica. La fórmula que usa el estudiante es el número = $N \times 2 = 2 \times N$ . El estudiante se apoya en la tabla para encontrar la fórmula que genera la secuencia de los números pares. Para responder a la pregunta a qué término corresponde el número 32 el estudiante divide en 2 el número 32 y halla que el término solicitado es el 16.
<b>ANÁLISIS</b>
Un razonamiento deductivo puede evidenciarse en este caso, ya que el estudiante ha encontrado una fórmula general para encontrar el término que le piden. En este caso el estudiante usa la fórmula para encontrar cualquier término de la secuencia, pero para responder a la pregunta debe dividir el número en 2 para hallar el término en cuestión, es decir, el inverso de la fórmula.

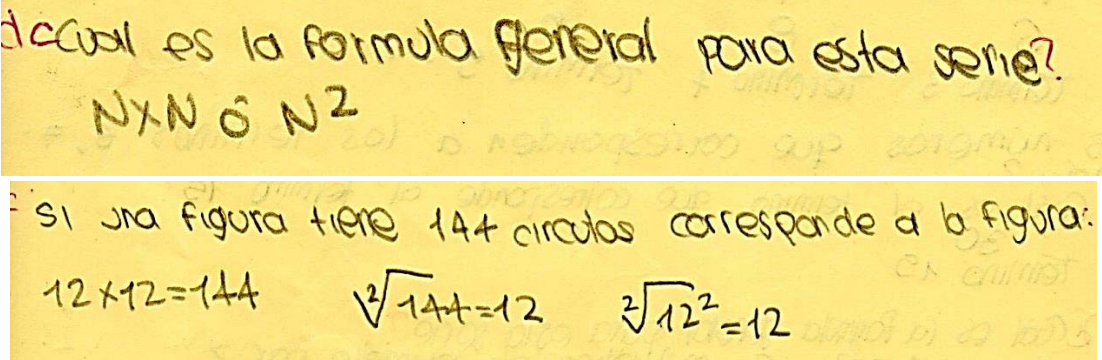
Durante la actividad de la intervención tres se les pidió a los estudiantes que analizaran una secuencia gráfica compuesta de círculos dispuestos en arreglos en forma de cuadrado. En este caso a los estudiantes se les requirió que encontrasen la regla de formación de la secuencia gráfica. A continuación se muestra la secuencia gráfica.

**Figura 16. Secuencia gráfica, intervención 3.**



La pregunta que tuvieron que resolver es: Si una figura tiene 144 círculos corresponde a la figura:

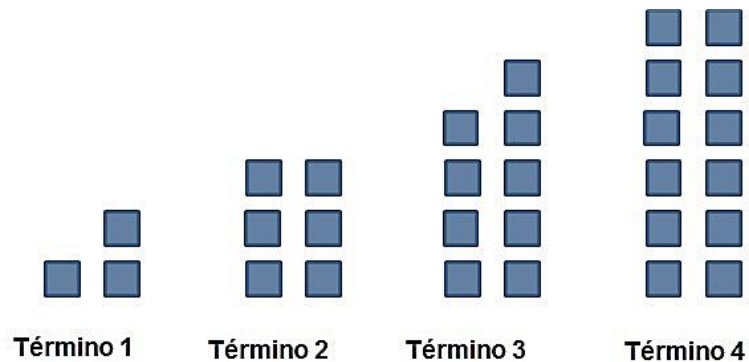
A continuación se muestran las respuestas de la estudiante DIE23 y el análisis correspondiente.

EVIDENCIA
 <p>¿Cuál es la fórmula general para esta serie?  <math>N \times N</math> o <math>N^2</math></p> <p>Si una figura tiene 144 círculos corresponde a la figura:  <math>12 \times 12 = 144</math>    <math>\sqrt{144} = 12</math>    <math>\sqrt{12^2} = 12</math></p>
ARGUMENTACIÓN
<p>La estudiante DIE23 la tiene clara. Esta joven ha encontrado una fórmula para hallar el número de círculos de cualquier término de la secuencia gráfica. La fórmula que usa la estudiante es <math>N \times N \times 2 = N^2</math>. La estudiante se soporta en la tabla para encontrar la fórmula que genera la secuencia para determinar la cantidad de círculos que contiene cada término de la secuencia. Para responder a la sobre cuál figura tiene 144 círculos la estudiante utiliza la fórmula que representa una potencia, y también utiliza la operación inversa (la radicación) para hallar el término solicitado.</p>
ANÁLISIS
<p>Se evidencia un razonamiento deductivo ya que la joven ha encontrado una fórmula general para determinar el número de círculos de cada término de la secuencia. En este caso la estudiante DIE23 usa la fórmula para encontrar el término que contiene 144 círculos. Por un lado utiliza la fórmula de la potencia, y por otra parte usa la fórmula de la raíz cuadrada (operación inversa a la potencia) para hallar el término solicitado.</p>

Durante la actividad de la intervención cuatro se les pide a los estudiantes que analicen una secuencia gráfica conformada por cuadrados apilados en arreglos verticales. En este caso a los estudiantes se les requirió que encontrasen la regla

de formación de la secuencia gráfica. A continuación se muestra la secuencia gráfica.

**Figura 17. Secuencia gráfica, intervención 4.**



La pregunta planteada a los estudiantes es: Si una figura tiene 36 cuadrados corresponde a la figura:

A continuación se muestran las respuestas de la estudiante DIE33 y el análisis correspondiente.

**EVIDENCIA**

Termino	1	2	3	4	5	6	7	8	ooo	N
Numero de Cuadros	3	6	9	12	15	18	21	24	ooo	$N \times 3$

La fórmula general es  $N \times 3$  según la tabla ya que todos los resultados concuerdan.  
 F corresponde a la figura 12 porque  $12 \times 3 = 36$  según la fórmula.

### **ARGUMENTACIÓN**

La estudiante DIE33 ha encontrado una fórmula para hallar el número de cuadrados de cualquier término de la secuencia gráfica. La fórmula que usa la estudiante es  $N \times 3 = 3 \times N$ . La estudiante se apoya en la tabla para encontrar la fórmula que genera la secuencia para determinar la cantidad de cuadrados que contiene cada término de la secuencia. Para responder a la sobre cuál figura tiene 36 cuadrados la estudiante utiliza la fórmula para hallar el término solicitado corroborando los resultados de la tabla. La figura es la 12 porque  $12 \times 3 = 36$  cuadrados.

### **ANÁLISIS**

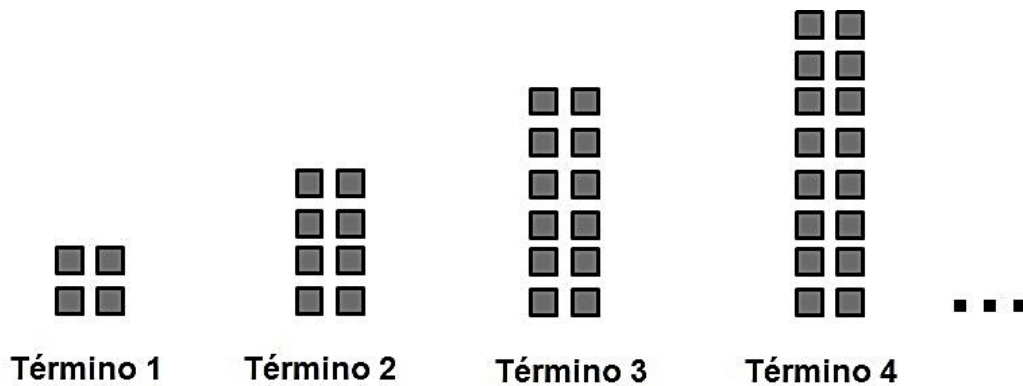
Se evidencia un razonamiento deductivo ya que la joven ha encontrado la fórmula general para determinar el número de cuadrados de cada término de la secuencia. En este caso la estudiante DIE33 usa la fórmula para encontrar el término que contiene 36 cuadrados. Usa la fórmula para hallar el término solicitado basándose en el número de cuadrados del término.

## **6.3 ANÁLISIS A PRIORI DE LAS ENTREVISTAS GRUPALES**

Como parte de la recolección de datos se realizaron cinco entrevistas a un grupo focal de 10 estudiantes. El tipo de entrevista que se manejó fue la entrevista semiestructurada, en grupos de dos estudiantes. En esta parte de la investigación se han seleccionado los estudiantes que han mostrado mejor desempeño durante las pruebas desarrolladas durante las cuatro intervenciones. Teniendo en cuenta el objetivo general, el cual expresa que es necesario propiciar la construcción de una comunidad matemática en el aula, en este momento el grupo ha demostrado gran capacidad para analizar secuencias gráficas y numéricas en el proceso de generalización de patrones, construir conocimiento de manera participativa. El objetivo de estas entrevistas es determinar aquellas formas de pensamiento que desarrollan los estudiantes cuando solucionan tareas que les llevan a analizar secuencias gráficas y numéricas en el proceso de generalización de patrones, con el fin de fortalecer el pensamiento algebraico temprano.

A continuación se presenta la prueba realizada a los estudiantes previa a la entrevista grupal; como se dijo anteriormente esta prueba es desarrollada en grupos de dos estudiantes; luego se aplica la entrevista a las parejas de jóvenes para determinar en el proceso de generalización cuáles formas de razonamiento desarrollan los estudiantes, y la forma cómo alcanzaron estos niveles de razonamiento, en el análisis de secuencias gráficas y numéricas.

**1. Observa la siguiente secuencia formada con figuras geométricas:**



Lo primero que deben hacer los estudiantes es llenar la tabla

Complete la siguiente tabla.

<b>Término</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>...</b>	<b>N</b>
<b>Número de cuadrados</b>	4	8	12	16					...	

a. Dibuje las figuras 5 y 6.



**Figura 5**



**Figura 6**

b. La cantidad de cuadrados en la figura 5 sería:

c. La cantidad de cuadrados en la figura 6 sería:

Siguiendo la secuencia gráfica durante los primeros cuatro términos, y con la ayuda de la tabla se puede ver que hay una relación entre el número del término y la cantidad de cuadrados de cada figura, se establece una relación multiplicativa dada por: la cantidad de cuadrados para cada figura es cuádruplo del número del término =  $4 \times N$ , donde  $N$  es el número del término. Así que para dibujar las figuras se tuvo presente la cantidad de figuras de la tabla, para la figura 5 el número de cuadrados es:  $4 \times 5 = 20$  cuadrados; mientras que, para la figura 6 el número de cuadrados es:  $4 \times 6 = 24$  cuadrados.

a. ¿Cuál es la fórmula general para esta secuencia? Observe la tabla y explique su respuesta.

Al observar la tabla, se puede establecer fundamentalmente que hay una relación entre el número del término y la cantidad de cuadrados de cada figura. La relación es:  $4 \times N$ . Es decir, que por cada término hay el cuádruplo de cuadrados en cada figura; por ejemplo para hallar el número de cuadrados del término 8, donde  $N = 8$ . El número de cuadrados es:  $4 \times N = 4 \times 8 = 32$  cuadrados.

b. ¿Cuál figura tendría 28 cuadrados?

El estudiante cuenta con una herramienta muy importante, ya que se vale de la fórmula que determina el número de cuadrados para cualquier término. Con esta fórmula también se puede saber cuál es el término para determinada cantidad de cuadrados.

c. Si una figura tiene 39 cuadrados corresponde a la figura:

Este es un punto interesante ya que los estudiantes deben hallar la figura que contiene 39 cuadrados. Pueden utilizar la estrategia anterior de dividir la cantidad de cuadrados entre 4. Si el resultado da un número entero, entonces es correcto, y se encuentra el término buscado. Si, por el contrario, el resultado no da un número entero, entonces quiere decir que el término no existe, es decir, no hay una figura en esta secuencia que contenga 39 cuadrados.

Usando esta estrategia nos queda:

Número del término =  $39 / 4 = 9,75$ .

Como el resultado no da un número entero, se puede entonces decir que no existe para esta secuencia una figura que contenga 39 cuadrados. La otra estrategia que pueden utilizar los estudiantes es la de ir desarrollando la secuencia o el conjunto de los múltiplos de 4. Al ir escribiendo la secuencia de los múltiplos de cuatro, alguno de ellos debe coincidir con el número en cuestión, pero si no coincide con

ninguno (lo cual es evidente ya que no es un número par), entonces se puede concluir que la figura no existe.

Múltiplos de 4 = {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44 ....}

La segunda secuencia que deben analizar los estudiantes es una secuencia numérica. Esta secuencia ofrece a los estudiantes una oportunidad de aplicar la experiencia llevada a cabo en las intervenciones.

**2. En la siguiente secuencia numérica, determine la regla de formación. Escríbala con sus palabras. Complete la tabla para ayudar a encontrarla.**

<b>2,</b>	<b>5,</b>	<b>8,</b>	<b>11,</b>	<b>14,</b>	<b>...</b>
<b>Término 1</b>	<b>Término 2</b>	<b>Término 3</b>	<b>Término 4</b>	<b>Término 5</b>	

La primera tarea que deben realizar los jóvenes es llenar la tabla que viene con la secuencia numérica, ya que esto les brinda un soporte para ir descubriendo el patrón de la secuencia numérica. Una tabla es una ayuda muy importante para que el joven halle con mayor facilidad la expresión matemática que genera la secuencia.

<b>Término</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>...</b>	<b>N</b>
<b>Número</b>	<b>2</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>11</b>	<b>14</b>	<b>17</b>	<b>20</b>	<b>23</b>	<b>...</b>	<b>3N-1</b>

a. ¿Cuáles son los números correspondientes a los términos 6, 7 y 8 de la secuencia?

Con la experiencia adquirida por los estudiantes durante las sesiones anteriores y con la ayuda de la tabla que ya han llenado con anterioridad los jóvenes pueden transcribir la respuesta sin ninguna dificultad, los términos ya están escritos y la pregunta ya está respondida.

b. ¿Cuál es el número que corresponde al término 11? Explique su respuesta.

En esta pregunta los estudiantes pueden hacer uso del razonamiento inductivo para encontrar un término posterior de esta secuencia. Una estrategia es extender la tabla hasta llegar al término buscado. La otra es con la ayuda de una expresión matemática encontrar el número en cuestión. Si los jóvenes ya han hallado la fórmula matemática, entonces pueden aplicarla para el término 11 y dar la respuesta: el número correspondiente al término 11 es 32. Si se observa la fórmula y se aplica nos da:  $3 \times N - 1 = 3 \times 11 - 1 = 33 - 1 = 32$ .

c. ¿Cuál es la fórmula general para esta secuencia? Observe la tabla y explique su respuesta.

La intensa actividad matemática llevada a cabo en las sesiones anteriores, las oportunidades de expresar sus respuestas, sustentarlas y debatirlas con el grupo les ha brindado más confianza y seguridad para hallar con más propiedad y eficiencia la fórmula o expresión matemática que genera esta secuencia numérica.

En este momento de la investigación los jóvenes están bien preparados para encontrar esa fórmula.

Con la observación de la tabla, alargando los términos contiguos a la secuencia, y estableciendo una relación matemática entre el número del término y el número, los jóvenes encuentran mediante un análisis inductivo que la expresión que define esta secuencia es:  $3 \times N - 1$ . De hecho, los jóvenes pueden verificar esta fórmula haciendo un barrido de la tabla y reemplazando la letra N por los valores de 1, 2, 3, 4, etcétera y comprobar que efectivamente cumple para cada uno de esos términos, con lo cual queda verificada la validez de las hipótesis, y su extensión a los términos de la secuencia.

- d. ¿Si un elemento de la secuencia es el número 35 a cuál término corresponde?  
Explique el procedimiento que realiza para obtener la respuesta.

Este es el momento en el cual los estudiantes pueden utilizar la fórmula para encontrar el término cuyo número es 35. Hay otra forma alternativa para encontrar este término y es usando la tabla y extenderla hasta encontrarse con el término cuyo valor sea 35; sin embargo, el proceso es más engorroso.

Si se utiliza la fórmula el proceso se hace más corto, ya que simplemente hay que escribir la fórmula y despejar el número en lugar del término.

$$\text{Número} = 3 \times N - 1 = 35.$$

Entonces lo que hay que hacer es despejar la N, la cual representa el número del término y nos queda:

$$3N = 35 + 1 \rightarrow 3N = 36 \rightarrow N = 36 \div 3 = 12.$$

El resultado de N es el número del término correspondiente al número 35.

- e. Si un amigo le dice que uno de los términos es el número 52. Explíquelo a ese amigo por qué si existe o por qué no existe ese término en esta secuencia.

Al igual que en el ítem anterior, los estudiantes pueden extender la tabla hasta encontrar el término que más se aproxime al número dado; si el resultado coincide con el número propuesto entonces se puede validar que es un término de la secuencia; pero, si el resultado no coincide con ninguno de los términos de la secuencia entonces se puede afirmar que el número no corresponde a ningún término de la secuencia. La otra forma de verificar si el número es un término de la secuencia es aplicando la fórmula como en el caso anterior; si el resultado da un

número entero entonces se puede afirmar que el número dado hace parte de la secuencia, pero, si el resultado no es un número entero entonces se puede concluir que el número no hace parte de la secuencia dada.

#### **6.4 ANÁLISIS A POSTERIORI DE LAS ENTREVISTAS GRUPALES**

Las entrevistas grupales hacen parte de una de las estrategias utilizadas para comparar las actitudes y los resultados de los estudiantes desde que tomaron la prueba diagnóstica, pasando por cada una de las intervenciones hasta que presentan esta última prueba con la entrevista al grupo focal. En este punto se pueden hacer comparaciones con respecto al desempeño de los estudiantes, la actitud de los estudiantes, la participación en cada una de las intervenciones, la mejora en el nivel de razonamiento inferencial (abductivo, inductivo o deductivo), el nivel de razonamiento aplicado y las estrategias utilizadas por los estudiantes para desarrollar cada uno de los puntos.

**6.4.1 Abducción.** Luego de haber participado en la prueba diagnóstica y las intervenciones los estudiantes han alcanzado un mejor nivel de desempeño en el proceso de generalización de patrones. En este punto empieza la entrevista, el docente investigador realiza la entrevista planteando un conjunto de preguntas a las parejas de estudiantes con el fin de indagar en detalle la forma cómo los estudiantes lograron desarrollar paso a paso el proceso de generalización de patrones para las secuencias gráficas y numéricas. A continuación se muestra un diálogo con algunas de las parejas de jóvenes que participaron en la entrevista. En este apartado se presenta las respuestas a las preguntas que requirieron de un razonamiento abductivo, además se muestra el diálogo establecido entre el docente investigador y los jóvenes participantes de la entrevista.

## EVIDENCIA



## ARGUMENTACIÓN

ENTREVISTADOR: ¿Podrían decirme cómo construyeron la figura No. 5 Y No. 6?

DIE1: Nos dimos cuenta que el primer término la figura mostraba 4 cuadritos y en el segundo término mostraba otros 4 cuadritos más y así nos dimos cuenta que sumándole 4 cuadritos se formaba la siguiente figura.

ENTREVISTADOR: ¿Cómo encontraron la cantidad de cuadrados en la figura 5?


DIE1: Vimos la secuencia como iba aquí y empezamos a sumarle de a 4 cuadritos, entonces por ejemplo para el número 4 habían 16 cuadros y sumándole 4 en el número el término número 5 habían 20 es decir había que sumarle de a 4.

DIE23: O también se podía multiplicar 1 por 4 igual a 4; 2 por 4 igual a 8, 3 por 4 igual 12, 4 por 4 igual 16 etcétera.

## ANÁLISIS

En este diálogo se puede ver cómo las estudiantes responden con propiedad a las preguntas del entrevistador. En este caso la estudiante DIE1 utiliza la suma para ir generando cada nuevo término de la secuencia. Por otra parte la estudiante DIE23 se vale del factor multiplicativo representado por el patrón que en este caso es el número 4, para explicar cómo cada nuevo término se genera multiplicando por 4 al número del término que representa el número de cuadrados de cada nueva figura, que es múltiplo de 4.

En el siguiente ejemplo las jóvenes DIE33 y DIE7 nos muestran de una manera muy simple cómo a través del hallazgo de la fórmula matemática de una secuencia puede ayudarles a generar la secuencia gráfica y los términos posteriores.

<b>EVIDENCIA</b>

<b>ARGUMENTACIÓN</b>
<p>ENTREVISTADOR: ¿Podrían decirme cómo construyeron la figura No. 5 Y No. 6?</p> <p>DIE33: Las construimos a través de la fórmula aplicando la fórmula supimos la cantidad de cuadrados que componen cada figura y a partir de eso las dibujamos.</p> <p>ENTREVISTADOR: ¿Cómo encontraron la cantidad de cuadrados en la figura 5?</p> <p>DIE33: Por medio de la fórmula planteada desde un principio.</p> <p>ENTREVISTADOR: ¿Idearon otra forma de hallar la cantidad de cuadrados en la figura 5?</p> <p>DIE33: También sumándole <math>N + 4</math>.</p>
<b>ANÁLISIS</b>
<p>La estudiante DIE33 responde con seguridad a las preguntas del entrevistador. En este caso la estudiante DIE33 se vale de la fórmula para encontrar el número de cuadrados de la figura 5. Se evidencia aquí un razonamiento inductivo – deductivo, ya que la estudiante ha partido de una expresión matemática para encontrar la cantidad de cuadrados de cualquier término de la secuencia gráfica. Su nivel de razonamiento es alto.</p>

**6.4.2 Inducción.** Desde que empezaron con la prueba diagnóstica, pasando por cada una de las intervenciones y llegando en este momento a las entrevistas, algunos de los jóvenes han experimentado un progreso notable; todo esto ha sido gracias a la repetición de cada una de las pruebas por las que han pasado, las que los han hecho más hábiles en el hallazgo del patrón cuando se analiza una secuencia gráfica o numérica. Esto ha hecho que el proceso de generalización de patrones se haya convertido en una tarea más fácil de desarrollar y por lo tanto de resolver en menos tiempo.

A continuación se muestran los diálogos de algunas parejas de estudiantes cuando se enfrentan a ítems que los motivan a desarrollar el razonamiento inductivo.

Durante la intervención número cinco se les presenta a los estudiantes una secuencia numérica, y uno de los puntos aplica para analizar el nivel inferencial inductivo. Aquí se muestra la secuencia numérica que tuvieron que analizar los estudiantes en la prueba grupal.

<b>2,</b>	<b>5,</b>	<b>8,</b>	<b>11,</b>	<b>14,</b>	<b>...</b>
<b>Término 1</b>	<b>Término 2</b>	<b>Término 3</b>	<b>Término 4</b>	<b>Término 5</b>	

## IDENTICIA



## ARGUMENTACIÓN

ENTREVISTADOR: ¿Podrían explicarme cómo encontraron el número que corresponde al término 12?

DIE33: Se puede hacer según la fórmula.

ENTREVISTADOR: ¿Qué valor les dio?

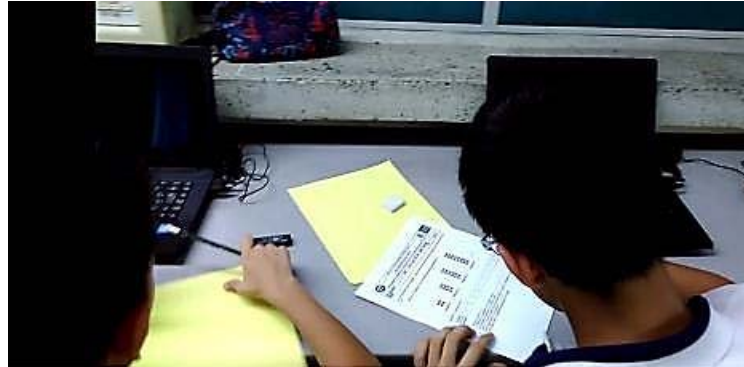
DIE33: El resultado dio 35. Al aplicar la fórmula multiplicamos 3 por 12 y se le resta 1 y nos da 35

## ANÁLISIS

En este caso la estudiante DIE33 utiliza la fórmula para encontrar el número correspondiente al término 12. Se evidencia aquí un razonamiento inductivo debido a que la estudiante ha partido de una fórmula matemática para encontrar el número que corresponde al término 12, de hecho las estudiantes lo hacen con un facilidad que ya son profesionales en la búsqueda de patrones en secuencias numéricas.

Aquí se muestra como lo hace otra pareja de estudiantes resolviendo la misma secuencia numérica, con el mismo punto.

### EVIDENCIA



### ARGUMENTACIÓN

ENTREVISTADOR: ¿Podrían explicarme cómo encontraron el número que corresponde al término 11?

DIE5: Lo encontramos gracias a la fórmula, porque la fórmula nos ayudó, también la tabla yéndole sumando.

DIE31: Con los números que quedaban le íbamos sumando, y a veces multiplicando para poder rectificar si era el número correcto en la tabla.

ENTREVISTADOR: ¿La tabla les sirvió para hallar la fórmula general?

DIE31: Sí. Si nos sirvió.


### ANÁLISIS

Los jóvenes hacen uso de varias estrategias para encontrar el término 11 de la secuencia numérica. Por una parte utilizan la expresión matemática; por otra parte, utilizan la suma para ir generando los términos cercanos hasta llegar al término solicitado. Se evidencia aquí un razonamiento inductivo debido a que los estudiantes han hecho uso de herramientas coherentes para hallar el término buscado en la secuencia numérica. De hecho utilizando la fórmula los jóvenes la aplican para encontrar este término y los términos posteriores de la secuencia.

**6.4.3 Deducción.** La estrategia de construir una comunidad matemática ha empoderado a los estudiantes para asumir su papel como miembros de la comunidad de aprendizaje, todo esto junto con la motivación impartida por el docente investigador y las Tareas propuestas ha fortalecido mucho la capacidad de estos jóvenes en el análisis de secuencias numéricas y figurales. Como miembros de esta comunidad han evidenciado sus progresos gracias a las estrategias y actividades propuestas y han ampliado su capacidad para encontrar la regla de formación en las secuencias gráficas y numéricas, lo cual les ha llevado a exhibir notables progresos en la capacidad de inferir razonamientos al analizar estas secuencias.

Como último nivel de razonamiento se analiza el razonamiento deductivo. En esta parte se han tenido en cuenta algunos ejemplos de parejas de estudiantes que demostraron durante todas las sesiones su gran desempeño en el proceso de generalización de patrones.

A continuación se presenta un ejemplo de una pareja de estudiantes, los cuales muestran cómo aplicaron en este nivel de razonamiento desarrollando una secuencia gráfica.

EVIDENCIA

ARGUMENTACIÓN
<p>ENTREVISTADOR: ¿Lograron hallar el término que contiene 39 cuadrados?  DIE34: La figura 9, pero tocaría restarle 1 para que de 39.  DIE26: La figura 9 da 36, y la figura 10 da 40.  ENTREVISTADOR: ¿Coincide con alguno de los términos de la secuencia?  DIE26: No. No coincide, porque la 9 da 36 y la 10 da 40.  ENTREVISTADOR: ¿Qué pueden concluir?  DIE26: Que el término no existe.</p>
ANÁLISIS
<p>Los jóvenes utilizan la fórmula hallada para ir generando los términos hasta llegar al término que más se aproxime. En este caso hay dos términos que se aproximan al término buscado, como la figura en estudio debe contener 39 cuadrados hay dos términos que se aproximan a este valor y son el término número 9 y el término número 10. Sin embargo, ninguno de los dos términos contiene la cantidad especificada en la pregunta, por lo tanto los estudiantes concluyen correctamente que el término no existe.</p> <p>Se evidencia aquí un razonamiento inductivo debido a que los estudiantes han hecho uso de la expresión matemática para hallar el término que más se aproxime en la secuencia gráfica.</p>

En el siguiente ejemplo vemos el enfoque que le dieron una pareja de estudiantes al resolver el mismo ejercicio para la misma secuencia gráfica. Lo que se pretende es ver de qué manera resolvió este grupo de jóvenes este mismo punto.

## EVIDENCIA



## ARGUMENTACIÓN

ENTREVISTADOR: ¿Lograron hallar el término que contiene 39 cuadrados?

DIE28: No existe un número que al multiplicarlo por 4 da 39.

ENTREVISTADOR: ¿Cómo justifican esto?

DIE28: Al observar la tabla nos dimos cuenta que ningún múltiplo de 4 da 39.

ENTREVISTADOR: ¿Entonces el término no existe?

DIE26: No. No existe para esta secuencia gráfica.


## ANÁLISIS

Los jóvenes se apoyan todo el tiempo en la fórmula para justificar sus respuestas. Ellos siempre usan el factor multiplicativo para dar su respuesta. Por ejemplo cuando el docente investigador les pregunta si lograron hallar el término que contiene 39 cuadrados los estudiantes usan el conjunto de los múltiplos de 4 para justificar por qué ese término no existe.

Debido a que los estudiantes hacen uso de la fórmula matemática para explicar la inexistencia del término se evidencia aquí un razonamiento inductivo.

Durante las pruebas grupales se puede ver el gran nivel que estos estudiantes han alcanzado reconociendo patrones; a estas alturas los estudiantes han desarrollado un buen nivel de comprensión en la prueba de generalización de patrones, gracias a los encuentros grupales, y a las oportunidades que han tenido para socializar y justificar sus respuestas tanto en grupos pequeños como ante toda la clase. A

continuación se presenta otro ejemplo de otra pareja de estudiantes que resuelve la secuencia numérica con un nivel de razonamiento deductivo.

<b>EVIDENCIA</b>

<b>ARGUMENTACIÓN</b>
<p>ENTREVISTADOR: ¿Lograron hallar el término que contiene 39 cuadrados? DIE28: No existe un número que al multiplicarlo por 4 de 39. ENTREVISTADOR: ¿Cómo justifican esto? DIE28: Al observar la tabla nos dimos cuenta que ningún múltiplo de 4 da 39. ENTREVISTADOR: ¿Entonces el término no existe? DIE26: No. No existe para esta secuencia gráfica.</p>
<b>ANÁLISIS</b>
<p>Los jóvenes se apoyan todo el tiempo en la fórmula para justificar sus respuestas. Ellos siempre usan el factor multiplicativo para dar su respuesta. Por ejemplo cuando el docente investigador les pregunta si lograron hallar el término que contiene 39 cuadrados los estudiantes usan el conjunto de los múltiplos de 4 para justificar por qué ese término no existe. Debido a que los estudiantes hacen uso de la fórmula matemática para explicar la inexistencia del término se evidencia aquí un razonamiento inductivo.</p>

## 6.5 COMUNIDAD MATEMÁTICA

De acuerdo con los estándares de matemáticas del MEN (2006), para alcanzar a desarrollar las competencias en la enseñanza de las matemáticas se debe tener en cuenta que:

“Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos.”<sup>45</sup>

Este enfoque llamado Comunidad Matemática se basa en la propuesta de Santos Trigo (2007), quien expresa que: “...se debe considerar al estudiante como un sujeto activo que necesita de una Comunidad para para discutir sus ideas matemáticas y así comunicarlas de manera eficiente.”<sup>46</sup>

Se debe por tanto, establecer espacios donde los estudiantes puedan pensar y razonar acerca de las matemáticas y comunicar sus resultados a sus pares con base en argumentos. Por ejemplo, trabajando en parejas o en pequeños grupos, los estudiantes tienen la oportunidad de validar sus razonamientos y sus conjeturas. En este sentido Santos Trigo plantea que: “Los estudiantes aprenden matemáticas solo cuando ellos mismos construyen sus propias ideas matemáticas”<sup>47</sup>

El concepto de comunidad matemática también está ligado con la idea de relacionar las matemáticas con la construcción del conocimiento y su convalidación por parte de un grupo, donde cada estudiante puede aportar para ayudar en la construcción

---

<sup>45</sup> Estándares básicos de competencias en matemáticas. MEN, 2006. p. 48 Documento digital. Disponible en: [http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042\\_archivo\\_pdf2.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf)

<sup>46</sup> SANTOS Trigo, Luz Manuel. La resolución de problemas matemáticos. México: Editorial Trillas. 2007. p. 95. Versión Digital.

<sup>47</sup> Ibid, p.96.

de ese conocimiento. Para construir sus ideas matemáticas el estudiante debe ser retado con situaciones y problemas que le exijan dar lo mejor de sí, echar mano de sus conceptos matemáticos previos, a partir de la propuesta de situaciones problema donde el estudiante tenga que aplicar todo este conocimiento y saber comunicar sus soluciones a sus compañeros.

El concepto de problema y el tratar de solucionarlo por parte del estudiante es planteado por Santo Trigo de la siguiente manera:

Es decir, tanto al resolver un problema o al aprender un contenido, el estudiante tiene que discutir ideas alrededor del entendimiento de la situación o problema, usar representaciones, estrategias cognitivas y metacognitivas, y utilizar contraejemplos ya sea para avanzar, resolver o entender esa situación problema.<sup>48</sup>

En este orden de ideas, los estudiantes que pertenecen a una Comunidad matemática aprenden matemáticas identificando, seleccionando y usando estrategias comúnmente usadas por los matemáticos al resolver problemas como por ejemplo: discutir ideas con sus compañeros, presentar conjeturas a los problemas planteados, argumentar, analizar, razonar y saber comunicar sus ideas a sus pares y a toda la clase si le es requerido.

Este entorno de Comunidad matemática debe ser un ambiente en el cual se respete el punto de vista del otro, donde se puedan escuchar las diversas formas y manifestaciones de cada uno de sus miembros. Se deben establecer unas reglas de juego, comunicarlas a los estudiantes, y recordarles constantemente a los jóvenes que se deben tratar con respeto, que deben escuchar al otro, respetar su punto de vista, sus argumentos, y saber comunicarse con las otras personas.

---

<sup>48</sup> Ibid, p. 11.las

El desarrollo de las intervenciones en esta investigación se divide en tres momentos: el primero consistió en un trabajo individual, aquí los estudiantes tuvieron que resolver cada una de las pruebas, donde pueden analizar, establecer sus hipótesis, conjeturar y dar solución a cada uno de los puntos de la prueba por un período de tiempo acordado con el grupo; en el segundo momento se lleva a cabo la reunión en grupos pequeños, aquí se reúnen grupos pequeños de estudiantes para deliberar, cada uno de los integrantes del grupo presenta a sus compañeros de grupo sus soluciones y, como grupo, determinan cuál es la mejor solución para presentarla en la puesta en común, en este momento los estudiantes deben comunicar y explicar a sus compañeros la solución propuesta. En el tercer momento se lleva a cabo la socialización para toda la clase, en este momento se hace la puesta en común; para cada uno de los puntos se presentan las mejores soluciones, se argumenta a toda la clase, se explican las soluciones y se contradicen aquellas respuestas que no muestran argumentos suficientes para su validez, en este punto es cuando la Comunidad convalida cada una de las respuestas para todo el grupo.

Para el análisis de la Comunidad Matemática se seleccionaron algunos de los episodios más importantes para cada uno de los momentos desarrollados en cada una de las intervenciones trabajadas. Para los eventos seleccionados se incluyen fotografías como evidencia del trabajo de cada uno de los miembros activos de la comunidad en formación.

### **Primer momento: Trabajo individual**

La primera parte de la intervención consiste de un trabajo individual, se organizan los estudiantes por filas y en orden de lista. A cada estudiante se le entrega la hoja de la prueba con una o dos hojas de color para que se desarrolle la prueba; se les dan las instrucciones a los estudiantes, se les recuerda que deben de desarrollar la prueba con la mayor seriedad del caso; que deben estar concentrados y enfocados en su hoja, y se les da un tiempo límite para desarrollar la prueba y las indicaciones

de los otros dos momentos de la prueba. Aquí los estudiantes usualmente hacen preguntas acerca de los puntos de la prueba, solicitan hojas extras para desarrollar sus respuestas, y le preguntan al docente cuánto tiempo queda para terminar la prueba, estas son preguntas comunes.

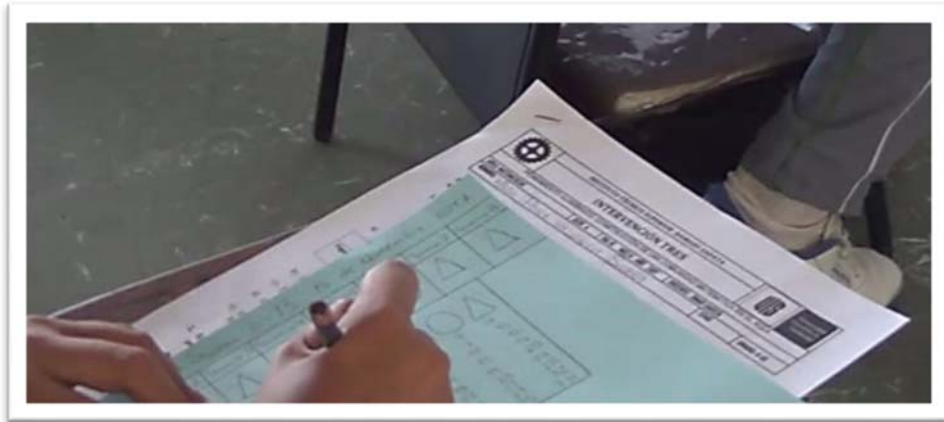
**Fotografía 1. Trabajo individual primera sesión.**



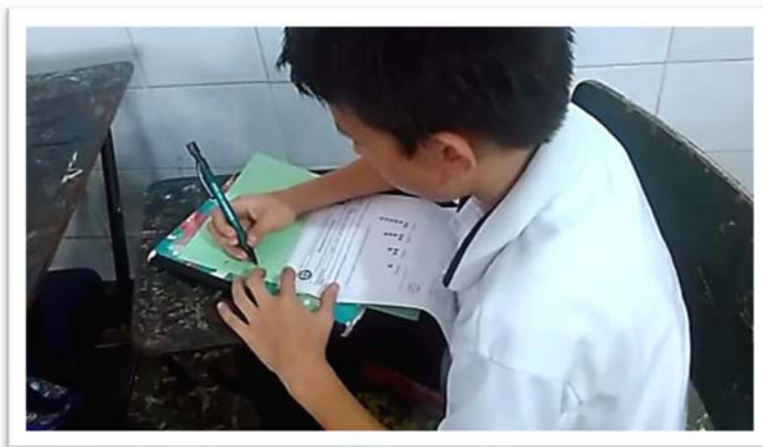
**Fotografía 2. Trabajo individual segunda sesión**



**Fotografía 3. Trabajo individual tercera sesión**



**Fotografía 4. Trabajo individual cuarta sesión**



### **Segundo momento: Trabajo en equipo**

Una vez terminada la primera parte, el docente da indicaciones a los estudiantes para orientarlos en el siguiente momento. El docente se asegura que los estudiantes se organicen en grupos pequeños, y que cada grupo discuta y debata las mejores soluciones a cada una de las tareas propuestas. En este momento el docente orienta a los estudiantes acerca de escuchar atentamente la solución de sus pares, y también les indica que deben de explicar a sus compañeros cómo obtuvieron la

solución en cada caso. Esta es una oportunidad para que los estudiantes más capaces se destaquen, y ayuden a aquellos que son más tímidos y no tienen tanta confianza para socializar sus respuestas. Este proceso se repite hasta que se hayan agotado todos los ítems de cada uno de los puntos de la prueba, hasta que se haya llegado a una unificación de criterios y se haya llegado un acuerdo sobre la mejor respuesta a cada ítem en cada uno de los grupos. En este punto los estudiantes deben estar aplicando en uno de los niveles de razonamiento inferencia categorizados en la propuesta; pero siempre en todos los campos surgen líderes, que son los que alcanzarán a desarrollar todos los niveles de razonamiento o la mayoría de ellos en cada una de las Tareas propuestas.

Estos líderes se encargan de explicar las soluciones a sus compañeros y son los que se encargan de organizar al grupo, de asignar las tareas que se van a realizar y también serán los que seleccionarán aquellas respuestas y análisis que mejor se ajusten a cada ítem desarrollado. Son los organizadores y los constructores del conocimiento.

A continuación se presentan evidencias sobre este proceso en algunos grupos.

#### **Fotografía 5. Orientaciones sobre el trabajo en equipo**



**Fotografía 6. Trabajo en equipo Grupo (DIE1, DIE2, DIE20) primera sesión**



Durante la primera sesión los estudiantes siguieron muy bien las indicaciones que les dio el docente, estuvieron muy juiciosos trabajando en equipos de tres estudiantes y realizando bien la tarea de deliberar la mejor respuesta a cada uno de los ítems. El docente se desplazó por cada uno de los grupos para verificar el trabajo de cada grupo, y además para aclarar dudas que pudieran tener los estudiantes en cada uno de los grupos. La participación de los estudiantes en cada uno de los grupos fue muy buena.

**Fotografía 7. Trabajo en equipo Grupo (DIE7, DIE14, DIE27) segunda sesión**



### **Tercer momento: Socialización grupal.**

En este espacio es donde se construye el conocimiento matemático y se convalida este conocimiento matemático, lo cual conduce a la consolidación de la Comunidad Matemática.

Aquí los estudiantes socializan cada uno de los puntos de cada una de las Tareas orientados por un docente investigador, quien actúa como mediador entre los estudiantes y el conocimiento que se está compartiendo en ese momento con sus pares. Los estudiantes tienen la oportunidad de exponer cada una de sus respuestas y estas respuestas quedan categorizadas en cada uno de los niveles de razonamiento (abductivo, inductivo o deductivo), pues con cada solución que se socializa se está mostrando un nivel de razonamiento. Por otra parte sus pares también están corroborando o refutando la solución que están exponiendo sus compañeros, lo cual conduce al proceso de convalidación del conocimiento que se está compartiendo en este momento.

A continuación se muestran evidencias de este trabajo de compartir su experiencia a sus compañeros.

Foto 1. Estudiante DIE34 socializando con sus pares



## 7. CONCLUSIONES

En este capítulo se muestran las conclusiones relacionadas con el desarrollo del pensamiento algebraico en los procesos de generalización de patrones y la implementación de la Comunidad Matemática. Estas conclusiones están organizadas en dos partes: la primera parte está relacionada con el cumplimiento de los objetivos propuestos en la investigación; en la segunda parte se desarrollan las conclusiones generales.

### **Sobre los objetivos de la investigación**

La pregunta que orientó el presente trabajo estuvo basado en la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué caracteriza el pensamiento algebraico de los estudiantes de sexto grado de una Institución pública que pertenecen a una Comunidad Matemática, cuando resuelven Tareas relacionadas con el proceso de generalización de patrones? Para dar respuesta a esta pregunta se planteó un objetivo general:

Propiciar la construcción de una comunidad matemática en el aula que transforme respectivamente el rol de profesor y el estudiante frente al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, a través del análisis de tareas que potencien el pensamiento algebraico.

A continuación se muestran las acciones desarrolladas durante la investigación que condujeron al cumplimiento de los objetivos específicos:

**Objetivo específico 1:** Realizar un diagnóstico inicial con el fin de reconocer las fortalezas y limitaciones que evidencian los estudiantes al resolver situaciones

relacionadas con el pensamiento algebraico.

Para cumplir con este objetivo se realizó una prueba diagnóstica conformada por tres tareas, se presentaron dos secuencias gráficas y una numérica tomadas de autores como: Rivera, THALES S.A.E.M Principios y Estándares para la educación matemática y Vergel. El desarrollo de estas secuencias pudo evidenciar el nivel en el cual se encontraba el grupo. Al analizar esta actividad se pudo concluir que la mayoría de estudiantes no lograron un nivel de razonamiento inductivo ni deductivo; mostraron dificultades para tratar de encontrar un término muy lejano de una secuencia, ya que lo representaban paso a paso o dejaban la respuesta en blanco. Otras de las dificultades que tuvieron los estudiantes fue al determinar la regla o fórmula general para encontrar cualquier término de la secuencia ya sea gráfica o numérica. Cuando tuvieron que explicar con sus propias palabras cómo hallar un término posterior de la secuencia sencillamente dejaban en blanco la respuesta o no encontraban la relación entre el número del término y el factor de variación de dicho término; bien fuera que se tratase de una secuencia numérica o gráfica.

La mayoría de estudiantes evidenció un razonamiento abductivo pues describía de forma verbal las preguntas y representaba de manera secuencial las secuencias gráficas o dejaban en blanco la respuesta.

Con esta prueba diagnóstica se evidenció que era necesario reforzar el desarrollo de habilidades en el proceso de generalización de patrones en las secuencias gráficas y también en las numéricas; construir con los estudiantes otras formas de representación, por ejemplo la tabular, con el fin de potenciar niveles de razonamiento superiores.

**Objetivo específico 2:** Motivar la participación de los estudiantes como miembros activos de la Comunidad Matemática establecida en su aula a partir de las estrategias para incentivar el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

El docente se encargó de motivar a los estudiantes por medio de charlas al principio de cada parte de cada intervención para alentar a los estudiantes a participar en cada una de las intervenciones. Durante cada una de las intervenciones el docente explicó acerca de la dinámica de trabajo de una Comunidad Matemática, los beneficios del trabajo en equipo y la importancia de saber comunicar a sus pares sus soluciones propuestas. También fue importante la motivación de algunos estudiantes, ya que el espíritu de servicio y cooperación que manifestaron algunos de ellos ayudó para que los otros se contagiaron y se motivaran a solucionar los ejercicios y a participar activamente como miembros de la Comunidad Matemática. Al final de cada intervención se les pidió a dos estudiantes que expresaran lo que habían aprendido con esta estrategia aplicada.

**Objetivo específico 3:** Proponer tareas a través de las cuales se potencie el desarrollo de las capacidades en los niños de 9 a 12 años, para fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

Para el cumplimiento de este objetivo se estudiaron y analizaron estudios de varios autores sobre la generalización de patrones en series gráficas y numéricas, entre estos autores están Ferdinand Rivera en su libro: “Teaching and learning patterns in school mathematics. Psychological and pedagogical considerations”; Vergel con su tesis doctoral “Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)”; Santos Trigo con su libro: “La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos”; el documento de los profesores de matemáticas de Estados Unidos National Council of Teacher of Mathematics. (NCTM, (2000): “Principles and standards for school mathematics”; la tesis de Maestría de Carolina Martínez titulada: “Procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano”; entre otros con el fin de lograr una comprensión acerca del proceso de generalización de patrones en sucesiones gráficas y numéricas; además de la estrategia metodológica sobre la Comunidad Matemática. Este estudio también sirvió para seleccionar

apropiadamente las Tareas que se debían incluir en cada una de las pruebas que se desarrollaron en las intervenciones.

Después de las intervenciones se llevó a cabo una entrevista grupal para determinar la manera como los estudiante lograron avanzar sobre sus formas de razonamiento inferencial (abductivo, inductivo y deductivo).

**Objetivo específico 4:** Evaluar el impacto de la estrategia aplicada en el contexto de la Comunidad Matemática.

Para poder evidenciar el cumplimiento de este objetivo se debe mirar hasta qué punto los estudiantes han logrado mejorar en el nivel alcanzado de razonamiento inferencial (abductivo, inductivo y deductivo). De acuerdo con la prueba diagnóstica muy pocos estudiantes alcanzan superar los niveles de razonamiento después del nivel de abducción. La mayoría están en el nivel abductivo. Sin embargo al final de la última intervención se puede apreciar que más estudiantes alcanzan los otros niveles de razonamiento (inducción y deducción). De acuerdo con el Cuadro 3. Se puede ver el estado inicial en los niveles de razonamiento de cada uno de los estudiantes del grupo de sexto grado luego de haber culminado la prueba diagnóstica.

**Cuadro 3. Tabla de estado inicial de los niveles de razonamiento**

CÓDIGO	PREGUNTA 1							PREGUNTA 2						PREGUNTA 3							
	a	b	c	d	e	f	g	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f	g	
DIE1	A	A	A	I	I	A	A	A	I	A	A	A	A	A	A	A	I	A	A	A	A
DIE2	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE3	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE4	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE5	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE6	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE7	A	A	A	I	I	A	A	A	I	A	A	A	A	A	A	A	I	A	A	A	A
DIE8	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE9	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE10	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE11	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE12	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE13	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE14	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE15	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE16	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE17	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE18	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE19	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE20	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE21	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE22	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE23	A	A	A	I	I	I	A	A	I	I	A	A	A	A	A	I	A	A	A	A	A
DIE24	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE25	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE26	A	A	A	I	I	A	A	A	I	I	A	A	A	A	A	I	A	A	A	A	A
DIE27	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE28	A	A	A	I	I	I	A	A	I	I	D	D	D	A	A	I	D	D	D	D	D
DIE29	A	A	A	I	I	A	A	A	I	A	A	A	A	A	A	I	A	A	A	A	A
DIE30	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE31	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE32	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
DIE33	A	A	A	I	I	I	A	A	I	I	D	D	D	A	A	I	D	D	D	D	D
DIE34	A	A	A	I	I	I	D	A	I	A	A	A	A	A	A	I	A	A	A	A	A
	34	34	34	8	8	4	1	34	8	4	2	2	2	34	34	8	2	2	2	2	2

Durante cada una de las sesiones de grabación pudo evidenciarse una interacción dinámica entre los estudiantes y el docente que generó ideas, discusiones, aportes, razonamientos, descartar soluciones, proponer otras estrategias para resolver una Tarea. Cada uno de estos espacios permitió a los estudiantes establecer un entorno de enseñanza y aprendizaje donde el docente no fue el único en tener todas las respuestas a los problemas propuestos en cada una de las Tareas propuestas; de hecho existieron varias formas de resolverlos para cada grupo de estudiantes. En

este entorno de aprendizaje de las matemáticas hubo tiempo para reflexionar, pensar, razonar, analizar, corregir, representar, aplicar, probar, validar una solución a un problema matemático con la aprobación o la negación por parte de una Comunidad que participó activamente en la construcción de cada una de las soluciones a estos problemas planteados.

El análisis de las Tareas propuestas evidencia una evolución sobre los niveles de razonamiento en algunos estudiantes (abductivo, inductivo y deductivo). Las Tareas propuestas se constituyeron en problemas retadores que despertaron la motivación al tener que trabajar de forma individual, en grupos, al discutir soluciones en grupo, y al tener que socializar las soluciones durante la puesta en común durante cada sesión de grabación.

El hecho de llegar al aula con una estrategia metodológica distinta por parte del docente, motivó en los estudiantes la participación activa en la construcción del conocimiento, su convalidación, la ética comunal, desarrollar habilidades de comunicación de ideas entre pares y entre miembros de otros grupos de estudio.

El análisis de toda la intervención permite ver que los problemas propuestos en cada una de las Tareas tuvieron varias formas de solución que emergieron del trabajo de la Comunidad Matemática en construcción. Estos problemas también requirieron de análisis, de razonamiento, del uso de expresiones matemáticas y del hallazgo de una regla de formación para cada secuencia propuesta en cada una de las Tareas.

Se evidencia que los estudiantes utilizaron estrategias diversas cuando analizaron secuencias numéricas y figurales. Entre otras estrategias se pudieron observar algunas como: representaciones pictóricas, representaciones icónicas, desarrollo de representaciones tabulares para generar secuencias, utilización de expresiones matemáticas, expresiones verbales, descripciones textuales, y el diálogo constante

entre pares para llegar a encontrar el patrón y la regla de formación en el proceso de generalización de patrones.

Cuando los estudiantes tuvieron que dar respuestas sobre el análisis de cada secuencia siempre les requirió utilizar habilidades de comunicación escrita, verbal, habilidades para escuchar, y para transmitir ideas y propuestas y socializarlas a su grupo y a toda la clase durante la puesta en común.

La estrategia de construcción de la Comunidad Matemática en el aula despertó el interés en los estudiantes, la motivación, reacciones positivas en los estudiantes que participaron en estas discusiones; también potenció en los estudiantes habilidades de comunicación, habilidades cognitivas, habilidades de razonamiento, habilidades para organizar las ideas y saber comunicarlas a otros, habilidades para escuchar los puntos de vista de otros, y el desarrollo de la tolerancia aun cuando otro pensara distinto. Todo esto contribuyó a generar un ambiente dinámico, en el cual el docente estuvo como orientador y facilitador de un proceso de enseñanza aprendizaje presentado de una forma más motivadora y retadora, para que los estudiantes se involucraran más en su aprendizaje y construyeran con más seguridad y confianza en sus ideas ante el reto de desarrollar un problema con secuencias numéricas y con figuras.

Como lo afirma Santos Trigo:

Aprender matemáticas significa que el estudiante identifique, seleccione y use estrategias comúnmente usadas por los matemáticos al resolver problemas. Por ejemplo es importante que el estudiante discuta sus ideas con sus compañeros, que presenten conjeturas acerca del comportamiento de ciertas ideas matemáticas, que utilice ejemplos y contraejemplos para convencerse a sí mismo y otros de los resultados, y que plantee sus propios problemas.<sup>49</sup>

---

<sup>49</sup> SANTOS Trigo, Luz Manuel. La resolución de problemas matemáticos. México: Editorial Trillas. 2007. p. 47. Versión Digital.

La conformación de una Comunidad Matemática es posible en cualquier aula de clase, siempre y cuando el docente establezca las pautas, proponga las Tareas que requieran más de una solución, genere espacios de participación individual, grupal, se haga una puesta en común donde los estudiantes tengan la oportunidad de comunicar sus ideas y soluciones ante la clase con argumentos validados por sus pares y convalidados por un grupo inmerso en la misma actividad matemática.

Uno de los resultados más importantes de esta investigación es el progreso alcanzado en cada una de las formas de razonamiento inferencial (abductivo, inductivo y, deductivo) por parte de algunos de los estudiantes como por ejemplo: DIE7, DIE23, DIE29, DIE28, DIE29, DIE31, DIE 33 y DIE34 de grado sexto de esta institución. Se pudo observar que algunos de los estudiantes obtuvieron niveles que durante la prueba diagnóstica no lograban alcanzar.

En términos generales esta investigación: Le sirve al docente para reflexionar acerca de sus propias prácticas pedagógicas actuales y antiguas. Es útil para mejorar las capacidades del investigador: comunicar, escuchar, propiciar espacios más dinámicos para enseñar y aprender matemáticas; le enseña al docente investigador que hay que ser constante, perseverante, no rendirse ante los obstáculos, seguir investigando y proponiendo estrategias novedosas a los estudiantes para despertar el interés y la motivación de los jóvenes en el aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte esta investigación le brinda al docente investigador la oportunidad de reflexionar sobre sus prácticas educativas y sobre el proceso de mejoramiento de los estudiantes, lo cual redundará en mejoras en el proceso de enseñanza aprendizaje de los educandos, de las instituciones educativas, así como de los miembros de las mismas. Dejando abierta una nueva posibilidad de aprender y enseñar para cualquier docente que quiera orientar una sesión de aprendizaje de matemáticas o cualquier otra materia que los estudiantes deben aprender en su enseñanza

primaria, media o vocacional. En este camino existe la posibilidad de desarrollar otra investigación con la ayuda de una herramienta computarizada (software) como por ejemplo Geogebra u otro software libre para hacerlo más dinámico y atractivo a los estudiantes.

El desarrollo general de esta investigación contribuye a que se mejoraran las habilidades de comunicación de los estudiantes, su capacidad para expresar ideas, debatirlas, confrontarlas, argumentarlas y para respetar los puntos de vista de otros, y aprender de las estrategias de otros pares. Para la sociedad es una forma de entender las matemáticas, un espacio donde confluyen diversos puntos de vista, diversas formas de ver las matemáticas, diferentes formas de comunicarlas, diferentes formas de representarlas, distintas formas de analizarlas, diferentes formas de interpretarlas y por supuesto de socializarlas y presentarlas a sus pares.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BUTTO, Christine María, ROJANO, María Teresa. Pensamiento algebraico temprano. P. 2. Disponible en: [http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area\\_tematica\\_05/ponencias/1391-F.pdf](http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/1391-F.pdf).

CARPENTER, T. P. y Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), Proceedings of the 12th ICMI study conference. The future of the teaching.

Estándares Básicos De Competencias En Lenguaje, matemáticas ciencias y ciudadanas. Ministerio De Educación Nacional. 2006. Bogotá.

GODINO, Juan D. Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Disponible en: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/>. Proyecto Edumat, 2003.

J. McKernan (1999). Investigación acción y curriculum. Documento digital. Disponible en: <https://sites.google.com/site/menromoti/investigacion-accion-y-curriculum-53943885>

KAPUT, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema., & T. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 133-155). Mahwah, N.J: L. Erlbaum Associates, Publishers.

KIERAN, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? The Mathematics Educator, 18(1), 139-151.

MARTÍNEZ AVENDAÑO, Johana Carolina. Procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Bucaramanga, 2016, 118 p. Trabajo de grado para optar al título de magister en matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

National Council of Teacher of Mathematics. (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Autor.

RADFORD, Luis. Early Algebraic Thinking: Epistemological, Semiotic, and Developmental Issues. p. 209. Disponible en: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-12688-3\\_15](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-12688-3_15).

ROA, Solange. La construcción de una comunidad matemática en el aula y el desarrollo del pensamiento algebraico. Colectivo didáctica de las matemáticas. Universidad industrial de Santander. 2016.

RIVERA, Ferdinand. Teaching and learning patterns in school mathematics. Psychological and pedagogical considerations. Springer Dordrecht Heidelberg New York London. Documento digital.

SANTOS, Trigo, Luz Manuel. La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos. México, Trillas. Asociación Nacional de profesores de matemáticas. 2007.

VERGEL CAUSADO, Rodolfo. Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). Bogotá, 2014, 202 p. Trabajo de grado para optar al título de Doctor Interinstitucional

en Educación. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Facultad de Ciencias y Educación.

ZAPATA Rendón, Martha Cecilia. El papel mediador del profesor en el proceso de enseñanza aprendizaje. Universidad de Antioquia, 2016. P. 2. Recuperado de: [http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/pluginfile.php/282329/mod\\_resource/content/1/Elpapelmediadordelprofesor\\_Julio29%202016.pdf](http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/pluginfile.php/282329/mod_resource/content/1/Elpapelmediadordelprofesor_Julio29%202016.pdf)

## ANEXOS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
ESCUELA DE EDUCACIÓN  
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA



### ASENTIMIENTO INFORMADO A ESTUDIANTES

Yo, María Paula Peña Díaz estudiante del grado sexto del Instituto Técnico Superior Damaso Zapata de Bucaramanga, acepto participar voluntariamente en la investigación dirigida por el docente **OMAR GILBERTO GARCÍA MOGOTOCORO**. He sido informado(a) que el objetivo principal de este estudio es: **Desarrollo de Pensamiento Algebraico Temprano: Construcción de una Comunidad Matemática en el aula.**

Me han indicado también que tendré que responder una prueba diagnóstica, participar en las sesiones del proyecto y finalmente contestar una entrevista semiestructurada.

Reconozco que la información que yo provea en el curso de esta investigación es estrictamente confidencial y no será usada para ningún otro propósito fuera de los de este estudio sin mi consentimiento. He sido informado de que puedo hacer preguntas sobre el proyecto en cualquier momento, sin que esto acarree perjuicio alguno para mi persona. De tener preguntas sobre mi participación en este estudio, puedo realizar contacto con quien lo dirige al correo [omgamo@gmail.com](mailto:omgamo@gmail.com)

Firma del Participante

Fecha

María Paula Peña Díaz

25.10.2017

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
ESCUELA DE EDUCACIÓN  
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA



CONSENTIMIENTO INFORMADO A PADRES DE FAMILIA

Yo Leidy Yaneth Díaz Flores, identificado(a) con cédula de ciudadanía No. 63484993 de Bucaramanga, representante legal de María Paula Peña Díaz, estudiante del grado sexto; he sido informado(a) sobre la participación de mi hijo(a) y/o acudido(a), en la investigación del docente **OMAR GILBERTO GARCÍA MOGOTOCORO**, de la Maestría en Pedagogía de la Universidad Industrial de Santander, bajo la dirección de la PhD **SOLANGE ROA FUENTES**. El objetivo de este estudio es: **Desarrollo de Pensamiento Algebraico Temprano: Construcción de una Comunidad Matemática en el aula.**

Si usted autoriza la participación del estudiante, a éste se le pedirá responder una prueba diagnóstica, participar en las sesiones del proyecto y responder a una encuesta semiestructurada; todo esto con el fin de transformar el proceso de aprendizaje del estudiante. Tenga en cuenta que las sesiones del proyecto serán grabadas para realizar un análisis del proceso; sin embargo, la información recolectada es confidencial y no se usará para ningún otro propósito fuera de los de esta investigación. Las respuestas serán codificadas usando un número de identificación y, por lo tanto, serán anónimas.

Si tiene alguna duda sobre este proyecto, puede hacer preguntas en cualquier momento.

Luego de haber sido informado(a) sobre las condiciones de participación del estudiante, entiendo que:

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
ESCUELA DE EDUCACIÓN  
MAESTRÍA EN PEDAGOGÍA



- Los resultados del proyecto de investigación no tendrán repercusiones en las calificaciones o actividades escolares.
- La participación del estudiante no generará ningún gasto, ni recibiré remuneración alguna por su participación.
- No habrá ninguna sanción en caso que no se autorice la participación del estudiante.
- Los videos o grabaciones de las sesiones de clase, serán utilizados únicamente con fines pedagógicos y como evidencia de la práctica educativa del docente.

Atendiendo a la normatividad vigente sobre consentimientos informados (Ley 1581 de 2012 y Decreto 1377 de 2012) y de forma consciente y voluntaria:

[  ] DOY EL CONSENTIMIENTO    [  ] NO DOY EL CONSENTIMIENTO

Desde ya le agradezco su valiosa participación.

Nombre del padre de familia

Firma del padre de familia

Leidy Yaneth Diaz Florez *Paula Diaz Florez*

Nombre de mi hijo(a) participante

Fecha:

Maria Paula Perez Diaz 25.10. / 2017.

	INSTITUTO TÉCNICO SUPERIOR DAMASO ZAPATA				Universidad Industrial de Santander
	<b>INTERVENCIÓN UNO</b>				
PENSAMIENTO ALGEBRAICO: CONSTRUCCIÓN DE UNA COMUNIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA					
AREA: MATEMATICAS	SEDE A	DIA 07	MES II	AÑO 2017	DOCENTE: OMAR GARCÍA
NOMBRE:				EDAD	GRADO: 6-13

Lee atentamente cada pregunta y escribe todo el proceso que debes realizar para desarrollar cada una.

1. Dada la siguiente secuencia con figuras geométricas, determine cuál es una regla de formación. Escríbala con sus palabras.



Regla de formación:

---



---



---

La figura en el lugar 16 será:

La figura en el lugar 21 será:

2. Dadas la siguiente secuencia con figuras geométricas, determine cuál es una regla de formación. Escríbala con sus palabras.



Regla de formación:

---



---



---

La figura en el lugar 25 será:

La figura en el lugar 31 será:

3. En la siguiente secuencia numérica, determine cuál es una regla de formación. Escríbala con sus palabras.

**1, 3, 5, 7, 9,...**

**Regla de formación:**

---



---



---

- a. ¿Cuáles son los números correspondientes a los términos 6, 7 y 8 de la secuencia?  
 b. ¿Cuál es el número que corresponde al término 15? Explique sus respuestas.  
 c. ¿Cuál es el número que corresponde al término 30? Explique el procedimiento que realiza para obtener la respuesta.  
 d. ¿A qué término corresponde el número 67? Escriba cómo le explicaría a un amigo, con todos los detalles, la manera cómo encuentra la respuesta.
4. Observe la siguiente secuencia y complete las oraciones (complete la tabla):



Figura 1



Figura 2



Figura 3

Lugar	Cantidad de círculos
1	
2	
3	
4	
5	
n	

- a. Construya las figuras 4 y 5.  
 b. La cantidad de círculos en la figura 4 sería: \_\_\_\_\_.  
 c. La cantidad de círculos en la figura 6 sería: \_\_\_\_\_.  
 d. La figura \_\_\_\_\_ tendría 24 círculos.  
 e. Si una figura tiene 30 círculos a cuál figura corresponde a: \_\_\_\_\_.

**CERTIFICADO CURSO PROTECCIÓN DE LOS PARTICIPANTES EN  
INVESTIGACIONES**

**Certificate of Completion**

The National Institutes of Health (NIH) Office of Extramural Research certifies that **Omar Gilberto García Mogotocoro** successfully completed the NIH Web-based training course "Protecting Human Research Participants."

**Date of Completion:** 07/20/2018

**Certification Number:** 1934577



