

**TALLERES SOBRE GEOMETRÍA FRACTAL APLICADOS A
GRUPOS DE ESTUDIANTES BÁSICA SECUNDARIA Y MEDIA**

NOLVIS PATRICIA PÉREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2005

**TALLERES SOBRE GEOMETRÍA FRACTAL APLICADOS A
GRUPOS DE ESTUDIANTES BÁSICA SECUNDARIA Y MEDIA**

NOLVIS PATRICIA PÉREZ

**Monografía presentada como requisito parcial para optar el
título de Licenciatura en Matemáticas**

Director

Lic. SONIA M. SABOGAL

CODIRECTOR

Lic. JUAN DE DIOS URBINA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2005

DEDICATORIA

A Dios que es mi pie de apoyo que ilumina el transcurso de mi vida y me da la satisfacción de lograr mis objetivos.

A mi hermana Amparo que con su apoyo y dedicación logró que lo que ayer fue un sueño hoy es realidad.

AGRADECIMIENTOS

A mi mamá Rosa, a mis hermanos y esposo, que a lo largo de estos años con su amor, compañía, apoyo y sabios consejos me ayudaron a salir de muchas dificultades.

A todos mis amigos que de una u otra manera me acompañaron a lo largo de mi carrera.

Al profesor Isaacs, por su amistad y constante colaboración.

A Liliana, por su colaboración para la ejecución de este trabajo.

A Sonia y Juan de Dios, directores de esta monografía, por creer en mi, quienes con sus sabios consejos guiaron y acompañaron mi trabajo de principio a fin.

RESUMEN

TITULO: TALLERES SOBRE GEOMETRÍA FRACTAL APLICADOS A GRUPOS DE ESTUDIANTES DE BÁSICA SECUNDARIA Y MEDIA*.

AUTORA: NOLVIS PATRICIA PÉREZ**

PALABRAS CLAVES: Geometría Fractal, modelo de Van Hiele, Autosimilitud, Determinísticos.

DESCRIPCIÓN:

El objeto de este trabajo es la aplicación y análisis, desde el modelo de Van Hiele, de los talleres propuestos en la monografía “GEOMETRÍA FRACTAL EN EL BACHILLERATO” (Castro, 1994); los cuales se estipulan con grado de complejidad y avance en el conocimiento y reproducción de fractales, donde el primer taller da una introducción a aspectos significativos de su surgimiento y desarrollo histórico. En los talleres 2, 3, 4, 5 y 6 se dan a conocer los principales fractales determinísticos con una de sus propiedades fundamentales la autosimilitud. Los talleres 7, 8, 9, 10 y 11 presentan las bases teórico-matemáticas de estos fractales determinísticos.

La presente monografía se ha dividido en tres partes: en la primera parte se presenta el marco teórico en donde se expone la importancia de la geometría fractal en la secundaria y se exponen los conceptos básicos del modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría. En la segunda parte: aplicación y análisis de los talleres, se presentan 11 talleres tal y como aparecen en (castro, 1994) (a excepción del taller 0 y algunas actualizaciones de los talleres que lo requerían), y se hace el correspondiente análisis de cada taller, aplicados a un grupo de 36 estudiantes del grado 10º del colegio municipal Víctor Félix Gómez Nova, considerando las observaciones pertinentes y el análisis correspondiente a los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje según el modelo de Van Hiele. En la tercera parte: talleres modificados, se presentan los talleres modificados con base en el análisis realizado en la segunda parte. Finalmente, se incluyen unos anexos. Esperamos que los talleres que presentamos en la tercera parte de este trabajo sean una herramienta que facilite el conocimiento y aplicación de la geometría fractal para el fomento y estímulo del pensamiento geométrico.

* Monografía.

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS. Director Sonia M. Sabogal, Codirector Juan de Dios Urbina.

SUMMARY

TITLE: SHOPS OF GEOMETRY FRACTAL APPLIED TO GROUPS OF STUDENTS OF BASIC SECONDARY AND STOCKING*

AUTHOR: NOLVIS PATRICIAN PÉREZ**

KEY WORDS: Geometry Fractal, model from Van Hiele, Autosimilitud, Determinísticos.

DESCRIPTION:

The object of this work is the application and analysis, from the pattern of Van Hiele, of the shops proposed in the monograph "GEOMETRY FRACTAL IN THE HIGH SCHOOL" (Castro, 1994); which are specified with grade of complexity and advance in the knowledge and reproduction of fractals, where the first shop gives an introduction to significant aspects of its emergence and historical development. In the shops 2, 3, 4, 5 and 6 are given to know the main fractals determinísticos with one of their fundamental properties the autosimilitud. The shops 7, 8, 9, 10 and 11 show the theoretical-mathematical bases of these fractals determinísticos.

The present monograph has been divided in three parts: in the first one presents the theoretical mark where the importance of the geometry fractal in the secondary is exposed and the basic concepts of the pattern of Van Hiele are exposed for the teaching of the geometry. In the second part: application and analysis of the shops, 11 shops are presented such and like they appear in (Castro, 1994) (to exception of the shop 0 and some upgrades of the shops that required it), and the corresponding analysis of each shop is made, applied to a group of 36 students of the grade 10° of the municipal school Victor Félix Gómez Nova, considering the pertinent observations and the corresponding analysis to the reasoning levels and the learning phases according to the pattern of Van Hiele. In the third part: modified shops, they are presented with base in the carried out analysis in the second part. Finally, some annexes are included. We hope the shops that we present in the third part of this work are a tool that facilitates the knowledge and application of the geometry fractal for the development and stimulus of the geometric thought.

* Monograph.

** FACULTY OF SCIENCIES, DEPARTAMENT OF MATEMATICS. Advigerds Sonia M.Sabogal, Juan de Dios Urbina.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN.....	9.
1. MARCO TEÓRICO.....	11.
1.1 GEOMETRÍA FRACTAL EN EL BACHILLERATO.....	11.
1.1.1 Sobre la importancia de la Geometría Fractal.....	12.
1.2 MODELO DE VAN HIELE.....	13.
1.2.1 Componente Descriptiva.....	14.
1.2.2 Componente Didáctica.....	16.
2. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS TALLERES.....	18.
3. TALLERES MODIFICADOS.....	120.
OBSERVACIONES.....	187.
CONCLUSIONES.....	188.
BIBLIOGRAFÍA.....	191.
ANEXO 1.....	193.
ANEXO 2.....	198.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el sistema educativo colombiano establece la organización de los procesos de conocimiento para cada área del saber. Así en el área de matemáticas se tienen los parámetros generales que se establecen en los lineamientos curriculares, los cuales tienen en cuenta el desarrollo del pensamiento geométrico y están a la expectativa de nuevas teorías que amplíen este conocimiento; es así como la geometría fractal incursiona en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El objeto de este trabajo es la aplicación y análisis, desde el modelo de Van Hiele, de los talleres propuestos en la monografía "GEOMETRÍA FRACTAL EN EL BACHILLERATO" (Castro, 1994); los cuales se estipulan con grado de complejidad y avance en el conocimiento y reproducción de fractales, donde el primer taller da una introducción a aspectos significativos de su surgimiento y desarrollo histórico. En los talleres 2, 3, 4, 5 y 6 se dan a conocer los principales fractales determinísticos con una de sus propiedades fundamentales la autosimilitud. Los talleres 7, 8, 9, 10 y 11 presentan las bases teórico-matemáticas de estos fractales determinísticos.

Este trabajo pretende constituirse en un aporte para el conocimiento, divulgación y aplicación de la geometría fractal en la educación media. El

estudio de esta geometría conlleva al descubrimiento de formas y figuras que describe la naturaleza que observa el estudiante en su entorno y cotidianidad.

La presente monografía se ha dividido en tres partes: en la primera parte se presenta el marco teórico en donde se expone la importancia de la geometría fractal en la secundaria y se exponen los conceptos básicos del modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría. En la segunda parte: aplicación y análisis de los talleres, se presentan 11 talleres tal y como aparecen en (castro, 1994) (a excepción del taller 0 y algunas actualizaciones de los talleres que lo requerían), y se hace el correspondiente análisis de cada taller, mostrando cuál fue el procedimiento seguido al aplicar el taller con un grupo de 36 estudiantes del grado 10^o del colegio municipal Víctor Félix Gómez Nova, considerando las observaciones pertinentes y el análisis correspondiente a los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje según el modelo de Van Hiele. En la tercera parte: talleres modificados, se presentan los talleres modificados con base en el análisis realizado en la segunda parte. Finalmente, se incluyen unos anexos en los cuales se muestra algunos apartes del trabajo de los estudiantes y algunas fotografías tomadas durante el desarrollo de los talleres. Esperamos que los talleres que presentamos en la tercera parte de este trabajo sean una herramienta que facilite el conocimiento y aplicación de la geometría fractal para el fomento y estímulo del pensamiento geométrico.

1. MARCO TEÓRICO

1.1 GEOMETRIA FRACTAL EN EL BACHILLERATO.

En los últimos años se ha venido introduciendo la geometría fractal en el campo educativo de forma lenta, pero ganando una posición importante en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, muestra de ello son las últimas producciones escritas que se han publicado a nivel nacional e internacional. Obras que desde 1991, aproximadamente, empezaron a involucrar el conocimiento y aplicación de los fractales en el nivel educativo; entre ellas podemos mencionar las siguientes:

- *“Descubriendo a Geometría Fractal, para a sala de aula”* (Barbosa, 2002).
- *“Geometría Fractal. Conceptos y procedimientos para la construcción de Fractales”* (Estrada, 2004).
- *“Los Fractales: una alternativa interactiva para la enseñanza de las matemáticas”* (Pérez, 1992).

Elaboraciones de trabajos de grado tales como:

- *“Geometría Fractal en el Bachillerato”* (Castro, 1994).
- *“Geometría Fractal en el Bachillerato, acercamiento por sistemas dinámicos”*, (Daza, 1999).

- *“Introducción a la Geometría Fractal. Básica primaria”* (Cobos, 2002).
- *“Un acercamiento a la geometría fractal en el bachillerato”* (Sierra, 2005).

1.1.1 Sobre la importancia de la Geometría Fractal

En el sistema educativo el pensamiento geométrico se desarrolla a partir de la geometría euclidiana, una geometría basada en figuras como círculos, rectángulos, triángulos y líneas que describen el mundo físico. Si observamos a nuestro alrededor nos podemos dar cuenta que las figuras que describen la naturaleza no están limitadas solamente a estos planos rigurosos y ordenados sino que existen otras herramientas que nos permiten modelar de una forma casi perfecta a ésta.

Es por esto que la geometría fractal se constituye en una herramienta metodológica para los docentes de matemáticas, que abre de forma creativa y llamativa el mundo de las matemáticas, cuya característica es el sentido atractivo y estético que se establece gráficamente a partir de ecuaciones matemáticas de lo geométrico formas e imágenes de lo real.

1.2 EL MODELO DE VAN HIELE²

El modelo de Van Hiele surge por la necesidad de encontrar una solución al problema de la poca comprensión e interés por la geometría por parte de los estudiantes. A partir de las inquietudes que se plantearon los esposos holandeses Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele Geldof, al observar que sus estudiantes no eran capaces de entender y comprender la materia por más que ellos se esforzaran por explicar; esto los llevó a realizar un estudio más detenido y analizar las circunstancias del porqué, llegando a las siguientes conclusiones:

- Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
- Un estudiante sólo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamientos una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que este alcance un nivel de razonamiento superior para presentársela.
- No se puede enseñar a un estudiante a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

² Tomado de (Fiallo,1996)

Estas conclusiones permitieron la formulación de dos componentes, una componente descriptiva y la componente didáctica, que se definen a continuación.

1.2.1 Componente Descriptiva

Esta componente identifica las etapas de desarrollo intelectual y cognoscitivo, que corresponde a los “niveles de razonamiento” por los que atraviesa el estudiante en el progreso de la capacidad de su razonamiento matemático.

1.2.1.1 Niveles de razonamiento

- **Nivel 1: Reconocimiento.** También denominado de visualización, es de simple reconocimiento de las figuras geométricas distinguiéndolas por sus formas, su aspecto físico como un todo sin detectar sus partes componentes y propiedades de éstas.

Este nivel se ubica en la etapa del preescolar y los primeros años de educación básica primaria aunque no es exclusivo de estos grados, ni de esta edad, puesto que cuando se presenta a los alumnos un nuevo concepto geométrico pasarán por este nivel aunque sea un paso más rápido.

- **Nivel 2: Análisis.** Es un nivel de conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas, estableciendo relaciones a nivel intuitivo entre las figuras y permitiendo realizar unas clasificaciones sencillas a partir de características simples que son el resultado de la

observación. Sin embargo, no le resultará posible establecer una relación entre las figuras observadas que les permita componer relaciones de inclusión de clases.

- **Nivel 3: Clasificación.** Las relaciones y definiciones empiezan a quedar clarificadas, pero sólo con ayuda y guía. Comienza a establecerse las conexiones lógicas, merced a una mezcla de experimentación práctica y de razonamiento.
- **Nivel 4: Deducción formal.** En este nivel los estudiantes pueden deducir una propiedad de otra mediante secuencias de proposiciones. Se entiende en este nivel el sentido de los axiomas, las definiciones y teoremas, pero no se hacen razonamientos abstractos y no se reconoce la necesidad de rigor en los razonamientos.
- **Nivel 5: Razonamiento rigurosamente deductivo.** En este nivel el estudiante razona sin necesidad de la intuición, pudiendo componer su razonamiento deductivo con otros y puede analizar el grado de rigor en varios sistemas deductivos. Puede comparar sistemas basados en axiomáticas diferentes y puede estudiar distintas geometrías en ausencia de modelos concretos. Este nivel por su alto grado de abstracción, generalmente no es alcanzado por los estudiantes de media y puede ser considerado para estudiantes de nivel superior.

1.2.2 Componente Didáctica

Esta componente establece cinco fases de aprendizaje, las cuales sirven de apoyo al profesor para el acompañamiento de los estudiantes en el paso de los niveles de razonamiento y son etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar para adquirir las experiencias que lo lleven a niveles superiores de razonamiento; las cuales se describen a continuación.

- **Fase 1: Información.** En esta fase el profesor informa a los estudiantes sobre el tema de estudio, qué materiales se van a utilizar, como va a ser la metodología de trabajo; en esta fase los estudiantes también aprenden a manejar los materiales que van a utilizar y adquirirán los conocimientos básicos e imprescindibles para el siguiente tema.
- **Fase 2: Orientación dirigida.** En esta fase el trabajo principal es del estudiante, puesto que en ella, él va a realizar las actividades diseñadas por el profesor para descubrir, conceptuar, comprender, analizar, sintetizar, generalizar y aprender el nuevo tema.
- **Fase 3: Explicitación.** En esta fase los alumnos van a intercambiar sus experiencias y sus conclusiones con los demás compañeros del grupo y el profesor; en ella deben explicar la forma de resolución de sus actividades y sus conclusiones, para confrontarlas dentro del contexto del diálogo con sus compañeros.
- **Fase 4: Orientación libre.** Esta fase conlleva a que el estudiante aplique, combine los conocimientos y el lenguaje que adquiere de otras

investigaciones diferentes a las anteriores; para ello el docente debe ofrecer ejercicios que planteen situaciones nuevas, abiertas y con múltiples caminos para su solución.

- **Fase 5: Integración.** En esta fase se trata que el estudiante llegue a condensar en un todo los contenidos y métodos que a adquirido en el proceso y su relación con otros campos o temas de estudio anteriormente; la función del maestro es propiciar actividades que conduzcan a la acumulación y comparación de lo que ya conoce.

2. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS TALLERES

En esta parte se presentan los once talleres que aparecen textualmente en (castro, 1994) que fueron desarrollados con un grupo de 36 estudiantes del grado décimo del colegio municipal Víctor Félix Gómez Nova de Piedecuesta.

Presentaremos estos talleres encerrados en un cuadro, en seguida de cada taller se hace el análisis correspondiente de acuerdo a la experiencia realizada y al modelo de Van Hiele. Inicialmente al taller 0 se le agrego una actividad, que trata de hacer la pirámide de Sierpinski hasta el paso 4 con pitillos revolvedores de café y nylon.

TALLER 0

TITULO: INTRODUCCIÓN – MOTIVACIÓN

(El concepto de fractal)

OBJETIVO: con este taller lo único que se pretende es, como su nombre lo dice, darte una breve introducción al mundo de los fractales a la vez que te motivas a estudiarlos.

MATERIALES: para el desarrollo de este taller vas a necesitar seis pitillos pequeños (revolvedores de café) y metro y medio de nylon, (este material lo llevará el profesor).

1. Con los pitillos y el nylon que te facilitó tu profesor construye un tetraedro, esto lo harás tú solo con tu imaginación.

2. Ahora reúnete con tres de tus compañeros y forma una pirámide uniendo cuatro tetraedros. Luego une esta pirámide que formaron con tres más y así sucesivamente hasta donde alcancen las pirámides. “Esta figura que acabas de formar junto con tus compañeros recibe el nombre de **pirámide de Sierpinski**.

3. Ahora lee con atención y ... déjate atraer por ellos!

Hace algo más de 30 años surgió una nueva geometría recursiva o “Geometría Fractal”, creada por el polaco Benoit Mandelbrot. Esta geometría ha resultado ser una herramienta que además de ser muy atractiva por la belleza (a veces exótica) de las figuras que se generan, tiene muy buenas perspectivas para modelar fenómenos de la naturaleza que siempre se habían considerado fuera del alcance de las matemáticas y juega un papel importante en el desarrollo de disciplinas tan variadas y aparentemente disímiles como las matemáticas (geometría fractal), las ciencias de computación (heurística), la Pintura (fractales), la Música (ruido blanco), la Física (sistemas dinámicos) y la Biología (modelos neuronales)”.

La idea filosófica subyacente a esta geometría es que los objetos de la naturaleza son recursivos. Por ejemplo un árbol, una nube, una costa, son

objetos tridimensionales que pueden ser modelados muy sencillamente en términos de ellos mismos.

Esto no se puede hacer con la geometría euclidiana, ya que esta fue modelada para describir objetos rectilíneos y no objetos irregulares (de hecho la palabra fractal quiere decir: irregular, fragmentado).

“Muy posiblemente esta geometría de los objetos irregulares será la geometría del futuro. La recursión es una de las herramientas potentes tanto para la descripción de los objetos, como para la resolución de problemas”³.

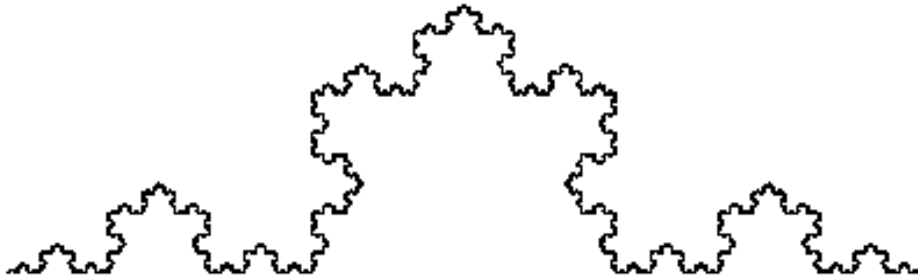
Aunque no existe todavía una definición formal de la palabra “fractal”, examinando algunos conceptos relacionados con el tema, es relativamente fácil identificar una figura o un fenómeno de naturaleza fractal.

Una característica esencial de los objetos fractales es la **autosimilitud**. Intuitivamente un objeto o una figura es autosimilar si es igual a sus partes, salvo un factor de escala.

Veamos algunos ejemplos:

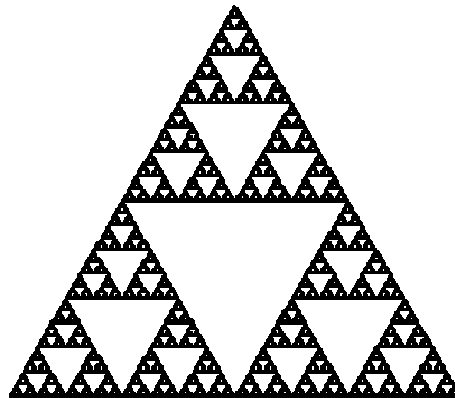
Ejemplo 1: La Curva de Koch

³ Tomado del libro Matebásica de Pedro Gómez, (1992).



Podríamos decir que está formada por cuatro curvas de Koch cada una igual a la total pero reducida y colocada de diferente forma. (¡Identifica las cuatro curvas de Koch de las que aquí se habla!).

Ejemplo 2: El Triángulo de Sierpinski



Esta formado por tres triángulos iguales al total solo que más pequeños (y cada uno de ellos formados por otros tres triángulos iguales pero más pequeños, etc.) ¿Estás de acuerdo con esta descripción?

En realidad los objetos fractales que se pueden obtener de esta manera son fractales determinísticos pues se forman con reglas muy precisas y exactas, sin intervención del azar, (los ejemplos clásicos de fractales son fractales determinísticos, como los citados anteriormente). En la naturaleza también se encuentra esta autosimilitud aunque no de manera tan determinística: las olas del mar son formadas por pequeñas olas, cada una formada por otras olas; una hoja de helecho formada por ramitas que son como helechos más pequeños, o las ramas de un árbol se pueden ver como pequeños árboles; una cabeza de coliflor esta formada por pequeñas coliflores, cada una a su vez formadas por subcoliflores, etc. Son algunos de los ejemplos que se pueden encontrar⁴.

(Busca en un diccionario el significado matemático del término “determinístico” para que te quede bien clara la idea anterior).

4. Si quieres profundizar más este tema te recomendamos los libros que aparecen en la bibliografía de la cartilla.

⁴ Apartes tomados del cuadernillo Auto similitud y Fractalidad del Grupo Fractales, UIS

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TALLER 0

1. PROCEDIMIENTO:

- Presentación de la docente y presentación del tema a tratar, qué se va a hacer, cómo se va a hacer, qué tipos de problema se van a plantear, la metodología y qué materiales se van a necesitar.
- Entrega a cada estudiante del primer taller: INTRODUCCIÓN - MOTIVACIÓN junto con el material que se necesita para su desarrollo.
- Desarrollo de la primera parte del taller.
- Preguntas acerca de la primera actividad.
- Desarrollo de la segunda parte de la actividad que consiste en una lectura sobre algunos aspectos de la historia de la geometría fractal, ideas básicas de esta geometría y su aplicación en las ciencias.
- Al final de la construcción de la pirámide se les pidió a los estudiantes que escribieran observaciones sobre la primera parte de la actividad que habían desarrollado. Estas son algunas sus observaciones:
 - “la clase de hoy me pareció interesante, porque aprendí a hacer la pirámide y también que a medida que crece su forma no cambia”
 - “bueno pues a mi me pareció interesante la clase por que primero que todo pudimos hacer con pitillos tetraedros y

con esos poder armar la pirámide de Sierpinski y además podemos ver mas cosas que de pronto no sabemos”

- “la clase me pareció muy interesante y divertida porque a medida que se arma una figura se desarrolla la agilidad mental de cómo nos puede servir unos pitillos si se combinan con nylon”

Con esta observación lo que se quería era que los estudiantes hablaran un poco más de la pirámide, pero se necesita ser más explícitos al momento de la pregunta, es decir se debió preguntarles directamente detalles de la pirámide.

- Al finalizar la lectura se les hizo a los estudiantes las siguientes preguntas respecto a esta, para confirmar si su comprensión había sido plena.
 1. ¿Quién es Benoit Mandelbrot?
 2. ¿En qué época surgió la geometría fractal?
 3. ¿En qué campos de la ciencia son utilizados los fractales?
 4. ¿Cuándo una figura es autosimilar?
 5. ¿Qué entendiste por la palabra fractal?

Respuestas:

1. A esta pregunta la mayoría de los estudiantes respondieron “Benoit Mandelbrot es considerado el padre de la geometría fractal” .
2. La respuesta a esta pregunta fue una sola tal vez por su exactitud, “hace algo más de 30 años”.
3. La mayoría de los estudiantes respondieron, “matemáticas, computación, música física y biología”, como está en la lectura. Pero otros estudiantes tuvieron en cuenta la introducción de la profesora al inicio de la clase y agregaron la medicina.
4. La respuesta a esta pregunta fue común “es cuando una figura es igual a todas sus partes, salvo el factor de escala”
5. Las respuestas a estas preguntas fueron muy variadas, la palabra fractal aun no tiene una definición formal (es decir universal), pero en el fondo los estudiantes utilizaban la frase “el todo es igual a sus partes”, que es una característica esencial de los fractales.

2. ANÁLISIS

2.1 OBSERVACIONES

- En este primer taller el grupo manejó muy bien el tiempo y también se observó trabajo colaborativo.

- En el desarrollo del taller se observó en los estudiantes un marcado interés por el tema de los fractales, porque prestaron atención a la explicación de la actividad y a la lectura.
- Una vez finalizada la primera actividad, se les aclaró a los estudiantes que el objeto construido no es exactamente lo que se conoce como pirámide de Sierpinski, si no lo que sería el cuarto paso en el proceso de construcción de la misma, ya que lo que realmente recibe este nombre, es el “objeto límite” u “objeto final” de este proceso, que existe en la teoría pero que no se puede construir en la práctica.
- Para iniciar este taller los estudiantes tuvieron que repasar algunos conceptos tales como el de tetraedro y pirámide.
- Con la actividad y la lectura que se realizó posteriormente los estudiantes lograron visualizar a grandes rasgos qué es un fractal y algunas de las ciencias en donde se aplican.

2.2 FASES DE APRENDIZAJE

2.2.1 INFORMACIÓN

Título, objetivo, materiales y orientación por parte de la docente.

2.2.2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Puntos 1 y 2 del taller.

2.2.3 EXPLICACIÓN

Puntos 3 y 4 del taller.

2.3 NIVELES DE RAZONAMIENTO

2.3.1 NIVEL DE RECONOCIMIENTO

- Con este taller los estudiantes reconocen de una manera intuitiva algunas de las características propias de los fractales como la autosimilitud.
- Al terminar la actividad el estudiante es capaz de reconocer si un objeto es de tipo fractal o no y también puede dar ejemplos en la naturaleza que cumplen con esta propiedad.
- Reconocen plenamente quién es el padre de la geometría fractal.
- Muchos de los estudiantes relacionaron la pirámide de Sierpinski con las pirámides de Egipto.
- Los estudiantes reconocen la geometría fractal como una nueva forma de ver las matemáticas.

TALLER 1

TITULO: EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN EL PLANO

(Trabajo con lápiz y papel)

OBJETIVO: Con este taller se espera que:

- Deduzcas los conceptos de “semilla” y “producción”, a la vez que los identifiques en un ejemplo dado. Además, debes construir tu propio fractal partiendo de figuras en el plano como segmentos, cuadrados, círculos triángulos, rectángulos, etc, aplicando a una semilla una regla de producción.

MATERIALES: Para el desarrollo de este taller vas a necesitar al menos dos hojas de papel milimetrado, un lápiz, un borrador y una regla.

ACTIVIDADES:

1. A continuación encontrarás tres ejemplos y en cada uno de ellos una “semilla” y una “producción”, en una secuencia de pasos que corresponde a la construcción de una figura de tipo fractal. Observa atentamente cada ejemplo:

Ejemplo 1. ***El Triángulo de Sierpinski***⁵:

Semilla

Producción



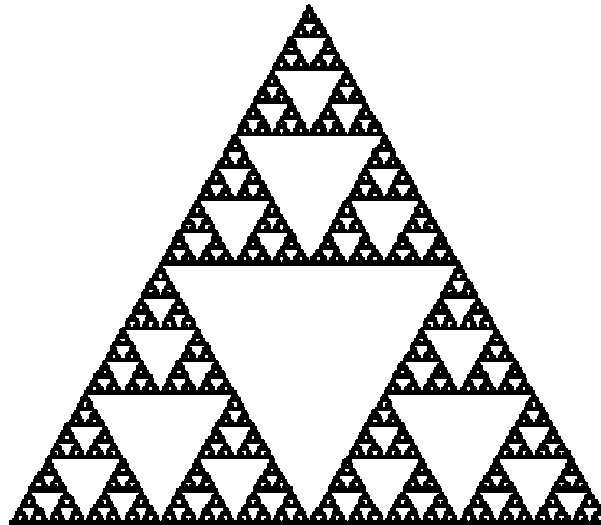
Paso 0

Paso 1

Paso 2

Paso 3

Hecho en el computador el paso n-ésimo (y en un tamaño más grande) verás:

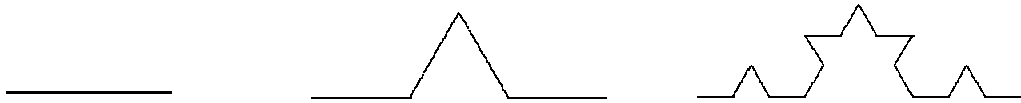


⁵ Waclaw Sierpinski, matemático polonés (1882-1969). Fue profesor en Lvov y Varsovia. Se consagró como uno de los matemáticos más influyentes de su época en Polonia y tuvo una reputación mundial (de hecho uno de los cráteres de la luna lleva su nombre). Su clásico fractal llamado *triángulo de Sierpinski* fue presentado en 1916.

Ejemplo 2. **La curva de Koch**⁶ :

Semilla

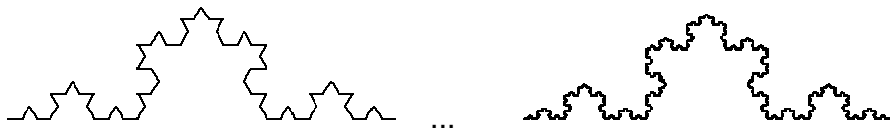
Producción



Paso 0

Paso 1

Paso 2



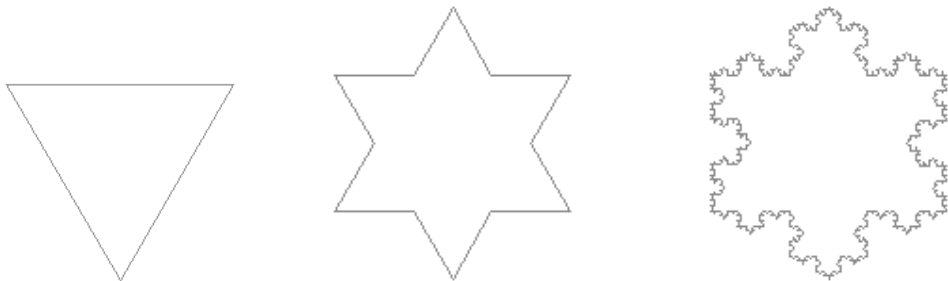
Paso 3

Paso n-ésimo

Ejemplo 3. **“La curva del copo de nieve” o “isla de Koch”:**

Semilla

Producción



Paso 0

Paso 1

Paso n-ésimo

⁶ Introducida por el matemático sueco Helge Von Koch en 1.904. Poco es conocido de Helge Von Koch y sus contribuciones matemáticas pero en este taller de fractales clásicos su construcción debe tener un

2. Describe para cada ejemplo como son la semilla y la producción, explica que relación(es) encuentras entre los dos conceptos y como se forma la secuencia de pasos en cada construcción.
3. Basado en los dos puntos anteriores escribe en tu cuaderno una definición de SEMILLA y PRODUCCIÓN.
4. Observa atentamente las siguientes secuencias e identifica en cada una de ellas cuál es la semilla y cuál es la producción.

a. Carpeta de Sierpinski



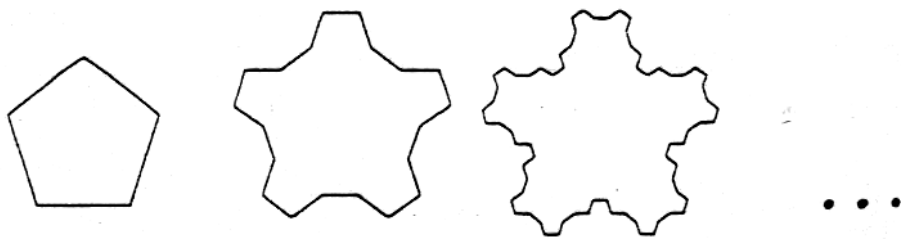
b. Dragón de Sierpinski



lugar simplemente lleva a muchas generalizaciones interesantes y debe haber inspirado inmensamente a Mandelbrot.



c.



5. Ahora tú debes escoger una semilla y una producción que generen una figura (ojalá muy vistosa) y la trabajas en una hoja de papel milimetrado. Usa tu creatividad e imaginación y recuerda que por ahora debes partir de una figura en el plano como un segmento, un cuadrado, un triángulo o en general cualquier polígono.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TALLER 1

1. PROCEDIMIENTO:

- Entrega del taller EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN EL PLANO.
- Orientación por parte de la docente para el desarrollo del taller.
- Desarrollo de la actividad.
- Respuestas a las inquietudes de los estudiantes por parte de la docente.
- Entrega del taller desarrollado por parte de los estudiantes.

2. ANÁLISIS

2.1 OBSERVACIONES

- El grupo presentó dificultad al momento de dar una definición exacta de semilla y producción, aunque gráficamente lo identificaron y contaron con sus propias palabras cuál era la semilla y cuál era la producción en los ejemplos dados.
- De los 36 estudiantes, solo 10 resolvieron correctamente el taller, dieron una definición acertada de semilla y producción y realizaron correctamente la figura fractal del punto 5; los 26 restantes tuvieron dificultades principalmente en la invención de una regla de producción.

- De acuerdo a la observación anterior, para lograr una mayor comprensión se requirió ampliar más los ejemplos es decir, contarles el proceso de producción en el triángulo de Sierpinski, carpeta de Sierpinski, curva de Koch y otros, para así pedirles nuevamente que intentaran construir su propia figura
- En los puntos 2 y 3 del taller presentaron confusión: no entendían la diferencia entre estos dos puntos. En el punto 2 se trataba de describir la semilla y producción de los ejemplos dados y en el punto 3 se les pedía que dieran una definición con sus propias palabras.
- Aunque algunos estudiantes no pudieron escribir de una forma correcta las definiciones, hicieron la figura fractal.

2.2 FASES DE APRENDIZAJE

2.2.1 INFORMACIÓN

Título, objetivo, materiales y orientación por parte de la docente.

2.2.2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Puntos 1,2 y 3 del taller.

2.2.3 EXPLICITACIÓN

Después de observar los ejemplos dados los estudiantes trataron de contar con sus propias palabras lo que habían percibido de estos ejemplos.

2.2.4 ORIENTACIÓN LIBRE

Punto 4 del taller.

2.2.5 INTEGRACIÓN

Punto 5 del taller.

2.3 NIVELES DE RAZONAMIENTO:

2.3.1 ANÁLISIS

- Los estudiantes a través de la observación descubren cuál es la semilla y con un poco de análisis logran descubrir qué se le hace a la semilla para llegar a la producción en cada uno de los ejemplos.
- Los estudiantes se dan cuenta de que los ejemplos cumplen con cierta propiedad y es que en cada uno de ellos la producción que se le aplica a la semilla se sigue aplicando a la figura que va resultando, muchas veces, hasta donde se pueda apreciar el fractal.
- A partir de la observación de los ejemplos dados, los estudiantes pudieron dar una definición informal de semilla y producción, es decir identifican la semilla como la figura inicial y la producción como la unión de semillas a otra escala y en diferente posición.
- Cada una de las figuras entregadas cumple con la propiedad de los fractales: el todo es igual a sus partes, salvo un factor de escala.
- Los estudiantes le hicieron modificación a los fractales dados como ejemplos, y también partieron de diferentes tipos de polígonos, dividiéndolos en partes proporcionales y eliminando una o varias partes a las vez, también trabajaron con los segmentos de los polígonos dividiendo estos en tres y levantando la parte central como en la curva de Koch.

TALLER 2

TITULO: FIGURA LÍMITE Y AUTOSIMILITUD

(Dos conceptos básicos)

OBJETIVO: una vez terminado este taller se espera que hayas adquirido las nociones de “figura Límite”, “autosimilitud” y “copias maximales”.

MATERIALES: lo primero que debes tener a la mano para trabajar este taller, es el taller 1 ya desarrollado, además necesitas lápiz, borrador y papel.

ACTIVIDADES:

1. En cada uno de los ejemplos trabajados en el taller 1, se parte de una semilla y una producción, que generan una secuencia o sucesión de figuras (paso 1, paso 2, paso 3...).

Analiza y discute con tus compañeros:

- a. En la práctica, ¿se pueden graficar todos los pasos de la secuencia?
- b. ¿Es necesario hacer todos los pasos?
- c. En la teoría, ¿se pueden realizar todos los pasos de la secuencia?

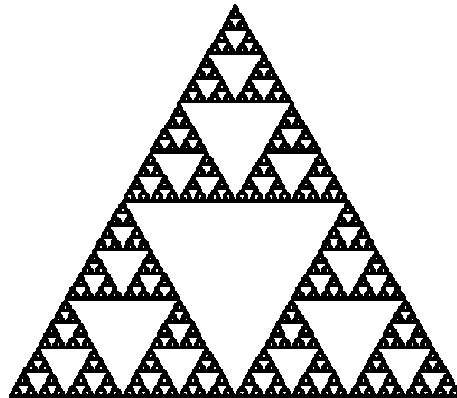
Aunque efectivamente el proceso no termina, sí podemos afirmar que la sucesión de figuras que se genera, se acerca o se parece cada vez más a una cierta figura que llamaremos “figura límite”. Así, en el ejemplo 1, la figura límite es precisamente lo que llamaremos el “**triángulo de Sierpinski**”, en el

ejemplo 2 la figura límite es “**la curva de Koch**”, en el ejemplo 3 la figura límite es “**la curva del copo de nieve**” o “**isla de Koch**”.

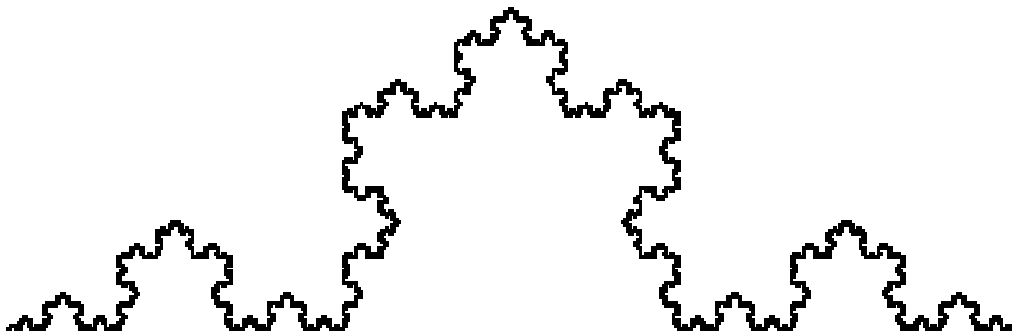
2. Basado en la observación anterior, colócale nombre a la figura de tu fractal.

3. Consideremos nuevamente ejemplos clásicos de fractales; obsérvalos atentamente.

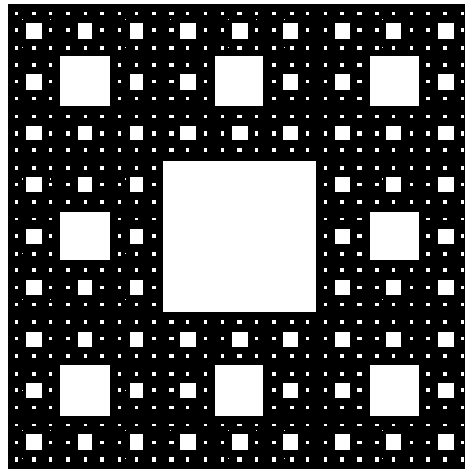
a. El triángulo de Sierpinski



b. La curva de Koch



c. La carpeta de Sierpinski



4. Imagina que en cada figura ves con una lupa las regiones que aparecen encerradas en un círculo. ¿Qué figura piensas que observarías a través de lupa? Explica.

5. Analiza la siguiente información: el triángulo de Sierpinski está formado por muchas copias de sí mismo, sólo que reducidas y colocadas en distinta posición. Por satisfacer el triángulo de Sierpinski la características descritas anteriormente, diremos que él es **AUTOSIMILAR**.

6. La característica que observas en el triángulo de Sierpinski, ¿se puede encontrar también en la curva de Koch y en la carpeta de Sierpinski?. Explica tu respuesta.

7. Aunque en cada figura se pueden observar muchas copias reducidas de sí misma, encuentra las “copias más grandes”. Las llamaremos “**COPIAS MAXIMALES**”.

8. Analiza y responde: de cuantas copias maximales están formados los siguientes fractales:

- El triángulo de Sierpinski.
- La curva de Koch.
- La carpeta de Sierpinski.
- El fractal que construiste en el taller 1.

9. Escribe una definición de “Autosimilitud” o “figura autosimilar”. Si necesitas ayuda, recurre al taller 0, o al punto 5 de este taller y extracta de allí la idea principal.

10. Piensa: ¿todos los objetos fractales son autosimilares?

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TALLER 2

1. PROCEDIMIENTO:

- Entrega del segundo taller FIGURA LIMITE Y AUTOSIMILITUD (dos conceptos básicos).
- Orientación por parte del docente.
- Desarrollo de la actividad.
- Preguntas acerca de la actividad.
- Entrega del taller resuelto por parte de los estudiantes.

2. ANÁLISIS

2.1 OBSERVACIONES

- Para realizar este taller los estudiantes deben tener a la mano el taller 1 totalmente desarrollado.
- El taller se desarrolló en una sola sesión de dos horas, tiempo en el cual se logró el objetivo propuesto.
- Los estudiantes no presentaron dificultad durante el desarrollo de este taller; en los informes entregados por cada uno de ellos muestran que los conceptos quedaron interiorizados.
- La clase se presentó de una manera participativa en donde se confrontaron conceptos, esto generó un clima ambiente diferente.

2.2 FASES DE APRENDIZAJE

2.2.1 INFORMACIÓN

Título, objetivos, materiales y orientación por parte de la docente y el punto 5.

2.2.2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Puntos 1, 2, 3, 4 6, 7 y 8 del taller.

2.2.3 ORIENTACIÓN LIBRE

Puntos 9 y 10 del taller.

2.3 NIVEL DE RAZONAMIENTO

2.3.1 ANÁLISIS

- Los estudiantes reconocen la propiedad de autosimilitud de los fractales.
- Los estudiantes identifican en los fractales dados y en el ejemplo hecho por cada uno de ellos las copias maximales.
- Los estudiantes adquieren una definición más formal de la autosimilitud de los fractales.
- Los estudiantes comprenden que la figura límite es la que recibe el nombre de fractal.

TALLER 3

TITULO: EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN EL PLANO

(Trabajo en el computador con el lenguaje WinLogo)

OBJETIVO: una vez termines este taller se espera que:

- conozcas y manipules correctamente los movimientos básicos de la tortuga en el lenguaje WinLogo .
- apliques estos conocimientos para hacer gráficas de fractales en el computador utilizando este lenguaje.

MATERIALES: para el desarrollo de este taller es indispensable un microcomputador con alguna versión del lenguaje WinLogo instalada. La versión con la cual trabajamos en este taller es la 2.1, además es bueno que tengas una hoja con las instrucciones básicas del lenguaje **WinLogo** anotadas, en caso que no las sepas de memoria.

ACTIVIDADES:

Nota: si ya conoces y manipulas bien los movimientos de la tortuga en el lenguaje WinLogo, empieza tus actividades en el paso 11 de lo contrario desarrolla tu taller siguiendo paso a paso los numerales desde el 1 hasta el 18.

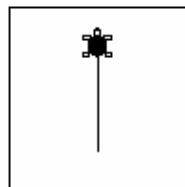
1. Prende el computador, busca en el directorio el programa WinLogo, dale click para abrir, después de unos segundos verás en tu pantalla la tortuguita

lista para recibir tus órdenes. Imagina que la pantalla es un tablero donde vamos a dibujar, en esta oportunidad, figuras fractales; y para esto disponemos de una pequeña tortuga que vive en el plano de la pantalla, tiene lápices de colores y se caracteriza por ser muy obediente.

2. La tortuga es capaz de obedecer órdenes expresadas en el lenguaje denominado “**Idioma de la tortuga**”. La orden **avanza** hace que la tortuga se mueva en línea recta en la dirección hacia donde mira, para indicarle cuanto debe avanzar, la orden **avanza**, debe ir seguida de un número que corresponde a los pasos que avanzará. Por ejemplo: dile a la tortuga que avance 30 de sus pasos, con la instrucción:

avanza 30

ella cumplirá tu orden al oprimir la tecla ENTER; al caminar, la tortuga traza un segmento de recta a medida que se mueve.



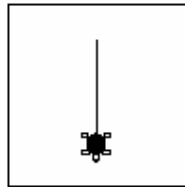
av. 30

3. Ensayo: borra la pantalla escribiendo **bp** y oprimiendo la tecla ENTER. Ahora ejercita la orden **avanza** con diferente número de pasos, así descubrirás con cuántos se puede llegar al borde de la pantalla.

4. Otra orden que obedece la tortuga es **retrocede**, lo cual le indica que debe caminar hacia atrás. Como en la orden anterior se requiere informarle con un número, cuántos pasos debe retroceder; escribe por ejemplo:

retrocede 60 <ENTER>

la tortuga caminará hacia atrás 60 pasos dibujando un segmento de recta.



re 60

5. Ensayá: borra la pantalla y pídele a la tortuga que vaya al borde inferior de la misma.

6. Ahora dile que vaya al borde superior.

7. Ensayá con otros valores, observa cuidadosamente el resultado y busca una interpretación al comportamiento de la tortuga.

8. Ahora veamos otras órdenes que modifican la dirección en que mira la tortuga sin afectar la ubicación de la pantalla; **gira derecha** y **gira izquierda** hacen que la tortuga vuelva su mirada en otra dirección. Igual que en **avanza** una orden de giro debe contener un número que indica el ángulo que debe girar la tortuga, medido en grados. Por ejemplo, dale la orden :

gira derecha 45 <ENTER>

la tortuga giró, sin caminar, 45 grados a la derecha, ¿verdad?. Dile ahora:

gira izquierda 60 <ENTER>

¿ qué sucedió? Descríbelo. Prueba con otros giros.

Antes de continuar ten en cuenta dos observaciones importantes:

a. Para tener más rápido nuestro proceso de dar órdenes a la tortuga para que haga gráficas, este “**Idioma de la tortuga**” lo podemos escribir en forma abreviada, utilizando en cada caso dos letras así:

Nombre completo	Abreviatura
Borrar pantalla	Bp
Avanza	Av
Retrocede	Re
Gira derecha	Gd
Gira izquierda	Gi

b. Es posible que al comunicarnos con la tortuga se cometan errores. El más común es el de no dejar un espacio entre el nombre de la orden y el número que determina el movimiento. Por ejemplo, **avanza** es una orden que espera un número para que se pueda ejecutar; **avanza** es una palabra del lenguaje y así **avanza 50** indica a la tortuga que camine 50 pasos, pero **avanza50** es otra palabra que no tiene sentido en el lenguaje. Cuando por equivocación escribes:

av50

el computador emite un mensaje :

no se como hacer av50

Otras veces olvidamos escribir el número que sigue a la orden. Si por ejemplo escribes **av** <RETURN>, el computador te responde

faltan entradas para av

9. Escribe las siguientes instrucciones y observa:

a. bp <RETURN>	b. bp <RETURN>	c. bp <RETURN>
gd 90 <RETURN>	gd 60 <RETURN>	gd 150 <RETURN>
av 80 <RETURN>	av 100 <RETURN>	av 70 <RETURN>

d. bp <RETURN>	e. bp <RETURN>	f. bp <RETURN>
gd 180 <RETURN>	gi 60 <RETURN>	gi 60 <RETURN>
re 80 <RETURN>	av 80 <RETURN>	av 120 <RETURN>

g. bp <RETURN>	h. bp <RETURN>
gi 150 <RETURN>	gi 180 <RETURN>
re 70 <RETURN>	re 180 <RETURN>

i. Repite los ejercicios anteriores combinando los valores para giros, derecha o izquierda, y desplazamientos, avanza o retrocede.

10. Con estas instrucciones podemos trazar muchas figuras, para ver un ejemplo, copia el siguiente programa.

bp

av 20

gd 90

av 20

gi 90

av 20

gd 90

av 20

gi 90

av 20

gd 90

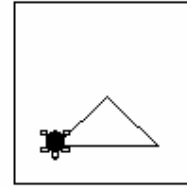
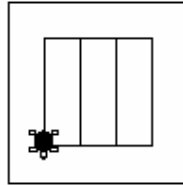
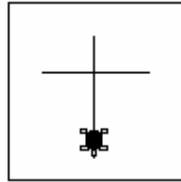
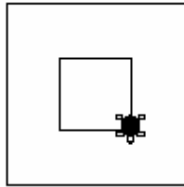
av 20 <RETURN>g

¿Qué figura se obtiene en la figura pantalla?

11. Cuando necesites que la tortuga avance sin dejar trazo, utiliza la instrucción **sl** (sube el lápiz) y no olvides, para cuando ya desees el trazo, decirle **bl**

(baja el lápiz). Ensaya esas dos instrucciones. (Para resolver cualquier duda que tengas recurre al anexo del taller).

12. Dibuja cada una de las gráficas siguientes: (primero borra la pantalla bp).



13. Haz las gráficas del “paso 1” de los siguientes fractales:

- La curva de Koch.
- El triángulo de Sierpinski.
- La isla de Koch.
- La carpeta de Sierpinski.
- El fractal que ideaste en el taller 1.

14. A continuación encuentras programas en el lenguaje WinLogo que generan la curva de Koch, la isla de Koch y otras figuras fractales. Cópialos en el computador (no importa que no entiendas claramente la estructura de cada programa, ya que para esto se necesitan algunas instrucciones del lenguaje WinLogo un poco más avanzadas de las que tú conoces, lo importante es que reconozcas las instrucciones para el “paso 1”, lo demás es la forma de lograr las diferentes iteraciones para obtener un determinado paso en el proceso de construcción de la “figura límite” o “fractal”), y... ¡ deléitate observando la forma como la tortuga construye el fractal!.

PROGRAMA 1: Curva de Koch

Para Koch :paso :lado

Si :paso=0 [av :lado alto]

Koch :paso-1 :lado/3

gi 60

Koch :paso-1 :lado/3

gd 120

Koch :paso-1 :lado/3

gi 60

Koch :paso-1 :lado/3

fin

PROGRAMA 2: Pentágono

Para pentágono :paso :lado

haz "contracción (suma 3 raizcuadrada 5)/2

si :paso = 0 [av :lado alto]

gi 36

pentágono :paso-1 :lado/:contracción

gi 72

pentágono :paso-1 :lado/:contracción

gi 72

pentágono :paso-1 :lado/:contracción

gi 72

pentágono :paso-1 :lado/:contracción

gi 72

pentágono :paso-1 :lado/:contracción

gi 72

pentágono :paso-1 :lado/:contracción

gd 36

fin

PROGRAMA 3: Espiral

Para espiral :lado

Si :lado<1 [alto]

av :lado

gd 60

espiral :lado*0.8

fin

PROGRAMA 4: Montaña

Para montaña :paso :lado

si :paso = 0 [av :lado alto]

gi 45

montaña :paso-1 :lado*0.707

gd 90

montaña :paso-1 :lado*0.707

gi 45

fin

para mon :paso :lado

bp sl ponpos [-70 -10]

gd 90

bl

montaña :paso :lado

fin

(Analiza, ¿qué hace el segundo programa? Córrelos por separado para descubrirlo).

PROGRAMA 5: Dragón de Sierpinski

Para dragón :paso :lado :paridad

Si :paso = 0 [av :lado alto]

gi 60*:paridad

dragón :paso-1 :lado/2 -:paridad

gd 60*:paridad

dragón :paso-1 :lado/2 :paridad

gd 60*:paridad

dragón :paso-1 :lado/2 -:paridad

gi 60*:paridad

fin

PROGRAMA 6: Isla de Koch

Para isla :paso :lado

Repite 3[koch :paso :lado gd 120]

Fin

Nota: para que este programa te corra, ya debes haber digitado el de “Koch” (programa 1) pues el de “isla” consiste, como puedes ver, casi exclusivamente en una llamada y ubicación correcta de éste.

15. Analiza: dentro de la estructura del programa encontramos un elemento que es una VARIABLE y se define escribiendo **:nombre**, (se acostumbra a utilizar un nombre que nos haga recordar lo que determina esa variable), por ejemplo en el programa 1 (que dibuja la curva de Koch) las variables son **:paso** y **:lado**. Los **:** deben aparecer cada vez que se usa la variable, colocados inmediatamente antes, sin dejar espacios entre ellos y la variable.

Para ejecutar cada uno de los programas debes dar, además del nombre del programa, valores para las variables de dicho programa; por ejemplo para correr el programa que te gráfica el programa de Koch, escribe

koch 2 120

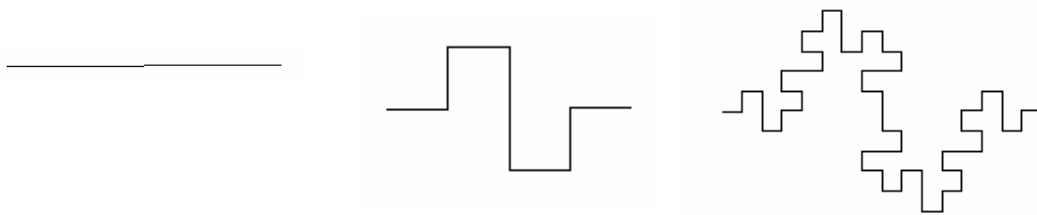
como el programa tiene definidas las variables **:paso** y **:lado**, la tortuga te dibujará la curva de Koch en el paso 2, partiendo de una semilla de longitud de 120 unidades.

Ahora prueba con otro “paso” y otro “lado”, esto es, otra longitud para la semilla.

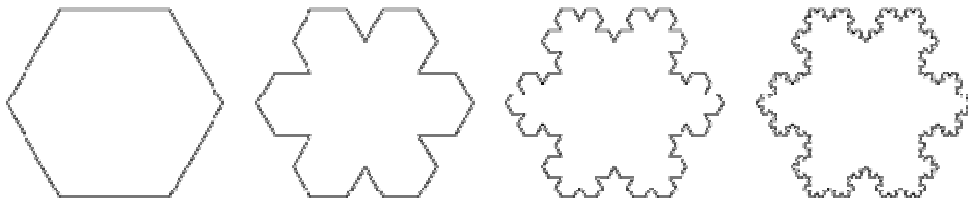
16. Detecta las variables en los demás programas, el qué hacer de cada una y la forma de correrlos.

17. Intenta escribir un programa para generar la figura dada.

a.



b.



18. Ahora haz el programa en lenguaje WinLogo que te grafique el fractal que ideaste en el taller 1.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TALLER 3

1. PROCEDIMIENTO:

- Entrega del taller: EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN EL PLANO. (Trabajo en el computador con lenguaje WinLogo).
- Se hizo una lectura rápida de todo el taller.
- Orientación por parte del docente acerca del manejo del lenguaje WinLogo
- Desarrollo del taller en la sala de informática en grupos de 3 estudiantes por computador.
- Entrega de la primera parte del taller resuelto por parte de cada uno de los estudiantes.
- Desarrollo de la segunda clase del taller, trabajando los mismos grupos.

2. ANÁLISIS

2.1 OBSERVACIONES

- El taller se realizó en tres sesiones, por que los estudiantes no conocían el programa WinLogo y además solo se contaba con 15 computadores.
- En la primera sesión se dieron las pautas para el manejo WinLogo.
- En la segunda sesión se les orientó para realizar algunos gráficos utilizando el programa WinLogo, verificando que pudieran desarrollar el punto 14.

- En la tercera sesión los estudiantes crearon algunos programas que se les pidió en este taller el siguiente es un ejemplo de ello:

Programa del punto 17 parte a.

Para xyz :paso :lado

Si :paso=0 [av :lado alto]

xyz :paso-1 :lado/7

gi 90

xyz :paso-1 :lado/7

gd 90

xyz :paso-1 :lado/7

gd 90

xyz :paso-1 :lado/7

xyz :paso-1 :lado/7

gi 90

xyz :paso-1 :lado/7

gi 90

xyz :paso-1 :lado/7

gd 90

xyz :paso-1 :lado/7

fin.

- Después de trabajar con los programas que están en el taller se dejó a la imaginación de los estudiantes hacer cambios a los programas para

ver que figuras obtenían; el resultado fue muy bueno pues por ejemplo descubrieron que al aumentar el número de pasos en algunos programas, se obtiene el triángulo de Sierpinski.

- El trabajo con el computador fue interesante, porque los estudiantes llenaron las expectativas que tenían al manejar el programa.
- Los estudiantes pudieron apreciar algunos fractales por medio del computador.

2.2. FASES DE APRENDIZAJE.

2.2.1 INFORMACIÓN

Primera parte del taller: título, objetivo, materiales y los puntos 1, 2, 4, 7 y 8.

2.2.2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Puntos: 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16.

2.2.4 ORIENTACIÓN LIBRE

Punto 17 del taller.

2.2.5 INTEGRACIÓN

Punto 18 del taller.

2.3 NIVELES DE RAZONAMIENTO

2.3.1 RECONOCIMIENTO

- Los estudiantes reconocieron que el programa WinLogo les ayudó a generar o construir algunos fractales, que son los que se hacen con reglas muy precisas y exactas.

2.3.2 ANÁLISIS

- Los estudiantes observaron la estructura de cada programa descubriendo así cuáles son las variables y cómo se deben definir.
- Los estudiantes fueron capaces de hacer cambios a los programas dados para generar otros fractales conservando las mismas propiedades.
- A partir de la observación y análisis de las figuras fractales y su correspondiente semilla y producción, los estudiantes fueron capaces de hacer el programa que los genera.
- Como ya conocían la producción de los fractales hechos por ellos mismos en el taller 1, los estudiantes elaboraron los programas que los generaron.

TALLER 4

TITULO: EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN LA RECTA

(Trabajo con lápiz y papel)

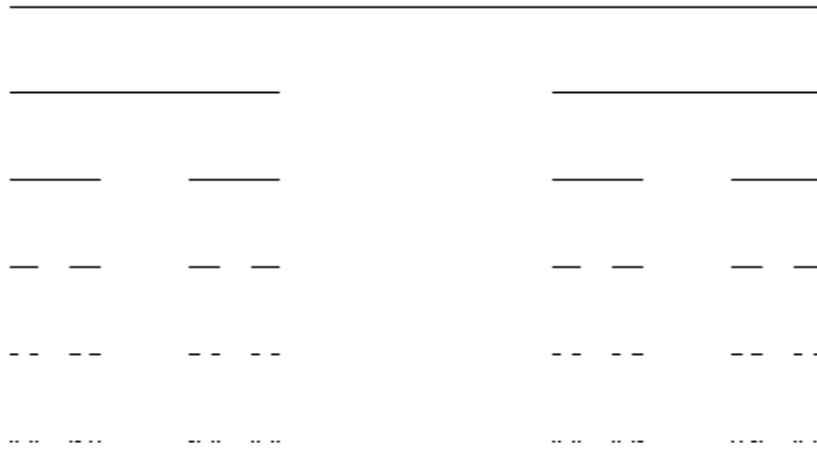
OBJETIVO: Ahora el objetivo es que conozcas un fractal clásico que “vive” en la recta y que se puede obtener con el juego de la semilla y la producción, además se espera que construyas un fractal de este tipo.

MATERIALES: Para este taller necesitas por lo menos dos hojas de papel milimetrado, un lápiz, un borrador y una regla.

ACTIVIDADES:

1. Dibuja un segmento de recta cualquiera. (preferiblemente grande y ojalá por conveniencia, que el valor de su medida sea un múltiplo de tres).
2. Divide dicho segmentos en tres partes iguales.
3. Cuidadosamente haz “desaparecer” (borrar) la parte central.
4. Repite los pasos 2 y 3 sobre cada uno de los segmentos que te han quedado.
5. Repite el paso 4 tantas veces como te sea posible.

6. Observa la siguiente secuencia de pasos en la construcción de un fractal.

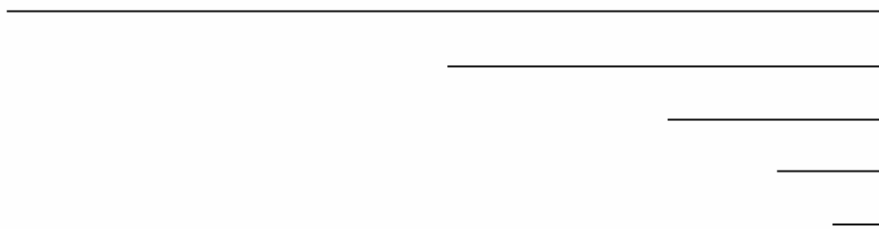


7. Lo que tu hiciste, resultó similar a la grafica anterior? Si es así, acabas de construir el clásico fractal llamado. “**el conjunto ternario de Cantor**”, o simplemente “**conjunto de Cantor**”. Describe como es la semilla, la producción y la figura inicial para el conjunto de Cantor⁷.

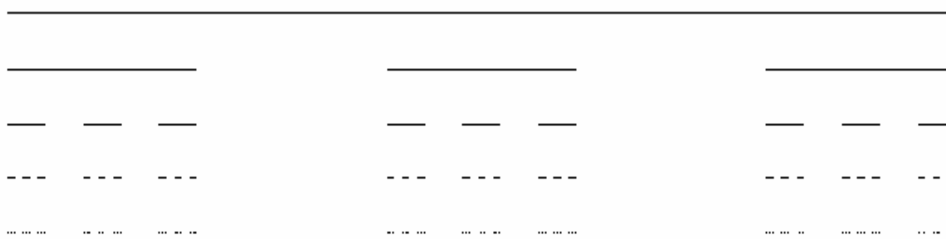
8. Observa, deduce y describe en los siguientes ejemplos la regla de producción.

⁷Cantor (George) . Eminente filósofo y matemático alemán, nacido en San Petersburgo en 1.845. Estudió en Zurich, Berlín y Gotinga , graduándose en 1.869 en la Universidad de Halle, de la que fue profesor de matemática desde 1879. Se le deben numerosos trabajos sobre la aplicaciones de cálculo diferencial ,

Ejemplo a:



Ejemplo b:



9. Una vez identificada la regla de producción en los ejemplos anteriores, gráficelos en el papel milimetrado tomando otra longitud para la semilla (haz observado que en estos casos siempre la semilla es un segmento)

10. ¡Es tu turno! te corresponde ahora idear tu propia figura con semilla y producción en la recta (procura que sea “vistosa”). Constrúyela en una de las hojas de papel milimetrado.

siendo el fundador de la teoría de conjuntos. El llamado “conjunto de Cantor” fue publicado en 1.883 y

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TALLER 4

1. PROCEDIMIENTO:

- Entrega del taller EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN LA RECTA. (Trabajo con lápiz y papel)
- Orientación por parte del docente.
- Desarrollo de la actividad.
- Preguntas acerca de la actividad.
- Entrega del taller resuelto por parte de los estudiantes.

2. ANÁLISIS

2.1 OBSERVACIONES

- Los estudiantes respondieron muy bien a este taller, lo desarrollaron sin ninguna dificultad en una sesión de dos horas.
- Algunos estudiantes al iniciar la actividad no tuvieron en cuenta la recomendación de que el valor del segmento fuera múltiplo de tres, por lo que la medida de los segmentos al dividirla por tres no daba una medida exacta, por lo tanto tuvieron que hacerlo de nuevo con más cuidado.
- Por la experiencia adquirida en los talleres anteriores los estudiantes identificaron la regla de producción de las figuras a y b del punto 8, de

emergió como un ejemplo de cierto conjunto excepcional.

una manera rápida lo que les permitió hacer su propia figura fractal en la recta.

- Para hacer su figura fractal con semilla y producción en la recta, punto 10, tomaron como semilla un segmento cuya medida fuese múltiplo de algún dígito.

2.2 FASES DE APRENDIZAJE

2.2.1 INFORMACIÓN

Título, objetivos, materiales y orientación por parte de la docente.

2.2.2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 del taller.

2.2.3 ORIENTACIÓN LIBRE

Puntos 8 y 9 del taller.

2.2.4 INTEGRACIÓN

Puntos 10 del taller.

2.3 NIVELES DE RAZONAMIENTO

2.3.1 ANÁLISIS

- Los estudiantes pudieron hacer comparaciones entre los fractales determinísticos ya vistos y el conjunto de Cantor al cual reconocen como un fractal que pertenece a este grupo; lo comparan de manera especial con la curva de Koch, plantean que la semilla es la misma: un pedazo de recta.

- Identifican que este fractal cumple con la propiedad de autosimilitud e identifican en él las copias maximales.
- Descubren de una manera intuitiva que este fractal tiende a “desaparecer” a medida que aumentan los pasos.

TALLER 5

TITULO: EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN LA RECTA

(Trabajo en computador con el lenguaje WinLogo)

OBJETIVO: Pretendemos con este taller, que conozcas y analices la forma como la tortuga del lenguaje WinLogo hace algunos de los **fractales en la recta** que trabajamos en el taller anterior. La idea es que dicho análisis de los programas te lleven a diseñar programas en lenguaje WinLogo para que la tortuga haga los fractales restantes, incluido el de tu creación.

MATERIALES: En esta oportunidad vuelve a ser indispensable el microcomputador y el diskette con el lenguaje WinLogo. Igualmente necesitas los talleres 3 y 4 desarrollados, lápiz, borrador y papel.

ACTIVIDADES:

1. Recuerda con el taller 3, la forma de entrar al lenguaje y todo lo relacionado con los movimientos básicos de la tortuga en el lenguaje WinLogo, además la forma de hacer programas que genera fractales en dicho lenguaje.

2. El siguiente es un programa que genera un fractal con semilla y producción en la recta. Hazle un pequeño “estudio de escritorio” tratando de explicar que hace cada instrucción hasta descubrir que fractal es:

Para XXXX :paso :lado

```
bl si :paso = 0 [av :lado alto]
```

```
XXXX :paso-1 :lado/3
```

```
sl av :lado/3
```

```
XXXX :paso-1 :lado/3
```

```
fin
```

3. Ahora transcribe el programa en el computador y hazlo correr, solo que cada vez que aparezcan las letras XXXX ya puedes escribir la palabra "Cantor" puesto que ya descubriste que el programa es para generar el "Conjunto Ternario de Cantor". En otras palabras transcribe el programa así:

```
Para Cantor :paso :lado
```

```
bl si :paso = 0 [av :lado alto]
```

```
Cantor :paso-1 :lado/3
```

```
sl av :lado/3
```

```
Cantor :paso-1 :lado/3
```

```
fin
```

4. Ensaya varias posiciones iniciales para la tortuga, diferentes valores para ":paso" y diferentes longitudes para ":lado". Si te parece mejor ocultar la tortuga, ubicarla a la izquierda de pantalla, y que además que siempre aparezca en la misma posición inicial (por ejemplo: siempre "mirando" a la derecha) sin tener que ubicarla cada vez en dicha posición; transcribe el siguiente programa que hace justamente eso. Observa que "dentro de él" se

llama a Cantor (esta es la forma de ubicar la tortuga sin que se “dañe” el programa).

```
Para Cantor :paso :lado
```

```
bp sl
```

```
ponpos [-70 -10]
```

```
gd 90
```

```
bl
```

```
Cantor :paso :lado
```

```
fin
```

5. También es posible obtener simultáneamente en la pantalla un determinado número de pasos. El siguiente programa (o mejor conjunto de programas) logra dicho efecto.

```
Para Cantor0 :paso0 :lado
```

```
bl si :paso0 = 0 [av :lado alto]
```

```
Cantor0 :paso0-1 :lado/3
```

```
sl av :lado/3
```

```
Cantor :paso0-1 :lado/3
```

```
fin
```

```
Para Cantor1 :paso1 :lado
```

```
bl si :paso1 = 0 [av :lado alto]
```

Cantor :paso1-1 :lado/3

sl av :lado/3

Cantor :paso1-1 :lado/3

fin

Para Cantor2 :paso2 :lado

bl si :paso2 = 0 [av :lado alto]

Cantor :paso2-1 :lado/3

sl av :lado/3

Cantor :paso2-1 :lado/3

fin

Para Cantor3 :paso3 :lado

bl si :paso3 = 0 [av :lado alto]

Cantor :paso3-1 :lado/3

sl av :lado/3

Cantor :paso3-1 :lado/3

fin

Para Cantor4 :paso4 :lado

bl si :paso = 0 [av :lado alto]

Cantor :paso4-1 :lado/3

sl av :lado/3

Cantor :paso4-1 :lado/3

fin

para cantor :paso0 :paso1 :paso2 :paso3 :paso4 :lado

ot bp sl

ponpos [-90 1]

gd 90

bl

Cantor0 :paso0 :lado

sl ponpos [-90 -15]

bl

Cantor1 :paso1 :lado

sl ponpos [-90 -30]

bl

Cantor2 :paso2 :lado

sl ponpos [-90 -45]

bl

Cantor3 :paso3 :lado

sl ponpos [-90 -60]

bl

Cantor4 :paso4 :lado

fin

6. Repite los pasos 2, 3, 4 y 5 pero ahora con el siguiente programa: (ponle el nombre que quieras remplazando las letras YYYY).

a. sin ubicación especial:

```
Para YYYY :paso :lado
```

```
bl si :paso = 0 [av :lado alto]
```

```
YYYY :paso-1 :lado/2
```

```
sl av :lado/2
```

```
YYYY :paso-1 :lado/300
```

```
fin
```

b. Ubicando la tortuga:

```
Para YYYY :paso :lado
```

```
bp sl
```

```
ponpos [-70 -10]
```

```
gd 90
```

```
bl YYYY :paso :lado
```

```
fin
```

(Observa con atención donde se hace el llamado del programa YYYY)

c. Haz el programa para que aparezcan varios pasos.

7. Haz un programa que genere la figura de la parte b del numeral 8 en el taller 4 (puedes guiarte por el programa "Para Cantor", pues es similar).

8. Analiza y describe en todos los casos la “figura límite” y las “copias maximales” de cada uno de los fractales en la recta ya trabajados.

9. Para terminar elabora un programa que grafique el fractal en la recta que inventaste (paso 10 del taller 4).

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TALLER 5

1. PROCEDIMIENTO:

- Entrega del taller EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN LA RECTA. (Trabajo en computador con el lenguaje WinLogo).
- Orientación por parte del docente.
- Desarrollo de la actividad.

2. ANÁLISIS

2.1 OBSERVACIONES

- Al iniciar el taller los estudiantes pudieron observar que el programa del punto 2 del taller, se trataba del programa que dibuja el conjunto de Cantor, antes de transcribirlo en el computador.
- En el conjunto de programas del punto 5, los estudiantes tuvieron un poco de dificultad ya que el programa “para cantor” llama a los programas Cantor0, Cantor1, Cantor2, Cantor3, Canator4, con la letra c minúscula y estos están escritos con la letra C mayúscula., por lo tanto en la ventana de texto salió el mensaje “no se como hacer cantor0”, al momento de correr el conjunto de programas.
- Los puntos 7, 8 y 9 los desarrollaron sin dificultad.

- El siguiente es un ejemplo de los programas que los estudiantes desarrollaron en la parte b del numeral 8 en el taller 4.

Para yyy :paso :lado

bl si :paso=0 [av :lado alto]

yyy :paso-1 :lado/5

sl av :lado/5

yyy :paso-1 :lado/5

sl av :lado/5

yyy :paso-1 :lado/5

fin.

- Con el desarrollo del taller se pudo observar que los estudiantes han adquirido una mejor destreza en el manejo del programa WinLogo y por lo tanto pudieron manejar sus propios programas.

2.2 FASES DE APRENDIZAJE

2.2.1 INFORMACIÓN

Título, objetivos, materiales, los puntos 1,5 y orientación por parte de la docente.

2.2.2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Puntos 2, 3 y 4 del taller.

2.2.3 ORIENTACIÓN LIBRE

Puntos 6, 7 y 8 del taller.

2.4 INTEGRACIÓN

Punto 9 del taller.

2.3 NIVEL DE RAZONAMIENTO

2.3.1 ANÁLISIS

- Los estudiantes mediante la observación y la práctica conocieron más acerca del conjunto de Cantor, comprobaron sus propiedades de fractal y pudieron crear su propio programa que generara las figuras fractales que se les pedían en este taller incluyendo el que ellos habían hecho en el taller 4.
- Los estudiantes comprenden y manipulan la estructura de los programas en el lenguaje WinLogo.

TALLER 6

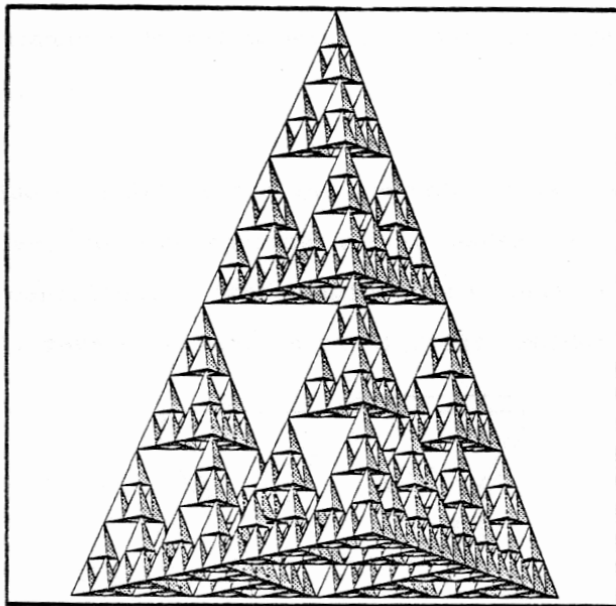
TITULO: EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN EL ESPACIO (Fractales en tercera dimensión)

OBJETIVO: para este taller el objetivo es que conozcas y construyas algunos objetos que corresponden a fractales en tercera dimensión.

MATERIALES: escoge entre los siguientes materiales lo que prefieras y necesites para trabajar: pauche, icopor, jabón, cartulina, cartón cartulina, palo de valso, reglas, pegante, bisturí, tijeras, etc.

ACTIVIDADES:

1. Observa la siguiente figura:



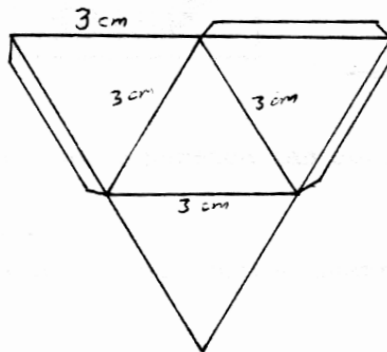
¡Pues ese es el fractal que hiciste en el taller 0 en tercera dimensión y vamos a construirlo nuevamente pero con otro material!

En primer lugar identifica cuál es la **semilla**, cuál es la **producción** y analiza la autosimilitud de este objeto: ¿cuántas **copias maximales** tiene? ¿cuántos pasos se han hecho?.

2. Cuenta el número de pirámides que tiene cada copia maximal.

3. Basado en el paso anterior, ¿cuántas pirámides tiene en total la figura? (si te parecen muchas hazte en grupo con tres compañeros de tal manera que cada uno haga una copia maximal).

4. Debido a la dificultad que presenta trabajarlos en otros materiales te recomendamos que lo hagas en cartulina o en cartón cartulina, y te imagines que cada pirámide es “**maciza**” para esto recorta el siguiente molde:



Observa, son 4 triángulos equiláteros de 5 centímetros de lado (si prefieres hazlo de 3 centímetros de lado).

5. Quiebra el molde por las líneas y arma la pirámide uniéndola por las pestañas con pegante. Haz tantas pirámides como necesites.

6. Une las pirámides entre sí como observas en la gráfica de la pirámide de Sierpinski. (Ten en cuenta que son 3 en la base y una en la cúspide).

7. Ahora junta las 4 copias maximales y pégalas. . ¿verdad que se ve genial? ¡y lo haz hecho tu mismo!.

8. Siguiendo todos los pasos anteriores, construye la “Esponja de **Menger**⁸” en el paso que aparece a continuación:



9. Elabora en tu cuaderno un boceto de un fractal en tercera dimensión. Trata de llevarlo mínimo hasta el “paso” 3.

10. ¡Construye tu propio fractal con el material que prefieras! (Puedes incluso colorearlo para darle mayor vistosidad).

⁷ Presentada por el matemático austriaco **Karl Menger** en 1.926.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TALLER 6

1. PROCEDIMIENTO:

- Entrega del taller EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN EL ESPACIO (fractales en tercera dimensión).
- En la sesión anterior se les informó a los estudiantes sobre el material que necesitaban para el desarrollo de este taller.
- Orientación por parte de la docente para el desarrollo del taller.
- Desarrollo de la actividad por parte de los estudiantes en grupos de 5 integrantes.
- Entrega y exposición de las figuras fractales en tercera dimensión hechas por parte de los estudiantes.

2. ANÁLISIS

2.1 OBSERVACIONES

- El material que escogieron los estudiantes para este trabajo fue la cartulina, cada uno llevó medio pliego, junto con los demás materiales.
- Los estudiantes siguieron paso a paso las indicaciones del taller y las sugerencias de la docente, se reunieron en grupos de cinco estudiantes, de los cuales salieron cuatro grupos para hacer la pirámide y tres para hacer la esponja.

- Los estudiantes desarrollaron este taller en dos sesiones de dos horas cada una en la primera sesión hicieron la mayoría de las pirámides y los cubos, en la sesión siguiente las terminaron y procedieron a unirlos para así formar las copias maximales y finalmente formar hasta el paso 4 de la pirámide de Sierpinski y de la esponja de Menger.
- Para el fractal en tercera dimensión que debían crear en el punto 10, los estudiantes escogieron dos modelos para construir, que fueron la H y la L en cubos.
- Fue un trabajo manual excelente, ya que los estudiantes pasaron de la representación bidimensional a una tridimensional de los fractales sin dificultad.

2.2 FASES DE APRENDIZAJE

2.1 INFORMACIÓN

Título, objetivo, materiales y orientación por parte de la docente.

2.2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Puntos 1,2, 3, 4, 5, 6 y 7 del taller.

2.3 ORIENTACIÓN LIBRE

Puntos 8 y 9 del taller.

2.5 INTEGRACIÓN

Punto 10 del taller.

2.3 NIVELES DE RAZONAMIENTO:

2.3.1 ANÁLISIS

- Los estudiantes lograron crear una versión en tercera dimensión de algunos de los fractales que hicieron en el taller 1 y descubrieron por tanto otra forma de ver los fractales.
- Observaron que en la tercera dimensión los fractales conservan sus principales propiedades tales como autosimilitud y copias maximales.
- Determinaron cuántos pasos se pueden hacer manualmente y que para esto es importante escoger el material adecuado.
- También descubrieron, orientados por la profesora, que el número de pirámides que se necesitan siempre va a ser una potencia de 4, esto mismo los llevó a analizar cuantos cubos se necesitaban para la esponja de Menger, y lo mismo hicieron con los fractales que ellos tenían.

TALLER 7

TITULO: TRANSFORMACIONES AFINES EN LA RECTA

(Bases teórico-matemáticas y trabajo con lápiz y papel)

OBJETIVOS: Mediante el desarrollo de este taller conocerás algunas bases teórico-matemáticas de los “fractales en la recta” que trabajaste en forma mas o menos “empírica” en el taller 4.

MATERIALES: Algunos libros de matemáticas de grado 9 o 10 para consulta, hoja de papel milimetrado, lápiz, regla, borrador y el taller 4 ya desarrollado.

ACTIVIDADES: ¡Alístate, ahora si entras en el “mundo matemático de los fractales”, descubre una manera de generarlos y su comportamiento bajo diferentes transformaciones.

1. Busca en cualquier libro de matemática (9º grado) todo lo relacionado con la **función lineal** y anota en tu cuaderno los siguientes tópicos:

- a. ¿Cuándo una relación es función?
- b. ¿Cuál es la forma general de la función lineal?
- c. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de una función?
- d. ¿Qué es una función lineal real?
- e. ¿Cómo es la grafica de una función lineal real? Haz mínimo tres ejemplos.

2. A partir de este momento de este momento, a todas las “funciones lineales “ de la forma $f(x) = ax+b$, la llamaremos **transformaciones afines en la recta**.

Ahora centraremos la atención en los efectos geométricos que produce una transformación afín sobre un intervalo cerrado. Grafica en tu cuaderno las siguientes transformaciones afines; pero tomando como dominio solo el intervalo cerrado $[0,1]$

a. $f(X) = 3X$

e. $k(X) = 5$

b. $f(X) = (1/2)X + 1$

f. $l(X) = -2X + 3$

c. $f(X) = -X + 2$

g. $m(X) = X - 1/2$

d.. $f(X) = (1/3)X - (2/3)$

h. $n(X) = -(1/4)X$

3. Analiza atentamente el intervalo “recorrido” o “imagen” de cada una de las transformaciones

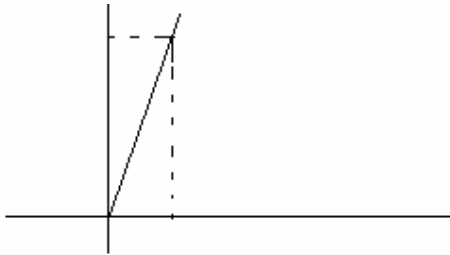
anteriores y describe su efecto geométrico sobre el intervalo “dominio”.

A manera de ejemplo, observa el desarrollo del primer ejercicio:

a. Ecuación: $f(X) = 3X$

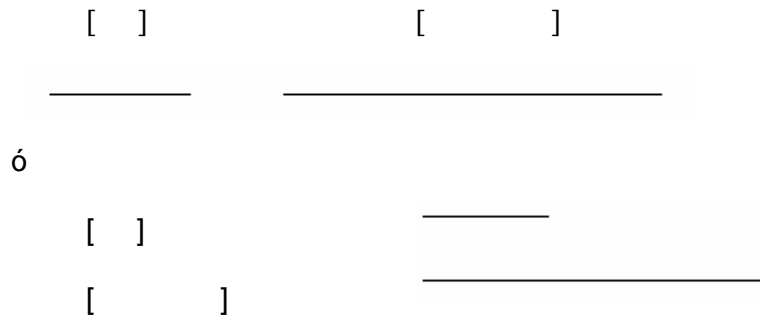
Tabla de valores:	X	0	1
	f(X)	0	3

Gráfica: $F(X) = 3X$



Luego (observando los intervalos dominio y recorrido) tenemos: $f[0,1] = [0,3]$.

Esta transformación también la podemos representar gráficamente en la siguiente forma que llamaremos “bi-espacial”:



Descripción del efecto geométrico: la transformación f hace una dilatación del intervalo en tres unidades (o un re-escalamiento con factor de escala 3).

De la misma forma realiza los ejercicios restantes.

4. Repite el numeral 3 pero esta vez tomando como dominio de la función el intervalo $[2,3]$.

5. Teniendo en cuenta lo realizado anteriormente, analiza y discute cada una de las afirmaciones que se hacen en la siguiente generalización.

--Una transformación afín en la recta es de la forma $f(x)=ax+b$ donde a y b son constantes reales.

-- La constante a determina el *cambio de escala* y la constante b determina el *desplazamiento*

-- Si el valor absoluto de a es menor que 1 ($|a|<1$), la transformación afín hace una “*contracción*” .

-- Si el valor absoluto de a es mayor que 1, ($|a| > 1$) , la transformación afín hace una “*dilatación*”.

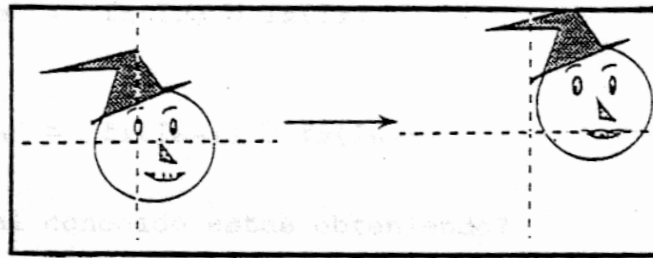
-- Si el valor absoluto de a es igual a 1, ($|a|=1$), no hay ni dilatación ni contracción.

-- Cuando a es negativo, esto es, $a<0$ la transformación afín hace una “*reflexión*” respecto al origen.

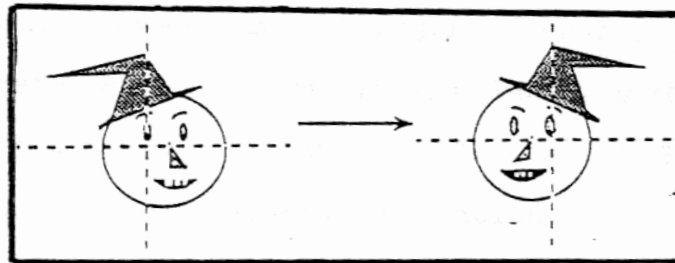
-- Si la constante b es positiva esto es, $b>0$ hay un *desplazamiento* de b unidades hacia la derecha.

-- Si la constante b es negativa, esto es, $b<0$ la transformación hace un *desplazamiento* de b unidades hacia la izquierda.

El siguiente cuadro es una demostración de dos de estos movimientos sobre la cabeza del payaso. Obsérvalos atentamente e intenta dar valores aproximados para las constantes a , b , c , d , e , f en cada caso. (Tú escoge la unidad de escala)



Traslación de _____ unidades hacia _____



Reflexión respecto al eje _____

6. Describe el efecto geométrico de las siguientes transformaciones afines

$$F_1(X) = (1/3)X \quad \text{y} \quad F_2(X) = (1/3)X + (2/3)$$

7. Partiendo de las anteriores transformaciones afines y tomando $i_0 = [0,1]$ (intervalo inicial), grafica el siguiente conjunto:

$$i_1 = F_1(i_0) \cup F_2(i_0)$$

8. Ahora gráfica $i_2 = F_1(i_1) \cup F_2(i_1)$

9. Organiza, desarrolla y grafica la siguiente secuencia:

$$\text{Paso } 0 = i_0 = [0,1]$$

$$\text{Paso } 1 = i_1 = F_1(i_0) \cup F_2(i_0)$$

$$\text{Paso 2} = i_2 = F_1(i_1) \cup F_2(i_1)$$

$$\text{Paso 3} = i_3 = F_1(i_2) \cup F_2(i_2)$$

.

.

.

$$\text{Paso } n = i_n = F_1(i_{n-1}) \cup F_2(i_{n-1})$$

¿Qué fractal conocido estas obteniendo?

10. ¡Correcto!, es el famoso “conjunto ternario de Cantor” que trabajaste en el taller 4; así las transformaciones afines $F_1(x) = (1/3)x$ y $F_2(x) = (1/3)x + (2/3)$ proporcionan una herramienta matemática para generar el “conjunto de Cantor”.

Ahora, para cada fractal trabajado en el taller 4, incluyendo el que tú mismo ideaste, vas a identificar las transformaciones afines que lo generan.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TALLER 7

1. PROCEDIMIENTO

- Entrega del taller TRANSFORMACIONES AFINES EN LA RECTA
- Orientación por parte de la docente para el desarrollo del taller.
- Desarrollo del taller, para esto se consiguieron en la biblioteca varios libros de matemáticas de los grados 9 y 10.
- Intervención de la docente para hacer algunas aclaraciones a los estudiantes sobre el tema.
- Desarrollo del taller por parte de los estudiantes.
- Entrega del taller resuelto por parte de los estudiantes.

2. ANÁLISIS

2.1 OBSERVACIONES

- En este taller se inicia una nueva etapa puesto que se empieza a incursionar en la parte formal matemática de los fractales, así se les hizo saber a los estudiantes en la orientación del taller.
- Los estudiantes desarrollaron los puntos uno y dos sin ninguna dificultad, para el resto del taller se requirió de la orientación casi permanente de la docente.

2.2 FASES DE APENDIZAJE

2.2.1 INFORMACIÓN

Título, objetivo, materiales, orientación por parte de la docente y punto 1 del taller.

2.2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Puntos 2, 3 y 4 del taller.

2.3 ORIENTACIÓN LIBRE

Puntos 3, 5, 6, 7, 8 y 9 del taller.

2.5 INTEGRACIÓN

Punto 10 del taller.

2.3 NIVELES DE RAZONAMIENTO

2.3.1 NIVEL DE RECONOCIMIENTO

- Los estudiantes identifican que una función lineal real es una transformación afín en la recta.
- Los estudiantes hacen gráficas correspondientes a transformaciones afines y describen el efecto geométrico, también reconocen el papel que cumplen cada una de las variables.
- Los estudiantes reconocen las transformaciones afines en la recta con las cuales se puede obtener el conjunto de Cantor.
- Los estudiantes descubren que los fractales en la recta se pueden construir por medio de funciones.

TALLER 8

TITULO: TRANSFORMACIONES AFINES EN EL PLANO

(Presentación cartesiana)

OBJETIVO: con este taller se espera que incursiones en las bases teórico-matemáticas que permiten la construcción de fractales en el plano, identificando la forma cartesiana de las transformaciones afines en el plano y su efecto geométrico.

MATERIALES: para el desarrollo de este taller necesitas uno o Varios libros de consulta que contengan el tema de matrices cuadradas de orden 2×2 , hojas de papel milimetrado, regla, lápiz y borrador.

ACTIVIDADES:

1. Empieza desarrollando en tu cuaderno o en las hojas cuadradas, la siguiente investigación bibliográfica:

- a. ¿Qué es un arreglo matricial o matriz?
- b. ¿Cuál es el orden de una matriz?
- c. ¿Cuándo un arreglo matricial es un vector?
- d. ¿Qué es una matriz cuadrada?
- e. ¿Qué es una matriz de orden 2×2 ? Dé ejemplos.

- f. ¿Cuándo dos matrices de orden 2×2 son iguales? Dé ejemplos.
- g. ¿Cómo se suman algebraicamente matrices de orden 2×2 ? Dé ejemplos.
- h. ¿Cómo se multiplican una matriz de orden 2×2 por un vector 2×1 ? Dé ejemplos.
- i. ¿Qué es una matriz nula?. Dé ejemplos.
- j. ¿Qué es una matriz identidad?. Dé ejemplos.

Nota: observa que no nos interesa profundizar mucho sobre matrices de cualquier orden, nos interesan específicamente las matrices de orden 2×2 . Debes lograr que todos los conceptos anteriores estén totalmente claros antes de continuar.

2. Una transformación afín en el plano es una función de la forma $T(X)=AX+W$, (notación matricial) donde A es una matriz de 2×2 , X es el vector variable y W es el vector desplazamiento. En otras palabras, una transformación afín en el plano es de la forma:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Donde a, b, c, d, e, f son constantes reales.

Veremos que este tipo de transformaciones producen diferentes efectos geométricos como: cambios de escala, reflexiones, giros, desplazamientos, etc.

Así, dá tres ejemplos de transformaciones afines en el plano, encontrando las imágenes (efectuando las operaciones) de diferentes vectores o puntos del plano.

3. Describe el efecto geométrico de las siguientes transformaciones en el plano, sobre la figura (barquito) que tiene como vértices los puntos (0,0), (4,0), (6,2), (2,2), (-2,2), (2,4), (2,6) y (4,5):

a. $T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

b. $T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

c. $T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

d. $T_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

e. $T_5 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

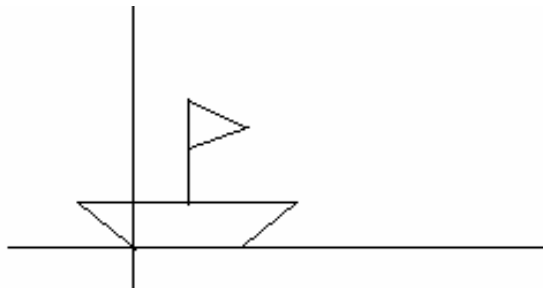
A manera de ejemplo observa atentamente el desarrollo del numeral a:

a. Transformación afín:

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Gráfica de la figura inicial:

Vértices: (0,0),
 (4,0), (-2,2), (2,2),
 (6,2), (2,4), (4,5),
 (2,6).



Hallando los puntos imágenes: tomamos cada uno de los puntos vértices de la figura inicial y les aplicamos dicha transformación así:

- para el punto (-2,2) tenemos

$$T \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (-2,2) después de la transformación es (0,3).

- para el punto (0,0) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (0,0) después de la transformación es (1,2).

- para el punto (4,0) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (4,0) después de la transformación es (3,2).

- para el punto (6,2) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (6,2) después de la transformación es (4,3).

- para el punto (2,2) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (2,2) después de la transformación es (2,3).

- para el punto (2,4) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (2,4) después de la transformación es (2,4).

- para el punto (4,5) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9/2 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (4,5) después de la transformación es (3,9/2).

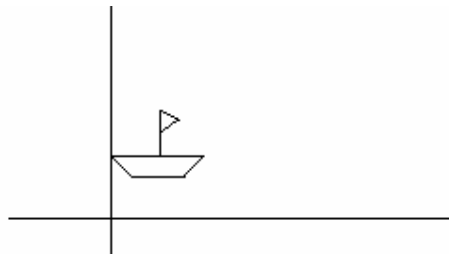
- para el punto (2,6) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (2,6) después de la transformación es (2,5).

Gráfica de la figura ya transformada.

Vértices: (1,2), (3,2), (0,2), (2,3), (4,3), (2,6), (3,1/2), (2,5)



Descripción del efecto geométrico de la transformación:

“El barquito fue reducido según un factor de escala de $\frac{1}{2}$ y desplazado una unidad hacia la derecha y dos unidades hacia arriba”.

(Observa que el barquito no sufrió ninguna reflexión ni ningún giro).

Nota: de la misma forma anterior, desarrolla los ejercicios restantes. Ten especial cuidado en la descripción del efecto geométrico de la transformación.

4. Lee, analiza y verifica en los ejemplos que acabas de desarrollar, cada una de las afirmaciones que se hacen en la siguiente generalización:

▪ “Una matriz de forma: $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ hace:

I) Si $k > 1$, una dilatación con factor de escala k

II) Si $0 < k < 1$, una contracción con factor de escala k

III) Si $-1 < k < 0$, una contracción de escala $|k|$ seguida de una reflexión respecto al origen.

IV) Si $k < -1$, una dilatación con factor de escala $|k|$ seguida de una reflexión respecto al origen.

V) Si $k = 0$, se tiene la transformación NULA. (todo se convierte en el punto (0,0)).

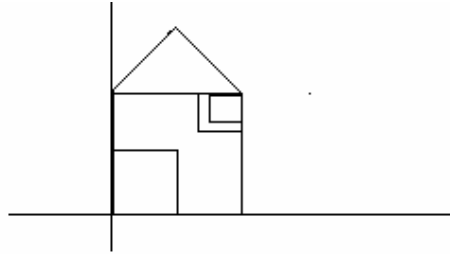
VI) Si $k = 1$, se tiene la transformación idéntica. (Todo queda igual).

▪ Además, si la matriz es $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ésta hace una reflexión respecto al eje Y; o si la

matriz es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ lo que se tiene es una reflexión respecto al eje X.

▪ Si en la transformación afín hay un vector de desplazamiento $W = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ entonces la figura se desplaza $|e|$ unidades en sentido horizontal (¿cuándo a la derecha?, ¿cuándo a la izquierda?) y $|f|$ unidades en sentido vertical (¿cuándo hacia arriba?, ¿cuándo hacia abajo?).

5. Dibuja y describe como queda la casita después de cada una de las transformaciones dadas. Las coordenadas de los vértices de la casita son: (0,0), (1,0), (0,1), (1,1) y (1/2,3/2). (la puerta y la ventana simplemente dibújalas sin necesidad de saber las coordenadas de sus vértices).



a. $T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. $T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c. $T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

d. $T_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

e. $T_5 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

f. $T_6 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

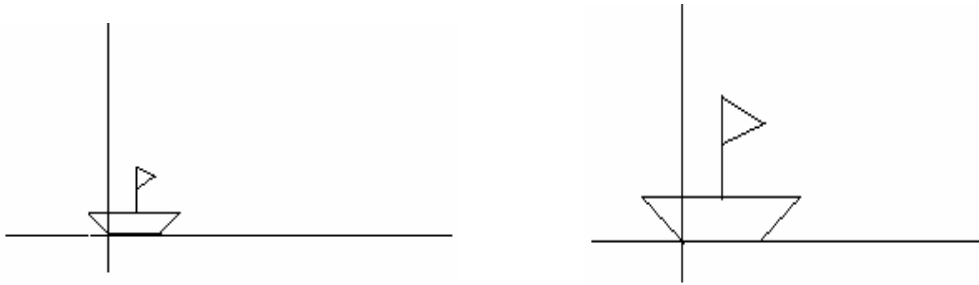
g. $T_7 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

h. $T_8 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

6. Encuentra la transformación afín que convierte la figura de la izquierda en la figura de la derecha:

a. Vértices figura izquierda: $(0,0)$, $(2,0)$, $(-1,1)$, $(1,1)$, $(1,3)$, $(1,2)$, $(2,5/2)$, $(1,3)$.

Vértices figura derecha: $(0,0)$, $(6,0)$, $(-3,3)$, $(3,3)$, $(9,3)$, $(3,6)$, $(6,15/2)$, $(3,9)$.

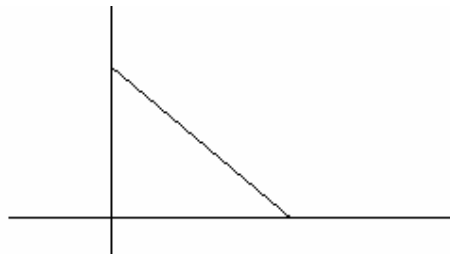


b. Vértices figura izquierda: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1/2, 3/2)$.

Vértices figura derecha: $(1/2,0)$, $(3/2,0)$, $(1/2,-1)$, $(3/2,-1)$, $(1,-3/2)$.



7. Para el triángulo de la figura considera las siguientes transformaciones afines: vértices de la figura $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.



$$F_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$F_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

- a. Describe (solo mirándolas), el efecto geométrico de cada transformación.
- b. Dibuja en un mismo plano cómo queda el triángulo al aplicarle F_1 , F_2 , F_3 . Llama A_1 a la figura que obtienes.
- c. Dibuja en otro plano, como queda A_1 al aplicarle F_1 , F_2 y F_3 . Llama A_2 a la figura que obtienes.
- d. Si repites el proceso anterior, varias veces, ¿qué estás obteniendo?.

8. Inventa una figura y un conjunto de cinco transformaciones, para trabajar como en el numeral cinco, luego intercámbiala con uno de tus compañeros; tu resolverás lo que el haya ideado y él deberá desarrollar la tuya. ¡Suerte!

(¡ojo! No pongas una transformación sin tener al menos una idea del efecto geométrico que está produce).

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TALLER 8

1. PROCEDIMIENTO:

- Introducción del tema por parte de la docente.
- Entrega del taller TRANSFORMACIONES AFINES EN EL PLANO.
(presentación cartesiana)
- Previamente se les informó a los estudiantes el material a necesitar.
- Orientación para el desarrollo de las actividades por parte de la docente.
- Desarrollo del taller por parte de los estudiantes.
- Entrega del taller resuelto por parte de los estudiantes.

2. ANÁLISIS

2.1 OBSERVACIONES

- Al iniciar este taller se hizo una presentación del tema a los estudiantes.
- El taller se desarrolló en su mayoría con la orientación de la docente y ayuda de libros.
- En el momento de aplicar este taller los estudiantes estaban trabajando precisamente el tema de matrices es la asignatura de matemáticas lo que facilitó su desarrollo.

- Debido a que en el punto 3 debían calcular la imagen tiene 8 vértices para cada una de las 5 transformaciones propuestas, se les sugirió a los estudiantes que realizaran estos cálculos para una sola transformación a fin de no caer en la monotonía de tantas operaciones aritméticas. De manera análoga se procedió para el desarrollo del punto 5.

2.2 FASES DE APRENDIZAJE

2.2.1 INFORMACIÓN

Título, objetivos, materiales, punto 2 del taller y orientación por parte de la docente.

2.2.2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Puntos 1, 2, 3, 4 y 5 del taller.

2.2.3 ORIENTACIÓN LIBRE

Puntos 6 y 7 del taller.

2.2.4 INTEGRACIÓN

Punto 8 del taller.

2.3 NIVEL DE RAZONAMIENTO

2.3.1 NIVEL DE ANÁLISIS

- Los estudiantes identifican y describen el efecto geométrico de cada una de las transformaciones en el plano que están en los talleres y en general cualquier transformación de este tipo.
- Los estudiantes identifican la forma cartesiana de las transformaciones afines en el plano.
- Los estudiantes hacen comparaciones entre el taller 7 y el taller 8.

TALLER 9

TITULO: TRANSFORMACIONES AFINES EN EL PLANO

(Presentación geométrica)

OBJETIVO: para cuando termines el desarrollo de este taller se espera que identifiques la forma geométrica de las transformaciones afines en el plano, las relaciones con la forma cartesiana e interpretes correctamente el efecto geométrico de cada uno de los parámetros que intervienen en la presentación geométrica.

MATERIALES: para llevar a cabo este taller ten a la mano tu cuaderno de apuntes, escuadra, transportador, lápiz, borrador y hojas cuadriculadas o milimetradas.

ACTIVIDADES:

1. Lee, analiza y discute la siguiente afirmación: “además de notar las transformaciones afines en el plano con su presentación cartesiana, es posible (y a veces más práctico) notarlas con su forma geométrica, ésta es:

$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -s \sin \phi \\ r \sin \theta & s \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Donde cada uno de los parámetros r , s , θ , ϕ , e y f se interpretan así:

r indica el cambio de escala en el eje X ;

s indica el cambio de escala en el eje Y;

θ indica el giro sobre el eje X;

ϕ indica el giro sobre el eje Y;

e indica el desplazamiento sobre el eje X o desplazamiento horizontal;

f indica el desplazamiento sobre el eje Y o desplazamiento vertical.

2. Encuentra las equivalencias o relaciones de la forma geométrica con la forma cartesiana trabajada en el taller anterior:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$a = ? \quad b = ? \quad c = ? \quad d = ? \quad e = ? \quad f = ?$$

3. Si tomamos $r = s$ y $\theta = \phi$, representa la transformación (reemplaza los datos) y discute su efecto.

4. Describe el efecto de la transformación si además de lo anterior se cumple que:

a. $r = 1$.

b. $r = s$ y $\theta = \phi = 0$.

5. Analiza las siguientes definiciones:

a. una **similitud directa** es una transformación afín de la forma:

$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

b. una **similitud no directa** es una transformación afín de la forma:

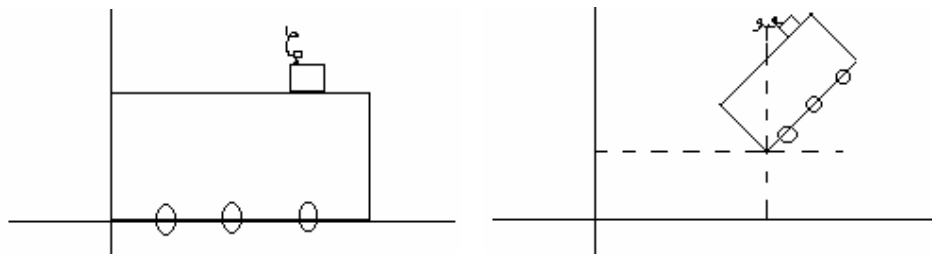
$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

En ambos casos, r lo llamaremos el **factor de escala de la similitud**.

Basándote en las definiciones anteriores, en tu cuaderno, describe el efecto de una similitud directa y el de una similitud no directa; da mínimo tres ejemplos de cada una.

6. ¿Cuál es el efecto de una transformación si es una similitud directa y se tiene que $r=1$, $\theta = \pi/2$ y $e = f = 0$ (reemplaza los parámetros y luego describe lo que resulta).

7. Encuentra la transformación afín que convierte la figura de la izquierda en la figura de la derecha:



8. Encuentra la forma geométrica de la transformación afín que convierte el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ en el triángulo de vértices $(-1,1)$, $(2,1)$ y $(3,2)$.

9. Para el triángulo de Sierpinski del taller 8 se necesitan tres transformaciones afines, (una para cada copia maximal). Estas tres transformaciones w_1 , w_2 , w_3 las podemos describir en pantalla así:

w_1 : Hace una reducción con factor de escala $r = \frac{1}{2}$.

w_2 : Hace una reducción con factor de escala $r = \frac{1}{2}$ y luego desplaza $\frac{1}{2}$ a la

derecha. w_3 : Hace una reducción con factor de escala $r = \frac{1}{2}$ y luego desplaza $\frac{1}{2}$ hacia arriba.

Identifica para cada una de dichas transformaciones los parámetros r , s , θ , ϕ , e y f de su presentación geométrica. ¡observa que las tres transformaciones son similitudes!

10. Recuerda la sucesión de figuras que generan la curva de Koch:



a. ¿Cuántas transformaciones afines se necesitan para generar la curva de Koch? (Recuerda que cada transformación corresponde a una copia maximal).

- b. Describe en palabras el efecto geométrico de cada transformación. A manera de ejemplo observa la siguiente descripción: “una de las transformaciones (¿cuál?) hace: una contracción con factor de escala $1/3$, un giro de -60° , un desplazamiento hacia la derecha de $1/2$ y un desplazamiento hacia arriba de $\sqrt{3}/6$.
- c. Identifica para cada una de las transformaciones anteriores los parámetros r , s , θ , ϕ , e y f de su presentación geométrica. ¿son similitudes? Justifica.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TALLER 9

1. PROCEDIMIENTO:

- Introducción del tema por parte de la docente.
- Entrega del taller TRANSFORMACIONES AFINES EN EL PLANO.
(presentación geométrica)
- Orientación para el desarrollo de las actividades por parte de la docente.
- Solución de preguntas.
- Desarrollo del taller por parte de los estudiantes.
- Entrega del taller resuelto por parte de los estudiantes.

2. ANÁLISIS

2.1 OBSERVACIONES

- Para el desarrollo de este taller se necesitó usar libros matemáticos y la orientación constante de la docente.
- Por su contenido matemático el desarrollo de este taller se realizó con mucho cuidado.
- Los estudiantes en el desarrollo de este taller estuvieron desmotivados y mostraban poco interés, por lo la docente hizo una pequeña intervención mostrándoles un poco el porqué se necesitaba esta etapa para conocer una nueva forma de construir fractales.

2.2 FASES DE APRENDIZAJE

2.2.1 INFORMACIÓN

Título, objetivos, materiales, el punto 1 del taller y orientación por parte de la docente.

2.2.2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Puntos 2, 3, 4, 5 y 6 del taller.

2.2.3 ORIENTACIÓN LIBRE

Puntos 7, 8 y 9 del taller.

2.2.4 INTEGRACIÓN

Punto 10 del taller.

2.3 NIVEL DE RAZONAMIENTO

2.3.1 NIVEL DE ANÁLISIS

- Los estudiantes identifican las relaciones entre las variables de la forma geométrica y las variables de la forma cartesiana.
- Los estudiantes reconocen el papel que desempeña cada variable.
- Los estudiantes describen con palabras el efecto geométrico de una transformación afín y descubren las transformaciones afines de algunos fractales vistos.

TALLER 10

TITULO: SISTEMAS ITERATIVOS DE FUNCIONES (SIF)

(Bases teórico-matemáticas)

OBJETIVO: cuando finalices el desarrollo de este taller debes identificar lo que llamaremos un “sistema iterativo de funciones”, SIF, y reconocer el atractor en algunos SIF's.

MATERIALES: en esta oportunidad solo necesitas los elementos básicos de dibujo como son cuaderno, lápiz, borrador, etc. Y un diccionario.

ACTIVIDADES:

1. Busca en el diccionario el significado matemático de los siguientes términos y anótalos en tu cuaderno pero con tus palabras:

- a. sistema;
- b. iterativo;
- c. función.

2. El siguiente es un sistema iterativo de funciones, SIF, que genera la curva de Koch: $\{ A_0, ; w_1, w_2, w_3 \}$ donde $A_0 = [0,1]$

$$w_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$w_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/3)\cos 60^\circ & (-1/3)\text{sen}60^\circ \\ (1/3)\text{sen}60^\circ & (1/3)\cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/3)\cos(-60^\circ) & (-1/3)\text{sen}(-60^\circ) \\ (1/3)\text{sen}(-60^\circ) & (1/3)\cos(-60^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{bmatrix}$$

$$w_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Define basado en el ejemplo anterior, ¿qué es el SIF de una figura fractal dada?

3. para el SIF anterior grafica la siguiente secuencia de figuras:

$$\text{paso } 0 = A_0 = [0,1]$$

$$\text{paso } 1 = A_1 = w_1(A_0) \cup w_2(A_0) \cup w_3(A_0) \cup w_4(A_0)$$

$$\text{paso } 2 = A_2 = w_1(A_1) \cup w_2(A_1) \cup w_3(A_1) \cup w_4(A_1)$$

4. ¿A qué fractal conocido corresponde el siguiente sistema iterativo de funciones?

$\{ A_0, ; f_1, f_2 \}$ donde $A_0 = [0,1]$, y las transformaciones afines f_1 y f_2 son:

$$f_1(X) = (1/3)X \text{ y } f_2(X) = (1/3)X + (2/3).$$

Nota: observa que en todos los SIF's que hemos utilizado para generar figuras fractales, las transformaciones afines que intervienen son "contractoras", es decir con factor de escala entre cero y uno.

5. La siguiente es la estructura general de un proceso para la elaboración de una figura fractal: $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ son transformaciones afines contractoras.

A_0 es la semilla (figura inicial) y se construye la secuencia de figuras:

$$A_1 = w_1(A_0) \cup w_2(A_0) \cup w_2(A_0) \cup \dots \cup w_n(A_0)$$

$$A_2 = w_1(A_1) \cup w_2(A_1) \cup w_2(A_1) \cup \dots \cup w_n(A_1)$$

.

.

.

$$A_n = w_1(A_{n-1}) \cup w_2(A_{n-1}) \cup w_2(A_{n-1}) \cup \dots \cup w_n(A_{n-1})$$

Esta secuencia $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ tiende a lo mismo que ya hemos llamado figura límite, y que de ahora en adelante notaremos A y llamaremos

ATRACTOR del sistema iterativo de funciones.

Basado en lo anterior, define: ¿qué es el **atractor** de un SIF?

6. Dado el siguiente sistema iterativo de funciones, realiza (grafica) el proceso descrito en el numeral 4 con cada uno de los A_0 , hasta visualizar claramente el atractor: $\{A_0; w_1, w_2, w_3\}$ donde

$$w_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$w_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

a. A_0 = triángulo relleno con vértices (0,0), (1,0), y (0,1).

A_0 = Cuadrado relleno con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$.

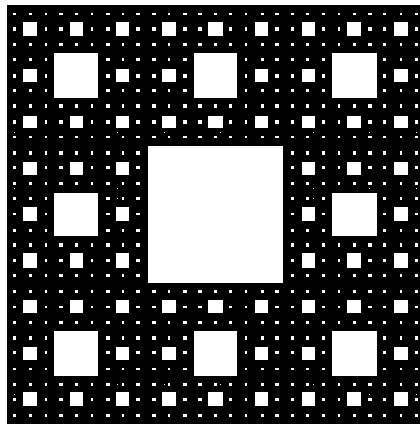
7. ¿Qué observación importante puedes hacer con respecto a los atractores (figuras límites), que graficaste en el punto anterior?

8. Describe la estructura común de cualquier sistema iterativo de funciones,

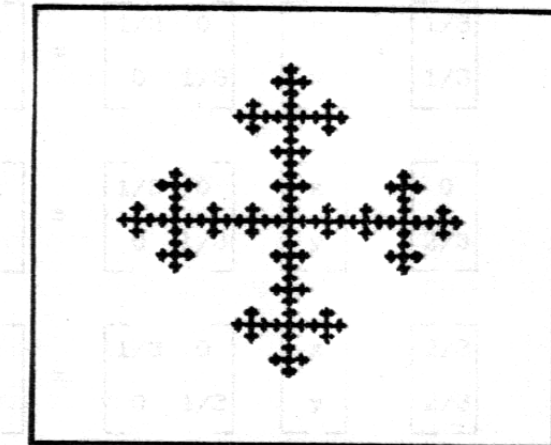
$$\text{SIF} = \{ A_0 ; w_1, w_2, w_3 \}$$

9. Identifica el SIF para los siguientes fractales (atractores):

a. Carpeta de Sierpinski



b. Curva de Vicsek



10. Analiza y responde en tu cuaderno cuál es el A_0 (figura inicial) y cuántas son las transformaciones afines (w_i), para los siguientes fractales en tercera dimensión:

- a. Esponja de Menger (numeral 8 del taller 6)
- b. Pirámide de Sierpinski (numeral 1 del taller 6)

11. ¿Cuál es el atractor correspondiente al siguiente SIF: (haz la grafica)

SIF = $\{ A_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \}$ donde:

A_0 = cuadrado relleno de vértices (0,0), (1,0), (0,1) y (1,1).

$$w_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$w_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$w_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$w_5 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

12. Identifica y escribe en tu cuaderno el SIF para los fractales que se han trabajado en los diferentes talleres (incluyendo los que has inventado).

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TALLER 10

1. PROCEDIMIENTO:

- Introducción del tema por parte de la docente.
- Entrega del taller SISTEMAS ITERATIVOS DE FUNCIONES (SIF)
(Bases teórico-matemáticas).
- Orientación para el desarrollo de las actividades por parte de la docente.
- Desarrollo del taller por parte de los estudiantes.
- Entrega del taller resuelto por parte de los estudiantes.

2. ANÁLISIS

2.1 OBSERVACIONES

- Para el desarrollo de este taller necesitamos de los talleres 7, 8, y 9.
- Debido a que en el taller 9 los estudiantes ya vieron la aplicación de las transformaciones afines en los fractales, en este taller participaron más activamente.

2.2 FASES DE APRENDIZAJE

2.2.1 INFORMACIÓN

Título, objetivos, materiales, el punto 1 del taller y orientación por parte de la docente.

2.2.2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 del taller.

2.2.3 ORIENTACIÓN LIBRE

Puntos 8, 9 y 10 del taller.

2.2.4 INTEGRACIÓN

Punto 11 del taller.

2.3 NIVEL DE RAZONAMIENTO

2.3.1 NIVEL DE ANÁLISIS

- Los estudiantes definen SIF como un conjunto de transformaciones afines (geométricas) y describen la estructura de este.
- Los estudiantes identifican el proceso a seguir para la elaboración de una figura fractal (atractor).
- Los estudiantes identifican el SIF del triángulo de Sierpinski, conjunto de Cantor, carpeta de Sierpinski, curva de Koch y algunos de los que realizaron ellos mismos.

TALLER 11

TITULO: UN PROGRAMA PARA GRAFICACIÓN DE FRACTALES LINEALES.

OBJETIVO: con este taller se pretende que aprendas a manejar uno de los mejores programas en español existentes hasta ahora en nuestro medio sobre “fractales”, y puedas aplicar varios de los conocimientos adquiridos hasta el momento para manipular y crear figuras y crear figuras fractales mediante transformaciones afines. Este programa ha sido creado por Fernando Pérez A.

MATERIALES: para desarrollar este taller necesitas contar con un microcomputador compatible I.B.M., un diskette con el programa “Fraclin” de Fernando Pérez A⁹, todos los talleres desarrollados, cuaderno, lápiz y borrador, etc.

ACTIVIDADES:

1. Prende el computador y busca en el directorio el programa “fraclin” (que debe estar instalado previamente), dale click para abrir, ahí te saldrán muchos archivos busca fraclin aplicación dale click, esto te abrirá el programa presentándote la pantalla de trabajo.

⁹ “Fraclin es una versión mejorada, por el mismo autor, de un programa llamado “Fractales” que fue diseñado en el Departamento de Física de la Universidad de Antioquia durante 1.991 como parte de un curso de simulación de procesos físicos y matemáticos en computador.

2. Fraclin (fractales lineales) es un programa basado en menús que se despliegan como ventanas a partir del encabezamiento y para desplazarse por ellas y sus diferentes opciones, debes usar las cuatro flechas que se encuentran a la derecha del teclado. Una vez hayas elegido tu opción presiona la tecla ENTER y estarás dentro de ella. Como ejercicio, explora todos y cada uno de los menús con sus respectivas ventanas; para salir de ellas simplemente presiona la tecla ESC.

3. Como ya has visto, Fraclin presenta en la parte superior de la pantalla cinco opciones que corresponden a cinco menús; en tu cuaderno describe en que consiste o para que son y como se trabaja en cada uno de ellos:

- a. El menú *instrucciones* (léelo todo) ;
- b. El menú *operar*;
- c. El menú *información*;
- d. El menú *sugerencias*;
- e. El menú *salir*;

4. Detente en el menú operar y describe sus diferentes ventanas:

- a. La ventana DEMO con sus diferentes opciones.
- b. La ventana ECUACIONES con sus diferentes opciones ver, crear, editar, modo activo.
- c. La ventana PANTALLA con sus opciones.

d. La ventana GRAFICAR y su única opción ejecutar.

e. La ventana de ARCHIVO y sus opciones.

5. Ya conoces la forma de correr el programa Fraclin, ahora nos vamos a su contenido como tal:

a. Empieza por visualizar muy bien las figuras fractales clásicas que trae el programa, intenta ver con cuántas iteraciones mínimo es clara la figura, ¿qué ganas al dejar que se hagan muchas iteraciones?.

b. Entra a la ventana ECUACIONES y reconoce las transformaciones afines que generan cada uno de los fractales en DEMO. Observa que a cada transformación Fraclin le asigna un color diferente. Al graficar la figura, ¿qué relación existe entre las “copias maximales”, las transformaciones y los colores?.

c. En la ventana ECUACIONES, entra a la opción editar, varía algunos parámetros de las transformaciones y luego grafica. Hazlo hasta obtener otra figura que sea muy vistosa. Graba e imprime dicha figura poniéndole el nombre que quieras.

d. Varía los parámetros de diferentes transformaciones, tratando de predecir lo que le pasará a la figura fractal.

e. Escoge al menos dos de las figuras fractales trabajadas a lo largo de los talleres, que se puedan obtener mediante transformaciones afines en el plano y que no estén incluidas en la ventana DEMO, (por ejemplo las del numeral 8 del

taller 10) y usando la opción CREAR, inserta en el programa las debidas transformaciones para generar estas figuras.

f. Por último genera el fractal que ideaste en el taller 1. Grábalo e imprímelo ¡ese es sólo tuyo!, ¡felicitaciones!

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL TALLER 11

1. PROCEDIMIENTO:

- Entrega del taller UN PROGRAMA PARA GRAFICACIÓN DE FRACTALES LINEALES.
- Orientación para el desarrollo del taller.
- Desarrollo del taller.
- Revisión del trabajo realizado por los estudiantes.

2. ANÁLISIS

2.1 OBSERVACIONES

- Las instrucciones de Fraclin son muy claras y precisas por lo que los estudiantes no tuvieron problemas en su manejo.
- La mayoría de los estudiantes trabajaron con la carpeta de Sierpinski escribieron las transformaciones que la generan y a partir de estas con pequeños cambios hacen más fractales tales como las curvas de Vicsek y algunas letras.
- Con este taller los estudiantes muestran que el trabajo realizado en los talleres anteriores fue interiorizado.
- Los estudiantes mostraron gran satisfacción al obtener en la pantalla del computador algunas figuras fractales diferentes a las que estaban en el menú.

- Este es el último taller que se les aplicó a este grupo de estudiantes de décimo grado.

2.2 FASES DE APRENDIZAJE

2.2.1 INFORMACIÓN

Título, objetivos, materiales y orientación por parte de la docente.

2.2.2 ORIENTACIÓN DIRIGIDA

Puntos 1, 2, 3 y 4 del taller.

2.2.3 ORIENTACIÓN LIBRE

Punto 5 literales a, b, c y d del taller.

2.2.4 INTEGRACIÓN.

Punto 5 literales e y f del taller.

2.3 NIVEL DE RAZONAMIENTO

2.3.1 NIVEL DE ANÁLISIS

- Los estudiantes reconocen el programa fraclin como una herramienta potente para crear fractales.
- Los estudiantes aplican los conocimientos adquiridos a través del desarrollo de este taller.
- Los estudiantes visualizan los fractales dados como ejemplo en el programa y describen las transformaciones que generan alguno de ellos.
- Los estudiantes modifican la estructura de algunos fractales dados, logrando así crear nuevos fractales, sin embargo no pudieron predecir lo que le pasaría a la figura con estos cambios.

3. TALLERES MODIFICADOS

En esta parte se presentan nueve de los talleres presentados anteriormente ya mejorados según los resultados arrojados por estos mismos después de su aplicación y análisis. Los tres talleres restantes que corresponden a 4, 5 y 6 no requirieron de hacerles modificaciones ya que no presentaron ninguna dificultad en el momento de su desarrollo.

TALLER 0

TITULO: INTRODUCCIÓN – MOTIVACIÓN

(El concepto de fractal)

OBJETIVO: con este taller lo único que se pretende es, como su nombre lo dice, darte una breve introducción al mundo de los fractales a la vez que te motiva a estudiarlos.

MATERIALES: para el desarrollo de este taller vas a necesitar seis pitillos pequeños (revolvedores de café) y metro y medio de nylon, (este material lo llevará previamente el profesor).

.

ACTIVIDADES:

1. Con los pitillos y el nylon que te facilitó tu profesor construye un tetraedro, esto lo harás tú solo con tu imaginación.

2. Ahora reúnete con tres de tus compañeros y forma una pirámide uniendo cuatro tetraedros. Luego una está pirámide que formaron con tres más y así sucesivamente hasta donde alcancen las pirámides. “Esta figura que acabas de formar junto con tus compañeros recibe el nombre de **pirámide de Sierpinski**, en honor a un matemático polaco llamado Wacław Sierpinski.

3. Escribe al menos dos propiedades o características que te llamen la atención de la pirámide de Sierpinski.

4. Ahora lee con atención y ... ¡déjate atraer por ellos!

En la década de los setenta surgió una nueva geometría recursiva o “Geometría Fractal”, creada por el polaco Benoit Mandelbrot ¹⁰. Esta geometría ha resultado ser una herramienta que además de ser muy atractiva por la belleza (a veces exótica) de las figuras que se generan, tiene muy buenas perspectivas para modelar fenómenos de la naturaleza que siempre se habían considerado fuera del alcance de las matemáticas y juega un papel importante en el desarrollo de disciplinas tan variadas y aparentemente disímiles como las matemáticas (geometría fractal), las ciencias de computación (heurística), la Pintura (fractales), la Música (ruido blanco), la Física (sistemas dinámicos) y la Biología (modelos neuronales”).

La idea filosófica subyacente a esta geometría es que los objetos de la naturaleza son recursivos. Por ejemplo un árbol, una nube, una costa, son

objetos tridimensionales que pueden ser modelados muy sencillamente en términos de ellos mismos.

Esto no se puede hacer con la geometría euclidiana; ya que esta fue modelada para describir objetos rectilíneos y no objetos irregulares (de hecho la palabra fractal quiere decir: irregular, fragmentado).

“Muy posiblemente esta geometría de los objetos irregulares será la geometría del futuro. La recursión es una de las herramientas potentes tanto para la descripción de los objetos, como para la resolución de problemas¹¹ “

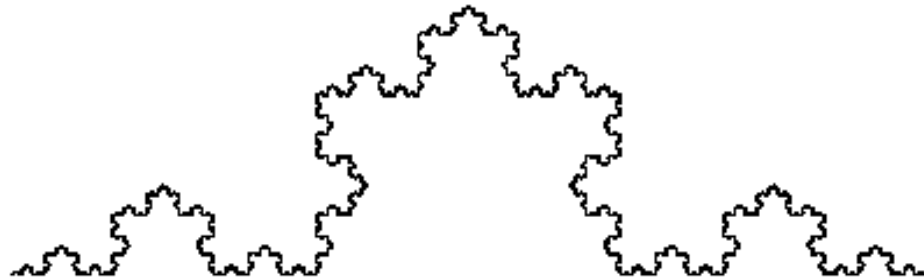
Aunque no existe todavía una definición formal de la palabra “fractal”, examinando algunos conceptos relacionados con el tema, es relativamente fácil identificar una figura o un fenómeno de la naturaleza fractal.

Una característica esencial de los objetos fractales es la **autosimilitud**. Intuitivamente un objeto o una figura es autosimilar si es igual a sus partes, salvo un factor de escala.

Veamos algunos ejemplos:

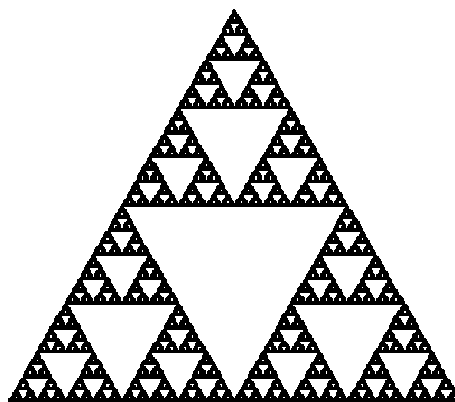
¹⁰ **Benoit Mandelbrot** nació en Polonia en 1924; pero después su familia emigró a Francia en

Ejemplo 1: La Curva de Koch



Podríamos decir que la curva de Koch está formada por cuatro curvas de Koch cada una igual a la total pero reducida y colocada de diferente forma. (¡Identifica las cuatro curvas de Koch de las que aquí se habla!).

Ejemplo 2: El Triángulo de Sierpinski



Este triángulo está formado por tres triángulos iguales al total solo que más pequeños (y cada uno de ellos formados por otros tres triángulos iguales pero más pequeños, etc.) ¿Estás de acuerdo con esta descripción?

En realidad los objetos fractales que se pueden obtener de esta manera son fractales determinísticos pues se forman con reglas muy precisas y exactas, sin intervención del azar, (los ejemplos clásicos de fractales son fractales determinísticos, como los citados anteriormente). En la naturaleza también se encuentra esta autosimilitud aunque no de manera tan determinística: las olas del mar son formadas por pequeñas olas, cada una formada por otras olas; una hoja de helecho formada por ramitas que son como helechos más pequeños, o las ramas de un árbol se pueden ver como pequeños árboles; una cabeza de coliflor esta formada por pequeñas coliflores, cada una a su vez formadas por subcoliflores, etc. Son algunos de los ejemplos que se pueden encontrar¹².

5. Busca otros ejemplos de fractales en la naturaleza.

6. Busca en un diccionario el significado matemático del término “determinístico”.

7. Si quieres profundizar más este tema te recomendamos los libros que aparecen en la bibliografía de la cartilla.

¹¹ Tomado del libro Meta básica de Pedro Gómez.

TALLER 1

TITULO: EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN EL PLANO

(Trabajo con lápiz y papel)

OBJETIVO: Con este taller se espera que:

- Deduzcas los conceptos de “semilla” y “producción”, a la vez que los identifiques en un ejemplo dado. Además, debes construir tu propio fractal partiendo de figuras en el plano como segmentos, cuadrados, círculos triángulos, rectángulos, etc, aplicando a una semilla una regla de producción.

MATERIALES: Para el desarrollo de este taller vas a necesitar al menos dos hojas de papel milimetrado, un lápiz, un borrador y una regla.

ACTIVIDADES:

1. A continuación encontrarás tres ejemplos y en cada uno de ellos una “semilla” y una “producción”, en una secuencia de pasos que corresponde a la construcción de una figura de tipo fractal. Observa atentamente cada ejemplo:

¹² Apartes tomados del cuadernillo Autosimilitud y Fractalidad del Grupo Fractales, UIS (Bucaramanga).

Ejemplo 1. *El Triángulo de Sierpinski*¹³:

Semilla

Producción



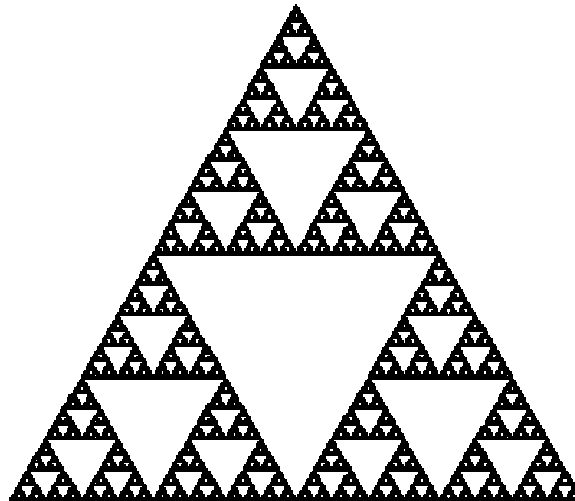
Paso 0

Paso 1

Paso 2

Paso 3

Hecho en el computador el paso enésimo (y en un tamaño más grande) verás:

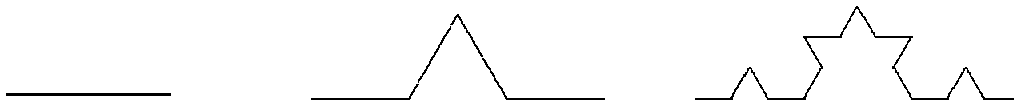


¹³ Wacław Sierpiński, matemático polonés (1.882-1.969). Fue profesor en Lvov y Varsovia. Se consagró como uno de los matemáticos más influyentes de su época en Polonia y tuvo una

Ejemplo 2. **La curva de Koch**¹⁴ :

Semilla

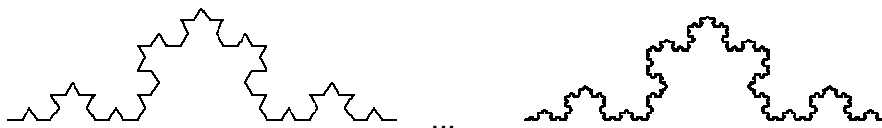
Producción



Paso 0

Paso 1

Paso 2



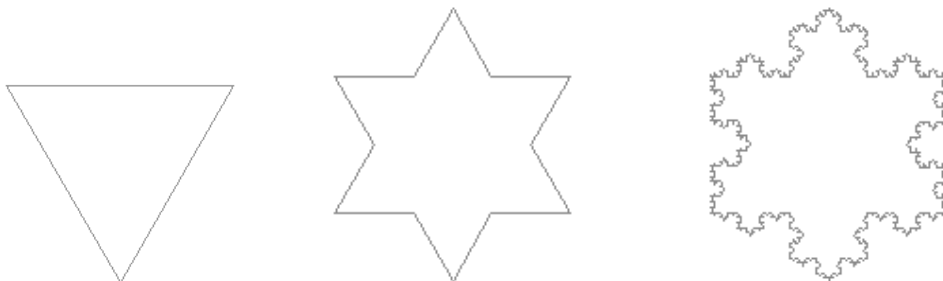
Paso 3

Paso enésimo

Ejemplo 3. “La curva del copo de nieve” o “isla de Koch”:

Semilla

Producción



Paso 0

Paso 1

Paso enésimo

reputación mundial (de hecho uno de los cráteres de la luna lleva su nombre). Su clásico fractal llamado *triángulo de Sierpinski* fue presentado en 1.916.

¹⁴ Introducida por el matemático sueco Helge Von Koch en 1.904. Poco es conocido de Helge Von Koch y sus contribuciones matemáticas pero en este taller de fractales clásicos su construcción debe tener un lugar simplemente por que lleva a muchas generalizaciones interesantes y debe haber inspirado inmensamente a Mandelbrot.

2. Escoge uno de los tres ejemplos anteriores e identifica cuál es la semilla y cuál es la producción.

3. Basado en los dos puntos anteriores escribe una definición de SEMILLA y PRODUCCIÓN.

4. Observa atentamente las siguientes secuencias e identifica en cada una de ellas cuál es la semilla y cuál es la producción.

a. Carpeta de Sierpinski

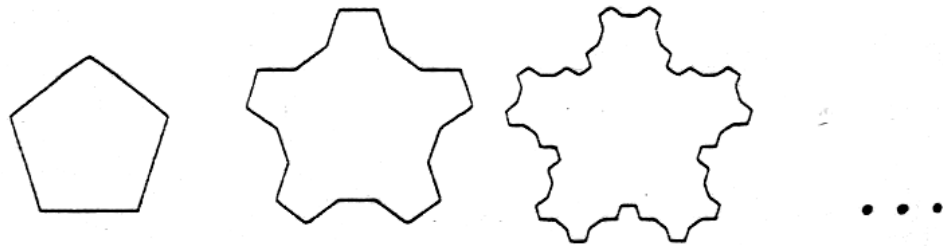


b. Dragón de Sierpinski





C.



5. Ahora tú debes escoger una semilla y una producción que generen una figura (ojalá muy vistosa) y la trabajas en una hoja de papel milimetrado. Usa tu creatividad e imaginación y recuerda que por ahora debes partir de una figura en el plano como un segmento, un cuadrado, un triángulo o en general cualquier polígono.

TALLER 2

TITULO: FIGURA LÍMITE Y AUTOSIMILITUD

(Dos conceptos básicos)

OBJETIVO: una vez terminado este taller se espera que hayas adquirido las nociones de “**figura Límite**”, “**autosimilitud**” y “**copias maximales**”.

MATERIALES: lo primero que debes tener a la mano para trabajar este taller, es el taller 1 ya desarrollado, además necesitas lápiz, borrador y papel.

ACTIVIDADES:

1. En cada uno de los ejemplos trabajados en el taller 1 se parte de una semilla y una producción que genera una secuencia o sucesión de figuras (paso 1, paso 2, paso 3...).

Analiza y discute con tus compañeros:

- a. En la práctica, ¿se pueden graficar todos los pasos de la secuencia?
- b. ¿Es necesario hacer todos los pasos?
- c. En la teoría, ¿se pueden realizar todos los pasos de la secuencia?

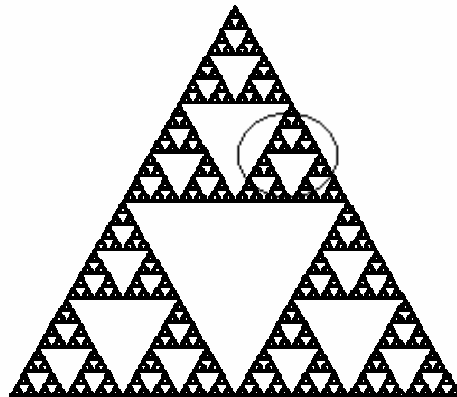
Aunque efectivamente en los procesos desarrollados, sí podemos afirmar que la sucesión de figuras que se genera, se acerca o se parece cada vez más a una cierta figura que llamaremos “**figura límite**”. Así, en el ejemplo 1, la figura límite es precisamente lo que llamaremos el “**triángulo de Sierpinski**”, en el

ejemplo 2 la figura límite es “**la curva de Koch**”, en el ejemplo 3 la figura límite es “**la curva del copo de nieve**” o “**isla de Koch**”.

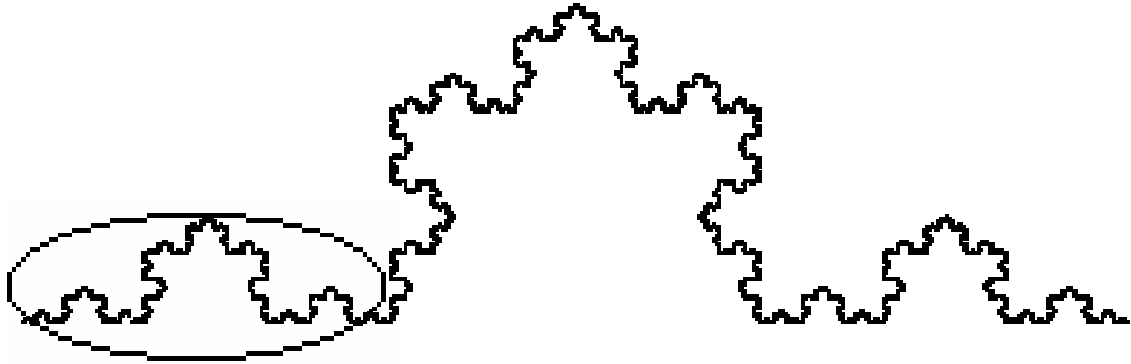
2. Basado en la observación anterior, colócale nombre a la figura de tu fractal.

3. Consideremos nuevamente ejemplos clásicos de fractales; obsérvalos atentamente.

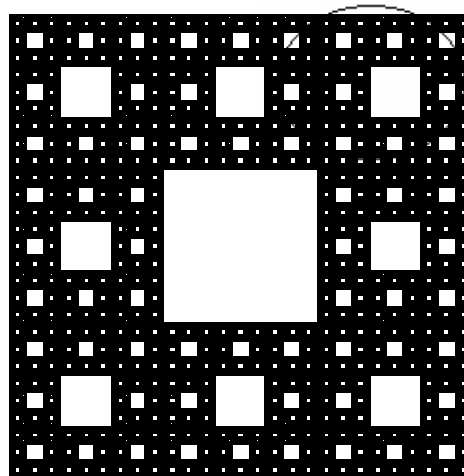
a. **El triángulo de Sierpinski**



b. La curva de Koch



c. La carpeta de Sierpinski



4. Imagina que en cada figura ves con una lupa las regiones que aparecen encerradas en un círculo. ¿Qué figura piensas que observarías a través de lupa? Explica.

5. Analiza la siguiente información: el triángulo de Sierpinski está formado por muchas copias de sí mismo, sólo que reducidas y colocadas en distinta

posición. Por satisfacer el triángulo de Sierpinski las características descritas anteriormente, diremos que él es **AUTOSIMILAR**.

6. La característica que observas en el triángulo de Sierpinski, ¿se puede encontrar también en la curva de Koch y en la carpeta de Sierpinski?. Explica tu respuesta.

7. Aunque en figuras se pueden observar muchas copias reducidas de sí misma, encuentra las “copias más grandes”. Las llamaremos “**COPIAS MAXIMALES**”.

8. Analiza y responde: de cuantas copias maximales están formados los siguientes fractales:

- El triángulo de Sierpinski.
- La curva de Koch.
- La carpeta de Sierpinski.
- El fractal que construiste en el taller 1.

9. Escribe una definición de “Auto similitud” o “figura auto similar”. Si necesitas ayuda, recurre al taller 0, o al punto 5 de este taller y extrae de allí la idea principal.

10. Piensa: ¿todos los objetos fractales son autosimilares?

TALLER 3

TITULO: EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN EL PLANO

(Trabajo en el computador con el lenguaje WinLogo)

OBJETIVO: una vez termines este taller se espera que:

- Conozcas y manipules correctamente los movimientos básicos de la tortuga en el lenguaje WinLogo .
- Apliques estos conocimientos para hacer gráficas de fractales en el computador utilizando este lenguaje.

MATERIALES: para el desarrollo de este taller es indispensable un microcomputador con alguna versión del lenguaje WinLogo instalada. La versión con la cual trabajamos en este taller es la 2.1, además es bueno que tengas una hoja con las instrucciones básicas del lenguaje **WinLogo** anotadas, en caso que no las sepas de memoria.

ACTIVIDADES:

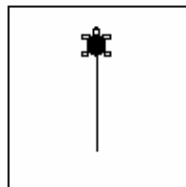
Nota: si ya conoces y manipulas bien los movimientos de la tortuga en el lenguaje WinLogo, empieza tus actividades en el paso 11 de lo contrario desarrolla tu taller siguiendo paso a paso los numerales desde el 1 hasta 18.

1. Prende el computador, busca en el directorio el programa WinLogo, dale clic para abrir, después de unos segundos verás en tu pantalla la tortuguita lista para recibir tus órdenes. Imagina que la pantalla es un tablero donde vamos a dibujar, en esta oportunidad, figuras fractales; y para esto disponemos de una pequeña tortuga que vive en el plano de la pantalla, tiene lápices de colores y se caracteriza por ser muy obediente.

2. La tortuga es capaz de obedecer órdenes expresadas en el lenguaje denominado “**Idioma de la Tortuga**”. La orden **avanza** hace que la tortuga se mueva en línea recta en la dirección hacia donde mira, para indicarle cuanto debe avanzar, la orden **avanza**, debe ir seguida de un número que corresponde a los pasos que avanzará. Por ejemplo, dile a la tortuga que avance 30 de sus pasos, con la instrucción:

avanza 30

ella cumplirá tu orden al oprimir la tecla ENTER; al caminar, la tortuga traza un segmento de recta a medida que se mueve.



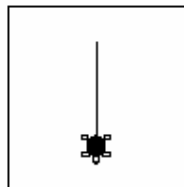
av 30

3. Ensayo: borra la pantalla escribiendo **bp** y oprimiendo la tecla ENTER. Ahora ejercita la orden **avanza** con diferente número de pasos, así descubrirás con cuántos se puede llegar al borde de la pantalla.

4. Otra orden que obedece la tortuga es **retrocede**, lo cual le indica que debe caminar hacia atrás. Como en la orden anterior se requiere informarle con un número, cuántos pasos debe retroceder; escribe por ejemplo:

retrocede 60 <ENTER>

la tortuga caminará hacia atrás 60 pasos dibujando un segmento de recta.



re 60

5. Ensayo: borra la pantalla y pídele a la tortuga que vaya al borde inferior de la misma.

6. Ahora dile que vaya al borde superior.

7. Ensayo con otros valores, observa cuidadosamente el resultado y busca una interpretación al comportamiento de la tortuga.

8. Ahora veamos otras órdenes que modifican la dirección en que mira la tortuga sin afectar la ubicación de la pantalla; **gira derecha** y **gira izquierda** hacen que la tortuga vuelva su mirada en otra dirección. Igual que en **avanza** una orden de giro debe contener un número que indica el ángulo que debe girar la tortuga, medido en grados. Por ejemplo, dale la orden :

gira derecha 45 <ENTER>

la tortuga giró, sin caminar, 45 grados a la derecha, ¿verdad?. Dile ahora:

gira izquierda 60 <ENTER>

¿qué sucedió? Descríbelo. Prueba con otros giros.

Antes de continuar ten en cuenta dos observaciones importantes:

a. Para tener más rápido nuestro proceso de dar órdenes a la tortuga para que haga gráficas, este “**Idioma de la tortuga**” lo podemos escribir en forma abreviada, utilizando en cada caso dos letras así:

Nombre completo	Abreviatura
Borrar pantalla	bp
Avanza	av
Retrocede	re
Gira derecha	gd
Gira izquierda	gi

b. Es posible que al comunicarnos con la tortuga se cometan errores. El más común es el de no dejar un espacio entre el nombre de la orden y el número que determina el movimiento. Por ejemplo, **avanza** es una orden que espera

un número para que se pueda ejecutar; **avanza** es una palabra del lenguaje y así **avanza 50** indica a la tortuga que camine 50 pasos, pero **avanza50** es otra palabra que no tiene sentido en el lenguaje. Cuando por equivocación escribes:

av50

el computador emite un mensaje :

no se como hacer av50

Otras veces olvidamos escribir el número que sigue a la orden. Si por ejemplo escribes **av <RETURN>**, el computador te responde

faltan entradas para av

9. Escribe las siguientes instrucciones y observa:

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| a. bp <RETURN> | b. bp <RETURN> | c. bp <RETURN> |
| gd 90 <RETURN> | gd 60 <RETURN> | gd 150 <RETURN> |
| av 80 <RETURN> | av 100 <RETURN> | av 70 <RETURN> |
| d. bp <RETURN> | e. bp <RETURN> | f. bp <RETURN> |
| gd 180 <RETURN> | gi 60 <RETURN> | gi 60 <RETURN> |
| re 80 <RETURN> | av 80 <RETURN> | av 120 <RETURN> |
| g. bp <RETURN> | h. bp <RETURN> | |
| gi 150 <RETURN> | gi 180 <RETURN> | |
| re 70 <RETURN> | re 180 <RETURN> | |

i. Repite los ejercicios anteriores combinando los valores para giros, derecha o izquierda, y desplazamientos, avanza o retrocede.

10. Con estas instrucciones podemos trazar muchas figuras, para ver un ejemplo, copia el siguiente programa.

bp

av 20

gd 90

av 20

gi 90

av 20

gd 90

av 20

gi 90

av 20

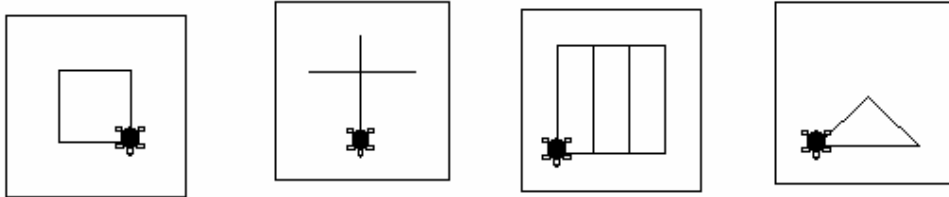
gd 90

av 20 <RETURN>

¿Qué figura se obtiene en la figura pantalla?

11. Cuando necesites que la tortuga avance sin dejar trazo, utiliza la instrucción **sl** (sube el lápiz) y no olvides, para cuando ya desees el trazo, decirle **bl** (baja el lápiz) . Ensayá esas dos instrucciones. (Para resolver cualquier duda que tengas recurre al anexo del taller).

12. Dibuja cada una de las gráficas siguientes: (primero borra la pantalla bp).



13. Haz las gráficas del “paso 1” de los siguientes fractales:

- a. La curva de Koch.
- b. El triángulo de Sierpinski.
- c. La isla de Koch.
- d. La carpeta de Sierpinski.
- e. El fractal que ideaste en el taller 1.

14. A continuación encuentras programas en el lenguaje WinLogo que generan la curva de Koch, la isla de Koch y otras figuras fractales. Cópialos en el computador (no importa que no entiendas claramente la estructura de cada programa, ya que para esto se necesitan algunas instrucciones del lenguaje WinLogo un poco más avanzadas de las que tu conoces, lo importante es que reconozcas las instrucciones para el “paso 1”, lo demás es la forma de lograr las diferentes iteraciones para obtener un determinado paso en el proceso de construcción de la “figura límite” o “fractal”), y... ¡ deléitate observando la forma como la tortuga construye el fractal!.

PROGRAMA 1: Curva de Koch

Para Koch :paso :lado

Si :paso=0 [av :lado alto]

Koch :paso-1 :lado/3

gi 60

Koch :paso-1 :lado/3

gd 120

Koch :paso-1 :lado/3

gi 60

Koch :paso-1 :lado/3

fin

PROGRAMA 2: Pentágono

Para pentágono :paso :lado

haz "contracción (suma 3 raizcuadrada 5)/2

si :paso = 0 [av :lado alto]

gi 36

pentágono :paso-1 :lado/:contracción

gi 72

pentágono :paso-1 :lado/:contracción

gi 72

pentágono :paso-1 :lado/:contracción

gi 72

pentágono :paso-1 :lado/:contracción

gi 72

pentágono :paso-1 :lado/:contracción

gi 72

pentágono :paso-1 :lado/:contracción

gd 36

fin

PROGRAMA 3: Espiral

Para espiral :lado

Si :lado<1 [alto]

av :lado

gd 60

espiral :lado*0.8

fin

PROGRAMA 4: Montaña

Para montaña :paso :lado

si :paso = 0 [av :lado alto]

gi 45

montaña :paso-1 :lado*0.707

gd 90

montaña :paso-1 :lado*0.707

gi 45

fin

para mon :paso :lado

bp sl ponpos [-70 -10]

gd 90

bl

montaña :paso :lado

fin

(Analiza, ¿qué hace el segundo programa? Córrelos por separado para descubrirlo).

PROGRAMA 5: Dragón de Sierpinski

Para dragón :paso :lado :paridad

Si :paso = 0 [av :lado alto]

gi 60*:paridad

dragón :paso-1 :lado/2 -:paridad

gd 60*:paridad

dragón :paso-1 :lado/2 :paridad

gd 60*:paridad

dragón :paso-1 :lado/2 -:paridad

gi 60*:paridad

fin

PROGRAMA 6: Isla de Koch

Para isla :paso :lado

Repite 3[koch :paso :lado gd 120]

Fin

Nota: para que este programa te corra, ya debes haber digitado el de "Koch" (programa 1) pues el de "isla" consiste, como puedes ver, casi exclusivamente en una llamada y ubicación correcta de éste.

15. Analiza: dentro de la estructura del programa encontramos un elemento que es una VARIABLE y se define escribiendo **:nombre**, (se acostumbra a utilizar un nombre que nos haga recordar lo que determina esa variable), por ejemplo en el programa 1 (que dibuja la curva de Koch) las variables son **:paso** y **:lado**. Los **:** deben aparecer cada vez que se usa la variable, colocados inmediatamente antes, sin dejar espacios entre ellos y la variable.

Para ejecutar cada uno de los programas debes dar, además del nombre del programa, valores para las variables de dicho programa; por ejemplo para correr el programa que te gráfica el programa de Koch, escribe

koch 2 120

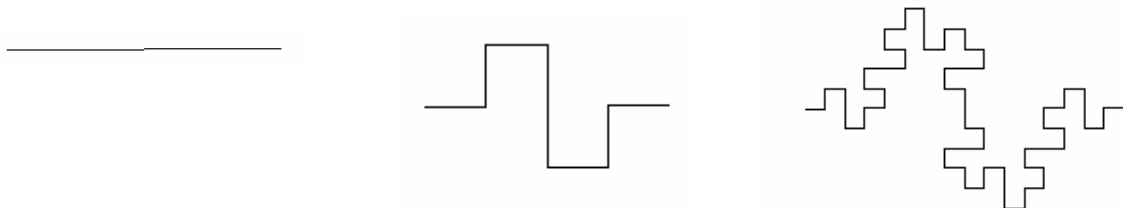
como el programa tiene definidas las variables **:paso** y **:lado**, la tortuga te dibujará la curva de Koch en el paso 2, partiendo de una semilla de longitud de 120 unidades.

Ahora prueba con otro “paso” y otro “lado”, esto es, otra longitud para la semilla.

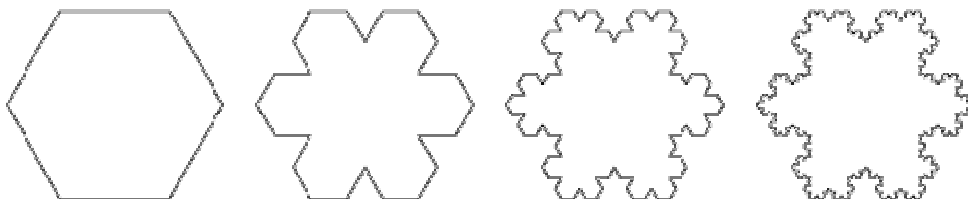
16. Detecta las variables en los demás programas, el qué hacer de cada una y la forma de correrlos.

17. Intenta escribir un programa para generar la figura dada.

a.



b.



18. Ahora haz el programa en lenguaje WinLogo que te grafique el fractal que ideaste en el taller 1.

TALLER 4

TITULO: EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN LA RECTA

(Trabajo con lápiz y papel)

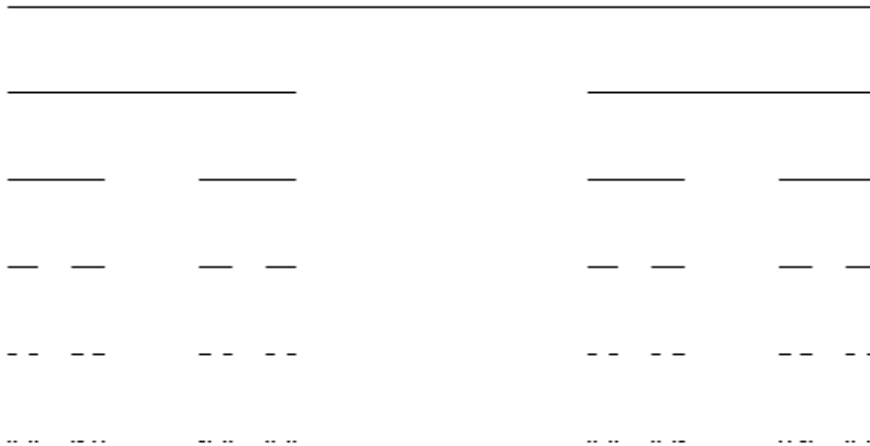
OBJETIVO: Ahora el objetivo es que conozcas un fractal clásico que “vive” en la recta y que se puede obtener con el juego de la semilla y la producción, además se espera que construyas un fractal de este tipo.

MATERIALES: Para este taller necesitas por lo menos dos hojas de papel milimetrado, un lápiz, un borrador y una regla.

ACTIVIDADES:

1. Dibuja un segmento de recta cualquiera. (preferiblemente grande y ojalá por conveniencia, que el valor de su medida sea un múltiplo de tres).
2. Divide dicho segmentos en tres partes iguales.
3. Cuidadosamente haz “desaparecer” (borrar) la parte central.
4. Repite los pasos 2 y 3 sobre cada uno de los segmentos que te han quedado.
5. Repite el paso 4 tantas veces como te sea posible.

6. Observa la siguiente secuencia de pasos en la construcción de un fractal.

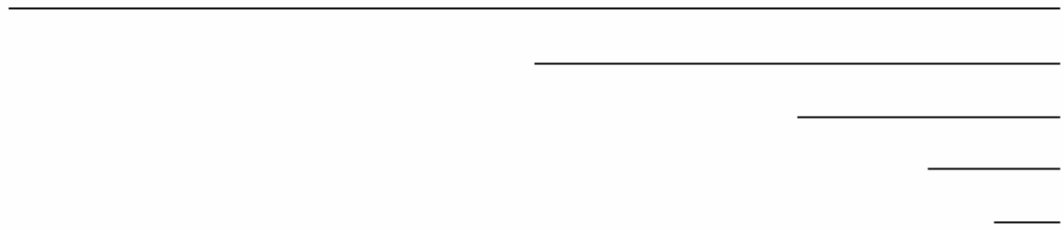


7. Lo que tu hiciste, resultó similar a la grafica anterior? Si es así, acabas de construir el clásico fractal llamado. “**el conjunto ternario de Cantor**”, o simplemente “**conjunto de Cantor**”. Describe como es la semillas, la producción y la figura inicial para el conjunto de Cantor¹⁵.

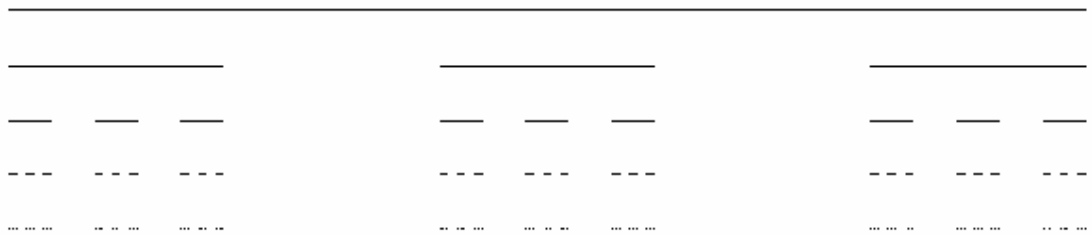
8. Observa, deduce y describe en los siguientes ejemplos la regla de producción.

Ejemplo a:

¹⁵ Cantor (George) . Eminent filólogo y matemático alemán, nacido en San Petersburgo en 1.845. Estudió en Zurich, Berlín y Gotinga , graduándose en 1.869 en la Universidad de Halle, de la que fué profesor de matemática desde 1.879. Se le deben numerosos trabajos sobre la aplicaciones de cálculo diferencial , siendo el fundador de la teoría de conjuntos. El llamado “conjunto de Cantor” fué publicado en 1.883 y emergió como un ejemplo de cierto conjunto excepcional.



Ejemplo b:



9. Una vez identificada la regla de producción en los ejemplos anteriores, gráficelos en el papel milimetrado tomando otra longitud para la semilla (haz observado que en estos casos siempre la semilla es un segmento)

10. ¡Es tu turno te corresponde ahora idear tu propia figura con semilla y producción en la recta (procura que sea “vistosa”). Constrúyela en una de las hojas de papel milimetrado.

TALLER 5

TITULO: EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN LA RECTA

(Trabajo en computador con el lenguaje WinLogo)

OBJETIVO: Pretendemos con este taller, que conozcas y analices la forma como la tortuga del lenguaje WinLogo hace algunos de los **fractales en la recta** que trabajamos en el taller anterior. La idea es que dicho análisis de los programas te lleven a diseñar programas en lenguaje WinLogo para que la tortuga haga los fractales restantes, incluido el de tu creación.

MATERIALES: En esta oportunidad vuelve a ser indispensable el microcomputador y el diskette con el lenguaje WinLogo. Igualmente necesitas los talleres 3 y 4 desarrollados, lápiz, borrador y papel.

ACTIVIDADES:

1. Recuerda con el taller 3, la forma de entrar al lenguaje y todo lo relacionado con los movimientos básicos de la tortuga en el lenguaje WinLogo, además la forma de hacer programas que genera fractales en dicho lenguaje.

2. El siguiente es un programa que genera un fractal con semilla y producción en la recta. Hazle un pequeño “estudio de escritorio” tratando de explicar que hace cada instrucción hasta descubrir que fractal es:

Para XXXX :paso :lado

```
bl si :paso = 0 [av :lado alto]
```

```
XXXX :paso-1 :lado/3
```

```
sl av :lado/3
```

```
XXXX :paso-1 :lado/3
```

```
fin
```

3. Ahora transcribe el programa en el computador y hazlo correr, solo que cada vez que aparezcan las letras XXXX ya puedes escribir la palabra "Cantor" puesto que ya descubriste que el programa es para generar el "Conjunto Ternario de Cantor". En otras palabras transcribe el programa así:

```
Para Cantor :paso :lado
```

```
bl si :paso = 0 [av :lado alto]
```

```
Cantor :paso-1 :lado/3
```

```
sl av :lado/3
```

```
Cantor :paso-1 :lado/3
```

```
fin
```

4. Ensaya varias posiciones iniciales para la tortuga, diferentes valores para ":paso" y diferentes longitudes para ":lado". Si te parece mejor ocultar la tortuga, ubicarla a la izquierda de pantalla, y que además ésta siempre aparezca en la misma posición inicial (por ejemplo: siempre "mirando" a la derecha) sin tener que ubicarla cada vez en dicha posición; transcribe el siguiente programa que hace justamente eso. Observa que "dentro de él" se

llama a Cantor (esta es la forma de ubicar la tortuga sin que se “dañe” el programa).

```
Para Cantor :paso :lado
```

```
bp sl
```

```
ponpos [-70 -10]
```

```
gd 90
```

```
bl
```

```
Cantor :paso :lado
```

```
fin
```

5. También es posible obtener simultáneamente en la pantalla un determinado número de pasos. El siguiente programa (o mejor conjunto de programas) logra dicho efecto.

```
Para Cantor0 :paso0 :lado
```

```
bl si :paso0 = 0 [av :lado alto]
```

```
Cantor0 :paso0-1 :lado/3
```

```
sl av :lado/3
```

```
Cantor :paso0-1 :lado/3
```

```
fin
```

```
Para Cantor1 :paso1 :lado
```

```
bl si :paso1 = 0 [av :lado alto]
```

Cantor :paso1-1 :lado/3

sl av :lado/3

Cantor :paso1-1 :lado/3

fin

Para Cantor2 :paso2 :lado

bl si :paso2 = 0 [av :lado alto]

Cantor :paso2-1 :lado/3

sl av :lado/3

Cantor :paso2-1 :lado/3

fin

Para Cantor3 :paso3 :lado

bl si :paso3 = 0 [av :lado alto]

Cantor :paso3-1 :lado/3

sl av :lado/3

Cantor :paso3-1 :lado/3

fin

Para Cantor4 :paso4 :lado

bl si :paso = 0 [av :lado alto]

Cantor :paso4-1 :lado/3

sl av :lado/3

Cantor :paso4-1 :lado/3

fin

para cantor :paso0 :paso1 :paso2 :paso3 :paso4 :lado

ot bp sl

ponpos [-90 1]

gd 90

bl

Cantor0 :paso0 :lado

sl ponpos [-90 -15]

bl

Cantor1 :paso1 :lado

sl ponpos [-90 -30]

bl

Cantor2 :paso2 :lado

sl ponpos [-90 -45]

bl

Cantor3 :paso3 :lado

sl ponpos [-90 -60]

bl

Cantor4 :paso4 :lado

fin

6. Repite los pasos 2, 3, 4 y 5 pero ahora con el siguiente programa: (ponle el nombre que quieras reemplazando las letras YYYY).

a. sin ubicación especial:

```
Para YYYY :paso :lado
```

```
bl si :paso = 0 [av :lado alto]
```

```
YYYY :paso-1 :lado/2
```

```
sl av :lado/2
```

```
YYYY :paso-1 :lado/300
```

```
fin
```

b. Ubicando la tortuga:

```
Para YYYY :paso :lado
```

```
bp sl
```

```
ponpos [-70 -10]
```

```
gd 90
```

```
bl YYYY :paso :lado
```

```
fin
```

(Observa con atención donde se hace el llamado del programa YYYY)

c. Haz el programa para que aparezcan varios pasos.

7. Haz un programa que genere la figura de la parte b del numeral 8 en el taller 4 (puedes guiarte por el programa "Para Cantor", pues es similar).

8. Analiza y describe en todos los casos la “figura límite” y las “copias maximales” de cada uno de los fractales en la recta ya trabajados.

9. Para terminar elabora un programa que grafique el fractal en la recta que inventaste (paso 10 del taller 4).

TALLER 6

TITULO: EL JUEGO DE LA SEMILLA Y LA PRODUCCIÓN EN EL ESPACIO

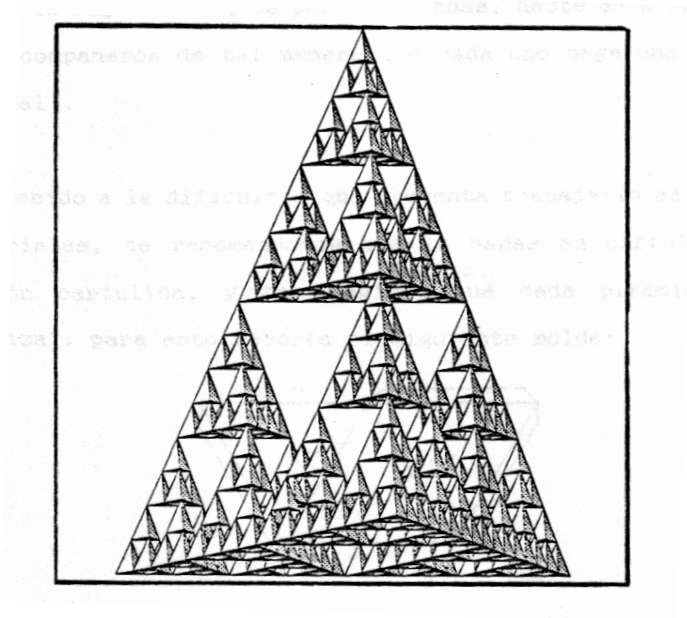
(Fractales en tercera dimensión)

OBJETIVO: para este taller el objetivo es que conozcas y construyas algunos objetos que corresponden a fractales en tercera dimensión.

MATERIALES: escoge entre los siguientes materiales lo que prefieras y necesites para trabajar: pauche, icopor, jabón, cartulina, cartón cartulina, palo de valso, reglas, pegante, bisturí, tijeras, etc.

ACTIVIDADES:

1. Observa la siguiente figura:



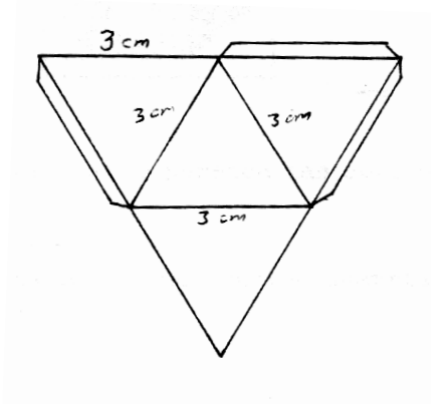
¡Pues ese es el fractal que hiciste en el taller 0 en tercera dimensión y vamos a construirlo nuevamente pero con otro material!

En primer lugar identifica cuál es la **semilla**, cuál es la **producción** y analiza la autosimilitud de este objeto: ¿cuántas **copias maximales** tiene? ¿cuántos pasos se han hecho?.

2. Cuenta el número de pirámides que tiene cada copia maximal.

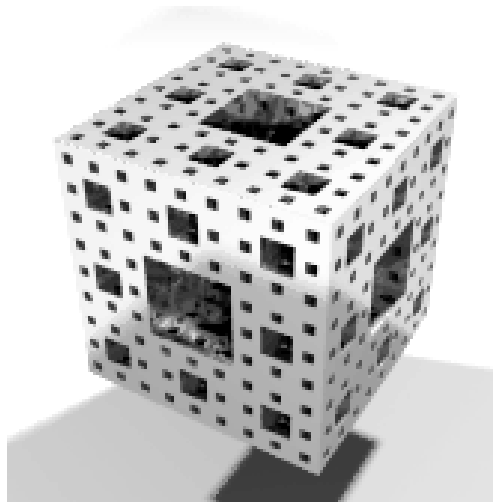
3. Basado en el paso anterior, ¿cuántas pirámides tiene en total la figura? (si te parecen muchas hazte en grupo con tres compañeros de tal manera que cada uno haga una copia maximal).

4. Debido a la dificultad que presenta trabajarlos en otros materiales te recomendamos que lo hagas en cartulina o en cartón cartulina, y te imagines que cada pirámide es “**maciza**” para esto recorta el siguiente molde:



Observa, son 4 triángulos equiláteros de 5 centímetros de lado (si prefieres hazlo de 3 centímetros de lado).

5. Quiebra el molde por las líneas y arma la pirámide uniéndola por las pestañas con pegante. Haz tantas pirámides como necesites.
6. Une las pirámides entre sí como observas en la gráfica de la pirámide de Sierpinski. (Ten en cuenta que son 3 en la base y una en la cúspide).
7. Ahora junta las 4 copias maximales y pégalas. . ¿verdad que se ve genial? ¡y lo haz hecho tu mismo!.
8. Siguiendo todos los pasos anteriores, construye la “Esponja de **Menger**¹⁶” en el paso que aparece a continuación:



9. Elabora en tu cuaderno un boceto de un fractal en tercera dimensión. Trata de llevarlo mínimo hasta el “paso” 3.
10. ¡Construye tu propio fractal con el material que prefieras! (Puedes incluso colorearlo para darle mayor vistosidad).

⁷ Presentada por el matemático austriaco **Karl Menger** en 1.926.

TALLER 7

TITULO: TRANSFORMACIONES AFINES EN LA RECTA

(Bases teórico-matemáticas y trabajo con lápiz y papel)

OBJETIVOS: Mediante el desarrollo de este taller conocerás algunas bases teórico-matemáticas de los “fractales en la recta” que trabajaste en forma mas o menos “empírica” en el taller 4.

MATERIALES: Algunos libros de matemáticas de grado 9 o 10 para consulta, hoja de papel milimetrado, lápiz, regla, borrador y el taller 4 ya desarrollado.

ACTIVIDADES: ¡Alístate, ahora si entras en el “mundo matemático de los fractales”, descubre una manera de generarlos y su comportamiento bajo diferentes transformaciones.

1. Busca en cualquier libro de matemática (9º grado) todo lo relacionado con la **función lineal** y anota en tu cuaderno los siguientes tópicos:
 - a. ¿Cuándo una relación es función?
 - b. ¿Cuál es la forma general de la función lineal?
 - c. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de una función?
 - d. ¿Qué es una función lineal real?
 - e. ¿Cómo es la grafica de una función lineal real? Haz mínimo tres ejemplos.

2. A partir de este momento de este momento, a todas las “funciones lineales “ de la forma $f(x) = ax+b$, la llamaremos **transformaciones afines en la recta**.

Ahora centraremos la atención en los efectos geométricos que produce una transformación afín sobre un intervalo cerrado. Grafica en tu cuaderno tres de las siguientes transformaciones afines; pero tomando como dominio solo el intervalo cerrado $[0,1]$

a. $f(X) = 3X$

e. $k(X) = 5$

b. $f(X) = (1/2)X + 1$

f. $l(X) = -2X + 3$

c. $f(X) = -X + 2$

g. $m(X) = X - 1/2$

d.. $f(X) = (1/3)X - (2/3)$

h. $n(X) = -(1/4)X$

3. Analiza atentamente el intervalo “recorrido” o “imagen” de cada una de las transformaciones que escogiste en el punto anterior y describe su efecto geométrico sobre el intervalo “dominio”.

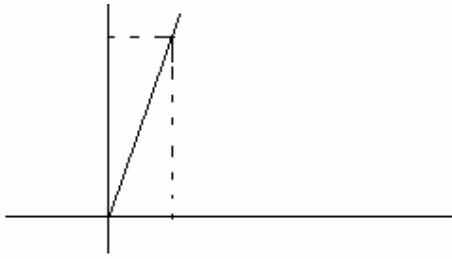
A manera de ejemplo, observa el desarrollo del primer ejercicio:

a. Ecuación: $f(X) = 3X$

Tabla de valores:

X	0	1
f(X)	0	3

Gráfica: $F(X)= 3X$

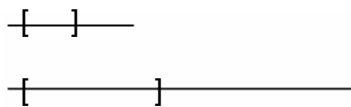


Luego (observando los intervalos dominio y recorrido) tenemos: $f[0,1] = [0,3]$.

Esta transformación también la podemos representar gráficamente en la siguiente forma que llamaremos “bi-espacial”:



ó



Descripción del efecto geométrico: “la transformación f hace una dilatación del intervalo en tres unidades (o un re-escalamiento con factor de escala 3).

De la misma forma realiza los ejercicios que tu escogiste.

4. Repite el numeral 3 pero esta vez tomando como dominio de la función el intervalo $[2,3]$.

5. Teniendo en cuenta lo realizado anteriormente, analiza y discute cada una de las afirmaciones que se hacen en la siguiente generalización.

--Una transformación afín en la recta es de la forma $f(x)=ax+b$ donde a y b son constantes reales.

-- La constante a determina el *cambio de escala* y la constante b determina el *desplazamiento*

-- Si el valor absoluto de a es menor que 1 ($|a|<1$), la transformación afín hace una “*contracción*” .

-- Si el valor absoluto de a es mayor que 1, ($|a| > 1$) , la transformación afín hace una “*dilatación*”.

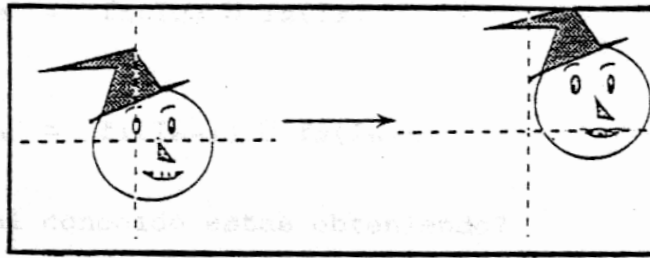
-- Si el valor absoluto de a es igual a 1, ($|a|=1$), no hay ni dilatación ni contracción.

-- Cuando a es negativo, esto es, $a<0$ la transformación afín hace una “*reflexión*” respecto al origen.

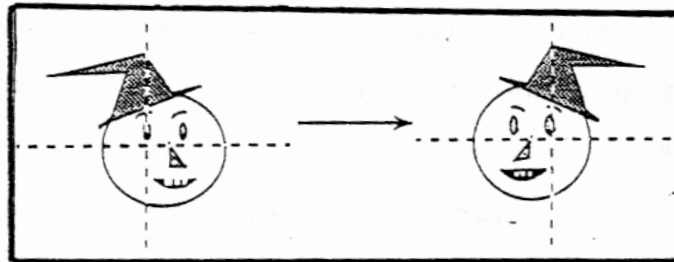
-- Si la constante b es positiva esto es, $b>0$ hay un *desplazamiento* de b unidades hacia la derecha.

-- Si la constante b es negativa, esto es, $b<0$ la transformación hace un *desplazamiento* de b unidades hacia la izquierda.

El siguiente cuadro es una demostración de dos de estos movimientos sobre la cabeza del payaso. Obsérvalos atentamente e intenta dar valores aproximados para las constantes a , b , c , d , e , f en cada caso. (Tu escoge la unidad de escala)



Traslación de _____ unidades hacia _____



Reflexión respecto al eje _____

6. Describe el efecto geométrico de las siguientes transformaciones afines

$$F_1(X) = (1/3)X \quad \text{y} \quad F_2(X) = (1/3)X + (2/3)$$

7. Partiendo de las anteriores transformaciones afines y tomando $i_0 = [0,1]$

(intervalo inicial), gráfica el siguiente conjunto:

$$i_1 = F_1(i_0) \cup F_2(i_0)$$

8. Ahora gráfica $i_2 = F_1(i_1) \cup F_2(i_1)$

9. Organiza, desarrolla y grafica la siguiente secuencia:

$$\text{Paso 0} = i_0 = [0,1]$$

$$\text{Paso 1} = i_1 = F_1(i_0) \cup F_2(i_0)$$

$$\text{Paso 2} = i_2 = F_1(i_1) \cup F_2(i_1)$$

Paso 3 = $I_3 = F_1(I_2) \cup F_2(I_2)$

.

.

.

Paso n = $I_n = F_1(I_{n-1}) \cup F_2(I_{n-1})$

¿Qué fractal conocido estas obteniendo?

10. ¡Correcto!, es el famoso “conjunto ternario de Cantor” que trabajaste en el taller 4; así las transformaciones afines $F_1(x) = (1/3)x$ y $F_2(x) = (1/3)x + (2/3)$ proporcionan una herramienta matemática para generar el “conjunto de Cantor”.

Ahora, para cada fractal trabajado en el taller 4, incluyendo el que tu mismo ideaste, vas a identificar las transformaciones afines que lo generan.

TALLER 8

TITULO: TRANSFORMACIONES AFINES EN EL PLANO

(Presentación cartesiana)

OBJETIVO: con este taller se espera que incursiones en las bases teórico-matemáticas que permiten la construcción de fractales en el plano, identificando la forma cartesiana de las transformaciones afines en el plano y su efecto geométrico.

MATERIALES: para el desarrollo de este taller necesitas uno o Varios libros de consulta que contengan el tema de matrices cuadradas de orden 2×2 , hojas de papel milimetrado, regla, lápiz y borrador.

ACTIVIDADES:

1. Empieza desarrollando en tu cuaderno o en las hojas cuadradas, la siguiente consulta bibliográfica:

- k. ¿Qué es un arreglo matricial o matriz?
- l. ¿Cuál es el orden de una matriz?
- m. ¿Cuándo un arreglo matricial es un vector?
- n. ¿Qué es una matriz cuadrada?
- o. ¿Qué es una matriz de orden 2×2 ? Escribe ejemplos.
- p. ¿Cuándo dos matrices de orden 2×2 son iguales? Escribe ejemplos.

- q. ¿Cómo se suman algebraicamente matrices de orden 2X2?. Escribe ejemplos.
- r. ¿Cómo se multiplican una matriz de orden 2X2 por un vector 2X1?. Escribe ejemplos.
- s. ¿Qué es una matriz nula?. Escribe ejemplos.
- t. ¿Qué es una matriz identidad?. Escribe ejemplos.

Nota: observa que no nos interesa profundizar mucho sobre matrices de cualquier orden, nos interesan específicamente las matrices de orden 2x2. Debes lograr que todos los conceptos anteriores estén totalmente claros antes de continuar.

2. Una transformación afín en el plano es una función de la forma $T(X)=AX+W$, (notación matricial) donde A es una matriz de 2x2, X es el vector variable y W es el vector desplazamiento. En otras palabras, una transformación afín en el plano es de la forma:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Donde a, b, c, d, e, f son constantes reales.

Veremos que este tipo de transformaciones producen diferentes efectos geométricos como: cambios de escala, reflexiones, giros, desplazamientos, etc.

Así da tres ejemplos de transformaciones afines en el plano, encontrando las imágenes (efectuando las operaciones) de diferentes vectores o puntos del plano.

3. Describe el efecto geométrico de las siguientes transformaciones en el plano, sobre la figura (barquito) que tiene como vértices los puntos (0,0), (4,0), (6,2), (2,2), (-2,2), (2,4), (2,6) y (4,5):

a. $T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

b. $T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

c. $T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

d. $T_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

e. $T_5 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

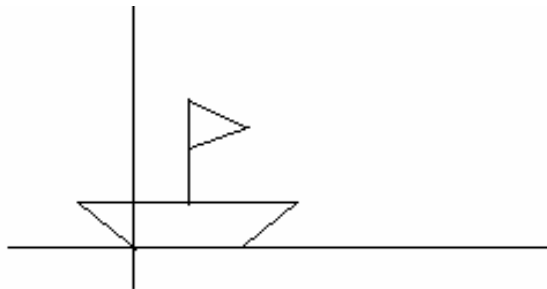
A manera de ejemplo observa atentamente el desarrollo del numeral a:

a. Transformación afín:

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Gráfica de la figura inicial:

Vértices: (0,0),
 (4,0), (-2,2), (2,2),
 (6,2), (2,4), (4,5),
 (2,6).



Hallando los puntos imágenes: tomamos cada uno de los puntos vértices de la figura inicial y les aplicamos dicha transformación así:

- para el punto (-2,2) tenemos

$$T \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (-2,2) después de la transformación es (0,3).

- para el punto (0,0) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (0,0) después de la transformación es (1,2).

- para el punto (4,0) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (4,0) después de la transformación es (3,2).

- para el punto (6,2) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (6,2) después de la transformación es (4,3).

- para el punto (2,2) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (2,2) después de la transformación es (2,3).

- para el punto (2,4) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (2,4) después de la transformación es (2,4).

- para el punto (4,5) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9/2 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (4,5) después de la transformación es (3,9/2).

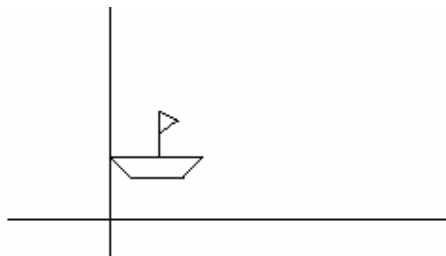
- para el punto (2,6) tenemos:

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Luego el punto correspondiente a (2,6) después de la transformación es (2,5).

Gráfica de la figura ya transformada.

Vértices: (1,2), (3,2), (0,2), (2,3), (4,3), (2,6), (3,1/2), (2,5)



Descripción del efecto geométrico de la transformación:

“El barquito fue reducido según un factor de escala de $\frac{1}{2}$ y desplazado una unidad hacia la derecha y dos unidades hacia arriba”.

(Observa que el barquito no sufrió ninguna reflexión ni ninguna rotación).

Nota: de la misma forma anterior, desarrolla uno de los ejercicios restantes. Ten especial cuidado en la descripción del efecto geométrico de la transformación.

4. Lee, analiza y verifica en los ejemplos que acabas de desarrollar, cada una de las afirmaciones que se hacen en la siguiente generalización:

▪ “Una matriz de forma: $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ hace:

I) Si $k > 1$, una **dilatación** con factor de escala k

II) Si $0 < k < 1$, una **contracción** con factor de escala k

III) Si $-1 < k < 0$, una contracción de escala $|k|$ seguida de una reflexión respecto al origen.

IV) Si $k < -1$, una dilatación con factor de escala $|k|$ seguida de una reflexión respecto al origen.

V) Si $k = 0$, se tiene la transformación **nula**. (todo se convierte en el punto (0,0)).

VI) Si $k = 1$, se tiene la transformación **idéntica**. (todo queda igual).

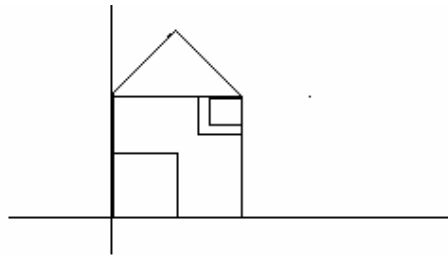
▪ Además, si la matriz es $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ésta hace una reflexión respecto al

eje Y; o si la

matriz es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ lo que se tiene es una reflexión respecto al eje X.

- Si en la transformación afín hay un vector de desplazamiento $W = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ entonces la figura se desplaza $|e|$ unidades en sentido horizontal (¿cuándo a la derecha?, ¿Cuándo a la izquierda?) y $|f|$ unidades en sentido vertical (¿cuándo hacia arriba?, ¿cuándo hacia abajo?).

5. Dibuja y describe como queda la casita después de cada una de las transformaciones dadas (escoge una). Las coordenadas de los vértices de la casita son: (0,0), (1,0), (0,1), (1,1) y (1/2,3/2). (la puerta y la ventana simplemente dibújalas sin necesidad de saber las coordenadas de sus vértices).



a. $T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. $T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

c. $T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

d. $T_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

e. $T_5 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

f. $T_6 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

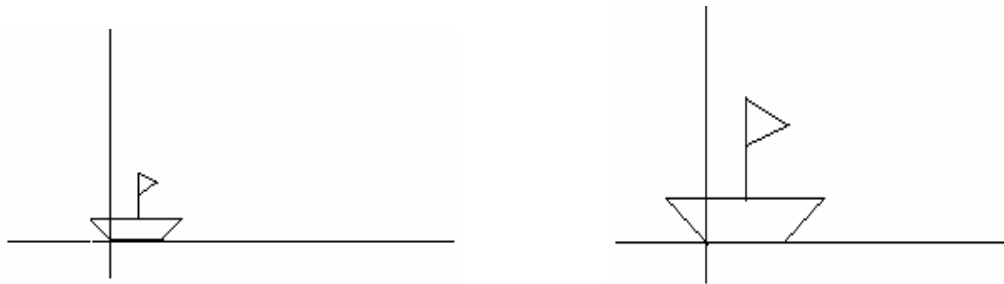
g. $T_7 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

h. $T_8 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

6. Encuentra la transformación afín que convierte la figura de la izquierda en la figura de la derecha:

a. Vértices figura izquierda: (0,0), (2,0), (-1,1), (1,1), (1,3), (1,2), (2,5/2), (1,3).

Vértices figura derecha: (0,0), (6,0), (-3,3), (3,3), (9,3), (3,6), (6,15/2), (3,9).

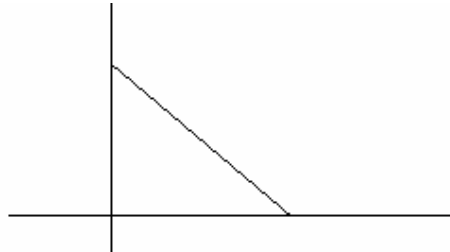


b. Vértices figura izquierda: (0,0), (1,0), (0,1), (1/2, 3/2).

Vértices figura derecha: (1/2,0), (3/2,0), (1/2,-1), (3/2,-1), (1,-3/2).



7. Para el triángulo de la figura considera las siguientes transformaciones afines: vértices de la figura (0,0), (1,0), (0,1).



$$F_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$F_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

- Describe (solo mirándolas), el efecto geométrico de cada transformación.
- Dibuja en un mismo plano cómo queda el triángulo al aplicarle F_1 , F_2 , F_3 . Llama A_1 a la figura que obtienes.
- Dibuja en otro plano, como queda A_1 al aplicarle F_1 , F_2 y F_3 . Llama A_2 a la figura que obtienes.
- Si repites el proceso anterior, varias veces, ¿qué estás obteniendo?

8. Inventa una figura y un conjunto de cinco transformaciones, para trabajar como en el numeral cinco, luego intercámbiala con uno de tus compañeros; tu resolverás lo que el haya ideado y él deberá desarrollar la tuya. ¡Suerte!
(¡ojo! No pongas una transformación sin tener al menos una idea del efecto geométrico que está produce).

TALLER 9

TITULO: TRANSFORMACIONES AFINES EN EL PLANO

(Presentación geométrica)

OBJETIVO: para cuando termines el desarrollo de este taller se espera que identifiques la forma geométrica de las transformaciones afines en el plano, las relaciones con la forma cartesiana e interpretes correctamente el efecto geométrico de cada uno de los parámetros que intervienen en la presentación geométrica.

MATERIALES: para llevar a cabo este taller ten a la mano tu cuaderno de apuntes, escuadra, transportador, lápiz, borrador y hojas cuadriculadas o milimetradas.

ACTIVIDADES:

1. Lee, analiza y discute la siguiente afirmación: “además de notar las transformaciones afines en el plano con su presentación cartesiana, es posible (y a veces más práctico) notarlas con su forma geométrica, ésta es:

$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -s \sin \phi \\ r \sin \theta & s \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Donde cada uno de los parámetros r , s , θ , ϕ , e y f se interpretan así:

r indica el cambio de escala en el eje X ;

s indica el cambio de escala en el eje Y;

θ indica el giro sobre el eje X;

ϕ indica el giro sobre el eje Y;

e indica el desplazamiento sobre el eje X o desplazamiento horizontal;

f indica el desplazamiento sobre el eje Y o desplazamiento vertical.

2. Encuentra las equivalencias o relaciones de la forma geométrica con la forma cartesiana trabajada en el taller anterior:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$a = ? \quad b = ? \quad c = ? \quad d = ? \quad e = ? \quad f = ?$$

3. Si tomamos $r = s$ y $\theta = \phi$, representa la transformación (reemplaza los datos) y discute su efecto.

4. Describe el efecto de la transformación si además de lo anterior se cumple que:

c. $r = 1$.

d. $r = s$ y $\theta = \phi = 0$.

5. Analiza las siguientes definiciones:

a. una **similitud directa** es una transformación afín de la forma:

$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

b. una **similitud no directa** es una transformación afín de la forma:

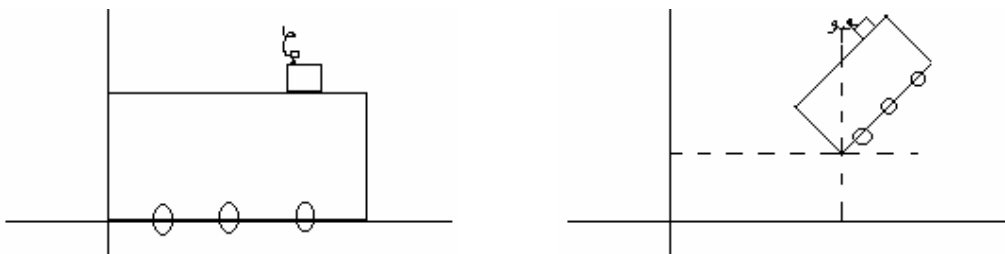
$$W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \sin \theta & -r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

En ambos casos, r lo llamaremos el **factor de escala de la similitud**.

Basándote en las definiciones anteriores, en tu cuaderno, describe el efecto de una similitud directa y el de una similitud no directa; da mínimo tres ejemplos de cada una.

6. ¿Cuál es el efecto de una transformación si es una similitud directa y se tiene que $r=1$, $\theta = \pi/2$ y $e = f = 0$ (reemplaza los parámetros y luego describe lo que resulta).

7. Encuentra la transformación afín que convierte la figura de la izquierda en la figura de la derecha:



8. Encuentra la forma geométrica de la transformación afín que convierte el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ en el triángulo de vértices $(-1,1)$, $(2,1)$ y $(3,2)$.

9. Para el triángulo de Sierpinski del taller 8 se necesitan tres transformaciones afines, (una para cada copia maximal). Estas tres transformaciones w_1 , w_2 , w_3 las podemos describir en pantalla así:

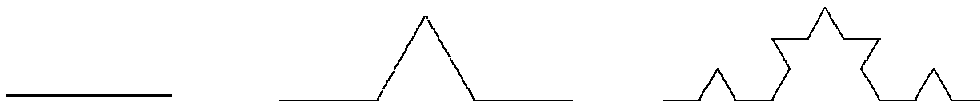
w_1 Hace una reducción con factor de escala $r = \frac{1}{2}$.

w_2 : Hace una reducción con factor de escala $r = \frac{1}{2}$ y luego desplaza $\frac{1}{2}$ a la derecha.

w_3 : Hace una reducción con factor de escala $r = \frac{1}{2}$ y luego desplaza $\frac{1}{2}$ hacia arriba.

Identifica para cada una de dichas transformaciones los parámetros r , s , θ , ϕ , e y f de su presentación geométrica. ¡observa que las tres transformaciones son similitudes!

10. Recuerda la sucesión de figuras que generan la curva de Koch:



a. ¿Cuántas transformaciones afines se necesitan para generar la curva de Koch? (Recuerda que cada transformación corresponde a una copia maximal).

b. Describe en palabras el efecto geométrico de cada transformación. A manera de ejemplo observa la siguiente descripción: “una de las transformaciones (¿cuál?) hace: una contracción con factor de escala $\frac{1}{3}$, un giro de -60° , un desplazamiento hacia la derecha de $\frac{1}{2}$ y un desplazamiento hacia arriba de $\frac{\sqrt{3}}{6}$.”

c. Identifica para cada una de las transformaciones anteriores los parámetros r , s , θ , ϕ , e y f de su presentación geométrica. ¿son similitudes? Justifica.

TALLER 10

TITULO: SISTEMAS ITERATIVOS DE FUNCIONES (SIF)

(Bases teórico-matemáticas)

OBJETIVO: cuando finalices el desarrollo de este taller debes identificar lo que llamaremos un “sistema iterativo de funciones”, SIF, y reconocer el atractor en algunos SIF's.

MATERIALES: en esta oportunidad solo necesitas los elementos básicos de dibujo como son cuaderno, lápiz, borrador, etc. Y un diccionario.

ACTIVIDADES:

1. Busca en el diccionario el significado matemático de los siguientes términos y anótalos en tu cuaderno pero con tus palabras:

- a. sistema;
- b. iterativo;
- c. función.

2. El siguiente es un sistema iterativo de funciones, SIF, que genera la curva de Koch: $\{ A_0, w_1, w_2, w_3 \}$ donde $A_0 = [0,1]$

$$w_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$w_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/3)\cos 60^\circ & (-1/3)\text{sen}60^\circ \\ (1/3)\text{sen}60^\circ & (1/3)\cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/3)\cos(-60^\circ) & (-1/3)\text{sen}(-60^\circ) \\ (1/3)\text{sen}(-60^\circ) & (1/3)\cos(-60^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{bmatrix}$$

$$w_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Define basado en el ejemplo anterior, ¿qué es el SIF de una figura fractal dada?

3. para el SIF anterior grafica la siguiente secuencia de figuras:

$$\text{paso } 0 = A_0 = [0,1]$$

$$\text{paso } 1 = A_1 = w_1(A_0) \cup w_2(A_0) \cup w_3(A_0) \cup w_4(A_0)$$

$$\text{paso } 2 = A_2 = w_1(A_1) \cup w_2(A_1) \cup w_3(A_1) \cup w_4(A_1)$$

4. ¿A que fractal conocido corresponde el siguiente sistema iterativo de funciones?

$\{ A_0, f_1, f_2 \}$ donde $A_0 = [0,1]$, y las transformaciones afines f_1 y f_2 son:

$$f_1(X) = (1/3)X \text{ y } f_2(X) = (1/3)X + (2/3).$$

Nota: observa que en todos los SIF's que hemos utilizado para generar figuras fractales, las transformaciones afines que intervienen son "contractoras", es decir con factor de escala entre cero y uno.

5. La siguiente es la estructura general de un proceso para la elaboración de una figura fractal: $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ son transformaciones afines contractoras.

A_0 es la semilla (figura inicial) y se construye la secuencia de figuras:

$$A_1 = w_1(A_0) \cup w_2(A_0) \cup w_2(A_0) \cup \dots \cup w_n(A_0)$$

$$A_2 = w_1(A_1) \cup w_2(A_1) \cup w_2(A_1) \cup \dots \cup w_n(A_1)$$

.

.

.

$$A_n = w_1(A_{n-1}) \cup w_2(A_{n-1}) \cup w_2(A_{n-1}) \cup \dots \cup w_n(A_{n-1})$$

Esta secuencia $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ tiende a lo mismo que ya hemos llamado figura límite, y que de ahora en adelante notaremos A y llamaremos ATRACTOR del sistema iterativo de funciones.

Basado en lo anterior, define: ¿qué es el atractor de un SIF?

6. Dado el siguiente sistema iterativo de funciones, realiza (grafica) el proceso descrito en el numeral 4 con cada uno de los A_0 , hasta visualizar claramente el atractor: $\{A_0, w_1, w_2, w_3\}$ donde

$$w_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$w_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

a. A_0 = triángulo relleno con vértices (0,0), (1,0), y (0,1).

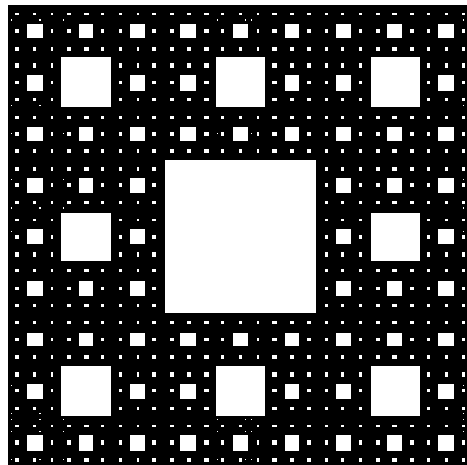
b. A_0 = Cuadrado relleno con vértices (0,0), (1,0), (0,1) y (1,1).

7. ¿Qué observación importante puedes hacer con respecto a los atractores (figuras límites), que graficaste en el punto anterior?

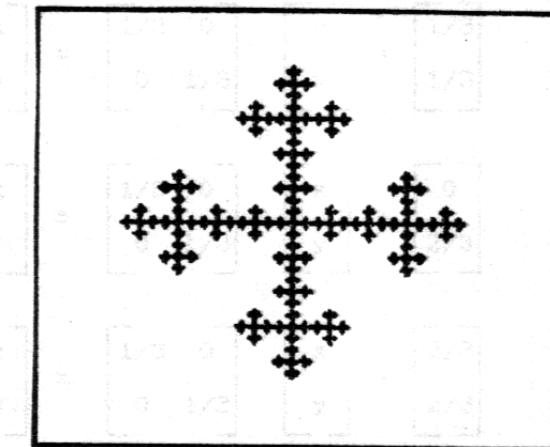
8. Describe la estructura común de cualquier sistema iterativo de funciones,
 $SIF = \{ A_0, w_1, w_2, w_3 \}$

9. Identifica el SIF para los siguientes fractales (atractores):

a. Carpeta de Sierpinski



b. Curva de Vicsek



10. Analiza y responde en tu cuaderno cuál es el A_0 (figura inicial) y cuántas son las transformaciones afines (w_i), para los siguientes fractales en tercera dimensión:

a. Esponja de Menger (numeral 8 del taller 6)

b. Pirámide de Sierpinski (numeral 1 del taller 6)

11. ¿Cuál es el atractor correspondiente al siguiente SIF: (haz la grafica)

SIF = $\{ A_0 ; w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \}$ donde:

A_0 = cuadrado relleno de vértices (0,0), (1,0), (0,1) y (1,1).

$$w_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$w_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$w_4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$w_5 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

12. Identifica y escribe en tu cuaderno el SIF para los fractales que se han trabajado en los diferentes talleres (incluyendo los que has inventado).

TALLER 11

TÍTULO: UN PROGRAMA PARA GRAFICACIÓN DE FRACTALES LINEALES.

OBJETIVO: con este taller se pretende que aprendas a manejar uno de los mejores programas en español existentes hasta ahora en nuestro medio sobre “fractales”, y puedas aplicar varios de los conocimientos adquiridos hasta el momento para manipular y crear figuras fractales mediante transformaciones afines. Este programa ha sido creado por Fernando Pérez A¹⁷.

MATERIALES: para desarrollar este taller necesitas contar con un microcomputador compatible I.B.M., un diskette con el programa “Fraclin” de Fernando Pérez, todos los talleres desarrollados, cuaderno, lápiz y borrador, etc.

ACTIVIDADES:

1. Prende el computador y busca en el directorio el programa “fraclin” (que debe estar instalado previamente), dale click para abrir, ahí te saldrán muchos archivos busca fraclin aplicación dale click, esto te abrirá el programa presentándote la pantalla de trabajo.

¹⁷ “Fraclin” es una versión mejorada, por el mismo autor, de un programa llamado “Fractales” que fué diseñado en el Departamento de Física de la Universidad de Antioquia durante 1.991 como parte de un curso de simulación de procesos físicos y matemáticos en computador.

Fraclin (fractales lineales) es un programa que dispone de cinco menús diferentes que se manejan con las flechas del cursor, instrucciones de manejo básico, ayuda en línea sensible al contexto y protecciones para evitar bloqueos por errores de entrada de entrada por teclado del usuario.

Los menús se denominan Demo, Ecuaciones, Pantalla, Graficar y Archivo, los cuales vamos a describir un poco a continuación:

En el menú "Demo", se encuentra una lista de los fractales que pueden ser graficados inmediatamente pulsando ENTER sobre el nombre de la figura que se quiera observar.

En el menú "Ecuaciones", están las diferentes alternativas de manipulación matemática que el programa ofrece: ver el conjunto de funciones con que se está trabajando, introducir uno nuevo a gusto del usuario para ser graficado y estudiado y alterar algún parámetro en las ecuaciones.

El menú "Pantalla" ofrece control sobre la visualización de las gráficas, permitiendo que región del plano XY se desea ver, y que porción de la pantalla se usa para graficar.

La opción “Graficar” permite obtener la imagen de las ecuaciones de una figura con se esté trabajando, para evaluar el efecto de algún cambio en éstas o en el formato de pantalla empleado.

El menú “Archivo” desde esté es posible grabar las ecuaciones de una figura cualquiera, para ser posteriormente recuperadas.

2. Ya conoces las funciones de cada menú del programa Fraclin, ahora nos vamos a su contenido como tal:

a. Empieza por visualizar muy bien las figuras fractales clásicas que trae el programa, intenta ver con cuantas iteraciones mínimo es clara la figura, ¿qué ganas al dejar que se hagan muchas iteraciones.

b. Entra a la ventana ECUACIONES y reconoce las transformaciones afines que generan cada uno de los fractales en DEMO. Observa que a cada transformación Fraclin le asigna un color diferente. Al graficar la figura, ¿qué relación existe entre las “copias maximales”, las transformaciones y los colores?.

c. En la ventana ECUACIONES, entra a la opción editar, varía algunos parámetros de las transformaciones y luego grafica. Hazlo hasta obtener otra figura que sea muy vistosa. Graba e imprime dicha figura poniéndole el nombre que quieras.

d. varía los parámetros de diferentes transformaciones, tratando de predecir lo que le pasará a la figura fractal.

e. Escoge al menos dos de las figuras fractales trabajadas a lo largo de los talleres, que se puedan obtener mediante transformaciones afines en el plano y que no estén incluidas en la ventana DEMO, (por ejemplo las del numeral 8 del taller 10) y usando la opción CREAR, inserta en el programa las debidas transformaciones para generar estas figuras.

f. Por último genera el fractal que ideaste en el taller 1. Grábalo e imprímelo ¡ese es sólo tuyo! ¡felicitaciones!.

OBSERVACIONES

- En el desarrollo de los talleres se recomienda realizar actividades creativas y lúdicas que despierten el interés por el aprendizaje y hagan del conocimiento del área de matemáticas un conocimiento para todos.
- Para el desarrollo y aplicación de la geometría fractal en el bachillerato, el modelo de Van Hiele, es un modelo metodológico que contribuye a la orientación en la comprensión e interiorización de los conceptos, ya que por medio de los niveles de razonamiento el estudiante va adquiriendo los conocimientos de acuerdo con su edad y las fases de aprendizaje son un apoyo para el profesor en el momento de realizar las actividades.
- Por la forma como se elaboraron los talleres, se observó que en ellos no se encontraba la fase de aprendizaje de explicitación, sin embargo esta fase puede quedar a iniciativa del docente. Por otra parte, los talleres están diseñados para el alcance de los dos primeros niveles de razonamiento (Reconocimiento y análisis).

CONCLUSIONES

- Al finalizar estos talleres los estudiantes reconocen una nueva geometría que no estaba en su contexto, la “geometría fractal”, por medio de la cual se puede modelar fenómenos de la naturaleza que no están lejos de ellos, sabiendo que hay más información por conocer y que esto es una pequeña introducción a lo que es la geometría fractal.
- Con el desarrollo de estos talleres se observó que en general los estudiantes ante temas nuevos presentan interés, pero que se desaniman rápidamente si no se les da una buena orientación.
- En los talleres 1 y 2 es preciso presentarles a los estudiantes más ejemplos para que puedan tener una visión más amplia de los fractales y sus propiedades.
- Las dificultades que los estudiantes presentaron en el desarrollo de estos talleres, se manejaron haciendo refuerzos con la ayuda de los mejores estudiantes, hasta lograr que al menos la mayoría cumplieran con el objetivo propuesto puesto que según el modelo de Van Hiele un estudiante no puede pasar de un nivel a otro sin haber superado el anterior.

- En la mayoría de los talleres se alcanzaron los niveles de reconocimiento y análisis, descritos en el modelo de Van Hiele. En ningún taller se lograron los otros niveles: clasificación, deducción formal y razonamiento rigurosamente deductivo. Esto corresponde a lo que usualmente ocurre a nivel de secundaria.

- En los últimos talleres se necesitó de la intervención y exposición tradicional de la profesora, ya que en estos talleres se trabajaron las bases teórico-matemáticas de los fractales y se notó que los estudiantes no avanzaban en el desarrollo de estos.

- En general los estudiantes presentaron dificultad para dar definiciones exactas de algunos términos empleados en los talleres, pero tenían la idea intuitiva de lo que se trataba y con esto se podía trabajar.

- El profesor debe estar atento en mantener el interés de los estudiantes en cada uno de los talleres, para que el desarrollo de estos no se haga monótona, ya que son doce talleres y algunos de ellos muy son largos. En particular los talleres 8, 9 y 10 debido al contenido teórico un poco denso, obliga a recurrir a las explicaciones tradicionales por parte del profesor.

- La actividad de construir la pirámide de Sierpinski, hasta el cuarto paso, se puede complementar y aprovechar mejor formulando preguntas como las siguientes:
- ¿cuántas pirámides se construyeron para los pasos 0, 1, 2, 3 y 4?
 - Deduzca cuántas pirámides se deben construir para los pasos 5 y 6 y cuántos para el paso n .
 - ¿cuántos vértices observas en cada paso? ¿encuentras alguna relación?

También se pueden hacer preguntas análogas con el número de vértices, longitud de las aristas, áreas laterales, volúmenes.

Estas preguntas también se pueden formular para la esponja de Menger.

- Frente a los resultados obtenidos durante el desarrollo de este trabajo y a la existencia de otros trabajos en el mismo sentido, surge la inquietud por conformar un grupo con estudiantes de diferentes instituciones de fractales y recopilar en un libro los trabajos mencionados.

BIBLIOGRAFÍA

BARBOSA, Ruy Madsen. Descubriendo a geometría fractal para a sala de aula. Autentica editora, Bela Horizonte, 2002.

CASTRO, Fabiola. Geometría fractal en el bachillerato. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 1994 (Monografía).

COBOS, Jenny. Introducción a la geometría fractal. Básica primaria. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 2002 (Monografía).

COGOLLO, Joanne. Diseño de actividades con base en el modelo de Van Hiele para el aprendizaje de trapecios, circunferencias y el área del rectángulo, cuadrado y triangulo en cuarto grado de primaria. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 1999 (Monografía).

DAZA, Carlos. Geometría Fractal en el Bachillerato. Acercamiento por Sistemas Dinámicos. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 1999.(Monografía).

ESTRADA, William F. Geometría fractal: Conceptos y Procedimientos para la Construcción de Fractales. Editorial Magisterio. Bogotá, 2004.

FIALLO L, Jorge. El modelo de Van Hiele en la enseñanza de los deslizamientos en el plano de la geometría de sexto grado. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 1996 (Tesis).

FIGUEROA, Olga lucia. Propuesta para la aplicación del modelo de Van Hiele en el aprendizaje de los conceptos de altura y el área del triangulo en cuarto grado de primaria. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, 1999 (Monografía).

MANDELBROT, Benoît. Los objetos fractales: Forma, azar y dimensión. Tusquest Editores. Barcelona, 1988.

PÉREZ A, Fernando. Los fractales: una alternativa interactiva para la enseñanza de la matemática. Artículo revista Informática Educativa, volumen 5 N° 1. Santa fe de Bogotá DC. 1992.

SIERRE, William. Un Acercamiento a la Geometría Fractal en el Bachillerato. (Trabajo en ejecución), Universidad Industrial de Santander. 2005.

ANEXO 1

FOTOGRAFIAS DEL TRABAJO











ANEXO 2

FRACTALES ELABORADOS POR LOS ESTUDIANTES

