

Un Modelo Cognitivo de Construcción de los Sistemas de Ecuaciones Lineales

Laura Fernanda Oliveros Tasco

Trabajo de Grado para Optar por el Título de

Magister en Educación Matemática

Directora

Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Educación Matemática

Bucaramanga

2019

Tabla de Contenido

Introducción	13
1. Los Sistemas de Ecuaciones Lineales en Matemática Educativa	17
1.1 La didáctica del álgebra lineal.....	17
1.2 Los sistemas de ecuaciones lineales en la Didáctica del álgebra lineal	20
1.2.1 Los SEL desde la perspectiva de los modos de pensamiento de Sierpinska	20
1.2.2 Los SEL bajo el marco teórico de los registros de representación de Duval.....	26
1.2.3 Un trabajo enfocado en la resolución de problemas.	30
1.2.4 Un trabajo sobre el discurso matemático	31
2. La Teoría APOE: construcción de Objetos abstractos a partir de la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos	32
2.1 Teoría APOE	33
2.2 Ciclo de investigación	41
2.2.1 Análisis teórico.	42
2.2.2 Diseño e implementación de enseñanza	43
2.2.3 Recolección y análisis de datos.....	45
2.3 La teoría APOE y los sistemas de ecuaciones lineales	45
2.4 La teoría APOE y otros conceptos del álgebra lineal.....	53
3. Planteamiento del problema y objetivos de la investigación	58
3.1 Planteamiento del problema.....	58
3.2 Pregunta de investigación.....	60
3.3 Objetivos de investigación	61
4. Etapa de reconocimiento	61
4.1 Descripción general	61

4.2	Característica de los estudiantes.....	62
4.3	Dinámica del curso.....	62
4.4	Conclusiones de la experiencia	66
5.	Análisis teórico, intención de las actividades de clase y análisis de las construcciones mentales evidenciadas.....	68
5.1	Análisis teórico.....	68
5.1.1	Análisis de libros de texto.....	68
5.1.2	Descomposición Genética hipotética, del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales.	78
5.2	Diseño e intención de los instrumentos.....	88
5.3	Prueba Diagnóstica inicial.....	88
5.3.1	Aplicación del cuestionario diagnóstico.	89
5.3.2	Intención del diseño.	89
5.4	Actividades de clase	94
5.5	Prueba Diagnóstica Final	99
5.5.1	Aplicación de la prueba diagnóstica final.....	99
5.5.2	Intención del diseño y análisis hipotético de la construcción del concepto.....	99
5.6	Entrevista.....	111
5.6.1	Aplicación de la entrevista.....	111
5.6.2	Intención del diseño y análisis hipotético sobre la construcción del concepto.....	112
6.	Análisis y verificación de datos: Evidencias de las construcciones mentales realizadas por los estudiantes.....	118
6.1	Datos obtenidos del diagnóstico final	118
6.1.1	Concepción Acción del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales.	119
6.1.2	Estado intermedio entre la concepción Acción y Proceso.	119
6.1.3	Concepción Proceso del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales.	120

6.1.4 Observaciones generales.....	123
6.2 Datos obtenidos de la entrevista.....	126
6.2.1 Concepción Acción del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales.	126
6.2.2 Concepción Proceso del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales.	129
7. Conclusiones	134
7.1 Sobre el uso de Formas concretas	135
7.2 Descomposición genética refinada.....	136
7.3 El Esquema de Sistema de Ecuaciones Lineales, una reflexión inicial	139
7.4 Implicaciones Didácticas.....	141
Referencias Bibliográficas	142
Apéndices.....	149

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1. Problema de SEL en modo sintético geométrico. Sierpinska (2000).	21
Figura 2. SEL de tres ecuaciones con dos incógnitas sin solución. Ochoviet (2009).	24
Figura 3. Situación de un registro verbal a gráfico. Segura (2004).	27
Figura 4. Secuencia de actividades presentadas en un registro gráfico. Arellano (2006).	28
Figura 5. Actividad en el ambiente ALSEL. Betancourt (2009).	29
Figura 6. Teoría APOE. Arnon, Cottit, Dubinsky, Okaç, Roa-Fuentes, Trigueros, & Weller (2014).	35
Figura 7. La diferencia en la teoría APOE entre contextos abstractos y contextos concretos. Arnon et al. (2014).	39
Figura 8. La partición de los anillos. Arnon et al. (2014).	40
Figura 9. Ciclo de investigación de la teoría APOE. Arnon et al. (2014)	42
Figura 10. Relación entre el ciclo ACE y una descomposición genética. Arnon et al. (2014).	44
Figura 11. Descomposición Genética del concepto SEL. Manzanero (2007).	48
Figura 12. Problema de flujo de tráfico. Possani et al. (2010).	51
Figura 13. Descomposición Genética del concepto Combinación Lineal. Parraguez (2011).	55
Figura 14. Respuesta de un estudiante a una pregunta de una entrevista. Parraguez (2011).	56
Figura 15. Descomposición Genética del concepto Base. Kú, et al. (2008).	57
Figura 16. Tomado de la prueba diagnóstica final, etapa de reconocimiento.	64
Figura 17. Ejemplo de un sistema con infinitas soluciones.	82
Figura 18. Ejemplo de un sistema con única solución.	82
Figura 19. Inconsistencia del tipo $0=r$	83

Figura 20. Ejemplo de problema en un modo sintético geométrico.	84
Figura 21. Matriz reducida del sistema asociado	84
Figura 22. Representación gráfica del problema abordado.	85
Figura 23. Problema planteado en Prueba Diagnóstica inicial.	93
Figura 24. Problema 7 de la Prueba Diagnóstica Final.	108
Figura 25. Prueba diagnóstica final.	124

Lista de tablas

	Pág.
Tabla 1. Organización de contenidos	69
Tabla 2. Abordaje de los SEL 1.	71
Tabla 3. Abordaje de los SEL 2.	73

Lista de Apéndices

	Pág.
Apéndice A. Entrevista	149
Apéndice B. Prueba diagnóstica inicial	158
Apéndice C. Prueba diagnóstica final	160
Apéndice D. Entrevista	162

RESUMEN

TÍTULO: UN MODELO COGNITIVO DE CONSTRUCCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

AUTOR: LAURA FERNANDA OLIVEROS TASCO

PALABRAS CLAVE: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES, TEORÍA APOE, MODELO COGNITIVO.

DESCRIPCIÓN:

Esta investigación está enfocada en el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales. Hablar de los sistemas de ecuaciones lineales, significa hablar de su conjunto solución, así que en adelante se tratarán ambos conceptos como uno solo. Se analizaron las construcciones mentales que evidencian los estudiantes al construir dicho concepto a lo largo de un primer curso de Álgebra Lineal.

Para esto, las construcciones y relaciones entre ellas en términos de la teoría APOE son presentadas en una descomposición genética; esta se validó por la aplicación del Ciclo de Investigación de la teoría. Para la aplicación de este ciclo se realizó una etapa de reconocimiento, y una etapa de implementación, con dos grupos de estudiantes de la Universidad Industrial de Santander de la carrera de Matemáticas que cursaban el primer semestre. En adelante se escribirá como SEL por sus iniciales.

En particular, la investigación se enfocó en el análisis de las construcciones mentales evidenciadas de cinco estudiantes, del grupo de la etapa de implementación, durante el desarrollo de unas sesiones de clase, centradas en la construcción del concepto de Sistemas de ecuaciones lineales, y de otros conceptos, como: combinación lineal, dependencia e independencia lineal, espacio generado y base. En el modelo se describen unas estructuras iniciales, y se especifica cómo se da la construcción del concepto sistemas de ecuaciones lineales, a partir de las relaciones entre ellas, denominadas mecanismos mentales. Este trabajo concluye describiendo el uso de las formas concretas, una descripción de las modificaciones a la descomposición genética que se había planteado, una descripción de los niveles intra e inter que se pudieron detectar en los resultados, y unas implicaciones didácticas.

ABSTRACT

TITLE: A COGNITIVE MODEL OF CONSTRUCTION OF LINEAR EQUATION SYSTEMS

AUTHOR: LAURA FERNANDA OLIVEROS TASCO

KEYWORDS: LINEAR EQUATIONS SYSTEMS, APOE THEORY, COGNITIVE MODEL.

DESCRIPTION:

This research is focused on the study of teaching and learning Linear Equations Systems. To speak of Linear Equations Systems means to speak of their solution as a whole, so from now on both concepts will be treated as one. We analyzed the mental constructions evidenced by the students when building this concept during a first course of Linear Algebra.

For this, the constructions and relations between them in terms of the APOE theory are presented in a genetic decomposition; this was validated by the application of the Research Cycle of the theory. For the application of this cycle, a recognition stage and an implementation stage were carried out with two groups of students from the Universidad Industrial de Santander of the Mathematics degree who were studying the first semester. From now on it will be written as SEL by its initials.

In particular, the research focused on the analysis of the evidenced mental constructions of five students, from the implementation stage group, during the development of class sessions, focused on the construction of the concept of Linear Equations Systems, and of other concepts, such as: linear combination, linear dependence and independence, generated space and base. The model describes some initial structures, and specifies how the concept of systems of linear equations is constructed, from the relationships between them, called mental mechanisms. This work concludes by describing the use of concrete forms, a description of the modifications to genetic decomposition that had been proposed, a description of the intra and inter levels that could be detected in the results, and some didactic implications.

Introducción

El estudio y la enseñanza del álgebra lineal ha sido objeto de estudio para algunos grupos de investigación en países como Canadá, Estados Unidos, Francia, México, Chile, entre otros, con el fin de dar solución al fracaso que buena parte de los estudiantes presentan al abordar los conceptos básicos de esta área. Algunos de estos grupos han diseñado teorías enfocadas a determinar las causas de las dificultades de los estudiantes, presentando además propuestas didácticas con el fin de ayudar a superar las dificultades que ellos presentan en cuanto a conceptos como espacio vectorial, combinación lineal, Base, transformación lineal, entre otros.

Con este trabajo se busca aportar con base en la teoría APOE, desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores (Asiala *et al.*, 1996), una descripción de un modelo cognitivo de construcción de los sistemas de ecuaciones lineales, que pueden realizar los estudiantes para comprender el concepto de sistemas de ecuaciones lineales. La descripción de este modelo estará presentada en una *Descomposición Genética*, en donde se señala un camino mediante el cual un estudiante puede construir dicho concepto.

La descomposición genética que se terminará presentando es producto de la aplicación de un ciclo de investigación planteado en esta teoría. Este ciclo está compuesto por tres componentes, Análisis teórico, Diseño e Implementación de la enseñanza, y Recolección y Análisis de datos. Antes de iniciar con el ciclo se realizó una etapa de reconocimiento, con el fin de tener un acercamiento al contexto con el que se trabajaría, durante el desarrollo de esta investigación. Esta experiencia fue desarrollada con un grupo de estudiantes de los programas de Ingeniería y Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, matriculados en un curso básico de álgebra lineal.

Luego de esta experiencia, se realizó el análisis teórico en donde fue diseñada una descomposición genética preliminar señalando varios caminos, por los cuales el estudiante puede construir el concepto SEL; estos caminos tenían que ver con la forma como era abordado el problema. Con base en dicho análisis teórico se diseñaron dos cuestionarios diagnósticos, uno inicial y otro final, y una entrevista buscando detectar las construcciones que habían sido consideradas en la descomposición genética preliminar, eligiendo las preguntas de tal forma que permitieran obtener información profunda respecto a la forma de pensar de los estudiantes. Estos instrumentos fueron aplicados a un grupo de estudiantes de la misma universidad en donde se desarrolló la etapa de reconocimiento, pero a diferencia del anterior, este sólo tenía estudiantes de Matemáticas. Los análisis de los resultados obtenidos con estos datos empíricos permitieron refinar el análisis teórico, y presentar una descomposición genética mejorada. Este análisis además de ser un modelo cognitivo presenta una herramienta didáctica que señala estrategias de enseñanza del concepto sistema de ecuaciones lineales.

La presentación de este trabajo se organizó en siete capítulos que se describirán a continuación:

Capítulo 1. *Los Sistemas de Ecuaciones Lineales en Matemática Educativa*. En este capítulo se presenta una mirada general de los trabajos que se han venido desarrollando en los últimos años sobre la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal, y en particular de los sistemas de ecuaciones lineales. Estos trabajos, estaban dirigidos hacia el estudio de las interpretaciones algebraicas y geométricas en $\mathbb{R}^2$, y $\mathbb{R}^3$, así como en la descripción de las dificultades presentadas por los estudiantes durante la construcción de este concepto. De allí nace el interés por estudiar este concepto, que es muy importante en la construcción de otros como lo son: combinación lineal, dependencia e independencia lineal, espacio generado y base.

Capítulo 2. *La Teoría APOE: construcción de Objetos abstractos a partir de la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos.* Con el fin de abordar los conceptos que se estudiaron, desde su naturaleza matemática, es decir abstracta, se decidió tomar como referencia teórica la teoría APOE. En esta descripción se hace énfasis a la definición de las diferentes construcciones y mecanismos mentales para la construcción de un concepto en general, además de la descripción del ciclo de investigación de esta teoría, explicando cada uno de sus componentes. Además, se realiza una revisión de los trabajos que se han desarrollado tanto sobre el concepto de sistemas de ecuaciones lineales, como de combinación lineal y base, que fueron los que se encontraron en la búsqueda.

Capítulo 3. *Planteamiento del problema y objetivos de la investigación.* En este capítulo se hace una reflexión sobre la naturaleza abstracta de este concepto, así como su importancia en la formación de otros conceptos del álgebra lineal, llegando a plantear la pregunta de investigación, y proponiendo unos objetivos con el fin de dar respuesta a esta.

Capítulo 4. *Etapas de reconocimiento.* En este capítulo se realiza una descripción sobre lo que se realizó con un grupo de estudiantes, un semestre antes de iniciar con la etapa de implementación, con el fin de tener un acercamiento al contexto con el cual se iba a desarrollar la investigación. En este, se hace una descripción de las características de los estudiantes, dinámica del curso y algunas conclusiones, que permitieron alimentar el desarrollo de la etapa de implementación.

Capítulo 5. *Análisis teórico, intención de las actividades de clase y análisis de las construcciones mentales evidenciadas.* Este capítulo representa una parte fundamental de la investigación, allí se inicia la metodología guiada por las componentes del ciclo de investigación

propuesto por la teoría APOE. Como resultado del análisis teórico, que es la primera componente del ciclo, se presenta una descomposición genética preliminar del concepto sistema de ecuaciones lineales, que representa una guía para el diseño de los instrumentos (cuestionarios diagnósticos y entrevista) y que fundamenta la intención de las actividades, así como el análisis a priori.

Capítulo 6. *Análisis y verificación de datos: Evidencias de las construcciones mentales realizadas por los estudiantes.* En este capítulo se presentan los resultados empíricos obtenidos de la aplicación de los instrumentos. Allí se muestran evidencias de las construcciones que los estudiantes han realizado sobre el concepto sistema de ecuaciones lineales y las conexiones que han logrado establecer con los otros conceptos. Estos representan la base para argumentar los resultados de esta investigación.

Capítulo 7. *Conclusiones.* En este capítulo se presenta la descomposición genética refinada, resultado del análisis de los datos obtenidos. También se hace una descripción acerca del uso de las formas concretas en la construcción del concepto sistema de ecuaciones lineales; una descripción de los niveles intra e inter del Esquema, que pudieron ser detectados en los resultados, y algunas implicaciones didácticas.

Se espera que este trabajo presente un aporte significativo a la problemática planteada. Como se mostrará, los resultados obtenidos presentan un modelo cognitivo, lo cual no indica que sea el único, pero que representa una herramienta didáctica para maestros o investigadores, con el fin de permitir promover la construcción adecuada del concepto sistema de ecuaciones lineales, y por ende de los conceptos relacionados.

1. Los Sistemas de Ecuaciones Lineales en Matemática Educativa

1.1 La didáctica del álgebra lineal

Los primeros semestres académicos para la mayoría de los estudiantes universitarios de los programas de ingeniería y ciencias, en donde una asignatura como Álgebra lineal es requisito en ese ciclo inicial, resulta siendo un dolor de cabeza para muchos, llegando a generar frustración. Abordar los conceptos del álgebra lineal termina siendo para muchos estudiantes, como descubrir un mundo nuevo; o como describe Dorier (2002), los estudiantes tienen la sensación de *aterrizar en un nuevo planeta*, donde es difícil ubicarse.

La insatisfacción que se vive en algunas aulas de matemáticas, por el hecho de tener que repetir algoritmos, o de tratar sólo con vectores en $\mathbb{R}^2$ y matrices, para librarse de la molestia que resulta siendo la abstracción del álgebra lineal, ha impulsado a los investigadores a crear diferentes grupos de estudio. Estos grupos han centrado su mirada en la verdadera naturaleza de esta área, y han querido no sólo dar respuestas finales, sino sembrar la duda con nuevas preguntas, problemas y dificultades que se van planteando desde las diversas perspectivas.

Si bien es cierto que la incursión del Álgebra Lineal ha sido relativamente reciente en comparación con la del cálculo infinitesimal en los currículos de ingenierías y ciencias en la educación universitaria, existen trabajos que han reportado resultados en cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de esta área. Por ejemplo, Dorier & Sierpiska (2001), recopilaron una serie de trabajos sobre didáctica del álgebra lineal, y describieron las dificultades presentadas en la enseñanza y el aprendizaje de esta. De acuerdo con esos trabajos, Dorier y Sierpiska reconocieron dos tipos de dificultades: una que tiene que ver con lo conceptual, por la misma naturaleza generalizada y unificadora del álgebra lineal; y otra de tipo cognitivo, por el tipo de

pensamiento necesario para comprender los conceptos abstractos. Dichos trabajos trataron diferentes problemas de orden epistemológico, sobre el lenguaje, el paso de un registro de representación a otro y, por último, la relación entre el álgebra lineal y la geometría. En cada uno de ellos, se hacen evidentes las dificultades que pueden presentarse en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Para dar un panorama general de estos trabajos se presenta un ejemplo de cada uno de los problemas abordados.

En cuanto al análisis de orden epistemológico, se tienen en cuenta unas dificultades que vienen de un mismo obstáculo, a lo que algunos investigadores llamaron *obstáculo del formalismo*. Este obstáculo, que tiene que ver con la axiomatización que tuvo lugar en el nacimiento del álgebra lineal con la creación de los espacios vectoriales, está relacionado con el tratamiento que los estudiantes hacen de las estructuras de la teoría de los espacios vectoriales, sin tener ningún control de las herramientas de la lógica o la teoría de conjuntos. Así, los estudiantes manipulan ciertos objetos matemáticos sin ninguna o poca comprensión, haciendo que el álgebra lineal se convierta en una simple manipulación de símbolos. Un ejemplo de esto se evidencia en el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, cuando un estudiante, sin saber qué es lo que se le pide, empieza a resolver el sistema dado, aplicando alguno de los algoritmos conocidos.

Referente al uso del lenguaje, se presentan dificultades relacionadas con la confusión entre los objetos matemáticos y las diferentes representaciones que presenta dicho objeto, debido no sólo al uso del lenguaje formal, sino también a los distintos lenguajes que alcanzan los conceptos. Entre esos trabajos se puede destacar el de Sierpinska (2000) que será detallado en la siguiente sección. Esta investigadora describe tres modos de pensamiento en álgebra lineal, con el fin de comprender los conceptos básicos de esta área. Estos son: modo sintético geométrico, modo

analítico aritmético y modo analítico estructural. Para el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo, la autora describe que no sólo es cuestión de aplicar un algoritmo, sino de interpretar o analizar los objetos inmersos en él, para luego, aplicar técnicas que permitan encontrar la solución de ese problema. También resalta la importancia no sólo de desarrollar estos modos de pensamiento, sino también de trabajar en el tránsito entre ellos, para propiciar la comprensión de los objetos matemáticos en los individuos.

Con relación al paso de un registro de representación a otro, la habilidad y a la vez dificultad denotada como *Flexibilidad Cognitiva*, que nace de la necesidad de pasar de un registro a otro, y sobre todo de distinguir el objeto matemático de sus representaciones..

Por último, están los problemas asociados con la relación entre el álgebra lineal y la geometría. Aunque, para algunos estudiantes el primer acercamiento a conceptos básicos del álgebra lineal como recta o vectores en el plano, tiene que ver con su representación en un contexto geométrico, esta no es la única y es muy limitada. Debido a que sólo se puede trabajar hasta tres dimensiones, y algunos conceptos no admiten representaciones en este contexto. Dicho de otra manera, el contexto geométrico termina siendo un obstáculo para la comprensión de los conceptos del álgebra lineal.

Después de esta panorámica, que resalta algunas de las investigaciones que se han venido desarrollando en la didáctica del álgebra lineal y que destacan dificultades, se propone estudiar un concepto básico que hace presencia en otros. Esto puede permitir a partir de las relaciones con sus conceptos previos, reflexionar sobre su construcción y de los otros conceptos. Por esta razón, se propone estudiar los sistemas de ecuaciones lineales no sólo para describir dificultades, sino para mostrar un camino mediante el cual, el estudiante pueda abordar este concepto mediante la

reflexión de su naturaleza abstracta, y los otros conceptos que guardan relación con él, como: combinación lineal, dependencia e independencia lineal, espacio generador y base.

1.2 Los sistemas de ecuaciones lineales en la Didáctica del álgebra lineal

En la búsqueda de investigaciones acerca del concepto de SEL, se encuentran varios trabajos que han aportado en el estudio de este concepto desde la perspectiva de la Matemática Educativa.

La presentación de los documentos que sustenta esta propuesta de investigación tiene en cuenta los últimos 16 años y están agrupados de la siguiente manera: 1. Los que trabajan bajo el marco teórico de los modos de pensamiento de Sierpinska, 2. Los que trabajan con los Registros de Representación de Duval, 3. Los que se enfocan en la resolución de problemas y 4. Un trabajo sobre el discurso matemático.

1.2.1 Los SEL desde la perspectiva de los modos de pensamiento de Sierpinska. En este grupo se encuentran diferentes investigaciones que se han propuesto: 1. Estudiar la interpretación del conjunto solución de un SEL (Mora, 2001); y 2. Observar las estrategias y dificultades en los modos geométricos y analíticos (Cutz, 2005; Ramírez, 2005; Ochoviet, 2009).

Por su parte Sierpinska (2000), se centra en la construcción de los SEL como un objeto cognitivo. En su trabajo propone elementos teóricos para describir la forma en que los estudiantes relacionan los conceptos del álgebra lineal. La autora argumenta que los estudiantes tienden a pensar en forma más práctica que teórica y que esta disposición afecta negativamente el razonamiento de los estudiantes en la construcción de los conceptos del álgebra lineal. La autora distingue tres modos de pensamiento en álgebra lineal: sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural. Según Sierpinska (2000) estos tres modos aparecen en la

historia de forma secuencial y son igualmente útiles, cada uno cumple un propósito y esto se nota especialmente cuando están en interacción.

Respecto a la interpretación del conjunto solución de un SEL, Sierpinska (2000) reporta un caso, en donde a un estudiante se le muestran tres planos que se intersecan en una única recta, como se muestra en la figura 1. En este caso se pregunta a los estudiantes por el tipo de sistema lineal que representa y su conjunto solución; en este caso una estudiante responde que representa un sistema de ecuaciones con una única solución, que, en un modo sintético-geométrico, lo expresa como: “Tres planos que se intersecan en una línea” (Sierpinska, 2000, p.238).

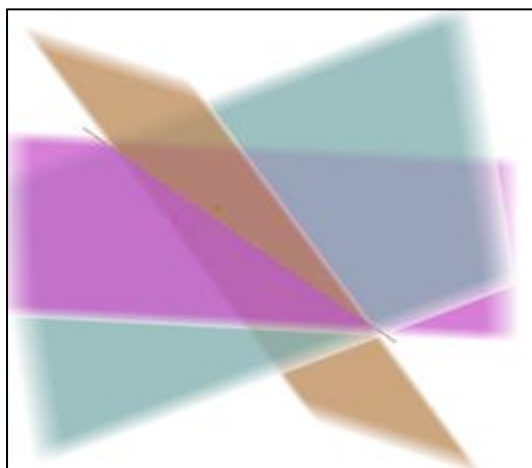


Figura 1. Problema de SEL en modo sintético geométrico. Sierpinska (2000).

Según la autora esto da cuenta que el estudiante generaliza el concepto de solución para sistemas 2×2 a sistemas 3×3 de una manera sintética-geométrica, pero no analítica. La solución para el estudiante era una intersección de hiperplanos en un espacio cartesiano, es decir, rectas en dos dimensiones y planos en tres dimensiones; eso se pudo evidenciar en un episodio transcrito donde le preguntaban por el significado del conjunto solución del sistema. La estudiante responde “la solución es como un punto, como cuando tres líneas se intersecan”. Desde la perspectiva de Sierpinska esto indica que no logra ver las generalidades del álgebra

lineal, que, en un espacio bidimensional a un espacio tridimensional, no se da de puntos a líneas y de líneas a planos, sino aritméticamente de puntos con dos coordenadas a puntos con tres coordenadas.

Como conclusión de su investigación, Sierpinska (2000) señala que no es suficiente con hacer los contenidos más concretos a partir del trabajo en bajas dimensiones y usando visualizaciones, ya que esto puede llevar a interpretaciones irrelevantes, haciendo que la comprensión del significado del conjunto solución de los SEL sea más y no menos difícil.

En cuanto a los trabajos que se basan en la caracterización realizada por Sierpinska (2000) y que tienen que ver con el estudio de la interpretación del conjunto solución de un SEL, se reporta el trabajo de Mora (2001). Este trabajo se desarrolló con estudiantes universitarios de álgebra lineal de primer semestre, en donde se quería lograr una conexión en por lo menos dos de los tres modos de pensamiento: analítico y sintético geométrico. Para esto presentaron situaciones con SEL con dos incógnitas que no solo tenían una solución, sino también infinitas o sin solución, que conllevan a resultados de la forma $0 = 0$ y $0 = r$, $r \in \mathbb{R} - \{0\}$, respectivamente. De esta manera, se buscaba que los estudiantes logren transitar conscientemente entre ellos y lograr una mejor comprensión del concepto.

Mora (2001) observó la tendencia por parte de los estudiantes de relacionar la solución del sistema con el número de intersecciones entre dos rectas. Esta investigación reporta que a pesar de que los estudiantes manejan un pensamiento analítico y geométrico no los logran relacionar. Por ejemplo, los estudiantes no podían resolver un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, ya que argumentaban que había más ecuaciones que incógnitas. Esto se evidencia, por ejemplo, en el hecho de que los estudiantes no pudieron establecer una equivalencia entre la expresión

$0 = 0$, y dos rectas coincidentes. Por último, el autor afirma que cuando los estudiantes logran establecer relaciones entre la resolución del sistema y su representación gráfica pueden dar significado al concepto de conjunto solución. Por ejemplo, los estudiantes buscaban la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, encontrando las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas. Respecto a esto, el autor considera que para el caso de SEL con más de tres incógnitas el modo de pensamiento sintético geométrico puede verse agotado, y por tanto, resulta importante buscar o diseñar alternativas didácticas que fomenten y conecten cada uno de los modos de pensamiento, para que no se obstaculice la reflexión y comprensión de los SEL y su conjunto solución.

En cuanto a los trabajos centrados en identificar y analizar estrategias y dificultades, presentados en los modos geométrico y analítico, está el trabajo de Cutz (2005); esta investigación observa los fenómenos relacionados con la representación geométrica del concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos y tres variables, así como el pasaje entre los modos geométrico-sintético y analítico-estructural de los SEL. Para esto, se diseñaron actividades donde se presenta la representación geométrica de los SEL de dos y tres incógnitas, rectas y planos. En este se pedían a los estudiantes que hicieran corresponder a cada una de las representaciones geométricas de los SEL, una representación algebraica.

Por otro lado, Ramírez (2005) y Ochoviet (2009), al igual que Cutz (2005) identificaron y analizaron las dificultades presentadas por los estudiantes con el concepto de SEL con dos incógnitas. En particular Ramírez (2005) diseñó un cuestionario que pedía a los estudiantes representar ciertos objetos geométricos descritos: una recta o un par de rectas, sin hacer mención de sus propiedades analíticas, o a sistemas de ecuaciones lineales; por ejemplo, pedía representar un par de rectas que no tuvieran puntos en común, o que tuvieran más de un punto en común.

Por su parte Ochoviet (2009) diseña un cuestionario, donde a diferencia del trabajo de Ramírez (2005) presenta una situación en un modo geométrico asociando ciertas cuestiones, con el fin de evidenciar las nociones que han construido los estudiantes sobre SEL y su conjunto solución; por ejemplo, como el presentando en la figura 2 en donde se pregunta por la cantidad de soluciones que tiene el sistema asociado.

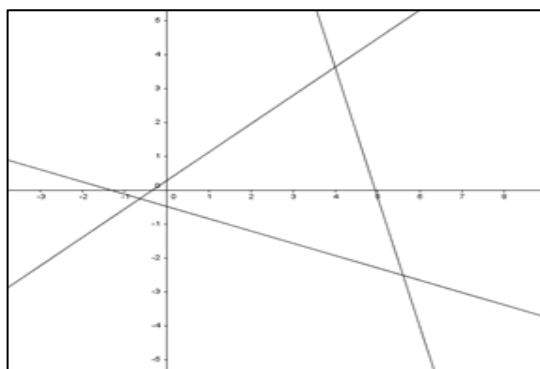


Figura 2. SEL de tres ecuaciones con dos incógnitas sin solución. Ochoviet (2009).

En el análisis de los resultados de Cutz (2005), se evidencian fenómenos como: la asociación de la solución de un sistema de tres ecuaciones con dos variables; es decir en un sistema como el representado en la figura 2, al punto de intersección de al menos dos de las rectas que representan al sistema. De modo que un SEL que está representado por tres rectas que se intersecan por pares, tendrá tres soluciones. Para el caso de sistemas con tres incógnitas, como el ejemplo reportado en Sierpiska (2000), ver figura 1, los estudiantes asocian que cuando tres planos se intersecan en una línea recta, el sistema asociado tiene solución única, puesto que toman la recta como un objeto y no como un conjunto de puntos; esto indica una mezcla entre los modos de pensamiento geométrico y analítico. Otra dificultad que evidencia la autora con base en el trabajo de los estudiantes es la existencia de una tendencia por considerar al conjunto de elementos ya sean planos o rectas coincidentes, como un sistema sin solución, ya que los

estudiantes consideran la solución como el punto (o recta) de intersección de los elementos (rectas o planos).

En cuanto a la investigación de Ramírez (2005), la autora señala que también se presentaron dificultades en el modo de pensamiento sintético-geométrico. Además, que los estudiantes que participaron en la investigación no mostraron un vínculo adecuado entre este modo y el analítico; este resultado es apoyado por otros autores como Mora (2001) y Cutz (2005). Con respecto a las expresiones de la forma $0 = 0$, Ramírez reporta que también se evidenciaron dificultades en los procedimientos realizados por los estudiantes para interpretar este resultado, ya que responden que el sistema no tiene solución, resultado que fue reportado también por Mora (2001).

Respecto a la investigación de Ochoviet (2009), la autora verificó que cuando se presenta a los estudiantes la forma algebraica de un sistema 3×2 como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = -8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

en donde se pide resolver el sistema de ecuaciones y describir su conjunto solución, los estudiantes verifican que el par de números ordenados obtenido en dos de las ecuaciones se validará en la restante. Pero cuando se presenta la forma gráfica de sistemas 3×2 , como el mostrado en la figura 2, o un sistema 4×2 , los estudiantes no pueden articular de manera adecuada las formas de pensar analítica-aritmética con la sintética-geométrica, e interpretan cada punto de corte como una solución del sistema.

En general las situaciones reportadas en un modo geométrico hacen que los estudiantes den respuestas intuitivas, bloqueando procesos de análisis que implicarían otros modos de pensar. Además, en este mismo modo de pensamiento, los estudiantes tienden a utilizar aspectos que han

visto en sistemas 2×2 , es decir, respondiendo por ejemplo que dos rectas paralelas, puede ser la única representación de un sistema sin solución

En los tres casos se confirma como lo señala Sierpinska (2000) que los objetos matemáticos adquieren diferentes representaciones en la mente de los estudiantes, cuando están en distintos modos de pensamiento ya sea geométrico, aritmético o analítico.

1.2.2 Los SEL bajo el marco teórico de los registros de representación de Duval. En este segundo grupo se encuentran tres trabajos que se han propuesto observar cómo es el tratamiento y el pasaje entre los registros de representación (Segura, 2004); identificar dificultades en el pasaje de los registros de representación (Arellano, 2006); e implementar un ambiente computacional con el fin de apoyar la enseñanza de la resolución de los SEL (Betancourt, 2009). Segura (2004) implementó en su investigación una secuencia de enseñanza con el fin de promover el aprendizaje de los SEL y su conjunto solución, haciendo que el tratamiento y pasaje de los registros de representación fuesen el eje alrededor del cual giraba la construcción de las actividades.

De acuerdo a algunas dificultades reportadas por otros autores asociadas a los SEL: la desarticulación entre el sistema de ecuaciones lineales y su conjunto solución, además de la falta del pasaje del registro verbal al algebraico, (Panizza, Sadovsky y Sessa como se citó en Segura, 2004); sobre la falta del pasaje del registro gráfico al algebraico para resolver un sistema de ecuaciones lineales (Pérez Donoso, como se citó en Segura 2004); y sobre la poca consideración del registro de representación gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales, dándole un estatus inframatemático (Ramírez, como se citó en Segura, 2004).

Estas consideraciones las tuvo en cuenta para el diseño de las actividades, en donde utilizó los registros verbal, gráfico y algebraico, abarcando SEL con conjunto solución unitario, vacío o infinito. Un ejemplo de estas situaciones, parte de una representación en un registro verbal, en donde se pedía a los estudiantes que escribieran explícitamente un SEL, o en donde a partir de una representación dada en un registro gráfico como aparece en la figura 3, estructurarán las ecuaciones de las rectas dadas.

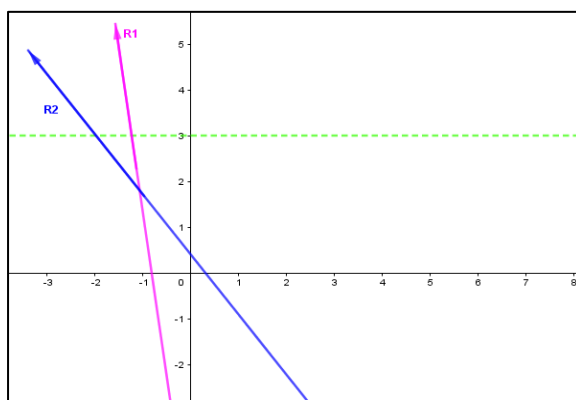


Figura 3. Situación de un registro verbal a gráfico. Segura (2004).

El análisis de los resultados evidencia que luego de la implementación de la secuencia de actividades, fenómenos como la desarticulación entre los SEL y su conjunto solución quedaron subsanados, debido a que se logró que los estudiantes partieran de la solución del sistema, y generaran las ecuaciones que tuvieran esa solución (Segura, 2004). Segura aclara que luego de la implementación se pasaría a la forma habitual de enseñar el concepto de sistemas de ecuaciones lineales, que consiste en empezar por los sistemas y luego hallar la solución. Como conclusión la autora afirma que el trabajo con los tres registros de representación posibilitó que el alumno identificara al objeto SEL en todos los registros; es importante aclarar que en esta secuencia no se asocia el objeto SEL con los métodos de resolución, por lo cual evita que se confunda el objeto en construcción con los procedimientos de resolución.

Arellano (2006) por su parte identifica las dificultades que pueden presentar los estudiantes al tratar de poner en correspondencia las variables visuales pertinentes de la gráfica y las unidades significativas de la escritura algebraica, y aquellas que se relacionan con el concepto de SEL. Para esto implementó una serie de actividades, en donde presentan por ejemplo representaciones en un registro gráfico como las mostradas en la figura 4, con el fin de identificar las dificultades que puedan presentar los estudiantes al tratar de asignar la ecuación correspondiente a cada gráfica.

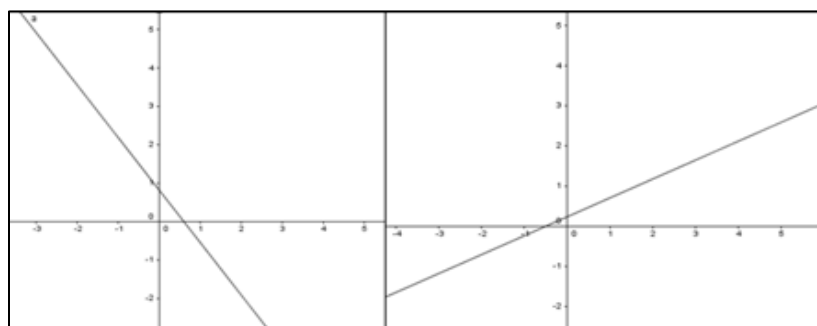


Figura 4. Secuencia de actividades presentadas en un registro gráfico. Arellano (2006).

Así como actividades que piden al estudiante construir SEL que generen cada una de las condiciones dadas, por ejemplo, con dos variables cuya representación gráfica fuesen dos rectas paralelas.

En el análisis de los resultados Arellano (2006) evidenció la presencia de dificultades en la conversión del registro gráfico al algebraico de una recta en el plano, y que se debe al desconocimiento de las reglas de correspondencia entre estos registros. Así como otras dificultades en cuanto a la definición de una ecuación lineal y su representación gráfica, para construir un sistema de tres ecuaciones lineales, entre otras. Como sugerencia menciona que es de suma importancia construir la expresión algebraica a partir de una gráfica, así como disponer de varios registros de representación semiótica, para lograr la *coordinación* entre ellos.

Por último, se reporta el trabajo de Betancourt (2009) quien desarrolla e implementa un ambiente computacional, denominado Álgebra Lineal: Sistemas de Ecuaciones Lineales, (ALSEL), para apoyar la enseñanza de la resolución de los SEL, en un curso de Álgebra Lineal de nivel superior.

En el diseño didáctico, que corresponde a una de las etapas del desarrollo del ambiente ALSEL y en donde no se trabaja con él. Betancourt (2009), propone primero resolver algunos sistemas de ecuaciones lineales de dos y tres incógnitas utilizando el método de Gauss, luego graficarlos y por último asociarlos con unas representaciones gráficas, como las que se muestran en la figura 5.

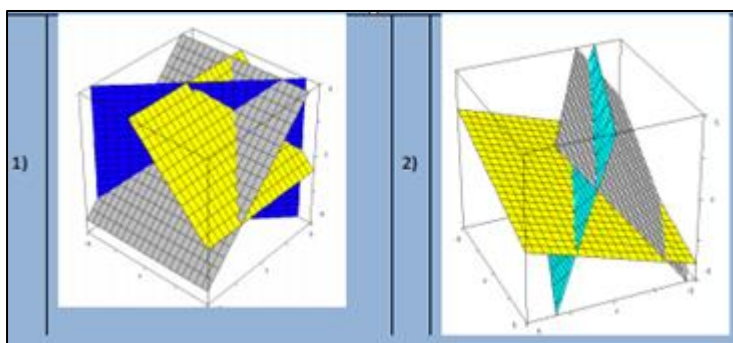


Figura 5. Actividad en el ambiente ALSEL. Betancourt (2009).

Este trabajo le permitió a Betancourt (2009), convencerse que las componentes gráficas son necesarias para la interpretación de los SEL y su conjunto solución. Además, el autor expresa que a pesar de algunas limitaciones en el diseño de la interfaz gráfica, se cumplió en gran parte del propósito de la investigación, presentando en los estudiantes un avance en la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales. En particular, con los conceptos de sistemas de ecuaciones lineales equivalentes y su conjunto solución. Para finalizar Betancur sugiere la necesidad de retomar el estudio de la problemática de la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal. Por

ejemplo, tomando aspectos como el propuesto por Dorier (2000) quien parte del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales como un marco para desarrollar la teoría inicial de linealidad, de manera tal que se favorezca la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos del álgebra lineal.

1.2.3 Un trabajo enfocado en la resolución de problemas. En 2009, Garcés presenta su trabajo de investigación centrado también en la creación de un ambiente computacional, pero a diferencia del trabajo de Betancourt (2009) trabaja con el software de geometría dinámica GeoGebra, con el fin de reflexionar sobre la incidencia que puede tener este sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje en la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales 2×2 .

El autor es consciente que para considerar tareas resueltas usando software de geometría dinámica, se requieren estrategias diferentes a cuando es trabajo, sólo usando lápiz y papel, ya que la elección de una herramienta tal como GeoGebra tiene repercusión en la retroalimentación que el alumno recibe. Cada una de estas actividades consistió en la resolución de problemas, en donde por medio de la herramienta tecnológica los alumnos podían interpretar las diferentes representaciones que el software ofrecía para resolverlo. Un ejemplo de estas actividades está descrito a partir del siguiente enunciado descrito en el trabajo de Garcés (2009): “Por la compra de 2 móviles y 3 mp4 una persona paga \$83.400. Otra persona compra 5 automóviles y 4 mp4 y le cobran \$1.462.000, ¿Cuál es el valor de un móvil y el de un mp4?”(p. 37). Además, se pide a los estudiantes que intenten resolver el problema usando la herramienta tecnológica, para representar la ecuación que describe la situación, y luego por medio de la herramienta punto de intersección comprobar que las coordenadas de ese punto coinciden con las encontradas en la primera parte de la actividad.

Como incidencias de usar este software en el diseño de sus tareas, Garcés (2009) describe algunas ventajas y desventajas. En primer lugar, está la oportunidad que ofrece el software para que el estudiante aprenda a su propio ritmo, la articulación de los diferentes registros de representación, el favorecimiento del trabajo en equipo y el enriquecimiento de un aprendizaje significativo. Y en cuanto a las desventajas Garcés menciona que el software permitió ver los procesos desarrollados por los estudiantes paso a paso, limitando al investigador conocer con precisión los momentos de errores y aciertos de los estudiantes a través de su proceso. Esta investigación muestra pro y los contras de trabajar en un ambiente computacional que está a nuestro alcance, como lo es GeoGebra, y que debemos tener en cuenta si va ser utilizarlo en el diseño de actividades para esta investigación.

1.2.4 Un trabajo sobre el discurso matemático. Hernández (2017) describe un análisis realizado a un grupo de profesores, sobre el discurso que realizan durante las clases de matemáticas en un curso universitario introductorio, basado en un modelo propuesto por Sfard (2008). Esta investigación, se enfoca en el análisis durante la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. El autor describe que la riqueza de trabajar con este concepto está en la diversidad de métodos en que puede ser abordado: el método de igualación, sustitución, determinantes, gráfico. Ahora dependiendo de los recursos que use el profesor en el aula como: las gráficas, problemas en contexto, tablas, ofrece un entorno rico para la observación y el análisis; además, este concepto forma parte de contenidos y materias posteriores.

De acuerdo con el modelo de Sfard (2008), se puede determinar que el discurso orientado a la resolución de problemas está formado por el uso de palabras (contenidos matemáticos como sistema, ecuación, recta), mediadores visuales (notaciones algebraicas, tablas de datos, gráfica de

rectas mostrando la intersección asociada a la solución de un problema), narrativas, que tiene que ver con las expresiones referentes a la solución de problemas usadas por los profesores, y las rutinas que tiene que ver con los momentos cuando se aborda un problema: construcción del modelo matemático, construcción de la solución del problema y el monitoreo o apoyo a los estudiantes, en el proceso de solución del problema. Un resultado relevante de esta investigación es que aunque el trabajo en clase está muy limitado a la resolución de ejercicios, luego de la explicación del profesor, la resolución de problemas está inmersa en el discurso de este. Entonces ¿de qué sirve enfatizar en la resolución de problemas en el discurso del profesor, si cuando llega la hora práctica los estudiantes se encuentran con ejercicios mecánicos? A esto, el autor responde que la forma para acrecentar el conocimiento de los estudiantes ante la resolución de problemas tendrá que ver con acciones deliberadas del profesor, que influyan en pro del aprendizaje de sus estudiantes.

Las investigaciones descritas en esta sección dan una visión sobre algunos trabajos en torno a la investigación que se ha venido trabajando en Matemática Educativa respecto a los SEL y su conjunto solución; estas muestran que, a pesar de los intentos por remediar las dificultades asociadas en torno a estos dos conceptos, se continúan presentando cotidianamente en las aulas de matemáticas.

2. La Teoría APOE: construcción de Objetos abstractos a partir de la aplicación de Acciones sobre Objetos concretos

En este capítulo se realiza una reflexión sobre los aspectos teóricos que se han elegido para la realización de este trabajo de investigación. Con el fin de hacer frente a la naturaleza abstracta de los conceptos del álgebra lineal, particularmente al concepto de Sistema de Ecuaciones Lineales,

se decidió abordar este trabajo desde la teoría APOE. Con esta teoría se encuentra una forma de reflexionar sobre la construcción de este concepto matemático, a partir de la descripción de las construcciones mentales que un estudiante puede realizar, por medio de mecanismos particulares.

Además, se realiza una descripción de los trabajos más significativos que desde la mirada de la teoría APOE, se han desarrollado sobre el concepto de SEL; además de los conceptos de Combinación Lineal, Dependencia e Independencia Lineal, Espacio Generado y Base. A continuación, se realiza una descripción de las principales características de esta teoría.

2.1 Teoría APOE

Esta teoría es una interpretación de Dubinsky (1991) de la teoría constructivista de Piaget, para explicar la construcción de conocimiento matemático.

La teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema), está basada en el concepto de abstracción reflexiva introducido por Piaget, usado para describir el desarrollo del pensamiento lógico en niños; estas ideas son extendidas por Dubinsky para explicar la construcción de nociones o conceptos matemáticos avanzados (Dubinsky, 1991). Desde esta perspectiva teórica se parte de la noción de conocimiento matemático de un individuo como “su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, construyendo Acciones, Procesos y Objetos, y organizándolos en Esquemas con el fin de manejar situaciones y resolver problemas” (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 276).

Para que el estudiante promueva su reflexión sobre cierta situación, es necesario plantearle preguntas que busquen generar un nuevo conocimiento, pero que se complementen con sus construcciones previas; para Dubinsky, los conceptos matemáticos no se aprenden directamente,

sino que estos se pueden aprender si un individuo posee las estructuras mentales apropiadas para construirlo; por tal razón las construcciones previas determinan la construcción de un nuevo objeto matemático. Por tanto, una meta al usar este marco teórico es ayudar a los estudiantes a que, a partir de sus estructuras previas, logren construir estructuras apropiadas para comprender un nuevo concepto. Desde esta teoría, las estructuras son denominadas Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas, y las relaciones que se puedan establecer entre ellas determinan el conocimiento matemático de un estudiante.

El desarrollo de esta teoría ha sido gracias a los trabajos de diferentes investigadores, entre ellos los miembros de *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC por sus siglas en inglés, 2002), dirigido por Dubinsky y conformado por diferentes investigadores del mundo, que se han interesado por analizar diferentes conceptos matemáticos en áreas como: cálculo (Trigueros & Martínez-Planell, 2010), álgebra lineal (González y Roa-Fuentes, 2017), álgebra abstracta (Zazkis, Dubinsky & Dautermann, 1996), ecuaciones diferenciales (Trigueros, 2014), fractales (Villabona y Roa-Fuentes, 2016), probabilidad (Vásquez y Parraguez, 2014), entre otros.

Esta teoría apoya el hecho de que existe una relación entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su desarrollo en la mente de un individuo, como lo afirmó Piaget (como se citó en Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005), a partir de esto es posible obtener explicaciones de tipo epistemológico y psicológico, que permiten determinar las dificultades de los estudiantes frente a un concepto; y además trazar caminos para la construcción de su aprendizaje. Esta forma de trazar los caminos se logra por medio de una descomposición genética, que puede describir, como lo dijeron Asiala *et al.* (Como se citó en Roa-Fuentes y Oktaç, 2010), los aspectos

constructivos de una porción de conocimiento matemático y además los aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza de conceptos.

Como se muestra en la figura 6, la teoría APOE plantea cinco mecanismos mentales definidos como casos particulares del mecanismo de abstracción reflexiva, denominados: *interiorización*, *coordinación*, *encapsulación*, *tematización* y *asimilación*, conocidos también como mecanismos mentales que dan lugar a las construcciones llamadas Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas.

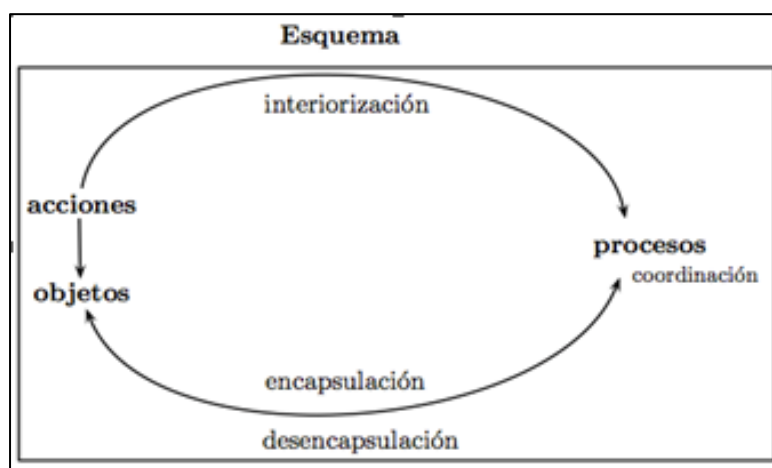


Figura 6. Teoría APOE. Arnon et al. (2014).

Un Esquema es la estructura más grande que un estudiante puede lograr de una parte de conocimiento matemático. Esta estructura o construcción está formada por una recopilación de otras estructuras (Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas) y de las relaciones entre ellos. Por lo tanto, un Esquema se considera una estructura inacabada, que está en constante cambio, a medida que evoluciona por la asimilación de un nuevo Objeto, y por la reacomodación de las estructuras por las nuevas relaciones que un individuo puede entablar con el Objeto; además tiene una cualidad fractal como lo menciona Meel (2003), en la cual se considera al Esquema como un nuevo Objeto que va a ser parte de otros Esquemas. Esto le permite al individuo hacer múltiples conexiones entre los elementos previos y los nuevos conceptos que busca agregar a sus

estructuras. Por último, su *coherencia*, refiriéndose a la capacidad del individuo por saber responder, si un Esquema determinado le permitirá resolver un problema particular (Arnon *et al.*, 2014).

Dado que la construcción de las estructuras mentales está descrita en términos de concepciones, conviene aclarar cierta diferencia. McDonald, Mathews & Strobel (2000) definen la concepción como la idea personal que el estudiante tiene para comprender, a diferencia del concepto que se concibe como un acuerdo comunal establecido por la comunidad matemática. Para abordar este aspecto se mencionan a continuación las concepciones que fueron identificadas por Vanegas y Escalona (2013), con respecto al concepto de función de una variable, en un estudio realizado luego de 80 horas de clase relacionadas con el estudio y comportamiento de funciones de una variable. Como señalan los autores se evidenció que las concepciones acerca de este concepto, ubicadas en 8 grupos o categorías: Valores en un sistema de coordenadas, una ecuación o representación de la ecuación, relación entre los elementos de un conjunto, relación entre conjuntos, relación entre números, relación entre variables, conjunto de imágenes y las que se expresan a través de ejemplos.

Siguiendo con la descripción del Esquema y dado que es la agrupación de Acciones, Procesos y Objetos, y otros Esquemas se describe a continuación, cómo se logran estas construcciones y cuáles son los mecanismos necesarios para elaborarlas.

Cuando un estudiante aborda una situación matemática, inicialmente emplea mecanismos para construir estructuras que le permitan dar solución a dicha situación. Las estructuras más básicas las Acciones y los Procesos, están asociadas con los mecanismos de *interiorización*, *coordinación* y *encapsulación*, respectivamente. Se dice que un individuo tiene una concepción

Acción del nuevo concepto, cuando responde a estímulos externos, sin tener conciencia de los elementos involucrados.

Cuando el estudiante repite una Acción y reflexiona sobre ella, esta puede ser *interiorizada* en un proceso mental. Esto da paso a la construcción de un Proceso. Se dice entonces que un estudiante tiene una concepción Proceso del concepto en construcción, cuando puede reflexionar sobre él sin realizar acciones específicas. También un Proceso puede generarse por la *coordinación* de dos o más Procesos. Estas estructuras básicas, que son consideradas como transformaciones dinámicas, pueden evolucionar en otras construcciones, denominadas Objetos. Los Objetos a diferencia de las Acciones y los Procesos, son considerados estáticos y son el resultado de la *encapsulación* de un Proceso. Se dice entonces que un individuo presenta una concepción Objeto del concepto, cuando piensa en el Proceso como un todo. El individuo realiza y construye transformaciones en su totalidad, empleando el mecanismo de *encapsulación*, que es el más importante para construir el conocimiento matemático pero el más difícil de lograr (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010). Diferentes investigaciones reportan que la *encapsulación* es un mecanismo difícil de lograr puesto que convierte una estructura dinámica (Proceso) en una estructura estática (Objeto).

Otro mecanismo importante para la construcción de un nuevo concepto, y que puede propiciarse luego de la construcción del Objeto es la *desencapsulación*, que consiste en devolverse al Proceso que dio origen al Objeto. Este mecanismo puede surgir cuando el estudiante necesite *coordinar* dicho Proceso con otros, para dar paso a la construcción de uno nuevo.

La interacción y transformación de estas estructuras que dan paso a la construcción de nuevos Objetos, son las que permiten la evolución de los Esquemas previos del estudiante y enriquecen

la construcción de conocimiento matemático. Las interacciones y reconstrucciones de estructuras son las que se deben promover según Roa-Fuentes y Oktaç (2010) en el aula de clase. Dado que un Objeto puede dar paso a la construcción de un nuevo Esquema o ser asimilado por un Esquema construido previamente, lo que produce la construcción de conocimiento matemático.

Para mostrar un ejemplo de las estructuras y relaciones descritas, a continuación, se usa el concepto de transformación lineal que fue ejemplificado por Roa-Fuentes y Oktaç (2010). Este concepto fue analizado previamente por miembros del Grupo RUMEC, quienes proponen una descomposición genética que incluye la realización de actividades con el software *International Society for Exploring Teaching and Learning* (ISETL, por sus siglas en inglés) (Weller *et al.* (2002)). Esta descomposición genética se basa en la construcción del concepto de transformación lineal como una función definida entre dos espacios vectoriales que preserva combinaciones lineales, en donde los Procesos de espacio vectorial y función se *coordinan* para dar lugar a la construcción de una transformación lineal. Arnon *et al.* (2014) describen que se logra una concepción Acción de transformación, cuando un estudiante necesita una fórmula explícita que le permita tomar un vector del dominio y transformarlo con una regla de asignación definida obteniendo un vector de salida. También describen que para que un estudiante logre tener una concepción Proceso de transformación, se hace necesario que interiorice dichas Acciones en cierto Proceso que le permitirá verificar la condición de linealidad para cada función dada. Es decir, si se da esta concepción, el estudiante ya no tendrá que realizar acciones sobre un objeto para hablar de condición de linealidad, dado que, si lo quisiera verificar mediante una concepción Acción, esto sería imposible puesto que tendría que visitar mentalmente todos los vectores de un espacio vectorial.

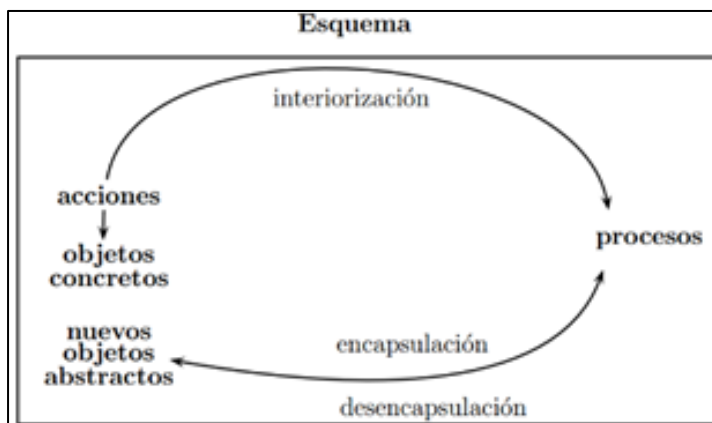


Figura 7. La diferencia en la teoría APOE entre contextos abstractos y contextos concretos. Arnon et al. (2014).

Tradicionalmente la teoría APOE ha explicado la construcción de conceptos y nociones matemáticas partiendo de su definición sin considerar las diferentes representaciones del objeto matemático. Recientemente Arnon et al. (2014), plantearon la construcción de Objetos abstractos partiendo de la aplicación de acciones sobre Objetos concretos (ver figura 7).

Arnon et al. (2014), proponen un ejemplo para interpretar la teoría APOE implementada para niños de la escuela primaria, sobre el concepto de fracción y su interpretación de parte-todo. El término concreto, según Arnon, Nesher & Nirenburg (2001) implica el uso de objetos físicos reales o imaginarios; por ejemplo, cuando los niños tratan las fracciones, se sienten cómodos usando un pedazo de cartón con cortes circulares, dibujos o imágenes mentales de ellos. En este caso se puede entender que la interpretación de concreción significa que una experiencia concreta necesita involucrar los sentidos del aprendiz. Por otro lado, el término abstracto, según Arnon et al., 2014, se refiere al uso de un concepto matemático sin ninguna representación física del mundo, los autores mencionan el ejemplo del concepto de función de valor real, sin ninguna referencia a sus gráficos o cualquier contenido físico con el que pueda representarse.

Arnon, (como se citó en Arnon *et al.*, 2014) diseñó una secuencia de actividades que muestran cómo a partir de Acciones aplicadas a objetos físicos, se da lugar a objetos matemáticos abstractos en la mente de un niño. A pesar de que, en la etapa de las operaciones concretas, los objetos sobre los cuales el estudiante actúa deben ser concretos y los objetos que emergen de la *encapsulación* de Acciones *interiorizadas* son abstractos, al igual que la escuela secundaria y universidad, se pudo evidenciar tal *encapsulación* en dos estudiantes. Uno de los materiales que fueron usados para crear experiencias lógico-matemáticas, en donde por medio de la manipulación de objetos, se construyeran las propiedades de la acción misma y de la transformación que aplicaban a los objetos, esto se muestra en la figura 8.

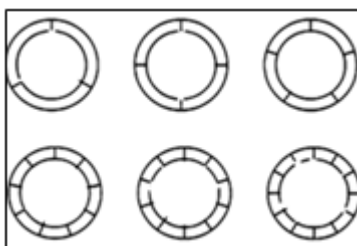


Figura 8. La partición de los anillos. Arnon *et al.* (2014).

La principal evidencia de la *interiorización* de las Acciones realizadas sobre esta herramienta tuvo lugar en la habilidad del estudiante para describir verbalmente, cómo producir una representación de alguna fracción. Otra evidencia de la *interiorización* fue la capacidad del estudiante para producir un dibujo esquemático de una fracción sin usar los anillos de partición.

Además durante las entrevistas realizadas en la investigación de Arnon, en donde no se presentaban la herramienta física mencionadas anteriormente, se evidenció que dos estudiantes alcanzaron la estructura Objeto cuando realizaron acciones formales de comparación sobre fracciones como objetos abstractos; por ejemplo cuando le pidieron comparar las fracciones $\frac{2}{5}$ y

$\frac{4}{6}$ uno de ellos respondió, como lo afirma Arnon, (como se citó en Arnon *et al.*, 2014) comparando las mitades de cada una de las fracciones. Estos dos estudiantes que lograron *encapsular* el Proceso en un Objeto, hacían parte del grupo de estudiantes que habían trabajado con el material propuesto. A pesar de haber comenzado su aprendizaje con Acciones sobre Objetos concretos, los estudiantes lograron construir Objetos abstractos.

Por tanto, en esta investigación se contempla la representación de los sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ como Objetos concretos sobre los cuales los estudiantes pueden aplicar Acciones. La repetición de dichas Acciones al resolver diferentes situaciones puede generar el mecanismo de *interiorización* que da paso al Proceso. Esta estructura está asociada con las formas generales de los sistemas de n ecuaciones y m incógnitas, sus propiedades analíticas, así como con la estructura de subespacio del conjunto solución. Como muestra la figura 7, el Esquema es la construcción más robusta que un individuo puede lograr de un concepto matemático. El Esquema que se proyecta construir en esta investigación contempla la *coordinación* de aspectos concretos y abstractos que se *coordinan* para motivar su evolución. Un Objeto concreto, que en nuestro caso son representaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, presentan una forma dinámica, cuando se trabaja a través de software matemáticos como lo menciona Romero (2016). Una característica importante es que estas formas dinámicas permiten representar objetos que no podrían representarse en un ambiente estático, en donde normalmente se usa lápiz y papel.

2.2 Ciclo de investigación

La teoría APOE, propone un ciclo de investigación, ver figura 9, compuesto por tres componentes: Análisis teórico, Diseño e implementación de enseñanza, y Recolección y análisis de datos.

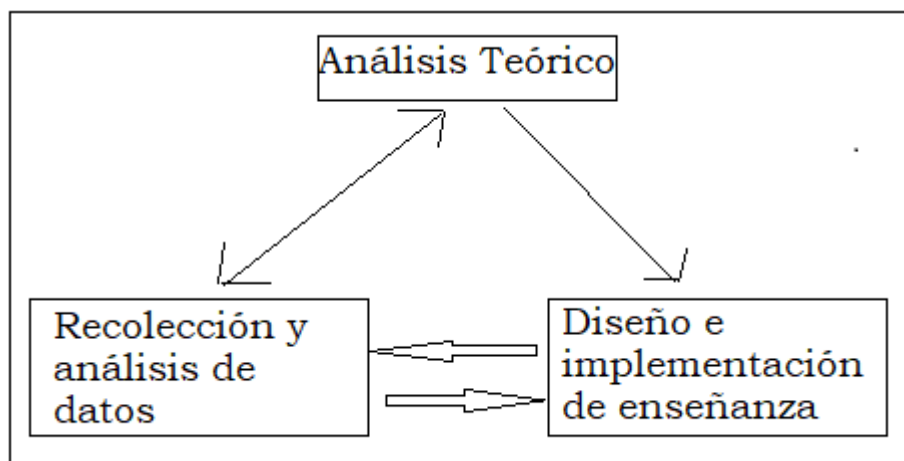


Figura 9. Ciclo de investigación de la teoría APOE. Arnon et al. (2014)

La aplicación de este ciclo de investigación permite obtener una descripción más detallada sobre la manera como los estudiantes pueden construir un concepto matemático determinado. Esto es posible gracias al refinamiento y mejoramiento del análisis teórico y el diseño e implementación de enseñanza, como resultado del análisis de los datos empíricos, obtenidos en el desarrollo de la tercera componente. Es por lo que se muestra una relación bilateral entre la segunda y la tercera componente, y otra entre la tercera y la primera componente, dejando ver que, si los resultados no son los esperados, descritos en la descomposición genética, se debe modificar la primera componente y volver a empezar el ciclo. A continuación, se describe qué es lo que se espera lograr en cada componente y la manera como están relacionadas.

2.2.1 Análisis teórico. El análisis teórico es la base que fundamenta los resultados de la investigación, al finalizar el ciclo de investigación. En esta etapa se tienen en cuenta el análisis de los libros de texto, la experiencia de los investigadores, resultados de estudios previos, entre otros. Es en esta componente donde se obtiene una descomposición genética preliminar de un concepto, ya que esta puede evolucionar, de modo que pueda presentar mejor información sobre

lo que se quiere observar en la investigación, en relación con lo que el estudiante puede llegar a hacer para comprender un concepto.

2.2.2 Diseño e implementación de enseñanza. Esta componente se basa en la anterior. Cuando se trabaja con la teoría APOE, es importante que se ponga en práctica el uso de grupos de aprendizaje cooperativo, ya que proporcionan un ambiente de interacción social que puede mejorar la posibilidad de que los estudiantes construyan su conocimiento.

Estos grupos constan de 3 a 5 estudiantes, que trabajan durante todo el curso de manera cooperativa en diferentes actividades. Estas actividades hacen parte de una aproximación pedagógica llamada ciclo de enseñanza ACE, que, si bien no es consecuencia necesaria de la teoría APOE, apoya el análisis teórico (Asiala *et al*, 1996). Este ciclo de enseñanza consta de tres componentes que son: Actividades con el computador en un laboratorio, discusión en Clase sobre problemas relacionados con las actividades en el computador, y Ejercicios. En la figura 10 Se muestra el bosquejo del ciclo ACE y la relación con la descomposición genética, determinada en la primera componente del ciclo de investigación.

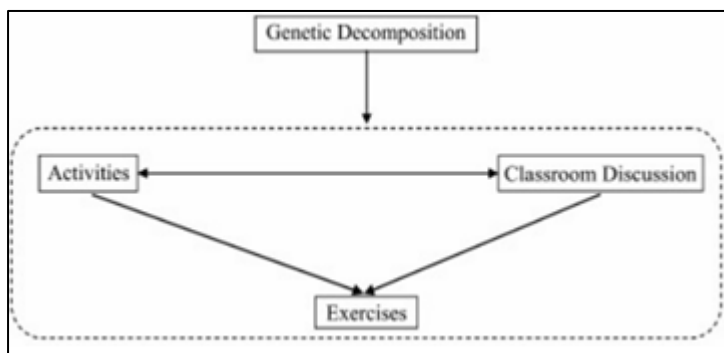


Figura 10. Relación entre el ciclo ACE y una descomposición genética. Arnon et al. (2014).

Las actividades en el computador consisten en la implementación de varios conceptos matemáticos en el computador y de su uso en la solución de problemas. Estas actividades son presentadas en forma de tareas con el fin de construir una base de experiencias para reflexionar sobre los conceptos matemáticos.

Las discusiones de clase permiten a los estudiantes reflexionar sobre las actividades hechas con ayuda del computador, y las de sus compañeros, con el fin de que tomen consciencia de las estructuras que están construyendo. Durante estas discusiones el profesor es un guía que además proporciona en cierto momentos definiciones, explicaciones y descripciones, conectando ideas lo que los estudiantes han reflexionado y trabajado.

Los ejercicios son propuestos para que los estudiantes esfuercen sus ideas que han construido en la clase, y utilicen los conocimientos matemáticos que han aprendido, con el fin de que comiencen a pensar acerca de las situaciones que serán estudiadas más adelante (Asiala *et al.*, 1996)

2.2.3 Recolección y análisis de datos. En esta componente lo más importante son los datos, ya que permiten evidenciar la construcción de las relaciones entre los mecanismos y las estructuras.

Los instrumentos de recolección de datos pueden ser preguntas y respuestas escritas bajo la forma de exámenes en el curso, entrevistas sobre las cuestiones a estudiar, talleres de clase, videograbaciones entre otros.

A pesar de que la cantidad de estudiantes en un grupo normalmente es muy grande, es importante que en el análisis de los datos se incluyan todos los datos proporcionados, o al menos un conjunto de datos que permitan establecer una gama paralela de construcciones mentales, tanto de los que parecen haber construido muy poco, hasta los que pudieron haber hecho todas las construcciones propuestas en el análisis teórico (Asiala *et al.*, 1996).

2.3 La teoría APOE y los sistemas de ecuaciones lineales

Con respecto a investigaciones que se han realizado sobre el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y su conjunto solución, basados en la teoría APOE, se encuentran los trabajos de DeVries & Arnon (2004), Manzanero (2007) y Possani, Trigueros, Preciado & Lozano (2010).

DeVries & Arnon (2004) abordan en su trabajo el concepto de solución de un sistema de ecuaciones, realizando entrevistas a estudiantes de licenciatura que ya habían tomado un curso de Álgebra Lineal. En este trabajo se pueden identificar preguntas con el fin de observar, cómo los estudiantes interpretan el concepto de solución de una ecuación; por ejemplo, preguntas del tipo:

$$\text{¿Qué representa la solución a la ecuación } x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Dados algunos vectores como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $(1,0,1,7)$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ determinar ¿Cuál de estos son solución de la ecuación anterior?

En su investigación DeVries & Arnon (2004) evidencian las concepciones que los estudiantes tenían sobre el conjunto solución de una ecuación o un SEL. Los autores observan que algunos estudiantes confunden la solución de una ecuación o sistema de ecuaciones, con la constante escrita a la derecha de la ecuación o sistema de ecuaciones, cuando está escrita de la forma $f(x) = k$, con k real; esto indica, según los autores, que los estudiantes guardan la relación de que el signo “=” significa “el resultado es”.

Por otra parte, como reportan DeVries & Arnon muchos estudiantes confunden la *solución* del sistema con *resolver* el sistema. En este caso los autores interpretan que, el concepto de solución de un sistema de ecuaciones que desarrollaron los estudiantes evidencia una concepción Acción, caracterizada por resolver una ecuación o sistema de ecuaciones. Además, como los estudiantes solo resolvían la ecuación, no podían predecir cuál sería la forma general de la solución, sin antes resolverla. Luego de notar esto, los investigadores sugirieron una secuencia de aprendizaje como resultado de una descomposición genética. Proponiendo que se debería empezar por apoyar a los estudiantes en la construcción de una concepción Acción del concepto *ecuación* y del concepto *solución de una ecuación*, incluyendo la identificación de las dos funciones, para un sistema 2×2 , sus dominios y codominios, la solución como un elemento del dominio, tal que al realizarse la sustitución se obtenga una proposición verdadera.

Una de las preguntas presentadas en el nuevo cuestionario, y que motivó a los estudiantes a realizar sustituciones, comienza considerando el siguiente sistema de ecuaciones: $3x_1 + 2x_2 -$

$x_3 = 0$; $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Se preguntó si unas ternas dadas eran solución y por qué, y además, si el sistema tenía más soluciones, o si directamente se podía encontrar el conjunto solución del sistema. Otra consideración que toman DeVries & Arnon (2004) respecto a la construcción de la concepción Proceso, tiene que ver con que se debe enseñar a los estudiantes a identificar las dos funciones, en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, sus dominios y codominios. Además, para que alcancen una concepción de Objeto del concepto de solución de una ecuación o SEL, recomiendan trabajar con conjuntos finitos. Todo esto buscando que cuando los estudiantes se enfrenten a sistemas de ecuaciones sobre conjuntos infinitos, sientan la necesidad de usar otros métodos, no solo de sustitución, ya que no es posible la verificación uno a uno de los elementos del conjunto. Así no sólo tendrán que aprender a resolver algoritmos, sino también deben incluir el entendimiento de lo que hace el algoritmo (DeVries & Arnon, 2004)

Por su parte, Manzanero (2007), a partir de la aplicación de una entrevista a un grupo de estudiantes de un curso de “Álgebra para ingeniería III”, quiso observar las construcciones mentales que habían logrado hasta el momento para el concepto de conjunto solución de sistemas de ecuaciones lineales. De acuerdo con una descomposición genética preliminar, ver figura 11, que es una adaptación de la creada por el Grupo RUMEC. El análisis de sus resultados le permitió detectar las dificultades presentadas por los estudiantes con relación a este concepto, así como las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver problemas que se relacionan con él.

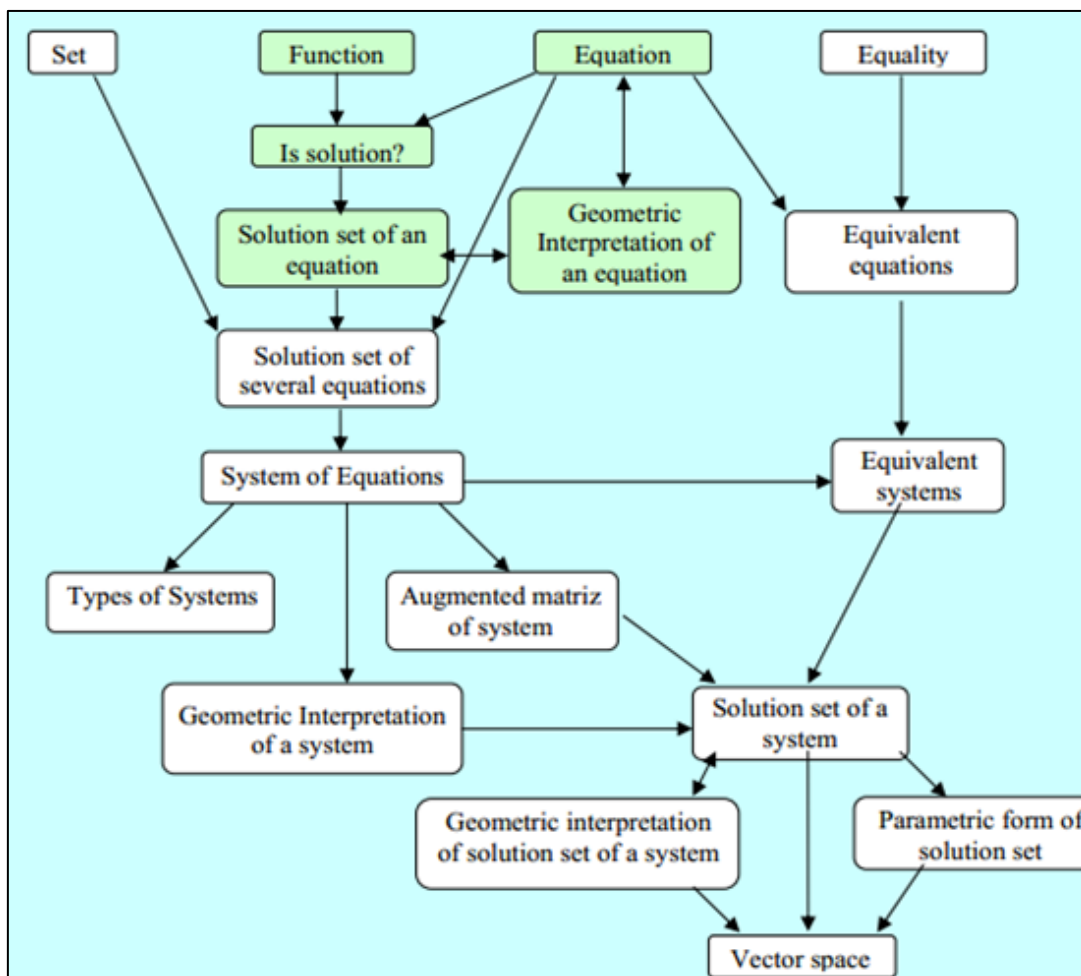


Figura 11. Descomposición Genética del concepto SEL. Manzanero (2007).

De acuerdo con el análisis a posteriori de la entrevista, Manzanero (2007) plantea que se pudo observar que ningún estudiante entrevistado presentó dificultades para realizar las acciones de sustituir puntos dados para verificar si éstos satisfacen alguna ecuación o sistema dado. Por ejemplo, dada la ecuación $3x - 2y + z = 4$, al preguntar ¿Son las triplas ordenadas $(1,4,5)$, $(3,1,-3)$ y $(2,5,8)$ soluciones de la ecuación? Esta motivaba al estudiante a realizar acciones de sustitución de elementos sobre la ecuación.

En modo general, la mitad de los estudiantes pudieron *coordinar* los Procesos de función y ecuación en un nuevo Proceso de solución para una ecuación o sistema dado; la otra mitad de los

entrevistados no evidenciaron una *interiorización* de sus Acciones en un Proceso de solución, presentando dificultades para expresar el conjunto solución dado que para ello necesitaban una expresión algebraica. Esto indicó a la autora que los estudiantes no interpretan correctamente el papel de las variables en las ecuaciones.

También se evidenció otra concepción Proceso en la solución de un sistema de ecuaciones considerado así: $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$, en donde se daban algunas duplas y se preguntaba a los estudiantes si eran solución del sistema; luego se preguntaba por el conjunto solución y la cantidad de elementos, o duplas que eran solución del sistema y su cantidad, ante esta situación se evidenció que los estudiantes no necesitan sustituir los puntos dados en las ecuaciones para afirmar, por ejemplo, que el sistema no tenía solución.

Con respecto al análisis de las representaciones geométricas de los sistemas, se observó que la mitad de los estudiantes pudieron construir el Proceso de conjunto solución de modo geométrico para un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas, como el representado por tres rectas que se intersecan dos a dos formando un triángulo, y donde se preguntaba por la cantidad de soluciones del sistema, y se pedía encontrar su conjunto solución. La otra mitad de los estudiantes presentó dificultades para construir este Proceso, ya que consideraban a los puntos de intersección de cada dos rectas como las soluciones del sistema. Esto mismo ocurrió para el caso de sistemas con tres ecuaciones y tres incógnitas, indicando que los estudiantes no lograron *coordinar* la representación geométrica y la algebraica para el concepto de conjunto solución. Además, se presentaron dificultades en cuanto a la interpretación de la equivalencia de sistemas de ecuaciones cuando se presentaban parámetros, debido a que este tipo de situaciones requieren de una concepción Proceso para ser resueltos de manera correcta.

En general Manzanero (2007) afirma que la descomposición genética preliminar resultó viable para explicar las construcciones, pero que, debido a los datos empíricos, se hizo necesario hacer unas modificaciones para mejorarla. Además, dado que ningún estudiante mostró tener una concepción Objeto para el concepto de conjunto solución, y que pocos de ellos mostraron haber construido un Proceso de solución, en particular para el caso de sistemas con tres variables, la autora cree conveniente incorporar los conceptos de variable y parámetro como conceptos previos que debe haber construido el estudiante. Estos conceptos deben presentar una estructura de Proceso. Además, considera necesario que la representación geométrica de los conjuntos solución de las ecuaciones y sistemas lineales de dos y tres variables, se den a la par con el concepto de conjunto solución para que, al *coordinarse* entre sí, se pueda dar una mejor comprensión del concepto de SEL y se pueda construir dicho concepto en una estructura de Objeto.

Por su parte el trabajo de Possani *et al.*, (2010), presenta los resultados de un enfoque de la enseñanza del álgebra lineal utilizando Modelos. La teoría APOE fue empleada en el diseño de la secuencia de enseñanza, que parte de la propuesta de un problema de toma de decisiones de la “vida real” para los alumnos, sobre el flujo de tráfico, que provoca el uso de un sistema de ecuaciones lineales y diferentes parametrizaciones de este sistema para responder preguntas sobre el control de tráfico. La descomposición genética empleada en esta investigación fue la creada por algunos miembros del grupo RUMEC, y de la que Manzanero (2007). A diferencia de la descomposición genética de Manzanero (2007) en esta descomposición no se tiene en cuenta el concepto de espacio vectorial. El enfoque de los Modelos y Modelado es “un marco de referencia que genera modelos para ayudar a los estudiantes a desarrollar ideas en un contexto realista significativo” (Possani *et al.*, 2010, p. 2127). Los autores plantean que los Esquemas

que un individuo debe traer al estudio de sistemas de ecuaciones son conjunto, función e igualdad, diferente al de Manzanero (2007), que considera estos conceptos en una estructura de Proceso. El problema planteado al iniciar la investigación, sobre el flujo de tráfico, fue seleccionado con el fin de que permitiera evidenciar las dificultades para identificar las variables, y para plantear el sistema de ecuaciones lineales simultáneas para modelar el problema.

La situación planteada sobre el flujo de tráfico presentaba un diagrama que representa un plan de la calle en los dos primeros bloques más ocupados de una ciudad, como se muestra en la figura 12.

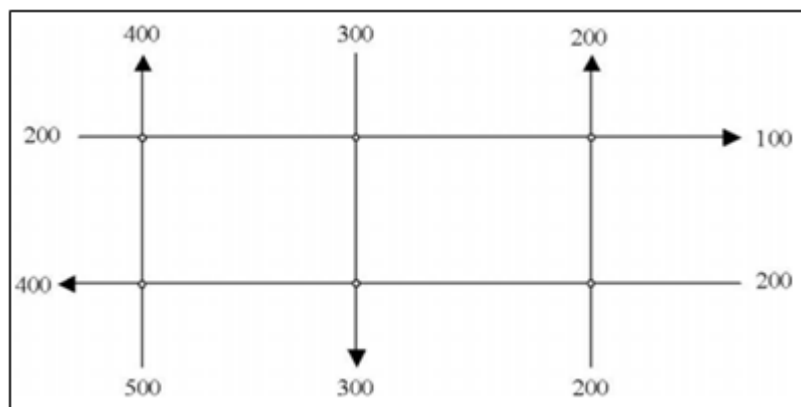


Figura 12. Problema de flujo de tráfico. Possani et al. (2010).

Possani et al. (2010) identificaron 4 ciclos generales en el trabajo de los alumnos sobre la solución del problema, y pudieron analizar que la mayoría de ellos tuvieron deficiencias sobre el concepto de una variable, durante el primer ciclo denominado *selección y relación de variables*; esto no les permitía tener éxito en el siguiente ciclo denominado *manipulación del conjunto de ecuaciones lineales*.

Por esta razón se implementó un conjunto de actividades diseñadas sobre la descomposición genética, para dar a los estudiantes la oportunidad de revisar lo que ya sabían sobre los SEL y

desarrollar este conocimiento realizando acciones en el sistema y reflexionando sobre ellas para *interiorizar* el Proceso de solución. En una actividad, se le pedía al estudiante encontrar la solución de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, además por la cantidad de soluciones que tenía el sistema y algunos ejemplos de vectores solución. La finalidad de esta actividad era darle al estudiante la oportunidad de *coordinar* el Proceso de ecuación, conjunto y el Esquema de solución mediante la reflexión de Acciones necesarias para encontrar la solución del sistema. Se evidenció una tendencia por perder algunas ecuaciones en el Proceso de solución, por eso en la siguiente actividad se planteó un sistema y se motivó a trabajar con los coeficientes de las incógnitas, conduciendo naturalmente al concepto de matriz o representación matricial.

Luego de la intervención descrita se retomó el problema del flujo del tráfico y se evidenciaron los siguientes resultados: algunos estudiantes no sabían qué hacer con los valores libres; otros sustituyeron un valor posible para las variables libres y obtuvieron una solución particular del problema. Hubo grupos que se dieron cuenta que había muchas posibles soluciones al problema, estos estudiantes fueron capaces de comparar diferentes soluciones, y trataron de encontrar las que le ayudarían a resolver las preguntas, en este caso los autores consideraron que los estudiantes construyeron una estructura del conjunto solución, como Objeto.

Con el fin de *encapsular* el Objeto de conjunto solución, los maestros discutieron con sus estudiantes que había dos grados de libertad, además de comparar los modelos de diferentes grupos, para que se pudieran dar cuenta que una elección diferente de variables libres dará diferentes parametrizaciones de las soluciones del sistema, y que algunas facilitarán el análisis necesario para dar respuesta a las preguntas, mientras que otras lo harán más difícil.

Con respecto a los resultados encontrados en términos de la Teoría APOE, Possani *et al.* (2010) encontraron que los estudiantes pueden dar sentido a la situación presentada utilizando los Esquemas que ya han construido, y reflexionar sobre los conceptos que conocen en términos de una nueva situación. Además, es importante guiar a los estudiantes por medio de preguntas, con el fin de que se les ayude a reflexionar sobre lo que ya saben y enfocarse en estrategias que les permitan darle solución a un problema.

Estas investigaciones dan evidencias de las estructuras que pueden lograr estudiantes en un curso de álgebra lineal, y de los mecanismos empleados para llegar a cada uno de ellos. Se siguen evidenciando dificultades en la interpretación del conjunto solución de un sistema dado, a pesar de haber visto esta asignatura. Todo el panorama descrito lleva al planteamiento del problema en esta investigación.

2.4 La teoría APOE y otros conceptos del álgebra lineal

Desde esta perspectiva se han venido desarrollando diferentes trabajos que abarcan temas del Álgebra Lineal. Para esta investigación conviene realizar una revisión de algunos de estos trabajos, que permitan evidenciar las formulas de construcción de estos conceptos. Para eso, se seleccionaron algunos temas que guardan relación con los SEL, estos son: Combinación Lineal, Dependencia e Independencia Lineal, Espacio Generado y Base.

En Parraguez (2011), realizó una investigación sobre el concepto de Combinación Lineal de vectores. La autora considera este concepto como fundamental para la construcción de otros conceptos como dependencia e independencia lineal, espacio generador, base, entre otros. Para el desarrollo de esa investigación, diseñó y aplicó un cuestionario y entrevistas a 8 estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de una universidad chilena, con el fin de conseguir

información respecto a las construcciones que realizaron los estudiantes, y además para validar una *Descomposición Genética* de este concepto. En esta, describió construcciones mentales como prerequisites, y las estructuras y mecanismos mentales para la construcción del concepto. Cabe aclarar que la posición de esa investigación fue abordar este concepto desde su definición formal, la cual fue tomada del libro de Hoffman y Kunze (1973) descrita así: “Sean $u_1, \dots, u_n$ elementos del espacio vectorial U . Se dice que v en U es una combinación lineal de estos vectores si existen escalares $c_1, \dots, c_n$ en K tales que: $v = c_1u_1 + \dots + c_nu_n$ ” (p.31).

Esta descomposición, ver figura 13, está basada en la construcción del concepto espacio vectorial. La *coordinación* entre los Procesos asociados a la suma de vectores y multiplicación por escalar, son importantes en la construcción del concepto espacio vectorial en una estructura Objeto. Cuando un estudiante logra una concepción Proceso tanto de la suma de vectores (1) como la multiplicación por escalar (2), deben *generalizarse* para una sucesión finita de vectores y para una sucesión finita de escalares, con el fin de tener un nuevo Proceso de combinación lineal $c_1u_1 + \dots + c_nu_n$. Este Proceso será *encapsulado* en el Objeto combinación lineal, a través de la resultante de esa suma en un vector v de U , y sólo así, el estudiante podrá comparar el Objeto combinación, con el vector v , igualando estos vectores y garantizando la existencia de los escalares.

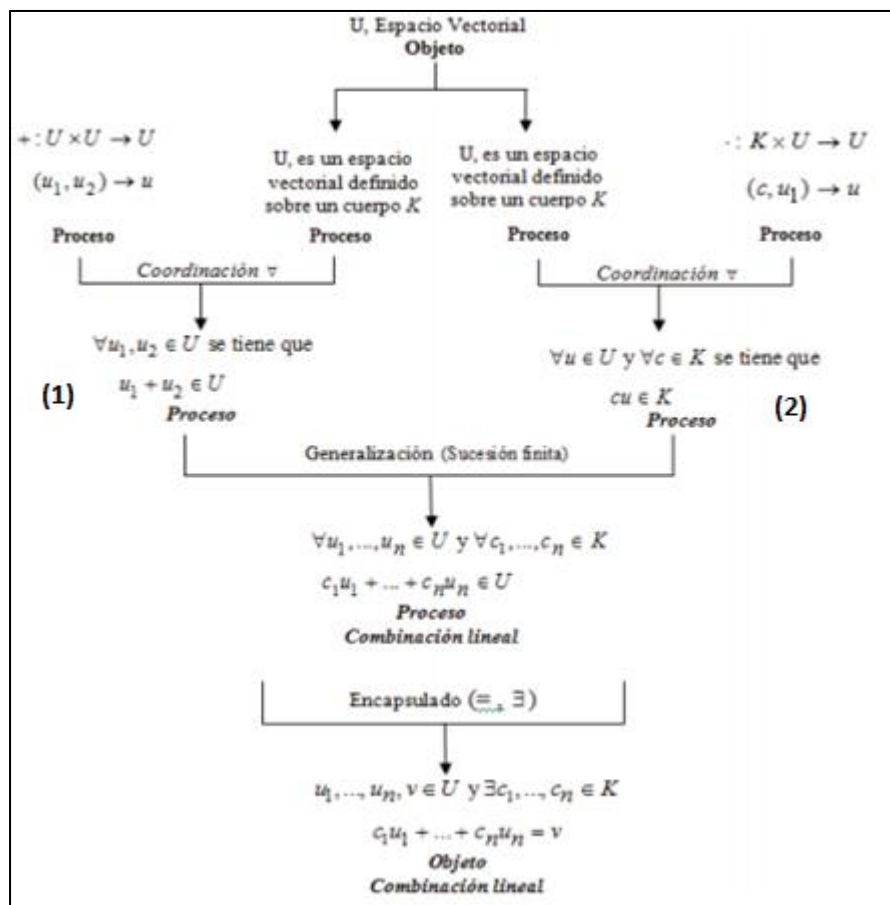
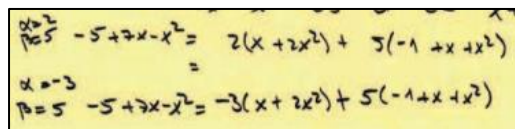


Figura 13. Descomposición Genética del concepto Combinación Lineal. Parraguez (2011).

De acuerdo con los resultados de la investigación Parraguez (2011) muestra que los estudiantes usan la matriz asociada a un sistema resultante de una combinación lineal como una “herramienta de trabajo” o algoritmo, aunque esto no garantiza una construcción Objeto del concepto combinación lineal, por la falta de interpretación del conjunto solución del sistema. Un ejemplo de esto, se evidencia en la figura 14, que corresponde a un resultado de un estudiante en una pregunta de la entrevista realizada, en la que se pedía verificar si un vector $v = -5 + 7x - x^2$, era combinación lineal de los vectores $u_1 = x + 2x^2$, y $u_2 = -1 + x + x^2$, pertenecientes al espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, con grado a lo más dos incluyendo al polinomio nulo.



$$\begin{aligned} \alpha=2, p=5 \quad -5+2x-x^2 &= 2(x+2x^2) + 5(-1+x+x^2) \\ \alpha=-3, p=5 \quad -5+3x-x^2 &= -3(x+2x^2) + 5(-1+x+x^2) \end{aligned}$$

Figura 14. Respuesta de un estudiante a una pregunta de una entrevista. Parraguez (2011).

En este caso, la falta de interpretación del conjunto solución, fue la responsable de la *desencapsulación* entre el vector resultante v y la combinación lineal entre los vectores u_1 y u_2 .

Para el estudio del concepto Base, se encuentra un trabajo realizado por Kú, Trigueros y Oktaç (2008), basados en una Descomposición Genética, ver figura 15, en la que se considera el concepto Espacio Vectorial en una estructura Proceso.

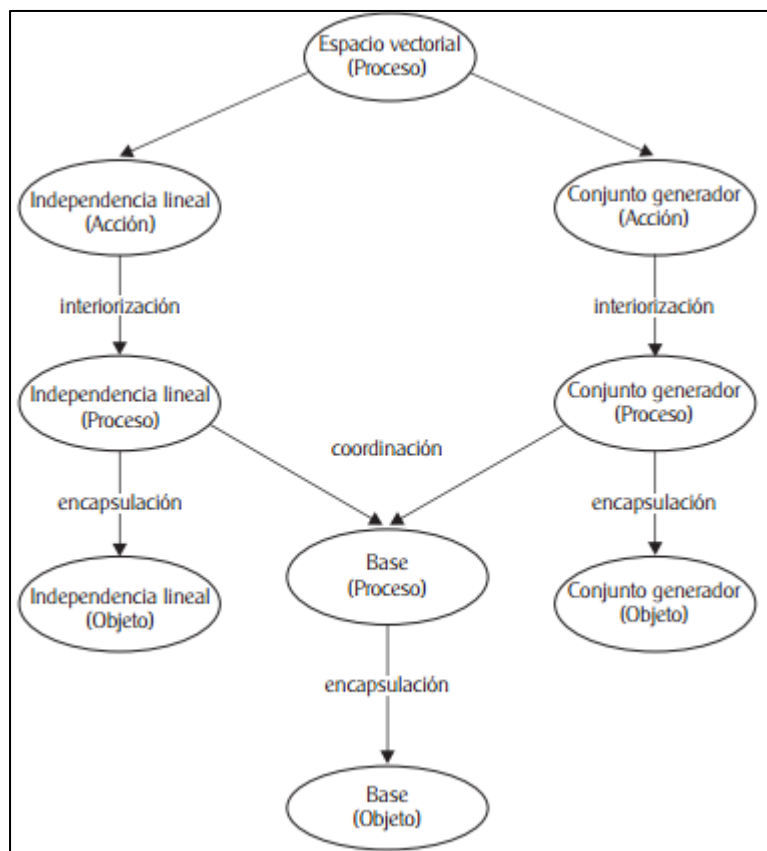


Figura 15. Descomposición Genética del concepto Base. Kú, et al. (2008).

Con esta estructura previa, el estudiante puede realizar acciones sobre los elementos de un espacio vectorial, incluso, verificar si un vector es combinación lineal de otros, o si un conjunto de vectores es o no linealmente independiente, comprobado con la definición. Kú *et al.* (2008) proponen que el estudiante puede repetir estas Acciones sobre diferentes espacios vectoriales, y al reflexionar sobre estas, podrá *interiorizarlas* en un Proceso, de tal forma que pueda considerar si un vector o un conjunto de vectores pueden ser escritos como combinación lineal de los vectores originales, en este caso, se dice que el estudiante tiene concepción Proceso del concepto Conjunto generador. Además, se puede lograr la *encapsulación* de este Proceso, gracias a la abstracción reflexiva, al considerar como un todo el conjunto de todas las combinaciones lineales.

En cuanto a la construcción del Proceso Independencia Lineal, esta se caracteriza por la identificación, a partir de las acciones donde el estudiante deba establecer combinaciones lineales de los elementos de un conjunto dado, cuáles de estas dan como resultado el vector cero, y así determinar si existe una única combinación lineal que dé como resultado este vector. Además, si considera este Proceso como un todo, se puede *encapsular* para considerar los conjuntos de vectores que satisfacen esta propiedad.

Con estos dos Procesos Kú *et al.* (2008) muestran que la Independencia lineal y Conjunto generador, se logra la *coordinación* cuando el estudiante pueda verificar si los vectores de un conjunto dado son Linealmente independientes y además se pueda determinar cuál conjunto se puede generar a partir de este. Este Proceso se *encapsula* como un todo, que permita al estudiante caracterizar el espacio vectorial y ejercer sobre él nuevas acciones como por ejemplo cambiar de base.

En los resultados de una entrevista, que se desarrolló en un curso de álgebra lineal para ingeniería de una universidad privada de México, no se identificó alguna relación con los SEL, aunque muchas de las dificultades descritas tenían que ver con las nociones de dependencia e independencia lineal y la pertenencia al conjunto generador.

3. Planteamiento del problema y objetivos de la investigación

3.1 Planteamiento del problema

El interés por el aprendizaje y la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales dado que es uno de los conceptos de mayor importancia en cursos básicos de álgebra lineal. Según Strang

(1982) los sistemas de ecuaciones lineales son “el problema central del álgebra lineal” (p.1). Betancourt (2009) plantea específicamente tres aspectos que justifican lo expuesto: primero por sus aplicaciones en distintas disciplinas como ingeniería, economía y computación (Lay, 1994), segundo por su estudio en otras áreas de la matemática como ecuaciones diferenciales, cálculo de varias variables, estadística, entre otras; y tercero porque dan origen a la construcción del álgebra lineal. Dorier (2000) toma los sistemas de ecuaciones lineales como punto de partida para describir la génesis de los espacios vectoriales, como concepto fundamental del álgebra lineal. La construcción de otros conceptos y nociones dependen de ellos, las “transformaciones lineales, autovalores, autovectores, sistemas de ecuaciones no lineales, estudios de espacios de dimensión finita, sistemas de ecuaciones diferenciales” (Segura, 2004, p. 49) están asociados con la construcción de sistemas de ecuaciones lineales y con el análisis de su conjunto solución. En consecuencia, el estudio y enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales son esenciales y necesarios en la formación profesional de los estudiantes. A partir de la educación secundaria, los sistemas de ecuaciones lineales forman parte del currículo; allí se inicia con la identificación de métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales, como muestra el Ministerio de Educación Nacional, (MEN, 2006).

Ahora bien, una de las dificultades por las que atraviesan los estudiantes en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales está relacionada con el significado que le asignan al conjunto solución (González, 2011; Ramírez, 2008, entre otros mencionados en este documento). Este problema se ha estudiado desde diferentes perspectivas, como se mencionó en los apartados anteriores. Ahora, aunque Dubinsky (2001) plantea la importancia de construir los conceptos en álgebra lineal sin evadir su naturaleza abstracta, también es evidente que el trabajo con las formas dinámicas de los objetos concretos, ya sea en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, permiten la visualización de las

acciones que se realizan en forma algebraica, ampliando las representaciones de un mismo concepto, y posibilitando la interpretación del mismo.

Por tanto, se propone la necesidad de estudiar la construcción del Esquema de sistemas de ecuaciones lineales, para diseñar tareas validadas que fomenten en estudiantes universitarios de primer año la comprensión de este concepto fundamental del álgebra lineal. Y que además les permitan disminuir la distancia entre las formas abstractas y concretas de este objeto matemático.

3.2 Pregunta de investigación

De lo expuesto en las secciones anteriores surge el interés por investigar las construcciones mentales que un estudiante puede realizar sobre los sistemas de ecuaciones lineales. En particular analizando las características del Esquema donde se ponen en juego la aplicación de acciones sobre objetos concretos a partir del diseño y manipulación de simulaciones en un software de geometría dinámica. Además de las construcciones abstractas de los sistemas de ecuaciones lineales (como subespacio de un espacio vectorial, como una matriz en la ecuación $Ax = b$, entre otras) gracias al trabajo de los estudiantes sobre formas generales de los sistemas de ecuaciones. Las relaciones entre estas formas de conocer este concepto matemático pueden posibilitar la construcción y evolución de su Esquema.

Por tanto, se espera dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Qué mecanismos y/o qué estructuras propician las formas dinámicas de objetos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que intervienen en la construcción del Esquema de sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes que toman por primera vez un curso de álgebra lineal?

Para dar respuesta a esta pregunta, se plantearon los objetivos de investigación que se exponen en el siguiente apartado.

3.3 Objetivos de investigación

Objetivo general

Analizar la relación que un individuo debe establecer entre un Objeto cognitivo (abstracto) y una forma concreta (geométrica y/o algebraica), en la construcción del Esquema de sistema de ecuaciones lineales.

Objetivos específicos

Establecer el rol de las formas geométricas (concretas) en la construcción del Esquema de sistemas de ecuaciones lineales.

Describir los mecanismos mentales que permiten la construcción de relaciones entre las estructuras concretas y abstractas de los sistemas de ecuaciones lineales que un estudiante construye al resolver situaciones matemáticas.

Diseñar y validar tareas que fomenten la construcción y evolución del Esquema de sistemas de ecuaciones lineales para un curso básico de álgebra lineal.

4. Etapa de reconocimiento

4.1 Descripción general

Con el fin de tener un acercamiento al contexto que fue empleado para el desarrollo de la investigación, se decidió realizar una experiencia preliminar. Esta experiencia fue realizada con un grupo de estudiantes de la Universidad Industrial de Santander que estaban cursando la asignatura Álgebra Lineal I. Se trabajó con los estudiantes en diez sesiones extra clase, la participación en estas tenía un porcentaje de 20% sobre la nota final del curso, acordado al

iniciar con la profesora titular. Se siguió el contenido de clase propuesto por profesora, con el fin de ofrecer un ambiente donde los estudiantes pudieran reforzar los temas vistos en clase. Las actividades realizadas estuvieron enfocadas en el uso de formas gráficas, apoyadas de un software de geometría dinámica, por lo que estas sesiones fueron realizadas en una sala de cómputo.

4.2 Característica de los estudiantes

Los estudiantes que participaron en las sesiones cursaban programas de ingeniería, y matemáticas. Algunos veían la asignatura por primera vez, y otros hasta por tercera vez, lo cual resultaba motivador, por el porcentaje que había sido asignado por la profesora titular. El hecho de que este grupo fuera tan heterogéneo, permitió observar algunas cuestiones del ámbito universitario, puesto que era la primera experiencia en este contexto para la investigadora. Fue muy difícil para algunos de los participantes expresar sus inquietudes y opiniones acerca de algo relacionado con el tema propuesto, debido a que no se sentían cómodos con el hecho de tener compañeros de otras carreras. Esto impidió, que al principio de las sesiones el ambiente se diera para el diálogo, y fue hasta después de la cuarta sesión que entre los estudiantes decidieron trabajar en grupos colaborativos, aunque con compañeros de su carrera.

4.3 Dinámica del curso

El curso se realizó durante 11 sesiones, de 2 horas cada una; los encuentros se realizaron los sábados en el horario de 6 a.m. a 8 a.m., a partir del 30 de septiembre de 2016 y hasta el 28 de febrero de 2017. Este horario fue acordado con los estudiantes, con el fin de que no se interpusiera con otras actividades académicas. Como ya se mencionó, la participación en estas actividades tenía un 20% del total de la nota de la asignatura de Álgebra Lineal I.

De las 11 sesiones, una fue tomada para aplicar una prueba inicial, y otra para una prueba final. La prueba inicial, tuvo como objetivo evidenciar los conceptos previos que tenían en ese momento los estudiantes, relacionados con los SEL. Dos de los conceptos evaluados en esta prueba, funciones y ecuaciones, fueron descritos por Manzanero (2007) en su descomposición genética como Procesos; esto no será analizado en esta sesión, puesto que esa no fue la finalidad de esta experiencia. También se evaluó como tal el concepto de sistemas de ecuaciones lineales, de la forma como el MEN (2006), en el documento de Estándares y Competencias Matemáticas lo demanda, usando métodos para resolverlos. De los 30 estudiantes, 25 dejaron en blanco los puntos relacionados con los SEL explicando que no lo recordaban, los otros 5 ya habían visto el curso anteriormente.

Durante las sesiones de clase, se abordaban temas relacionados con el contenido propuesto por la profesora titular, el programa seleccionado por la profesora correspondía al Programa Moderno, uno de los tres programas que proponía la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander para el curso de Álgebra Lineal I. Este programa abordaba contenidos que no tenían nada que ver con los SEL, como lo era producto punto. No se quería imponer un orden para presentar los contenidos, sólo se seguía lo propuesto por la profesora titular. Se intentó presentar los contenidos haciendo uso de sus formas gráficas, para determinar cómo podría evidenciarse la integración de este ambiente en una clase tradicional de Álgebra Lineal.

Al finalizar las sesiones se realizó una prueba final, con el objetivo de cerrar el curso, y además dejar evidencia de lo trabajado. Esta prueba evaluó, además de los SEL, los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia lineal y base; ya que se evidenció durante el trabajo en las sesiones, que el uso de los SEL era importante en el desarrollo de dichos conceptos. En esta prueba final, en comparación con la prueba inicial, hubo una mejora, aunque

no fue tan significativa. A continuación, se describe la intención de cada uno de los puntos evaluados en esta prueba.

En el primer inciso se da un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, conformado por las ecuaciones: $x + y + z = 5$; $x - y + az = 3$ y $2x + y + z = b$ la idea con este problema era que los estudiantes dieran los valores de a y b , de tal forma que el sistema cumpliera con la condición de tener infinitas soluciones. La mayoría de los estudiantes usaron la matriz de coeficientes y la redujeron, pero no llegaban a alguna conclusión; otros pocos en cambio pudieron dar los valores de a y b , para que el sistema cumpliera con esa condición. En estos estudiantes se evidenció una concepción Proceso de los SEL, ya que pudieron no sólo realizar una acción para dar solución al problema, sino que reflexionaron sobre lo obtenido y pudieron concluir. En el inciso b, se presentaron unas gráficas en un modo sintético geométrico, de diferentes sistemas de tres variables y tres ecuaciones, ver figura 16, y donde se pedía, para cada caso determinar si el sistema representado tenía: única solución, un número finito de soluciones (¿cuántas?), un número infinito de soluciones o si no tenía solución.

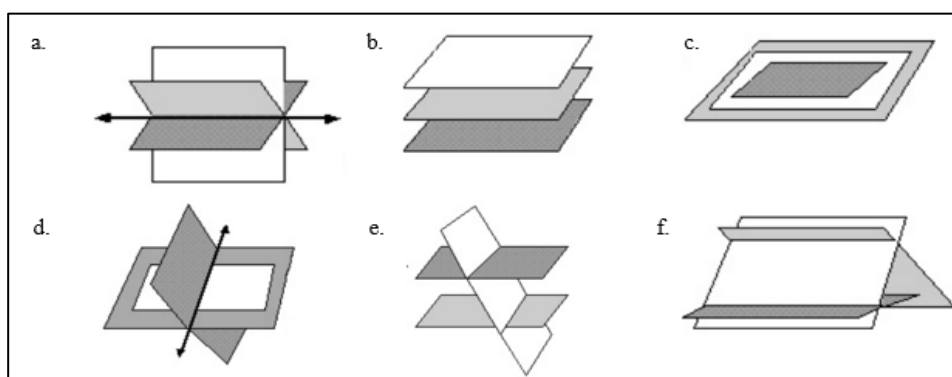


Figura 16. Tomado de la prueba diagnóstica final, etapa de reconocimiento.

En esta pregunta la mayoría de los estudiantes respondían específicamente que el sistema del literal a. tenía única solución, teniendo como idea errónea que la recta donde se intersecaban los

tres planos era un objeto y no lo tomaban como un conjunto de puntos. Sólo hubo dos casos donde estos estudiantes respondieron que el sistema tenía infinitas soluciones ya que la recta estaba formada por infinitos puntos. Otro aspecto que evidenció concepciones erróneas fue el literal f, donde se generalizó la idea errónea, vista en dos dimensiones, cuando tres rectas que se intersecan dos a dos en el plano, y los estudiantes responden que tiene tres soluciones. Estos estudiantes respondían que tenía tres soluciones, puesto que aparecían tres rectas; incluso se considera el hecho de preguntar en el enunciado que si el sistema tenía un número finito de soluciones, y si era así, especificara cuántas eran, hizo que esta idea errónea tomara fuerza.

En la pregunta 4 se cuestiona si los vectores $a = (1,3,2)$, $b = (2,1,2)$, $c = (3,0,1)$ y $d = (1,2,0)$, forman una base en $\mathbb{R}^3$. Para esta pregunta hubo dos tipos de respuestas, la primera era que no podían formar una base, porque había más vectores que los necesarios para formarla, pero sin recurrir a comprobar si se cumplían o no las dos condiciones, independencia lineal y conjunto generador. Y la otra, era que sí, porque había más de tres vectores y era muy probable que generaran a todos los vectores del espacio. En ambos casos, no se puede decir que se hayan evidenciado concepciones del proceso del concepto de Base, puesto que las respuestas fueron acerca de la cantidad y no de las relaciones entre los vectores, por ejemplo, de si eran o no linealmente independientes. Es decir, no se pudo observar una respuesta en donde especificaran que no era una base, ya que al menos uno iba a ser combinación lineal de los otros, y por lo tanto el conjunto ya no sería linealmente independiente.

Los incisos 5 y 7, tenían que ver con la interpretación geométrica de los SEL. En el inciso 5 se pidió a los estudiantes que realizaran una interpretación geométrica, de un sistema homogéneo formado por tres planos, cuya solución fuese única. A la mayoría, por no decir que a todos se les complicó realizar el dibujo puesto que no sabían cómo mostrar que realmente el sistema tenía

única solución y además que esa solución era el vector $(0,0,0)$, es decir los tres planos se intersecarían en el origen. A diferencia del punto 5, el punto 7 pedía que con sus palabras intentaran explicarle a un compañero que un sistema de dos variables interpretado geométricamente por tres rectas que se cortan dos a dos, no tenía solución. La mayoría no comprendió la pregunta, respondiendo que ese sistema tenía exactamente tres soluciones, que correspondían a los puntos de corte entre cada par de rectas. Muy pocos estudiantes describieron que no había soluciones “completas” es decir, que se podían encontrar puntos que eran solución para dos ecuaciones, pero no para las tres.

La idea con esta prueba era determinar puntos importantes para la mejora de la etapa de implementación, en cuanto a la forma como se van presentando los temas, y el uso de formas concretas. Se pudo evidenciar que el hecho de presentar formas concretas al estudiante, es decir, planos que se intersecan, rectas que cortan en dos puntos, no iba a presentar una mejora significativa en cuanto a la interpretación del conjunto solución de un SEL, al contrario, presentaría una dificultad para el estudiante, y esa no era la intención del trabajo.

4.4 Conclusiones de la experiencia

Esta experiencia permitió tener en cuenta aspectos importantes para el desarrollo de la investigación, con respecto a las características de los estudiantes y la dinámica del curso.

Con respecto a las características de los estudiantes, es necesario trabajar con un grupo lo más homogéneo posible; aprovechando la similitud de los estudiantes, el trabajo colaborativo, para la realización de las tareas esto puede ser más favorable.

En cuanto a la dinámica del curso, el trabajo en la sala de cómputo se podría aprovechar tendiendo como prioridad el desarrollo de la investigación. Las sesiones de clase se podrían

guiar, más no sería una necesidad, haciendo uso de formas gráficas, ya que como se evidenció en la prueba final, y como lo han reportado otras investigaciones en el caso de Sierpinska (2000), no es suficiente con hacer los contenidos más concretos a partir del trabajo en bajas dimensiones y usando visualizaciones. Esto puede llevar los estudiantes a interpretaciones irrelevantes, haciendo que la comprensión del significado del conjunto solución de los SEL sea más y no menos complejo. En cambio, se propone hacer énfasis en la construcción de conceptos básicos para los estudiantes que tienen que ver con los SEL; por ejemplo, el estudio de las ecuaciones lineales y vectores. Preguntas como ¿Qué significa encontrar la solución a una ecuación lineal? ¿Qué pasa si ahora interpreto no una ecuación lineal, sino dos? ¿Qué le ocurre a la solución de una ecuación lineal, cuando esta ha sido multiplicada por un coeficiente diferente de cero? Entre otras, creemos que le permite al estudiante, construir una mejor interpretación respecto al conjunto solución de un SEL, sabiendo que este, está conformado, por ecuaciones lineales. Además, entre otras situaciones que se puedan presentar, por ejemplo, un sistema en el cual no se puedan encontrar $n - \text{uplas}$ que satisfagan todas las ecuaciones del sistema. Otro punto importante que permitió evidenciar esta etapa de reconocimiento fue en cuanto al uso de la matriz asociada al SEL. Los estudiantes siempre la usan, se les enseña el algoritmo para reducir matrices usando tres operaciones elementales, pero nunca se les enseña el por qué funciona. En el caso de los SEL, no se hace tan importante reducir una matriz hasta su forma reducida escalonada, hay programas que resuelven SEL, se considera relevante la interpretación que un estudiante le puede dar, en cuanto al uso de la representación matricial, a la matriz cuando ya está reducida, con el fin de darle solución a algún problema.

Respecto a la prueba inicial, su objetivo debe ser evidenciar las estructuras iniciales, para que a partir de estas se pueda construir el camino que guiará las sesiones de clase. En cuanto a la

prueba final, esta permitirá refinar el camino que fue trazado con ayuda de la prueba inicial; ese camino estará descrito en las siguientes secciones, como una descomposición genética. Otro punto importante para el desarrollo de esta investigación, y que permitirá la evidencia de rasgos que no son perceptibles en el papel, será la realización de entrevistas. Estas entrevistas serán realizadas a los estudiantes que evidencien mejores construcciones, del concepto de SEL, y otros involucrados como: combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador y base.

5. Análisis teórico, intención de las actividades de clase y análisis de las construcciones mentales evidenciadas.

5.1 Análisis teórico

5.1.1 Análisis de libros de texto. En esta parte, se tiene en cuenta el análisis de algunos libros de texto que han sido usados como guía, por profesores que desarrollan el curso de Álgebra Lineal. Se consideran los siguientes libros de texto: Álgebra Lineal con Aplicaciones (Nakos y Joyner, 1999); Álgebra lineal (Grossman, 1993), Álgebra Lineal (Hoffman y Kunze, 1973), Álgebra Lineal (Martínez y Sanabria, 2008), A Concise Introduction to Linear Algebra (Schay, 2010) y Álgebra Lineal. Una introducción moderna (Poole, 2011). Además de los libros Aproximación al Álgebra Lineal: un enfoque geométrico (Isaacs y Sabogal, 2009) y Learning Linear Algebra with ISETL (Weller *et al.*, 2002).

Orden de contenidos	1. Vectores 2. SEL 3. Espacio	1. SEL 2. Vectores 3. Espacio	1. Inducción Matemática	1. ISETL 2. Vectores y Espacio
----------------------------	--	--	--------------------------------	---

	Vectorial	Vectorial	2. $\mathbb{R}^n$ como Espacio vectorial	Vectorial 3. SEL
Autor(es)				
Schay(2010)	X			
Poole (2011)	X			
Nakos y Joyner (1999)		X		
Grossman (1993)		X		
Martínez y Sanabria (2008)		X		
Hoffman y Kunze (1973)		X		
Isaacs y Sabogal (2009)			X	
Weller <i>et al.</i> (2012)				X

Tabla 1. Organización de contenidos

La Tabla 1, muestra una mirada general del orden de los contenidos asociados a la presentación de los SEL. En el caso de los libros de texto de Schay (2010) y Poole (2011), se inicia con un estudio sobre vectores y luego se aborda el concepto de SEL. El libro de Schay está dirigido a estudiantes de matemáticas, física y ciencias de la computación, su enfoque es más abstracto, en el sentido que las definiciones, propiedades y teoremas presentan muy pocos ejemplos. En ambos libros se integra el concepto de Matrices para dar solución a los SEL, aunque se presenta otro capítulo, donde se muestra con más generalidad este concepto.

En los textos de Nakos y Joyner (1999), Grossman (1993), Hoffman y Kunze (1973), y Martínez y Sanabria (2008) se inicia con el estudio de los SEL; el concepto de matrices se integra para dar solución a los SEL, pero de igual forma aparece otro capítulo dedicado a ello. A diferencia de los otros tres libros, el libro de Hoffman y Kunze (1973), está destinado para estudiantes de matemáticas, lo cual presenta mayor uso del lenguaje formal y pocos ejemplos.

Con respecto al libro de Isaacs y Sabogal (2009) estos autores inician con Inducción Matemática y números complejos, algo que lo caracteriza del resto de libros presentados aquí. El siguiente capítulo, dedicado al espacio $\mathbb{R}^n$ donde viven las soluciones a los SEL, aborda una variedad de contenidos que en los otros casos se trabajan por separado, como lo son los SEL, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, plano y recta. Algo interesante de este libro es que, para dar paso al estudio de los vectores, se basa en las soluciones de un SEL, permitiendo la conexión entre los temas.

Por último, el libro escrito en colaboración con miembros del grupo RUMEC, Weller *et al.* (2002) presenta a los SEL en su tercer capítulo, integrando el concepto de Matrices para dar solución a los SEL. El primer capítulo está destinado al aprendizaje de ISETL, que es el programa de lenguaje matemático, usado como herramienta para aprender algebra lineal, y el segundo a vectores y espacios vectoriales.

En cuanto a cómo abordan cada uno de estos libros el tema de SEL, se presenta a continuación las diferencias o relaciones encontradas entre cada uno de ellos.

Autor (es)	Definición SEL	Definición solución de SEL	Forma de abordarlo
Schay (2010)	Conjunto de ecuaciones lineales simultáneas de la forma $\sum a_i x_i = b_i$	Valores para x_i que satisface todas las ecuaciones del sistema	-Presentación de un caso particular como ejemplo, luego de definirlo. -Presentación de métodos para resolver un sistema. -Método de Eliminación Gaussiana. -Uso de representación matricial de un SEL. -Uso del concepto de rango para hablar del tipo de solución.

Hoffman y Kunze (1973)	Sea F un campo, y n escalares $x_1, \dots, x_n$ pertenecientes a F. entonces un SEL está descrito así: $\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n &= y_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n &= y_m \end{aligned}$ Donde $y_1, \dots, y_m$ y cada A_{ij}, con $1 \leq i, j \leq m, n$ respectivamente, son elementos de F.	Una $n - upla$ que satisface las m ecuaciones.	-Propiedades de los elementos de un campo. -Uso de la representación matricial de un SEL -Método eliminación Gaussiana. Son escasos los ejemplos que se pueden encontrar.
Isaacs y Sabogal (2009)	No se define como tal, sólo se resalta la importancia de estudiar sus soluciones.	“$n - upla$” ordenada $(s_1, \dots, s_n)$ tal que al sustituir en un sistema con variables x_i, x_1 por $s_1, \dots, x_n$ por s_n se satisfacen todas las ecuaciones del sistema.	-Ecuaciones lineales -Método de eliminación gaussiana -Se involucra el concepto de conjunto solución, para abordar el tema de $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial, tratando otros conceptos como combinación lineal, dependencia e independencia lineal, a la par.
Weller et al. (2002)	Colección de 2 o más ecuaciones	Son las soluciones a todas las ecuaciones del sistema.	-Se introduce con las ecuaciones lineales -Se proponen varios problemas al iniciar la sección y luego se discuten las diferentes formas de darle solución a un SEL.

Tabla 2. Abordaje de los SEL 1.

Este grupo de libros se caracteriza porque no presentan ningún tipo de representación geométrica. Los dos últimos, Isaacs y Sabogal (2009) y Weller *et al.* (2002), son conscientes de los conceptos básicos que están involucrados en este contexto, y empiezan abordándolos, con el fin de que lo que venga tenga sentido para los estudiantes. Además, esta perspectiva, está

relacionada con la forma como definen a los SEL y su conjunto solución, de una forma muy parafraseada y sin tanto formalismo como lo hacen Hoffman y Kunze (1973), y Schay (2010).

Autor(es)	Definición SEL	Definición solución de SEL	Forma de abordarlo
Poole (2011)	Conjunto finito de ecuaciones lineales cada una con las mismas variables	Es un vector que simultáneamente es una solución de cada ecuación del sistema	- Introducción con las Ecuaciones lineales -Presentación de casos particulares luego de la definición -Presentación de métodos para resolver un sistema -Método de Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan. -Uso de representación matricial de un SEL. -Uso del concepto de rango para hablar del tipo de solución.
Nakos y Joyner (1999)	Conjunto de ecuaciones lineales simultáneas de la forma: $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ $a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$ $\vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{mn}x_n = b_m$	Sucesión de escalares que, al sustituirlos en las variables, satisfacen todas las ecuaciones	- Introducción con las Ecuaciones lineales -Presentación de casos particulares luego de la definición -Presentación de métodos para resolver un sistema -Método de Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan. -Uso de representación matricial de un SEL.
Martínez y Sanabria (2008)	Conjunto de ecuaciones lineales simultáneas de la forma: $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ $a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$ $\vdots$ $a_{m1}x_1 + a_{mn}x_n = b_m$	“ <i>n – upla</i> ” que es solución de todas las ecuaciones del sistema.	-Introducción con las Ecuaciones lineales -Presentación de casos particulares luego de la definición -Presentación de métodos para resolver un sistema -Método de Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan. -Uso de representación matricial de un SEL.
Grossman	Conjunto de ecuaciones	Vectores	-Introducción con las

(1993)	lineales simultáneas de la forma: $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ $a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$ $\vdots$ $a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$	$(x_1, \dots, x_n)$ que satisfacen cada ecuación	Ecuaciones lineales -Presentación de casos particulares luego de la definición -Presentación de métodos para resolver un sistema -Método de Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan. -Uso de representación matricial de un SEL.
---------------	---	--	---

Tabla 3. Abordaje de los SEL 2.

Con respecto al grupo de libros presentados en la Tabla 2, la característica principal es que se hace uso de representaciones en el plano y el espacio, para describir la solución de sistemas de dos y tres variables. En cada uno de ellos se hace énfasis al iniciar el capítulo, sobre la importancia de comprender el concepto de ecuaciones lineales y su solución. Las representaciones geométricas presentadas en el plano, $\mathbb{R}^2$, reinan en estos libros, ya que como lo describen los autores, el concepto de línea recta ya ha sido estudiado años anteriores; en cambio las representaciones en $\mathbb{R}^3$, son menos empleadas.

En algunos libros de texto, la forma en que se presenta el contenido en el capítulo sobre SEL no permite un claro uso de los conceptos que se involucran en la resolución de un SEL. Por ejemplo, en el libro de texto de Grossman, aparecen 21 teoremas y definiciones sobre matrices, que no necesariamente se necesitan para dar solución a un SEL.

Luego de una visión global sobre el contenido, y la forma como se aborda el concepto de SEL y su conjunto solución en algunos libros de texto, se realiza un análisis más detallado en 3 de los 8 libros de textos descritos anteriormente, con el fin de estudiar cómo son involucrados los demás conceptos con el estudio de los SEL.

Considere el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x e y :

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

Donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1$ y b_2 son números dados. Cada una de estas ecuaciones es la ecuación de una línea recta. Una solución al sistema es un par de números, denotados por (x, y) que satisface el sistema. (Grossman, 1993, p. 2)

En el caso de Grossman (1993) se inicia con el estudio del caso particular, de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, haciendo alusión a su conjunto solución como un par ordenado, para cuando el sistema tiene única solución. Luego de abordar otros casos, por medio de ejemplos, como sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, se generaliza y se estudian los sistemas de m ecuaciones con n incógnitas, hablando de la solución como una $n - upla$. Para dar solución a los SEL se introduce el concepto de matriz, usando la representación matricial del sistema y para emplear los métodos de eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan.

En el siguiente capítulo que se introducen los determinantes, particularmente cuando se aborda el estudio de la regla de Cramer, se describe la solución única del sistema $Ax = b$, donde A es una matriz $n \times n$ en términos de determinantes. En el capítulo 3 sobre vectores y planos, se menciona en un ejemplo sobre intersección de planos, que forma un sistema de ecuaciones lineales y que debe resolverse para encontrar la intersección. En el capítulo 4 se estudian los espacios vectoriales, aparecen conceptos como subespacios, combinación lineal, conjunto generador, y espacio generado que requieren de los sistemas de ecuaciones lineales y el análisis de su solución; sin embargo, los autores no hacen énfasis en este hecho. El concepto de base que también es abordado en ese capítulo es descrito sin mencionar a los SEL que se van formando, pero en algunos ejemplos se pide encontrar la base para el espacio solución de un sistema dado.

Finalmente, cuando se introduce el concepto de rango, se relaciona con la solución de los SEL como se muestra en el siguiente teorema: “El sistema $Ax = b$ tiene al menos una solución si y solo si $b \in C_A$. Esto ocurrirá si y sólo si A y la matriz aumentada (A, b) tienen el mismo rango” (Grossman, 1993, p. 358).

“Un sistema lineal de m ecuaciones con n variables (o incógnitas) $x_1, \dots, x_n$ es un conjunto de m ecuaciones lineales de la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Los números $a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn}$ son los coeficientes del sistema y $b_1, \dots, b_m$ son los términos constantes” (Nakos y Joyner, 1999, p.4-5).

En cuanto al conjunto solución de un sistema lineal, Nakos y Joyner (1999) lo definen como: “Una sucesión $r_1, r_2, \dots, r_n$ de escalares es una solución del sistema si todas las ecuaciones se satisfacen al sustituir $x_1 = r_1, \dots, x_n = r_n$. El conjunto de todas las soluciones posibles es el conjunto solución. Cualquier elemento geométrico del conjunto solución se llama solución general.”(p. 5).

En Nakos y Joyner (1999) es posible notar que, los autores definen un sistema de ecuaciones lineal y su conjunto solución de manera general como expresiones algebraicas. Al igual que en Grossman (1993), se van mostrando las representaciones geométricas de los SEL y se trata su representación matricial igual. Los conceptos de espacio generado, dependencia e independencia

lineal, se abordan en el capítulo 2, sobre vectores, y donde también se incluyen los planos. En el capítulo de Espacios vectoriales, donde se abordan los conceptos de subespacio vectorial, conjunto generador, rango y base se retoman los conceptos de dependencia e independencia lineal, y se realiza un tratamiento similar al realizado en Grossman (1993), en cuanto a la relación del rango con los SEL. Luego de este capítulo aparecen las transformaciones lineales y por último los determinantes, en donde se evidencia relación entre este concepto con los SEL; por ejemplo, como se muestra en el siguiente teorema: “El sistema homogéneo cuadrado $Ax = 0$ tiene soluciones no triviales, si y solo si $\det(A) = 0$ ” (Nakos y Joyner, 1999, p. 395).

A diferencia del libro de Grossman (1993), en Nakos y Joyner (1999) aparece al final de cada capítulo, aparte de los ejercicios de repaso, una amplia gama de ejercicios de aplicación, que invitan a la transversalidad con las otras asignaturas.

En el texto de Isaacs y Sabogal (2009), se presenta la definición del conjunto $\mathbb{R}^n$ como el espacio donde viven las soluciones de sistemas de ecuaciones con n variables. Tomando siempre como base casos particulares que pueden ser representados geoméricamente; es decir, el plano ($\mathbb{R}^2$) y el espacio tridimensional ($\mathbb{R}^3$). El objetivo de este libro es observar cada concepto desde un punto de vista geométrico, con el ánimo de establecer nociones y resultados básicos de álgebra lineal haciendo énfasis en conocimientos e interpretaciones geométricas muy concretas e intuitivas. Aunque no use representaciones geométricas como tal, su enfoque va dirigido a relacionar los aspectos intuitivos con lo que se va construyendo.

Este libro dedica el segundo capítulo a definir conceptos como combinación lineal, independencia lineal, sistema de generadores, rectas y planos en $\mathbb{R}^3$, subespacios vectoriales y base. Isaacs y Sabogal (2009) describen a un SEL, como lo hacen Nakos y Joyner (1999) como

una solución de un sistema con incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ a: “una “ $n - upla$ ” ordenada $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ de números reales tal que al sustituir x_1 por s_1 , x_2 por $s_2, \dots$, x_n por s_n , se satisfacen las ecuaciones del sistema” (Isaacs y Sabogal, 2009, p. 38), consecuente a esto describen la solución o conjunto solución del sistema al conjunto de todas las soluciones del sistema. Siguiendo ese orden, describe a la matriz del sistema y se emplea el método de eliminación Gaussiana, al igual que en Nakos y Joyner (1999), y Grossman (1993). Luego de considerar a la forma general de las soluciones de un SEL, como n -plas, las llama vectores n -dimensionales, describiendo las operaciones de suma vectorial y producto por escalar, para definir así las propiedades que ese espacio vectorial cumple. En general los conceptos que aparecen en este capítulo no están definidos usando explícitamente los SEL, pero se puede evidenciar en los ejemplos que, dada la situación, se plantea un sistema para resolver el problema, sin hacer énfasis en su representación matricial ni en el método de solución.

En el capítulo 3, sobre Transformaciones lineales y Matrices, Isaacs y Sabogal (2009) hacen más referencia a la representación matricial, pero igual no se deja de mencionar que lo que se quiere encontrar es la solución de algún SEL. En el siguiente capítulo los autores introducen una operación que permite estudiar a $\mathbb{R}^n$, que ya había sido definido como espacio vectorial, desde un punto de vista “geométrico”. Es así como definen al producto interno, y se habla entonces de $\mathbb{R}^n$ como un espacio euclídeo. Por último, se describe la función determinante, y en particular se usa al igual que los otros libros de textos descritos, la regla de Cramer como un método para resolver SEL con igual número de ecuaciones que incógnitas.

Por otra parte, el libro de texto diseñado por algunos miembros del grupo RUMEC, se enfoca en abordar la construcción de conceptos y nociones matemáticas en álgebra lineal a partir de la aplicación de acciones (en un ambiente computacional) que dan lugar a la construcción de

objetos abstractos. Estas dos últimas visiones son fundamentales en el diseño y desarrollo de esta investigación.

5.1.2 Descomposición Genética hipotética, del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales.

La descomposición genética que se propone, parte de la descripción de las estructuras previas necesarias para iniciar la construcción del concepto de SEL. En este caso se parte de elementos esenciales para la comprensión del concepto de ecuación, tal como se consideró en la primera aplicación tomando elementos propuestos por Manzanero (2007).

Estructuras Iniciales: En este apartado se tiene en cuenta los conocimientos logrados por los estudiantes en sus años de escolaridad anteriores. Por ejemplo, el trabajo con las ecuaciones lineales, con la línea recta, con los vectores en física y con la noción de conjunto.

A continuación, se describen las estructuras que se plantean como requisito para la construcción de los SEL.

Una estructura Acción de variable se evidencia cuando los estudiantes reemplazan diferentes valores de una o varias variables, en una ecuación para comprobar si la satisfacen o no.

Una estructura Proceso de ecuación se caracteriza no sólo por el hecho de realizar transformaciones a una ecuación lineal para encontrar valores que al reemplazarlos en esta la satisfagan, sino, además, cuando el estudiante está consciente de que teniendo una ecuación lineal de una o dos variables, esto implica que no sólo se pueda encontrar un valor para la o las variables que satisfagan la ecuación, sino que pueden encontrar infinitas. Por ejemplo, para la ecuación $3x + 1 = 0$ hay un solo valor que la satisface y es $x = -\frac{1}{3}$, pero para la ecuación

$3x + 2y = 3$, hay más de uno, hay infinitos valores y no sólo de x , sino también de y , y uno para cada uno, de la forma $(x, \frac{3-3x}{2})$.

Una estructura Proceso de Ecuaciones equivalentes. Con una estructura Proceso de este concepto el individuo, debe reconocer que las soluciones de las ecuaciones equivalentes son la misma, y que la transformación que cambia los coeficientes de las variables no altera al conjunto solución.

Interpretaciones geométricas de las ecuaciones, para los casos con dos y tres variables. Una concepción Proceso de este concepto se evidencia cuando el estudiante es consciente, por ejemplo, para el caso de una ecuación con dos variables, que sin tener que graficar la ecuación, su interpretación geométrica corresponde a una recta, o para el caso de una ecuación con tres variables, su interpretación geométrica podría ser un plano o una recta. Aunque el trabajo con las interpretaciones geométricas en el espacio podría haber sido ser poco evidentes o nulas durante la experiencia académica de los estudiantes, estas se podrían mejorar, con el apoyo de un software graficador de matemáticas.

Vector: inicialmente, el estudiante podría evidenciar una estructura Acción del concepto vector, por su experiencia en cursos de Física, o con el uso de coordenadas, para ubicar puntos en el plano cartesiano, o para considerar el vértice de una parábola, por ejemplo. No se considera que sea estructurado previamente, sino que se empieza a construir junto con la noción de solución de un SEL.

Conjunto: Una estructura Proceso de este concepto se evidencia cuando el estudiante pueda considerar todos los elementos de un conjunto, no sólo por extensión, sino también por

comprensión, por ejemplo, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = -1\}$, y que además pueda escribirlos de la forma $(x, -x - 1)$.

Construcción de los SEL como un Proceso.

Estructura Acción de los SEL. La construcción del concepto SEL, comienza a partir de la aplicación de Acciones involucradas en la manipulación de dos o más ecuaciones para encontrar la solución de un sistema. Las Acciones están condicionadas por un estímulo externo que lleva al estudiante a realizar transformaciones paso a paso sobre el sistema, ya sea multiplicar por un escalar una ecuación, para luego sumarla a otra, para así llegar a una forma que le permita determinar el conjunto solución del SEL dado.

Para este caso es posible determinar que, dentro de la experiencia de los estudiantes con los SEL, ya han identificado los métodos para encontrar la solución a un SEL (MEN, 2003).

Antes de describir las características de una estructura Proceso del concepto SEL, se debe aclarar que dependiendo de la situación a la que se enfrente un estudiante, este decidirá cuál contexto emplea, ya sea matricial, o geométrico.

Estructura Proceso del concepto SEL, empleando la representación matricial. En cursos universitarios, el método preferido por los profesores para resolver SEL, es el método Gaussiano, donde se emplea su representación matricial. Dado que, para efectos de cálculos con las ecuaciones de un SEL, los coeficientes son los que se ven alterados y no las variables, es posible, gracias al empleo de su representación matricial, reescribirlo en su matriz aumentada asociada. Esta matriz que corresponde a un arreglo rectangular ordenado, compuesto por los coeficientes de las variables y los términos constantes del sistema, puede ser modificada mediante la realización de operaciones elementales con el fin de llevar esa matriz inicial, a una matriz en una

forma reducida por renglones o reducida escalonada por renglones, para luego, por medio de la sustitución hacia atrás, que significa empezar desde la parte inferior del sistema e ir hacia arriba, encontrar su solución.

Esto es una característica de una estructura Acción de SEL, porque hasta el momento el estudiante sólo ha utilizado un algoritmo para poder encontrar cuáles son los valores de las variables que satisfacen al sistema. A diferencia de la característica descrita para una estructura Acción de los SEL, lo que cambia es el estímulo, que en este caso va a ser el uso de la representación matricial del sistema.

Al momento de tener la matriz reducida del sistema, el estudiante se puede encontrar con dos tipos de respuestas, una en la que el sistema sea consistente, es decir que existan soluciones y otra en la que sea inconsistente, es decir donde no existan soluciones.

Sistema consistente: Al existir soluciones, hay dos opciones, que tenga única solución o que tenga infinitas.

Si al momento de reducir la matriz, realizando operaciones elementales a las ecuaciones del sistema, el estudiante se encuentra con una o más filas de ceros, podrá reflexionar sobre este hecho. En primer lugar, el hecho que una fila se haya anulado, luego de reducir la matriz inicial del sistema, implica que la ecuación correspondiente a la fila de ceros es múltiplo escalar de otra ecuación, es decir, son ecuaciones equivalentes, y por lo tanto tendrán la misma solución.

Hasta el momento no se podrá decir si tiene una o infinitas soluciones, dando lugar a la siguiente reflexión que tiene que ver con el número de filas que se hayan vuelto cero; si el número de filas diferentes de cero es menor que el número de variables, como el caso que aparece en la figura 17, el sistema tendrá infinitas soluciones, puesto que al sustituir de para

atrás, al menos una de las variables va a quedar libre y por lo tanto habrá otra(s) que quedarán en términos de esta. En caso de que el número de filas diferentes de cero sea igual o mayor que el número de variables, ver figura 18, el sistema tendrá única solución, puesto que, por cada renglón diferente de cero, habrá un pivote, que corresponderá a cada una de las variables.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Figura 17. Ejemplo de un sistema con infinitas soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Figura 18. Ejemplo de un sistema con única solución.

A diferencia de la descripción de la estructura Acción de los SEL, una característica de una estructura Proceso de los SEL, es que aunque los estudiantes hayan realizado un algoritmo para encontrar su solución, que en este caso son operaciones elementales para reducir esa matriz inicial a otra equivalente, además tendrán que reflexionar sobre lo que obtienen, teniendo en cuenta resultados teóricos, para determinar qué forma tiene el conjunto solución, que en este caso, y como lo describe Grossman (1997) tiene que ver con la relación entre el número de variables y la cantidad de renglones diferentes de cero, que en otros términos corresponden a las ecuaciones linealmente independientes del sistema.

Sistema inconsistente: Este caso, y como lo afirma Mora (2001) presenta un obstáculo para los estudiantes, a la hora de relacionar un resultado como $0 = r$, en un modo analítico, con su significado en un modo sintético geométrico, por la falsedad de esta afirmación.

Aquí, no solo deben tener en cuenta la cantidad de filas, sino también las implicaciones que trae el resultado. Veamos en el caso que se muestra en la figura 19, cómo se presenta una inconsistencia del tipo $0 = r$, con $r \neq 0$. Es imposible justificar la veracidad de una igualdad como $0 = -3$, o $0 = 2$, y además, no importa el resto de filas, con tan sólo existir esta falsedad, hace que el sistema sea inconsistente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Figura 19. Inconsistencia del tipo $0=r$

En ambos casos, tiene que ver con la profundidad al darle solución al problema, al realizar un análisis consciente de lo que se quiere y se debe hacer con el resultado obtenido luego de usar el algoritmo, con el fin de que se cumplan ciertas propiedades, y es por lo que este tipo de comportamiento caracteriza una estructura Proceso del concepto de SEL.

Estructura Proceso del concepto SEL: interpretación geométrica. Para el caso particular de los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que admiten una interpretación geométrica, se podría evidenciar una concepción Proceso del concepto SEL, al determinar con argumentos el tipo de solución que pueda tener un sistema representado geométricamente, por ejemplo, como los que se muestran en

la figura 20. En particular, estos ejemplos no muestran el típico caso de tres planos que se intersecan en el origen, y además se presentan en un modo sintético geométrico.

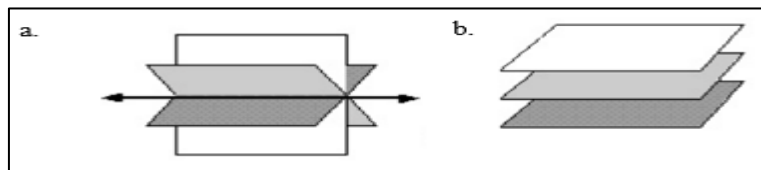


Figura 20. Ejemplo de problema en un modo sintético geométrico.

También se puede caracterizar, en *coordinación* con la representación matricial, es decir, por un lado, tener una matriz reducida que represente a un SEL, y por otro lado y apoyándose de un software graficador. Para representar este hecho, se dará un ejemplo concreto.

Sea el SEL, formado por las ecuaciones $3x + 2y + z = 3$, $-6x - 4y - 2z = -64$ y $2x + z = 1$. La matriz reducida de este sistema, ver Figura 21, tendrá una fila de ceros, (este cálculo se puede apoyar, usando por ejemplo una calculadora online para resolver SEL) correspondiente a la segunda ecuación que es múltiplo escalar de la primera, y la representación gráfica de este sistema, ver figura 22, arroja dos planos que se están intersecando.

1	0	0.5	0.5
0	1	-0.25	0.75
0	0	0	0

Figura 21. Matriz reducida del sistema asociado

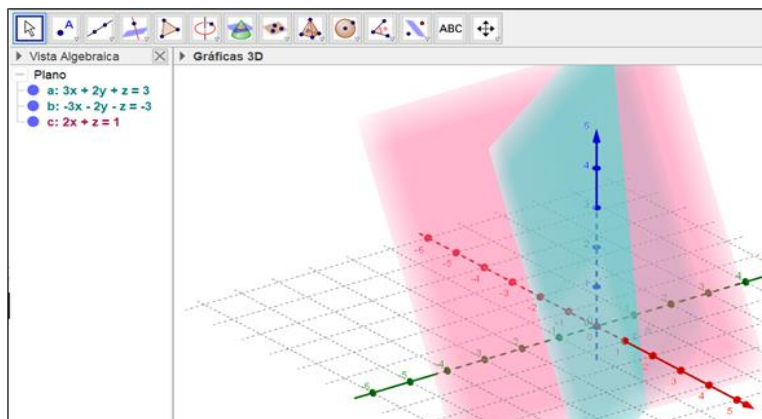


Figura 22. Representación gráfica del problema abordado.

El hecho de que se presenten sólo dos planos para este sistema que tiene tres ecuaciones, hace que el estudiante reflexione sobre esto. Así, diremos que el estudiante ha *coordinado* estos dos Procesos, cuando pueda darse cuenta de que la fila de ceros corresponde a la interpretación del concepto de ecuación que es múltiplo escalar de otra, y además que ambas ecuaciones tienen las mismas soluciones, y por lo tanto están representadas con el mismo plano.

Estructura Proceso del concepto SEL: vector. Otra forma de describir una estructura Proceso de los SEL, y particularmente abordar su conjunto solución, tiene que ver con la *coordinación* entre el Proceso de Vector, y el Proceso de SEL usando la representación matricial.

Una estructura Proceso de Vector implica que el estudiante comprenda que un vector v , que para el caso de las soluciones de un SEL son $n - \text{uplas}$, son elementos del espacio $\mathbb{R}^n$, y por lo tanto si se considera un vector de la forma $(r, r + 1)$, con $r \in \mathbb{R}$, se deben considerar a $(0,1), (2,3), (r + s, r + s + 2)$ y en general a infinitos vectores de esa forma, así como la suma entre ellos mismos y la multiplicación por un escalar, por ser elementos de un espacio vectorial.

La *coordinación* entre el Proceso de Vector y el Proceso de SEL, usando la representación matricial, se da cuando el estudiante al tener el conjunto solución a un sistema, por ejemplo $S = \{s \in \mathbb{R}: (s, 2s)\}$, pueda considerar en general todas las soluciones del sistema.

Estructura Proceso del concepto SEL: para sistemas cuadrados $n \times n$, usando representación matricial y determinante. En este caso se consideran sólo sistemas de n ecuaciones y n incógnitas, ya que la característica de esta estructura Proceso, está dada por un resultado teórico. Con la aplicación de este resultado, se podrá encontrar la solución a este tipo de sistemas, si existe, pero esto va más allá de reemplazar valores en una ecuación vectorial.

La ecuación vectorial que se usa para encontrar la solución a sistemas cuadrados es la siguiente: $x = A^{-1} \cdot b$, pero si tan sólo fuera cuestión de reemplazar no habría sentido para identificarlo como una característica de una estructura Proceso, puesto que sólo correspondería a la aplicación de un algoritmo, es decir una estructura Acción. Para que se pueda lograr una *interiorización* de esta Acción que básicamente resulta en identificar A^{-1} , (matriz inversa) y b , (matriz de términos independientes) y realizar el producto matricial, se podría preguntar que, sin necesidad de resolver este producto matricial, qué condiciones debe tener cada uno de los términos de esta ecuación, $x = A^{-1}b$, para que el sistema tenga única solución, por ejemplo: No es nuestra intención que los estudiantes reflexionen sobre este hecho, para sistemas con un número grande de incógnitas, bastaría con 2 o 3 incógnitas, ya que existen calculadoras que hacen ese trabajo, y ese no es el propósito de esta investigación, sino más bien promover la reflexión.

A pesar de que el estudiante luego de esa pregunta termina realizando una acción, que es verificar si la matriz A es invertible o no, esta indagación hace que no sólo multiplique matrices,

sino que reflexione sobre lo que está trabajando, y en este punto también puede surgir algo interesante y que muchos estudiantes suelen usar sin pensar, y es el uso del determinante, que debe ser diferente de cero, para dar la solución a un SEL, pero ¿para qué sirve? Sería una pregunta que se podría hacer.

Estructura Proceso del concepto SEL: Uso del rango. Para este caso a diferencia del anterior, se tienen en cuenta sistemas en general, es decir sistemas de m ecuaciones y n incógnitas y, además, no dará la solución, sino que permitirá establecer sin llegar a reducir una matriz o realizar una representación gráfica, el tipo de solución que tendrá el sistema.

En este caso, existen teoremas usando el rango de la matriz de coeficientes, como los que se listan a continuación:

“El sistema $Ax = b$ es consistente si y sólo si $Ran(A) = Ran(A|b)$ ” (Nakos y Joyner, año, p. 282)

“Sea A la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales con n variables. Si el sistema es consistente, entonces *número de variables libres* = $n - rank(A)$ ”

A pesar que para hallar el rango de una matriz existe un método que es usando los determinantes, este resultado tiene que ver con otro concepto que, aunque no se incluye inmediatamente en este capítulo en los cursos de álgebra, permitirá abordar esta temática con mayor significado, este concepto es independencia lineal. Además, si sólo bastara con hallar determinantes de las submatrices de la matriz de coeficientes para dar cuenta de su rango, podríamos hacer la misma pregunta de antes ¿Para qué sirve? Este tipo de cuestionamientos harán una gran diferencia entre hacer por hacer y hacer por aprender.

Como quedó descrito en los párrafos anteriores, las diferentes formas de la construcción del Proceso de los SEL se deben *coordinar*, pero estas deben estar asociadas con el contexto donde estos se presentan. Estas *coordinaciones* van a ser analizadas con mayor detalle, teniendo en cuenta las producciones de los estudiantes durante el desarrollo de la siguiente fase de investigación.

5.2 Diseño e intención de los instrumentos

Luego de la realización de la Etapa de reconocimiento, pudimos tener en cuenta ciertos aspectos para la realización de esta implementación, en cuanto a diseño y aplicación. En cada una de las siguientes secciones se describirá las características del grupo de estudiantes, así como la intención de cada uno de los problemas planteados, tanto en las actividades de clase como en las pruebas diagnósticas y entrevista.

5.3 Prueba Diagnóstica inicial

El objetivo de la aplicación de este instrumento fue obtener un primer acercamiento del grupo de estudiantes con los que íbamos a trabajar, para que nos permitiera decidir sobre el diseño de las actividades de clase. No esperamos realizar un análisis teórico sobre los resultados recogidos aquí, sino una descripción general para dar informe sobre lo realizado en esta etapa.

Para el diseño de esta prueba se tuvieron en cuenta los conceptos de ecuación lineal, representación de una ecuación lineal en el plano, sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, y representación de un sistema en el plano. A diferencia de la prueba realizada en la etapa de reconocimiento, se decidió plantear preguntas sobre estos conceptos, que permitieran ir construyendo el concepto SEL, teniendo en cuenta que está conformado por ecuaciones lineales. Además, evitamos los problemas que tuvieran que ver con sistemas sin solución, o infinitas

soluciones, porque pudimos evidenciar en la etapa de reconocimiento, que a pesar de que los métodos para resolver SEL son un contenido que se debió haber visto en grados de escolaridad anteriores, gran parte de los estudiantes no dieron respuesta a estos problemas.

5.3.1 Aplicación del cuestionario diagnóstico. Luego de la experiencia obtenida en la Etapa de reconocimiento, realizada en el segundo semestre del 2016, se tuvieron en cuenta ciertos aspectos para esta implementación. La investigación se siguió desarrollando en la Universidad Industrial de Santander, durante el primer semestre académico del año 2017. Los individuos elegidos, fueron estudiantes de Matemáticas, matriculados a la asignatura Álgebra Lineal I, que veían el curso por primera vez. Este curso a diferencia del elegido para la etapa de reconocimiento fue homogéneo. Para dar inicio al desarrollo de la implementación se decidió realizar una prueba diagnóstica, en la que participaron 31 estudiantes. Este instrumento diagnóstico contó con una prueba escrita presentada en el Apéndice B, los estudiantes contaban con 120 minutos para resolverlo.

5.3.2 Intención del diseño. A continuación, se presenta una descripción a cerca de la intención de cada una de las cinco preguntas planteadas en la prueba diagnóstica, así como los planteamientos que los estudiantes pueden presentar ante ellas. Como se describió anteriormente, no se espera hacer un análisis hipotético sobre los posibles razonamientos que un estudiante pueda realizar ante cada situación.

Pregunta 1

Dada la siguiente ecuación lineal de dos incógnitas, x e y :

$$3x + 2y = 3$$

- a. Dé un ejemplo de valores de x e y que satisfaga la ecuación. (Dé un ejemplo de valores de x e y que sean solución para esta ecuación) ¿Cuántos hay?
- b. En general, diga para qué valores de x e y se satisface la ecuación.
- c. Represente la ecuación en el plano cartesiano.
- d. Si el conjunto de todos los valores de x e y que satisfacen la ecuación (*estos valores se relacionan en una dupla, por ejemplo (1,2)*), se denomina **conjunto solución de la ecuación**, diga ¿cuál es el conjunto solución para esta ecuación?

En esta pregunta se presenta una ecuación lineal de dos incógnitas. En el inciso (a) se inicia preguntando por valores particulares que satisfagan la ecuación, y ya en el inciso (b) se pregunta en general por todos los valores. En el inciso (c) el estudiante debe relacionar la ecuación con su interpretación geométrica, con el fin de que pueda llegar a generalizar si no lo hizo en el inciso anterior, los valores que son solución de la ecuación. Por último, en el inciso (d) se le pide al estudiante luego de definir al conjunto solución de una ecuación, describir cuál es este conjunto.

En general se está preguntando por el conjunto solución de la ecuación, aunque se inicia preguntando en particular, como en el inciso (a), por los valores que la satisfagan que pueden ser finitos, la idea es que llegue a determinar en general que el conjunto solución de esta ecuación son duplas de la forma $(x, \frac{3-3x}{2})$.

Pregunta 2

Observe la siguiente ecuación:

$$4 = 3y + 5x$$

- a. Determine si las siguientes duplas satisfacen la ecuación: $(-1,3)$ y $(2,2)$

- b.** En general, ¿Qué duplas satisfacen la ecuación?
- c.** Multiplique por 3 la ecuación, ¿Qué obtiene?
- d.** Grafique la ecuación inicial y la obtenida en (c) ¿Qué puede concluir?

En este problema se presenta otra ecuación lineal, nótese que no están escritas de la forma $ax + by = c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, con el fin de que los estudiantes se acostumbren a trabajar a ambos lados de la igualdad. En el inciso **(a)** se dan unos vectores específicos para que el estudiante verifique si satisfacen la ecuación, y en el inciso **(b)** se pide describir en general las duplas que la satisfacen. En el inciso **(c)** el estudiante debe multiplicar por un valor la ecuación, la idea es que determine que corresponden a la misma ecuación, o que son equivalentes, si no logra responder esto, en el inciso **(d)** se pide graficar la ecuación inicial y la obtenida en **(c)**, con el fin de que concluya que, aunque se escriben diferente, los valores que la satisfacen son los mismos, por no decir que el conjunto solución es el mismo.

Esta situación, se planteó con el fin de introducir la noción de ecuaciones equivalentes, concepto que será importante en el momento de interpretar la solución de un sistema.

Pregunta 3

Dados las siguientes duplas:

$$(1,3), (-2,1)$$

- a.** Determinar la ecuación que tiene como solución a estas duplas.
- b.** Determine el conjunto solución de la ecuación.

En esta situación se pide al estudiante encontrar la ecuación que tiene como solución unas duplas dadas, para luego determinar el conjunto solución de esa ecuación. A diferencia de los problemas anteriores, se debe realizar un procedimiento inverso, dados unos puntos encontrar la

ecuación. Aunque en este problema, la cuestión parece convertirse en una situación que sería común en la asignatura de Cálculo, para hallar la pendiente y el corte con el eje y , de la recta que contiene a estas duplas para así encontrar la ecuación $y = mx + b$, lo importante que resulta aquí es que los estudiantes logren identificar que cuando se está trabajando en dos dimensiones, las formas gráficas que se pueden encontrar son rectas, y además que como se pide en el inciso **(b)**, logren relacionar las soluciones como una dupla de la forma $(x, f(x))$.

Pregunta 4

Se tiene la siguiente ecuación lineal:

$$x + \frac{1}{3}y = 2$$

- a. Escriba el conjunto solución de esa ecuación.
- b. Grafique la ecuación.

Ahora, tenga en cuenta la siguiente ecuación:

$$2y + 4x = 6$$

- c. Escriba el conjunto solución de esta ecuación.
- d. Grafique la ecuación en el mismo plano que graficó la primera ecuación.
- e. ¿Qué tienen en común las gráficas de ambas ecuaciones?
- f. Escriba las duplas que son común entre ambas ecuaciones.
- g. Escriba el conjunto solución del conjunto o sistema de ecuaciones lineales, formado por ambas ecuaciones.

En esta situación, se introduce la noción de SEL, agregando otra ecuación a una inicialmente planteada. En los incisos **(a)** y **(b)** se pide describir el conjunto solución y realizar la gráfica de la

ecuación definida inicialmente. Los incisos **(c)** y **(d)** corresponden a una segunda ecuación, hasta el momento se pide hacer lo mismo que con la ecuación inicial. A partir del inciso **(e)** las preguntas tienen que ver con la relación entre las ecuaciones, en cuanto a gráfica, duplas en común y conjunto solución entre las ecuaciones.

La finalidad de esta situación es introducir la noción de SEL, de tal forma que se viera el SEL, como un conjunto de ecuaciones, y por lo tanto, la solución a este conjunto debe ser solución para cada una de las ecuaciones.

Pregunta 5

Las rectas que se muestran a continuación están representando las gráficas de tres ecuaciones lineales.

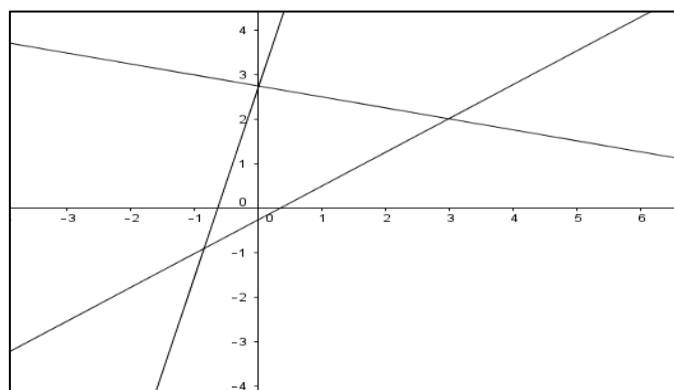


Figura 23. Problema planteado en Prueba Diagnóstica inicial.

a. Describa con sus palabras el sistema de ecuaciones lineales representado.

b. ¿Qué tipo de solución tiene el sistema? ¿Por qué?

c. ¿Se puede describir un sistema de ecuaciones lineales con 2 soluciones? Si

es así realice una representación geométrica del mismo.

Se presenta esta situación con el fin de evidenciar si la noción de conjunto solución de un conjunto de ecuaciones ha sido comprendida por el estudiante. A fin de esto, se presentan tres

rectas correspondientes a tres ecuaciones de dos variables que se están intersecando dos a dos, a diferencia de los problemas anteriores no se presenta, ni se pide una respuesta algebraicamente, por el contrario, se quiere que analicen y logren concluir con palabras, para crear un ambiente más reflexivo.

En el inciso **(a)** se pide describir en palabras el SEL que está representado geométricamente en la figura 23, y el inciso **(b)** tiene que ver con el tipo de solución del sistema anteriormente descrito (única, infinitas, o sin solución). En caso de que el estudiante responda en el inciso **(b)** no con el tipo de solución, sino con la cantidad de soluciones, que en este caso y a pesar de ser un error, la respuesta más oprobada sería tres, se planteó la pregunta del inciso **(c)**. Esta pregunta tiene la finalidad de que el estudiante pueda pensar acerca de si es posible encontrar un sistema con exactamente dos soluciones, así como se pudo encontrar uno con tres. Igualmente, para el caso de que haya respondido que no tiene solución, pero no haya dado una razón, la pregunta del inciso **(c)** aparece con la firme intención de poner a reflexionar al estudiante o de poner a prueba a ensayo y error, cómo sería posible encontrar un sistema con esa cantidad exacta de soluciones.

5.4 Actividades de clase

Después de la aplicación de la prueba diagnóstica, se llevaron a cabo una serie de sesiones, en donde se desarrollaron las temáticas necesarias para la construcción de los SEL, y los contenidos relacionados con él, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador y base.

Las actividades de clase se desarrollaron en la sala de cómputo, principalmente para ahorrar el papel que se pudiera gastar, más no porque las actividades estuvieran enfocadas en el trabajo con

formas gráficas directamente, aunque para los estudiantes fue libre la elección en cuanto a esto. Con el fin de incentivar la participación a estas sesiones, la docente titular, decidió establecer un porcentaje de la nota del curso, para que los estudiantes asistieran. Se llevaron a cabo ocho sesiones sin incluir las de la aplicación de la prueba diagnóstica inicial y la final. El fin de estas sesiones fue abordar los conceptos en primera instancia, que consideramos prerequisite en la Descomposición Genética, necesarios para la construcción de los SEL, y que no fueron evidenciados en la prueba diagnóstica inicial. Durante estas sesiones, se fueron presentando una a una, diapositivas en Power Point, con preguntas y problemas como se describirán a continuación, donde los estudiantes tenían que discutir sobre cada una de ellas. Cuando los estudiantes iniciaron estas sesiones, aún no habían iniciado el estudio de los SEL en el curso regular.

Se inició con el estudio de las ecuaciones lineales, planteando preguntas como ¿Qué es una ecuación lineal y cuál es su solución?, ¿Qué ocurre si sumo dos ecuaciones lineales, o si la multiplico por un número? en cuanto al conjunto solución entre las ecuaciones involucradas. Esto con el fin de empezar a crear consciencia sobre lo que sucede cuando se realizan operaciones elementales para transformar la matriz asociada a un sistema, en los métodos comúnmente empleados en los cursos de Álgebra Lineal, para resolver problemas de SEL. A partir de ello se propusieron SEL, que llevaran a matrices reducidas con filas de cero, o con inconsistencias de la forma $0 = r$, $r \in \mathbb{R}$, preguntando por las implicaciones que tenían sobre el sistema. Además, como se empezó a trabajar con sistemas de dos variables, y los estudiantes crearon relaciones con funciones de dos variables, se pudo hacer uso de las formas gráficas, pudiéndose abarcar el problema en un entorno gráfico. Se debe aclarar que estas relaciones no se forzaron, sino que se fueron dando durante las discusiones de clase.

Algo importante en este punto, es que, para poder hablar de los sistemas de manera general, en el momento de usar la representación matricial de un SEL, también se describió como una ecuación matricial. Esto, con el fin de que pudieran relacionar por ejemplo que si un sistema $Ax = b$, también es una ecuación, se podría “despejar” la variable x como se hace en los reales, pero a diferencia de los números reales, este procedimiento implica que la matriz A , tenga inversa y esto llevaría a otras cuestiones que tienen que ver, por ejemplo, con que la matriz A sea cuadrada, o el uso del determinante para determinar si esa matriz es invertible. En las sesiones no se ahondó sobre estos temas, puesto que, para ese entonces en el aula de clase ya los habían abordado.

Se trabajaron casos particulares, como los sistemas homogéneos, describiendo las características que se pudieran encontrar, como que siempre van a tener solución. También se empezaron a proponer problemas con SEL, que tuvieran valores indeterminados con el fin de que los estudiantes pudieran darle condiciones a estos, para que se cumpliera algo, como el caso que se describe a continuación:

Considere el sistema:

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = a$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = b$$

$$3x_1 + 7x_2 - 5x_3 = c,$$

Demuestre que el sistema es inconsistente si y sólo si $c \neq 2a - b$.

Después de esto, se preguntó por la relación entre las soluciones de los diferentes SEL que ya se habían abordado, con el fin de que se dieran cuenta de que se trataban de “ $n - uplas$ ” o de

vectores. Luego de esto, y aprovechando que los vectores son elementos de un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, se pidió realizar operaciones entre los vectores como suma, multiplicación por escalar y combinados, con el fin de ir introduciendo el concepto de combinación lineal. Esta introducción presentó cierta dificultad para muchos, puesto que, por ejemplo, si querían averiguar si un vector u , era combinación de otros vectores v, w , los estudiantes querían resolverlo a ensayo y error, y esta forma no resultaba ser tan directa. Se tuvieron que presentar más ejercicios, con el fin de que se dieran cuenta que era un desgaste, intentar resolverlo a ensayo y error, y que la mejor forma para dar solución a este tipo de problema, era encontrando el conjunto solución del sistema que se formara al considerar los coeficientes de la combinación lineal. Se plantearon preguntas como,

¿Cómo saber si un vector w , por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ era combinación lineal de otros vectores $u =$

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$?, para que llegaran a considerar que lo que necesitaban era demostrar la

existencia de los coeficientes, c_1 y c_2 , que dieran solución a la ecuación vectorial $c_1u + c_2v = w$.

Luego de esto y como se siguió trabajando con vectores en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, se aprovechó para introducir la noción de vectores linealmente dependientes e independientes, como vectores no colineales, en el caso de $\mathbb{R}^2$. Cabe aclarar que esta característica fue descrita por los estudiantes y no fue impuesta por la investigadora, además en el transcurso de las sesiones, los estudiantes fueron conscientes que no todos los vectores se iban a poder interpretar gráficamente como en el caso de los vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Añadido a esto, nos apoyamos de los sistemas homogéneos, para llegar a la definición de vectores linealmente dependientes e independientes. En estos casos, los estudiantes eran libres de usar el software graficador de matemáticas, si lo deseaban.

Al hablar del conjunto de las combinaciones lineales, se dio paso a la noción de espacio generado, en este tipo de problemas se invertía el asunto de encontrar los coeficientes que aseguraran que un vector era combinación lineal de otros, a encontrar todos los vectores que surgían de realizar todas las combinaciones posibles entre un conjunto de vectores. Un ejemplo de esto se da a continuación: Determinar el generado de los vectores, $u = (1,2,3)$, $v = (2,3,1)$, esto da como resultado los elementos del conjunto $\{su + tv : s, t \in \mathbb{R}\}$, pero ¿Qué sucede geoméricamente con esto? La respuesta es que se genera un plano, pero ahora ¿Qué debe ocurrir si lo que quiero generar es todo el espacio?, pues otro vector, pero ¿Qué características debe tener? Estas preguntas se hicieron con el fin de introducir el concepto de Base. Luego de esto se describieron las características de un conjunto, para que formaran una Base de un espacio correspondiente. Aproximadamente, ya era la sexta sesión, y como ya se habían abordado todos los conceptos que se planearon, se continuó con problemas que fueran más retadores. Por ejemplo, se pedía al estudiante que, sin realizar cálculos respondiera ¿Cómo se puede garantizar que dos vectores en el espacio forman una base?, por ejemplo, con el fin de indirectamente hablar de la dimensión de un espacio. También se propusieron problemas con espacios diferentes a $\mathbb{R}^n$, como lo fueron los polinomios ahondando en los temas vistos, combinación lineal, dependencia e independencia lineal, espacio generado y base, y generando discusión sobre la existencia de estos.

Pese a que la asistencia a las sesiones representaba un porcentaje en la nota final del curso de Álgebra, menos de la mitad de los estudiantes llegaron hasta el final de las sesiones. Aún así, se pudieron detectar ciertos estudiantes con los cuales se pudieran llevar a cabo las entrevistas que se tenían previstas.

5.5 Prueba Diagnóstica Final

El objetivo de esta prueba fue determinar los estudiantes que participarían en la entrevista, mediante el tipo de construcciones que habían realizado sobre el concepto de SEL. Como base se toma la descomposición genética preliminar, descrita en la sección Análisis Teórico, buscando determinar estudiantes que tuvieran los elementos previos necesarios para la construcción del concepto SEL. Así, se espera que con la realización de la entrevista podamos enriquecer el análisis teórico descrito, y poder presentar conclusiones acerca del camino más certero para la construcción del concepto SEL.

Para la realización de esta prueba se tuvo en cuenta la descomposición genética, los textos guías usados por el profesor titular en la clase y la experiencia personal de las investigadoras.

5.5.1 Aplicación de la prueba diagnóstica final. Esta prueba fue realizada al grupo descrito en la aplicación de la prueba diagnóstica inicial, luego de terminar el proceso de aplicación de las actividades de clase, aunque sólo asistieron 13 de los 31 estudiantes que presentaron la prueba inicial. De los 13 estudiantes, sólo 9 asistían regularmente a clase, y los demás habían faltado la mitad de las sesiones, y asistieron para que la nota que recibieron por la participación a las sesiones no fuera tan baja, hecho que fue afirmado por algunos de ellos. El instrumento se aplicó a cada uno de los estudiantes en la sala de cómputo, donde podían usar el computador libremente para usar algún software de geometría para graficar alguna situación, o usar una calculadora online para resolver un SEL. La prueba fue escrita, y los estudiantes contaban con 2 horas para desarrollarla. La prueba se encuentra en el Apéndice C.

5.5.2 Intención del diseño y análisis hipotético de la construcción del concepto. A continuación, se presenta la intención de cada una de las ocho preguntas planteadas en la prueba

diagnóstica, además del análisis hipotético de las posibles respuestas y planteamientos que los estudiantes pueden presentar ante ellas.

Pregunta 1

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, encuentre los valores para k , de tal forma que el sistema tenga única solución. Explique su respuesta.

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k - 2)x_3 = 2 \end{cases}$$

En este problema se plantea un SEL, y se pide encontrar unos valores “ k ” de tal forma que el sistema posea única solución. Con este problema se busca determinar si un estudiante puede solucionar un problema donde no sólo deba resolver un SEL, usando algún método de resolución, sino que analice la situación para darle solución.

A continuación, se presenta un análisis hipotético desde nuestro marco teórico, de los posibles razonamientos que un estudiante puede realizar frente a esta situación:

- Un estudiante con una concepción Proceso de SEL usando la representación matricial, podrá analizar lo que resulta de reducir la matriz asociada al sistema, los coeficientes, y reescribiendo el sistema para así descartar valores de “ k ” y determinar cuándo el sistema tiene única solución.
- Por otra parte, es posible que el estudiante teniendo en cuenta que el sistema es cuadrado use un resultado teórico, para determinar qué valores de k hacen que el sistema tenga única solución, es decir cuándo el determinante de la matriz de coeficientes es diferente

de cero. Para esto es necesario que el estudiante posea una concepción Proceso del concepto SEL, usando los determinantes.

Aunque este problema puede ser abordado de manera mecánica, se espera encontrar evidencias de la construcción del concepto SEL, en una estructura Proceso, ya sea usando la representación matricial o haciendo uso de un resultado teórico.

Pregunta 2

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \\ ex + fy = 0 \end{cases}$$

Describa la posición de las rectas, para que:

- a. El sistema solamente tenga la solución trivial
- b. El sistema tenga soluciones no triviales

En este problema se busca determinar si los estudiantes pueden pensar en la solución de un sistema, en este caso homogéneo, de manera general sin valores específicos para los coeficientes.

En los incisos **(a)** y **(b)**, un estudiante con una concepción proceso de la representación matricial de un SEL, y una concepción Proceso de la interpretación geométrica, puede *coordinar* estos Procesos para determinar la posición de las rectas correspondientes a cada una de las ecuaciones del sistema, de tal forma que cumpla con cada una de las condiciones, y además teniendo en cuenta el tipo de sistema empleado, homogéneo.

Se espera encontrar evidencia de esta construcción, puesto que pone en interacción dos Procesos importantes, y que son trabajados comúnmente en el aula de clase.

Pregunta 3

Sean a, b, c coeficientes reales. Describe cómo interpretarías geométricamente, para cada forma escalonada de las matrices C, A, B , que representan sistemas de ecuaciones lineales, dadas de la siguiente manera:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

En este problema, se espera que el estudiante analice a partir de la matriz reducida de tres sistemas distintos, de tres ecuaciones y tres variables, cómo sería la interpretación geométrica de cada uno de estos sistemas.

Un estudiante con una concepción Proceso de los SEL, como resultado de la *coordinación* entre los Procesos representación matricial de un SEL y la interpretación geométrica de un SEL, logra describir para cada una de las matrices reducidas, cómo sería la interpretación de cada uno de los sistemas, de forma gráfica.

En este problema el estudiante podría hacer uso de un software de geometría, por ejemplo, para el caso de la matriz C , dados $a = b = 0$, graficando a $x = 0$, como un plano que pasa por el origen, y así con otros valores para a y b , pero que al fin de cuentas es un plano que pasa por el origen. Pero el hecho de que sólo grafique un plano no implica que se trate de una ecuación, sino que las otras dos ecuaciones correspondientes a las filas de ceros corresponden a ecuaciones que son múltiplo escalar de la primera.

Pregunta 4

¿Cómo le explicarías a un compañero cuál es la diferencia entre conjunto generador y espacio generado? Si lo consideras necesario, utiliza un ejemplo.

En este problema se plantea una pregunta con el fin de determinar si los estudiantes entienden la diferencia entre estos dos conceptos que siempre tuvieron inconvenientes en las sesiones de clase en cuanto a interpretación. Aquí no se espera una respuesta que esté asociada a la construcción de los SEL, esta pregunta sólo es de tipo informativo para las investigadoras, y además para dar paso a la siguiente pregunta que ya no sólo aborda a los SEL, sino que empieza a desempeñar un papel importante, en la construcción de otros conceptos.

Pregunta 5

Establece la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a. $B = \text{Gen}\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,2)\}$ tiene la misma cantidad de elementos que $C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,2)\}$, justificando tu respuesta.
- b. El vector $(2, -3)$ pertenece al espacio generado por $B = \{(1,0), (0, -1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

Este problema fue propuesto con el fin de determinar si los estudiantes pueden pensar en el generado por un conjunto de vectores sólo por los elementos que lo componen, o por las combinaciones que se pueden generar a partir de sus elementos, espacio generado. Además de verificar si usan los SEL, como herramienta para darle solución a un problema de determinar si un elemento pertenece a un espacio generado dado.

- En el inciso **(a)** es importante que el estudiante tenga en cuenta la diferencia entre el generado por un conjunto de vectores, que es lo mismo que el espacio generado, a un conjunto formado solamente por los elementos que generar, conjunto generador. Pensamos que algunos estudiantes pueden a simple vista determinar que tiene la misma

cantidad de elementos, porque no tienen en cuenta esta diferencia, pero esperamos que logren establecer que mientras el conjunto C , sólo tiene tres elementos, el conjunto B tiene infinitos, puesto que corresponde a las combinaciones lineales que se deriven de esos tres elementos. En este caso no se espera evidenciar alguna *concepción* para el concepto SEL.

- En el inciso **(b)** es posible que sin necesidad de realizar ninguna acción el estudiante determine que el vector $(2, -3)$ pertenece al espacio generado por los elementos del conjunto B . En este caso se puede evidenciar una concepción Proceso del concepto combinación lineal, que permite establecer al vector $(2, -1)$ como una combinación lineal entre los elementos del conjunto B , y por lo tanto pertenecer al espacio generado por esos elementos. Aunque pareciera que los SEL no están presentes en la solución de este problema, aparecen para darle solución al sistema que se produce al establecer la siguiente igualdad: $\alpha(1,0) + \beta(0, -1) = (2, -3)$.

Pregunta 6

Sean u, v, w tres vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$, $u = (1, -3, 0)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (0, 2, 1)$

- ¿Estos puntos son colineales? ¿Por qué? ¿Estos vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes? ¿Por qué?
- ¿Qué generan estos vectores?

Este problema plantea tres vectores en $\mathbb{R}^3$, y se pregunta si son colineales, si son linealmente dependientes o independientes, y por lo que generan.

- El inciso **(a)** tiene dos preguntas, la primera se planteó con el fin de determinar si los estudiantes pueden establecer si los vectores dados son colineales, es decir pertenecen a la misma línea recta. Este hecho tanto en $\mathbb{R}^2$ como en $\mathbb{R}^3$, tienen como implicación que los vectores son linealmente dependientes, pero esta característica no es la única para determinar si los vectores son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$. Por eso, en la siguiente pregunta se cuestiona directamente si los vectores son linealmente dependientes o independientes.
- En el inciso **(b)** se pregunta por lo que generan los tres vectores dados, se espera que los estudiantes establezcan las combinaciones lineales entre los vectores dados y encuentren el espacio generado.

En general este problema muestra la importancia de la combinación lineal en conceptos como dependencia e independencia lineal, y espacio generado. Los SEL en este caso, desempeñan un papel fundamental al momento de tomar una decisión sobre si el conjunto de vectores es linealmente dependiente e independiente, o para describir el conjunto que generan. Por ejemplo, para establecer cuál es el generado de los vectores u, v, w se plantea la siguiente igualdad, entre la combinación de los vectores u, v, w y el vector (x, y, z) , que va a representar a los vectores que se generen, con α, β, γ números reales:

$$\alpha(1, -3, 0) + \beta(1, -1, 1) + \gamma(0, 2, 1) = (x, y, z)$$

De la cual resulta el siguiente SEL:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ -3\alpha - \beta + 2\gamma = y \\ \beta + \gamma = z \end{cases}$$

Reduciendo la matriz asociada al sistema, con operaciones elementales, se obtiene la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 3x + y - 2z \end{array} \right)$$

Hasta el momento sólo se ha realizado la acción de reducir la matriz asociada del sistema, en búsqueda de su solución, pero se llega a la siguiente situación: $0 = 3x + y - 2z$, lo cual implica que el estudiante deba reflexionar sobre este hecho. En primera instancia, el sistema descrito de esta forma sería inconsistente, pero esto no es posible ya que en este tipo de situaciones, los vectores siempre van a generar algo, por lo menos al vector $(0,0,0)$, cuando $\alpha = \beta = \gamma = 0$ así que para que esto tenga sentido se deben tener en cuenta únicamente los vectores que están en el plano $0 = 3x + y - 2z$, es decir, vectores de la forma $(x, 2z - 3x, z)$.

Para que un estudiante pueda realizar este análisis debe tener una concepción Objeto del concepto combinación lineal, y además una concepción Proceso del concepto SEL, resultado de la *coordinación* entre los Procesos de SEL, usando la representación matricial y vector. En este caso, encontrar la solución de este SEL, se vuelve una tarea importante para la resolución de este problema.

En el caso de determinar si el conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente, se plantea la siguiente igualdad, con α, β, γ números reales:

$$\alpha(1, -3, 0) + \beta(1, -1, 1) + \gamma(0, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

Del cual resulta el siguiente SEL:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -3\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Y luego de reducir la matriz asociada al sistema, se obtiene la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Un estudiante con una concepción Objeto de la combinación lineal y una concepción Proceso de los SEL, resultado de la *coordinación* entre los Procesos de SEL usando la representación matricial, y vector, podrá concluir que el sistema tendrá infinitas soluciones puesto que la variable β dependerá de la variable γ , y por ende la variable α , también. De esta manera, se obtendrán valores para α, β, γ , $(\gamma, -\gamma, \gamma)$ respectivamente, llevando a que no sólo exista la solución trivial, y así los vectores sean linealmente dependientes.

Pregunta 7

Sean $v_1 = (6, -3, 1)$, $v_2 = (2, -1, 1)$, $v_3 = (-2, 1, -4)$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$. Para cualquier combinación lineal de la forma: $x(6, -3, 1) + y(2, -1, 1) + z(-2, 1, -4) = (0, 0, 0)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, la representación geométrica del sistema resultante, es la siguiente:

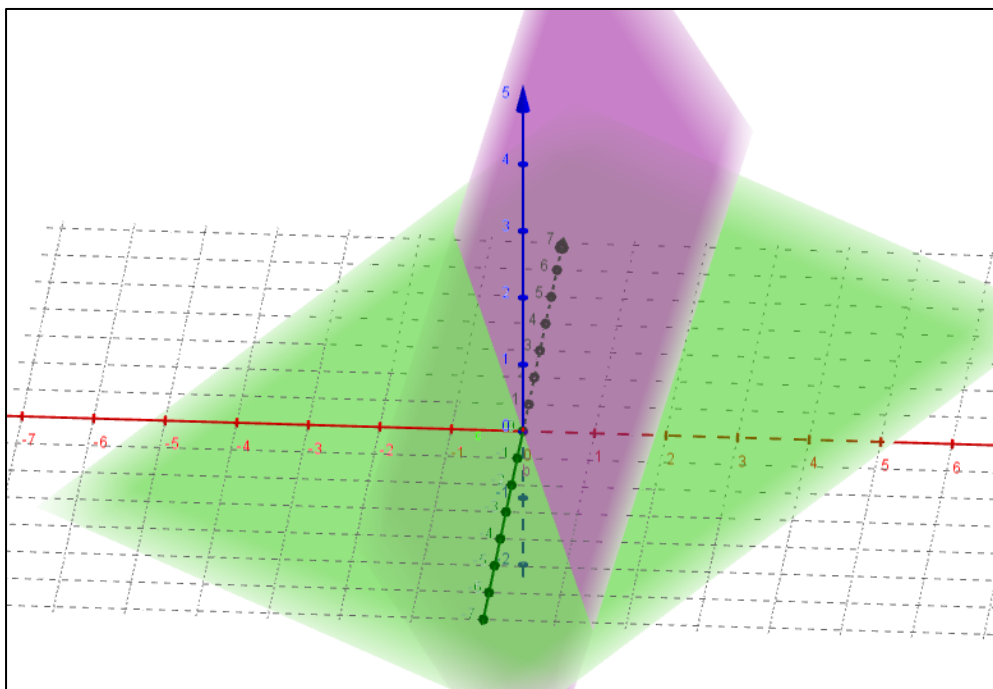


Figura 24. Problema 7 de la Prueba Diagnóstica Final.

- a. ¿Cuál es la solución del sistema? Justifique su respuesta.
- b. ¿El conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente? Justifique su respuesta.

Este problema se presenta con el fin de poder determinar si los estudiantes, sin necesidad de realizar operaciones a un sistema propuesto logran hablar de su conjunto solución, sólo con analizar la representación gráfica del mismo. Además, el inciso **(b)** se plantea con el fin de poder evidenciar relaciones entre los SEL y la independencia lineal.

No se podrá determinar la solución del sistema observando únicamente su representación geométrica, ya que se tendría que encontrar los vectores que son solución para ambos planos, es decir lo que están en la intersección, pero a simple vista esto no es posible, a lo más se podrá decir que están en una recta. Por lo tanto, para encontrar la solución a este sistema se debe usar algún método para resolver el sistema resultante de la igualdad: $x(6, -3, 1) + y(2, -1, 1) +$

$z(-2, 1, -4) = (0, 0, 0)$. Realizando operaciones elementales a la matriz asociada del sistema se obtendrá la siguiente matriz: (no es necesario llevarla a una forma reducida escalonada, basta con su forma escalonada)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Se espera que el estudiante pueda sustituir de para atrás el sistema resultante y encuentre la solución del sistema, la cual corresponde a los vectores de la forma: $(-\frac{3z}{2}, \frac{11z}{2}, z)$, y que corresponden a todos los puntos que están en la recta formada por la intersección entre los planos. Pero este hecho ¿Qué significa para los vectores v_1, v_2, v_3 ? Por esta razón se planteó la pregunta del inciso **(b)**. Se espera que el estudiante, sin tanta presión, pueda concluir que como este problema fue planteado con el fin de determinar si los vectores v_1, v_2 y v_3 son o no linealmente independientes, como la solución a la igualdad fueron los vectores de la forma $(-\frac{3z}{2}, \frac{11z}{2}, z)$, los vectores v_1, v_2, v_3 , no son linealmente independientes, puesto que la igualdad no se cumple únicamente cuando $x = y = z = 0$.

Un estudiante con una concepción Proceso del concepto SEL, usando la interpretación geométrica, podrá determinar que la solución de ese sistema tiene infinitos elementos, que corresponden a todos los puntos que forman la recta de intersección entre los planos. Pero para poder hablar de la solución, y no sólo del tipo de solución, el estudiante debe tener una concepción Proceso de los SEL, resultado de la *coordinación* entre los Procesos de SEL, usando la interpretación geométrica y la representación matricial.

Además, para hablar de la independencia o dependencia lineal de los vectores v_1, v_2, v_3 , el estudiante tendrá que ser consciente que, por la forma como se planteó el problema, al establecer

la igualdad entre la combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3 y el vector nulo, $(x(6, -3, 1) + y(2, -1, 1) + z(-2, 1, -4) = (0, 0, 0))$ se estaba abordando un problema de dependencia e independencia lineal. Para que esto suceda, el estudiante debe tener una concepción Objeto del concepto combinación lineal, que le permita ser consciente que al igualar estos vectores se están analizando todas las alternativas de solución, que en este caso, permitirán establecer si el conjunto de vectores es o no linealmente independiente.

Pregunta 8

Pruebe si el siguiente conjunto de vectores forma una base ortogonal para $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Antes de dar paso al último problema se dejó la siguiente definición de base ortogonal: Una base, es una base ortogonal de un espacio, si el producto escalar o producto interno, dos a dos entre los vectores que la conforman es igual a cero.

En este problema se busca involucrar los conceptos de Independencia lineal, Espacio generado, Combinación lineal, Base y SEL. Se espera que los estudiantes comprueben todas las condiciones tanto para que el conjunto sea una base, como una base ortogonal, es decir que realicen las acciones necesarias para comprobar que los elementos del conjunto son linealmente independientes y además generen todo $\mathbb{R}^3$, y luego comprueben si el producto escalar es igual a cero.

A pesar de que la definición podría ser una distracción al definir una base ortogonal, como una base que cumple cierta condición, es decir, es probable que los estudiantes no recurran a comprobar primero si el conjunto formado una base para el espacio, se espera que un estudiante

con una concepción Objeto de la combinación lineal y una concepción Proceso de los SEL, logren determinar si el conjunto cumple con las condiciones para ser una base del espacio. El hecho de determinar si la base es ortogonal, sólo es una excusa para incluir este problema en el cuestionario.

5.6 Entrevista

Después de la aplicación de la prueba diagnóstica final se decidió entrevistar a aquellos estudiantes que daban evidencias de haber iniciado la construcción del concepto SEL, y además argumentaban sus respuestas. El objetivo de esta entrevista fue determinar la validez de las hipótesis planteadas en la prueba diagnóstica final sobre las construcciones mentales que los estudiantes realizan mediante los mecanismos mentales para la construcción del concepto SEL, y su importancia en la construcción de otros como: combinación lineal, dependencia e independencia lineal, espacio generado y base. Se espera con este instrumento encontrar más información sobre la concepción Proceso del concepto SEL, también sobre su relación con los otros conceptos mencionados, y además de identificar comportamientos que permitieran caracterizar otra estructura, si se diera el caso, como lo es la estructura Objeto del concepto en cuestión. Así mismo, como se considera que para la construcción de conocimiento un individuo debe realizar conexiones con conceptos previos y aquellos que se van construyendo de manera paralela, se espera que los datos obtenidos tanto en este instrumento como en la prueba diagnóstica final, también permitiera dar cuenta de elementos sobre la construcción del Esquema de SEL y sus niveles de evolución.

5.6.1 Aplicación de la entrevista. Para la aplicación de este instrumento, se seleccionaron 5 de los 13 estudiantes que fueron analizados en la prueba diagnóstica final, los estudiantes que se

llaman con las expresiones EEJ, EJS, EK, EE, EJC (E#: Estudiante-inicial de su nombre). Se aplicó la entrevista durante la última semana del mes de julio del año 2017, en una de las oficinas de la Universidad Industrial de Santander durante un tiempo aproximado de dos horas con cada estudiante. Las cinco preguntas que fueron diseñadas se iban dando una a una al estudiante, el cual contaba con un block de hojas y un lápiz para escribir el desarrollo de sus soluciones. Las entrevistas fueron grabadas por una cámara de video que estaba fijada a la hoja de trabajo del estudiante. Además, se aprovechó este espacio para realizar preguntas, si las había, sobre la prueba diagnóstica final, con el fin de evidenciar razonamientos que no se podían resaltar de la hoja de papel. Las preguntas de la entrevista se encuentran en el Apéndice D.

5.6.2 Intención del diseño y análisis hipotético sobre la construcción del concepto. En este análisis se considera de manera hipotética los posibles caminos que un estudiante puede tomar al momento de enfrentarse a cada una de las cinco situaciones diseñadas para la entrevista. Además, se explican las posibles construcciones que pueden haber realizado sobre el concepto de SEL, en términos de la descomposición genética hipotética y las posibles relaciones que pueden establecer con otros conceptos.

Pregunta 1

Considere el siguiente conjunto $F = \{1, x^2, x^2 + 2\}$ de vectores en $P_2(\mathbb{R})$.

a. ¿Este conjunto es linealmente independiente o linealmente dependiente?

En este problema se considera un reto para los estudiantes el cambio de espacio, pero se espera que con la experiencia obtenida en las actividades de clase y el desarrollo del cuestionario diagnóstico, el estudiante pueda sin mayor dificultad verificar si los vectores son o no linealmente independientes. Es necesario que el estudiante sea consciente de la forma de los

vectores del espacio mencionado, polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 2, $(ax^2 + bx + c)$, para que pueda dar respuesta al interrogante.

Se cree que al leer el problema el estudiante podrá pensar de manera inmediata que las combinaciones lineales de los vectores de este conjunto son de la forma: $\alpha(1) + \beta(x^2) + \gamma(x^2 + 2)$, con α, β y $\gamma \in \mathbb{R}$. Además, si desea saber si el conjunto F es linealmente dependiente o independiente, tendrá que encontrar cuáles son las combinaciones lineales que dan como resultado al vector nulo, es decir, tendrá que establecer la siguiente igualdad: $\alpha(1) + \beta(x^2) + \gamma(x^2 + 2) = 0x^2 + 0x + 0$.

El estudiante podría ser consciente de que para determinar cuáles son los valores de α, β y γ , que hagan posible la igualdad a ensayo y error, podría ser bastante extenso el trabajo, y que debería tratar todas las combinaciones en general, empezará generando un sistema como el que se muestra a continuación:

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

al cual se le puede asociar una matriz de coeficientes, como se muestra a continuación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

El estudiante podrá determinar haciendo sustitución de para atrás que la solución a este problema, es decir que los valores para α, β, γ , que dan como resultado en la combinación lineal al vector nulo, tienen la forma $(2\beta, \beta, -\beta)$, y por lo tanto no sólo existe una, que se esperaría para que los vectores fuesen linealmente independientes, concluyendo así que el conjunto es linealmente dependiente.

Un estudiante con una concepción Objeto del concepto Combinación lineal, podrá realizar la igualdad $\alpha(1) + \beta(x^2) + \gamma(x^2 + 2) = 0x^2 + 0x + 0$, y considerar todos los casos de α, β, γ , que tengan como resultado al vector nulo, es decir planteará el sistema respectivo, y de acuerdo a la solución de este podrá dar respuesta a la pregunta. Si plantea la igualdad, pero no es consciente de lo que sigue, o se queda probando a ensayo y error hasta que encuentre los valores de α, β y γ respectivos, se podrá pensar que tiene una concepción Proceso del concepto Combinación Lineal.

Los SEL, siguen siendo una herramienta fundamental para dar solución a problemas de dependencia e independencia lineal, que además involucra directamente al concepto combinación lineal, por lo que se hace necesario que además de tener una concepción Objeto del concepto combinación lineal, tenga una concepción Proceso del concepto SEL.

Pregunta 2

Sean $v_1 = (1, -2, k)$ y $v_2 = (-2, 7, -k)$. Determine para qué valores de k , el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$. ¿Es posible que sea una base para $\mathbb{R}^3$?

Este problema se presenta intencionalmente con el fin de evidenciar qué tan buena es la interpretación de un enunciado que, a primera vista es muy común en los problemas planteados en Álgebra lineal, dados unos vectores, determinar si forman una base para un espacio dado. Se espera que luego de interpretar el enunciado, haya sospechas y sin antes de afirmar lo más evidente, que sería decir que cuando $k = 0$ los vectores podrían ser una base para $\mathbb{R}^2$, se den cuenta que no es posible que vectores de un espacio diferente a $\mathbb{R}^2$, sea base para este. Se sospecharía de una concepción Acción del concepto combinación lineal, y también del concepto SEL, por un lado, por el hecho de usar la igualdad entre la combinación de los vectores v_1 , y v_2 y

el vector nulo, para verificar si los vectores son linealmente independientes, o igualarlo a un vector (x, y, z) , para verificar si generan a $\mathbb{R}^2$; por otro lado, por usar algún método de resolución de SEL, sólo por el hecho de leer en el enunciado determine si es una base.

Pregunta 3

¿Para qué valores del número real a , los vectores $(a, 1, 0)$, $(1, 0, a)$ y $(1 + a, 1, a)$ constituyen una base para $\mathbb{R}^3$?

Este problema al igual que el anterior presenta un valor a que debe ser determinado para que el conjunto de vectores sea base para el espacio $\mathbb{R}^3$. El estudiante podría asignarle valores particulares a a y luego revisar si es base para $\mathbb{R}^3$, con suerte encontrar un caso particular y finalizar. Pero este problema no tiene solución, es decir, a ensayo y error no es posible determinar un valor de a que haga que el conjunto de vectores sea base para el espacio. Por lo tanto, será obligatorio que plantee la igualdad entre la combinación lineal $\alpha(a, 1, 0) + \beta(1, 0, a) + \gamma(1 + a, 1, a)$ y el vector nulo y un vector (x, y, z) , para determinar con cuáles valores de a el conjunto de vectores es linealmente independiente y además si generan al espacio, respectivamente.

Además de tener una concepción Objeto del concepto combinación lineal, con el cual pueda determinar de manera general todas las combinaciones lineales y poder determinar si existe algún valor a , que cumpla con lo pedido, el estudiante debe tener además una concepción Proceso de los SEL, para poder concluir luego de usar alguno de los métodos para resolver SEL, si es posible encontrar valores de a , que cumplan con lo pedido.

Pregunta 4

De los siguientes conjuntos de vectores, ¿Cuáles son base para el espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$?

a) $\{t^2 + 1, t - 1, t + 1\}$

b) $\{t^2 + 1, t - 1\}$

c) $\{t^2 + t, t^2, t^2 + 1\}$

Con este problema se espera que el estudiante determine cuál de los conjuntos mencionados podría ser una base para el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a dos. El estudiante podría a simple vista descartar el conjunto del inciso **(b)** porque no cumple con la cantidad de elementos necesarios para generar el espacio definido. Por otro lado, tanto en el inciso **(a)**, como en el **(c)** el estudiante podría cuestionarse si el hecho de que uno de los elementos de cada uno de los conjuntos tiene la variable t , es garantía para asegurar que sí podría ser una base para el espacio dado. Al igual que el problema descrito en la **Pregunta 1** de la entrevista, se está trabajando sobre un espacio diferente al acostumbrado, $\mathbb{R}^n$, y esto podría mostrar características interesantes en cuanto a cómo abordarían el problema los estudiantes. Como se ha descrito en los problemas anteriores, donde se debe decidir si un conjunto de vectores es o no base para un espacio, en este problema se podría esperar lo mismo. Una concepción Proceso de los SEL, que permita decidir si un conjunto de vectores es linealmente independiente y, además generen todo el espacio. También es necesario que el estudiante tenga una concepción Objeto de la combinación lineal, con la que se pueda asegurar todas las combinaciones lineales, y también permita decidir cuál o cuáles de los conjuntos es base.

Hasta el momento se ha hecho énfasis en identificar si un conjunto dado es base para un espacio dado. A continuación, se plantea un problema en donde el conjunto a generar implica una restricción importante.

Pregunta 5

Sean $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ y $H = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$. ¿Es $\{v_1, v_2\}$ una base para H ?

Esta situación busca que los estudiantes determinen si un conjunto dado de vectores podría ser base para un conjunto H . Para esto, un estudiante podría a simple vista identificar que como la primera y la segunda componente de los vectores del conjunto H , está determinado por la variable s , y los vectores v_1 y v_2 , pertenecen a la base canónica, y también tienen al número 1 tanto en la primera y la segunda componente, entonces sería una base. Pero se podría preguntar al momento que el estudiante, sin realizar ninguna acción concluya que es una base por las razones antes descritas, ¿Qué vectores están en el conjunto H ?, y la investigadora podría dar algunos ejemplos de otros vectores como $(2,1,0)$ que, aunque son generados por los vectores v_1 y v_2 no están en H .

Identificar a simple vista si un conjunto dado es base para un espacio, podría parecer un problema mecánico y muy común en las aulas de clase de Álgebra Lineal, pero creemos que puede mostrar características de las estructuras y mecanismos mentales que le han permitido al estudiante construir conocimiento. Así, que un estudiante tenga una concepción Proceso de los SEL, y una concepción Objeto de la combinación lineal, no es garantía para asegurar que sea cierto, por eso será muy importante, realizar cuestionamientos que rompan con el método

mecánico de usar la combinación lineal de un conjunto de vectores, construir un sistema, usar una matriz y “llegar a una respuesta”.

6. Análisis y verificación de datos: Evidencias de las construcciones mentales realizadas por los estudiantes

En este capítulo se realiza un análisis de los datos obtenidos en la prueba diagnóstica final, así como en la entrevista. De acuerdo con lo que se podrá observar, en términos de construcciones y mecanismos mentales, se determina la viabilidad de la descomposición genética hipotética y se analizan las evidencias presentadas por los estudiantes que mostraron sobre los SEL y los conceptos de Combinación lineal, Espacio generado, Dependencia e independencia lineal y Base.

6.1 Datos obtenidos del diagnóstico final

Los datos que se obtuvieron en la prueba diagnóstica final fueron analizados con base en las construcciones y mecanismos mentales descritos en la descomposición genética hipotética, además de las descomposiciones genéticas de los conceptos Combinación lineal (Parraguez, 2011) y Base (Kú *et al.*, 2008). Se considera que la forma como el estudiante construye un concepto tiene que ver con la manera como éste se le es presentado por primera vez.

A continuación, se presenta el análisis de los resultados considerando los tipos de construcciones realizadas por los estudiantes. Para cada una de ellas se agregan apartados de la transcripción de algunos episodios.

6.1.1 Concepción Acción del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales. Bajo esta concepción los estudiantes logran usar algún algoritmo, como en el caso que se presenta a continuación. El estudiante EEJ, utiliza la representación matricial del sistema que se plantea y reduce la matriz asociada del sistema, para así, encontrar los valores de k , que satisfagan la condición del problema.

$$\text{(EEJP1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & k^2 & -1 \\ 1 & k & (k-2) & 2 \end{array} \right) - f_1 + f_3 \rightarrow f_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & k^2 & -1 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{array} \right)$$

$$k = 1$$

La acción realizada por el estudiante, al reducir la matriz con la operación elemental señalada, no está bien, ya que, en la tercera fila en vez de ir k , debía ir $k - 1$, pero esta no es la razón por la que su análisis haya tenido una característica de Acción y no de Proceso, esto tuvo que ver por como interpretó su respuesta. El estudiante no fue consciente de que lo que la última fila representaba no era la igualdad $k = 1$, sino $kx_3 = 1$, es decir, olvidó que k , correspondía al coeficiente de la variable x_3 , de la tercera ecuación.

6.1.2 Estado intermedio entre la concepción Acción y Proceso. Este estado se ha considerado por aquellos estudiantes que dan muestra de tener elementos para empezar a pensar de manera general sobre los SEL, y su importancia para llegar a solucionar otro tipo de problemas, como por ejemplo de combinación lineal o base, pero todavía no han logrado *interiorizar* el concepto. Por ejemplo, el estudiante EJS, realiza el siguiente análisis al plantear el sistema a un problema dado:

$$\text{(EJSP6a)} \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$(1) \alpha + \beta = 0$$

$$(2) - 3\alpha - \beta + 2\gamma = 0$$

$$(3) \beta - \gamma = 0$$

$$\text{De (1)} \beta = -\alpha$$

$$\text{De (2), y teniendo en cuenta que } \beta = -\alpha \text{ entonces } \gamma = \alpha$$

$$\text{De (3), } \beta = -\gamma$$

$$\beta = -\gamma = -\alpha = 0 \quad \alpha = 0$$

*no existen escalares que multiplicados den **0**, entonces son linealmente independientes, por lo tanto, no son colineales.*

Aunque el estudiante hace el intento por dar solución al problema y determinar si los vectores son linealmente dependientes o independientes, tratando cada una de las ecuaciones resultantes y sustituyendo variables, no logra reflexionar sobre lo obtenido luego de sustituir las variables obtenidas del sistema planteado.

6.1.3 Concepción Proceso del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales. Los estudiantes que tienen una concepción Proceso usando algún resultado teórico, no sólo llegan a reducir la matriz asociada aumentada del sistema, o a hallar el determinante de la matriz asociada del sistema, sino que analizan las condiciones del problema y deciden, cuáles valores son los que satisfacen el problema. Encontramos un ejemplo, del estudiante EJS, quien hace lo siguiente:

$$(\text{EJSP1}) \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$$

$$1(k-2-k^3) - k(-k+2-k^2) - 1(-k-1)$$

$$= k-2-k^3+k^2-2k+k^3+k+1$$

$$k^2 - 1 = 0$$

$k = 1$, $k = -1$ con $k \neq 1, k \neq -1$ el sistema tiene solución única, ya que con esos valores el determinante es 0.

El estudiante EJS muestra evidencias de tener una concepción Proceso de los SEL, ya que, sin necesidad de ir a reducir la matriz de coeficientes, trabaja inmediatamente con esta y piensa en deducir los valores que hacen que el determinante de la matriz sea igual a cero, para luego descartarlos y poder concluir que, con otros valores diferentes a estos, el sistema tendrá solución. A pesar de que el estudiante no justifica, la razón por la que el determinante deba ser cero, es decir para que esa matriz de coeficientes de variables sea invertible, y así poder usar la ecuación vectorial $x = A^{-1}b$, su respuesta presenta una característica de concepción Proceso, ya que sin usarla está dando todos los valores que cumplen la condición.

Otro caso que se pudo evidenciar fue el del siguiente estudiante, quien interpretó un sistema de ecuaciones lineales, para darle solución a un problema de dependencia e independencia lineal.

$$(\text{EEP6a}) \ u = \{1, -3, 0\}, \ v = \{1, -1, 1\}, \ w = \{0, 2, 1\}$$

$$\text{gen}\{u, v, w\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) = \alpha u + \beta v + \gamma w\}$$

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \alpha + \beta \\ -3\alpha - \beta + 2\gamma \\ \beta + \gamma \end{matrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y + 3x \\ z \end{matrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y + 3x \\ z - \frac{y}{2} - \frac{3x}{2} \end{matrix} \\ \alpha + \beta &= x \end{aligned}$$

$$2\beta + 2\gamma = y + 3x$$

$$0 = z - \frac{y}{2} - \frac{3x}{2} \quad \text{Los vectores no son colineales, dado que los vectores no son linealmente}$$

independientes; los vectores v y w son coplanares $\rightarrow v$ y w son linealmente dependientes.

$$\text{El generado de } \{u, v, w\} = \text{un plano} \rightarrow z - \frac{y}{2} - \frac{3x}{2} = 0$$

A pesar de que el estudiante utiliza la idea del generado de los vectores dados para concluir que los vectores no son linealmente independientes, es decir, no son coplanares, interpreta de manera adecuada el resultado obtenido luego de reducir la matriz aumentada del sistema. Además, dado el resultado de la última fila de la matriz reducida, no concluye nada acerca del sistema, sino del problema que era determinar si los vectores eran o no coplanares, y además utiliza este resultado para responder al enunciado *b*, donde se pedía determinar el generado del conjunto de vectores. Esto muestra una *interiorización* de la Acción que fue reducir la matriz asociada al sistema, lo cual es una característica de una concepción Proceso del concepto SEL, y además de una concepción Proceso de los conceptos independencia lineal y conjunto generado.

En cuanto a los problemas que tenían que ver con la interpretación geométrica de unos sistemas dados, como el caso del problema 3, el estudiante EEJ, realiza el siguiente análisis:

$$(\text{EEJP3}) \quad C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

En C, los planos 2 y 3 son combinación lineal del primero, entonces están encima de este.

En A, ninguno es combinación lineal, pasan por (0,0) pero no se encuentran más.

En B, el plano 3 es combinación de alguno de los otros o sea es el mismo.

Los argumentos del estudiante muestran una característica de una concepción Proceso, de los SEL, usando la interpretación geométrica y la matricial. Estos argumentos muestran que el estudiante consciente de que, para el caso de cada matriz, todas las ecuaciones corresponden a planos que pasan por el origen, por ser sistemas homogéneos, y además como lo va explicando en cada uno, los pivotes cumplen un papel importante al momento de tomar una decisión.

En el siguiente ejemplo, se mostrará la forma como el estudiante EK, da solución a un problema 8, de determinar si un conjunto de vectores es linealmente independiente o dependiente, planteando el sistema correspondiente, y concluyendo sin necesidad de modificar la matriz asociada al sistema

$$\textbf{(EKP8)} \quad \alpha(1) + \beta(x^2) + \gamma(x^2 + 2) = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\alpha + \beta x^2 + \gamma x^2 + 2\gamma = 0$$

$$(\alpha + 2\gamma) + (\beta + \gamma)x^2 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{Rta: Como hay más incógnitas que ecuaciones el sistema tiene infinitas}$$

soluciones ya que la solución (0,0,0) no es única entonces es linealmente dependiente.

A pesar de que no tuvo que realizar ninguna acción a la matriz asociada al sistema, fue de suma importancia para la interpretación del problema y por ende para la respuesta, como asumió a los elementos del espacio. Si no hubiese sido así, no hubiese podido dar respuesta al problema.

6.1.4 Observaciones generales. A continuación se realizarán algunas observaciones.

Sobre la actitud de los estudiantes.

Al inicio de las sesiones de clase se pudo observar que la mayoría de los estudiantes asumieron una posición pasiva en cuanto a participación, se limitaban a escuchar lo que los 6 estudiantes que siempre participaron opinaban, y nunca daban su punto de vista, así hubiese una justificación falsa, ellos estaban de acuerdo.

En la realización del diagnóstico final se pudo observar que, aunque algunos alumnos sólo fueron por tener la nota asignada por asistencia, hubo quienes presentaron la prueba a conciencia. A pesar de que fue un reto para los estudiantes por la forma como se evaluó, el tipo de preguntas, y los contenidos, se pudo percibir cierto entusiasmo en quienes se habían preparado a lo largo de las sesiones. Aunque en este grupo todos estaban en primer semestre, se pudo percibir el sentimiento de responsabilidad en unos cuantos. Además, como tenían la libertad de usar el computador, ya sea para consultar algo en internet o para usar algún software graficador, los estudiantes se sintieron cómodos.



Figura 25. Prueba diagnóstica final.

Sobre las estructuras identificadas

Los resultados de este diagnóstico mostraron la importancia de las construcciones básicas que se habían considerado para la construcción del concepto SEL. Los conceptos de ecuación, y su interpretación gráfica, el uso de parámetros con el fin de dar condiciones a un problema básico de SEL, la importancia de los conceptos conjunto y vector, y la interpretación de los SEL desde su naturaleza, es decir como un conjunto de ecuaciones lineales cumplieron un papel fundamental en este. El trabajo en las sesiones de clase inició abordando los elementos que constituyen a un SEL, las ecuaciones lineales, interpretando lo que nos interesa encontrar al tener una ecuación, los valores de las variables que la satisfacen, es decir el conjunto solución. Además de las implicaciones que se dan cuando se realizan operaciones elementales a una ecuación, o a una fila de una matriz, que en últimas termina siendo una ecuación, pero sin las variables, sólo los coeficientes.

Todas estas consideraciones permitieron evidenciar lo que se mostró anteriormente, además esto es coherente con lo que se describió en el marco teórico, y es que todo individuo tiene la capacidad de construir conceptos matemáticos siempre y cuando cuente con las estructuras necesarias, ya que la construcción de un nuevo concepto tiene que ver con otros conceptos que se han construido anteriormente. Además, se considera que la forma como un estudiante puede llegar a abordar un problema tiene mucho que ver con la experiencia que haya tenido, es decir el tiempo que haya dispuesto para reflexionar sobre los conceptos y, además, con la forma como se le es presentado el problema.

Durante el análisis de los resultados se pudo comprobar la importancia de la construcción de un nuevo conocimiento, aunque se supone que este concepto fue visto años anteriores, a partir de

la conformación de unas estructuras adecuadas, que permitan en el estudiante una correcta interpretación sobre lo que se está abordando. Se hizo también evidente la importancia de la construcción de los SEL, no desde una perspectiva, ya sea matricial o geométrica, sino que se hace necesaria una *coordinación* de estos Procesos para que sea significativo el aprendizaje. No hubo evidencia de otra estructura más evolucionada que la de Proceso, pero tal vez se haga presente en otro contexto donde no sea tan evidente el uso de los SEL, para resolver cierta situación, así tal vez, dicho Proceso se pueda *encapsular* en un objeto.

6.2 Datos obtenidos de la entrevista

Los datos obtenidos en la entrevista fueron analizados teniendo en cuenta las construcciones evidenciadas en cuanto al concepto de SEL. En cada uno de los siguientes párrafos, se van a tener en cuenta las relaciones entre los SEL, y los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador y Base. Cabe resaltar que las preguntas de la entrevista fueron hechas con el fin de evidenciar la forma como el estudiante usaba o no los SEL, para darle solución a un problema que involucrara alguno de los conceptos mencionados. A continuación, se realiza una descripción de las construcciones identificadas, además de algunos extractos de la entrevista.

6.2.1 Concepción Acción del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales. En la descomposición genética hipotética se consideró que un estudiante podía construir el concepto SEL, a partir de la manipulación de dos o más ecuaciones del sistema, para encontrar su solución. Durante la realización de las entrevistas, se pudo observar una inclinación por parte de los estudiantes, a resolver los problemas haciendo uso de la representación matricial de un sistema resultante. Durante la entrevista con el estudiante EK, se pudo observar que la forma para abordar un problema de determinar si un conjunto dado era base, fue generando

inicialmente un sistema, sin antes interpretar el enunciado, este problema no tenía solución. En el problema 2, donde se preguntaba por los valores de k , de tal forma que el conjunto formado por los vectores $v_1 = (1, -2, k)$ y $v_2 = (-2, 7, -k)$ formaran una base para $\mathbb{R}^2$, el estudiante empieza por comprobar si los vectores son linealmente independientes, y plantea la siguiente ecuación:

(EKP2):

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y seguido de esto escribe las ecuaciones resultantes:

$$\alpha - 2\beta = 0$$

$$-2\alpha + 7\beta = 0$$

$$\alpha k - \beta k = 0; \alpha k = k\beta$$

Se le preguntó por lo que estaba haciendo y respondió:

(EKP2): *Comprobando primero si son LI (y muestra la matriz asociada a su sistema)*

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ k & -k & 0 \end{array} \right)$$

Luego se le pide que vuelva a leer el enunciado, y se le pregunta que a simple vista qué valores se le debía dar a k , respondiendo que debía ser igual a 0; esta respuesta fue dada entre risas, y termina diciendo que no sabe, pero que puede tomar cualquier valor. Ante esta inseguridad, se le pregunta por el valor que debería tomar k , para que los vectores v_1 y v_2 generen al vector $(1, -2)$, respondiendo que debía ser cero. Como el estudiante siguió

respondiendo lo mismo, se le hizo la siguiente pregunta: ¿Los vectores $(1, -2, 0)$ y $(-2, 7, 0)$ pueden generar al vector $(1, -2)$? A esto respondió entre risas, que no, porque el otro componente (la tercera componente del vector $(1, -2)$ no existiría, y que el vector generado sería de $\mathbb{R}^3$.

El estudiante inicia resolviendo el problema sin considerar a qué espacio, pertenecen los vectores y cuál van a generar, no se da cuenta sino hasta después de que se le preguntara si los vectores, ya con el valor de $k = 0$, podían generar a un vector del plano, $(1, -2)$.

Se hace evidente que, para el estudiante el hecho de que el enunciado diga que hay un conjunto de vectores y que hay que verificar si son, por ejemplo, como en este caso base para $\mathbb{R}^2$, lo primero en lo que piensa es en el planteamiento de un sistema y su escritura mediante una matriz aumentada asociada. Hizo falta la interpretación del enunciado, que lo hubiese llevado, a determinar sin tener que realizar ninguna acción, que no es posible encontrar un valor de k , ya que los vectores con los cuales se piensa trabajar pertenecen a otro espacio.

Otra evidencia de construcción de este concepto se presentó en el procedimiento y argumento que muestra el estudiante EJS, en el mismo problema 2.

El estudiante EJS, reescribe los vectores en una matriz, por filas, y realiza una operación elemental a una de las filas, como se muestra a continuación:

(EJSP2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 0 \\ -2 & 7 & -k & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \end{array} \right)$$

Concluye que cuando $k = 0$ los vectores $v_1 = (1, -2, k)$ y $v_2 = (-2, 7, -k)$ podrían ser base para $\mathbb{R}^2$, ya que estos vectores sólo tendrían componentes x , e y ; además $(1, -2), (-2, 7)$ son

linealmente independientes. Claramente el estudiante está teniendo confusión en cuanto a la forma como escribe los vectores en la matriz, y además en la conclusión que obtiene luego de reducir la matriz, está empeñado en ubicar a los vectores dados en el enunciado, de cualquier forma, en una matriz sin darle significado a lo que está haciendo.

Se puede afirmar que el estancamiento de estos estudiantes en esta concepción se presenta debido a la carencia de la interpretación del enunciado, y además por la falta de estructuras previas, como lo son la del concepto de Vector, y la interpretación matricial de un SEL. Esto los lleva a la aplicación de una serie de acciones sin mucho significado. Esto evita que evolucionen sus construcciones sobre el concepto, además de limitar sus procedimientos y análisis en determinadas situaciones.

6.2.2 Concepción Proceso del concepto Sistema de Ecuaciones Lineales. Analizando los resultados de las entrevistas, se puede decir que esta concepción es fundamental en la construcción de este concepto. Cuando un estudiante logra pensar en un sistema de ecuaciones lineales, ya sea desde una interpretación matricial, geométrica o vectorial, y entienda que lo importante es interpretar el contexto para darle solución a un problema, podrá continuar la evolución de sus construcciones sin mayor dificultad.

Además, la interpretación se hace más rica cuando el estudiante puede entender que diferentes situaciones como las que se pueden encontrar en un problema de Combinación Lineal, Base o Conjunto generador se pueden solucionar con un correcto planteamiento y solución de un SEL.

Como se había considerado un estudiante con esta concepción puede pensar en los SEL, sin llegar a realizar alguna acción, es decir sin llegar a actuar directamente sobre el sistema, como se muestra en el problema 5 donde el estudiante EJC realiza el siguiente comentario:

(EJCP5): *No lo van a generar, porque el vector cero no lo podría generar, habría que restringir los α y β .*

Seguido de esto se le preguntó por qué le causaba desconcierto esto, a lo que respondió que:

(EJCP5): Porque α y β deben ser distintos de cero

Dado que el problema no especificaba esas variables, se le preguntó por cuáles α y β se estaba refiriendo, contestando lo siguiente:

(EJCP5): Por el escalar que yo multiplico uno por el otro escalar que multiplico al otro para generar las combinaciones, pueden ser distintos, y como me dice que la primera y la segunda componente son iguales, entonces se deben restringir los α y β

Se le pregunta si finalmente estos vectores v_1 y v_2 generan o no a H , y si son o no linealmente independientes para que sean una base, contestando que sí, que si $\alpha = \beta$, entonces sí se cumplía.

Se debe aclarar que este estudiante no realizó ningún procedimiento para dar solución a esta situación, lo fue deduciendo a partir de las preguntas que iba contestando.

Aunque en ningún momento el estudiante llega a decir directamente que se forma un SEL, él es consciente de que existen unos escalares, que son necesarios para determinar el conjunto generado, es decir el conjunto de todas las combinaciones lineales entre los vectores v_1 y v_2 , y además, implícitamente sabe que debe darle solución al sistema $\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) = (x,y,0)$. Este tipo de argumentos era el que se esperaba tener.

Un hecho importante que se debe resaltar es que la mayoría de los estudiantes entrevistados no tuvieron la necesidad de reescribir un sistema resultante de cierta situación, en su matriz aumentada asociada. Esto puede verse en el planteamiento que realiza este mismo estudiante EJC

para darle solución al problema número 4c, que pedía determinar si el conjunto $\{t^2 + t, t^2, t^2 + 1\}$ podía ser base para el espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$:

Handwritten work showing the linear combination of polynomials and the resulting system of equations:

$$\alpha(t^2 + t) + \beta(t^2) + \gamma(t^2 + 1) = 0$$

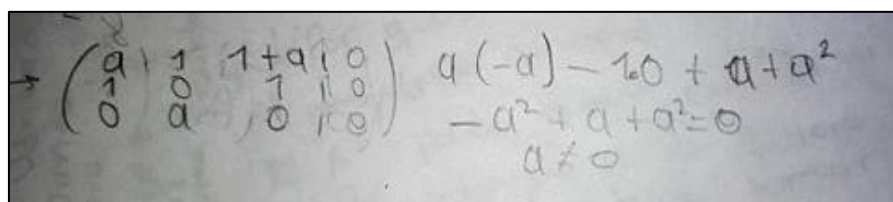
$$\alpha t^2 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^2 + \gamma$$

$$\gamma = 0 \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = 0$$

Aunque el argumento fue básico, es decir, el estudiante planteó la combinación de tal forma que se pudieran determinar los valores de los escalares α, β, γ , para decidir si eran o no linealmente independientes, y por ende, como habían tres vectores, esto significaba que este conjunto sería una base para el espacio $P_2(\mathbb{R})$, fue muy importante el cómo lo planteó. No tuvo dificultad al organizar los escalares que tenían como variable tanto a t^2, t^1 y a t^0 , correspondientes a cada uno de los grados menores o iguales a 2, y esto le permitió darle solución al problema, de manera “sencilla” es decir, sólo resolviendo el sistema, que incluso no fue escrito de forma general con las ecuaciones explícitas, sino teniendo en cuenta a cada uno de los escalares de las variables de t . Esto hace que nuestra descripción sobre la necesidad de escribir un sistema en su matriz asociada aumentada no sea tan evidente, sólo bastó con una construcción adecuada de lo que es combinación lineal, e independencia lineal, haciendo que la idea de célula generadora del concepto Combinación lineal de Parraguez y Uzuriaga (2014), tome más fuerza, y dándole el lugar a los SEL, como la herramienta para dar solución a este tipo de planteamientos. Es importante, que además que el estudiante sepa organizar sus ideas, sobre

qué conceptos va a necesitar para darle articulación a cada uno de ellos, y así permitir una evolución entre las estructuras de cada uno de esos conceptos. Además, esta evolución le va a permitir apropiarse de forma más eficaz de sus métodos para plantear o dar solución a un problema. Como se verá en el planteamiento del estudiante EK, quien da solución al problema 3, donde se pedía encontrar los valores de un parámetro a , de tal forma que los vectores $(a, 1, 0)$, $(1, 0, a)$ y $(1 + a, 1, a)$ constituyeran una base para $\mathbb{R}^3$. A diferencia de los otros estudiantes quienes intentaban dar solución a este problema a ensayo y error, este estudiante EK, percibe que siendo tres vectores en un espacio de dimensión 3, sólo bastaría con determinar si son linealmente independientes o no, veamos su planteamiento:



The image shows handwritten mathematical work on a piece of paper. On the left, there is a 3x3 matrix with columns $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, and $\begin{pmatrix} 1+a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. To the right of the matrix, the determinant is calculated as $a(-a) - 1 \cdot 0 + a + a^2$, which simplifies to $-a^2 + a + a^2 = 0$. Below this, it is noted that $a \neq 0$.

Al iniciar la entrevista, no se le preguntó sobre este planteamiento, sino sobre lo que tendría que hacer para dar solución a este problema, argumentando que el valor de a , debía ser cero. Seguramente estaba intentando que los vectores parecieran a los vectores de la base canónica. Dado esto, se le pidió que dijera qué vectores quedaban luego de cambiar el valor de a por cero, percatándose que uno de esos vectores $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, el tercero, era combinación lineal de los otros dos. Esto nos permitió preguntarle que de qué forma se podía garantizar qué valores de a , se podían dar para que se cumpliera lo pedido, respondiendo que, con una matriz, donde se pudieran hallar dónde no son linealmente dependientes los vectores. De nuevo el estudiante no especificó que se debía plantear una combinación lineal, ni mucho menos que esto lo llevaría al planteamiento de un SEL, pero se continuó preguntando.

Con el papel en la mano, se le preguntó por qué lo hizo de esa manera y por qué los había ubicado así, respondiendo que cada componente, (señalando la primera columna) sería una variable diferente x, y, z y por lo tanto las agrupó a todas en una ecuación, argumentando además que lo que está en esa columna es lo que está multiplicando al “ α ”. El estudiante tiene la idea de la combinación que se forma, y por ende busca darle solución, ubicando inicialmente los coeficientes en una matriz aumentada asociada, y luego usando el determinante de la matriz de coeficientes. Cuando se le preguntó por qué había usado ese resultado teórico, comentó que hallando los valores para los cuales el determinante era diferente de cero, encontraría los valores que hacían que los vectores fueran linealmente independientes y así, la solución al problema. Al preguntársele por qué sucedería si el valor de α fuese cero, respondió que los tres vectores no generarían todo el espacio $\mathbb{R}^3$, y que tal vez generaría sólo un plano, o una recta.

Este tipo de argumento fue descrito en la descomposición genética, a pesar de que haya sido el único estudiante con este tipo de análisis, sirvió como evidencia para ser presentada en este apartado.

Contrario a lo que se evidenció en el estado intermedio entre la concepción Acción y Proceso, donde no había una interpretación del contexto, el siguiente estudiante, el estudiante EE no tuvo la necesidad de realizar ninguna acción para darle solución al problema número 2, en donde pedía determinar los valores de k , para los cuales los vectores $v_1 = (1, -2, k)$ y $v_2 = (-2, 7, -k)$ formaran una base para $\mathbb{R}^2$. Lo primero que argumentó fue que esto no era posible, ya que eso significaría que el subconjunto que podrían generar esos dos vectores sería un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Como su respuesta fue bastante dudosa, se le preguntó si sería posible ubicar un vector de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, argumentando que sí se podría, si la tercera componente fuera igual a

cero. Con el fin de saber hacia dónde iba su argumento, se le preguntó si la igualdad $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ era cierta, y sólo hasta después de preguntársele a cuál espacio pertenecían cada uno de los vectores, pudo concluir que no eran iguales, y por lo tanto no existirían valores de k que hicieran posible esta afirmación. Finalmente, muestra evidencia de que está pensando en los vectores de forma concreta, específicamente de forma geométrica, al agregar que no podrían existir valores de k , además porque no existe un vector en $\mathbb{R}^3$ que se pueda graficar en $\mathbb{R}^2$.

La importancia de esta construcción se evidencia de manera específica cuando un estudiante piensa no solamente en el planteamiento de un sistema, sino el fin de este. Puede que no lleguen a describir como tal un sistema, pero la idea está implícita, y esto caracteriza esta concepción. Además, esta construcción se hace significativa cuando acompaña a otros conceptos, es decir cuando no se aísla, sino se incorpora para darle significado, pueda que como lo describe Parraguez y Uzuriaga (2014) el concepto de Combinación Lineal sea la célula generadora, pero los SEL, son la herramienta para darle solución a todos los problemas donde surjan las combinaciones lineales.

7. Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones generales de este trabajo de investigación. Se empieza describiendo algunos aspectos sobre el uso de formas concretas (formas algebraicas y formas geométricas) evidenciados en este análisis, con el fin de dar respuesta a uno de los objetivos de este trabajo. También, y teniendo en cuenta el análisis de los datos, se determinan

los cambios que se proponen para la descomposición genética hipotética, y algunas consideraciones generales para iniciar la construcción del *Esquema* de SEL.

7.1 Sobre el uso de Formas concretas

Durante el desarrollo de la entrevista no se detectó en ninguno de los razonamientos usados por los estudiantes las formas geométricas, a pesar de que tenían la libertad de usar un software de geometría dinámica, este no causó un impacto en sus procedimientos. Aunque esta investigación no tenía como objetivo mediar las construcciones de los SEL, usando estas formas geométricas, sí se buscaba establecer el rol de estas en la construcción del Esquema de SEL. Esto refuerza la idea de Sierpinska (2001) quien señala que no es suficiente con hacer los contenidos más concretos a partir del trabajo en bajas dimensiones y usando visualizaciones. Incluso las interpretaciones más relevantes se pueden dar usando las formas algebraicas, la cuestión es que según el contexto en que se presente el problema, el estudiante pueda decidir con cuál se siente más cómodo y cuál le va a brindar más elementos para interpretar y darle solución al problema. Esto no quiere decir que las formas geométricas no son necesarias o no van a aparecer en la construcción de este concepto, sólo que por cómo se presentaron los problemas en la entrevista, no permitió identificar características. Es evidente que para que un Objeto Cognitivo, que es por naturaleza abstracto, sea interpretado, se hace necesario el trabajo con las formas concretas, ya sean geométricas o algebraicas, por lo que se pudo estudiar en las entrevistas, las formas algebraicas sobresalieron. Tal vez en futuras investigaciones se pueda inducir hacia el trabajo con esas formas geométricas, de tal forma que se pueda realizar un paralelo y comparar en cuál de esos entornos hay más evidencia de construcción de este concepto.

7.2 Descomposición genética refinada

Como se había descrito en la descomposición genética hipotética, se pensó en ciertas estructuras iniciales que permitirán dar inicio a la construcción de este concepto. Se siguen considerando esenciales las estructuras Acción del concepto variable, la estructura Proceso del concepto Vector, la estructura Proceso de Ecuaciones equivalentes que, aunque no fue evidente se hace necesario para la interpretación de soluciones. La estructura Proceso del concepto Vector se debería reforzar al inicio del camino con el fin de que esta estructura esté presente en la construcción del concepto SEL. Por ejemplo, en problemas específicos donde se tenga que describir qué vector o vectores son solución de cierto sistema.

Con respecto a las interpretaciones geométricas de las ecuaciones, para los casos con dos y tres variables, no se hace indispensable tener esta estructura Proceso, pero si el estudiante decide abordar el Objeto desde su forma geométrica, si es necesario. Algo importante que cabe resaltar en este punto del trabajo y que tal vez no fue tan evidente en el diseño, es empezar el estudio de los SEL, desde su naturaleza, como conjunto de ecuaciones lineales, para llegar a construir con significado. Por ejemplo, el hecho de que cuando se realizan operaciones elementales a una matriz del sistema, es porque se sabe que con la multiplicación por escalar a una ecuación o la suma de ecuaciones, el conjunto solución no se va a alterar, pero sí va a permitir llevar una matriz inicial a una forma más sencilla, de tal forma que la descripción de su solución sea directa.

Fue interesante observar que la mayoría de las construcciones que realizaron los estudiantes sobre el concepto de SEL, involucrado en los conceptos de Combinación lineal, Dependencia e independencia lineal, Conjunto generador y Base, no estuvo dirigida hacia un

mismo método para resolver el problema. En cambio, se vio una diversidad en cuanto a descripciones usando argumentos de tipo matricial y determinantes.

Las interpretaciones geométricas no prevalecieron, tal vez por la forma como se presentaron los problemas no inducía a este tipo de interpretaciones. Tampoco era la intención de este trabajo describir cómo eran las construcciones mediadas por ambientes geométricos, pero sí establecer el rol que existían entre los objetos Abstractos y los objetos concretos. Observando el análisis realizado de los resultados de la entrevista, se pudo evidenciar el empleo de métodos para resolver SEL, como lo es el método de sustitución, el uso de interpretaciones matriciales, y el uso de determinantes. Con respecto al uso de interpretaciones matriciales, que era el que se pensaba iba a ser el más usado, no hubo mucha influencia. Los estudiantes llegaron a ubicar los vectores en una matriz aumentada, como fue el caso del estudiante EK, que sólo ubicó los vectores en una matriz para poder establecer los valores que hacían que el determinante fuera diferente de cero.

El análisis de resultados permitió además describir un estado intermedio entre la concepción Acción y Proceso, caracterizado por la falta de reflexión sobre el trabajo con ciertos elementos que presenta un problema, y también con la falta de interpretación de la solución de un problema; la cual es entendida por la mayoría de los estudiantes como llegar a una igualdad sin tener que dar explicación alguna. Este trabajo se debería reforzar con el planteamiento de más problemas donde sobren datos para que así, los estudiantes aprendan a elegir los datos que sí les permitan obtener información del problema y no sólo a manipular elementos, que fue lo que se evidenció no sólo en este estado, con el fin de intentar dar soluciones a problemas que no tenían solución.

Por lo tanto, un estudiante con una concepción Proceso de SEL, podrá determinar sin realizar ninguna acción si un problema tiene o no solución con una correcta interpretación del mismo, sea del concepto que sea. Esto es algo que caracteriza la *interiorización* de una Acción que pudiera llegar a realizar un estudiante para darle solución a un problema, pero no es la única forma de describir una concepción Proceso. Como se evidenció en el trabajo realizado, el uso de cualquiera de los métodos que hubiesen podido utilizar los estudiantes para dar solución a un problema, sólo garantiza la mitad del éxito en la resolución de un problema. La herramienta está, y se presenta en diferentes formas, usando matrices, usando métodos convencionales, usando el determinante, pero la cuestión está en que el estudiante sepa cómo usar esa herramienta y saber por qué funciona, ahí es donde empieza a tener significado.

Durante la realización tanto de la etapa de reconocimiento como de la implementación, no fue evidente la *encapsulación* de ese Proceso construido, tal vez los problemas planteados no exigían tener más que una concepción Proceso para dar solución. En este camino, se considera que las construcciones están determinadas según el contexto del problema. Si un problema pide determinar si los vectores de cierto espacio $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, son linealmente independientes, pues el estudiante tendrá opciones, como verificar geométricamente si pertenecen a una misma recta o a un mismo plano; o usar una matriz y verificar si las únicas soluciones al sistema homogéneo planteado son iguales a cero; o incluso, si la matriz de coeficientes es cuadrada, usar los determinantes para dar solución al problema.

Durante el análisis de los resultados fue evidente la necesidad de involucrar los conceptos de Combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador y Base, con

el fin de no aislar el concepto de SEL, de estos conceptos que forman parte del contenido, de los cursos básicos de Álgebra lineal. A pesar de que en un principio se quería comprobar que los SEL eran el centro de los conceptos de álgebra lineal, se pudo comprobar tanto en otros trabajos como el de Parraguez (2014), como en nuestra investigación, que a pesar de que el centro de todos los conceptos, el cual genera a otros es el concepto de Combinación lineal, los SEL están presentes como una herramienta para dar solución a problemas que involucren combinaciones lineales.

7.3 El Esquema de Sistema de Ecuaciones Lineales, una reflexión inicial

Como se describió en el apartado anterior, durante el análisis de los datos obtenidos en esta investigación, ninguno de los estudiantes entrevistados dio evidencias de haber construido algo más que una concepción Proceso de SEL. A pesar de haberse realizado conexiones de este concepto con otros como Combinación lineal, dependencia e independencia lineal, Conjunto generador y Base, no se logró identificar características que permitieran describir la *encapsulación* del Proceso de SEL. A pesar de esto, se puede iniciar una descripción del Esquema con el fin de proporcionar una caracterización de esta construcción.

Como se describió anteriormente un Esquema es una colección coherente de construcciones relacionadas con el concepto. Los niveles de evolución están determinados por las relaciones que un estudiante logra establecer con otros conceptos diferentes, en este caso, con los conceptos de Combinación lineal, Dependencia e Independencia Lineal, Conjunto generador y Base. De esta forma es como se puede fortalecer este Esquema de SEL que estará determinado por las relaciones que pueda realizar de manera consciente con los otros conceptos anteriormente mencionados. A continuación, se hará una descripción de los niveles que se pudieron considerar como resultado del análisis de los datos empíricos.

Nivel Intra: Este nivel está asociado con las construcciones relacionadas con el concepto SEL desde él mismo. Es decir, un estudiante con las construcciones previas que se han considerado de los conceptos de Variable, ecuación, ecuaciones equivalentes, vector, interpretación geométrica, y conjunto podrá establecer el conjunto solución de un sistema planteado, ya sea realizando operaciones elementales a las ecuaciones del sistema, o graficando las ecuaciones del sistema, si se pueden. En este nivel están ausentes las conexiones entre el concepto de SEL y los otros conceptos (Combinación lineal, Dependencia e Independencia Lineal, Conjunto generador y Base).

Nivel Inter: Este nivel está asociado con la creación de relaciones entre el concepto SEL y los conceptos de Combinación lineal, Dependencia e Independencia Lineal, Conjunto generador y Base. Así, diferentes construcciones, Acciones, o Procesos, se pueden interactuar y crear mediante diferentes mecanismos, *coordinación*, nuevas construcciones que enriquezcan el Esquema. Una de las *coordinaciones* que fueron identificadas en este nivel están relacionadas con el concepto de Combinación lineal. Un estudiante puede *coordinar* el Proceso de SEL usando los determinantes, y el Proceso combinación lineal, para comprobar por ejemplo si un conjunto de vectores es o no linealmente independiente. O *coordinar* por ejemplo el Proceso de SEL, usando la representación matricial, con el Proceso combinación lineal para determinar qué generan un conjunto de vectores. De esta manera un estudiante puede ser consciente que todos los problemas que tengan que ver con Dependencia e independencia lineal, conjunto generado y base, están directamente relacionados con el concepto de Combinación lineal, y que los SEL, desempeñan un rol importante para dar solución a estos. Es decir, funcionan como una herramienta. Por último, se puede considerar que una vez un estudiante logre alcanzar este nivel

en su Esquema, podrá cobrar sentido al por qué surgieron los SEL, y así enriquecer la interpretación del mismo y de los otros conceptos involucrados.

7.4 Implicaciones Didácticas

Cabe aclarar que este modelo de enseñanza que inicia a partir del estudio de la naturaleza de los SEL, para luego llegar a relacionarlos con los otros conceptos anteriormente mencionados, no tiene en cuenta los conceptos normalmente estudiados en cursos básicos de álgebra lineal, como lo son los números complejos, inducción matemática, sumatoria, producto punto, producto cruz, las operaciones entre matrices, entre otros, pero sí podrían hacer parte dentro del plan de estudio.

Además, cuando se está construyendo este concepto no se hace necesario la imposición para trabajar en cierto enfoque, ya sea matricial, geométrico, o netamente abstracto, depende de cómo se presente el problema, el estudiante decidirá cómo lo aborda.

Con este tipo de alternativa se busca que los maestros motiven a los estudiantes, y sobre todo que les muestren cómo crear conexiones entre conceptos, para que así los estudios de estos conceptos de educación superior no estén aislados a los de la educación secundaria, y se construyan significativamente. Además, se hace una invitación a la reflexión profunda sobre los conceptos que se estudien, todo tiene un origen y un por qué, el conocimiento matemático no sólo es procedimental, sino como se ha sustentado en el desarrollo de esta investigación conceptual.

Referencias Bibliográficas

- Arellano, F. (2006). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con sus representaciones gráficas. (Tesis de pregrado). UAGRO, México.
- Arnon, I., Nesher, P., & Nirenburg, R. (2001). Where do fractions encounter their equivalents? Can this encounter take place in elementary school?. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(2), 167–214.
- Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). APOS theory-A framework for research and curriculum development in mathematics education. New York, Estados Unidos: Springer.
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E. Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Currilum Development in Undergraduate Mathematics Education. En Kaput J., Schoenfeld, A. & Dubinsky E. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II*. (pp. 1-32). Providence, Estados Unidos: American Mathematical Society.
- Betancourt, Y. (2009). Ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de Sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior. (Tesis de maestría). CINVESTAV-IPN, México.
- Cutz, B. (2005). Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución. (Tesis de maestría). CINVESTAV-IPN, México.
- DeVries, D., & Arnon, I. (2004). Solution-What does it mean? Helping Linear Algebra Students Develop the Concept While Improving Research Tools. *Proceedings of the 28th*

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematic. Bergen, Noruega.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 3-81). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L. & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Dubinsky, E. (2001). Teaching and learning abstract and linear algebra: a unified approach. *Proceeding of the 12th ICMI Study Conference. The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. Melbourne, Australia.

Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 273-280). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., & Brown, A. (2005). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 335–359.

- Garcés, E. (2009). Incidencia del GeoGebra en la Resolución de Problemas con Sistemas Lineales 2×2 . (Tesis de pregrado). Universidad Autónoma de Barcelona, España.
- González, D. (2011). Los sistemas de ecuaciones lineales: evidencias del tránsito entre los modos de pensamiento en estudiantes universitarios. (Tesis de especialización). Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- González, D. y Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las ciencias*, 35(2), 89-107.
- Grossman, S. (1993). Aplicaciones del Álgebra Lineal. Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Hernández, J. (2017). Características comognitivas del discurso matemático de los sistemas de ecuaciones lineales en estudiantes universitarios. (Tesis doctoral). CICATA-IPN, México.
- Hoffman, K. y Kunze, R. (1973). Álgebra lineal. Ciudad de México, México: Prentice Hall Hispanoamérica.
- Isaacs, R. y Sabogal, S. (2009). Aproximación al Álgebra Lineal: un enfoque Geométrico. Bucaramanga, Colombia: Publicaciones UIS.
- Kú, D., Trigueros, M. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65 - 89.
- Lay, D. (1994). Linear Algebra and its applications. Massachusetts, Estados Unidos: Addison-Wesley Longman, Inc.

- Manzanero, L. (2007). *Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una perspectiva desde la Teoría APOE*. (Tesis de maestría). CINVESTAV-IPN, México.
- Martínez, Héctor y Sanabria, Ana. “Apuntes Álgebra Lineal”. Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona, España. Segundo Semestre del 2008.
- McDonald, M., Mathews, D. & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: a table of two objects. En Dubinsky, E., Schoenfelde A. & Kaput, J. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV*. pp. (77-102), Providence, Estados Unidos: American Mathematical Society.
- Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6 (3), 221-271.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN), (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Mora, B. (2001). Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. (Tesis de maestría). CINVESTAV-IPN, México.
- Nakos, G. & Joyner, D. (1999). *Algebra Lineal con Aplicaciones*. Ciudad de México, México: International Thompson Editores.
- Ochoviet, C. (2009). Sobre la entrada al álgebra lineal en el nivel medio: el caso de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. (Tesis doctoral). CICATA-IPN, México.

- Parraguez, M. (2011). Comprensión del concepto combinación lineal de Vectores desde el punto de vista de la teoría APOE. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*. 24(2), 263-271.
- Parraguez, M. y Uzuriaga, V. (2014). Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores. *Scientia Et Technica*, 19(3), 329-334.
- Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal. Una introducción moderna*. Ciudad de México, México: Cengage Learning Editores.
- Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J.G. & Lozano, M.D. (2010). Use of models in the teaching of lineal algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2125-2140.
- Ramírez, M. (2005). Dificultades que presentan los estudiantes en los sistemas de ecuaciones en los modos geométrico y analítico. (Tesis de pregrado). UAGRO, México.
- Ramírez, M. (2008). Concepciones de los estudiantes de educación superior sobre sistemas de ecuaciones lineales. (Tesis de Maestría). CINVESTAV-IPN, México.
- Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 13(1), 89-112.
- Romero, C. (2016). Aprendizaje de transformaciones lineales mediante la Coordinación de representaciones estáticas y dinámica. (Tesis doctoral). CINVESTAV-IPN, México.
- Schay, G. (2010). *A Concise Introduction to Linear Algebra*. Basilea, Suiza: Birkhäuser.
- Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: Una Secuencia Didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7(1), 49-78.

- Sfard, A. (2008). Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. En J-L. Dorier (Ed.), On the Teaching of Linear Algebra, pp. 209-246. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Strang, G. (1982). Algebra lineal y sus aplicaciones. Ciudad de México, México: Fondo Educativo Interamericano.
- Trigueros, M. & Martinez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two variable functions. Educational studies in Mathematics, 73(1), 3-19.
- Trigueros, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución [Edición Especial]. Educación Matemática, 26, 207-226.
- Vanegas, D. y Escalona, M. (2013). Concepciones sobre funciones matemáticas de una variable, en estudiantes del primer semestre de Ingeniería. Omnia, 19(1), 99-113
- Vásquez, C., y Parraguez, M. (2014). Construcciones mentales para el aprendizaje del concepto de probabilidad: Un estudio de caso. Revista Educación Matemática, 26(3), 37-74.
- Villabona, D. y Roa Fuentes, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. Educación Matemática, 28(2), 119-150.

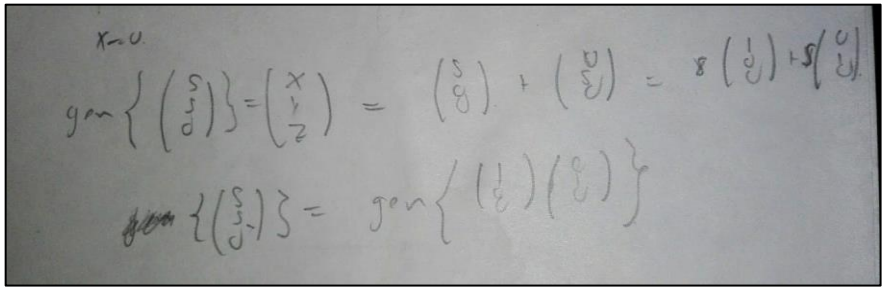
Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Aaron, I. & Dubinsky, E. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*. Recuperado de <http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf>

Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating Visual and Analytic Strategies: A Study of Students' Understanding of the Group D_4 . *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 435-457.

Apéndices

En esta sección se encontrará una tabla en donde se presenta la transcripción de las entrevistas realizadas a 4 estudiantes, a partir de su producción tanto en sus hojas de trabajo, como en los videos grabaciones que se realizaron durante el desarrollo de las entrevistas. Se resaltan los resultados más relevantes. También se podrán encontrar las pruebas diagnóstica inicial y final, y las preguntas de la entrevista en la etapa de implementación del ciclo de investigación.

Apéndice A. Entrevista

Estudiante: EE	
Pregunta #5	Luego de realizar lo que se muestra en la siguiente imagen, se empieza la entrevista:
Sean $v_1 =$	
$(1,0,0), v_2 =$	
$(0,1,0)$ y $H =$	
$\left\{ \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$. ¿Es	
$\{v_1, v_2\}$ una base	Inv.: ¿Qué vas a hacer?
para H?	EE: Voy a mirar el generado
	Inv.: ¿Qué forma tienen los elementos de H?
	EE: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donde $x = s, y = s$.
	Inv.: Pero ¿Cuál es el generado de este conjunto H?

EE: Ah ya entendí, pues sí son base

Inv.: ¿Por qué?

EE: Tenemos los vectores $\begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$ de la forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ entonces los puedo expresar como $\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$, o sea s va a ser x e $y = s$, entonces va a ser igual a $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Inv.: ¿Por qué x e y , en lo último que haces?

EE: Entonces como $x = s$, e $y = s$, entonces $x = s = y$ [cambiando la x y la y por la s]. Entonces se puede decir que el generado es el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Inv.: ¿Es el generado o el que lo genera?

EE: Bueno, el que genera a H .

Inv.: El conjunto generador de H [Haciendo la aclaración].

$$EE: \left\{ \begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Inv.: ¿Qué significa?

EE: Son vectores, las combinaciones lineales

Inv.: ¿Cuáles son las combinaciones lineales entre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

$$EE: \text{El } \begin{pmatrix} s \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$$

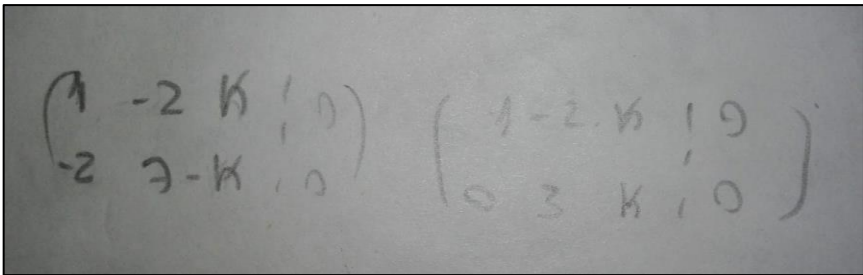
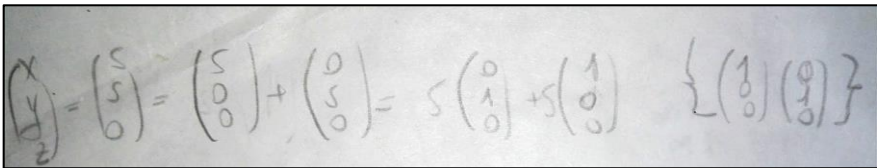
Inv.: ¿Solamente el conjunto H ? Por ejemplo si $\alpha = 2$, y $\beta = 3$.

EE: [Titubeando indica que está confundido y pide que le repita de nuevo la pregunta]

Inv.: ¿Qué generan los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

	EE: ¿Un plano?, [Titubeando y negando lo dicho concluye] las combinaciones lineales Inv.: Realmente ¿El generado de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es H? EE: Sólo si $\alpha = \beta$.
Pregunta #2 Sean $v_1 = (1, -2, k)$ y $v_2 = (-2, 7, -k)$. Determine para qué valores de k, el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$. ¿Es posible que sea una base para $\mathbb{R}^3$?	El estudiante no había respondido en el papel, así que se le pidió que leyera de nuevo el problema y responde lo siguiente: EE: No, no es posible, eso significa que ¿El conjunto que generan esos dos vectores es subconjunto de $\mathbb{R}^2$? [Preguntando bastante dudoso]. Inv.: ¿Será que puedo ubicar un vector de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$? EE: Sí, sí se puede, si la tercera componente es igual a cero. Inv.: Es decir ¿El vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$? EE: No [Titubeando en su respuesta] Sí es igual. Inv.: [Con el fin de que el estudiante puede corregir esta idea errónea se le pregunta lo siguiente] ¿El vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ en qué espacio está? EE: En $\mathbb{R}^3$, y el otro en $\mathbb{R}^2$, o sea no son iguales. Inv.: ¿Entonces? EE: No existen valores, porque no existe un vector en $\mathbb{R}^3$ que se pueda graficar en $\mathbb{R}^2$. Inv.: ¿Y podría ser una base para $\mathbb{R}^3$? EE: No, no es posible, porque la cantidad necesaria de vectores es 3, y no 2.
Estudiante: EJC	
Pregunta #5 Sean $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 =$	Después de realizar la lectura el estudiante responde lo siguiente: EJC: No lo va a generar, porque al vector cero no lo puede generar y habría que restringir los α y β. Inv.: ¿Cuáles?

$(0,1,0)$ y $H =$ $\left\{ \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} s \in \mathbb{R} \right\}$. ¿Es $\{v_1, v_2\}$ una base para H?	EJC: No va a generar al vector cero [mostrando desconcierto] Inv.: ¿Por qué te causa desconcierto eso? EJC: Sí porque α y β deben ser diferentes de cero Inv.: ¿Cuáles α y β? EJC: Por el escalar, que yo multiplico uno y por el otro escalar que multiplico al otro para generar las combinaciones pueden ser distintos y como me dice que la primera y la segunda componentes son iguales, entonces se deben restringir los α y β. Inv.: Entonces ¿genera o no a H? EJC: Pero si yo digo que $\alpha=\beta$ entonces sí. Inv.: ¿Y sí son Linealmente Independientes? EJC: Sí claro
Pregunta #2 Sean $v_1 =$ $(1, -2, k)$ y $v_2 =$ $(-2, 7, -k)$. Determina para qué valores de k, el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$. ¿Es posible que sea una base para $\mathbb{R}^3$?	EJC: No puede ser porque excede la dimensión de $\mathbb{R}^2$ porque v_1 y v_2 están en $\mathbb{R}^3$, y no puede ser base de $\mathbb{R}^3$ porque sólo hay 2 vectores, independiente del valor de k. Inv.: ¿Será base? EJC: Se necesitan mínimo 3 vectores linealmente independientes
Estudiante: EJS	
Pregunta #2	Luego de realizar lo que se muestra en la siguiente imagen el estudiante dice que este problema tendrá solución cuando $k = 0$.

Sean $v_1 = (1, -2, k)$ y $v_2 = (-2, 7, -k)$. Determine para qué valores de k, el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$. ¿Es posible que sea una base para $\mathbb{R}^3$?	 Inv.: Dices que con $k = 0$, estos vectores podrían ser base para $\mathbb{R}^2$. EJS: Sí, porque sólo tendría componente en x, y y y, y $(1, -2)$ y $(-2, 7)$ son linealmente independientes. Inv.: Pero y $k = 0$ no es un componente en z EJS: Sí, pero no podría ser una componente en $\mathbb{R}^2$. Inv.: O sea que ¿tú le quitarías esa componente? Cuando haces $k = 0$, haces la tercera componente igual a 0, no es que se elimine, queda $(1, -2, 0)$. ¿Ese vector en dónde está? EJS: En $\mathbb{R}^3$. Inv.: ¿Entonces? EJS: No, porque está en $\mathbb{R}^3$ y lo necesito para $\mathbb{R}^2$ Inv.: ¿Y sería una base para $\mathbb{R}^3$? EJS: No, porque faltaría uno, con sólo dos vectores en $\mathbb{R}^3$ generaría un plano. Inv.: Y ¿Siempre generaría un plano? EJS: Si son linealmente independientes sí, si no sería una recta.
Pregunta #5 Sean $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ y $H =$	Después de realizar lo que aparece en la imagen, el estudiante responde lo siguiente a la pregunta: 

$\left\{ \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$. ¿Es $\{v_1, v_2\}$ una base para H?	EJS: Sí porque los separé y me queda $\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}$, y factoricé a s, y me dio $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ entonces estos vectores son las bases. Inv.: ¿Cuál es el generado de esos 2 vectores? EJS: Sería un plano Inv.: ¿Qué forma tienen los que se generan a partir de ellos? EJS: Ternas, combinaciones Inv.: ¿Cómo son las combinaciones lineales? ¿Genera a H? EJS: Sí, porque hay un escalar, [señalando a s] el α y el β sería s. Inv.: Pero α y β no tienen que ser necesariamente iguales EJS: Pero deben serlo para que generen a H Inv.: ¿Qué pasa si yo hago $\alpha = 1$ y $\beta = 2$? EJS: Se saldría del conjunto H, [hace una pausa y continúa], no es que el generado de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sea H, sino sólo cuando $\alpha = \beta = s$. Inv.: ¿Y son linealmente independientes? EJS: Sí.
Estudiante: EK	
Pregunta #2 Sean $v_1 = (1, -2, k)$ y $v_2 = (-2, 7, -k)$. Determine para qué valores	Luego de darle el tiempo para que el estudiante leyera y pensara un momento en la solución de esta situación, se le preguntó por qué era lo que estaba haciendo y respondió que: EK: Estoy comprobando primero si los vectores son linealmente independientes, (mostrando el procedimiento que aparece en la siguiente imagen).

de k, el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$. ¿Es posible que sea una base para $\mathbb{R}^3$?	Se le pidió que volviera a leer el enunciado y se le preguntó a simple vista qué valores de k le podría dar para que tuviera solución el problema respondiendo lo siguiente: EK: [Titubeando] A mí me dio que k era igual a k. Inv.: ¿Por qué? EK: [Respondiendo de forma nerviosa] No sé, k puede tomar cualquier valor Inv.: Por ejemplo si yo quiero al vector $(1, -2)$ ¿qué valor debe tomar k? EK: Cero Inv.: ¿$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ me pueden generar al vector $(1, -2)$? EK: No, porque el otro componente no existiría, [riéndose] ese vector es de $\mathbb{R}^3$. Inv.: ¿Podría ser base para $\mathbb{R}^3$? EK: Pues tienen que ser linealmente independientes y aparte debe tener 3 elementos, [exclamando] no puede ser, yo sí decía tan raro, ese solamente tiene 2 elementos.
Pregunta #3 ¿Para qué valores del número real a, los vectores $(a, 1, 0)$, $(1, 0, a)$ y $(1, 1, 0)$ son linealmente independientes?	El estudiante realiza lo que se muestra en la imagen Inv.: ¿Qué significa esto? EK: Pues acá sería [señalando cada a de los vectores]. ¿a puede ser

$a, 1, a$ constituyen una base para $\mathbb{R}^3$?	diferente? Por ejemplo en el primero puede valer 0, en segundo 0, y en el tercero puede valer [pensando en su respuesta], no [intenta aparecer la base canónica para $\mathbb{R}^3$] Inv.: ¿Qué harías para darle solución al problema? EK: Para mí a debe valer cero Inv.: ¿Por qué? EK: Me crearía vectores linealmente independientes Inv.: ¿Qué vectores te quedarían? EK: $(0,1,0), (1,0,0), (1,1,0)$, [dudando] ah pero $(1,1,0)$ es combinación lineal de los dos. Inv.: ¿Qué harías entonces para garantizar si los hay, los valores de a que permitan que estos tres vectores sean base para $\mathbb{R}^3$? EK: La matriz [respondiendo de forma dudosa] Inv.: ¿Cuál matriz? ¿Por qué? EK: Pues sí, para hallar dónde no son linealmente dependientes los vectores. Inv.: [Mostrando lo que tenía en el papel] ¿Qué hiciste ahí? EK: Ubiqué los vectores en forma de columna Inv.: ¿Por qué? EK: Cada componente [señalando la primera columna], sería una variable diferente x, y, z, entonces agrupé a todas en una ecuación [para luego retractarse]. Inv.: Pero no es por eso. EK: Pues los volteeé en columnas para mirar si eran linealmente independientes Inv.: Por ejemplo cuando ibas a mirar acá [señalando lo que había hecho en la pregunta 2] si los vectores eran linealmente independientes ¿qué hiciste?
--	---

	EK: Pues los multiplicaba por un α y un β, [señalando las columnas, pero luego se retractó y continuó] este sería mi α y mi β, [señalando ahora los coeficientes de la primera columna, para luego de nuevo retractarse], ah no, este sería la incógnita α [escribiendo encima de la primera columna α], y la otra es la de β. Inv.: No sería la incógnita α. EK: No, sería lo que está multiplicando a α Inv.: Bueno, te decidiste por el determinante y encontraste que $a \neq 0$, ¿Qué significa esto? EK: Que tiene soluciones infinitas, cuando $a = 0$, tiene infinitas soluciones. Inv.: ¿Por qué? EK: Pues ya vimos [riéndose de manera nerviosa] Inv.: Si tienes soluciones infinitas ¿qué generarían? EK: Un plano, no una recta, pero no $\mathbb{R}^3$.
--	---

Apéndice B. Prueba diagnóstica inicial

Álgebra Lineal I – 2017I
Escuela de Matemáticas
Facultad de Ciencias

Prueba diagnóstica inicial

Nombre: _____

Edad: _____

¿Había tomado el curso anteriormente? Sí_____ No_____ ¿Cuántas veces?_____

Apreciado estudiante: el diseño, desarrollo y evaluación de esta prueba es un insumo fundamental para garantizar que durante el desarrollo del curso usted pueda encontrar los espacios apropiados para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático asociado a los conceptos del álgebra lineal.

Por tanto le solicitamos que conteste con total sinceridad, explicando los procedimientos que

1. Dada la siguiente ecuación lineal de dos incógnitas, x e y :

$$3x + 2y = 3$$

- Dé un ejemplo de valores de x e y que satisfaga la ecuación. (Dé un ejemplo de valores de x e y que sean solución para esta ecuación) ¿Cuántos hay?
- En general, diga para qué valores de x e y se satisface la ecuación.
- Represente la ecuación en el plano cartesiano.
- Si el conjunto de todos los valores de x e y que satisfacen la ecuación (*estos valores se relacionan en una dupla, por ejemplo (1,2)*), se denomina **conjunto solución de la ecuación**, diga ¿cuál es el conjunto solución para esta ecuación?

2. Observe la siguiente ecuación

$$4 = 3y + 5x$$

- Determine si las siguientes duplas satisfacen la ecuación: $(-1,3)$ y $(2,2)$
- En general, ¿Qué duplas satisfacen la ecuación?
- Multiplique por 3 la ecuación, ¿Qué obtiene?
- Grafique la ecuación inicial y la obtenida en (c) ¿Qué puede concluir?

3. Dados las siguientes duplas:

$$(1,3), (-2,1)$$

- Determinar la ecuación que tiene como solución a estas duplas.
- Determine el conjunto solución de la ecuación.

4. Se tiene la siguiente ecuación lineal:

$$x + \frac{1}{3}y = 2$$

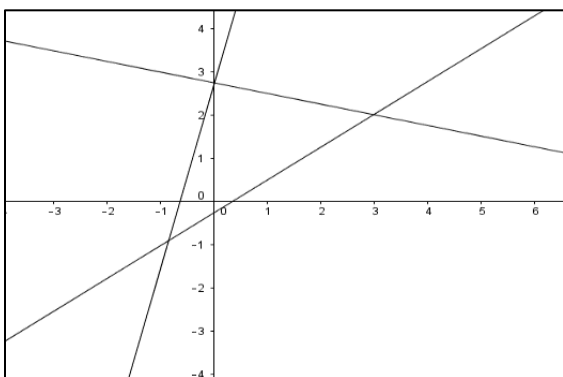
- Escriba el conjunto solución de esa ecuación.
- Grafique la ecuación.

Ahora, tenga en cuenta la siguiente ecuación:

$$2y + 4x = 6$$

- Escriba el conjunto solución de esta ecuación.
- Grafique la ecuación en el mismo plano que graficó la primera ecuación.
- ¿Qué tienen en común las gráficas de ambas ecuaciones?
- Escriba las duplas que son común entre ambas ecuaciones.
- Escriba el conjunto solución del conjunto o sistema de ecuaciones lineales, formado por ambas ecuaciones.

5. Las rectas que se muestran a continuación, están representando las gráficas de tres ecuaciones lineales.



- Describa con sus palabras el sistema de ecuaciones lineales representado.
- ¿Qué tipo de solución tiene el sistema? ¿Por qué?
- ¿Se puede describir un sistema de ecuaciones lineales con 2 soluciones? Si es así realice una representación geométrica del mismo.

Apéndice C. Prueba diagnóstica final



Álgebra Lineal I – 2017I
Escuela de Matemáticas
Facultad de Ciencias

Prueba diagnóstica final

Nombre: _____

Apreciado estudiante: el diseño, desarrollo y evaluación de esta prueba es un insumo fundamental para garantizar que durante el desarrollo del curso usted pueda encontrar los espacios apropiados para potenciar el desarrollo del pensamiento matemático asociado a los conceptos del álgebra lineal. Por tanto le solicitamos que conteste con total sinceridad, explicando los procedimientos que realiza y dando respuesta a todas las situaciones planteadas.

1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, encuentre los valores para k , de tal forma que el sistema tenga única solución. Explique su respuesta.

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 2 \end{cases}$$

2. Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \\ ex + fy = 0 \end{cases}$$

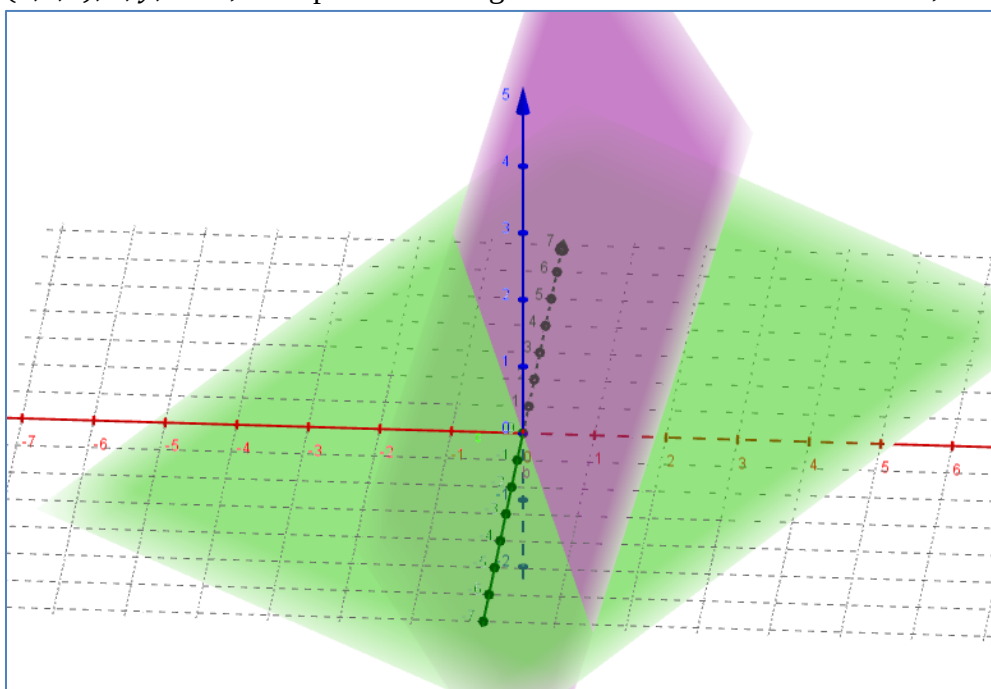
Describa la posición de las rectas, para que:

- a. El sistema solamente tenga la solución trivial
 - b. El sistema tenga soluciones no triviales
3. Sean a, b, c coeficientes reales. Describe cómo interpretarías geométricamente, para cada forma escalonada de las matrices C, A, B , que representan sistemas de ecuaciones lineales, dadas de la siguiente manera:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

4. ¿Cómo le explicarías a un compañero cuál es la diferencia entre conjunto generador y espacio generado? Si lo consideras necesario, utiliza un ejemplo.
5. Establece la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a. $B = \text{Gen}\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,2)\}$ tiene la misma cantidad de elementos que $C = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,2)\}$, justificando tu respuesta.
- b. El vector $(2, -3)$ pertenece al espacio generado por $B = \{(1,0), (0, -1)\} \subset \mathbb{R}^2$.
6. Sean u, v, w tres vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$, $u = (1, -3, 0)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (0, 2, 1)$
- a. ¿Estos puntos son colineales? ¿Por qué? ¿Estos vectores son linealmente dependientes o linealmente independientes? ¿Por qué?
- b. ¿Qué generan estos vectores?
7. Sean $v_1 = (6, -3, 1)$, $v_2 = (2, -1, 1)$, $v_3 = (-2, 1, -4)$ tres vectores en $\mathbb{R}^3$. Para cualquier combinación lineal de la forma: $x(6, -3, 1) + y(2, -1, 1) + z(-2, 1, -4) = (0, 0, 0)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, la representación geométrica del sistema resultante, es la siguiente:



- a. ¿Cuál es la solución del sistema? Justifique su respuesta.
- b. ¿El conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente? Justifique su respuesta.

Una base, es una base ortogonal de un espacio, si el producto escalar o producto interno, dos a dos entre los vectores que la conforman es igual a cero.

8. Pruebe si el siguiente conjunto de vectores forma una base ortogonal para $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(1, -1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Apéndice D. Preguntas de la Entrevista

Preguntas entrevista

1. Considere el siguiente conjunto $F = \{1, x^2, x^2 + 2\}$ de vectores en $P_2(\mathbb{R})$.
 - a. ¿Este conjunto es linealmente independiente o linealmente dependiente?
2. Sean $v_1 = (1, -2, k)$ y $v_2 = (-2, 7, -k)$. Determine para qué valores de k , el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es una base para $\mathbb{R}^2$. ¿Es posible que sea una base para $\mathbb{R}^3$?
3. Para qué valores del número real a , los vectores $(a, 1, 0)$, $(1, 0, a)$ y $(1 + a, 1, a)$ constituyen una base para $\mathbb{R}^3$.
4. De los siguientes conjuntos de vectores, ¿Cuáles son base para el espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$?
 - a) $\{t^2 + 1, t - 1, t + 1\}$
 - b) $\{t^2 + 1, t - 1\}$
 - c) $\{t^2 + t, t^2, t^2 + 1\}$
5. Sean $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ y $H = \left\{ \begin{bmatrix} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$. ¿Es $\{v_1, v_2\}$ una base para H ?