

**IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE RECIPROCIDAD DUAL EN EL ESTUDIO
DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES**

JEFFERSON PINZON MORANTES

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2021

**IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE RECIPROCIDAD DUAL EN EL ESTUDIO
DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES**

JEFFERSON PINZON MORANTES

**Tesis presentada en cumplimiento de los requisitos para el grado de:
Pregrado en Matemáticas**

**Director:
Jhean Eleison Pérez López
Doctor en Matemáticas**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2021

AGRADECIMIENTOS

Para empezar, quiero agradecer a Dios por permitirme este logro tan importante en mi vida. A mi madre que siempre ha estado apoyándome en las buenas y en las malas, a mi padre por sus consejos y a mi hermana que es un ejemplo de superación, ellos han sido y siempre serán mi más importante motivación.

También quiero agradecer a mi director de tesis Jhean Perez que sin él todo esto no hubiera sido posible, quien siempre ha estado dispuesto a ayudarme en todas las dudas que me han surgido, que además de ser un excelente profesional tiene muchas virtudes como ser humano, mis mejores deseos para él, realmente es un ejemplo a seguir.

Finalmente quiero agradecer a mis compañeros y colegas Ricardo Castro, Karina Osorio, Yessica Castrillon, Jhoan Camilo Cancino, Sergio Jiménez y muchos otros. Porque de alguna u otra forma me aportaron cosas positivas en mi carrera y por compartir conmigo todos estos años de amistad.

A todo y por todo lo que ellos representan solo me queda decirles, gracias.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	11
1. PRELIMINARES	14
1.1. Conceptos Fundamentales	14
2. MÉTODO DE ELEMENTOS EN LA FRONTERA	16
2.1. Estimativas Básicas	16
2.2. Discretización de las Integrales	21
2.3. Evaluación de integrales	25
2.4. Construcción de las Matrices	28
2.5. Determinación numérica de coeficientes c_i	31
3. MÉTODO DE RECIPROCIDAD DUAL	33
3.1. Introducción	33
3.2. Ecuación de Laplace	34
3.3. Método de Reciprocidad Dual para ecuaciones de tipo: $\Delta u = b(x, y)$	41
3.3.1. Resultados para la ecuación: $\Delta u = x + y$	46
3.4. Método de Reciprocidad Dual para la ecuación de tipo: $\Delta u = b(x, y, u)$	49
3.4.1. Resultados para la ecuación: $\Delta u = -u$	54
3.4.2. Método iterativo.	57
3.5. Método de Reciprocidad Dual para la ecuación de tipo: $\Delta u = -\partial u / \partial x$	61
3.5.1. Resultados para la ecuación: $\Delta u = -\frac{\partial u}{\partial x}$	63
3.6. Ecuación de Burgers	66
3.6.1. Resultados.	68

3.7. Ecuación de Difusión	74
3.7.1. Resultados.	76
BIBLIOGRAFIA	79
Anexos	81

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Subdivisión de la Frontera Γ en elementos lineales.	21
Figura 2. Esquema geométrico de un elemento Lineal Γ_j	25
Figura 3. Singularidad en el $nodo_j$ compartida por los elementos Γ_{j-1} y Γ_j . . .	26
Figura 4. Primer caso de singularidad en el elemento Γ_j	26
Figura 5. Comparación numérica y exacta de u en el interior utilizando condi- ciones Mixtas.	38
Figura 6. Comparación Numérica y Exacta de u y q en la frontera utilizando condiciones en la frontera de tipo Mixtas.	39
Figura 7. Esquema de 12 nodos frontera y 23 nodos interiores.	40
Figura 8. Gráfica de la solución aproximada usando la condición tipo Dirichlet con 50 nodos frontera y 23 nodos interiores.	40
Figura 9. Definición geométrica del problema.	41
Figura 10. Solución numérica de u utilizando 50 nodos frontera y 43 nodos interiores, considerando la condición de frontera tipo Dirichlet.	49
Figura 11. Solución numérica de u utilizando 50 nodos frontera y 43 nodos interiores.	57
Figura 12. Solución numérica de u utilizando 40 nodos frontera y 43 nodos interiores, condición tipo mixta.	60
Figura 13. Solución numérica de u con 40 nodos en la frontera y 43 nodos interiores, la condición de frontera implementada es tipo Dirichlet.	65
Figura 14. Nodos interiores y frontera para la ecuación de Burgers.	72
Figura 15. Comparativa de la solución numérica de la ecuación de Burger para diferentes tipos de condiciones de frontera.	73

Figura 16. Solución numérica de la ecuación de calor en intervalos de tiempo
 $t = 0$ a $t = 0,4$, utilizando condición de frontera tipo Dirichlet. 78

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. Cuadratura de Gauss	81
Anexo B. Solución de integrales	84

RESUMEN

TÍTULO: IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE RECIPROCIDAD DUAL EN EL ESTUDIO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES. *

AUTOR: JEFFERSON PINZON MORANTES **

PALABRAS CLAVE: MÉTODO DE RECIPROCIDAD DUAL, MÉTODO DE ELEMENTOS DE FRONTERA, ECUACIÓN DE POISSON, ECUACIÓN DE BURGERS Y ECUACIÓN DE CALOR.

DESCRIPCIÓN: Este trabajo se centra en el análisis del Método de Reciprocidad Dual (MRD), una herramienta matemática que permite hacer frente a las integrales de dominio que aparecen en los llamados Métodos de Elementos en la Frontera, a través de una expansión en series con funciones de aproximación. El método se utilizó para resolver problemas lineales homogéneos como la ecuación de Laplace, lineales no homogéneos como la ecuación Poisson y problemas no lineales como la ecuación de Burgers y dependientes del tiempo como la ecuación de calor, con dominio en una circunferencia, utilizando condiciones de frontera tipo Dirichlet, Neumann y Mixtas. El Método de Reciprocidad Dual (MRD) fue introducido por Nardini y Brebbia en 1982 para problemas elasto-dinámicos y extendido por Wrobel y Brebbia a problemas de difusión en 1986, aunque no tan usado como el método de elementos finitos o de diferencias finitas, ha sido usado en diversos trabajos de investigación incluyendo la ecuación de Navier-Stokes 2-Dimensional, problemas de Helmholtz, flujo de Stokes, flujo magneto-hidrodinámico, problemas de haptotaxis y haptotaxis-quimiotaxis, entre otros. En este proyecto se planea introducir los aspectos teóricos básicos relativos al método de reciprocidad dual. El problema consiste en entender los aspectos matemáticos que permiten la deducción de los esquemas numéricos y la implementación de las diferentes rutinas en el software Matlab, abordando algunos problemas sencillos de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.

* Trabajo de investigación

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Jhean Eleison Pérez López, Ph.D.

ABSTRACT

TITLE: IMPLEMENTATION OF THE DUAL RECIPROCITY METHOD IN THE STUDY OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS *

AUTHOR: JEFFERSON PINZON MORANTES **

KEYWORDS: DUAL RECIPROCITY METHOD, RADIAL BASE FUNCTION, BORDER ELEMENTS METHOD, POISSON EQUATION, BURGERS EQUATION AND HEAT EQUATION.

DESCRIPTION: This work is focused on the analysis of the Dual Reciprocity Method (MRD), a mathematical tool that allows dealing with domain integrals that appear in the so-called Boundary Elements Methods, through a series expansion with approximation functions. The method was used to solve homogeneous linear problems such as Laplace's equation, non-homogeneous linear problems such as the Poisson equation, and non-linear problems as the Burgers equation and time dependent as the heat equation, with domain a circumference, using Dirichlet, Neumann and Mixed boundary conditions. The Dual Reciprocity Method (DMR) was introduced by Nardini and Brebbia in 1982 for elastodynamic problems and extended by Wrobel and Brebbia to problems diffusion in 1986, although not as widely used as the method of elements finite or finite difference, has been used in various research works including the 2-Dimensional Navier-Stokes equation, Helmholtz problems, Stokes flow, magneto-hydrodynamic flow, haptotaxis and haptotaxis-chemotaxis problems, among others. In this project it is planned to introduce the basic theoretical aspects related to dual reciprocity method. The problem is to understand the mathematical aspects that allow the deduction of the numerical schemes and the implementation of the different routines in Matlab software, addressing some simple problems of linear and nonlinear differential equations.

* Research work

** Faculty of science. School of mathematics. Advisor: Jhean Eleison Pérez López, Ph.D.

INTRODUCCIÓN

El Método de Elementos en la Frontera (MEF) es ahora una técnica numérica bien establecida que proporciona una alternativa eficiente a los métodos de elementos y diferencias finitas predominantes para la solución de una amplia gama de problemas de ingeniería.

La idea básica detrás del MEF consiste en hacer uso de soluciones fundamentales para transformar la ecuación diferencial en un problema equivalente involucrando ecuaciones integrales únicamente sobre la frontera del dominio. El método fue usado inicialmente por Jawsón ¹ y Symm ² para solucionar ecuaciones tipo Laplace en el modelado de problemas de potenciales. La principal ventaja del MEF es su capacidad para proporcionar una solución completa del problema en términos de valores en la frontera únicamente, reduciendo la dimensión en uno, con ahorros sustanciales en el tiempo de cómputo y en el esfuerzo de preparación de datos, hecho que ha incentivado la extensión de este a problemas de aplicación más complicados. Sin embargo, el principal inconveniente en el método son los términos en la ecuación que después de multiplicar por la solución fundamental e integrar no pueden ser reducidos a una integral de frontera, como es en general el caso de la ecuación de Poisson. Dichos términos aparecen entonces como integrales de dominio haciendo que la técnica pierda su valor como método de "solo frontera".

¹ JASWON, M. A. "Integral Equation Methods in Potential Theory. I". eng. En: 275.1360 (1963), págs. 23-32.

² SYMM, G. T. "Integral Equation Methods in Potential Theory. II". eng. En: 275.1360 (1963), págs. 33-46.

Con el objetivo de superar dicho inconveniente varios métodos han sido propuestos por diferentes autores, los más importantes son: Integración analítica de las Integrales de dominio, el uso de las expansiones de Fourier, la técnica vectorial de Galerkin, el método de reciprocidad múltiple y el método de reciprocidad dual (véase ³, ⁴, ⁵, ⁶, ⁷ y sus referencias), este último siendo el más exitoso hasta ahora ya que puede usarse con cualquier tipo de solución fundamental y evita las integrales de dominio, sin embargo, permite la definición de nodos internos si el usuario así lo desea. Además, es el método más fácil de usar en la práctica y este será el tema central de esta monografía.

El Método de Reciprocidad Dual (MRD) fue introducido por Nardini y Brebbia en 1982 para problemas elastodinámicos y extendido por Wrobel y Brebbia a problemas de difusión en 1986.

La esencia del MRD es emplear una solución fundamental correspondiente a una ecuación más simple y tratar los términos restantes, así como otros términos no homogéneos en la ecuación original, a través de un procedimiento que implica una

³ CRUSE, T.A; SNOW, D.W y WILSON, R.B. "Numerical solutions in Axisymmetric Elasticity". eng. En: *Computers structures* 7.3 (1977), págs. 445-451.

⁴ WU, Y. S , *et al.* "An Advanced Boundary Integral Equation Method for Two-Dimensional Electromagnetic Field Problems". eng. En: *Electric Machines and Power Systems* 1.4 (1977), págs. 301-313.

⁵ GRÜNDEMANN, H. "Transforming Domain Into Boundary Integrals in BEM, Lecture Notes in Engineering". eng. En: *Mechanism and Machine Theory* 25.2 (1990), págs. 241-241.

⁶ NOWAK, A.J y BREBBIA, C.A. "The Multiple-Reciprocity Method. A New Approach for Transforming BEM Domain Integrals to the Boundary". eng. En: *Engineering analysis with boundary elements* 6.3 (1989), págs. 164-167.

⁷ PARTRIDGE, P. W; BREBBIA, C. A y WROBEL, L. C. "The Dual Reciprocity Boundary Element Method". eng. En: (1991).

expansión en serie utilizando funciones de aproximación global. El método de reciprocidad dual, aunque no tan usado como el método de elementos finitos o de diferencias finitas, ha sido usado en diversos trabajos de investigación incluyendo la ecuación de Navier-Stokes 2-Dimensional ⁸, problemas de Helmholtz ⁹, flujo de Stokes ¹⁰, flujo magneto-hidrodinámico ¹¹, problemas de haptotaxis y haptotaxis-quimiotaxis ¹², entre otros.

En el presente proyecto se planea introducir los aspectos teóricos básicos relativos al método de reciprocidad dual. El problema consiste en entender los aspectos matemáticos que permiten la deducción de los esquemas numéricos y la implementación de las diferentes rutinas en el software Matlab, abordando algunos problemas sencillos de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales.

Los programas implementados los puede encontrar en el siguiente enlace:

<https://github.com/Jeffersonpinzon/M-todo-de-Reciprocidad-Dual>

-
- ⁸ GHADIMI, P. y DASHTIMANESH, A. "Solution of 2D Navier–Stokes Equation by Coupled Finite Difference-Dual Reciprocity Boundary Element Method". eng. En: 35.5 (2011), págs. 2110-2121.
- ⁹ LOEFFLER, C. F., *et al.* "Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method using Direct Radial Basis Function Interpolation". eng. En: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 61 (2015), págs. 218-225.
- ¹⁰ POWER, H. y PARTRIDGE, P. W. "Dual Reciprocity Boundary Element Method for the Time-Dependent Stokes Flows". eng. En: *International Journal of Numerical Methods For Heat Fluid Flow* 3.2 (1993), págs. 145-155.
- ¹¹ TEZER-SEZGIN, M. y AYDIN, S. Han. "Dual Reciprocity Boundary Element Method for Magneto-hydrodynamic Flow Using Radial Basis Functions". eng. En: *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 16 (2002), págs. 49-63.
- ¹² MERAL, G. "DRBEM-FDM Solution of a Chemotaxis–Haptotaxis Model for Cancer Invasion". eng. En: *Journal of computational and applied mathematics* 354 (2018), págs. 299-309.

1. PRELIMINARES

1.1. Conceptos Fundamentales

La idea central del método de reciprocidad dual es transformar problemas diferenciales en problemas integrales involucrando solo integrales sobre la frontera haciendo uso de soluciones fundamentales. En el desarrollo de este trabajo se hará uso recurrente de la solución fundamental de la ecuación de Laplace, la cual es definida a continuación.

Definición 1.1.1 *La función*

$$u^*(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|) & \text{si } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3, \end{cases} \quad (1)$$

definida para todo $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ es llamada la solución fundamental de la ecuación de Laplace (centrada en cero). En la ecuación anterior $\alpha(n)$ denota la medida de la bola unitaria en \mathbb{R}^n , la cual es dada por

$$\alpha(n) = \int_{B(0,1)} 1 \cdot dx = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)},$$

en donde Γ representa la función Gamma.

Para efectos de implementación numérica, dado un conjunto de puntos $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ denotamos por u_i^* la solución fundamental centrada en x_i , esto es

$$u_i^*(x) := u^*(x - x_i).$$

Los teoremas que siguen muestran algunas identidades importantes que permiten transformar integrales de dominio a integrales sobre la frontera del dominio ¹³.

En general, en lo que sigue usamos la notación $|\cdot|$ para representar la norma euclidiana en \mathbb{R}^2 y $\Gamma(E)$ para representar la frontera del conjunto E , en particular, se tiene que $\Gamma = \Gamma(\Omega)$.

Teorema 1.1.2 (Fórmula de integración por partes). Sean $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$. Entonces

$$\int_{\Omega} u_{x_i} v dx = - \int_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int_{\Gamma} u v \eta^i d\Gamma \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

donde $\eta = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n)$, es el vector unitario normal exterior en Γ .

Teorema 1.1.3 (Fórmulas de Green). Sean $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Entonces

$$i) \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\Gamma,$$

$$ii) \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\Gamma,$$

$$iii) \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma.$$

¹³ EVANS, L.C. "Partial differential equations, 2d ed". eng. En: *Department of Mathematics University Of California, Berkeley* 19.2 (2010).

2. MÉTODO DE ELEMENTOS EN LA FRONTERA

2.1. Estimativas Básicas

En lo que sigue consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y sea (x_i, y_i) un punto arbitrario de \mathbb{R}^2 . En este caso la solución fundamental de la ecuación de Laplace, centrada en (x_i, y_i) , viene dada por

$$u_i^*(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln |(x, y) - (x_i, y_i)|. \quad (3)$$

Note que en este caso se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla u_i^* &= \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{x - x_i}{|(x, y) - (x_i, y_i)|^2}, -\frac{1}{2\pi} \frac{y - y_i}{|(x, y) - (x_i, y_i)|^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|(x, y) - (x_i, y_i)|^2} (x - x_i, y - y_i). \end{aligned} \quad (4)$$

En la aplicación del Método de Reciprocidad Dual es necesario estimar repetidas veces la integral

$$\int_{\Omega} \Delta u u_i^*, \quad (5)$$

suponiendo que u es una función suficientemente regular.

Si se tiene que $(x_i, y_i) \in \Omega$, la integral (5) es una integral singular ya que la función u_i^* tiene una singularidad en (x_i, y_i) . Con el objetivo de estimar (5) consideramos una bola $B_{i,\epsilon} = B((x_i, y_i), \epsilon)$ con centro (x_i, y_i) y radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Usando las fórmulas de Green se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon}} \Delta u u_i^* dx &= - \int_{\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon}} \nabla u \nabla u_i^* dx + \int_{\Gamma(\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon})} \frac{\partial u}{\partial \eta} u_i^* d\Gamma \\ &= \int_{\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon}} u \Delta u_i^* dx - \int_{\Gamma(\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon})} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma(\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon})} \frac{\partial u}{\partial \eta} u_i^* d\Gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\Gamma(\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon})$ es la frontera del conjunto $\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon}$.

Consideremos ahora cada término en el lado derecho de la ecuación (6). Para el primer término note que

$$\int_{\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon}} u \Delta u_i^* dx = 0, \quad (7)$$

ya que u_i^* es solución de la ecuación de Laplace en $\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon}$. Para el segundo término se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma(\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon})} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma &= \int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} u \nabla u_i^* \eta d\Gamma. \end{aligned}$$

Note que en este caso, sobre $\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})$ se tiene que $\eta = -\frac{(x,y)-(x_i,y_i)}{|(x,y)-(x_i,y_i)|} = -\frac{(x-x_i,y-y_i)}{\epsilon}$, así, usando (4) se obtiene

$$\int_{\Gamma(\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon})} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} u d\Gamma. \quad (8)$$

Note que

$$u(x_i, y_i) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} u(x_i, y_i) d\Gamma,$$

así

$$\frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} u d\Gamma - u(x_i, y_i) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} u(x, y) - u(x_i, y_i) d\Gamma. \quad (9)$$

De la continuidad de u en (x_i, y_i) , dado $\delta > 0$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño se tiene que

$$|u(x, y) - u(x_i, y_i)| < \delta \quad \text{si} \quad |(x, y) - (x_i, y_i)| < \epsilon,$$

por lo tanto, dado $\delta > 0$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} u d\Gamma - u(x_i, y_i) \right| &\leq \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} |u(x, y) - u(x_i, y_i)| d\Gamma \\ &\leq \delta \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} 1 d\Gamma = \delta, \end{aligned}$$

de lo que sigue

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} u d\Gamma - u(x_i, y_i) \right| \leq \delta \quad \forall \delta > 0.$$

Lo anterior implica que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} u d\Gamma - u(x_i, y_i) \right| = 0.$$

Entonces de (9) se obtiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} u d\Gamma = u(x_i, y_i). \quad (10)$$

Por lo tanto, tomando límite en (8) llegamos a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma(\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon})} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + u(x_i, y_i). \quad (11)$$

Finalmente, para estimar el tercer término en el lado derecho de (6), note que

$$\int_{\Gamma(\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon})} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma.$$

Sea ϵ_0 fijo. Si $\epsilon < \epsilon_0$, entonces

$$\left| \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} \right|_{L^\infty(\bar{B}_{i,\epsilon})} \leq \left| \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} \right|_{L^\infty(\bar{B}_{i,\epsilon_0})}.$$

Así, para $\epsilon < \epsilon_0$ se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma \right| &\leq \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} |u_i^*| \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right| d\Gamma \leq \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{L^\infty(\bar{B}_{i,\epsilon})} \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} |u_i^*| d\Gamma \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{L^\infty(\bar{B}_{i,\epsilon_0})} \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} \ln(\epsilon) d\Gamma = C\epsilon \ln(\epsilon). \end{aligned}$$

de lo que sigue que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma(\bar{B}_{i,\epsilon})} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma = 0, \quad (12)$$

y por lo tanto

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma(\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon})} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma. \quad (13)$$

Con todo

$$\int_{\Omega} \Delta u u_i^* = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus \bar{B}_{i,\epsilon}} \Delta u u_i^* = 0 - \left(\int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + u(x_i, y_i) \right) + \int_{\Gamma} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma,$$

así

$$\int_{\Omega} \Delta u u_i^* = -u(x_i, y_i) - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma. \quad (14)$$

Cuando el punto (x_i, y_i) está en la frontera Γ procedemos de la siguiente forma: dado $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño y $(x_i, y_i) \in \Gamma$, definimos $\Omega_{i,\epsilon_0} = \Omega \cup B((x_i, y_i), \epsilon_0)$.

Trabajando en Ω_{i,ϵ_0} se tiene que (x_i, y_i) , es un punto interior, y por lo hecho anteriormente

$$\int_{\Omega_{i,\epsilon_0}} \Delta u u_i^* = -u(x_i, y_i) - \int_{\Gamma(\Omega_{i,\epsilon_0})} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma(\Omega_{i,\epsilon_0})} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma. \quad (15)$$

Note que

$$\int_{\Gamma(\Omega_{i,\epsilon_0})} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Gamma \setminus \bar{B}_{i,\epsilon_0}} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma_{i,\epsilon_0}^*} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma,$$

donde $\Gamma_{i,\epsilon_0}^* = \Gamma(\Omega_{i,\epsilon_0}) \cap \bar{B}_{i,\epsilon_0}$. Además

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{i,\epsilon_0}^*} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma &= \int_{\Gamma_{i,\epsilon_0}^*} u \nabla u_i^* \eta d\Gamma = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma_{i,\epsilon_0}^*} u d\Gamma \\ &= \frac{|\Gamma_{i,\epsilon_0}^*|}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\Gamma_{i,\epsilon_0}^*|} \int_{\Gamma_{i,\epsilon_0}^*} u d\Gamma \right) \\ &= \frac{|\Gamma_{i,\epsilon_0}^*|}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\Gamma_{i,\epsilon_0}^*|} \int_{\Gamma_{i,\epsilon_0}^*} (u(x,y) - u(x_i, y_i)) d\Gamma + u(x_i, y_i) \right). \end{aligned}$$

Así, tomando el límite cuando $\epsilon_0 \rightarrow 0$, y justificando como en la deducción de (10), se tiene que

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \int_{\Gamma(\Omega_{i,\epsilon_0})} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma - \tilde{c}_i u(x_i, y_i), \quad (16)$$

donde $\tilde{c}_i = \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \frac{|\Gamma_{i,\epsilon_0}^*|}{2\pi\epsilon_0}$, en particular, si $(x_i, y_i) \in \Gamma$ está en una parte suave de Γ , se tiene que $\tilde{c}_i = \frac{1}{2}$.

Por otro lado, también se tiene la estimativa

$$\int_{\Gamma(\Omega_{i,\epsilon_0})} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Gamma \setminus B_{i,\epsilon_0}} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma_{i,\epsilon_0}^*} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma.$$

Procediendo similarmente a la demostración de (12), se concluye que

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{i,\epsilon_0}^*} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma = 0,$$

Por lo tanto

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \int_{\Gamma(\Omega_{i,\epsilon_0})} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Gamma} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma. \quad (17)$$

Así, tomando $\epsilon_0 \rightarrow 0$ en (15) y usando (16) y (17) se llega a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u u_i^* &= -u(x_i, y_i) - \left(\int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma - \tilde{c}_i u(x_i, y_i) \right) + \int_{\Gamma} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma \\ &= -c_i u(x_i, y_i) - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma. \end{aligned} \quad (18)$$

En resumen, para todo $(x_i, y_i) \in \bar{\Omega}$ se tiene la igualdad

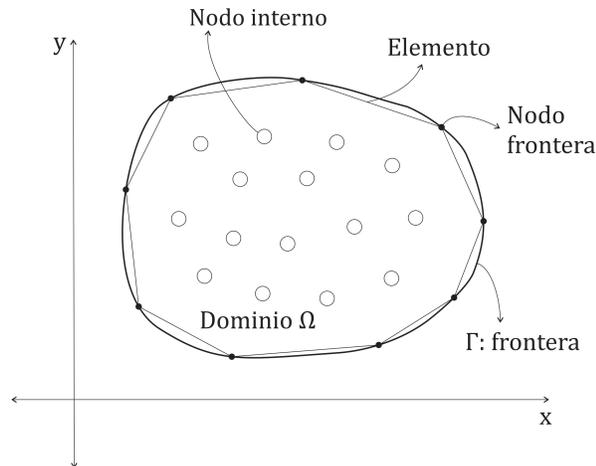
$$\int_{\Omega} \Delta u u_i^* = -c_i u(x_i, y_i) - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma, \quad (19)$$

en donde $c_i = 1$ si $(x_i, y_i) \in \bar{\Omega}$ y $c_i = 1/2$ si (x_i, y_i) está en una parte suave de la frontera Γ .

2.2. Discretización de las Integrales

Para poder discretizar completamente el lado derecho de (19) es necesario discretizar las integrales de frontera. Para ello, consideramos N puntos sobre la frontera, llamados nodos, y consideramos el segmento lineal que une cada nodo consecutivo, como se ve en la Figura 1.

Figura 1. Subdivisión de la Frontera Γ en elementos lineales.



Usando la notación $q_i^* = \nabla u_i^* \eta = \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta}$ y $q = \nabla u \eta = \frac{\partial u}{\partial \eta}$, una aproximación de (19) viene dada por

$$\int_{\Omega} \Delta u u_i^* = -c_i u_i - \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u q_i^* d\Gamma + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u_i^* q d\Gamma. \quad (20)$$

Para estimar la integral sobre cada segmento lineal Γ_j , consideramos la siguiente parametrización

$$\gamma(\xi) = \phi_1(\xi) \text{nodo}_j + \phi_2(\xi) \text{nodo}_{j+1} \quad y \quad \xi \in [-1, 1], \quad (21)$$

donde

$$\phi_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2} \quad y \quad \phi_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2}.$$

Note que

$$\gamma'(\xi) = \frac{\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j}{2} \quad y \quad |\gamma'(\xi)| = \frac{1}{2} |\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j|. \quad (22)$$

Así,

$$\int_{\Gamma_j} u q_i^* d\Gamma = \int_{-1}^1 u(\gamma(\xi)) q_i^*(\gamma(\xi)) |\gamma'(\xi)| d\xi,$$

y

$$\int_{\Gamma_j} u_i^* q d\Gamma = \int_{-1}^1 u_i^*(\gamma(\xi)) q(\gamma(\xi)) |\gamma'(\xi)| d\xi.$$

Asumimos ahora un comportamiento lineal de las funciones u y q , sobre Γ_j de la

siguiente forma

$$u(\gamma(\xi)) = \phi_1(\xi)u_j + \phi_2(\xi)u_{j+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$q(\gamma(\xi)) = \phi_1(\xi)q_j + \phi_2(\xi)q_{j+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ q_{j+1} \end{bmatrix},$$

donde u_j, q_j representan los valores en el nodo j de las funciones u y q , respectivamente. Con lo anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} u q_i^* d\Gamma &= \int_{-1}^1 u(\gamma(\xi)) q_i^*(\gamma(\xi)) |\gamma'(\xi)| d\xi \\ &= \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} q_i^*(\gamma(\xi)) |\gamma'(\xi)| d\xi \begin{bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_{i,j}^1 & h_{i,j}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (24)$$

donde, para cada elemento j , tenemos los dos términos

$$h_{i,j}^1 = \int_{-1}^1 \phi_1(\xi) q_i^*(\gamma(\xi)) |\gamma'(\xi)| d\xi \quad \text{y} \quad h_{i,j}^2 = \int_{-1}^1 \phi_2(\xi) q_i^*(\gamma(\xi)) |\gamma'(\xi)| d\xi. \quad (25)$$

Por lo tanto

$$h_{i,j}^1 = \frac{1}{2} |\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j| \int_{-1}^1 \phi_1 q_i^*(\gamma(\xi)) d\xi, \quad (26)$$

$$h_{i,j}^2 = \frac{1}{2} |\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j| \int_{-1}^1 \phi_2 q_i^*(\gamma(\xi)) d\xi. \quad (27)$$

Denotando por $p_i = (x_i, y_i)$, y recordando que usamos la notación u_i^* para indicar la solución fundamental centrada en p_i , se tiene que se tiene que

$$q_i^*(\gamma(\xi)) = \nabla u_i^*(\gamma(\xi))\eta(\gamma(\xi)) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\gamma(\xi) - p_i}{|\gamma(\xi) - p_i|^2} \eta(\gamma(\xi)),$$

así, (26) y (27) se reducen a

$$h_{i,j}^1 = -\frac{1}{8\pi} |nodo_{j+1} - nodo_j| \int_{-1}^1 (1 - \xi) \frac{\gamma(\xi) - p_i}{|\gamma(\xi) - p_i|^2} \eta(\gamma(\xi)) d\xi, \quad (28)$$

$$h_{i,j}^2 = -\frac{1}{8\pi} |nodo_{j+1} - nodo_j| \int_{-1}^1 (1 + \xi) \frac{\gamma(\xi) - p_i}{|\gamma(\xi) - p_i|^2} \eta(\gamma(\xi)) d\xi. \quad (29)$$

Por otro lado, la integral en el lado derecho de (20) da

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} u_i^* q d\Gamma &= \int_{-1}^1 u_i^*(\gamma(\xi)) q(\gamma(\xi)) |\gamma'(\xi)| d\xi \\ &= \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} u_i^*(\gamma(\xi)) |\gamma'(\xi)| d\xi \begin{bmatrix} q_j \\ q_{j+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} g_{i,j}^1 & g_{i,j}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j \\ q_{j+1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (30)$$

donde

$$g_{i,j}^1 = \int_{-1}^1 \phi_1(\xi) u_i^*(\gamma(\xi)) |\gamma'(\xi)| d\xi \quad \mathbf{y} \quad g_{i,j}^2 = \int_{-1}^1 \phi_2(\xi) u_i^*(\gamma(\xi)) |\gamma'(\xi)| d\xi. \quad (31)$$

Usando la definición de la solución fundamental u_i^* finalmente obtenemos

$$g_{i,j}^1 = -\frac{1}{8\pi} |nodo_{j+1} - nodo_j| \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln(|\gamma(\xi) - p_i|) d\xi, \quad (32)$$

$$g_{i,j}^2 = -\frac{1}{8\pi} |\text{nodo}_{j+1} - \text{nodo}_j| \int_{-1}^1 (1 + \xi) \ln(|\gamma(\xi) - p_i|) d\xi. \quad (33)$$

2.3. Evaluación de integrales

Abordamos ahora el cálculo de las integrales que definen los coeficientes $h_{i,j}^1$, $h_{i,j}^2$, $g_{i,j}^1$ y $g_{i,j}^2$. Note que si p_i no está en el segmento Γ_j , los coeficientes $h_{i,j}^1$, $h_{i,j}^2$, $g_{i,j}^1$ y $g_{i,j}^2$ pueden aproximarse utilizando fórmulas de integración numérica (como la cuadratura de Gauss). En el caso en que p_i está sobre Γ_j las integrales son singulares y se requiere un esquema de integración numérica más preciso o calcular dichas integrales analíticamente.

Por ser los puntos de interés, consideramos los casos en que $p_i = \text{nodo}_j$ y $p_i = \text{nodo}_{j+1}$. En estos casos se tiene directamente que $h_{j,j}^1 = h_{j,j}^2 = h_{j+1,j}^1 = h_{j+1,j}^2 = 0$ pues los vectores $\gamma(\xi) - p_i$ y $\eta(\gamma(\xi))$ resultan ser perpendiculares entre sí. El cálculo para $g_{i,j}^1$ y $g_{i,j}^2$ no es tan directo y necesitamos considerar dos casos:

Figura 2. Esquema geométrico de un elemento Lineal Γ_j .

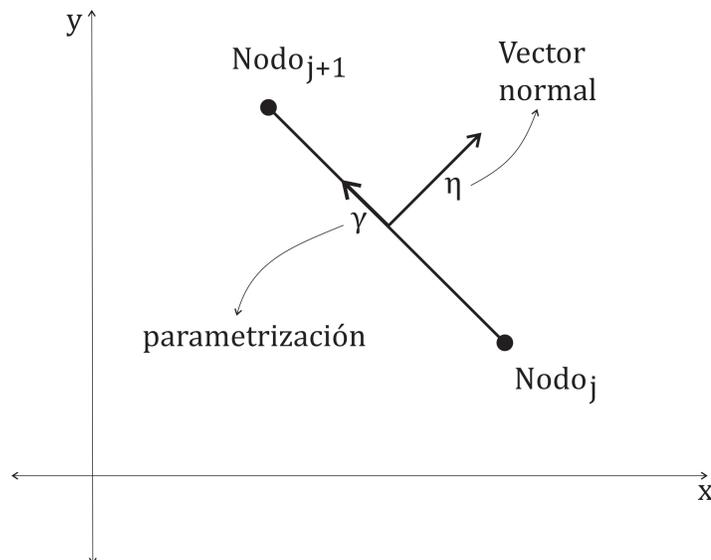
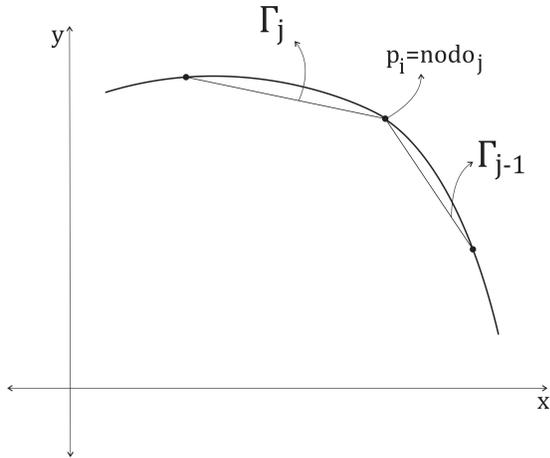
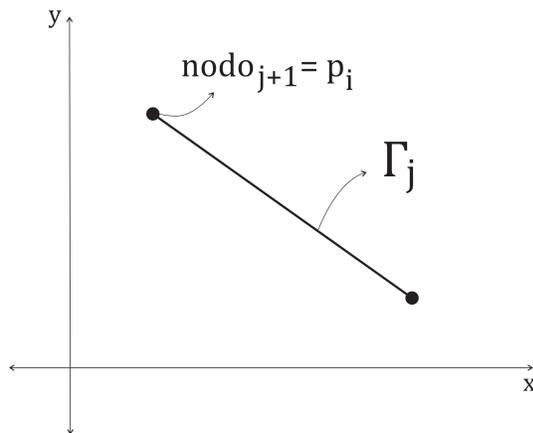


Figura 3. Singularidad en el $nodo_j$ compartida por los elementos Γ_{j-1} y Γ_j .



Caso 1: Cuando la solución fundamental está centrada en $p_i = nodo_{j+1}$.

Figura 4. Primer caso de singularidad en el elemento Γ_j .



Para este caso tenemos que

$$\begin{aligned}
g_{j+1,j}^1 &= \\
&= -\frac{|nodo_{j+1} - nodo_j|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| \frac{(1 - \xi)}{2} nodo_j + \frac{(1 + \xi)}{2} nodo_{j+1} - nodo_{j+1} \right| \right) d\xi \\
&= -\frac{|nodo_{j+1} - nodo_j|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| \xi \frac{(nodo_{j+1} - nodo_j)}{2} + \frac{(nodo_j - nodo_{j+1})}{2} \right| \right) d\xi \\
&= -\frac{|nodo_{j+1} - nodo_j|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| (nodo_{j+1} - nodo_j) \frac{(1 - \xi)}{2} \right| \right) d\xi \\
&= -\frac{|l|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| |l| \left| \frac{(1 - \xi)}{2} \right| \right| \right) d\xi,
\end{aligned}$$

donde $l = nodo_{j+1} - nodo_j$. La última integral se resuelve en el Anexo B para obtener

$$\int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| |l| \left| \frac{(1 - \xi)}{2} \right| \right| \right) d\xi = 2 \ln(|l|) - 1.$$

$$\int_{-1}^1 (1 + \xi) \ln \left(\left| |l| \left| \frac{(1 - \xi)}{2} \right| \right| \right) d\xi = 2 \ln(|l|) - 3.$$

Así,

$$g_{j+1,j}^2 = -\frac{1}{8\pi} |nodo_{j+1} - nodo_j| (2 \ln(|nodo_{j+1} - nodo_j|) - 3) \quad (34)$$

Caso 2: La solución fundamental está centrada en $p_i = nodo_j$.

En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}
g_{j,j}^1 &= \\
&= -\frac{|nodo_{j+1} - nodo_j|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| \frac{(1 - \xi)}{2} nodo_j + \frac{(1 + \xi)}{2} nodo_{j+1} - nodo_j \right| \right) d\xi \\
&= -\frac{|nodo_{j+1} - nodo_j|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| \xi \frac{(nodo_{j+1} - nodo_j)}{2} + \frac{(nodo_{j+1} - nodo_j)}{2} \right| \right) d\xi \\
&= -\frac{|nodo_{j+1} - nodo_j|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| (nodo_{j+1} - nodo_j) \frac{(1 + \xi)}{2} \right| \right) d\xi \\
&= -\frac{|l|}{8\pi} \int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| |l| \frac{(1 + \xi)}{2} \right| \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Note que (usando un cambio de variables en las integrales) se tiene que

$$g_{j,j}^1 = g_{j+1,j}^2,$$

así,

$$g_{j,j}^1 = -\frac{1}{8\pi} |nodo_{j+1} - nodo_j| (2 \ln(|nodo_{j+1} - nodo_j|) - 3). \quad (35)$$

Similarmente se deduce que

$$g_{j,j}^2 = g_{j+1,j}^1,$$

lo que implica que

$$g_{j,j}^2 = -\frac{1}{8\pi} |nodo_{j+1} - nodo_j| (2 \ln(|nodo_{j+1} - nodo_j|) - 1). \quad (36)$$

2.4. Construcción de las Matrices

Una vez conocidos los coeficientes $h_{i,j}^1$, $h_{i,j}^2$, $g_{i,j}^1$ y $g_{i,j}^2$ sustituimos las ecuaciones (24) y (30) en la ecuación (20), para obtener

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \Delta u u_i^* &= \\
&= -c_i u(x_i, y_i) - \sum_{j=1}^N (h_{i,j}^1 u_{nodo_j} + h_{i,j}^2 u_{nodo_{j+1}}) + \sum_{j=1}^N (g_{i,j}^1 q_{nodo_j} + g_{i,j}^2 q_{nodo_{j+1}}). \quad (37)
\end{aligned}$$

En lo que sigue buscamos escribir el lado derecho de (37) en forma matricial. Denotamos por \vec{u}_{fron} al vector $(u_{nodo_1}, u_{nodo_2}, u_{nodo_3}, \dots, u_{nodo_N})$ y por \vec{q}_{fron} al vector $(q_{nodo_1}, q_{nodo_2}, q_{nodo_3}, \dots, q_{nodo_N})$. Con esto se tiene que

$$\begin{aligned}
&-c_i u(x_i, y_i) - \sum_{j=1}^N (h_{i,j}^1 u_{nodo_j} + h_{i,j}^2 u_{nodo_{j+1}}) + \sum_{j=1}^N (g_{i,j}^1 q_{nodo_j} + g_{i,j}^2 q_{nodo_{j+1}}) = \\
&= -c_i u(x_i, y_i) - (H_i^1 \vec{u}_{fron} + H_i^2 \vec{u}_{fron}) + (G_i^1 \vec{q}_{fron} + G_i^2 \vec{q}_{fron}), \quad (38)
\end{aligned}$$

note que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N h_{i,j}^2 u_{nodo_{j+1}} &= \sum_{j=1}^{N-1} h_{i,j}^2 u_{nodo_{j+1}} + h_{i,N}^2 u_{nodo_{N+1}} = \\
&= \sum_{j=2}^N h_{i,j-1}^2 u_{nodo_j} + h_{i,N}^2 u_{nodo_1} = \sum_{j=1}^N h_{i,j-1}^2 u_{nodo_j},
\end{aligned}$$

donde $h_{i,0}^2 = h_{i,N}^2, H_i^1 = (h_{i,1}^1, h_{i,2}^1, \dots, h_{i,N}^1), H_i^2 = (h_{i,N}^2, h_{i,1}^2, \dots, h_{i,N-1}^2), G_i^1 = (g_{i,1}^1, g_{i,2}^1, \dots, g_{i,N}^1)$ y de forma análoga tenemos $G_i^2 = (g_{i,N}^2, g_{i,2}^2, \dots, g_{i,N-1}^2)$.

Tomando por ejemplo los puntos p_i como $p_i = nodo_i$ con $i = 1, 2, \dots, N$, se forma el siguiente sistema escrito en forma matricial

$$-C \vec{u}_{fron} - (H^1 \vec{u}_{fron} + H^2 \vec{u}_{fron}) + (G^1 \vec{q}_{fron} + G^2 \vec{q}_{fron}),$$

donde C es una matriz diagonal cuya diagonal principal es el vector $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)$

y

$$H^1 = \begin{pmatrix} h_{1,1}^1 & h_{1,2}^1 & \cdots & h_{1,N}^1 \\ h_{2,1}^1 & h_{2,2}^1 & \cdots & h_{2,N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,1}^1 & h_{N,2}^1 & \cdots & h_{N,N}^1 \end{pmatrix} \quad H^2 = \begin{pmatrix} h_{1,N}^2 & h_{1,1}^2 & \cdots & h_{1,N-1}^2 \\ h_{2,N}^2 & h_{2,1}^2 & \cdots & h_{2,N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,N}^2 & h_{N,1}^2 & \cdots & h_{N,N-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$G^1 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^1 & g_{1,2}^1 & \cdots & g_{1,N}^1 \\ g_{2,1}^1 & g_{2,2}^1 & \cdots & g_{2,N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N,1}^1 & g_{N,2}^1 & \cdots & g_{N,N}^1 \end{pmatrix} \quad G^2 = \begin{pmatrix} g_{1,N}^2 & g_{1,1}^2 & \cdots & g_{1,N-1}^2 \\ g_{2,N}^2 & g_{2,1}^2 & \cdots & g_{2,N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N,N}^2 & g_{N,1}^2 & \cdots & g_{N,N-1}^2 \end{pmatrix}.$$

De lo que obtenemos

$$-C\vec{u}_{fron} - \bar{H}\vec{u}_{fron} + G\vec{q}_{fron},$$

donde $\bar{H} = H^1 + H^2$ y $G = G^1 + G^2$. Note que las matrices \bar{H} y G dependen de los puntos de frontera escogidos, para enfatizar esto escribimos

$$-C\vec{u}_{fron} - \bar{H}_{fron}\vec{u}_{fron} + G_{fron}\vec{q}_{fron}. \quad (39)$$

Si consideramos por ejemplo un conjunto de NI de puntos interiores y usamos (38) sobre cada uno de dichos puntos se obtiene el sistema matricial

$$-\vec{u}_{int} - \bar{H}_{int}\vec{u}_{fron} + G_{int}\vec{q}_{fron}, \quad (40)$$

donde \vec{u}_{int} representa el vector de valores de u en los puntos interiores, $\bar{H}_{int} = H_{int}^1 + H_{int}^2$ y $G_{int} = G_{int}^1 + G_{int}^2$, con

$$H_{int}^1 = \begin{pmatrix} h_{1,1}^1 & h_{1,2}^1 & \cdots & h_{1,N}^1 \\ h_{2,1}^1 & h_{2,2}^1 & \cdots & h_{2,N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{NI,1}^1 & h_{NI,2}^1 & \cdots & h_{NI,N}^1 \end{pmatrix} \quad H_{int}^2 = \begin{pmatrix} h_{1,N}^2 & h_{1,1}^2 & \cdots & h_{1,N-1}^2 \\ h_{2,N}^2 & h_{2,1}^2 & \cdots & h_{2,N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{NI,N}^2 & h_{NI,1}^2 & \cdots & h_{NI,N-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$G_{int}^1 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^1 & g_{1,2}^1 & \cdots & g_{1,N}^1 \\ g_{2,1}^1 & g_{2,2}^1 & \cdots & g_{2,N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{NI,1}^1 & g_{NI,2}^1 & \cdots & g_{NI,N}^1 \end{pmatrix} \quad G_{int}^2 = \begin{pmatrix} g_{1,N}^2 & g_{1,1}^2 & \cdots & g_{1,N-1}^2 \\ g_{2,N}^2 & g_{2,1}^2 & \cdots & g_{2,N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{NI,N}^2 & g_{NI,1}^2 & \cdots & g_{NI,N-1}^2 \end{pmatrix}.$$

2.5. Determinación numérica de coeficientes c_i

Es claro de la deducción de los coeficientes c_i en (19) que dichos coeficientes (cuando el punto p_i es considerado sobre la frontera) dependen del comportamiento de la frontera en dicho punto, se mostró que en particular dichos coeficientes son $1/2$ cuando los puntos p_i son tomados en porciones suaves de la frontera, en caso contrario se puede mostrar que dichos coeficientes dependen del ángulo formado entre las curvas definidas antes y después del punto p_i . En lo que sigue mostramos una forma indirecta de calcular dichos coeficientes, para esto considere la función $u(x, y) = 1$ en $\bar{\Omega}$, entonces u verifica que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 1 & \text{sobre } \Gamma, \\ q = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{cases} \quad (41)$$

Así, de (37) y (39) sigue que

$$0 = -C\vec{u}_{fron} - \bar{H}_{fron}\vec{u}_{fron} = -C\vec{1} - \bar{H}_{fron}\vec{1}.$$

Esto es,

$$C\vec{1} = -\bar{H}_{fron}\vec{1},$$

donde, recordando, C es una matriz diagonal cuya diagonal principal es el vector formado por los coeficientes c_i . De la anterior ecuación se deduce directamente que

$$c_i = -\sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} = -\sum_{\substack{j=1 \\ (\text{para } j \neq i)}}^N \bar{H}_{ij},$$

ya que por construcción $\bar{H}_{ii} = 0$.

Una vez conocidos los coeficientes c_i , y por lo tanto la matriz C , la ecuación (39) suele escribirse de forma resumida como

$$-H_{fron}\vec{u}_{fron} + G_{fron}\vec{q}_{fron}, \tag{42}$$

donde $H_{fron} = C + \bar{H}_{fron}$.

3. MÉTODO DE RECIPROCIDAD DUAL

3.1. Introducción

En este capítulo se presentará la formulación del Método de Reciprocidad Dual (MRD) para resolver la ecuación de Poisson:

$$\Delta u = b, \quad (43)$$

en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con frontera Γ suave. Como la frontera Γ de Ω es diferente de vacío, es natural requerir información de u o de alguna de sus derivadas en la frontera Γ . Las condiciones de frontera más comunes son:

1) Condiciones tipo Dirichlet:

$$u = \bar{u} \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (44)$$

2) Condiciones tipo Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \bar{q} \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (45)$$

3) Condiciones Mixtas

$$u = \bar{u} \quad \text{sobre } \Gamma_1, \quad (46)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \bar{q} \quad \text{sobre } \Gamma_2, \quad (47)$$

donde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

En este trabajo se desarrollarán varios códigos en Matlab utilizando el MRD para resolver problemas de EDP involucrando los tres tipos de problemas de valores en la frontera, con el fin de llegar a la aproximación numérica. En la siguiente sección consideramos el problema (43) con $b = 0$, que como bien lo sabemos es llamada la ecuación Laplace.

3.2. Ecuación de Laplace

Como primer ejemplo consideramos una ecuación de Laplace en la circunferencia unitaria, y usamos el Método de Elementos en la Frontera para aproximarla numéricamente. Considere entonces el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = e^x \sin(y) & \text{sobre } \Gamma_1, \\ q = e^x \sin(y)x + e^x \cos(y)y & \text{sobre } \Gamma_2. \end{cases} \quad (48)$$

Aquí, las condiciones de frontera son elegidas usando la solución analítica $u(x, y) = e^x \sin(y)$ de la ecuación de Laplace. Multiplicando la ecuación de Laplace por la solución fundamental centrada en P_i y utilizando la aproximación para nodos frontera (42), y que $\Delta u = 0$ se obtiene

$$\vec{0} = -H_{fron}\vec{u}_{fron} + G_{fron}\vec{q}_{fron}, \quad (49)$$

por lo tanto, el sistema se reduce a

$$H_{fron}\vec{u}_{fron} = G_{fron}\vec{q}_{fron}. \quad (50)$$

Las condiciones de frontera implementadas en (50) son las siguientes:

Condición tipo Dirichlet (44): Suponemos conocidos los valores de \vec{u}_{fron} en todo

Γ . En este caso el vector desconocido es \vec{q}_{fron} y lo calculamos de (50). Para esto tomamos $A = G_{fron}$, $\vec{y} = H_{fron}\vec{u}_{fron}$ y la incógnita es $\vec{x} = \vec{q}_{fron}$.

Condiciones Mixtas (46): En este caso suponemos conocida a u en una parte de la frontera y a su derivada normal en la parte restante. Teniendo discretizada la frontera por N nodos, asumimos que conocemos a u en W nodos, entonces conoceremos su derivada normal en los $N - W$ nodos restantes. Note de (50) que una parte del vector \vec{u}_{fron} es desconocida y una parte del vector \vec{q}_{fron} también es desconocida, por lo tanto, es necesario organizar la ecuación para poderla resolver. El sistema se organiza de la siguiente forma

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} g_{1,1} & \cdots & g_{1,W} & -h_{1,W+1} & \cdots & -h_{1,N} \\ g_{2,1} & \cdots & g_{2,W} & -h_{2,W+1} & \cdots & -h_{2,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N,1} & \cdots & g_{N,W} & -h_{N,W+1} & \cdots & -h_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_W \\ u_{W+1} \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

donde

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & \cdots & h_{1,W} & -g_{1,W+1} & \cdots & -g_{1,N} \\ h_{2,1} & \cdots & h_{2,W} & -g_{2,W+1} & \cdots & -g_{2,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N,1} & \cdots & h_{N,W} & -g_{N,W+1} & \cdots & -g_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_W \\ q_{W+1} \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}$$

es el vector conocido.

En cualquier caso, el sistema se reduce a la expresión

$$A\vec{x} = \vec{y}. \quad (51)$$

La ecuación (51) ahora se puede resolver y se conocerán todos los valores de frontera desconocidos.

Una vez calculados \vec{u}_{fron} y \vec{q}_{fron} , es posible calcular \vec{u}_{int} utilizando el sistema matricial en los nodos interiores (40), el cual en el caso que estamos considerando ($\Delta u = 0$) se reduce a

$$\vec{0} = -\vec{u}_{int} - \bar{H}_{int}\vec{u}_{fron} + G_{int}\vec{q}_{fron}, \quad (52)$$

esto es,

$$\vec{u}_{int} = -\bar{H}_{int}\vec{u}_{fron} + G_{int}\vec{q}_{fron}. \quad (53)$$

Resultados

Para este ejemplo se considerarán 12 nodos en la frontera y 23 nodos en el interior.

Los errores en esta sección y en las próximas fueron calculados de la siguiente manera:

$$error = \frac{|valor_{numerico} - valor_{exacto}|}{|valor_{exacto}|}.$$

PROBLEMA TIPO DIRICHLET:

Suponiendo conocido u en la frontera.

Nodo	Ufrontera	UfrontExac	Qfrontera	QfrontExac
1	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000
2	1.1398	1.1398	2.1235	2.0303
3	1.2559	1.2559	1.5644	1.5530
11	-1.2559	-1.2559	-1.5644	-1.5530
12	-1.1398	-1.1398	-2.1235	-2.0303

Nodo	Uint	UintExac
13	-0.0000	0.0000
14	0.4269	0.4341
15	0.5324	0.5343
34	-0.0000	0.0000
35	-0.0000	0.0000

PROBLEMA MIXTO:

Para este caso suponemos conocido hasta el octavo valor nodal de u y los cuatro valores nodales restantes de q en la frontera.

Nodo	Ufrontera	UfrontExac	Qfrontera	QfrontExac
1	0.0000	0.0000	-0.0505	0.0000
2	1.1398	1.1398	2.1208	2.0303
3	1.2559	1.2559	1.5600	1.5530
11	-1.2375	-1.2559	-1.5530	-1.5530

12 -1.1034 -1.1398 -2.0303 -2.0303

Nodo	U _{int}	U _{int} Exact
13	0.0075	0.0000
14	0.4305	0.4341
15	0.5345	0.5343
34	0.0043	0.0000
35	0.0036	0.0000

Figura 5. Comparación numérica y exacta de u en el interior utilizando condiciones Mixtas.

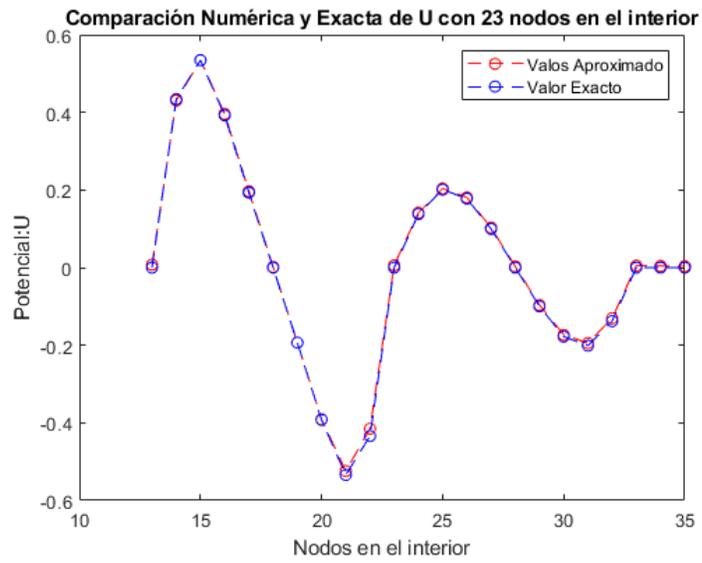
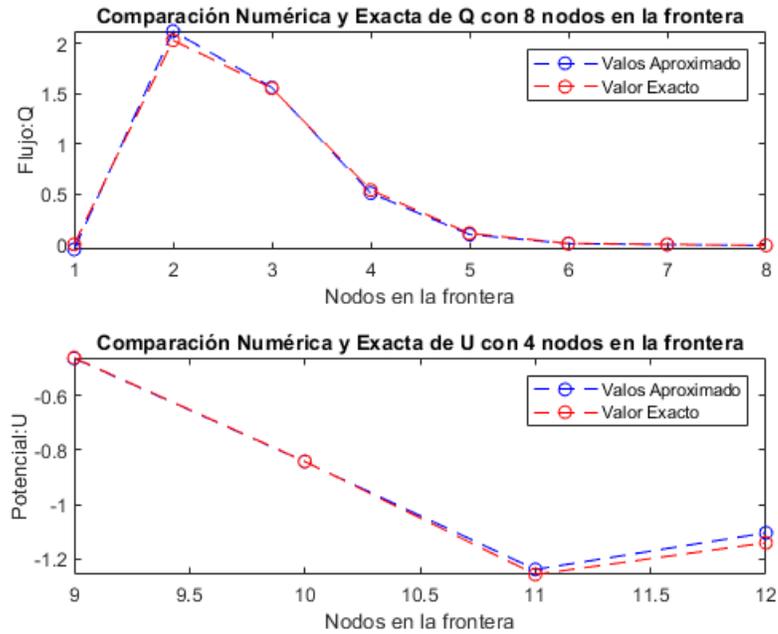


Figura 6. Comparación Numérica y Exacta de u y q en la frontera utilizando condiciones en la frontera de tipo Mixtas.



ERRORES

CONDICION TIPO DIRICHLET

ErrorUfront	ErrorQfront	ErrorUint
0	0.0037	3.8213e-04

CONDICIONES MIXTAS

ErrorUfront	ErrorQfront	ErrorUint
0.0016	0.0029	0.0024

Figura 7. Esquema de 12 nodos frontera y 23 nodos interiores.

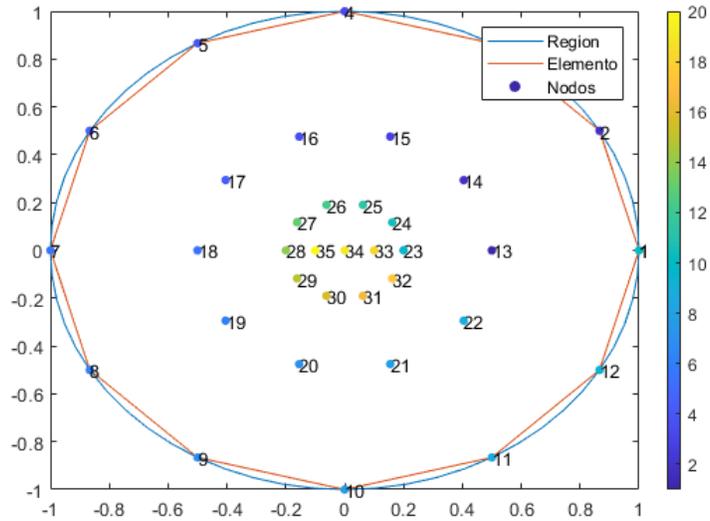
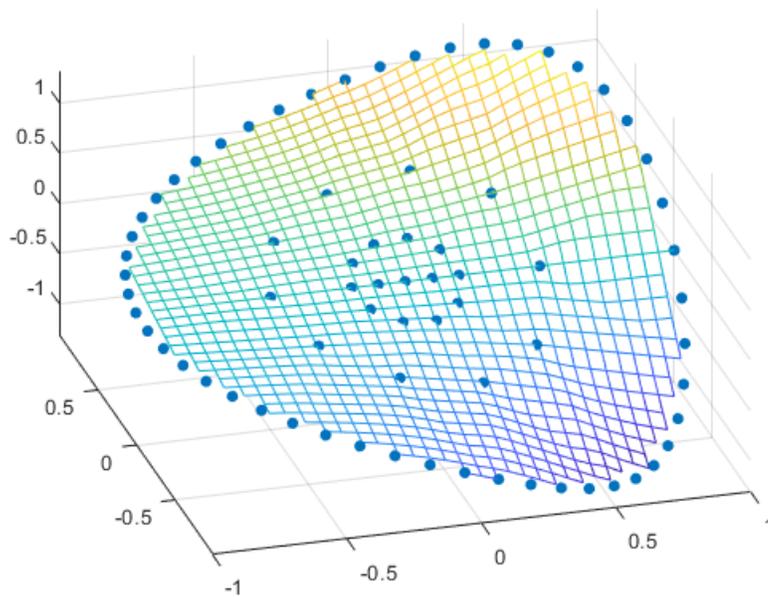


Figura 8. Gráfica de la solución aproximada usando la condición tipo Dirichlet con 50 nodos frontera y 23 nodos interiores.

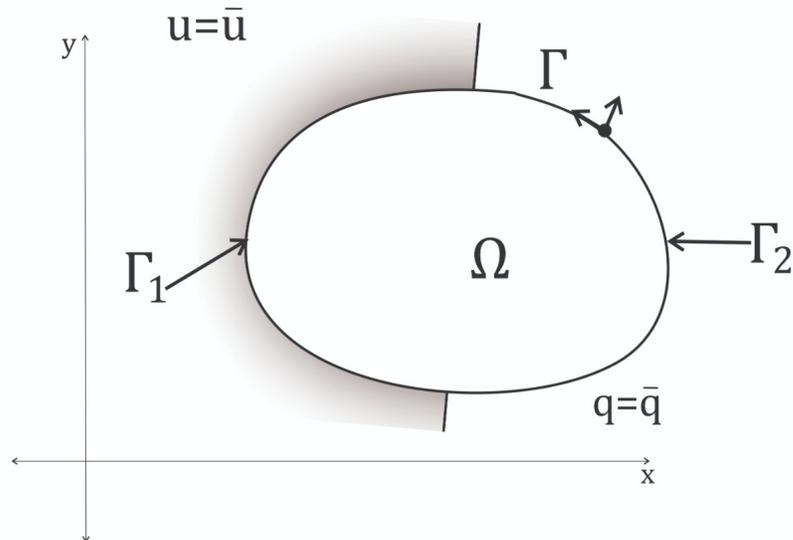


3.3. Método de Reciprocidad Dual para ecuaciones de tipo: $\Delta u = b(x, y)$.

Estudiamos ahora el caso de la ecuación de Poisson en un dominio Ω con frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$\begin{cases} \Delta u = b & \text{en } \Omega, \\ u & \text{sobre } \Gamma_1, \\ q = \frac{\partial u}{\partial \eta} & \text{sobre } \Gamma_2. \end{cases} \quad (54)$$

Figura 9. Definición geométrica del problema.



Con el objetivo de aproximar numéricamente la solución de (54), se aplica el mismo procedimiento utilizado en la ecuación (19), para obtener

$$\int_{\Omega} \Delta u u_i^* = -c_i u(x_i, y_i) - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma = \int_{\Omega} b u_i^* d\Omega. \quad (55)$$

Observe que, aunque se conoce la función b , en consecuencia, la integral en Ω no

introduce ninguna nueva incógnita, el problema ha cambiado de carácter, ya que ahora necesitamos llevar a cabo una integral de dominio, así como las integrales de frontera.

El Método de Reciprocidad Dual propone el uso de una serie de soluciones particulares \hat{u}_j . El número de \hat{u}_j utilizado es igual al número total de nodos en el problema, proponiendo la siguiente aproximación para b :

$$b \simeq \sum_{j=1}^{N+NI} \alpha_j f_j, \quad (56)$$

donde los α_j forman un conjunto de coeficientes inicialmente desconocidos, las f_j son las funciones aproximantes, N representa el número de nodos frontera y NI el número de nodos interiores.

Las funciones aproximantes se escogen y luego se determinan las soluciones particulares \hat{u}_j utilizando la ecuación

$$\Delta \hat{u}_j = f_j. \quad (57)$$

Las funciones f_j son dependientes de la geometría, no se aplicará ninguna restricción a estas funciones y, de hecho, se pueden usar muchos tipos diferentes, cada uno de los cuales resulta en una función diferente \hat{u}_j según se determina a partir de (57). La cuestión de qué tipo de función f_j usar se considerará en detalle más adelante.

Ahora, sustituyendo la ecuación (57) en la ecuación (56) se tiene como resultado la aproximación

$$b = \sum_{j=1}^{N+NI} \alpha_j (\Delta \hat{u}_j). \quad (58)$$

La ecuación anterior puede sustituirse en (55) para obtener expresión

$$-c_i u(x_i, y_i) - \int_{\Gamma} u \frac{\partial u_i^*}{\partial \eta} d\Gamma + \int_{\Gamma} u_i^* \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+NI} \alpha_j \int_{\Omega} \Delta \hat{u}_j u_i^* d\Omega. \quad (59)$$

Aplicando el mismo procedimiento utilizado en la ecuación de Laplace sobre los nodos frontera (véase ecuación (39)), finalmente se obtiene la fórmula

$$H_{fron} \vec{u}_{fron} - G_{fron} \vec{q}_{fron} = \sum_{j=1}^{N+NI} \left(H_{fron} \vec{u}_{jfron} - G_{fron} \vec{q}_{jfron} \right) \alpha_j. \quad (60)$$

Note que los vectores \vec{u}_{jfron} y \vec{q}_{jfron} son conocidos. Si cada uno de los vectores \vec{u}_{jfron} y \vec{q}_{jfron} se considera una columna de las matrices \hat{U}_{fron} y \hat{Q}_{fron} , respectivamente, entonces la ecuación (60) puede escribirse como:

$$H_{fron} \vec{u}_{fron} - G_{fron} \vec{q}_{fron} = (H_{fron} \hat{U}_{fron} - G_{fron} \hat{Q}_{fron}) \vec{\alpha}, \quad (61)$$

donde el vector $\vec{\alpha}$ es un vector columna de $N + NI$ componentes, las matrices \hat{U}_{fron} y \hat{Q}_{fron} son matrices de $N \times (N + NI)$.

Para estimar el vector $\vec{\alpha}$, note que evaluando (58) en los $N + NI$ puntos considerados, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\vec{b} = F \vec{\alpha},$$

donde la matriz F está conformada por los vectores columna \vec{f}_j , los cuales son conocidos y corresponden con las funciones f_j evaluadas en todos los puntos considerados. De esta forma, se tiene que

$$\vec{\alpha} = F^{-1} \vec{b}.$$

Con todo, sigue que el lado derecho de la ecuación (61) es un vector conocido, y por

lo tanto esta se reduce a

$$H_{fron}\vec{u}_{fron} - G_{fron}\vec{q}_{fron} = \vec{d}, \quad (62)$$

donde

$$\vec{d} = (H_{fron}\hat{U}_{fron} - G_{fron}\hat{Q}_{fron})\vec{\alpha}. \quad (63)$$

Para determinar los valores desconocidos de \vec{u}_{fron} o \vec{q}_{fron} , lo cual depende de las condiciones de frontera, procedemos exactamente igual que en la ecuación de Laplace, cambiando \vec{y} por $\vec{y}_{new} = \vec{y} - \vec{d}$. El sistema (51) se resuelve y se encuentran los valores desconocidos.

Una vez conocidos los valores en la frontera, utilizando la ecuación (59) ahora sobre los nodos internos y reemplazando el cálculo que se hizo en el anterior capítulo (véase ecuación (40)), tenemos:

$$\vec{u}_{int} + \bar{H}_{int}\vec{u}_{fron} - G_{int}\vec{q}_{fron} = \sum_{j=1}^{N+NI} \alpha_j \left(\vec{u}_{jint} + \bar{H}_{int}\hat{u}_{jfron} - G_{int}\hat{q}_{jfron} \right), \quad (64)$$

despejado \vec{u}_{int} , la fórmula anterior se reduce al sistema matricial

$$\vec{u}_{int} = G_{int}\vec{q}_{fron} - \bar{H}_{int}\vec{u}_{fron} + \vec{d}, \quad (65)$$

con

$$\vec{d} = (\hat{U}_{int} + H_{int}\hat{U}_{fron} - G_{int}\hat{Q}_{fron})\vec{\alpha}, \quad (66)$$

donde \hat{U}_{int} es la matriz cuyos vectores columna están dados por los vectores \vec{u}_{jint} de las funciones \hat{u}_j calculadas en los NI puntos interiores. El desarrollo de Método de Reciprocidad dual para ecuaciones de tipo Poisson está ahora completo.

Diferentes tipos de f : Hay propuestas en la literatura diferentes tipos de funciones f a partir de las cuales se definen las funciones $f_j = f(\cdot - p_j)$ usadas en (56). Dichas funciones tienen relacionada una función \hat{u} por medio de la ecuación

$$\Delta \hat{u} = f, \quad (67)$$

a partir de la cual se definen las funciones $\hat{u}_j = \hat{u}(\cdot - p_j)$. Es claro que vale que

$$\Delta \hat{u}_j = f_j. \quad (68)$$

La selección más simple para f que se ha mostrado adecuada para varios problemas de EDP es tomar funciones radiales de la forma

$$f = 1 + r + r^2 + \dots + r^m, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad (69)$$

donde $r = |x| = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)^{1/2}$. Con el objetivo de determinar la función \hat{u} relacionada con f , suponga que esta debe ser radial de la forma $\hat{u}(x) = v(r)$ y note que para $i = 1, 2, \dots, n$ se tiene

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0), \quad (70)$$

de donde sigue que

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}$$

y

$$u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right). \quad (71)$$

Sumando para $i = 1, 2, \dots, n$ y ya que $\sum_i^n x_i^2 = r^2$ se obtiene

$$\Delta \hat{u} = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = f. \quad (72)$$

Resolviendo la EDO anterior, se concluye que la función \hat{u} para el caso bidimensional es dada por

$$\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} + \dots + \frac{r^{m+2}}{(m+2)^2} \quad (73)$$

y

$$\hat{q} = \nabla \hat{u} \eta. \quad (74)$$

En principio, cualquier combinación de términos puede seleccionarse de (69). Para las ecuaciones de tipo Poisson, se considerará $f = 1 + r$ ya que generalmente se recomienda y se usa en el programa.⁷ En este caso tenemos:

$$\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} \quad \text{y} \quad \hat{q} = \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{3} \right) (x, y) \eta. \quad (75)$$

3.3.1. Resultados para la ecuación: $\Delta u = x + y$. Como segundo ejemplo nos proponemos aproximar numéricamente la solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u = x + y & \text{en } \Omega, \\ u = e^x \sin(y) + \frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{6} & \text{sobre } \Gamma_1, \\ q = (e^x \sin(y) + \frac{x^2}{2})x + (e^x \cos(y) + \frac{y^2}{2})y & \text{sobre } \Gamma_2, \end{cases} \quad (76)$$

considerado en la bola unitaria. Las condiciones de frontera fueron escogidas teniendo en cuenta que la función $u = e^x \sin(y) + \frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{6}$ es una solución exacta de (76).

Para este ejemplo se utilizará la función radial $f = 1 + r$ donde \hat{u} y \hat{q} están dados de la forma (75). Se tomaron 50 nodos frontera y 43 nodos en el interior.

PROBLEMA TIPO DIRICHLET:

Suponiendo conocido u en la frontera.

Nodo	Ufrontera	UfrontExac	Qfrontera	QfrontExac
1	0.1667	0.1667	0.5739	0.5000
2	0.5002	0.5002	1.2269	1.1591
3	0.8024	0.8024	1.7847	1.7250
4	1.0542	1.0542	2.1942	2.1450
48	-0.7862	-0.7862	-1.2532	-1.3412
49	-0.4995	-0.4995	-0.7327	-0.8163
50	-0.1747	-0.1747	-0.1036	-0.1826

Nodo	Uint	UintExac
51	0.0850	0.0853
52	0.7110	0.7123
53	0.7241	0.7251
54	0.4499	0.4503
88	-0.0893	-0.0895
89	-0.1010	-0.1011
90	-0.0684	-0.0684

PROBLEMA MIXTO:

Para este caso suponemos conocido hasta 40 nodos u_{fron} y 10 valores nodales restantes de q_{fron} .

Nodo	Ufrontera	UfrontExac	Qfrontera	QfrontExac
1	0.1667	0.1667	0.7892	0.5000

2	0.5002	0.5002	1.2683	1.1591
3	0.8024	0.8024	1.8221	1.7250
4	1.0542	1.0542	2.2191	2.1450
48	-0.8386	-0.7862	-1.3412	-1.3412
49	-0.5424	-0.4995	-0.8163	-0.8163
50	-0.2016	-0.1747	-0.1826	-0.1826

Nodo	U _{int}	U _{int} Exac
51	0.0695	0.0853
52	0.7056	0.7123
53	0.7204	0.7251
54	0.4474	0.4503
88	-0.0993	-0.0895
89	-0.1132	-0.1011
90	-0.0818	-0.0684

ERRORES

Condiciones de frontera tipo Dirichlet

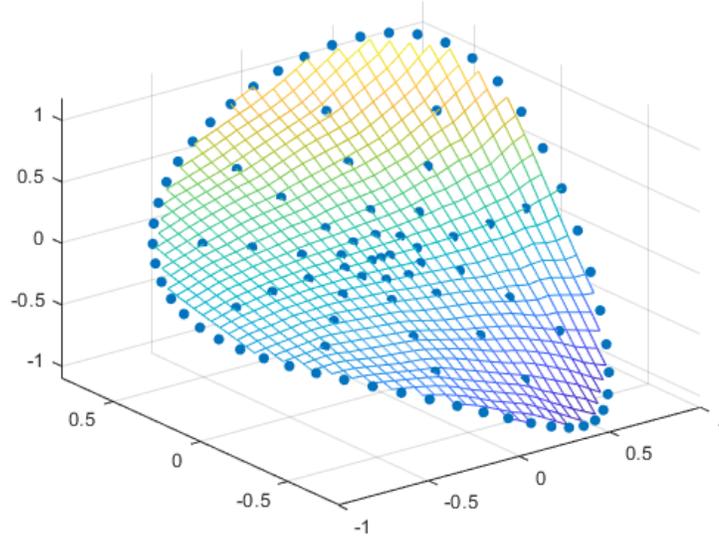
ErrorU _{front}	ErrorQ _{front}	ErrorU _{int}
0	0.0581	0.0015

Condiciones de frontera mixta

ErrorU _{front}	ErrorQ _{front}	ErrorU _{int}
0.0261	0.0689	0.0419

Figura 10. Solución numérica de u utilizando 50 nodos frontera y 43 nodos interiores, considerando la condición de frontera tipo Dirichlet.

Solución numérica de U utilizando 50 nodos frontera y 43 nodos interiores



3.4. Método de Reciprocidad Dual para la ecuación de tipo: $\Delta u = b(x, y, u)$

En la sección anterior, el Método de Reciprocidad Dual se desarrolló y aplicó a un problema gobernado por una ecuación de tipo Poisson en la que el lado derecho es una función conocida de la posición, esto es

$$\Delta u = b(x, y), \quad (77)$$

para el cual se estableció la expresión matricial (61), para encontrar todos los valores desconocidos en la frontera, y posteriormente, usando (65), determinar los valores desconocidos en el interior. Como b en la ecuación (77) es una función conocida, el vector $\vec{\alpha}$ puede calcularse a partir de la relación

$$\vec{\alpha} = F^{-1}\vec{b}. \quad (78)$$

En esta sección, el rango de aplicación del Método de Reciprocidad Dual se extenderá a los problemas regidos por ecuaciones de tipo

$$\Delta u = b(x, y, u), \quad (79)$$

donde el término no homogéneo también puede ser una combinación, suma o producto de funciones de u . Para entender el planteamiento del problema, tomemos como ejemplo la siguiente ecuación

$$\Delta u = -u. \quad (80)$$

En este caso la función b se define como $-u$, y la ecuación (78) se reduce a

$$\vec{\alpha} = F^{-1}(-\vec{u}). \quad (81)$$

Por lo tanto, la ecuación (61) se convierte en

$$H_{fron}\vec{u}_{fron} - G_{fron}\vec{q}_{fron} = (H_{fron}\hat{U}_{fron} - G_{fron}\hat{Q}_{fron})F^{-1}(-\vec{u}), \quad (82)$$

donde el vector \vec{u} está formado tanto por valores en la frontera como en el interior. Note que en la ecuación (82) no es posible encontrar los valores desconocidos en la frontera ya que depende de los valores desconocidos de \vec{u} en el interior.

Similarmente, de la ecuación (64) tenemos el sistema

$$\vec{u}_{int} + \bar{H}_{int}\vec{u}_{fron} - G_{int}\vec{q}_{fron} = (\vec{u}_{int} + \bar{H}_{int}\hat{U}_{fron} - G_{int}\hat{Q}_{fron})F^{-1}(-\vec{u}), \quad (83)$$

del cual tampoco podemos determinar \vec{u}_{int} al no tener calculados todos los valores en la frontera.

Para solucionar el problema anterior, juntamos las dos formulaciones (82) y (83) en una sola formulación matricial.

Note que $\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix}$ y $\vec{q} = \begin{pmatrix} \vec{q}_{fron} \\ \vec{q}_{int} \end{pmatrix}$, y que la ecuación (82) puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{fron} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{fron} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q}_{fron} \\ \vec{q}_{int} \end{pmatrix} = \\ & = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_{fron} \\ \hat{U}_{int} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{fron} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_{fron} \\ \hat{U}_{int} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} G_{fron} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Q}_{fron} \\ \hat{Q}_{int} \end{pmatrix} \right] \vec{\alpha}, \end{aligned}$$

y que la ecuación (83) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{H}_{int} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G_{int} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q}_{fron} \\ \vec{q}_{int} \end{pmatrix} = \\ & = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_{fron} \\ \hat{U}_{int} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{H}_{int} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_{fron} \\ \hat{U}_{int} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G_{int} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Q}_{fron} \\ \hat{Q}_{int} \end{pmatrix} \right] \vec{\alpha}, \end{aligned}$$

donde Id es la matriz identidad de $NI \times NI$. Sumando estas formas matriciales, obtenemos

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{pmatrix} H_{fron} & 0 \\ \bar{H}_{int} & Id \end{pmatrix}}_H \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix}}_{\vec{u}} - \underbrace{\begin{pmatrix} G_{fron} & 0 \\ G_{int} & 0 \end{pmatrix}}_G \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{q}_{fron} \\ \vec{q}_{int} \end{pmatrix}}_{\vec{q}} = \\ & = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} H_{fron} & 0 \\ \bar{H}_{int} & Id \end{pmatrix}}_H \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{U}_{fron} \\ \hat{U}_{int} \end{pmatrix}}_{\hat{U}} - \underbrace{\begin{pmatrix} G_{fron} & 0 \\ G_{int} & 0 \end{pmatrix}}_G \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{Q}_{fron} \\ \hat{Q}_{int} \end{pmatrix}}_{\hat{Q}} \right] \vec{\alpha}. \end{aligned}$$

Observe que \vec{q}_{int} y \hat{Q}_{int} están multiplicados por 0 por lo tanto esos datos son irrelevantes a la hora de resolver el sistema, por lo tanto, asumimos que tanto \vec{q}_{int} como \hat{Q}_{int} son iguales a 0. Con todo, el sistema queda reducido de la siguiente forma

$$H\vec{u} - G\vec{q} = [H\hat{U} - G\hat{Q}]F^{-1}\vec{b} = S\vec{b} = S(-\vec{u}), \quad (84)$$

donde

$$S = [H\hat{U} - G\hat{Q}]F^{-1}. \quad (85)$$

Despejando el vector \vec{u} en el lado izquierdo y el vector \vec{q} en el lado derecho, la ecuación resultante es

$$B\vec{u} = G\vec{q}, \quad (86)$$

donde $B = H + S$.

Dada una matriz C , denotamos por $C(N_1 : N_2)$ a la submatriz de C formada por las columnas N_1 hasta la N_2 .

Consideramos ahora la formulación para diferentes tipos de condiciones de frontera:

Condición tipo Dirichlet (44): Se conoce \vec{u}_{fron} en Γ , para encontrar \vec{u}_{int} y \vec{q}_{fron} se despeja las incógnitas para el lado izquierdo y para el otro los valores conocidos

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} -G(1 : N) & B(N + 1 : N + NI) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} -B(1 : N) & G(N + 1 : N + NI) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Condición tipo Neumann (45): Se conoce \vec{q} sobre Γ , el vector $\vec{y} = G\vec{q}$, $A = B$ y $\vec{x} = \vec{u}$.

Condiciones Mixtas (46): Se conoce \vec{u}_{fron} sobre Γ_1 y \vec{q}_{fron} sobre Γ_2 , donde $\#\vec{u}_{fron} = W$ y $\#\vec{q}_{fron} = N - W$ denota la cantidad de nodos conocidos en Γ , las incógnitas son \vec{q}_{fron} sobre Γ_1 , \vec{u}_{fron} sobre Γ_2 y \vec{u}_{int} en Ω , despejando los valores desconocidos para la izquierda y los valores conocidos para la derecha en (86), tenemos

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} -G(1 : N - W) & B(N - W : N + NI) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q}_{fron\Gamma_1} \\ \vec{u}_{fron\Gamma_2} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} -B(1 : W) & \hat{G}(W : N + NI) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron\Gamma_1} \\ \vec{q}_{fron\Gamma_2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones (84) forman la base de la aplicación del Método de Reciprocidad Dual a las ecuaciones del tipo (79). La única diferencia en cada nuevo caso será un nuevo vector b para reemplazar por $-\vec{u}$ en la ecuación (84).

3.4.1. Resultados para la ecuación: $\Delta u = -u$. Abordamos ahora el problema de aproximar numéricamente la solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u = -u & \text{en } \Omega, \\ u = \sin(x) & \text{sobre } \Gamma_1, \\ q = \cos(x)x & \text{sobre } \Gamma_2. \end{cases} \quad (87)$$

En donde las condiciones de frontera fueron escogidas teniendo en cuenta que la función $u = \sin(x)$ es una solución exacta de (87).

Para la aproximación de este problema se utilizará la función radial $f = 1 + r$, y utilizamos 50 nodos frontera y 43 nodos interiores.

PROBLEMA TIPO DIRICHLET:

Suponiendo conocido u en la frontera.

Nodo	Ufrontera	UfrontExac	Qfrontera	QfrontExac
1	0.8415	0.8415	0.5423	0.5403
2	0.8372	0.8372	0.5528	0.5426
3	0.8241	0.8241	0.5669	0.5487
4	0.8015	0.8015	0.5819	0.5560
48	0.8015	0.8015	0.5341	0.5560
49	0.8241	0.8241	0.5345	0.5487
50	0.8372	0.8372	0.5364	0.5426

Nodo	Uint	UintExac
51	0.4795	0.4794
52	0.3937	0.3936

53	0.1539	0.1539
54	-0.1539	-0.1539
88	-0.0926	-0.0926
89	0.0926	0.0926
90	0.2404	0.2403

PROBLEMA TIPO NEUMANN:

Suponiendo conocido q en la frontera.

Nodo	Ufrontera	UfrontExac	Qfrontera	QfrontExac
1	0.8303	0.8415	0.5403	0.5403
2	0.8155	0.8372	0.5426	0.5426
3	0.7922	0.8241	0.5487	0.5487
4	0.7599	0.8015	0.5560	0.5560
48	0.8222	0.8015	0.5560	0.5560
49	0.8343	0.8241	0.5487	0.5487
50	0.8367	0.8372	0.5426	0.5426

Nodo	Uint	UintExac
51	0.4734	0.4794
52	0.3614	0.3936
53	0.1080	0.1539
54	-0.1960	-0.1539
88	-0.0645	-0.0926
89	0.1184	0.0926
90	0.2540	0.2403

PROBLEMA MIXTO:

Para este caso suponemos conocidos hasta 25 nodos u_{fron} y 25 valores nodales restantes de q_{fron} .

Nodo	Ufrontera	UfrontExac	Qfrontera	QfrontExac
1	0.8415	0.8415	0.0409	0.5403
2	0.8372	0.8372	0.3920	0.5426
3	0.8241	0.8241	0.4241	0.5487
4	0.8015	0.8015	0.4696	0.5560
48	0.9122	0.8015	0.5560	0.5560
49	0.9094	0.8241	0.5487	0.5487
50	0.8878	0.8372	0.5426	0.5426

Nodo	Uint	UintExac
51	0.5651	0.4794
52	0.4492	0.3936
53	0.1995	0.1539
54	-0.1072	-0.1539
88	0.0552	-0.0926
89	0.2379	0.0926
90	0.3660	0.2403

ERRORES

Condiciones de frontera Tipo Dirichlet

ErrorQ = 0.0958

ErrorUint =2.4120e-04

Condiciones de frontera tipo Neumann

ErrorbigU = 0.0963

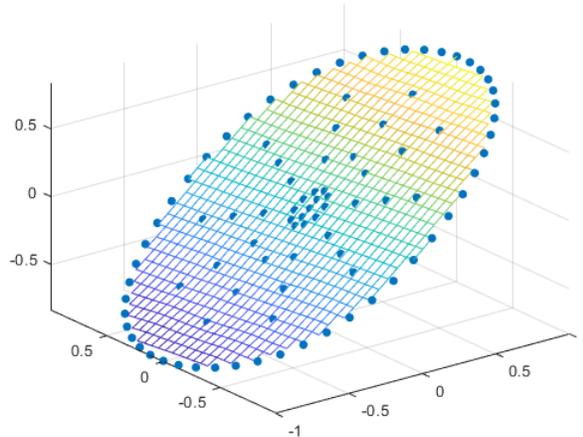
Condiciones de frontera mixtas

ErrorQ =0.2479
ErrorbigU =0.2346

La gráfica fue generada utilizando la condición de frontera tipo Neumann, para la condición tipo Dirichlet y para la condiciones mixtas la gráfica es similar.

Figura 11. Solución numérica de u utilizando 50 nodos frontera y 43 nodos interiores.

Solución numérica de U utilizando 50 nodos frontera y 43 nodos interiores



3.4.2. Método iterativo. Note que el problema (87) puede ser abordado usando las ideas ya desarrolladas para la ecuación de Poisson y un procedimiento iterativo. La idea de este método es partir de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, resolver el sistema con las condiciones de frontera para calcular el vector $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \vec{u}_{fron} \\ \vec{u}_{int} \end{pmatrix}$,

siendo esta la primera iteración, y después resolver el problema

$$\Delta u_{n+1} = -\vec{u}_n, \quad (88)$$

El proceso se repite hasta una tolerancia establecida $\epsilon > 0$, el programa finaliza cuando $\frac{|\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n|}{|\vec{u}_{n+1}|} < \epsilon$ donde n es la última iteración.

Resultados

Se fijó una tolerancia de 0,0001, la comparativa se hizo sobre la última iteración, utilizando 40 nodos frontera y 43 nodos interiores.

PROBLEMA TIPO DIRICHLET:

Suponiendo conocido u en la frontera, se hizo la comparación en la quinta iteración.

Nodo	Ufrontera	UfrontExac	Qfrontera	QfrontExac
1	0.8415	0.8415	0.5440	0.5403
2	0.8348	0.8348	0.5602	0.5438
3	0.8140	0.8140	0.5812	0.5524
4	0.7777	0.7777	0.6005	0.5601
38	0.7777	0.7777	0.5272	0.5601
39	0.8140	0.8140	0.5310	0.5524
40	0.8348	0.8348	0.5348	0.5438

Nodo	Uint	UintExac
41	0.4795	0.4794
42	0.3936	0.3936
43	0.1539	0.1539
44	-0.1539	-0.1539

78	-0.0926	-0.0926
79	0.0926	0.0926
80	0.2404	0.2403

PROBLEMA MIXTO:

Para este caso suponemos conocido hasta 30 nodos u_{fron} y 10 valores nodales restantes de q_{fron} se hizo la comparación en la sexta iteración.

Nodo	Ufrontera	UfrontExac	Qfrontera	QfrontExac
1	0.8415	0.8415	1.2002	0.5403
2	0.8348	0.8348	0.8394	0.5438
3	0.8140	0.8140	0.8365	0.5524
4	0.7777	0.7777	0.8089	0.5601
38	0.6540	0.7777	0.5601	0.5601
39	0.7059	0.8140	0.5524	0.5524
40	0.7632	0.8348	0.5438	0.5438

Nodo	Uint	UintExac
41	0.5000	0.4794
42	0.4124	0.3936
43	0.1422	0.1539
44	-0.2030	-0.1539
78	-0.1280	-0.0926
79	0.0704	0.0926
80	0.2302	0.2403

ERRORES

Condiciones de frontera Tipo Dirichlet

Iteraciones =5

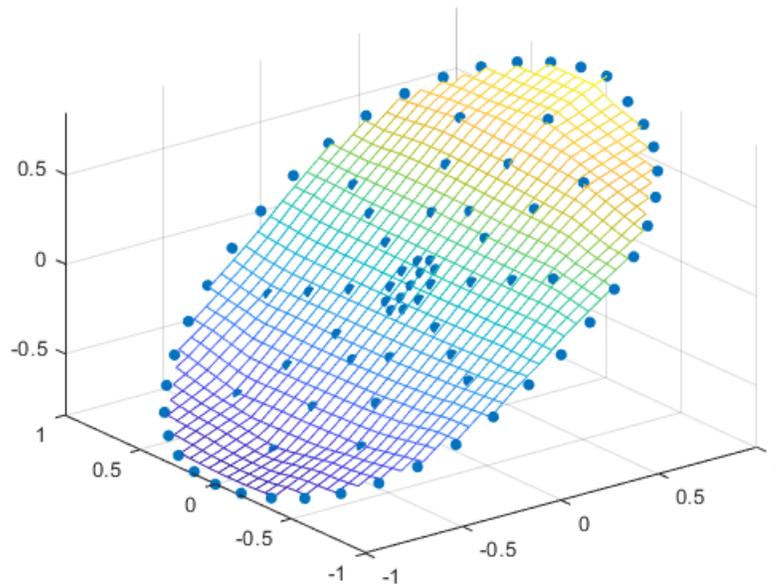
ErrorbigU =7.8211e-05

Condiciones de frontera Mixta

Iteraciones = 6

ErrorbigU =0.0945

Figura 12. Solución numérica de u utilizando 40 nodos frontera y 43 nodos interiores, condición tipo mixta.



3.5. Método de Reciprocidad Dual para la ecuación de tipo: $\Delta u = -\partial u/\partial x$.

Las ecuaciones diferenciales que incluyen derivadas espaciales de primer orden de la variable problema son muy comunes en el modelado matemático de problemas de ingeniería. Los términos convectivos se pueden acomodar fácilmente en el tratamiento del Método de Reciprocidad. Considere, por ejemplo, una ecuación del tipo

$$\Delta u = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (89)$$

de donde identificamos que $\vec{b} = -\frac{\partial u}{\partial x}$. Por lo tanto, sustituyendo en la ecuación (78), se obtiene

$$\vec{\alpha} = -F^{-1} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (90)$$

y haciendo la misma construcción de las matrices aumentadas (84), tenemos

$$H\vec{u} - G\vec{q} = -S \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (91)$$

Ahora se debe establecer un mecanismo para relacionar los valores nodales de \vec{u} con los valores nodales de su derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$. En este punto, debe recordarse que la aproximación básica de la técnica del Método de Reciprocidad Dual es la ecuación (56), pero esta aproximación también puede ser usada para u , esto es

$$u \simeq \sum_{j=1}^{N+NI} \beta_j f_j, \quad (92)$$

de la cual, después de evaluar en todos los nodos, obtenemos el sistema

$$\vec{u} = F\vec{\beta}. \quad (93)$$

Por otro lado, de (92), después de derivar y evaluar en todos los nodos, obtenemos el sistema

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{\beta}, \quad (94)$$

donde $\frac{\partial F}{\partial x}$ es la matriz formada por las funciones $\frac{\partial f_j}{\partial x}$ evaluadas en los $N + NI$ nodos considerados. De la ecuación (93) se tiene que $\vec{\beta} = F^{-1} \vec{u}$, entonces, reemplazando en la ecuación (94) obtenemos

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} \vec{u}. \quad (95)$$

La ecuación (95) plantea la forma básica de aproximar derivadas en el MRD. Sustituyendo ahora en (91) llegamos a

$$H \vec{u} - G \vec{q} = -S \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} \vec{u}. \quad (96)$$

Llamando ahora

$$R = -S \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1}, \quad (97)$$

entonces,

$$(H - R) \vec{u} = G \vec{q}. \quad (98)$$

Como se mencionó anteriormente, los términos en la matriz $\partial F / \partial x$ se obtienen diferenciando las funciones f_j , las cuales están relacionadas con la derivada de la función f utilizada. Lo anterior implica en problemas donde b depende de derivadas de la función incógnita el uso de la función $f(r) = 1 + r$ no es posible pues ésta no es diferenciable. Para solucionar este problema, en estos casos usamos la función $f = 1 + r^2 + r^3$.

3.5.1. Resultados para la ecuación: $\Delta u = -\frac{\partial u}{\partial x}$. Consideramos ahora el problema de aproximar numéricamente la solución de

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{\partial u}{\partial x} & \text{en } \Omega, \\ u = e^{-x} & \text{sobre } \Gamma_1, \\ q = -e^{-x}x & \text{sobre } \Gamma_2. \end{cases} \quad (99)$$

Para este ejemplo se utilizará una función radial diferente $f = 1 + r^2 + r^3$, de donde

$$\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^4}{16} + \frac{r^5}{25} \quad \text{y} \quad \hat{q} = \left(\frac{1}{2} + \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{5} \right) (x, y)\eta. \quad (100)$$

En este caso utilizamos 40 nodos frontera y 43 nodos interiores, y no se consideró la condición tipo Neumann.

PROBLEMA TIPO DIRICHLET:

Suponiendo conocido u en la frontera.

Nodo	Ufrontera	UfrontExac	Qfrontera	QfrontExac
1	0.3679	0.3679	-0.3612	-0.3679
2	0.3724	0.3724	-0.3604	-0.3679
3	0.3863	0.3863	-0.3588	-0.3674
4	0.4102	0.4102	-0.3555	-0.3655
38	0.4102	0.4102	-0.3630	-0.3655
39	0.3863	0.3863	-0.3623	-0.3674
40	0.3724	0.3724	-0.3616	-0.3679

Nodo	Uint	UintExac
1	0.6065	0.6065

2	0.6673	0.6673
3	0.8570	0.8568
4	1.1672	1.1671
38	1.0972	1.0971
39	0.9115	0.9115
40	0.7845	0.7845

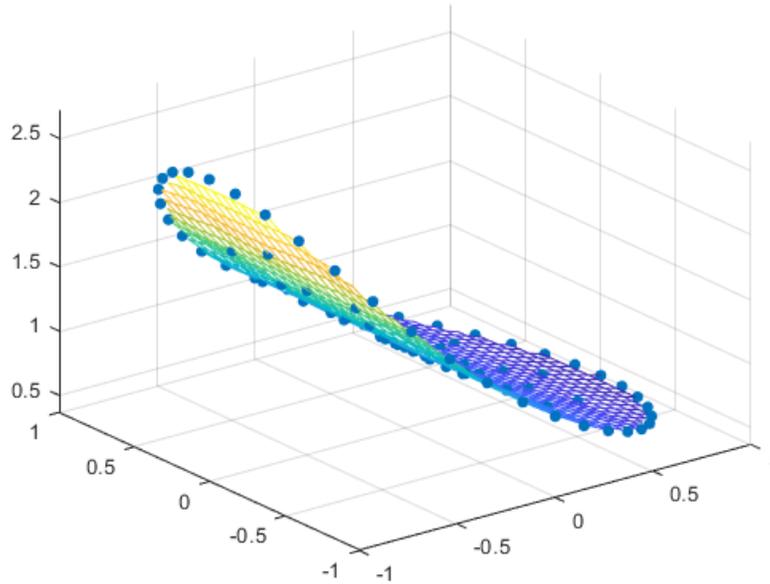
PROBLEMA MIXTO:

Para este caso suponemos conocido hasta 20 nodos u_{fron} y 20 valores nodales restantes de q_{fron} .

Nodo	Ufrontera	UfrontExac	Qfrontera	QfrontExac
1	0.3679	0.3679	-0.4067	-0.3679
2	0.3724	0.3724	-0.3744	-0.3679
3	0.3863	0.3863	-0.3710	-0.3674
4	0.4102	0.4102	-0.3653	-0.3655
38	0.4258	0.4102	-0.3655	-0.3655
39	0.3970	0.3863	-0.3674	-0.3674
40	0.3782	0.3724	-0.3679	-0.3679

Nodo	Uint	UintExac
1	0.6174	0.6065
2	0.6742	0.6673
3	0.8631	0.8568
4	1.1746	1.1671
38	1.1247	1.0971
39	0.9362	0.9115
40	0.8036	0.7845

Figura 13. Solución numérica de u con 40 nodos en la frontera y 43 nodos interiores, la condición de frontera implementada es tipo Dirichlet.



ERROR

Condiciones de frontera Tipo Dirichlet

ErrorbigU =8.7390e-05

ErrorQ =0.0310

Condiciones de frontera Tipo Mixto

ErrorbigU =0.0198

ErrorQ =0.0220

3.6. Ecuación de Burgers

La ecuación bidimensional de Burgers es un modelo matemático para describir varios tipos de fenómenos en campos tan diversos como dinámica de gases, conducción de calor, elasticidad, turbulencias, fluidos viscosos, etc. Los métodos tradicionales como diferencias finitas y el método de elementos finitos se han utilizado para resolver el problema. En este trabajo presentamos el Método de Elemento de Frontera de Reciprocidad Dual para manejar tales problemas. Su forma habitual, para situaciones de estado estacionario, es

$$\nabla^2 u + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (101)$$

Para tratar este caso con el Método de Reciprocidad Dual, note que la función b en la ecuación está dada por

$$b = -u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (102)$$

Evaluando la ecuación anterior en todos los nodos obtenemos el vector \vec{b} , pero para expresarlo correctamente es necesario que uno de los factores en el producto sea escrito de forma matricial, para esto, defina la matriz U como:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_n \end{pmatrix}, \quad (103)$$

esto es, la matriz diagonal cuya diagonal es el vector \vec{u} . Así,

$$\vec{b} = U \frac{\partial \vec{u}}{\partial x}.$$

Usando ahora la aproximación (95) para la derivada se llega a

$$\vec{b} = U \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1} \vec{u}. \quad (104)$$

Utilizando (84) y cambiando $-\vec{u}$ por \vec{b} tenemos

$$H\vec{u} - \hat{G}\vec{q} = -[H\hat{U} - \hat{G}\hat{Q}]F^{-1}U \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1}\vec{u}, \quad (105)$$

definiendo la matriz R como

$$R = [H\hat{U} - \hat{G}\hat{Q}]F^{-1}U \frac{\partial F}{\partial x} F^{-1}, \quad (106)$$

entonces la ecuación (105) se convierte en

$$(H + R)\vec{u} = G\vec{q}. \quad (107)$$

El procedimiento de solución ahora es iterativo ya que los coeficientes de la matriz R dependen de \vec{u} . Primero se supone $R = 0$ y se resuelve la ecuación

$$H\vec{u} = G\vec{q}, \quad (108)$$

para obtener una primera estimación de \vec{u} y \vec{q} . Luego se construye una matriz U_1 usando (103) con los valores encontrados de \vec{u} . El siguiente paso es calcular la matriz R_1 a través de (106) y resolver la ecuación (107) para obtener los nuevos valores \vec{u} y \vec{q} . Este proceso continúa hasta que se obtenga la convergencia, es decir, que se aproxime el valor viejo al valor nuevo, como se vio en el método iterativo.

3.6.1. Resultados. Para probar el método numérico aplicado a la ecuación de Burgers se utilizará el siguiente ejemplo

$$\begin{cases} \Delta u = -u \frac{\partial u}{\partial x} & \text{en } \Omega, \\ u = \frac{2}{x} & \text{sobre } \Gamma_1, \\ q = \frac{-2}{x^2}(x-2) & \text{sobre } \Gamma_2, \end{cases} \quad (109)$$

teniendo como referencia la solución exacta $u = \frac{2}{x}$. En este caso, para evitar la singularidad en $x = 0$, el dominio considerado será una bola unitaria centrada en el punto $(2,0)$. Para este ejemplo se utilizó una función radial $f = 1 + r^2 + r^3$, y se utilizaron 20 nodos frontera y 55 nodos interiores.

La comparativa se hace en la última iteración. Se fija una tolerancia de 0,001, el programa finaliza cuando el error = $\frac{|\vec{u}_{n+1} - \vec{u}_n|}{|\vec{u}_{n+1}|} < 0,001$.

Para la condición tipo Dirichlet la comparativa se hizo en la iteración 6.

PROBLEMA TIPO DIRICHLET:

Suponiendo conocido u en la frontera.

Nodo	Ufrontera	UfrontExac	Qfrontera	QfrontExac
1	0.6667	0.6667	-0.2638	-0.2222
2	0.6777	0.6777	-0.3614	-0.2184
3	0.7120	0.7120	-0.3730	-0.2051
4	0.7729	0.7729	-0.2782	-0.1755
5	0.8662	0.8662	-0.0932	-0.1159
6	1.0000	1.0000	0.1497	-0.0000
18	0.7729	0.7729	-0.0314	-0.1755

19	0.7120	0.7120	-0.0499	-0.2051
20	0.6777	0.6777	-0.1401	-0.2184

Nodo	U _{int}	U _{int} Exac
1	1.0001	1.0000
2	1.0257	1.0256
3	0.9758	0.9756
4	1.1112	1.1111
5	0.9525	0.9524
6	0.9525	0.9524
53	1.4389	1.4308
54	1.7896	1.7862
55	1.7036	1.6981

Para la condición tipo Neumann la comparativa se hizo en la iteración 9.

PROBLEMA TIPO NEUMANN:

Suponiendo conocido q en la frontera.

Nodo	U _{frontera}	U _{front} Exac	Q _{frontera}	Q _{front} Exac
1	0.7086	0.6667	-0.2222	-0.2222
2	0.7676	0.6777	-0.2184	-0.2184
3	0.8229	0.7120	-0.2051	-0.2051
4	0.8670	0.7729	-0.1755	-0.1755
5	0.9126	0.8662	-0.1159	-0.1159
6	0.9889	1.0000	-0.0000	-0.0000
18	0.7504	0.7729	-0.1755	-0.1755
19	0.6782	0.7120	-0.2051	-0.2051

20	0.6701	0.6777	-0.2184	-0.2184
----	--------	--------	---------	---------

Nodo	U _{int}	U _{int} Exac
1	1.0313	1.0000
2	1.0551	1.0256
3	1.0075	0.9756
4	1.1406	1.1111
5	0.9835	0.9524
6	0.9857	0.9524
53	1.3915	1.4308
54	1.7882	1.7862
55	1.7775	1.6981

Para la condición tipo Mixta la comparativa se hizo en la iteración 8.

PROBLEMA MIXTO:

Para este caso suponemos conocido hasta 10 nodos u_{fron} y 10 valores nodales restantes de q_{fron} .

Nodo	U _{frontera}	U _{front} Exac	Q _{frontera}	Q _{front} Exac
1	0.6667	0.6667	-0.1187	-0.2222
2	0.6777	0.6777	-0.3282	-0.2184
3	0.7120	0.7120	-0.3525	-0.2051
4	0.7729	0.7729	-0.2839	-0.1755
5	0.8662	0.8662	-0.1178	-0.1159
6	1.0000	1.0000	0.1188	-0.0000
18	0.7109	0.7729	-0.1755	-0.1755
19	0.6382	0.7120	-0.2051	-0.2051

20 0.6298 0.6777 -0.2184 -0.2184

Nodo	U _{int}	U _{int} Exac
1	0.9999	1.0000
2	1.0266	1.0256
3	0.9740	0.9756
4	1.1176	1.1111
5	0.9485	0.9524
6	0.9499	0.9524
53	1.4392	1.4308
54	1.7999	1.7862
55	1.7634	1.6981

ERROR

Condiciones de frontera tipo Dirichlet

Iteraciones =6

ErrorbigU =0.0020

ErrorQ =0.1737

Condiciones de frontera tipo Neumann

Iteraciones =9

ErrorbigU =0.0470

ErrorQ =0

Condiciones de frontera Mixta

Iteraciones =8

ErrorbigU = 0.0284

ErrorQ =0.1100

Figura 14. Nodos interiores y frontera para la ecuación de Burgers.

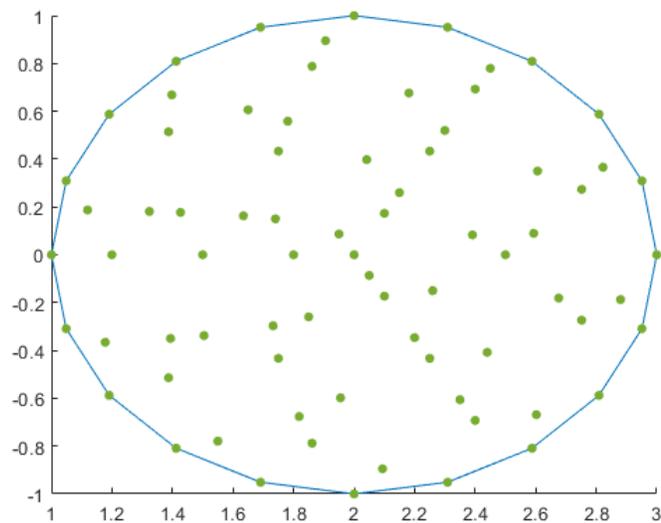
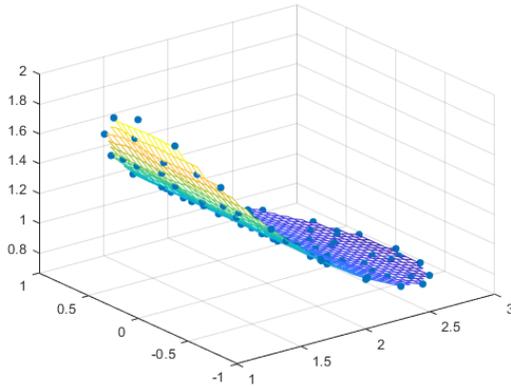
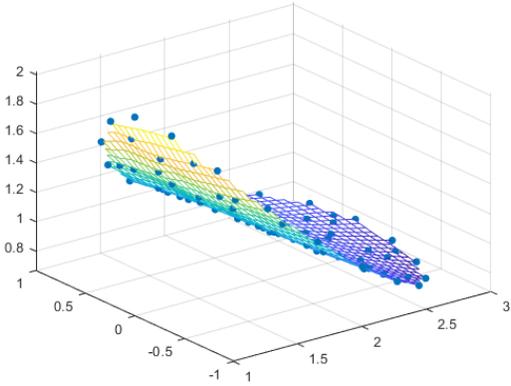


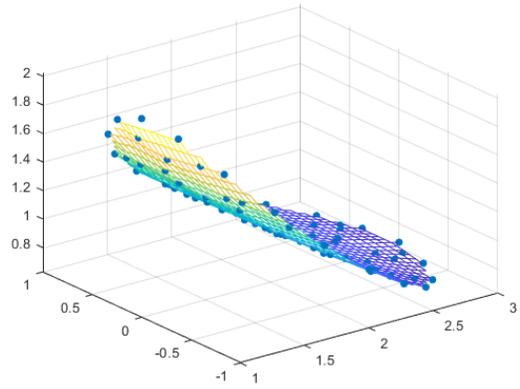
Figura 15. Comparativa de la solución numérica de la ecuación de Burger para diferentes tipos de condiciones de frontera.



[Dirichlet]



[Neumann]



[Mixto]

3.7. Ecuación de Difusión

Finalmente, consideramos un problema de difusión gobernado por la siguiente ecuación

$$\Delta u = D \frac{\partial u}{\partial t} \quad (110)$$

donde u es la concentración del material que se difunde y D es el coeficiente de difusión. La definición del problema se completa con la especificación de las condiciones de frontera apropiadas y las condiciones iniciales de tipo $u(x, y, t_0) = u_0(x, y)$.

Se observa que la función b en esa ecuación ahora se define como

$$b = D \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (111)$$

En el presente caso, el problema ha cambiado de carácter, ya que ahora necesitamos llevar a cabo una derivada de u con respecto al tiempo t . El Método de Reciprocidad Dual, propone la siguiente aproximación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) \simeq \sum_{j=1}^{N+L} f_j(x, y) \alpha_j(t) \quad (112)$$

donde f_j son funciones conocidas de la geometría y α_j funciones desconocidas de tiempo. Por lo tanto, las matrices \hat{U} y \hat{Q} anteriores son las mismas que en los capítulos anteriores. El siguiente paso en la formulación es similar a la ecuación (58)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = F \vec{\alpha}. \quad (113)$$

Despejando el vector $\vec{\alpha}$ en la ecuación anterior, tenemos

$$\vec{\alpha} = F^{-1} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}. \quad (114)$$

Sustituyendo lo anterior en (84), se obtiene la siguiente expresión

$$H\vec{u} - G\vec{q} = D(H\hat{U} - G\hat{Q})F^{-1}\frac{\vec{\partial}u}{\partial t}. \quad (115)$$

Definiendo

$$C = -DS = -D(H\hat{U} - G\hat{Q})F^{-1} \quad (116)$$

entonces,

$$C\frac{\vec{\partial}u}{\partial t} + H\vec{u} = G\vec{q}. \quad (117)$$

El sistema es una ecuación diferencial ordinaria, por lo tanto, cualquier esquema estándar de solución de esa ecuación diferencial ordinaria de tiempo se puede utilizar. Para simplificar, aquí se empleará Diferencias Finitas. Se puede proponer una aproximación lineal para la variación de u y q dentro de cada paso de tiempo, en la forma

$$u = (1 - \theta_u)u^m + \theta_u u^{m+1}, \quad (118)$$

$$q = (1 - \theta_q)q^m + \theta_q q^{m+1}, \quad (119)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (u^{m+1} - u^m), \quad (120)$$

donde θ_u y θ_q son parámetros que posicionan los valores de u y q , respectivamente, entre los niveles de tiempo m y $m + 1$. Sustituyendo estas aproximaciones en (117) y despejando se obtiene:

$$(C + \theta_u \Delta t H) u^{m+1} - \Delta t \theta_q G q^{m+1} = [C - \Delta t (1 - \theta_u) H] u^m + \Delta t (1 - \theta_q) G q^m. \quad (121)$$

El lado derecho de (121) todo es conocido, ya que involucra valores que se han especificado como condiciones iniciales o se han calculado previamente. Al introducir las condiciones de frontera en el tiempo $m + 1$, se puede reorganizar el lado izquierdo de (121) y resolver el sistema de ecuaciones resultante, para cada nivel de tiempo. Tenga en cuenta que los elementos de las matrices H , G y S dependen solo de datos geométricos. Por lo tanto, pueden calcularse una vez y almacenarse. Si el valor de Δt se mantiene constante, la matriz del sistema también se puede reducir a una expresión tipo $A\vec{x} = \vec{y}$. Una vez hecho esto, el procedimiento de avance de tiempo consistirá en un esquema recursivo simple con solo operaciones algebraicas involucradas.

3.7.1. Resultados. Como ejemplo final consideramos el problema

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} & \text{en } \Omega, \\ u = e^{-2t} \sin(x) \sin(y) & \text{sobre } \Gamma_1, \\ q = e^{-2t} \cos(x) \sin(y)x + e^{-2t} \sin(x) \cos(y)y & \text{sobre } \Gamma_2. \end{cases} \quad (122)$$

Con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \sin(x) \sin(y) & \text{en } \Omega, \\ q(x, y, 0) = \cos(x) \sin(y)x + \sin(x) \cos(y)y & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (123)$$

Se consideró el sistema Euler implícito donde $\theta_u = 1$, $\theta_q = 1$ y $\Delta t = 0,1$, por lo tanto, la ecuación (121) se convierte en

$$(C + 0,1 \cdot H) u^{m+1} - 0,1 \cdot Gq^{m+1} = Cu^m. \quad (124)$$

En las simulaciones se utilizaron 55 nodos interiores, 50 nodos frontera y 5 iteraciones. Se utilizaron dos condiciones de frontera, la condición mixta y tipo Dirichlet.

ERRORES

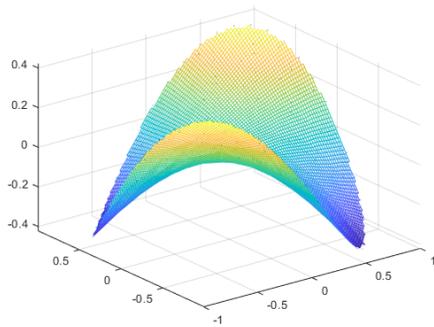
Condiciones de frontera Tipo Dirichlet

ErrorbigU =0.0035 t=0
 ErrorbigU =0.0046 t=0,1
 ErrorbigU =0.0050 t=0,2
 ErrorbigU =0.0051 t=0,3
 ErrorbigU =0.0052 t=0,4

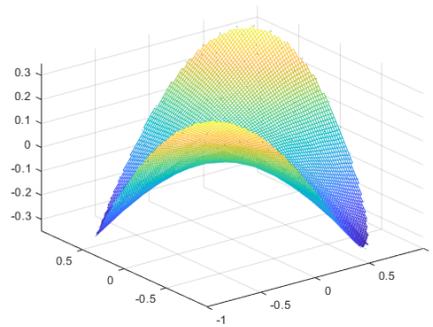
Condiciones de frontera mixta

ErrorbigU =0.0189 t=0
 ErrorbigU =0.0290 t=0,1
 ErrorbigU =0.0362 t=0,2
 ErrorbigU =0.0423 t=0,3
 ErrorbigU =0.0481 t=0,4

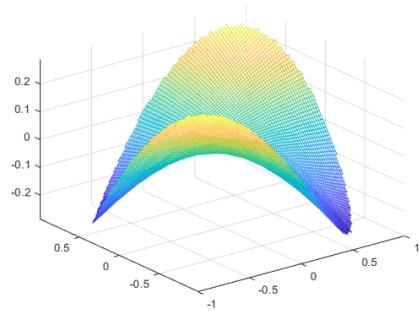
Figura 16. Solución numérica de la ecuación de calor en intervalos de tiempo $t = 0$ a $t = 0,4$, utilizando condición de frontera tipo Dirichlet.



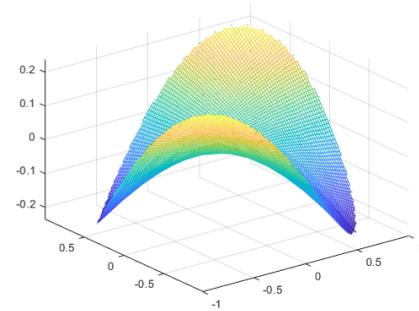
[t=0]



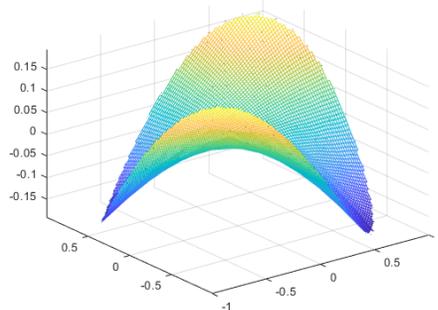
[t=0.1]



[t=0.2]



[t=0.3]



[t=0.4]

BIBLIOGRAFIA

CALVETTI, D., *et al.* "Computation of Gauss-Kronrod Quadrature Eules". eng. En: *Mathematics of computation* 69.231 (2000), págs. 1035-1052 (vid. pág. 82).

CHIHARA, T.S. "The One-Quarter Class Of Orthogonal Polynomials". eng. En: *The Rocky Mountain journal of mathematics* 21.1 (1991), págs. 121-137 (vid. pág. 82).

CRUSE, T.A; SNOW, D.W y WILSON, R.B. "Numerical solutions in Axisymmetric Elasticity". eng. En: *Computers structures* 7.3 (1977), págs. 445-451 (vid. pág. 12).

EVANS, L.C. "Partial differential equations, 2d ed". eng. En: *Departmet of Mathematics University Of California, Berkeley* 19.2 (2010) (vid. pág. 15).

GHADIMI, P. y DASHTIMANESH, A. "Solution of 2D Navier–Stokes Equation by Coupled Finite Difference-Dual Reciprocity Boundary Element Method". eng. En: 35.5 (2011), págs. 2110-2121 (vid. pág. 13).

GRÜNDEMANN, H. "Transforming Domain Into Boundary Integrals in BEM, Lecture Notes in Engineering". eng. En: *Mechanism and Machine Theory* 25.2 (1990), págs. 241-241 (vid. pág. 12).

JASWON, M. A. "Integral Equation Methods in Potential Theory. I". eng. En: 275.1360 (1963), págs. 23-32 (vid. pág. 11).

LOEFFLER, C. F., *et al.* "Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method using Direct Radial Basis Function Interpolation". eng. En: *Engineering Analysis with Boundary Elements* 61 (2015), págs. 218-225 (vid. pág. 13).

MERAL, G. "DRBEM-FDM Solution of a Chemotaxis–Haptotaxis Model for Cancer Invasion". eng. En: *Journal of computational and applied mathematics* 354 (2018), págs. 299-309 (vid. pág. 13).

NOWAK, A.J y BREBBIA, C.A. "The Multiple-Reciprocity Method. A New Approach for Transforming BEM Domain Integrals to the Boundary". eng. En: *Engineering analysis with boundary elements* 6.3 (1989), págs. 164-167 (vid. pág. 12).

PARTRIDGE, P. W; BREBBIA, C. A y WROBEL, L. C. "The Dual Reciprocity Boundary Element Method". eng. En: (1991) (vid. págs. 12, 46).

POWER, H. y PARTRIDGE, P. W. "Dual Reciprocity Boundary Element Method for the Time-Dependent Stokes Flows". eng. En: *International Journal of Numerical Methods For Heat Fluid Flow* 3.2 (1993), págs. 145-155 (vid. pág. 13).

SYMM, G. T. "Integral Equation Methods in Potential Theory. II". eng. En: 275.1360 (1963), págs. 33-46 (vid. pág. 11).

TEZER-SEZGIN, M. y AYDIN, S. Han. "Dual Reciprocity Boundary Element Method for Magnetohydrodynamic Flow Using Radial Basis Functions". eng. En: *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 16 (2002), págs. 49-63 (vid. pág. 13).

TURNER, L. E. "Historia Mathematica". eng. En: *American Mathematical Society* 35.1 (2008), págs. 52-53 (vid. pág. 82).

WU, Y. S, *et al.* "An Advanced Boundary Integral Equation Method for Two-Dimensional Electromagnetic Field Problems". eng. En: *Electric Machines and Power Systems* 1.4 (1977), págs. 301-313 (vid. pág. 12).

Anexos

Anexo A. Cuadratura de Gauss

La cuadratura de Gauss se utilizó para aproximar las integrales no singulares involucradas en la definición de las matrices H y G . Según este método de integración numérica, cada integral se escribe como

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = w_0 f(\xi_0) + w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) + \cdots + w_n f(\xi_n) = \sum_{i=0}^n f(\xi_i) w_i \quad (125)$$

donde n es el número de puntos de integración, ξ_i es la coordenada local del i -ésimo punto de integración y w_i es un factor de peso asociado. Observemos que con un simple cambio de variable se pueden extender los límites de integración a valores distintos a $[-1, 1]$. Los puntos ξ_i y los pesos w_i son calculados haciendo uso de los llamados Polinomios de Legendre:

Polinomios de Legendre. Los polinomios de Legendre hasta de grado 4 son dados por

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

En general, el polinomio de Legendre de grado n se puede obtener por medio de la

fórmula de Rodrigues ¹⁴

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

O bien haciendo uso de una relación de recurrencia, tal como describimos a continuación (véase ¹⁵, ¹⁶):

$$(n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Los puntos ξ_k son calculados al encontrar las raíces del polinomio de Legendre, es decir, $P_i(\xi) = 0$ y para calcular los pesos w_i se aplicará la siguiente fórmula

$$w_k = \frac{1}{P'_{n+1}(\xi_k)} \int_{-1}^{+1} \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \xi_k)} dx.$$

Por ejemplo, usando el polinomio P_2 se tiene que $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ cuyas raíces son $\xi_0 = 1/\sqrt{3}$, $\xi_1 = -1/\sqrt{3}$ y su derivada $P'_2(x) = \frac{1}{2}(6x) = 3x$. Así los pesos correspondientes serán

$$w_0 = \frac{1}{3(1/\sqrt{3})} \int_{-1}^{+1} \frac{\frac{1}{2}(3x^2-1)}{x+\frac{1}{\sqrt{3}}} dx \quad y \quad w_1 = \frac{1}{3(-1/\sqrt{3})} \int_{-1}^{+1} \frac{\frac{1}{2}(3x^2-1)}{x-\frac{1}{\sqrt{3}}} dx. \quad (126)$$

¹⁴ TURNER, L. E. "Historia Mathematica". eng. En: *American Mathematical Society* 35.1 (2008), págs. 52-53.

¹⁵ CALVETTI, D., *et al.* "Computation of Gauss-Kronrod Quadrature Eules". eng. En: *Mathematics of computation* 69.231 (2000), págs. 1035-1052.

¹⁶ CHIHARA, T.S. "The One-Quarter Class Of Orthogonal Polynomials". eng. En: *The Rocky Mountain journal of mathematics* 21.1 (1991), págs. 121-137.

Para el caso general definimos una relación lineal con la nueva variable

$$x = \frac{(b-a)\xi + (b+a)}{2} \quad dx = \frac{b-a}{2}d\xi \quad \xi \in [-1, 1].$$

La integral anterior se puede aproximar como

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2} \sum_{k=0}^n w_k f\left(\frac{(b-a)\xi_k + (b+a)}{2}\right) \quad \xi_k \in [-1, 1].$$

Anexo B. Solución de integrales

Se resolverán las integrales enunciadas en el capítulo dos.

Caso 1.

Calculemos la siguiente integral

$$\int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| l \frac{(1 - \xi)}{2} \right| \right) d\xi = - \int_{-1}^1 (\xi - 1) \ln \left(\left| l \frac{(1 - \xi)}{2} \right| \right) d\xi. \quad (127)$$

Resolvemos ahora

$$\int_{-1}^1 (\xi - 1) \ln \left(\left| l \frac{(1 - \xi)}{2} \right| \right) d\xi.$$

Aplicando la sustitución

$$u = \frac{1 - \xi}{2} \rightarrow \frac{du}{d\xi} = -\frac{1}{2} \rightarrow d\xi = -2du$$

se obtiene

$$= 4 \int u \left(\ln(u) + \ln \left(\frac{l}{2} \right) + \ln(2) \right) du$$

integramos por partes: $\int f g' = f g - \int f' g$ donde $f = \ln(u) + \ln\left(\frac{l}{2}\right) + \ln(2)$ y $g' = u$
por lo tanto, $f' = \frac{1}{u}$ y $g = \frac{u^2}{2}$ se llega a

$$= \frac{u^2(\ln(u) + \ln\left(\frac{l}{2}\right) + \ln(2))}{2} - \int \frac{u}{2},$$

entonces,

$$4 \int u \left(\ln(u) + \ln \left(\frac{|l|}{2} \right) + \ln(2) \right) du = 2u^2 \left(\ln(u) + \ln \left(\frac{|l|}{2} \right) + \ln(2) \right) - u^2$$

deshaciendo la sustitución $u = \frac{1-\xi}{2}$:

$$= \frac{\left(\ln\left(\frac{1-\xi}{2}\right) + \ln\left(\frac{|l|}{2}\right) + \ln(2)\right) (\xi - 1)^2}{2} - \frac{(\xi - 1)^2}{4}.$$

Reemplazando ahora las integrales ya resueltas concluimos que

$$- \int (\xi - 1) \ln \left(\left| l \frac{(1-\xi)}{2} \right| \right) d\xi = \frac{(\xi - 1)^2}{4} - \frac{\left(\ln\left(\frac{1-\xi}{2}\right) + \ln\left(\frac{|l|}{2}\right) + \ln(2)\right) (\xi - 1)^2}{2}.$$

Evaluando en $\xi = -1$ obtenemos $1 - 2\ln(|l|)$ y en $\xi = 1$ como hay una singularidad, tomamos el límite

$$\lim_{\xi \rightarrow 1^-} \left(\frac{(\xi - 1)^2}{4} - \frac{\left(\log\left(\frac{1-\xi}{2}\right) + \log\left(\frac{|l|}{2}\right) + \ln(2)\right) (\xi - 1)^2}{2} \right) = 0.$$

Así

$$\int_{-1}^1 (\xi - 1) \ln \left(\left| l \frac{(1-\xi)}{2} \right| \right) d\xi = -(1 - 2\ln(|l|)) = 2\ln(|l|) - 1. \quad (128)$$

Caso 2.

Consideramos ahora la integral

$$\int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| l \frac{(1+\xi)}{2} \right| \right) d\xi. \quad (129)$$

Utilizamos integración por partes: $\int f g' = f g - \int f' g$ con $f = \ln \left(\left| \frac{l(1+\xi)}{2} \right| \right)$ y $g' = 1 - \xi$, entonces $f' = \frac{1}{1+\xi}$ y $g = \xi - \frac{\xi^2}{2}$, y tenemos

$$= \ln \left(\left| \frac{l(1+\xi)}{2} \right| \right) \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) + \int \frac{\xi^2 - \xi}{1+\xi} d\xi.$$

Resolviendo ahora

$$\int \frac{\frac{\xi^2}{2} - \xi}{1 + \xi} d\xi = \frac{1}{2} \int \frac{\xi^2 - 2\xi}{1 + \xi} d\xi.$$

Aplicamos sustitución $u = 1 + \xi \rightarrow du = d\xi$, ya que $\xi^2 = (u - 1)^2$ y $-2\xi = 2 - 2u$ tenemos

$$= \int \frac{u^2 - 4u + 3}{u} du = \int u du + 3 \int \frac{1}{u} du - 4 \int 1 du = 3 \ln(u) + \frac{u^2}{2} - 4u.$$

Reemplazando el valor de u llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{\xi^2 - 2\xi}{1 + \xi} d\xi &= \frac{3}{2} \ln(1 + \xi) + \frac{(1 + \xi)^2}{4} - 2(1 + \xi) \\ &= \frac{6 \ln(|1 + \xi|) + (\xi - 6)\xi}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} &\int (1 - \xi) \ln \left(\left| l \frac{(1 + \xi)}{2} \right| \right) d\xi = \\ &= \frac{6 \ln(|1 + \xi|) + (\xi - 6)\xi}{4} - \left(\frac{\xi^2}{2} - \xi \right) \ln \left(\left| \frac{l(1 + \xi)}{2} \right| \right) \\ &= -\frac{1}{2} (\xi^2 - 2\xi - 3) \ln(|1 + \xi|) - \left(\frac{\xi^2}{2} - \xi \right) (\ln(|l|) - \ln(2)) + \frac{(\xi - 6)\xi}{4}. \end{aligned}$$

Evaluando en $\xi = 1$ tenemos

$$= \frac{2 \ln(|l|) + 6 \ln(2) - 5}{4},$$

y cuando $\xi = -1$ hay una singularidad, por lo tanto

$$\lim_{\xi \rightarrow -1^+} \left(-\frac{1}{2} (\xi^2 - 2\xi - 3) \ln(|1 + \xi|) - \left(\frac{\xi^2}{2} - \xi \right) (\ln(|l|) - \ln(2)) + \frac{(\xi - 6)\xi}{4} \right)$$

$$= \lim_{\xi \rightarrow -1} -\frac{1}{2} (\xi^2 - 2\xi - 3) \ln(|1 + \xi|) - \frac{3}{2}(\ln(|l|) - \ln(2)) + \frac{7}{4} = \frac{1}{2}(\ln(|l|) - \ln(2)) + \frac{7}{4}.$$

Con lo que finalmente se tiene que

$$\int_{-1}^1 (1 - \xi) \ln \left(\left| l \frac{(1 + \xi)}{2} \right| \right) d\xi =$$

$$= \frac{2 \ln(|l|) + 6 \ln(2) - 5}{4} + \frac{3}{2}(\ln(|l|) - \ln(2)) - \frac{7}{4} = 2 \ln(l) - 3. \quad (130)$$