Una Versión Multidimensional del Producto Cruz

Claudia Patricia Hernández Pedraza

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2004

Una Versión Multidimensional del Producto Cruz

Claudia Patricia Hernández Pedraza

Monografía para optar al título de

Licenciada en Matemáticas

Director

Edilberto José Reyes

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2004

Dedicatoria

A Dios mis agradecimientos. A la institución recuerdos, a mis compañeros mi amistad, a mis padres, hermanos, familiares y amigos Ofrezco el triunfo que orgullosa obtengo

Agradezco a:

A mis Padres y Hermanos por su esfuerzo y comprensión.

Al profesor Edilberto Reyes por su paciencia.

A Jose Luis, mi novio por su amor, comprensión y dedicación, te amo.

Lista de Figuras

TITULO: UNA VERSIÓN MULTIDIMENSIONAL DEL PRODUCTO CRUZ* .

AUTOR: Claudia Patricia Hernández Pedraza **

PALABRAS CLAVES: Producto Interno, Ortogonalidad, Ortonormalidad, Producto vectorial, Propiedades, Multidimensional, Transformación n- lineal, Funcional.

DESCRIPCIÓN O CONTENIDO

El problema de encontrar un vector ortogonal a un conjunto de vectores dados, se encuentra muy a menudo en aplicaciones geométricas y físicas.

En este trabajo se centra interés en el estudio de un método sencillo que solucione el problema no solo para dimensión tres, como en el caso de la física cuando se quiere medir la tendencia de un cuerpo a girar con respecto al origen; sino para la multiplicación de octoniones y el estudio de la teoría de supergravedad 7-dimensional, es decir el problema para dimensiones mayores que tres.

En el primer capítulo se presentan las definiciones y resultados algebraicos que se requieren para el desarrollo de este trabajo. En el capitulo 2 se estudia el producto cruz clásico y se muestra que este concepto soluciona el problema de hallar un vector ortogonal (perpendicular) a dos vectores dados. En el siguiente capítulo se obtienen soluciones al problema mediante otros métodos; lo que permite concluir que el producto cruz definido como en el capítulo 2, soluciona fácilmente el problema para $\mathbb{R}^3$. De esta forma el producto vectorial se generaliza con el desarrollo de un determinante simbólico de orden $n \times n$. En el capitulo 4 se estudia mediante algunos conceptos del Álgebra por que esta definición del producto vectorial permite encontrar un vector ortogonal a otros dados, en cualquier dimensión. En el ultimo capítulo se estudian las mismas propiedades del producto vectorial clásico, pero generalizadas a $\mathbb{R}^n$.

—————————————————

*Trabajo de grado

**Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas. Director: Edilberto José Reyes.

TITLE: A MULTIDIMENSIONAL VERSION OF THE PRODUCT CROSS* .

AUTHOR: Claudia Patricia Hernández Pedraza**

KEY WORDS: Inner Product, Orthogonal, Orthonormal, Cross Product, Properties, Multidimensional, Transformation n-linear, Functional.

DESCRIPTION AND CONTENT

The problem to find an orthogonal vector to a set of given vectors, is often in geometric and physical applications.

In this work the study of a simple method is centered that solves the non single problem of dimension three, as in the case of the physics when it is wanted to measure the tendency of a body to turn with respect to the origin; but for the multiplication of octonions and the study of the 7-dimensional supergravity theory, it is to say the problem for dimensions greater than three.

In the first chapter the algebraic definitions and results appear that are required for the development of this work. In a capitulate 2 studies the classic product cross and show that this concept solves the problem to find an orthogonal vector (perpendicular) to two given vectors. In the following chapter solutions to the problem of other methods are obtained; what allows concluding that the product cross defined as in chapter 2, solves the problem for $\mathbb{R}^3$ easily. Of this form the cross product becomes general with the development of a symbolic determinant of order $n \times n$. In a capitulate 4 studies by means of some concepts of Algebra so that this definition of the cross product allows to find an orthogonal vector to other dices, in any dimension. In a last chapter study the same properties of the classic cross product, but generalized to $\mathbb{R}^n$.

—————————————————

*Graduation Project

**Facultid of sciencies, School of Mathematics. Adviser: Edilberto José Reyes.

Índice general

Introducción

El Cálculo y la Geometría Analítica estan intimamente relacionados en su desarrollo histórico; un descubrimiento en uno de ellos daba lugar a un avance en el otro. El problema de trazar tangentes a las curvas se resuelve con el descubrimiento de la derivada; el del área conduce a la integral; y las derivadas parciales se introdujeron para estudiar superficies curvas en el espacio. Junto con estos descubrimientos se observa un desarrollo paralelo de la Mecánica y la Física Matemática.
En el siglo *XIX*, el matemático William Roman Hamilton (1805-1865) introdujo su Teoría de Cuaterniones, nuevo método y punto de vista que contribuyó mucho a la comprensión tanto del Álgebra como de la Física.
Las más destacadas características del análisis de los cuaterniones y la Geometría cartesiana se unieron más tarde, en gran parte debido a J. W. Gibbs (1839-1903) y O. Heaviside (1850-1925) para dar lugar a la conocida Álgebra Vectorial. Pronto se vió que los vectores eran los instrumentos ideales para la exposición y simplificación de muchas ideas importantes en Geometría y Física.
Por esta razón en este trabajo centramos nuestro interés en espacios de dimensión mayor que tres, una de las razones es que muchos problemas que suponen el estudio de sistemas con un número grande de ecuaciones se analizan con mayor facilidad introduciendo vectores en un *n-espacio* conveniente y reemplazando todas aquellas ecuaciones por una sola ecuación vectorial.
Por ejemplo, en muchas aplicaciones del Álgebra vectorial a problemas de Geometría y

Mecánica resulta útil disponer de un método fácil de obtener un vector perpendicular a cada uno de dos vectores dados A y B.

Este problema aumenta cuando se requiere de este concepto, extendido a dimensiones mayores; por ejemplo en la multiplicación de octoniones y en las recientes teorías de la supergravedad 7-*dimensional*. De esta manera vemos como podemos tratar de una vez muchas propiedades comunes a los espacios de una, dos, tres o más dimensiones, esto es, propiedades independientes de la dimensionalidad del espacio.

Esto está de acuerdo con el espíritu de la matemática moderna el cual facilita el desarrollo de métodos fáciles para resolver problemas de manera simultánea.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En esta sección trataremos algunos aspectos relacionados con el algebra vectorial los cuales nos serán de gran ayuda para el desarrollo de capítulos posteriores.

Definición 1.1 *Si* $u = (a_1, \ldots, a_n)$ *y* $v = (b_1, \ldots, b_n)$ *son dos vectores en un espacio vectorial* $\mathbb{R}^n$*, el* ***producto escalar o producto interno*** *de* u *y* v*, se denota* $u \bullet v$ *y se define por:*

$$u \bullet v = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \tag{1.1}$$

Así pues, para cacular $u \bullet v$ se multiplica las componentes de u y v componente a componente y luego se suma estos productos. Este producto tiene las siguientes propiedades algebraicas.

Teorema 1.1 *Para todos los vectores* u, v *y* C *de* $\mathbb{R}^n$ *y todos los escalares* α*, se tienen las siguientes propiedades:*

a) $u \bullet v = v \bullet u$

b) $u \bullet (v + C) = u \bullet v + u \bullet C$

c) $\alpha(u \bullet v) = (\alpha u) \bullet v = u \bullet (\alpha v)$

d) $u \bullet u > 0 \quad si \;\; u \neq \bigcirc$.

e) $u \bullet u = 0 \;\; si \;\; u = \bigcirc$.

Demostración.

a) $u \bullet v = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k a_k = v \bullet u$

b) $u \bullet (v + C) = \sum_{k=1}^{n} a_k (b_k + c_k) = \sum_{k=1}^{n} (a_k b_k + a_k c_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} a_k c_k = u \bullet v + u \bullet C$

c) $\alpha\,(u \bullet v) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha (a_k b_k) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k) b_k = (\alpha u) \bullet v$.

$$\alpha\,(u \bullet v) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha (a_k b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k (\alpha b_k) = u \bullet (\alpha v).$$

d) $u \bullet u = \sum_{k=1}^{n} a_k a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$; cada término de la sumatoria siempre es positivo, luego la suma es positiva, por lo tanto se cumple que $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 > 0$ entonces $u \bullet u > 0$.

e) $u \bullet u = \sum_{k=1}^{n} a_k a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 = 0$. Luego $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = \ldots = a_n^2 = 0$, por tanto $u = \bigcirc$. (Este vector cuyas componentes son cero se le llama vector nulo y se denota como $\bigcirc$). ■

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Teorema 1.2 *Si u y v son vectores de $\mathbb{R}^n$, tenemos*

$$(u \bullet v)^2 \leq (u \bullet u)\,(v \bullet v) \tag{1.2}$$

Además, el signo de igualdad es válido si y sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar.

Demostración. Si u o v son el vector nulo la prueba es inmediata. Por lo tanto se puede suponer que u y v son vectores no nulos. Sea C el vector

$$C = xu - yv, \qquad \text{donde} \quad x = v \bullet v \quad \text{y} \quad y = u \bullet v,$$

las propiedades *d)* y *e)* implican que $C \bullet C \geq 0$ luego,

$$\begin{aligned} (xu - yv)(xu - yv) &\geq 0 \\ x^2 (u \bullet u) - 2xy (u \bullet v) + y^2 (v \bullet v) &\geq 0 \end{aligned}$$

utilizando las definiciones de x e y y la desigualdad $C \bullet C \geq 0$, se tiene que

$$(v \bullet v)^2 (u \bullet u) - 2 (v \bullet v)(u \bullet v)^2 + (u \bullet v)^2 (v \bullet v) \geq 0$$

por la propiedad *d)* tenemos que $v \bullet v > 0$, dado que $v \neq 0$, luego se puede dividir por $(v \bullet v)$ y se obtiene

$$\begin{aligned} (v \bullet v)(u \bullet u) - 2 (u \bullet v)^2 + (u \bullet v)^2 &\geq 0 \\ (v \bullet v)(u \bullet u) - (u \bullet v)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(u \bullet v)^2 \leq (u \bullet u)(v \bullet v),$$

que es la desigualdad que se quería demostrar. Esto también demuestra que el signo igual es válido en la desigualdad si y sólo si $C = \bigcirc$. Pero $C = \bigcirc$ si y sólo si $xu = yv$. A su vez, esta igualdad se verifica si sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar. ■

La desigualdad de *Cauchy-Schwarz* también se puede expresar en función de la norma de la siguiente forma

$$(u \bullet v)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

esto equivale a

$$|u \bullet v| \leq \|u\| \|v\| \tag{1.3}$$

cuando se toma la raíz cuadrada positiva de cada miembro.

La desigualdad de *Cauchy-Schwarz* tiene importantes aplicaciones a las propiedades de la longitud o norma de un vector.

Longitud o Norma de un Vector

Definición 1.2 *Si u es un vector en $\mathbb{R}^n$, su longitud o norma se designa con*

$$\|u\| = (u \bullet u)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4}$$

Las propiedades esenciales del producto escalar conducen a las correspondientes propiedades de la norma.

Teorema 1.3 *Si u es un vector de $\mathbb{R}^n$ y α un escalar, tenemos la siguientes propiedades:*

a) $\|u\| > 0 \quad$ *si* $u \neq \bigcirc$

b) $\|u\| = 0 \quad$ *si* $u = \bigcirc$,

c) $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$.

Demostración.

a) $\|u\| = (u \bullet u)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k a_k \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} > 0$, puesto que cada término de la sumatoria es positivo.

b) $\|u\| = (u \bullet u)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k a_k \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0$, sólo se cumple si todo $a_k^2 = 0$, luego $u = \bigcirc$.

c) $\|\alpha u\| = (\alpha u \bullet \alpha u)^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2 u \bullet u)^{\frac{1}{2}} = (\alpha^2)^{\frac{1}{2}} (u \bullet u)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \, \|u\|$. ■

Desigualdad Triangular

Teorema 1.4 *Si u y v son vectores de $\mathbb{R}^n$, tenemos*

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|. \tag{1.5}$$

Además, el signo igual es válido si y sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar positivo.

Demostración. Escribamos la desigualdad triangular en la forma equivalente

$$\|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2. \tag{1.6}$$

el primer miembro de (1.6) es

$$\|u+v\|^2 = (u+v) \bullet (u+v) = u \bullet u + 2u \bullet v + v \bullet v = \|u\|^2 + 2u \bullet v + \|v\|^2,$$

mientras que el segundo miembro es

$$(\|u\| + \|v\|)^2 = \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2.$$

Comparando estas dos fórmulas, vemos que (1.6) es válida si y sólo si se tiene

$$u \bullet v \leq \|u\| \|v\|. \tag{1.7}$$

Pero por propiedad del valor absoluto $u \bullet v \leq |u \bullet v|$ y por transitividad (1.7) se optiene expresando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, en la forma $|u \bullet v| \leq \|u\| \|v\|$. Esto prueba que la desigualdad triangular es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz de lo que obtenemos que el signo de igualdad es válido si y sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar con lo que se completa la demostración del teorema. ■

Definición 1.3 *Sean u y v dos vectores diferentes de cero. u y v son ortogonales si $u \bullet v = 0$, es decir si su producto escalar es nulo.*

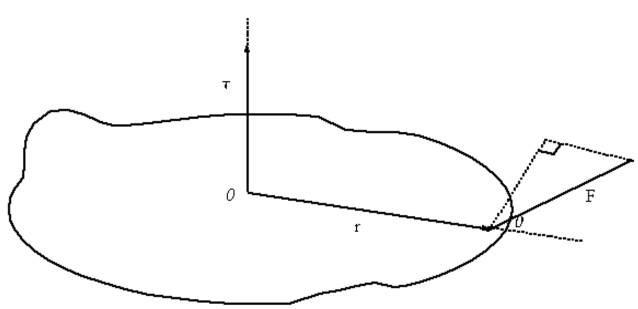
Capítulo 2

PRODUCTO CRUZ CLÁSICO EN $\mathbb{R}^3$

En muchas aplicaciones de la matemática y particularmente en la física, se requiere de un método fácil para hallar un vector perpendicular a cada uno de dos vectores dados **A** y **B**.

Si se considera una fuerza **F** que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto determinado por un vector posición **r** (ver figura 1.) y se necesita medir la tendencia del cuerpo a girar con respecto al origen; se observa que la única componente de **F** que puede ocasionar rotación es la perpendicular a **r**.

Figura 1: Torque o momento de fuerza (2.1)



Esto se consigue con el *producto vectorial* $A \times B$ o *producto cruz* que comúnmente se define en los textos de álgebra por:

Definición 2.1 *Sean* $A = (a_1, a_2, a_3)$ *y* $B = (b_1, b_2, b_3)$ *dos vectores del espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$*. Su producto vectorial* $A \times B$ *(en este orden) se define como el vector*

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)\,. \tag{2.2}$$

Antes de continuar el estudio del producto cruz se observa que existe una forma sencilla de calcularlo usando determinantes.

Si expresamos cada una de las componentes del producto vectorial como un determinante de orden dos, $A \times B$ toma la forma,

$$A \times B = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Esto también puede expresarse en función de los vectores coordenados unitarios i, j, k como sigue,

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k. \tag{2.3}$$

En vista de la semejanza entre el desarrollo por cofactores de los determinantes de orden tres y la ecuación (2,2) el *Producto Cruz de dos vectores* se puede encontrar mediante el desarrollo simbólico por:

$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

A partir de esta representación se deducen facílmente las siguientes propiedades.

Teorema 2.1 *Para todos los vectores A,B,C de* $\mathbb{R}^3$ *y para todo número real* α *tenemos:*

a) $A \times B = -B \times A$

b) $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$

c) $\alpha (A \times B) = (\alpha A) \times B$

d) $A \bullet (A \times B) = 0$

e) $B \bullet (A \times B) = 0$

f) $\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \bullet B)^2$

g) $A \times B = \bigcirc \Leftrightarrow A \;\; y \;\; B \;\; \textit{son linealmente} \;\; \textit{dependientes}$

Demostración. Para efectuar las siguientes pruebas se emplearán algunas propiedades de los determinantes

a) $A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -(B \times A)\,.$

b) $A \times (B + C) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}$

$$= [a_2 (b_3 + c_3) - a_3 (b_2 + c_2)]\, i - [a_1 (b_3 + c_3) - a_3 (b_1 + c_1)]\, j +$$

$$+ [a_1 (b_2 + c_2) - a_2 (b_1 + c_1)]\, k$$

$$= [(a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, k] +$$

$$+ [(a_2 c_3 - a_3 c_2)\, i - (a_1 c_3 - a_3 c_1)\, j + (a_1 c_2 - a_2 c_1)\, k]$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= A \times B + A \times C.$$

c) $\alpha\,(A \times B) = \alpha \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (\alpha A) \times B.$

d) $A \bullet (A \times B) = a_1\,(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2\,(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3\,(a_1 b_2 - a_2 b_1)$

$= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_2 a_1 b_3 + a_3 a_1 b_2 - a_2 a_3 b_1 = 0.$

e) Se deduce del mismo modo que *d)*.

f) $\|A \times B\|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$

$= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_3 b_1 a_1 b_3 + a_1^2 b_3^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2$ y

$\|A\|^2 \|B\|^2 - (A \bullet B)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$

$= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 b_3 a_3 b_2 + a_3^2 b_2^2 + a_3^2 b_1^2 - 2a_3 b_1 a_1 b_3 + a_1^2 b_3^2 + ad_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2.$

se comprueba que los dos segundos miembros coinciden.

La propiedad *f)* muestra que $A \times B = 0$ si y sólo si $(A \bullet B)^2 = \|A\|^2 \|B\|^2$. Según la desigualdad de Cauchy-Schwarz, eso ocurre si y sólo si uno de los vectores es el producto del otro por un escalar. Dicho de otro modo, $A \times B = 0$ si y sólo si A y B son linealmente dependientes, quedando demostrado *f)*. ■

Las propiedades *d)* y *e)* muestran que el vector $A \times B$ es ortogonal a A y B y por lo tanto el producto cruz en $\mathbb{R}^3$ resuelve el problema de hallar un vector perpendicular a dos vectores dados.

Capítulo 3

OTRAS SOLUCIONES AL PROBLEMA PLANTEADO

En el capítulo anterior estudiamos el producto cruz en $\mathbb{R}^3$ el cual nos proporcionó un método sencillo para hallar un vector perpendicular a dos vectores dados. Esta definición del *Producto cruz o vectorial* en $\mathbb{R}^3$ es la que comunmente se estudia en los textos de algebra vectorial. Para una generalización del producto cruz; en este capítulo resolvemos el mismo problema mediante otros métodos y comparamos la soluciones obtenidas.

3.1. SOLUCIÓN MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Resolvamos primero el problema para un caso particular

Ejemplo 3.1 *Dados $A = (1, 0, -1)$ y $B = (0, 2, 1)$ vectores de $\mathbb{R}^3$, encontrar otro $C \in \mathbb{R}^3$, perpendicular a cada uno de los vectores dados.*
Dado que A debe ser perpendicular a C y B a C, *su producto escalar es cero (Teorema*

1.5), luego

$$A \bullet C = (1, 0, -1) \bullet (x_{1,} x_2, x_3) = 0$$

y

$$B \bullet C = (0, 2, 1) \bullet (x_{1,} x_2, x_3) = 0$$

Desarrollando el producto escalar,

$$\begin{aligned} 1x_1 + 0x_2 + -1x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 2x_2 + 1x_3 &= 0 \end{aligned}$$

se obtiene un sistema de dos ecuaciones con tres incognitas que resolvemos por el método de Gauss- Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

de donde,

$$\begin{aligned} x_1 &= (1)\, x_3 \\ x_2 &= \left(-\frac{1}{2}\right) x_3. \end{aligned}$$

es decir que hay infinitas soluciones, lo que es fácil de imanginar geométricamente. En particular si $x_3 = -2$, se obtiene el vector :

$$C = (-2, 1, -2)$$

Se verifica que C es ortogonal a los vectores dados

$$\begin{aligned} A \bullet C &= (1, 0, -1) \bullet (-2, 1, -2) \\ &= (1 \times -2) + (0 \times 1) + (-1 \times -2) \\ &= -2 + 0 + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \bullet C &= (0, 2, 1) \bullet (-2, 1, -2) \\ &= (0 \times -2) + (2 \times 1) + (1 \times -2) \\ &= 0 + 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Resolvamos ahora mediante sistemas de ecuaciones el problema en $\mathbb{R}^3$ de manera general; es decir:

Dados $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$, hallar $C = (x_1, x_2, x_3)$ tal que C sea perpendicular a A y B. Por tanto

$$\mathrm{A} \bullet \mathrm{C} = (a_1, a_2, a_3) \bullet (x_{1,}x_2, x_3) = 0$$

y

$$\mathrm{B} \bullet \mathrm{C} = (b_1, b_2, b_3) \bullet (x_{1,}x_2, x_3) = 0.$$

Esto implica que,

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0, \end{aligned}$$

resolviendo mediante Gauss-Jordan el sistema de ecuaciones se tiene

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & | & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{a_3b_2 - a_2b_3}{b_2a_1 - b_1a_2} \\ 0 & 1 & \dfrac{b_3a_1 - b_1a_3}{b_2a_1 - b_1a_2} \end{pmatrix}$$

si , $b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0$ y a_1o $b_1 \neq 0$,

$$\begin{aligned} x_1 &= -\left(\frac{a_3b_2 - a_2b_3}{b_2a_1 - b_1a_2}\right)x_3, \\ x_2 &= -\left(\frac{b_3a_1 - b_1a_3}{b_2a_1 - b_1a_2}\right)x_3. \end{aligned}$$

por tanto el sistema tiene infinitas soluciones lo que geométricamente indica que la solución al problema es un conjunto de vectores todos perpendiculares entre si; en particular si eligimos $x_3 = b_2a_1 - b_1a_2$, se obtiene que $C = (a_2b_3 - a_3b_2, b_1a_3 - b_3a_1, b_2a_1 - b_1a_2)$ que es el vector que se obtuvo mediante la definición clásica del producto cruz.

3.2. SOLUCIÓN MEDIANTE EL PROCESO DE *GRAM-SCHMIDT*

El proceso de *Gram-Schmidt* permite construir una base ortornormal; este resultado se deduce como consecuencia de un teorema cuya demostración nos enseña a construir conjuntos ortogonales en cualquier espacio de dimensión finita.
Los siguientes teoremas nos servirán para probar el proceso de Gram-Shmidt.

Teorema 3.1 *Sea v un vector diferente de cero. Entonces para cualquier otro vector u, el vector*

$$w = u - \frac{(u \bullet v)}{\|v\|^2} v$$

es ortogonal a v.

Demostración.

$$\begin{aligned} w \bullet v &= \left[u - \frac{(u \bullet v)\, v}{\|v\|^2} \right] \bullet v = u \bullet v - \frac{(u \bullet v)\,(v \bullet v)}{\|v\|^2} \\ &= u \bullet v - \frac{(u \bullet v)\, \|v\|^2}{\|v\|^2} = u \bullet v - u \bullet v = 0. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente teorema prueba que cualquier conjunto finito de vectores ortogonales diferente de cero es linealmente independiente.

Teorema 3.2 *Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero, entonces S es linealmente independiente.*

Demostración. Se supone que $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k = 0$. Entonces para cualquier $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \bullet v_i = (c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_i v_i + \ldots + c_k v_k) \bullet v_i \\ &= c_1 (v_1 \bullet v_i) + c_2 (v_2 \bullet v_i) + \ldots + c_i (v_i \bullet v_i) + \ldots + c_k (v_k \bullet v_i) \\ &= c_1 0 + c_2 0 + \ldots + c_i \|v_i\|^2 + \ldots + c_k 0 = c_i \|v_i\|^2 \end{aligned}$$

Como $v_i \neq 0$ por hipótesis, $\|v_i\|^2 > 0$, y se tiene $c_i = 0$, para $i = 1, 2, 3, \ldots, k$. ■

Teorema 3.3 ***Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt*** *Sea H un subespacio de dimensión m de $\mathbb{R}^n$. Entonces H tiene una base ortonormal.*

Demostración. Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base de H. Se probará el teorema construyendo una base ortonormal a partir de los vectores en S. Antes de dar los pasos para esta construcción, se observa el hecho sencillo de que un conjunto de vectores linealmente independiente **no** contiene al vector cero o nulo.

Paso1. Elección del primer vector unitario Sea

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \tag{3.1}$$

Entonces

$$u_1 \bullet u_1 = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}\right) \bullet \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}\right) = \left(\frac{1}{\|v_1\|^2}\right)(v_1 \bullet v_1) = 1$$

de manera que $\|u_1\| = 1$.

Paso 2. Elección de un segundo vector ortogonal a $\mathbf{u}_1$ En Teorema (3.0) se mostró que, en $\mathbb{R}^2$, el vector $w = u - \dfrac{u \bullet v}{\|v\|^2} v$ es ortogonal a v. En este caso $\dfrac{u \bullet v}{\|v\|^2} v$ es la proyección de u sobre v.

Resulta que el vector w dado es ortogonal a v cuando w y v están en $\mathbb{R}^n$ para cualquier $n \geq 2$. Observe que como u_1 es un vector unitario, $\dfrac{u \bullet v}{\|u_1\|^2} u_1 = (v \bullet u_1)\, u_1$ para cualquier vector v.

Sea

$$v_2' = v_2 - (v_2 \bullet u_1)u_1 \tag{3.2}$$

entonces

$$v_2' \bullet u_1 = v_2 \bullet u_1 - (v_2 \bullet u_1)\,(u_1 \bullet u_1) = v_2 \bullet u_1 - (v_2 \bullet u_1)\,1 = 0$$

de manera que v_2' es ortogonal a u_1. Más aún, por el teorema (3.1), u_1 y v_2' son linealmente independientes. $v_2' \neq 0$ por que de otra manera $v_2 = (v_2 \bullet u_1)\, u_1 = \dfrac{(v_2 \bullet u_1)}{\|v_1\|} v_1$, lo que contradice la independencia de v_1 y v_2.

Paso 3. Elección de un segundo vector unitario Sea

$$u_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} \tag{3.3}$$

entonces es evidente que $\{u_1, u_2\}$ es un conjunto ortonormal.

Suponga que se han construido los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_k \, (k < m)$ y que forman un conjunto ortonormal. Se mostrará cómo construir u_{k+1}.

Paso 4. Continuación del proceso Sea

$$v_{k+1}' = v_{k+1} - (v_{k+1} \bullet u_1)u_1 - (v_{k+1} \bullet u_2)\, u_2 - \ldots - (v_{k+1} \bullet u_k)\, u_k \tag{3.4}$$

entonces para $i = 1, 2, \ldots, k$

$$v_{k+1}' \bullet u_i = v_{k+1} \bullet u_i - (v_{k+1} \bullet u_1)\,(u_1 \bullet u_i) - (v_{k+1} \bullet u_2) \bullet (u_2 \bullet u_i)$$

$$- \ldots - (v_{k+1} \bullet u_i)\,(u_i \bullet u_i) - \ldots - (v_{k+1} \bullet u_i)\,(u_k \bullet u_i)$$

pero $u_j \bullet u_i = 0$ si $j \neq i$ y $u_i \bullet u_i = 1$. Por tanto,

$$v_{k+1}' \bullet u_i = v_{k+1} \bullet u_i - v_{k+1} \bullet u_i = 0$$

Así $\left\{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_{k+1}'\right\}$ es un conjunto linealmente independiente, ortogonal y $v_{k+1}' \neq 0$.

Paso 5. Sea $u_{k+1} = \dfrac{v_{k+1}'}{\left\|v_{k+1}'\right\|}$. Entonces es claro que $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}\}$ es un conjunto ortonormal y se puede continuar de este manera hasta que $k + 1 = m$ con lo que se completa la prueba. ■

Tomaremos el ejemplo anterior para mostrar que el problema puede ser resuelto mediante este proceso.

Ejemplo 3.2 *Sean* $u_1 = (1, 0, -1)$ *y* $u_2 = (0, 2, 1)$ *vectores de* $\mathbb{R}^3$*, encontrar otro* $u_3 \in \mathbb{R}^3$*, perpendicular a cada uno de los vectores dados.*

Para completar una base para $\mathbb{R}^3$*, añadimos el vector* $v_3 = (0, -1, 0)$*, luego se obtiene la base:*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aplicando el proceso de Gram-Schmidt se obtiene la base ortonormada:

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{6\sqrt{2}} \\ \frac{2}{6\sqrt{2}} \\ \frac{2}{6\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{10}{15} \\ \frac{5}{15} \\ -\frac{10}{15} \end{pmatrix} \right\}$$

Obedeciendo a lo planteado inicialmente el vector perpendicular a los dados incialmente será

$$u_3 = \left(-\frac{10}{15}, \frac{5}{15}, -\frac{10}{15} \right)$$

Comprobemos que el producto escalar entre el vector obtenido y los vectores dados es cero

$$\begin{aligned} u_1 \bullet u_3 &= (1, 0, -1) \bullet \left(-\frac{10}{15}, \frac{5}{15}, -\frac{10}{15} \right) \\ &= \left(1 \times -\frac{10}{15} \right) + (0 \times \frac{5}{15}) + (-1 \times -\frac{10}{15}) \\ &= -\frac{10}{15} + 0 + \frac{10}{15} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 \bullet u_3 &= (0, 2, 1) \bullet \left(-\frac{10}{15}, \frac{5}{15}, -\frac{10}{15} \right) \\ &= \left(0 \times -\frac{10}{15} \right) + (2 \times \frac{5}{15}) + (1 \times -\frac{10}{15}) \\ &= 0 + \frac{10}{15} - \frac{10}{15} = 0 \end{aligned}$$

Efectivamente el vector u_3 es perpendicular a cada uno de los vectores dados.

Al comparar el vector obtenido mediante el proceso de *Gram-Schmidt*, con el vector obtenido por el producto cruz vemos que uno es múltiplo escalar del otro, es decir:

$$(-2, 1, -2) = 3\left(-\frac{10}{15}, \frac{5}{15}, -\frac{10}{15}\right)$$

Luego el método de *Gram-Schmidt* soluciona el problema.

Al resolver el problema mediante sistemas de ecuaciones lineales o el proceso de Gram-Schmidt; se obtiene el mismo o un múltiplo escalar, del vector que se obtiene de la definición clásica del producto cruz; sin embargo resolver el problema mediante estos métodos es una tarea larga y tediosa y más si las componentes de los vectores son escalares grandes.

El objetivo del trabajo es generalizar el problema a dimensiones mayores. Luego en $\mathbb{R}^n$ el problema sera:

Dados $(n-1)$ vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes se quiere encontrar un vector de $\mathbb{R}^n$ que sea simultáneamente ortogonal a los otros dados.

Como se mencionó anteriormente el problema se puede resolver mediante sistemas de ecuaciones y el proceso de Gram-Schmidt, pero es una tarea larga y tediosa, para lo cual se pretende encontrar un método sencillo que lo resuelva en $\mathbb{R}^n$.

Dado que en $\mathbb{R}^3$ resolver el problema utilizando la definición clásica del producto cruz, que consiste en el desarrollo de un determinante simbólico resulta fácil, se podría pensar resolver el problema con un determinante de orden $n \times n$.

Luego primero se planteará el problema en $\mathbb{R}^4$ y se resolverá para un caso particular, empleando la forma simbólica de un determinante como en el caso de $\mathbb{R}^3$, es decir colocando la base de vectores coordenados unitarios para $\mathbb{R}^4$ en la primera fila del determinante, y los vectores a los que se les busca el producto cruz en los siguientes tres renglones. Para $\mathbb{R}^4$ el problema será:

Dados tres vectores arbitrarios, hallar un vector ortogonal a cada uno de los

vectores dados.

Ejemplo 3.3 *Dados los vectores* $A = (1,0,0,2)\,; B = (0,1,0,1)$ *y* $C = (0,1,1,0)$ *encontrar otro* $D \in \mathbb{R}^4$*que sea perpendicular a los tres dados.*

Tomando (e_1, e_2, e_3, e_4) *como los vectores coordenados unitarios de* $\mathbb{R}^4$ *el determinante para este caso particular es:*

$$A \times B \times C = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

desarrollando el determinante por cofactores se tiene:

$$= e_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - e_4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 2e_1 + 1e_2 - 1e_3 - 1e_4$

Por tanto $D = (2, 1, -1, -1)$

Se verifica que D es ortogonal a los vectores dados.

$$\begin{aligned} A \bullet D &= (1,0,0,2) \bullet (2,1,-1,-1) \\ &= (1 \times 2) + (0 \times 1) + (0 \times -1) + (2 \times -1) \\ &= 2 + 0 + 0 - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B \bullet D &= (0,1,0,1) \bullet (2,1,-1,-1) \\
&= (0 \times 2) + (1 \times 1) + (0 \times -1) + (1 \times -1) \\
&= 0 + 1 + 0 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C \bullet D &= (0,1,1,0) \bullet (2,1,-1,-1) \\
&= (0 \times 2) + (1 \times 1) + (1 \times -1) + (0 \times -1) \\
&= 0 + 1 - 1 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

El siguiente ejemplo es un problema de un caso particular para $\mathbb{R}^5$ que se resolverá similarmente como en $\mathbb{R}^4$.

Ejemplo 3.4 *Dados los vectores* $A = (1,0,0,1,1)\,; B = (0,1,1,0,1)\,; C = (1,0,1,0,0)$ *y* $D = (1,0,0,1,0)$ *encontrar otro* $E \in \mathbb{R}^5$*que sea perpendicular a los otros dados.*

$$
A \times B \times C \times D = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= e_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} -
$$

$$- e_4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + e_5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -1e_1 - 1e_2 + 1e_3 + 1e_4 + 0e_5$

Luego $E = (-1, -1, 1, 1, 0)$

$$\begin{aligned} A \bullet E &= (1,0,0,1,1) \bullet (-1,-1,1,1,0) \\ &= (1 \times -1) + (0 \times -1) + (0 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times 0) \\ &= -1 + 0 + 0 + 1 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \bullet E &= (0,1,1,0,1) \bullet (-1,-1,1,1,0) \\ &= (0 \times -1) + (1 \times -1) + (1 \times 1) + (0 \times 1) + (1 \times 0) \\ &= 0 - 1 + 1 + 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \bullet E &= (1,0,1,0,0) \bullet (-1,-1,1,1,0) \\ &= (1 \times -1) + (0 \times -1) + (1 \times 1) + (0 \times 1) + (0 \times 0) \\ &= -1 + 0 + 1 + 0 + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D \bullet E &= (1,0,0,1,0) \bullet (-1,-1,1,1,0) \\
&= (1 \times -1) + (0 \times -1) + (0 \times 1) + (1 \times 1) + (0 \times 0) \\
&= -1 + 0 + 0 + 1 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

De la misma manera se podría presentar ejemplos aumentando la dimensión y así ver que la definición del producto cruz efectivamente resuelve el problema; lo que permite pensar que el producto vectorial se puede generalizar con un determiante de orden $n \times n$. Luego la generalización del producto cruz estaría hecha; sin embargo lo que ahora es interesante es ver por que la definición del producto cruz dada resuelve el problema. y por qué mediante esta definición resulta fácil generalizar el producto vectorial.

Capítulo 4

PRODUCTO CRUZ EN $\mathbb{R}^n$

En este capítulo se estidudiarán algunos conceptos del Algebra Lineal que nos permitirán comprender por que mediante la definición del producto cruz podemos encontrar un vector perpendicular a otros dados en cualquier dimensión.
Del curso de algebra lineal se sabe que:

Definición 4.1 *Sea V un espacio vectorial se llama producto interno a la aplicación*

$$T : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$\langle v_1, v_2 \rangle \mapsto \alpha$$

tal que a cada par de elementos v_1 y v_2 de V corresponde un número real único $\langle v_1, v_2 \rangle = \alpha$ que tiene las siguientes propiedades para cualquier v_1, v_2 y v_3 de V y para todo escalar α.

- $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$
- $\langle v_1, v_2 + v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, v_3 \rangle$
- $\alpha \langle v_1, v_2 \rangle = \langle \alpha v_1, v_2 \rangle$
- $\langle v_1, v_1 \rangle > 0 \quad si \ \ v_1 \neq 0$

Ejemplo 4.1 *Sean* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *y* $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *vectores de* $\mathbb{R}^n$.
$\langle A, B\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$, *define un producto interno en* $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 4.2 *Sean* f *y* g *funciones en* $C[a,b]$ *el espacio lineal de todas las funciones reales continuas en un intervalo* $[a,b]$.

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

define un producto interno de dos funciones f *y* g.

Definición 4.2 *Si* A *es un vector en* $\mathbb{R}^n$, *su longitud o norma se designa con*

$$\|A\| = (A \bullet A)^{\frac{1}{2}} \tag{4.1}$$

donde $(A \bullet A)$ *es el producto interno definido como en el ejemplo (4.2)*

Definición 4.3 *Se llama base ortogonal a una base cuyos elementos son ortogonales dos a dos.*

Definición 4.4 *Una base se llama normada si sus elementos son normados, es decir, si la norma de los vectores que la componen es* 1.

Definición 4.5 *Una base se llama ortonormada si es ortogonal y normada.*

La siguiente observación menciona el hecho sencillo que un espacio vectorial posee una base ortonormal y que en particular esta base puede ser la canónica.

Observación 4.1 *Por el proceso de Gram-Schmidt todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base ortonormal. En* $\mathbb{R}^n$, $b = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *donde* $e_1 = (1, 0, 0, \ldots 0)$; $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0); \ldots; e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ *es la base ortonormal canónica de* $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.6 *Una función* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *se llama transformación lineal de* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$, *si:*

1. $T(x+y) = T(x) + T(y)$, *cualesquiera quiera que sean* x *e* y *de* $\mathbb{R}^n$

2. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, *para todo* x *de* $\mathbb{R}^n$ *y cualquier escalar* α.

Esto significa que T conserva la adición y la multiplicación por escalares.

Observación 4.2

- *Las dos propiedades de la definición (4.6) pueden combinarse en una fórmula que establece que*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

- *Si* $m = 1$ *es decir si* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una transformación lineal se dice que* T *es un funcional lineal.*

Definición 4.7 *Se llama funcional bilineal sobre* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ *a la aplicación*

$$\begin{aligned} T \ : \ & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (v_1, v_2) \mapsto T(v_1, v_2) \end{aligned}$$

que posee las siguientes propiedades: Para todo vector v_1, v_1', v_2, v_2' *y cualquier* $r \in \mathbb{R}$

- $T(rv_1, v_2) = T(v_1, rv_2) = \mathrm{r}T(v_1, v_2)$
- $T(v_1 + v_1', v_2) = T(v_1, v_2) + T(v_1', v_2)$
- $T(v_1, v_2 + v_2') = T(v_1, v_2) + T(v_1, v_2')$

es decir T *es lineal para cada una de las variables.*

Observación 4.3

- *Se puede definir una funcional trilineal como la aplicación*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ (v_1, v_2, v_3) \mapsto T(v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

que T *cumple las siguientes propiedades*

1. $T(\alpha v_1, v_2, v_3) = \alpha T(v_1, v_2, v_3)$,

   $T(v_1, \alpha v_2, v_3) = \alpha T(v_1, v_2, v_3)$,

   $T(v_1, v_2, \alpha v_3) = \alpha T(v_1, v_2, v_3)$.

2. $T(v_1 + v_1', v_2, v_3) = T(v_1, v_2, v_3) + T(v_1', v_2, v_3)$,

   $T(v_1, v_2 + v_2', v_3) = T(v_1, v_2, v_3) + T(v_1, v_2', v_3)$,

   $T(v_1, v_2, v_3 + v_3') = T(v_1, v_2, v_3) + T(v_1, v_2, v_3')$.

- *De manera general se puede definir:*

  Una funcional n-lineal en $\mathbb{R}^n$ *es la aplicación* $T : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n-veces} \to \mathbb{R}$

  definida

  como

  $$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \mapsto T(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

  y que cumple las propiedades.

  1. $\alpha T(v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_n) = T(v_1, v_2, \ldots, \alpha v_i, \ldots, v_n)$

  2. $T(v_1, v_2, \ldots, v_i + u_j, \ldots, v_n) =$

     $= T(v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + T(v_1, v_2, \ldots, u_j, \ldots, v_n)$

  es decir, T *es lineal para cada una de las variables.*

Ejemplo 4.3 *En* $\mathbb{R}^2$ sean $v_1 = (a_1, a_2)$ $v_2 = (b_1, b_2)$ *y*

$$\begin{aligned} T \ &: \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ &(v_1, v_2) \mapsto \det(v_1, v_2) \end{aligned}$$

es una funcional bilineal.

Ejemplo 4.4 *En* $\mathbb{R}^n$ sean $v_1,\ v_2, \ldots, v_n$ *vectores de* $\mathbb{R}^n$ *y*

$$T \ : \ \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n-veces} \to \mathbb{R}$$

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \mapsto \det(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

es una funcional multilineal o n*-lineal.*

Como se sabe de los cursos de Algebra lineal si $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, cada elemento de V se expresa de manera única como una combinación lineal de los elementos de la base. A demás si el espacio es un espacio con producto interno *(producto escalar)* y la base es ortonormal ordenada, es muy fácil determinar la combinación lineal como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.1 *Si* $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *es una base ortonormal de un espacio con producto interno y* $v \in V$ *entonces* $v = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k$*, donde* $a_k = \langle v, u_k \rangle$ *.*

Demostración. Como B es base existen $a_1, \ldots, a_n$ escalares tales que $v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$. Para cada $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
\langle v, u_k \rangle &= \langle a_1u_1 + \ldots + a_nu_n, u_k \rangle \\
&= a_1 \langle u_1, u_k \rangle + \ldots + a_n \langle u_n, u_k \rangle \\
&= a_k \langle u_k, u_k \rangle = a_k
\end{aligned}$$

ya que $\langle u_i, u_k \rangle = 0$, para $i \neq k$ y $\langle u_k, u_k \rangle = 1$. ■

En particular se tiene que: para $v \in \mathbb{R}^n$, $v = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, donde $a_k = \langle v, e_k \rangle$ y $\{e_1, e_{2,\ldots,}e_n\}$ es la base canónica ortonormada de $\mathbb{R}^n$.

El siguiente teorema sobre transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ permite obtener una generalización del producto cruz o producto vectorial de $\mathbb{R}^3$ a más dimensiones.

Teorema 4.2 *Si* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es un funcional lineal, entonces existe* $v_0 \in \mathbb{R}^n$ *único tal que* $Tv = \langle v, v_0 \rangle$ *.*

Demostración. Sea $B = \{e_1, e_{2,\ldots,}e_n\}$ la base ortonormada canónica de $\mathbb{R}^n$.
Para cada $j, 1 \leq j \leq n$, sea $Te_j = a_j$ y v_0 el vector $v_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ entonces para cada $j, 1 \leq j \leq n$ se tiene que

$$\langle v_0, e_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k \langle e_k, e_j \rangle = a_j = Te_j \tag{4.2}$$

ya que $\langle e_k, e_j \rangle = 0$ si $k \neq j$ y $\langle e_j, e_j \rangle = 1$.
A demás si v es un vector cualquiera de $\mathbb{R}^n$, tenemos que: $v = \sum_{k=1}^{n} b_k e_k$ y por la linealidad de T y (4.2) :

$$Tv = \sum_{k=1}^{n} b_k Te_k = \sum_{k=1}^{n} b_k a_k = \langle v, v_0 \rangle . \qquad \blacksquare$$

Claramente si $F : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n-veces} \to \mathbb{R}$ es una transformación *n-lineal*, dados $(n-1)$ vectores fijos $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ la función $T = F(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v)$ es una transformación *lineal* y por el teorema anterior existe un único vector $v_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Tv = \langle v, v_0 \rangle$$

Como sabemos el determinante de orden $n \times n$ de n vectores en $\mathbb{R}^n$ en realidad es una transformación *n-lineal* de $\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n-veces}$ en $\mathbb{R}^n$ es decir

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_n) \mapsto \det(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

donde $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ es una transformación n-lineal.
Si $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ son $(n-1)$ vectores de $\mathbb{R}^n$ la función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $T(v) = F(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v)$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, y por el teorema anterior existe un único vector $v_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\begin{aligned} \langle v, v_0 \rangle &= Tv = F\left(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v\right) \\ &= \det\left(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v\right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

por lo tanto simbólicamente tenemos que:

$$v_0 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ u_1^1 & u_2^1 & \cdots & u_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{n-1} & u_2^{n-1} & \cdots & u_n^{n-1} \end{vmatrix}, \tag{4.4}$$

donde $\{e_1, \ e_2, \ e_3, \ldots, \ e_n\}$ es la base canónica para $\mathbb{R}^n$, es decir, $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0); \ldots; e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$ y escribiendo los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$

como

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(u_1^1, u_2^1, \ldots, u_n^1\right) \\ u_2 &= \left(u_1^2, u_2^2, \ldots, u_n^2\right) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ u_{n-1} &= \left(u_1^{n-1}, u_2^{n-1}, \ldots, u_n^{n-1}\right) \end{aligned}$$

v_0 es el *Producto Vectorial* de los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

Análogamente al caso de $\mathbb{R}^3$, $F\left(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v\right)$ se llama *Producto Mixto* de los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ y v.

Con base en lo anteriormente expuesto tenemos que:

Definición 4.8 ***Sea*** $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ***el funcional n-lineal definido por*** $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \det\left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v}\right)$. ***Observe que*** $\mathbf{F}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{2,\ldots,}\mathbf{e}_n) = \mathbf{1}$ ***donde*** $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{2,\ldots,}\mathbf{e}_n$ ***es base de*** $\mathbb{R}^n$.***Dados*** $\mathbf{n-1}$ ***vectores en*** $\mathbb{R}^n$ $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$, ***la función*** $\mathbf{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ***definida por*** $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{F}\left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v}\right) = \det\left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v}\right)$

es una transformación lineal y por tanto existe $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ ***único tal que*** $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle$; $\mathbf{v}_0$ ***se llama Producto Vectorial (o Producto Cruz de los vectores*** $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$***) y se denota por*** $\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 \times \ldots \times \mathbf{u}_{n-1}$.

Capítulo 5

PROPIEDADES DEL PRODUCTO CRUZ EN $\mathbb{R}^n$

En el capítulo 2 se vieron algunas propiedades básicas del producto vectorial en $\mathbb{R}^3$. En este capitulo se estudiarán las mismas propiedades para el producto vectorial en $\mathbb{R}^n$, estas propiedades son:

Para todo $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$ vectores de $\mathbb{R}^n$, tenemos:

- $u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}$es ortogonal a cada uno de los vectores $u_1, ..., u_{n-1}$. (5.1)
- $u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1} = 0 \Longleftrightarrow \{u_1, ..., u_{n-1}\}$ es linealmente dependiente. (5.2)
- $u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1} = -u_2 \times u_1 \times ... \times u_{n-1}$ (5.3)
- $u_1 \times u_2 \times ... \times v_i + v_i' \times \ldots \times u_{n-1} =$ (5.4)

  $= (u_1 \times u_2 \times ... \times v_i \times \ldots \times u_{n-1}) + (u_1 \times u_2 \times ... \times v_i' \times \ldots \times u_{n-1})$
- $\alpha\left(u_1 \times u_2 \times ... \times u_i \times \ldots \times u_{n-1}\right) = \left(u_1 \times u_2 \times ... \times \alpha u_i \times \ldots \times u_{n-1}\right)$.

  para $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$

(5.5)

(5.1) se obtiene de reemplazar en (Def.4.8) a v por $\mathbf{u}_i$, donde $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$; luego

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_i) = \langle \mathbf{u}_i, v_0 \rangle &= F(u_1, u_2, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots, u_{n-1}, \mathbf{u}_i) \\ &= \det(u_1, u_2, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots, u_{n-1}, \mathbf{u}_i) = 0 \end{aligned}$$

De (4.8) se tiene que $u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1} = 0$ si y sólo si para cada $v \in \mathbb{R}^n$, $\det(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v) = 0$, pero esto se da si y sólo si $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v$ son linealmente dependientes lo que prueba (5.2).

(5.3) se deduce a partir de la antisimetría de la función determinante es decir para $i\ ,\ j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

$$\begin{aligned} u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_i \times u_j \times \ldots \times u_{n-1} &= \det(u_1, u_2, \ldots, u_i, u_j, \ldots, u_{n-1}, v) \\ &= -\det(u_1, u_2, \ldots, u_j, u_i, \ldots, u_{n-1}, v) \end{aligned}.$$

(5.4) y (5.5) se comprueban fácilmente de la linealidad de la función determinante que comprende dos aspectos,

$$u_1 \times u_2 \times \ldots \times v_i + v_i' \times \ldots \times u_{n-1} = \det(u_1, u_2, \ldots, v_i + v_i', \ldots, u_{n-1}, v)$$
$$= \det(u_1, u_2, \ldots, v_i, \ldots, u_{n-1}, v) + \det(u_1, u_2, \ldots, v_i', \ldots, u_{n-1}, v)$$

y

$$\begin{aligned} \alpha(u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_i \times \ldots \times u_{n-1}) &= \alpha \det(u_1, u_2, \ldots, u_{i,}, \ldots, u_{n-1}, v) \\ &= \det(u_1, u_2, \ldots, \alpha u_i, \ldots, u_{n-1}, v). \end{aligned}$$

Geométricamente en $\mathbb{R}^3, u_1 \times u_2,\ u_1, u_2$ puede ser interpretado como el paralelogramo formado por el vector $u_1 \times u_2$ y el plano generado por los vectores u_1, u_2, ya que sabemos que $u_1 \times u_2$ es perpendiducalar simultáneamente a u_1y a u_2. Cuando $u_1 \times u_2$ se representa geométricamente mediante una flecha, la dirección de $u_1 \times u_2$ está determinada por la "regla de la mano derecha". Además $|u_1 \times u_2|$ es el área de ese paralelogramo.

Para $\mathbb{R}^n$ esta interpretación geométrica corresponde a que si $u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1} \neq 0$ entonces $u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_i \times \ldots \times u_{n-1},\ u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ forman un paralelepidedo orientado positivamente.

Ahora el volumen orientado del paralelepipedo de dimensión n, formado por los vectores $u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1},\ u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ es:

$$\begin{aligned} \det\left(u_1 \times ... \times u_{n-1}, u_1, ..., u_{n-1}\right) &= \left(u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}\right) \bullet \left(u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}\right) \\ &= \left|u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}\right|^2 > 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

En otras palabras geométricamente se ve que el vector $u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1}$ es ortogonal al hiperplano formado por los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Por lo tanto, el volumen *n-dimensional* del paralelepipedo es Γh, donde h es la *"altura"* $|u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1}|$ y Γ es la *"base"* del paralelepipedo formada por los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

OTRAS PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

Además de las propiedades básicas expuestas la iniciar el capitulo, en $\mathbb{R}^3$ se tienen las siguientes propiedades:

$$u_1 \times (u_2 \times u_3) = u_2 (u_1 \bullet u_3) - u_3 (u_1 \bullet u_2) \tag{5.7}$$

$$(u_1 \times u_2) \bullet (u_3 \times u_4) = (u_1 \bullet u_3)(u_2 \bullet u_4) - (u_1 \bullet u_4)(u_2 \bullet u_3) \tag{5.8}$$

Si se desarrolla el primer miembro de (5.7), tomando los vectores u_1, u_2, u_3 como $u_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $u_2 = (b_1, b_2, b_3)$, $u_3 = (c_1, c_2, c_3)$ y a $\{i, j, k\}$ la base ortonormada canónica de $\mathbb{R}^3$, de la *Def. (4.8)* se tiene

$$u_1 \times (u_2 \times u_3) = u_1 \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

desarrollando cada uno de los determinantes,

$$u_1 \times (u_2 \times u_3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_1 \times (u_2 \times u_3) &= \left[a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \right] - \left[a_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \right] + \\ &\quad + \left[a_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 \times (u_2 \times u_3) &= a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_1c_3 + a_3b_3c_1 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + \\ &\quad + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 + a_1b_1c_3 - a_1b_3c_1 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{aligned}$$

Se suma $0 = (a_1b_1c_1 - a_1b_1c_1) + (a_2b_2c_2 - a_2b_2c_2) + (a_3b_3c_3 - a_3b_3c_3)$

$$\begin{aligned} u_1 \times (u_2 \times u_3) &= (a_1b_1c_1 - a_1b_1c_1) + (a_2b_2c_2 - a_2b_2c_2) + (a_3b_3c_3 - a_3b_3c_3) + \\ &\quad + a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_1c_3 + a_3b_3c_1 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + \\ &\quad + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 + a_1b_1c_3 - a_1b_3c_1 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{aligned}$$

Reacomodando los términos, se tiene

$$\begin{aligned} u_1 \times (u_2 \times u_3) &= (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 + a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3 + \\ &\quad + a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 + a_3b_3c_3) - (a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1 + \\ &\quad + a_1b_1c_2 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_2 + a_1b_1c_3 + a_2b_2c_3 + a_3b_3c_3) \end{aligned}$$

Se observa que la anterior ecuación se puede escribir como:

$$u_1 \times (u_2 \times u_3) = \left[b_1 \left(\sum_{i=1}^{3} a_i c_i \right) + b_2 \left(\sum_{i=1}^{3} a_i c_i \right) + b_3 \left(\sum_{i=1}^{3} a_i c_i \right) \right] -$$

$$-\left[c_1\left(\sum_{i=1}^{3} a_ib_i\right)+c_2\left(\sum_{i=1}^{3} a_ib_i\right)+c_3\left(\sum_{i=1}^{3} a_ib_i\right)\right]$$

$$u_1\times(u_2\times u_3) \quad = u_2\left(\sum_{i=1}^{3} a_ic_i\right)-u_3\left(\sum_{i=1}^{3} a_ib_i\right)$$

$$u_1\times(u_2\times u_3) \quad = u_2\left(u_1\bullet u_3\right)-u_3\left(u_1\bullet u_2\right).$$

Quedando demostrado que se cumple (5,7). Usualmente la propiedad (5.7) se escribe

$a\times(b\times c)=b\,(a\bullet c)-c\,(a\bullet b)$ y se llama identidad "baccab".

Para probar $(5{,}8)$, se tomarán $u_1=(a_1,a_2,a_3)\,,u_2=(b_1,b_2,b_3)\,,u_3=(c_1,c_2,c_3)$ y $u_4=(d_1,d_2,d_3)$ vectores de $\mathbb{R}^3$; y a $\{i,j,k\}$ como la base ortonormada canónica para $\mathbb{R}^3$, a partir de *Def (4.9)* se tiene

$$(u_1\times u_2)\bullet(u_3\times u_4) \quad = \begin{vmatrix} i & j & k\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix} i & j & k\\ c_1 & c_2 & c_3\\ d_1 & d_2 & d_3\end{vmatrix}=$$

Desarrollando los determinantes

$$=\left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right]\bullet\left[\begin{vmatrix} c_2 & c_3\\ d_2 & d_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} c_1 & c_3\\ d_1 & d_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & c_2\\ d_1 & d_2\end{vmatrix}\right]=$$

$$=\left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_2 & c_3\\ d_2 & d_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_3\\ d_1 & d_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix} c_1 & c_2\\ d_1 & d_2\end{vmatrix}\right]=$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)(c_2d_3-c_3d_2)+(a_1b_3-a_3b_1)(c_1d_3-c_3d_1)+(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1)=$$

$$=(a_2b_3c_2d_3-a_2b_3c_3d_2-a_3b_2c_2d_3+a_3b_2c_3d_2)+(a_1b_3c_1d_3+a_1b_3c_3d_1-a_3b_1c_1d_3+a_3b_1c_3d_1)+$$

$$+(a_1b_2c_1d_2-a_1b_2c_2d_1-a_2b_1c_1d_2+a_2b_1c_2d_1)=$$

$$=(a_2b_3c_2d_3-a_2b_3c_3d_2-a_3b_2c_2d_3+a_3b_2c_3d_2)+(a_1b_3c_1d_3+a_1b_3c_3d_1-a_3b_1c_1d_3+a_3b_1c_3d_1)+$$

$$+(a_1b_2c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2 + a_2b_1c_2d_1) + (a_1b_1c_1d_1 - a_1b_1c_1d_1) + (a_2b_2c_2d_2 - a_2b_2c_2d_2)+$$

$$+(a_3b_3c_3d_3 - a_3b_3c_3d_3) =$$

Sumando $0 = (a_1b_1c_1d_1 - a_1b_1c_1d_1) + (a_2b_2c_2d_2 - a_2b_2c_2d_2) + (a_3b_3c_3d_3 - a_3b_3c_3d_3)$ y reacomodando los términos

$$= (a_1b_1c_1d_1 + a_1b_2c_1d_2 + a_1b_3c_1d_3 + a_2b_1c_2d_1 + a_2b_2c_2d_2 + a_2b_3c_2d_3+$$

$$+a_3b_1c_3d_1 + a_3b_2c_3d_2 + a_3b_3c_3d_3) - (a_1b_1c_1d_1 + a_1b_2c_2d_1 + a_1b_3c_3d_1+$$

$$a_2b_1c_1d_2 + a_2b_2c_2d_2 + a_2b_3c_3d_2 + a_3b_1c_1d_3 + a_3b_2c_2d_3 + a_3b_3c_3d_3) =$$

la ecuación anterior se puede escribir en términos de sumatorias así:

$$= \left[a_1c_1\left(\sum_{i=1}^{3} b_id_i\right) + a_2c_2\left(\sum_{i=1}^{3} b_id_i\right) + a_3c_3\left(\sum_{i=1}^{3} b_id_i\right)\right] -$$

$$-\left[\ a_1d_1\left(\sum_{i=1}^{3} b_ic_i\right) + a_2d_2\left(\sum_{i=1}^{3} b_ic_i\right) + a_3d_3\left(\sum_{i=1}^{3} b_ic_i\right)\right]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{3} a_ic_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3} b_id_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{3} a_id_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3} b_ic_i\right) = (u_1 \bullet u_3)(u_2 \bullet u_4) - (u_1 \bullet u_4)(u_2 \bullet u_3)$$

Quedando demostrada la propiedad (5.8).

Ahora se presentará una demostración de la propiedad

$$(a \times b) \times c = b\,(a \bullet c) - a\,(b \bullet c) \tag{5.9}$$

que se encuentra en un artículo de la American Mathematical Monthly. El motivo para presentar esta prueba es la difultad de encontrar un argumento sencillo que permita demostrar esta propiedad.

Tomando la definición geometrica a partir de que $a \times b$, es perpendicular a a y b, y según la regla de la mano derecha;

$$\|a \times b\| = \|a\| \, \|b\| \sin\theta, \tag{5.10}$$

donde θ es el ángulo entre a y b. Además:

$$b \times a = -\, a \times b \tag{5.11}$$

y

$$b \bullet a = \|b\| \, \|a\| \cos\theta \tag{5.12}$$

Se asume que a y b son linealmente independientes, de otro modo ambos lados de (5.9) sería cero.

Sea Π el plano generado por a y b, luego $a \times b \perp \Pi$. Así $p := (a \times b) \times a \in \Pi$ y $p \perp a$, con p y b al mismo lado de la flecha que representa al vector a; asumimos que todos los vectores parten del origen, luego

a) Evidentemente

$$b = \quad \|b\| \frac{a}{\|a\|} \cos\theta + \|b\| \frac{p}{\|p\|} \sin\theta$$

multiplicando la ecuación por $(a \bullet a) = \|a\|^2$, y asociando de manera adecuada se tiene,

$$\begin{aligned} (a \bullet a)\, b &= \left(\frac{\|b\| \, \|a\|^2 \cos\theta}{\|a\|} \right) a + \left(\|a\|^2 \, \|b\| \sin\theta \, \|p\|^{-1} \right) p \\ &= \left(\|b\| \, \|a\| \cos\theta \right) a + \left(\|a\| \, \|b\| \sin\theta \, \|a\| \, \|p\|^{-1} \right) p \\ &= (b \bullet a)\, a + \left(\|a \times b\| \, \|a\| \, \|p\|^{-1} \right) p \\ &= (b \bullet a)\, a + p \end{aligned}$$

ya que $\|p\| = \|a \times b\| \, \|a\| \sin 90^\circ = \|a \times b\| \, \|a\|$. Esto demuestra (5.9) en el caso $c = a$; luego

$$
\begin{aligned}
(a \bullet a)\, b &= (b \bullet a)\, a + p \\
p &= (a \bullet a)\, b - (b \bullet a)\, a
\end{aligned}
$$

b) Por la antisimetría del producto vectorial y para el caso $c = b$ (5.9) se escribe

$$
\begin{aligned}
(a \times b) \times b &= -(b \times a) \times b \\
&= -\left[(b \bullet b)\, a - (a \bullet b)\, b\right] \text{ por } (a) \\
&= (a \bullet b)\, b - (b \bullet b)\, a,
\end{aligned}
$$

por lo tanto se demuestra la propiedad para este caso.

c) En el caso $c = a \times b$, ambos lados de (5.9) son cero ya que $(a \times b) \parallel (a \times b)$ por la definición geométrica del producto vectorial $\|(a \times b) \times (a \times b)\| = 0$.

El caso general sigue a partir de *a)-b)-c)* y de la linealidad de (5.9) en c, ya que a, b y $a \times b$ forman una base para $\mathbb{R}^3$

Quedando mostrada de nuevo la propiedad (5.8), escrita en la forma usualmente conocida como "baccab".

En $\mathbb{R}^n$, las identidades (5.7) y (5.8), se dan a continuación, luego para $u_1, u_2, ..., u_{n-2}$ y $w_1, w_2, ..., w_{n-1}$ vectores de $\mathbb{R}^n$, se tiene que

$$
u_1 \times u_3 \times ... \times u_{n-2} \times (w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1}) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} w_1 & \cdots & w_{n-1} \\ u_1 \bullet w_1 & \cdots & u_1 \bullet w_{n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{n-2} \bullet w_1 & \cdots & u_{n-2} \bullet w_{n-1} \end{vmatrix} \tag{5.7*}
$$

$$(u_1 \times ... \times u_{n-1}) \bullet (w_1 \times ... \times w_{n-1}) = \begin{vmatrix} u_1 \bullet w_1 & \cdots & u_1 \bullet w_{n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{n-1} \bullet w_1 & \cdots & u_{n-1} \bullet w_{n-1} \end{vmatrix}. \tag{5.8*}$$

donde en (5.7)* y (5.8)* el determinante se interpreta la manera usual.

Se prentende ahora dar una prueba de la identidades (5.7)* y (5.8)* para $\mathbb{R}^n$ usando algebra lineal elemental.

Sin embargo, esta prueba merece un analisis algebraico detallado, el cual se sale del objetivo original [3].

A continuación se mostrará que la propiedad (5.8)* se deduce de (5.7)*.

DEMOSTRACIÓN

(5.7)* se tiene si y solo si para todo $u_1 \in \mathbb{R}^n$,

$$u_1 \bullet [u_2 \times ... \times u_{n-1} \times (w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1})] = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} u_1 \bullet w_1 & \cdots & u_1 \bullet w_{n-1} \\ u_2 \bullet w_1 & \cdots & u_2 \bullet w_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n-1} \bullet w_1 & \cdots & u_{n-1} \bullet w_{n-1} \end{vmatrix} \tag{5.13}$$

Sin embargo, a partir de un paso n es una permutación uniforme si y solo si n es impar, de la (Def. 4.8) y de la antisemetría del determinante, se tiene:

$$\begin{aligned} & u_1 \bullet [u_2 \times ... \times u_{n-1} \times (w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1})] \\ & = \det (u_1, ..., u_{n-1}, w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1}) \\ & = (-1)^{n+1} \det (w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1}, u_1, ..., u_{n-1}) \\ & = (-1)^{n+1} (w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1}) \bullet (u_1 \times ... \times u_{n-1}) \end{aligned} \tag{5.14}$$

Lo anterior muestra por que solo es necesario probar una de las propiedades (5.7)* y (5.8)*, ya que una es consecuencia de la otra. Sin embargo mostraremos una prueba de (5.8)*

Si $w_1, ..., w_{n-1}$ son linealmente dependientes entonces el lado izquierdo de (5.8*) es cero por (5.2); el lado derecho tambien es cero, ya que los vectores columna son lineal-mente dependientes. Luego se supone que $|w_1 \times ... \times w_{n-1}| \neq 0$, en este caso se definen matrices de $n \times n$

$$M = \begin{pmatrix} w_1 \times ... \times w_{n-1} \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad N = (w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1}\ ,\ w_1\ , ...\ , w_{n-1}),$$

donde M es una matriz de vectores fila y N es una matriz de vectores columna. Por (Def. 4.8) tenemos

$$\det(M) = (w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1}) \bullet (u_1 \times ... \times u_{n-1})\,; \quad y \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned} \det(N) &= \det\left(N^T\right) = (w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1}) \bullet (w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1}) \\ &= |w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1}|^2 . \end{aligned} \tag{5.16}$$

puesto que de (5.1),

$$MN = \begin{pmatrix} |w_1 \times ... \times w_{n-1}|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ u_1 \bullet (w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1}) & u_1 \bullet w_1 & \cdots & u_1 \bullet w_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n-1} \bullet (w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1}) & u_{n-1} \bullet w_1 & \cdots & u_{n-1} \bullet w_{n-1} \end{pmatrix}.$$

El determinante de la submatriz

$$X = (u_i \times w_j) = \begin{pmatrix} u_1 \bullet w_1 & \cdots & u_1 \bullet w_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n-1} \bullet w_1 & \cdots & u_{n-1} \bullet w_{n-1} \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

es el lado derecho de (5.8)*. Partiendo de

$$\begin{aligned} & |w_1 \times ... \times w_{n-1}|^2 \ \det(X) \\ & = \det(MN) = \det(M)\det(N) \\ & = ((w_1 \times w_2 \times ... \times w_{n-1}) \bullet (u_1 \times ... \times u_{n-1})) \ |w_1 \times ... \times w_{n-1}|^2 . \end{aligned} \tag{5.18}$$

y $|w_1 \times ... \times w_{n-1}| \neq 0$, se completa la demostración de la ecuación (5.8)*. ■

Bibliografía

[1] APOSTOL Tom M.*Calculus. Volumen 1, Reverté col. s.a*, *Colombia* 1988.

[2] CAMPOS Alberto.*Geometría Lineal.XIX Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Enero 2003. Universidad de Nacional de Colombia.*

[3] DITTMER Andrew, *Cross product Identities in Arbitrary Dimension, American Mathematical Monthly* (1994) 887-891

[4] M. Spivak, *Calculus on Manifolds.* W. A. Benjamin, *Inc., Menlo Park, California*, 1965, pp. 83-84.

[5] .Stanley I. Grossman.*Álgebra Lineal, McGraw-Hill, Mexico, 1999*