

EL MÓDULO DE CONVEXIDAD Y LA CONSTANTE DE JAMES

Autor:

Diana Isabel Hernández Rojas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2019

EL MÓDULO DE CONVEXIDAD Y LA CONSTANTE DE JAMES

Autor:

DIANA ISABEL HERNÁNDEZ ROJAS

Trabajo de grado como requisito para optar al título de:

Matemática

Director:

MICHAEL ALEXANDER RINCÓN VILLAMIZAR

Doctor en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2019

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mis padres, Isabel Rojas y Misael Hernández, cuya motivación y apoyo fue incondicional para culminar mis estudios con éxito. Así mismo agradezco al profesor Dr. Michael Alexander Ricón Villamizar por su paciencia, compromiso y dedicación por mi trabajo, además por su disposición a atender mis dudas en la academia y sobre todo por lo que me enseñó como profesor, matemático y persona.

Quiero expresar agradecimientos por Luis Martínez quién, desde un inicio, no solo fue un gran apoyo, sino que con su disciplina y entrega hacia la academia me enseñó que podía vencer cualquier obstáculo y esto es solo una parte de lo que aprendí de él.

Finalmente a mis amigas, María, Angie y Diana, mujeres matemáticas que me mostraron la importancia de la mujer en la ciencia y el valor de las matemáticas en sus diferentes campos de acción y disciplinas.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	10
1 PRELIMINARES	1
1.1 ESPACIOS DE BANACH	1
1.2 ESPACIOS ESTRICTAMENTE CONVEXOS	9
1.3 DESIGUALDADES DE CLARKSON	13
2 EL MÓDULO DE CONVEXIDAD	19
2.1 PROPIEDADES GENERALES	19
2.2 EJEMPLOS	29
2.3 OTRAS PROPIEDADES DEL MÓDULO DE CONVEXIDAD	36
3 CONSTANTE DE JAMES	42
3.1 DEFINICIONES Y EJEMPLOS GENERALES	42
3.2 ESPACIOS UNIFORMEMENTE NO CUADRADOS	48
Bibliografía	52

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1	Bola unitaria estrictamente convexa	10
2.3	$\varepsilon_0(\ \cdot\ _2) = 0$	20
2.4	$\varepsilon_0(\ \cdot\ _1) = 2$	20
2.5	Gráfica de δ_X para los espacios Hilbert	30
2.6	Gráfica de δ_X para \mathbb{R}^2 con la norma $\ell_2 - \ell_1$	30
2.7	Gráfica de δ_X para ℓ_3 con la norma $\ \cdot\ _3$	35
2.8	Gráfica de δ_X para $\ell_{1/2}$ con la norma $\ \cdot\ _{1/2}$	35
3.10	$(\mathbb{R}^2, \ell_1 - \ell_2)$	49
3.11	$(\mathbb{R}^2, \ \cdot\ _1)$	49

RESUMEN

TÍTULO: EL MÓDULO DE CONVEXIDAD Y LA CONSTANTE DE JAMES*.

AUTOR: HERNÁNDEZ ROJAS DIANA ISABEL**.

PALABRAS CLAVES: CONVEXIDAD UNIFORME, CONVEXIDAD ESTRICTA, MÓDULO DE CONVEXIDAD, CONSTANTE DE JAMES, ESPACIOS UNIFORMEMENTE NO CUADRADOS.

DESCRIPCIÓN:

El objetivo de este trabajo es, dado un espacio de Banach X , estudiar algunas propiedades del módulo de convexidad, la constante de James, algunas relaciones que existen entre el módulo de convexidad y la constante de James, y finalmente su relación con la geometría del espacio en cuestión.

En el primer capítulo (preliminares) se definen los espacios de Banach y se muestran ejemplos importantes para el desarrollo del trabajo; además se introduce una primera noción geométrica en el espacio de Banach X , llamada convexidad estricta, y por último se presentan las desigualdades de Clarkson, las cuales serán usadas en el capítulo dos.

En el segundo capítulo se definen la noción geométrica de convexidad uniforme en los espacios de Banach y la función módulo de convexidad, con el fin de estudiar su relación con la convexidad estricta. Seguidamente se ilustran algunos ejemplos que cumplen o no con la definición de convexidad uniforme haciendo uso de la función mencionada anteriormente. Se finaliza este capítulo con algunas propiedades que cumple la función módulo de convexidad.

Finalmente, en el tercer capítulo se definen tres constantes, $A_2(X)$, $S(x)$ y $J(X)$, esta última llamada la constante de James. Se estudia entonces en este apartado la relación de $J(X)$ con el módulo de convexidad, además de algunas desigualdades que cumplen la constante de James y $A_2(X)$. Para terminar, se definen los espacios uniformemente no cuadrados (UNS) y se muestra una relación que existe entre el módulo de convexidad y la constante $S(X)$.

*Trabajo de grado.

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Michael Alexander Rincón Villamizar (Doctor en Matemáticas).

ABSTRACT

TITLE: THE MODULE OF CONVEXITY AND JAMES'S CONSTANT*.

AUTHOR: HERNÁNDEZ ROJAS DIANA ISABEL**.

KEYWORDS: UNIFORM CONVEXITY, STRICT CONVEXITY, MODULE OF CONVEXITY, JAMES'S CONSTANT, UNIFORMLY NON-SQUARE SPACES.

DESCRIPTION:

The purpose of this work is given a Banach space X to study some properties from the convexity module, the James's constant, some existing kind of relations between the module of convexity and James's constant and finally, its link with space geometry included.

In the first chapter (preliminaries) the Banach spaces are defined and some important examples are shown for the development of this work also it's introduced a first geometry notion in the space Banach X called strict convexity and in the end the Clarkson's inequalities are presented which will be used in chapter number two.

In the second chapter is defined the geometric notion of uniform convexity in Banach spaces and the convexity module function with the purpose of study its relationship with strict convexity then some examples are exhibited to show if they comply or not with uniform convexity definition using the previously named function. This chapter ends with some properties that the convexity module function fulfills.

Ultimately in the third chapter given a Banach space X three constants are defined $A_2(X)$, $S(x)$ y $J(x)$, the last one is called James constant. Its studied in this chapter the relation $J(x)$ with convexity module also some inequalities that fulfill James's constant and $A_2(x)$. To finish the non-square spaces are defined (UNS) additionally, its exposed a relation between the convexity module and $S(x)$ constant.

*Degree work

**Faculty of Sciences. School of Mathematics. Advisor: Michael Alexander Rincón Villamizar (PhD in mathematics).

INTRODUCCIÓN

Uno de los propósitos de la Geometría de los Espacios de Banach es estudiar las propiedades geométricas de éstos, tales como convexidad estricta, convexidad uniforme, etc. Una manera de estudiar tales propiedades es introduciendo parámetros asociados al espacio de Banach en cuestión por medio de funciones reales cuyo valor dependerá del espacio de Banach considerado. Esta idea es inspirada por Clarkson ¹ [2] quien introdujo la noción de convexidad uniforme a través de una función conocida como el módulo de convexidad, la cual es definida como sigue: dado un espacio de Banach X , definimos $\delta_X: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ por

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x-y\| = \varepsilon \right\}.$$

Diremos que X es uniformemente convexo si $\delta_X(\varepsilon) > 0$ para cada $0 < \varepsilon < 2$. Geométricamente, esto significa que el punto medio de una cuerda variable de la esfera unitaria del espacio no se aproxima a la superficie de la esfera salvo si la longitud de la cuerda tiende a cero.

Otra propiedad estudiada en la geometría de los Espacios de Banach es la propiedad de ser uniformemente no cuadrado, introducida por James ² en [7]. Diremos que un espacio de Banach X es uniformemente no cuadrado si existe $0 < \delta < 1$ con la siguiente propiedad: dados $x, y \in X$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ tenemos $\|x+y\|/2 \leq 1 - \delta$ o $\|x-y\|/2 \leq 1 - \delta$.

¹J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396-414.

²R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*. Ann. of Math. (2) 80 (1964), 542-550.

Una manera de caracterizar los espacios de Banach con esta propiedad es a través de la constante de James, definida como:

$$J(X) = \sup\{\min\{\|x - y\|, \|x + y\|\} : \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Esta constante fue introducida por Gao y Lau ³ en [5]. Es claro de las definiciones que X es uniformemente no cuadrado si, y solo si, $J(X) < 2$. Más aún, es conocido que un espacio de Banach X es uniformemente no cuadrado si, y solo si, $\delta_X(\varepsilon_0) > 0$ para algún $0 < \varepsilon_0 < 2$ ⁴[8]. Por otra parte, es mostrado que si X es un espacio de Banach, la constante de James y el módulo de convexidad se relacionan mediante la siguiente igualdad:

$$J(X) = \sup\{\varepsilon \in (0, 2) : \delta_X(\varepsilon) \leq 1 - \varepsilon/2\}.$$

El objetivo de este trabajo es estudiar algunas propiedades del módulo de convexidad, la constante de James, algunas relaciones que existen entre el módulo de convexidad y la constante de James, y finalmente su relación con la geometría del espacio en cuestión. Nuestro trabajo es basado en los resultados de los artículos [1], [3] y [8].

³J. Gao, K. S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 48 (1990), 101–112.

⁴M. Kato, L. Maligranda, Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*. Studia Math. 144 (2001), 275–295.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

El objetivo de este capítulo es presentar una serie de definiciones que serán usadas en el desarrollo de este texto, además, presentar algunos ejemplos que pretenden ilustrarlas y así mismo, se establecerá la notación básica que será usada a lo largo de este trabajo.

1.1. ESPACIOS DE BANACH

Todos los espacios considerados en este trabajo serán sobre el campo de los números reales \mathbb{R} .

Definición 1.1. Sea X un espacio vectorial. Una norma en X es una función $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$;
2. $\|x\| = 0$ si, y solo si $x = 0$;
3. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $x \in X$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

El par $(X, \|\cdot\|)$ es llamado espacio normado.

A continuación presentamos algunos ejemplos de espacios normados.

Ejemplo 1.2. El campo \mathbb{R} es un espacio normado junto con la norma del valor absoluto.

Ejemplo 1.3. Sea $X = \mathbb{R}^2$. La función $\|\cdot\|_\infty: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}, \quad x = (x_1, x_2) \in X$$

es una norma en X .

Ejemplo 1.4. Sea $X = \mathbb{R}^2$. Considere la función $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\|x\| := \begin{cases} \|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} & \text{si } x \in Q_1 \cup Q_3; \\ \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| & \text{si } x \in Q_2 \cup Q_4; \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \|x\|_2 & \text{si } x_1 \cdot x_2 \geq 0; \\ \|x\|_1 & \text{si } x_1 \cdot x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Donde los Q_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, representan los cuadrantes del plano cartesiano. Verifiquemos que $\|\cdot\|$ es una norma en X . Esta norma es llamada $\ell_2 - \ell_1$.

Para ver que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado vamos a considerar los siguientes casos:

Caso 1: Suponga que $x \in Q_1 \cup Q_3$; en este caso veamos que $\|\cdot\|_2$ cumple con las condiciones de norma, es decir:

i) Se cumple que $\|x\|_2 \geq 0$ ya que $\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ para todo par $(x_1, x_2) \in Q_1 \cup Q_3$.

ii) $\|x\|_2 = 0$ si, y solo si, $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = 0$. Ahora, $x_1^2, x_2^2 \geq 0$; por ende, $x_1 = x_2 = 0$, es decir $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

iii) Para la prueba de la desigualdad triangular se usará la desigualdad de Minkowski para el caso $n = 2$, así

$$\begin{aligned} \|x + y\|_2 &= ((x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2)^{1/2} \\ &\leq (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} + (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \\ &= \|x\|_2 + \|y\|_2. \end{aligned}$$

iv) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_2 &= ((\alpha x)_1^2 + (\alpha x)_2^2)^{1/2} \\ &= (\alpha^2((x_1^2 + x_2^2)))^{1/2} \\ &= |\alpha|(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \\ &= |\alpha| \cdot \|x\|_2. \end{aligned}$$

Caso 2: Sea $x \in Q_2 \cup Q_4$. Para este caso se procede de forma similar, pero esta vez haciendo uso de las propiedades del valor absoluto. Tenemos entonces que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

Enunciaremos a continuación la desigualdad de Minkowski una muy conocida desigualdad que será usada en resultados posteriores. Para una prueba de esta, véase [6, Teorema 5.1.1 y Proposición 5.3.1] .

Proposición 1.5. *Suponga que $1 \leq p < \infty$ entonces,*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{1/p},$$

para cualesquiera $(x_n), (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $0 < p < 1$ dicha desigualdad se cumple en sentido contrario.

Ejemplo 1.6. Dado $1 \leq p < \infty$, sea

$$\ell_p = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}.$$

Para cada $x = (x_n) \in \ell_p$ definamos

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

La función $\|\cdot\|_p$ es una norma en el espacio ℓ_p . En ese sentido,

i) Observe que $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} \geq 0$ debido a que $|x_n|^p \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

ii) Tenemos que $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} = 0$ si, y sólo si, $|x_n|^p = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

iii) La desigualdad triangular es consecuencia inmediata de la desigualdad de Minkowski.

iv) Sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces

$$\|\alpha x\|_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \|x\|_p.$$

De ahí se deduce que $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio vectorial normado.

Definición 1.7. Un espacio de Banach es un espacio normado en el cual toda sucesión de Cauchy es convergente en el espacio.

Ejemplo 1.8. El campo \mathbb{R} junto con la norma del valor absoluto o módulo es un espacio de Banach.

Antes de presentar el siguiente ejemplo, recordaremos un resultado del Análisis Funcional. Para ello, introduciremos una definición.

Definición 1.9. Sea X un espacio vectorial. Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas en X , diremos que $\|\cdot\|_1$ es equivalente a $\|\cdot\|_2$ si existen constantes $K, M > 0$ tales que $K\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$ para cada $x \in X$.

Proposición 1.10. Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas equivalentes en un espacio vectorial X . Entonces $(X, \|\cdot\|_1)$ es Banach si, y solo si, $(X, \|\cdot\|_2)$ también lo es.

Demostración. Como $\|x\|_1$ y $\|x\|_2$ son equivalentes en el espacio vectorial X , tenemos que existen constantes $K, M > 0$ tales que, $K\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$ para cada $x \in X$. Supongamos primero que $(X, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach. Como $(X, \|\cdot\|_2)$ es un espacio vectorial normado, por hipótesis, basta mostrar que este espacio es completo, es decir, debemos ver que toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(X, \|\cdot\|_2)$ converge a un punto del espacio.

Debido a que $(X, \|\cdot\|_1)$ es Banach, existe $x \in X$ tal que $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$, esto es, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ el cual cumple que para $n > n_0$ tenemos $\|x_n - x\|_1 < \varepsilon/M$. Ahora, como $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes en el espacio vectorial X se cumple que

$$\|x_n - x\|_2 \leq M\|x_n - x\|_1 < \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$, esto es $\|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$. Para mostrar el recíproco se procede de manera análoga. \square

Ejemplo 1.11. El espacio $X = \mathbb{R}^2$ junto con la norma $\ell_2 - \ell_1$ es un espacio de Banach. Para mostrar que $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ es Banach, por la Proposición 1.10 es suficiente ver que

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ es equivalente a $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Mostraremos que

$$\|x\|_2 \leq \|x\| \leq \sqrt{2}\|x\|_2 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2. \quad (1.1)$$

Sea $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Si $x_1x_2 \geq 0$ entonces $\|x\| = \|x\|_2$ y la desigualdad (1.1) se verifica trivialmente. En el caso en que $x_1x_2 \leq 0$ tenemos $\|x\| = \|x\|_1$. Por la desigualdad de Minkowski tenemos

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2} = |x_1| + |x_2| = \|x\|.$$

Para mostrar la otra desigualdad necesitamos ver que $|x_1| + |x_2| \leq \sqrt{2x_1^2 + 2x_2^2}$, lo cual es consecuencia de la cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} & (|x_1| - |x_2|)^2 \geq 0; \\ \iff & |x_1|^2 - 2|x_1x_2| + |x_2|^2 \geq 0; \\ \iff & |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 2|x_1x_2|; \\ \iff & 2|x_1|^2 + 2|x_2|^2 \geq |x_1|^2 + 2|x_1x_2| + |x_2|^2; \\ \iff & 2|x_1|^2 + 2|x_2|^2 \geq (|x_1| + |x_2|)^2 \\ \iff & \sqrt{2|x_1|^2 + 2|x_2|^2} \geq |x_1| + |x_2|. \end{aligned}$$

De ahí que $\|x\| \leq \sqrt{2}\|x\|_2$. Por tanto las normas son equivalentes.

Ejemplo 1.12. $L_2 = L_2[0, 1]$ denota el espacio vectorial de todas las clases de las funciones escalares medibles según Lebesgue definidas en casi todo punto en $[0, 1]$ tal que $\int_0^1 (f(x))^2 dx < \infty$, la suma vectorial y la multiplicación por escalar es definida punto a punto, dotado de la norma

$$\|f\|_2^2 := \int_0^1 (f(x))^2 dx.$$

Ejemplo 1.13. El espacio $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach [4, Proposición 1.16].

Ejemplo 1.14. Sea $C[0, 1]$ el espacio de funciones continuas definidas en $[0, 1]$ y con valores en \mathbb{R} , junto con la norma

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f\|_2, \quad \text{si } f \in C([0, 1]),$$

donde $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ y $\|f\|_2^2 := \int_0^1 (f(x))^2 dx$. Es conocido que $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_2$ definen normas en $C[0, 1]$.

Veamos que $(C[0, 1], \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Observemos que para cada $g \in C[0, 1]$

tenemos $\|g\|_2 \leq \|g\|_\infty$ y por tanto

$$\|f\|_\infty \leq \|f\| \leq 2\|f\|_\infty, \quad \text{si } f \in C[0, 1].$$

Esto demuestra que las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes. Como $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ es Banach [4, Proposición 1.8], por la Proposición 1.10 concluimos que $(C[0, 1], \|\cdot\|)$ también lo es.

Definición 1.15. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Definimos

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \quad \text{y}$$

$$S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

Los conjuntos B_X y S_X son llamados bola y esfera unitaria, respectivamente.

Definición 1.16. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. El espacio dual de X , denotado por X^* , es el conjunto de todos los funcionales lineales definidos en X que son continuos con respecto a la topología de la norma.

Observación 1.17. Dado un espacio normado X , la función $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} \|x^*\| &:= \sup\{|x^*(x)| : x \in S_X\} \\ &= \sup\{|x^*(x)| : x \in B_X\}, \quad \text{para cada } x^* \in X^*, \end{aligned}$$

es una norma en X . Más aún, el espacio X^* junto con esta norma es un espacio de Banach.

Un problema clásico de la teoría de espacios de Banach es determinar una representación para el espacio X^* , donde X es un espacio de Banach dado. Ilustraremos este problema con un ejemplo.

Ejemplo 1.18. Considere el espacio $X = \mathbb{R}^2$ con norma $\ell_2 - \ell_1$. Veamos que X^* es isométrico al espacio $Y = \mathbb{R}^2$ junto con la norma $\ell_2 - \ell_\infty$:

$$\|x\| = \begin{cases} \|x\|_2, & \text{si } x_1 x_2 \geq 0, \\ \|x\|_\infty, & \text{si } x_1 x_2 \leq 0, \end{cases}$$

donde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Sea $\Gamma: \mathbb{R}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$ el isomorfismo de espacios vectoriales dado por

$$(x, y) \mapsto x\pi_1 + y\pi_2,$$

donde $\pi_1, \pi_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$ son definidas por $\pi_1(a, b) = a$ y $\pi_2(a, b) = b$, para cada $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si $\tau = \alpha\pi_1 + \beta\pi_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$ entonces

$$\|\tau\| = \sup\{|\alpha x_1 + \beta x_2| : \|(x_1, x_2)\| = 1\}.$$

Mostraremos que

$$\|\tau\| = \begin{cases} \|(\alpha, \beta)\|_2, & \text{si } \alpha\beta \geq 0, \\ \|(\alpha, \beta)\|_\infty, & \text{si } \alpha\beta \leq 0. \end{cases}$$

Tenemos dos casos:

Caso 1: Suponga $\alpha\beta \geq 0$. Si $x_1x_2 \geq 0$, entonces por definición de la norma $\ell_2 - \ell_1$ tenemos $\|(x_1, x_2)\| = x_1^2 + x_2^2 = 1$. Debemos resolver el problema de maximizar

$$f(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad \text{sujeto a } x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ y } x_1x_2 \geq 0.$$

Sea $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Usando el método de multiplicadores de Lagrange, debemos resolver el sistema $\nabla f(x_1, x_2) = \lambda \nabla g(x_1, x_2)$ y $g(x_1, x_2) = 0$, es decir,

$$(\alpha, \beta) = (2\lambda x_1, 2\lambda x_2), \quad \text{y } x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

De modo que $\alpha = 2\lambda x_1$ y $\beta = 2\lambda x_2$. Si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$, entonces $\lambda \neq 0$ y $x_1 = 0$. Lo anterior implica que $x_2 = \pm 1$ y $|f(0, \pm 1)| = |\beta| = \|(0, \pm\beta)\|_2$. Si $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$, un razonamiento semejante demuestra que $|f(\pm 1, 0)| = |\alpha| = \|(\pm\alpha, 0)\|_2$.

Ahora, si $\alpha\beta \neq 0$ entonces $\lambda \neq 0$ y concluimos que $x_1 = \alpha/2\lambda$ y $x_2 = \beta/2\lambda$. Luego $\lambda = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}/2$ y así f alcanza sus extremos en los puntos $(\alpha/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \beta/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$ y

$$(-\alpha/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, -\beta/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}). \text{ Por lo tanto, } |f(x_1, x_2)| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \|(\alpha, \beta)\|_2.$$

Si $x_1x_2 \leq 0$ entonces, $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2| = 1$. En este caso, debemos resolver el problema de maximizar,

$$f(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad \text{sujeto a } |x_1| + |x_2| = 1 \text{ y } x_1x_2 \leq 0.$$

Si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$, entonces $f(x_1, x_2) = \beta x_2$. Observe que $0 \leq |x_2| \leq 1$ y por tanto $|f(x_1, x_2)|$ tiene valor máximo $|\beta| = \|(\alpha, \beta)\|_2$. Si $\alpha \neq 0$ y $\beta = 0$, un argumento análogo demuestra que $|f(x_1, x_2)|$ tiene valor máximo $|\alpha| = \|(\alpha, \beta)\|_2$.

Considere el caso $\alpha\beta \neq 0$ y supongamos que $x_1 \leq 0$ y $x_2 \geq 0$. Entonces podemos

escribir el problema de maximización anterior como sigue

$$f(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad \text{sujeto a } x_2 - x_1 = 1 \text{ y } x_1 \leq 0, x_2 \geq 0.$$

Escribiendo $x_2 = 1 + x_1$, vemos que $f(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta(1 + x_1)$ para cada $-1 \leq x_1 \leq 0$. Sea $g: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \alpha t + \beta(1 + t) = (\alpha + \beta)t + \beta$. Si $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, tenemos $\alpha + \beta > 0$ y la función g tiene valor máximo igual a $\beta = |\beta|$; si $\alpha < 0$ y $\beta < 0$, sigue que $\alpha + \beta < 0$ y g tiene valor máximo igual a $-\alpha = |\alpha|$.

Como consecuencia de los resultados anteriores sigue que si

$$a_1 = \sup\{|\alpha x_1 + \beta x_2| : \|(x_1, x_2)\| = 1, x_1 x_2 \geq 0\} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \text{y}$$

$$a_2 = \sup\{|\alpha x_1 + \beta x_2| : \|(x_1, x_2)\| = 1, x_1 x_2 \leq 0\} = \max\{|\alpha|, |\beta|\},$$

entonces $\|\tau\| = \max\{a_1, a_2\} = \|(\alpha, \beta)\|_2$.

Caso 2: Suponga $\alpha\beta \leq 0$. Si $x_1 x_2 \geq 0$ entonces, $\|(x_1, x_2)\| = x_1^2 + x_2^2 = 1$. En este caso debemos resolver el problema de maximizar

$$f(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad \text{sujeto a } x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ y } x_1 x_2 \geq 0.$$

Si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, el mismo razonamiento del caso 1 demuestra que $|f|$ tiene valor máximo igual a $\|(\alpha, \beta)\|_\infty$. Si $\alpha\beta \neq 0$, por simetría basta suponer que $\alpha < 0$ y $\beta > 0$. Si $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$, considere la función auxiliar $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \alpha x + \beta\sqrt{1 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$. Entonces $g'(x) = \alpha - \beta \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} < 0$ para cada $0 \leq x < 1$. Por lo tanto g es decreciente. Así $\alpha = g(1) \leq g(x) \leq g(0) = \beta$. El caso en que $x_1 \leq 0$ y $x_2 \leq 0$ es tratado de manera similar.

Si $x_1 x_2 \leq 0$ tenemos $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2| = 1$ y debemos resolver el problema de maximizar

$$f(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad \text{sujeto a } |x_1| + |x_2| = 1 \text{ y } x_1 x_2 \leq 0.$$

Para resolver el problema anterior basta considerar el caso en que $x_1 \leq 0$ y $x_2 \geq 0$. Entonces $x_2 = 1 + x_1$ con $-1 \leq x_1 \leq 0$. Sea $h: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(t) = \alpha t + \beta(1 + t) = (\alpha + \beta)t + \beta$, $-1 \leq t \leq 0$. Si $\alpha + \beta < 0$, la función h tiene valor máximo igual a $-\alpha$; si $\alpha + \beta > 0$, el máximo valor de h es β .

Los resultados anteriores demuestran que si

$$a_1 = \sup\{|\alpha x_1 + \beta x_2| : \|(x_1, x_2)\| = 1, x_1 x_2 \geq 0\}, \quad y$$

$$a_2 = \sup\{|\alpha x_1 + \beta x_2| : \|(x_1, x_2)\| = 1, x_1 x_2 \leq 0\},$$

entonces $\|\tau\| = \max\{a_1, a_2\} = \|(\alpha, \beta)\|_\infty$.

Lema 1.19. *Sea X un espacio de Banach. Si $x^* \in S_{X^*}$ alcanza un máximo local en $x \in S_X$, entonces $|x^*(x)|$ es un máximo global para $|x^*|$.*

Demostración. Para mostrar que $|x^*(x)|$ es un máximo global para $|x^*|$, es suficiente ver que $|x^*(x)|=1$ ya que $x^* \in S_{X^*}$. Si $\varepsilon > 0$ es dado, entonces existe $u \in S_X$ tal que $1 - \varepsilon < x^*(u)$. Como x^* alcanza un máximo local en x , existe una bola con centro en x y radio $r > 0$, $B(x, r)$, tal que $x^*(y) \leq x^*(x)$ para cada $y \in B(x; r) \cap S_X$. Ahora, por la continuidad de la norma tenemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{x + |\lambda|u}{\|x + |\lambda|u\|} - x \right\| = 0.$$

De modo que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |\lambda| < \delta$ entonces $\frac{x + |\lambda|u}{\|x + |\lambda|u\|} \in B(x, r) \cap S_X$. Por ello tenemos para $0 < |\lambda| < \delta$

$$x^* \left(\frac{x + |\lambda|u}{\|x + |\lambda|u\|} \right) \leq x^*(x), \quad \text{esto es,} \quad x^*(x + |\lambda|u) \leq \|x + |\lambda|u\| x^*(x).$$

Ahora $x^*(x + |\lambda|u) = x^*(x) + \lambda x^*(u) \leq \|x + |\lambda|u\| x^*(x)$ y así

$$|\lambda| x^*(u) \leq (\|x + |\lambda|u\| - 1) x^*(x) \leq |\lambda| |x^*(x)|,$$

pues $\|x + |\lambda|u\| - 1 = \|x + |\lambda|u\| - \|x\| \leq |\lambda|$. Por lo tanto $1 - \varepsilon < x^*(u) \leq |x^*(x)|$. Como $\varepsilon > 0$ fue escogido arbitrariamente, se deduce que $|x^*(x)| = 1$. \square

1.2. ESPACIOS ESTRICTAMENTE CONVEXOS

La geometría de los espacios de Banach es la área del Análisis funcional que se encarga de estudiar las propiedades geométricas de la bola unitaria de un espacio de Banach. En los trabajos de A.J. Clarkson en 1936 [2], en su artículo sobre espacios uniformemente convexos. se introducen las primeras nociones sobre convexidad estricta en espacios normados. Geométricamente, un espacio normado es estrictamente convexo si la esfera unitaria de tal espacio no posee segmentos rectilíneos. Clarkson demostrará que este hecho simple, tiene consecuencias importantes en la estructura del espacio en cuestión.

Definición 1.20. Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se dice *estrictamente convexo*, si para todo $x, y \in S_X$ que cumplen $\|x + y\| = 2$ se tiene que $x = y$.

A continuación se ilustrará el concepto de convexidad estricta haciendo uso de la geometría del plano.

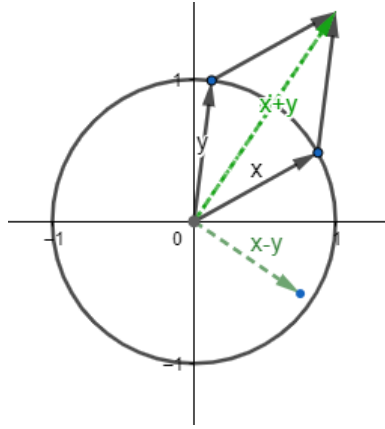


Figura 1.1: Bola unitaria estrictamente convexa

Antes de dar ejemplos de espacios estrictamente convexos, mostraremos una caracterización.

Proposición 1.21. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- X es estrictamente convexo;
- Si $x, y \in X \setminus \{0\}$ son tales que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, entonces $x = \lambda y$ para algún $\lambda > 0$.

Demostración. Supongamos b) y sean $x, y \in S_X$ tales que $\|x + y\| = 2$. Entonces $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Sigue de b) que $x = \lambda y$ para algún $\lambda > 0$. Como $x, y \in S_X$ sigue que $\lambda = 1$ y así $x = y$. Recíprocamente, sean $x, y \in X \setminus \{0\}$ tales que $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\|x\| \leq \|y\|$. Tenemos

$$\begin{aligned} 2 &\geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| \geq \left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} \right\| - \left\| \frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|x\|} \|x + y\| - \|y\| \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) \\ &= \frac{1}{\|x\|} (\|x\| + \|y\|) - \|y\| \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|} \right) = 2. \end{aligned}$$

De lo anterior $\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = 2$, y por la convexidad estricta tenemos $x = \lambda y$, donde $\lambda = \|x\|/\|y\|$. Esto completa la prueba. \square

Ahora se presentarán algunos ejemplos de espacios de Banach que son estrictamente convexos.

Ejemplo 1.22. El espacio $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ es estrictamente convexo. En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$. Supongamos que $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ y $\|x + y\|_2 = 2$. Veamos que $x = y$. Note que

$$\begin{aligned} 4 = \|x + y\|_2^2 &= \sum_{i=1}^2 |x_i + y_i|^2 = \sum_{i=1}^2 |x_i|^2 + 2x_i y_i + |y_i|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^2 |x_i|^2 + 2 \sum_{i=1}^2 |x_i y_i| + \sum_{i=1}^2 |y_i|^2 \\ &= 1 + 2 \sum_{i=1}^2 |x_i y_i| + 1. \end{aligned}$$

Sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$1 \leq \sum_{i=1}^2 |x_i y_i| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 = 1.$$

Luego $|\langle x, y \rangle| = \|x\|_2 \|y\|_2$, y así, $x = cy$ para algún $c \in \mathbb{R}$. Como $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$, tenemos $c = \pm 1$. La posibilidad $x = -y$ no puede darse pues $\|x + y\|_2 = 2$. Por tanto $x = y$ y así $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ es estrictamente convexo.

El ejemplo anterior es consecuencia de un resultado más general el cual probaremos a continuación.

Proposición 1.23. *Todo espacio con producto interno es estrictamente convexo.*

Demostración. Sean H un espacio con producto interno y $x, y \in H$ tales que $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x + y\| = 2$. Como en H se satisface la ley del paralelogramo tenemos,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Así $\|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x + y\|^2 = 0$. Entonces $x = y$. □

Observación 1.24. Recordemos que un espacio con producto interno es llamado espacio de Hilbert si es completo junto con la topología inducida por la norma asociada al producto interno dado. La proposición anterior nos muestra que todo espacio de Hilbert es estrictamente convexo.

Ahora veamos ejemplos de espacios de Banach que no son estrictamente convexos.

Ejemplo 1.25. El espacio $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ no es estrictamente convexo. Para mostrar esto, sean $x = (1, 0)$ y $y = (0, 1)$. Note que $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$, además, $\|x + y\|_1 = 2$ pero $x \neq y$.

Antes de mostrar un ejemplo de un espacio de dimensión infinita que no es estrictamente convexo, mostraremos un resultado debido a V. Klee que permite construir espacios estrictamente convexos.

Proposición 1.26. Sean X, Y espacios de Banach con Y estrictamente convexo. Si $T: X \rightarrow Y$ es un operador lineal continuo e inyectivo, entonces el espacio X junto con la norma $\|\cdot\|_0$ dada por

$$\|x\|_0 = \|x\| + \|T(x)\|$$

es estrictamente convexo.

Demostración. Como $\|\cdot\|_0$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$, sigue de la Proposición 1.10 que $(X, \|\cdot\|_0)$ es Banach. Sean $x, y \in X$ tales que el conjunto $\{x, y\}$ es linealmente independiente, entonces $\{T(x), T(y)\}$ también es linealmente independiente. Por la convexidad estricta de Y tenemos

$$\begin{aligned} \|x + y\|_0 &= \|x + y\| + \|T(x + y)\| \\ &\leq \|x\| + \|y\| + \|T(x + y)\| \\ &< \|x\| + \|y\| + \|T(x)\| + \|T(y)\| \\ &= \|x\|_0 + \|y\|_0. \end{aligned}$$

De donde $\|x + y\|_0 < \|x\|_0 + \|y\|_0$. Por la Proposición 1.21 concluimos que $(X, \|\cdot\|_0)$ es estrictamente convexo. \square

Ejemplo 1.27. Veamos que el espacio de Banach $(C[0, 1], \|\cdot\|)$ (ver Ejemplo 1.14) es estrictamente convexo. Consideremos el espacio $L_2[0, 1]$ de las funciones cuadrado integrables (ver [4, Definición 1.18]) junto con la norma $\|\cdot\|_2$. Entonces el operador $\text{Id}: C[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$ dado por $\text{Id}(f) = f$, $f \in C[0, 1]$ es inyectivo y continuo ya que

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \|f\|_\infty.$$

Como $(L_2[0, 1], \|\cdot\|_2)$ es Hilbert, por la Observación 1.24 sigue que $(L_2[0, 1], \|\cdot\|_2)$ es estrictamente convexo. Por la Proposición 1.26 sigue que $(C[0, 1], \|\cdot\|)$ es estrictamente convexo.

1.3. DESIGUALDADES DE CLARKSON

En esta sección probaremos las desigualdades de Clarkson para el espacio ℓ_p . Estas desigualdades se usarán a fin de establecer la convexidad uniforme del espacio $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$, como se verá en la sección 2.2 del Capítulo 2. Recordemos que si $1 < p < \infty$, el número $q = p/(p-1)$ es llamado *conjugado* de p .

Teorema 1.28. *Sea $p \geq 2$. Dados $x, y \in \ell_p$, tenemos las desigualdades:*

$$a) \quad 2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p) \leq \|x + y\|_p^p + \|x - y\|_p^p \leq 2^{p-1}(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p).$$

$$b) \quad 2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)^{q-1} \leq \|x + y\|_p^q + \|x - y\|_p^q.$$

$$c) \quad \|x + y\|_p^p + \|x - y\|_p^p \leq 2(\|x\|_p^q + \|y\|_p^q)^{p-1}.$$

Para $1 < p \leq 2$ estas desigualdades se tienen en sentido contrario.

Demostración. Notemos que para todo $p \geq 2$, el lado derecho de la desigualdad a) es equivalente al lado izquierdo. Para ver esto, basta hacer la sustitución $x + y = \zeta$ y $x - y = \eta$. De modo semejante se muestra la equivalencia de estas desigualdades cuando $1 < p \leq 2$.

Por otra parte, veamos que b) es equivalente a c). Nuevamente considere $x + y = \zeta$ y $x - y = \eta$, entonces $x = \frac{\zeta + \eta}{2}$ y $y = \frac{\zeta - \eta}{2}$. Suponiendo cierta b) tenemos

$$2(\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-1} \leq \|x + y\|^q + \|x - y\|^q.$$

Reescribiendo esta desigualdad en términos de ζ y η tenemos la cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} & 2 \left(\left\| \frac{\zeta + \eta}{2} \right\|^p + \left\| \frac{\zeta - \eta}{2} \right\|^p \right)^{q-1} \leq \|\zeta\|^q + \|\eta\|^q; \\ \iff & 2 \left(\frac{1}{2^p} \|\zeta + \eta\|^p + \frac{1}{2^p} \|\zeta - \eta\|^p \right)^{\frac{1}{p-1}} \leq \|\zeta\|^q + \|\eta\|^q; \\ \iff & \frac{2}{2^{\frac{p}{p-1}}} (\|\zeta + \eta\|^p + \|\zeta - \eta\|^p)^{\frac{1}{p-1}} \leq \|\zeta\|^q + \|\eta\|^q; \\ \iff & 2^{-(q-1)} (\|\zeta + \eta\|^p + \|\zeta - \eta\|^p)^{\frac{1}{p-1}} \leq \|\zeta\|^q + \|\eta\|^q; \\ \iff & (\|\zeta + \eta\|^p + \|\zeta - \eta\|^p)^{\frac{1}{p-1}} \leq 2^{q-1} (\|\zeta\|^q + \|\eta\|^q); \\ \iff & \|\zeta + \eta\|^p + \|\zeta - \eta\|^p \leq 2 (\|\zeta\|^q + \|\eta\|^q)^{q-1}, \end{aligned}$$

como queríamos ver. Similarmente se muestra que c) implica b).

Probemos b). Supongamos primero que $1 < p < 2$ y mostremos que si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces

$$|x + y|^q + |x - y|^q \leq 2(|x|^p + |y|^p)^{q-1}. \quad (1.2)$$

Note que para $p = 2$ se da la igualdad. Si $x = 0$, la desigualdad anterior es claramente satisfecha. Supongamos que $x \neq 0$. Si $|x| \geq |y|$, dividamos la desigualdad (1.2) por $|x|^q$. Entonces

$$\left|1 + \frac{y}{x}\right|^q + \left|1 - \frac{y}{x}\right|^q \leq 2 \left(1 + \frac{|y|^p}{|x|^p}\right)^{q-1}.$$

Denotando $c = \frac{y}{x}$ tenemos que $0 \leq |c| \leq 1$, y escribiendo la desigualdad anterior en términos de c se deduce que

$$|1 + c|^q + |1 - c|^q \leq 2(1 + |c|^p)^{q-1}. \quad (1.3)$$

La desigualdad anterior es válida cuando $c = 0$ o $c = 1$. Por simetría, basta suponer también que $0 < c < 1$. Haciendo $c = \frac{1-z}{1+z}$, entonces $0 < z < 1$. De ahí que la desigualdad anterior es equivalente a la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned} & \left|1 + \frac{1-z}{1+z}\right|^q + \left|1 - \frac{1-z}{1+z}\right|^q \leq 2 \left(1 + \left|\frac{1-z}{1+z}\right|^p\right)^{q-1}; \\ \iff & \left|\frac{1+z+1-z}{z+1}\right|^q + \left|\frac{1+z-1+z}{z+1}\right|^q \leq 2 \left(\frac{|1+z|^p + |1-z|^p}{|1+z|^p}\right)^{q-1}; \\ \iff & \left|\frac{2}{1+z}\right|^{\frac{p}{p-1}} + \left|\frac{2z}{1+z}\right|^{\frac{p}{p-1}} \leq 2 \frac{(|1+z|^p + |1-z|^p)^{\frac{1}{p-1}}}{|1+z|^{\frac{p}{p-1}}}; \\ \iff & (1 + |z|^q) \leq \frac{1}{2^{q-1}} (|1+z|^p + |1-z|^p)^{q-1}; \\ \iff & (1 + |z|^q)^{p-1} \leq \frac{1}{2} (|1+z|^p + |1-z|^p). \end{aligned}$$

Sea $S := \frac{1}{2}(|1+z|^p + |1-z|^p) - (1 + |z|^q)^{p-1}$. Queremos ver que los términos de S en su desarrollo de Taylor son no negativos. Para ello considere las expansiones en series de Taylor de las funciones $f_1, f_2: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas como, $f_1(z) = (1+z)^p$ y $f_2(z) = (1-z)^p$. Tenemos

$$\begin{aligned} f_1^{(1)} &= p(1+z)^{p-1}; \\ f_1^{(2)} &= p(p-1)(1+z)^{p-2}; \\ f_1^{(3)} &= p(p-1)(p-2)(1+z)^{p-3}; \\ &\vdots \\ f_1^{(k)} &= p(p-1)(p-2) \cdots (p-(k-1))(1+z)^{p-k}, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Del teorema de Taylor sigue para $0 < z < 1$ que

$$(1+z)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} z^n = \left[1 + \frac{p}{1!} z + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{p(p-1) \cdots (p-(k-1))}{k!} z^k + \dots \right].$$

De manera análoga para $0 < z < 1$ tenemos

$$\begin{aligned} (1-z)^p &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{f_2^{(n)}(0)}{n!} z^n \\ &= \left[1 + (-1) \frac{p}{1!} z + (-1)^2 \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \dots + (-1)^k \frac{p(p-1) \cdots (p-(k-1))}{k!} z^k + \dots \right]. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [(1+z)^p + (1-z)^p] &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} z^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{f_2^{(n)}(0)}{n!} z^n \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{p}{1!} z + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{p(p-1) \cdots (p-(k-1))}{k!} z^k + \dots \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[1 + (-1) \frac{p}{1!} z + (-1)^2 \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \dots + (-1)^k \frac{p(p-1) \cdots (p-(k-1))}{k!} z^k + \dots \right] \\ &= \left[1 + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \frac{p(p-1)(2-p)(3-p)}{4!} z^4 + \dots + \frac{p(p-1)(2-p) \cdots (2k-1-p)}{(2k)!} z^{2k} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (1+z^q)^{p-1} &= 1 + (p-1)z^q + \frac{(p-1)(p-2)}{2!} z^{2q} + \dots + \frac{(p-1)(p-2) \cdots (p-(2k-1))}{(2k-1)!} z^{(2k-1)q} \\ &\quad + \frac{(p-1)(p-2) \cdots (p-2k)}{(2k)!} z^{(2k)q} + \dots. \end{aligned}$$

Observe que esta suma puede ser escrita como

$$\begin{aligned} (1+z^q)^{p-1} &= 1 + (p-1)z^q - \frac{(p-1)(2-p)}{2!} z^{2q} + \dots + \frac{(p-1)(2-p) \cdots (2k-1-p)}{(2k-1)!} z^{(2k-1)q} \\ &\quad - \frac{(p-1)(2-p) \cdots (2k-p)}{(2k)!} z^{(2k)q} + \dots. \end{aligned}$$

Como resultado de lo anterior tenemos,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p(p-1)(2-p) \cdots (2k-1-p) z^{2k}}{(2k)!} - \frac{(p-1)(2-p) \cdots (2k-1-p)}{(2k-1)!} z^{(2k-1)q} \\ &\quad + \frac{(p-1)(2-p) \cdots (2k-p)}{(2k)!} z^{(2k)q}. \end{aligned}$$

Esta expresión puede ser escrita como sigue

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-p)(3-p)\cdots(2k-p)}{(2k-1)!} z^{2k} \left[\frac{1 - z^{\frac{2k-p}{p-1}}}{(2k-p)/(p-1)} - \frac{1 - z^{\frac{2k}{p-1}}}{2k/(p-1)} \right].$$

De acuerdo con lo anterior, veamos que la función $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $h(t) = \frac{1-z^t}{t}$, donde $z \in (0, 1)$ es fijo, es decreciente. Para ello basta ver que la derivada de h es no negativa, esto es,

$$h'(t) = \frac{-z^t \ln(z)t - (1 - z^t)}{t^2} \leq 0 \quad \text{si, y solo si,} \quad z^t(1 - t \ln(z)) - 1 \leq 0,$$

para toda $z \in (0, 1)$. Defina $g(t) = z^t(1 - \ln(z)t) - 1$ para $t \geq 0$. Note que,

$$\begin{aligned} g'(t) &= z^t \ln(z)(1 - \ln(z)t) - z^t \ln(z) \\ &= z^t \ln z(1 - t \ln(z) - 1) \\ &= -tz^t \ln^2(z) \leq 0. \end{aligned}$$

De ahí que g sea decreciente. Como $g(0) = 0$, $g(t) \leq 0$ para toda $t \geq 0$. Entonces g es decreciente, así $h'(t) \leq 0$ y por ende h decreciente. En consecuencia tenemos que los términos de la serie S son no negativos y por tanto es válida la desigualdad (1.2). Para terminar la prueba de b), sean $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_p$ y $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_p$. En el caso $1 < p < 2$, debemos probar que

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right]^{q/p} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right]^{q/p} \leq 2 \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p + |y_i|^p \right]^{q-1}. \quad (1.4)$$

Sean $0 < p/q = s < 1$, $|x_i + y_i|^q = A_i$, $|x_i - y_i|^q = B_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 1.5 tenemos

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i^s \right)^{1/s} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i^s \right)^{1/s} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} (A_i + B_i)^s \right)^{1/s}.$$

Combinando esto último junto con la desigualdad (1.2) y teniendo en cuenta que $q-1 =$

q/p se tiene

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right]^{q/p} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right]^{q/p} &\leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i + y_i|^q + |x_i - y_i|^q)^{p/q} \right]^{q/p} \\
&\leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} (2(|x_i|^p + |y_i|^p)^{q-1})^{p/q} \right]^{q/p} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{\infty} 2^{p/q} (|x_i|^p + |y_i|^p) \right]^{q/p} \\
&= 2 \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p + |y_i|^p \right]^{q-1}.
\end{aligned}$$

Así hemos probado $b)$ para $p \in (1, 2)$. Ahora veamos que $b)$ vale también para $p > 2$. Dados $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_p$ y $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_p$, debemos verificar que (1.4) es válida en sentido contrario. Haciendo A_i, B_i para cada $i \in \mathbb{N}$ y $s = p/q > 1$ como lo hicimos antes tenemos por la Proposición 1.5

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right]^{q/p} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right]^{q/p} \geq \left[\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i + y_i|^q + |x_i - y_i|^q)^{p/q} \right]^{q/p}.$$

Puesto que la desigualdad $b)$ fue probada para todos los valores en el intervalo $(1, 2)$ y $c)$ es equivalente a $b)$, podemos aplicar $c)$ para $1 < q < 2$, con lo cual obtenemos para cada $i \in \mathbb{N}$

$$|x_i + y_i|^q + |x_i - y_i|^q \geq 2(|x_i|^p + |y_i|^p)^{q-1}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right]^{q/p} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right]^{q/p} &\geq \left[\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i + y_i|^q + |x_i - y_i|^q)^{p/q} \right]^{q/p} \\
&\geq \left[\sum_{i=1}^{\infty} (2(|x_i|^p + |y_i|^p)^{q-1})^{p/q} \right]^{q/p} \\
&= 2 \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p + |y_i|^p \right]^{q-1}.
\end{aligned}$$

Así hemos probado $b)$ para $2 < p$.

Ahora probaremos $a)$. Supongamos que $p \geq 2$ y mostraremos que se cumple al lado izquierdo de $a)$.

Afirmación 1.29. Para $a, b \geq 0$ tenemos que $2(a^q + b^q)^{p-1} \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

Sin perder la generalidad supongamos que $a \leq b$. Dividiendo la desigualdad anterior por $b^{q(p-1)} = b^p$ obtenemos la desigualdad equivalente $2(c^q + 1)^{p-1} \leq 2^{p-1}(c^p + 1)$ para $0 \leq c \leq 1$. Reescribiendo y elevando a la potencia $1/p$ encontramos que

$$2^{p-2} \frac{c^p + 1}{(c^q + 1)^{p-1}} \geq 1, \quad \text{si y solo si,} \quad 2^{\frac{p-2}{p}} \frac{(c^p + 1)^{1/p}}{(c^q + 1)^{1/q}} \geq 1. \quad (1.5)$$

Para mostrar esta desigualdad defina $H: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $H(c) = 2^{\frac{p-2}{p}} \frac{(c^p + 1)^{1/p}}{(c^q + 1)^{1/q}}$, $0 \leq c \leq 1$. Note que

$$H(1) = 2^{\frac{p-2}{p}} \frac{(1^p + 1)^{1/p}}{(1^q + 1)^{1/q}} = 2^{\frac{p-2}{p}} \frac{2^{1/p}}{2^{1/q}} = 2^{\frac{p-1}{p}} 2^{-\frac{1}{p}} \frac{2^{1/p}}{2^{\frac{p-1}{p}}} = 1.$$

Luego para verificar (1.5) es suficiente ver que $dH/dc < 0$ si $c > 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dc} &= 2^{\frac{p-2}{p}} \left[\frac{(c^q + 1)^{1/q} \frac{1}{p} (c^p + 1)^{1/p-1} p c^{p-1} - (c^p + 1)^{1/p} \frac{1}{q} (c^q + 1)^{1/q-1} q c^{q-1}}{(c^q + 1)^{1/q^2}} \right] \\ &= 2^{\frac{p-2}{p}} \left[\frac{(c^q + 1)^{1/q} (c^p + 1)^{1/p-1} c^{p-1} - (c^p + 1)^{1/p} (c^q + 1)^{1/q-1} c^{q-1}}{(c^q + 1)^{1/q^2}} \right] \\ &= 2^{\frac{p-2}{p}} \frac{(c^q + 1)^{1/q} (c^p + 1)^{1/p}}{(c^q + 1)^{1/q^2}} [(c^p + 1)^{-1} c^{p-1} - (c^q + 1)^{-1} c^{q-1}] \\ &= 2^{\frac{p-2}{p}} \frac{(c^p + 1)^{1/p}}{(c^q + 1)^{1/q}} \left[\frac{c^{p-1}}{c^p + 1} - \frac{c^{q-1}}{c^q + 1} \right]. \end{aligned}$$

De modo que para $c > 0$, $dH/dc < 0$ si y solo si

$$\frac{c^{p-1}}{c^p + 1} - \frac{c^{q-1}}{c^q + 1} < 0 \quad \text{si y solo si,} \quad \frac{1}{(1/c)^p + 1} < \frac{1}{(1/c)^q + 1}.$$

La relación anterior se cumple debido a que la función $h: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida como, $h(t) = \frac{1}{(1/c)^t + 1}$, c fijo, es decreciente y $q = \frac{p}{p-1} < p$.

Finalmente probaremos a). Usando c) y la Afirmación 1.29 tenemos

$$\begin{aligned} \|x + y\|^p + \|x - y\|^p &\leq 2(\|x\|^q + \|y\|^q)^{p-1} \\ &\leq 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p). \end{aligned}$$

Por ende hemos probado a) para $p \geq 2$. El caso $1 \leq p < 2$ es tratado de forma similar probando que la desigualdad establecida en la Afirmación 1.29 vale en sentido contrario, y usando c) para $1 < p < 2$. \square

CAPÍTULO 2

EL MÓDULO DE CONVEXIDAD

En este capítulo estudiaremos algunas propiedades del módulo de convexidad asociado a un espacio de Banach dado, el cual determina qué tan convexa es la bola unitaria de un espacio de Banach X .

2.1. PROPIEDADES GENERALES

En los espacios de Banach existen nociones de convexidad que permiten definir propiedades geométricas del espacio en cuestión. Una de esas nociones es la de convexidad uniforme, la cual se debe a Clarkson [2].

Definición 2.1. Un espacio de Banach X es *uniformemente convexo* si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in S_X$ con $\|x - y\| \geq \varepsilon$ tenemos $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$.

Observación 2.2. De la definición anterior se deduce que \mathbb{R} es un espacio uniformemente convexo. Como todo espacio normado unidimensional es isométrico a \mathbb{R} , sigue que los espacios unidimensionales son uniformemente convexos. Por ello, a partir de este capítulo solo consideraremos espacios de Banach con dimensión mayor o igual que 2.

Definición 2.3. Dado un espacio de Banach X , definimos la función $\delta_X : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ por

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| = \varepsilon \right\}.$$

La función δ_X es llamada módulo de convexidad de X .

Es claro que un espacio de Banach X es uniformemente convexo si, y solo si, $\delta_X(\varepsilon) > 0$ para cada $\varepsilon \in (0, 2]$.

Definición 2.4. El *coeficiente de convexidad* de un espacio de Banach X es el número $\varepsilon_0(X)$ definido como:

$$\varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon \in [0, 2] : \delta_X(\varepsilon) = 0\}.$$

Teniendo en cuenta las definiciones dadas anteriormente, observe que un espacio de Banach X es uniformemente convexo si y solo si $\varepsilon_0(X) = 0$.

En aras de ilustrar como es la bola unitaria de un espacio bidimensional según su coeficiente convexidad $\varepsilon_0(X)$ tome $X = \mathbb{R}^2$ y considere las normas $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$. Entonces

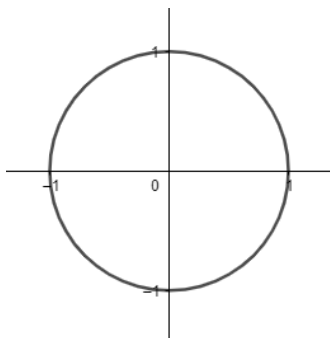


Figura 2.3: $\varepsilon_0(\|\cdot\|_2) = 0$

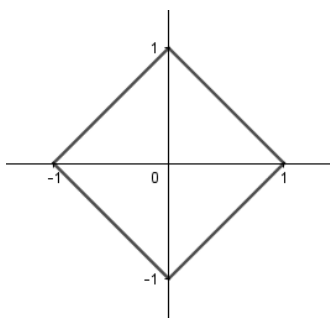


Figura 2.4: $\varepsilon_0(\|\cdot\|_1) = 2$

Intuitivamente, el coeficiente de convexidad de un espacio de Banach permite estimar que tan redonda es la bola unitaria del espacio, en el sentido de que si ε_0 es cercano a cero, dicha bola es más convexa.

Veamos ahora una relación entre los conceptos de convexidad uniforme y convexidad estricta.

Proposición 2.5. *Todo espacio de Banach uniformemente convexo es estrictamente convexo.*

Demostración. Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach uniformemente convexo y $x, y \in S_X$ tales que $\|\frac{x+y}{2}\| = 1$. Hemos de mostrar que $x = y$. Supongamos lo contrario, es decir, si $x \neq y$, entonces $0 < \varepsilon_0 = \|x - y\| \leq 2$. Como X es uniformemente convexo, existe $\delta(\varepsilon_0) > 0$ tal que $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta(\varepsilon_0)$. Lo cual es una contradicción al hecho de que $\|\frac{x+y}{2}\| = 1$, por ende debe cumplirse que $x = y$. Así X es estrictamente convexo. \square

Teorema 2.6. *Un espacio de Banach X es estrictamente convexo si, y solo si, $\delta_X(2) = 1$.*

Demostración. Supongamos que $\delta_X(2) = 1$ y sean $x, y \in S_X$ tales que $\|x + y\| = 2$, entonces

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x - y}{2} \right\| &= \left\| \frac{x + (-y)}{2} \right\| \\ &\leq 1 - \delta_X(\|x + y\|) \\ &= 1 - \delta_X(2) = 0, \end{aligned}$$

y por tanto $x = y$. Se sigue que X es estrictamente convexo. Recíprocamente, supongamos que X es estrictamente convexo y sean $x, y \in S_X$ tales que $\|x - y\| = 2$. Por la convexidad estricta tenemos que $x = -y$. Así $1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| = 1$ para cada $x, y \in S_X$ con $\|x - y\| = 2$. Esto prueba que $\delta_X(2) = 1$. \square

Proposición 2.7. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión finita. Entonces los conceptos de convexidad estricta y convexidad uniforme coinciden.*

Demostración. Por la proposición anterior, basta mostrar que si X es de dimensión finita y estrictamente convexo entonces X es uniformemente convexo. Si para algún $0 < \varepsilon_0 \leq 2$ tuviésemos $\delta_X(\varepsilon_0) = 0$, existirían sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S_X tales que

$$1 - 1/n \leq \left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| \leq 1, \quad \|x_n\| = \|y_n\| = 1, \quad \text{y} \quad \|x_n - y_n\| = \varepsilon_0,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Debido a que la dimensión de X es finita, S_X es compacta, así existen subsucesiones $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}, (y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tales que $x_{n_k} \rightarrow x$ y $y_{n_k} \rightarrow y$, donde $x, y \in S_X$. Como $\|x_n + y_n\| \rightarrow 2$ tenemos $\|x_{n_k} + y_{n_k}\| \rightarrow 2$, es decir, $\|x + y\| = 2$. La convexidad estricta de X implica que $x = y$ lo que es absurdo ya que $\|x - y\| = \varepsilon_0 > 0$. Por tanto X es uniformemente convexo. \square

El siguiente resultado nos facilitará las pruebas de algunas de las propiedades del módulo de convexidad.

Lema 2.8. *Sea X un espacio de Banach y Y un subespacio de X de dimensión 2. Para cada $0 \leq \varepsilon \leq 2$ se tiene que*

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\{\delta_Y(\varepsilon) : \dim Y = 2\}.$$

Demostración. Sean $\varepsilon \in [0, 2]$ y Y un subespacio de dimensión 2 de X . Entonces

$$\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in S_Y, \|x-y\| = \varepsilon\right\} \subset \left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in S_X, \|x-y\| = \varepsilon\right\}.$$

Por ello tenemos

$$\begin{aligned} \delta_X(\varepsilon) &= \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in S_X, \|x-y\| = \varepsilon\right\} \\ &\leq \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in S_Y, \|x-y\| = \varepsilon\right\} = \delta_Y(\varepsilon). \end{aligned}$$

Así, $\delta_X(\varepsilon) \leq \inf\{\delta_Y(\varepsilon) : \dim Y = 2\}$. Por otro lado, dado $r > 0$ existen $x, y \in S_X$ con $\|x-y\| = \varepsilon$ tales que $1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < \delta_X(\varepsilon) + r$. Si Z es un subespacio tal que $\dim Z = 2$ y $\{x, y\} \subset Z$,

$$\inf\{\tilde{\delta}_Y(\varepsilon) : \dim Y = 2\} \leq \delta_Z(\varepsilon) \leq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < \delta_X(\varepsilon) + r.$$

Como $r > 0$ es arbitrario concluimos que $\delta_X(\varepsilon) = \inf\{\delta_Y(\varepsilon) : \dim Y = 2\}$. □

Observación 2.9. Como en la prueba del resultado anterior puede ser mostrado que si

$$\tilde{\delta}_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in B_X, \|x-y\| = \varepsilon\right\},$$

entonces $\tilde{\delta}_X(\varepsilon) = \inf\{\tilde{\delta}_Y(\varepsilon) : \dim Y = 2\}$.

Proposición 2.10. *Sea X un espacio de Banach. Tenemos*

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in B_X, \|x-y\| = \varepsilon\right\}.$$

Demostración. Por el Lema 2.8 y la Observación 2.9 podemos suponer sin perder la

generalidad que $\dim X < \infty$. Sean $0 < \varepsilon \leq 2$ y $x, y \in B_X$ tales que

$$\|x + y\| = \sup\{\|u + v\| : u, v \in B_X, \|u - v\| = \varepsilon\}.$$

Si demostramos que $x, y \in S_X$, la afirmación de la proposición estará probada ya que

$$\begin{aligned} \delta_X(\varepsilon) &\leq 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \\ &= 1 - \sup \left\{ \left\| \frac{u + v}{2} \right\| : u, v \in B_X, \|u - v\| = \varepsilon \right\} \\ &= \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{u + v}{2} \right\| : u, v \in B_X, \|u - v\| = \varepsilon \right\} \\ &\leq \delta_X(\varepsilon). \end{aligned}$$

Por simetría de la prueba, podemos suponer que $\|x\| \leq \|y\|$. Note que $y \neq 0$. Veamos que $\|y\| = 1$. Si $c = (1 - \|y\|)/2$, tenemos $0 \leq c \leq 1$. Sean

$$x_1 = \frac{(1 - c)x + cy}{\|y\|} \quad \text{y} \quad y_1 = \frac{(1 - c)y + cx}{\|y\|}.$$

Sigue que

$$\|x_1\| \leq \frac{(1 - c)\|x\| + c\|y\|}{\|y\|} \leq \frac{(1 - c)\|y\| + c\|y\|}{\|y\|} = 1,$$

y de modo semejante $\|y_1\| \leq 1$. La escogencia de c implica que $\|x_1 - y_1\| = \varepsilon$. Así

$$\|x_1 + y_1\| \leq \|x + y\|.$$

Ahora bien,

$$x_1 + y_1 = \frac{(1 - c)x + cy}{\|y\|} + \frac{(1 - c)y + cx}{\|y\|} = \frac{x + y}{\|y\|}.$$

En consecuencia $\|y\| = 1$. Probaremos que $\|x\| = 1$. Suponga que $\|x\| < 1$. Por el teorema de Hahn-Banach [4, Corolario 2.3] existe $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^* \left(\frac{x + y}{\|x + y\|} \right) = 1$. Si $w \in B_X$ es tal que $\|w - y\| = \varepsilon$, entonces

$$x^*(w + y) \leq \|w + y\| \leq \|x + y\| = x^*(x + y).$$

De lo anterior tenemos $x^*(w) \leq x^*(x)$. Por lo tanto

$$x^* \text{ alcanza un valor máximo en } x \text{ en el conjunto } B_X \cap A, \quad (2.1)$$

donde $A = \{w \in B_X : \|w - y\| = \varepsilon\}$. Sea $U = \{u \in S_X : \|y + \varepsilon u\| < 1\}$, entonces U es abierto en S_X y $\frac{x-y}{\varepsilon} \in U$. Si $u \in U$ y $w = y + \varepsilon u$, tenemos $\|w - y\| = \varepsilon$. De (2.1) sigue que

$$x^*(w) \leq x^*(x), \quad \text{esto es,} \quad x^*(u) \leq x^*\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right).$$

Por el Lema 1.19 concluimos que $|x^*|$ tiene un máximo global en $\frac{x-y}{\varepsilon}$. Luego $|x^*(x-y)| = \|x-y\|$. Ocurren entonces dos casos: $x^*(x-y) = \|x-y\|$ o $x^*(x-y) = -\|x-y\|$. El primer caso no es posible puesto que

$$1 > \|x\| \geq x^*(x) = \frac{1}{2}x^*(x+y+x-y) = \frac{1}{2}(\|x+y\| + \|x-y\|) \geq \|y\| = 1.$$

Así debemos tener $x^*(x-y) = -\|x-y\|$. En este caso, sea $z \in B_X$ tal que $\|z-y\| = \varepsilon$. Tenemos

$$|x^*(z-y)| \leq |x^*(x-y)| = \varepsilon,$$

y de esto $-\varepsilon = x^*(x-y) \leq x^*(z-y)$. Sigue que $x^*(x) \leq x^*(z)$ lo cual implica que

$$\|x+y\| = x^*(x+y) \leq x^*(z+y) \leq \|z+y\| \leq \|x+y\|.$$

De modo que dado cualquier $z \in B_X$ con $\|z-y\| = \varepsilon$ tenemos

$$\|z+y\| = \|x+y\| = \sup\{\|u+v\| : u, v \in B_X, \|u-v\| = \varepsilon\}.$$

Esto demuestra la proposición pues basta tomar $z \in S_X$ satisfaciendo $\|z-y\| = \varepsilon$. \square

Teorema 2.11. *La función $\delta_X : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ es creciente.*

Demostración. De nuevo por el Lema 2.8 y la Observación 2.9 podemos suponer que $\dim X < \infty$. Sean $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq 2$ y $x, y \in S_X$ tales que

$$\|x-y\| = \varepsilon_2 \quad \text{y} \quad \|x+y\| = 2(1 - \delta_X(\varepsilon_2)).$$

Escribamos $c = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/2\varepsilon_2$, $x_1 = x + c(y-x)$ y $y_1 = y - c(y-x)$. Note que $0 < c \leq 1$ y

$$\|x_1\| = \|x + c(y-x)\| = \|x(1-c) + cy\| \leq (1-c)\|x\| + c\|y\| = 1.$$

De la misma forma se verifica que $y_1 \in B_X$. Ahora,

$$\|x_1 - y_1\| = \|x + 2c(y - x) - y\| = \|(x - y)(1 - 2c)\| = \varepsilon_2 \left(1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) = \varepsilon_1.$$

Además,

$$\|x_1 + y_1\| = \|x + c(y - x) + y - c(y - x)\| = \|x + y\|.$$

Por lo tanto, aplicando la Proposición 2.10 tenemos

$$\delta_X(\varepsilon_1) \leq 1 - \|x_1 + y_1\|/2 = 1 - \|x + y\|/2 = \delta_X(\varepsilon_2). \quad \square$$

Corolario 2.12. *Sea X un espacio de Banach. Tenemos*

$$\begin{aligned} \delta_X(\varepsilon) &= \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| : x, y \in S_X, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\} \\ &= \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| : x, y \in B_X, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Demostración. Sea

$$\alpha_X(\varepsilon) := \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| : x, y \in S_X, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

Por definición del módulo de convexidad tenemos $\delta_X(\varepsilon) \geq \alpha_X(\varepsilon)$. Por otra parte, dado $r > 0$ existen $x, y \in S_X$ con $\|x - y\| \geq \varepsilon$ tales que

$$\alpha_X(\varepsilon) + r \geq 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\|.$$

Si $s = \|x - y\|$, entonces $s \geq \varepsilon$ y por el Teorema 2.11 tenemos

$$\alpha_X(\varepsilon) + r \geq 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \geq \delta_X(s) \geq \delta_X(\varepsilon).$$

Como $r > 0$ fue arbitrario tenemos $\alpha_X(\varepsilon) = \delta_X(\varepsilon)$. La segunda igualdad se demuestra análogamente. \square

Lema 2.13. *La función δ_X es continua en $[0, 2)$.*

Demostración. Para cada $u, v \in S_X$ y $\varepsilon \geq 0$, definamos

$$N(u, v) = \{(x, y) \in B_X \times B_X : \text{existen } \lambda, \mu \geq 0 \text{ tales que } x - y = \lambda u \text{ y } x + y = \mu v\},$$

y

$$\delta_{u,v}(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : (x,y) \in N(u,v) \text{ y } \|x-y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

Afirmación 2.14. *La función $\delta_{u,v}$ es convexa.*

Sean $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0, 2)$ y $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in N(u, v)$ con $\|x_1 - y_1\| \geq \varepsilon_1$ y $\|x_2 - y_2\| \geq \varepsilon_2$. Para cada $i \in \{1, 2\}$ existen $\lambda_i, \mu_i \geq 0$ tales que $x_i - y_i = \lambda_i u$ y $x_i + y_i = \mu_i v$. Si $t \in [0, 1]$ es dado, considere

$$\begin{aligned} x_3 &= tx_1 + (1-t)x_2, \\ y_3 &= ty_1 + (1-t)y_2. \end{aligned}$$

Note que $x_3 - y_3 = (t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)u$ y $x_3 + y_3 = (t\mu_1 + (1-t)\mu_2)v$, de lo cual inferimos que $(x_3, y_3) \in N(u, v)$. Veamos que $\|x_3 - y_3\| \geq t\varepsilon_1 + (1-t)\varepsilon_2$. Considere

$$t\|x_1 - y_1\| \geq t\varepsilon_1 \quad \text{y} \quad (1-t)\|x_2 - y_2\| \geq (1-t)\varepsilon_2,$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \|x_3 - y_3\| &= \|tx_1 + (1-t)x_2 - [ty_1 + (1-t)y_2]\| \\ &= \|t(x_1 - y_1) + (1-t)(x_2 - y_2)\| \\ &= \|t\lambda_1 u + (1-t)\lambda_2 u\| \\ &\geq t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2 \\ &= t\|x_1 - y_1\| + (1-t)\|x_2 - y_2\| \\ &\geq t\varepsilon_1 + (1-t)\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \delta_{u,v}(t\varepsilon_1 + (1-t)\varepsilon_2) &\leq 1 - \left\| \frac{x_3 + y_3}{2} \right\| = 1 - \left(\frac{t\mu_1 + (1-t)\mu_2}{2} \right) \\ &\leq 1 - \left(\frac{t\mu_1}{2} \right) - \left(\frac{(1-t)\mu_2}{2} \right) \\ &= (1-t) + t - \left(t \left\| \frac{\mu_1 v}{2} \right\| + (1-t) \left\| \frac{\mu_2 v}{2} \right\| \right) \\ &= t \left(1 - \left\| \frac{\mu_1 v}{2} \right\| \right) + (1-t) \left(1 - \left\| \frac{\mu_2 v}{2} \right\| \right) \\ &= t \left(1 - \left\| \frac{x_1 + y_1}{2} \right\| \right) + (1-t) \left(1 - \left\| \frac{x_2 + y_2}{2} \right\| \right). \end{aligned}$$

Dado que $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in N(u, v)$ fueron escogidos arbitrariamente, concluimos que

$$\delta_{u,v}(t\varepsilon_1 + (1-t)\varepsilon_2) \leq t\delta_{u,v}(\varepsilon_1) + (1-t)\delta_{u,v}(\varepsilon_2),$$

esto es, $\delta_{u,v}$ es convexa.

Afirmación 2.15. *Se tiene que*

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\{\delta_{u,v}(\varepsilon) : u, v \in S_X, u \neq \pm v\}.$$

Si $\varepsilon = 0$, entonces $\delta_{u,v}(\varepsilon) = 0 = \delta_X(\varepsilon)$. Supongamos que $0 < \varepsilon < 2$ y sea $r > 0$ dado. Entonces existen $x_r, y_r \in S_X$ con $\|x_r - y_r\| = \varepsilon$ tales que

$$\delta_{u_r, v_r}(\varepsilon) \leq 1 - \left\| \frac{x_r + y_r}{2} \right\| \leq \delta_X(\varepsilon) + r, \quad (2.2)$$

donde $u_r = (x_r - y_r)/\|x_r - y_r\|$ y $v_r = (x_r + y_r)/\|x_r + y_r\|$. Observemos que $\|u_r\| = \|v_r\| = 1$ y $u_r \neq \pm v_r$; si $u_r = v_r$ tendríamos que

$$x_r \left(\frac{1}{\|x_r - y_r\|} - \frac{1}{\|x_r + y_r\|} \right) = y_r \left(\frac{1}{\|x_r + y_r\|} + \frac{1}{\|x_r + y_r\|} \right).$$

De esto sigue que $1/\|x_r - y_r\| = 0$ o $1/\|x_r + y_r\| = 0$, lo cual es imposible. De modo semejante se muestra que $u_r \neq -v_r$.

La desigualdad (2.2) junto con la arbitrariedad de $r > 0$ implican que

$$\inf\{\delta_{u,v}(\varepsilon) : u, v \in S_X, u \neq \pm v\} \leq \delta_X(\varepsilon).$$

Para mostrar la otra desigualdad observe que si $u, v \in S_X$ y $u = \pm v$ tenemos

$$\left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : (x, y) \in N(u, v), \|x-y\| \geq \varepsilon \right\} \subset \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : x, y \in B_X, \|x-y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

Luego por el Corolario 2.12 deducimos que $\delta_{u,v}(\varepsilon) \geq \delta_X(\varepsilon)$ y como $u, v \in S_X$ fueron arbitrarios sigue que

$$\inf\{\delta_{u,v}(\varepsilon) : u, v \in S_X, u \neq \pm v\} \geq \delta_X(\varepsilon).$$

Finalmente vamos a verificar la continuidad de δ_X . Sean $a \in (0, 2)$ y $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0, a]$ con

$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$. Si $u, v \in S_X$ y $u \neq \pm v$, entonces por la convexidad de la función $\delta_{u,v}$ tenemos

$$\begin{aligned} \delta_{u,v}(\varepsilon_2) &= \delta_{u,v} \left(\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2 - \varepsilon_1} \right) 2 + \left(1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2 - \varepsilon_1} \right) \varepsilon_1 \right) \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2 - \varepsilon_1} \right) \delta_{u,v}(2) + \left(1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2 - \varepsilon_1} \right) \delta_{u,v}(\varepsilon_1). \end{aligned}$$

Sigue que

$$\begin{aligned} \delta_{u,v}(\varepsilon_2) - \delta_{u,v}(\varepsilon_1) &\leq \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2 - \varepsilon_1} \right) (\delta_{u,v}(2) - \delta_{u,v}(\varepsilon_1)) \\ &\leq \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2 - a}, \end{aligned}$$

para cada $u, v \in S_X$ y $u \neq \pm v$. Como consecuencia de la Afirmación 2.15 se tiene que

$$\delta_X(\varepsilon_2) - \delta_X(\varepsilon_1) \leq \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2 - a},$$

siempre que $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq a < 2$. Esto demuestra el resultado. \square

El próximo resultado nos muestra qué ocurre con la función δ_X cuando $\varepsilon = 2$.

Proposición 2.16. *Dado un espacio de Banach X , se cumple que*

$$\delta_X(2^-) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 2^-} \delta_X(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon_0(X)}{2}.$$

Demostración. Para mostrar esto sean $\varepsilon \in [0, 2)$ y $\eta \in (0, 1 - \delta_X(\varepsilon))$. Considere $x, y \in B_X$ con $\|x - y\| = \varepsilon$. Por la definición del módulo de convexidad (ínfimo), se tiene que

$$\delta_X(\varepsilon) + \eta \geq 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\|, \quad \text{entonces,} \quad \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \geq 1 - \delta_X(\varepsilon) - \eta.$$

En ese sentido,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &= \left\| \frac{x - y}{2} \right\| = \left\| \frac{x - (-y)}{2} \right\| \\ &\leq 1 - \delta_X(\|x - (-y)\|) \\ &\leq 1 - \delta(2(1 - \delta_X(\varepsilon) - \eta)), \end{aligned}$$

Esta última desigualdad se debe a que δ_X es monótona creciente en $[0, 2]$. Ahora, como $\eta \in (0, 1 - \delta_X(\varepsilon))$ fue escogido de manera arbitraria deducimos

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq 1 - \delta(2(1 - \delta_X(\varepsilon))).$$

Observe que $2(1 - \delta_X(\varepsilon)) < 2$, y como la función δ_X es continua en el intervalo $(0, 2)$, entonces, tomando $\varepsilon \rightarrow 2^-$, se tiene que

$$\frac{2^-}{2} \leq 1 - \delta_X(2(1 - \delta_x(2^-))), \quad \text{es decir, } \delta_X(2(1 - \delta_x(2^-))) \leq 0.$$

Recuerde que $\varepsilon_0(X) := \sup\{\varepsilon \in [0, 2] : \delta_X(\varepsilon) = 0\}$, se deduce que $\varepsilon_0(X) \geq 2(1 - \delta_x(2^-))$. De ahí que, $\delta_x(2^-) \geq 1 - \frac{\varepsilon_0(X)}{2}$.

Para mostrar la otra desigualdad considere $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0^+$. Entonces

$$\frac{\varepsilon_0(X)}{2} \leq 1 - \delta_X(2(1 - \delta_x(\varepsilon_0(X)))) = 1 - \delta_X(2^-).$$

Por ende $\delta_x(2^-) \leq 1 - \frac{\varepsilon_0(X)}{2}$. Concluimos que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 2^-} \delta_X(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon_0(X)}{2}$. \square

Nos preguntamos entonces cuando el módulo de convexidad presenta continuidad en 2.

Corolario 2.17. *Suponga que X es un espacio de Banach estrictamente convexo, son equivalentes*

a) X es uniformemente convexo;

b) δ_X es continua en 2.

Demostración. Suponga que X es uniformemente convexo, por ende $\varepsilon_0(X) = 0$, entonces se tiene que $\delta_X(2^-) = 1$ y como X es estrictamente convexo se cumple que $\delta_X(2) = 1$. Se concluye entonces la continuidad de δ_X .

Ahora, como X es estrictamente convexo se sabe que $\delta_X(2) = 1$, y de la continuidad de δ_X en 2 se tiene que

$$\delta_X(2) = 1 - \frac{\varepsilon_0(X)}{2} = \delta_X(2) = 1,$$

es decir, $\varepsilon_0(X) = 0$. Por ende X es uniformemente convexo. \square

2.2. EJEMPLOS

En esta sección presentaremos ejemplos de espacios uniformemente convexos y algunos módulos de convexidad.

Ejemplo 2.18. Todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo. Esto es consecuencia del siguiente resultado: si X es un espacio de Hilbert, entonces para todo $\varepsilon \in [0, 2]$

$$\delta_X(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}.$$

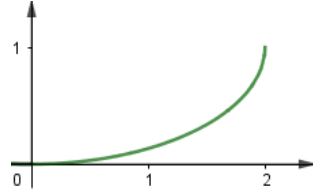


Figura 2.5: Gráfica de δ_X para los espacios Hilbert

Sean $0 \leq \varepsilon \leq 2$ y $x, y \in S_X$ tales que $\|x - y\| = \varepsilon$. Por la ley del paralelogramo tenemos

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \text{esto es,} \quad \|x + y\|^2 + \varepsilon^2 = 4.$$

De donde

$$1 - \frac{\|x + y\|}{2} = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}},$$

para cualesquiera $x, y \in S_X$ con $\|x - y\| = \varepsilon$. Esto demuestra lo afirmado.

Ejemplo 2.19. Sea $X = \mathbb{R}^2$ junto con la norma $\ell_2 - \ell_1$ (ver Ejemplo 1.4). Tenemos

$$\delta_X(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \sqrt{2}, \\ \max \left\{ 1 - \sqrt{2 - \frac{\varepsilon^2}{2}}, 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{8}} \right\}, & \text{si } \sqrt{2} < \varepsilon \leq 2. \end{cases} \quad (2.3)$$

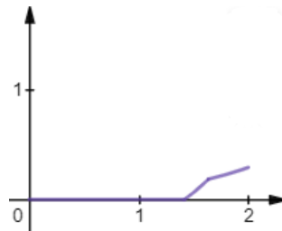


Figura 2.6: Gráfica de δ_X para \mathbb{R}^2 con la norma $\ell_2 - \ell_1$

Para mostrar esto, observe que la norma $\ell_2 - \ell_1$ puede ser reescrita en la siguiente

forma:

$$\|x\| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & \text{si } x \in Q_1 \cup Q_3, \\ |x_1| + |x_2| & \text{si } x \in Q_2 \cup Q_4, \end{cases}$$

donde para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, Q_i denota el i -ésimo cuadrante de \mathbb{R}^2 . Primero veamos que

$$\varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon \in [0, 2] : \delta_X(\varepsilon) = 0\} = \sqrt{2}$$

Considerando los vectores $x = (1, 0)$ y $y = (0, -1)$, es claro que $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| = \|(1, 1)\|_2 = \sqrt{2}$ y $1 - \frac{\|x + y\|}{2} = 1 - \frac{\|x + y\|_1}{2} = 0$. Como la función δ_X es creciente tenemos $\delta_X(\varepsilon) = 0$ para todo $0 \leq \varepsilon \leq \sqrt{2}$. Esto nos permite concluir que $\varepsilon_0(X) \geq \sqrt{2}$.

Sea $\alpha > \sqrt{2}$ y veamos que $\delta_X(\alpha) \neq 0$. Tenemos

$$1 < \frac{\alpha^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2 - \frac{\alpha^2}{2}} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < 1 - \sqrt{2 - \frac{\alpha^2}{2}}.$$

De este modo, usando la ecuación (2.3) tenemos $\delta_X(\alpha) \geq \sqrt{2 - \frac{\alpha^2}{2}} > 0$.

Ahora consideremos los siguientes casos:

Caso 1: Sean $\sqrt{2} < \varepsilon \leq 2$ y $x, y \in S_X$ tales que $\|x - y\| \geq \varepsilon$ con $y - x \in Q_1 \cup Q_3$. Tenemos $\|x - y\| = \|x - y\|_2$. De la ecuación (1.1) deducimos que $\|x\|_2 \leq 1$, $\|y\|_2 \leq 1$ y $\varepsilon \leq \|x - y\|_2$. Por el Ejemplo 2.18 y el Corolario 2.12 sigue que

$$1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\|_2 \geq 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \text{esto es,} \quad \left\| \frac{x + y}{2} \right\|_2 \leq \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

De nuevo por la ecuación (1.1) tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq \left\| \frac{x + y}{2} \right\|_2 \leq \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Luego $1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \geq 1 - \left[2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right]^{1/2}$ para cualesquiera $x, y \in S_X$ con $\|x - y\| \geq \varepsilon$ y $y - x \in Q_1 \cup Q_3$.

Caso 2: De nuevo sean $\sqrt{2} < \varepsilon \leq 2$ y $x, y \in S_X$ tales que $\|x - y\| \geq \varepsilon$ con $y - x \in Q_2 \cup Q_4$, veamos que esto implica que $\frac{1}{2}(x + y) \in Q_1 \cup Q_3$. Escribiendo $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ y teniendo en cuenta que $(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \leq 0$, debemos analizar las siguientes posibilidades:

- i) Si $x \in Q_4$ y $y \in Q_2$, esto es, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ y $y_1 < 0$, $y_2 > 0$ entonces $\|x\| = x_1 - x_2 = 1$ y $\|y\| = -y_1 + y_2 = 1$. Sigue que $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ y por tanto en este caso tendremos $\frac{1}{2}(x + y) \in Q_1 \cup Q_3$, ya que $0 \leq (x_1 + y_1)^2 = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)$.
- ii) Si $x, y \in Q_2$, es decir, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $y_1 < 0$, $y_2 > 0$ tenemos $\|x\| = -x_1 + x_2 = 1 = -y_1 + y_2 = \|y\|$ y así $y_1 - x_1 = y_2 - x_2$. Esto implica que $x = y$, ya que $0 \leq (y_1 - x_1)^2 = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) \leq 0$, es decir, $x_1 = y_1$ y $x_2 = y_2$, lo cual es imposible pues $\|x - y\| \geq \varepsilon$. De modo semejante se demuestra que la posibilidad $x, y \in Q_4$ nos da un absurdo.
- iii) Si $x \in Q_1$ y $y \in Q_3$, se tiene $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ y $y_1 < 0$, $y_2 < 0$. Como $y_1 - x_1 < 0$, entonces $y_2 - x_2 \geq 0$ pero esto nos da una contradicción pues $0 > y_2 \geq x_2 > 0$. Hemos mostrado que esta posibilidad no puede darse.
- iv) Si $x \in Q_2$ y $y \in Q_3$, entonces $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ y $y_1 < 0$, $y_2 < 0$. Ahora $\|x\| = -x_1 + x_2 = y_1^2 + y_2^2 = \|y\|^2 \leq -y_1 - y_2$, de donde $y_1 - x_1 \leq -x_2 - y_2$. Si $y_1 - x_1 < 0$, entonces $y_2 - x_2 \geq 0$ pero esto es contradictorio pues $0 > y_2 \geq x_2 > 0$. Así $y_1 - x_1 \geq 0$ y esto implica que $x_2 + y_2 \leq 0$, con lo cual $\frac{1}{2}(x + y) \in Q_1 \cup Q_3$.
- v) Si $x \in Q_1$ y $y \in Q_4$, i.e. $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ y $y_1 > 0$, $y_2 < 0$, entonces $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = y_1 - y_2 = \|y\| \leq x_1 + x_2$. Sigue que $y_1 - x_1 \leq x_2 + y_2$. Por el mismo argumento de la posibilidad anterior, concluimos que $0 \leq y_1 - x_1 \leq x_2 + y_2$ y de ahí que $\frac{1}{2}(x + y) \in Q_1 \cup Q_3$.
- vii) Si $x \in Q_1$ y $y \in Q_2$, se tiene $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ y $y_1 < 0$, $y_2 > 0$. De esto, $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = -y_1 + y_2 \leq x_1 + x_2$. Sigue que $y_2 - x_2 \leq x_1 + y_1$. Como $y_1 - x_1 < 0$, tenemos $x_1 + y_1 \geq y_2 - x_2 \geq 0$, por lo que $\frac{1}{2}(x + y) \in Q_1 \cup Q_3$.
- viii) Si $x \in Q_3$ y $y \in Q_4$, tenemos $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ y $y_1 > 0$, $y_2 < 0$, por lo que $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = y_1 - y_2 \leq -x_1 - x_2$. Luego $x_1 + y_1 \leq y_2 - x_2$ y como $y_1 - x_1 > 0$, deducimos que $x_1 + y_1 \leq 0$ ya que $y_2 - x_2 \leq 0$. De esta manera $\frac{1}{2}(x + y) \in Q_1 \cup Q_3$.

Por la ecuación (1.1) tenemos $\|x\|_2 \leq 1$, $\|y\|_2 \leq 1$ y $\varepsilon \leq \|x - y\| \leq \sqrt{2}\|x - y\|_2$, y así $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \leq \|x - y\|_2$. Por el análisis anterior $\frac{1}{2}(x + y) \in Q_1 \cup Q_3$, de donde

$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2$. Del Ejemplo 2.18 y el Corolario 2.12 sigue que

$$\begin{aligned} 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| &= 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2 \\ &\geq 1 - \sqrt{1 - \frac{(\varepsilon/\sqrt{2})^2}{4}} \\ &= 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/8}. \end{aligned}$$

Por lo visto en los casos 1 y 2 se deduce que para $\varepsilon > \sqrt{2}$ vale que

$$\delta_X(\varepsilon) \geq \max\{1 - \sqrt{2 - \varepsilon^2/2}, 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/8}\}.$$

Ahora bien si $L(\varepsilon) := \min\{\sqrt{2 - \varepsilon^2/2}, \sqrt{1 - \varepsilon^2/8}\}$, escogiendo $x, y \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\frac{x+y}{2} = \left(\frac{L(\varepsilon)}{\sqrt{2}}, \frac{L(\varepsilon)}{\sqrt{2}}\right), \quad y, \quad \frac{x-y}{2} = \left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right),$$

tenemos que $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = L(\varepsilon)$ y $\|x-y\| = \varepsilon$. Por lo anterior se sigue que

$$\delta_X(\varepsilon) = 1 - L(\varepsilon) = \max\{1 - \sqrt{2 - \varepsilon^2/2}, 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/8}\}.$$

Ejemplo 2.20. Para $1 < p < \infty$, el espacio $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ es uniformemente convexo. Sean $0 < \varepsilon \leq 2$ y $x, y \in S_{\ell_p}$ con $\|x-y\|_p = \varepsilon$. Considere en primer lugar $p \geq 2$. Por la desigualdad a) del Teorema 1.28 tenemos

$$\|x+y\|_p^p + \varepsilon^p \leq 2^p.$$

De esto sigue que

$$1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_p.$$

Como $x, y \in S_{\ell_p}$ fueron elegidos arbitrariamente tenemos

$$0 < 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \delta_{\ell_p}(\varepsilon).$$

Sigue que $(\ell_p, \|\cdot\|)$ es uniformemente convexo. Por otra parte si

$$\begin{aligned} x &= \left(\left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p}, \frac{\varepsilon}{2}, 0, 0, \dots \right) \quad y \\ y &= \left(\left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p}, -\frac{\varepsilon}{2}, 0, 0, \dots \right), \end{aligned}$$

entonces $x, y \in S_{\ell_p}$, $\|x - y\|_p = \varepsilon$

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|_p = \left(1 - \frac{\varepsilon^p}{2^p}\right)^{1/p}.$$

Por lo anterior concluimos que

$$\delta_{\ell_p}(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Supongamos ahora que $1 < p \leq 2$. Usando b) del Teorema 1.28 se tiene

$$\|x + y\|_p^q + \varepsilon^q \leq 2^q.$$

Luego

$$1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq 1 - \left\| \frac{x + y}{2} \right\|_p.$$

Nuevamente, del hecho que $x, y \in S_{\ell_p}$ se escogieron de manera arbitraria obtenemos

$$0 < 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \delta_{\ell_p}(\varepsilon).$$

Esto demuestra lo afirmado. Ahora, si

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2^{1/p}} \left(\left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{1/q} + \frac{\varepsilon}{2}, \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{1/q} - \frac{\varepsilon}{2}, 0, 0, 0 \dots \right) \quad y \\ y &= \frac{1}{2^{1/p}} \left(\left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{1/q} - \frac{\varepsilon}{2}, \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{1/q} + \frac{\varepsilon}{2}, 0, 0, 0 \dots \right), \end{aligned}$$

tenemos

$$\|x - y\|_p = \varepsilon \quad y \quad \left\| \frac{x + y}{2} \right\|_p = \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{1/q}.$$

Ahora bien, por a) del Teorema 1.28 y la Proposición 1.5 se tiene

$$\begin{aligned} \|x\|_p^p &= \frac{1}{2} \left[\left(\left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{1/q} + \frac{\varepsilon}{2} \right)^p + \left(\left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{1/q} - \frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right] \\ &\leq \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{p/q} + \frac{\varepsilon^p}{2^p} \\ &= \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{p/q} + \left(\frac{\varepsilon^q}{2^q}\right)^{p/q} \leq 1. \end{aligned}$$

De modo semejante se demuestra que $\|y\|_p \leq 1$. Así

$$\delta_{\ell_p}(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Concluimos entonces que si $\varepsilon \in [0, 2]$ el módulo de convexidad para el espacio ℓ_p toma los siguientes valores

$$\delta_{\ell_p}(\varepsilon) := \begin{cases} 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}, & \text{si } 1 < p \leq 2, \\ 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 2 < p < \infty. \end{cases}$$

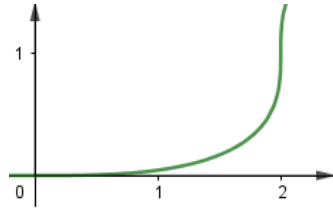


Figura 2.7: Gráfica de δ_X para ℓ_3 con la norma $\|\cdot\|_3$

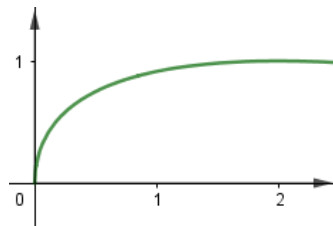


Figura 2.8: Gráfica de δ_X para $\ell_{1/2}$ con la norma $\|\cdot\|_{1/2}$

Ejemplo 2.21. Mostraremos que el espacio $X = C[0, 1]$ junto con la norma definida en el Ejemplo 1.14 no es uniformemente convexo. Sean $(f_n), (g_n)$ en $C[0, 1]$ definidas

como

$$f_n \equiv \mathbf{1}, \quad y, \quad g_n := \begin{cases} nx, & \text{si } x \in [0, 1/n], \\ 1, & \text{si } x \in (1/n, 1], \end{cases}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$. Veamos que $\|f_n + g_n\| \rightarrow 4$ pero $\|f_n - g_n\| \neq 0$. Observe que

$$(f_n + g_n)(x) := \begin{cases} 1 + nx, & \text{si } x \in [0, 1/n], \\ 2, & \text{si } x \in (1/n, 1]. \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} \|f_n + g_n\| &= \|f_n + g_n\|_\infty + \|f_n + g_n\|_2 \\ &= 2 + \left(\int_0^1 (f_n(x) + g_n(x))^2 dx \right)^{1/2} \\ &= 2 + \left(2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{7}{3n} \right)^{1/2} \rightarrow 4, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Falta mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g_n\| \neq 0$. Tenemos que

$$(f_n - g_n)(x) := \begin{cases} 1 - nx, & \text{si } x \in [0, 1/n], \\ 0, & \text{si } x \in (1/n, 1], \end{cases}$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} \|f_n - g_n\| &= \|f_n - g_n\|_\infty + \|f_n - g_n\|_2 \\ &= 1 + \left(\int_0^1 (f_n(x) - g_n(x))^2 dx \right)^{1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{3n} \rightarrow 1, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que $\delta_X(\varepsilon) = 0$ para algún $\varepsilon > 0$ y por tanto $(C[0, 1], \|\cdot\|)$ no es uniformemente convexo.

2.3. OTRAS PROPIEDADES DEL MÓDULO DE CONVEXIDAD

En esta sección probaremos más propiedades del módulo de convexidad.

Teorema 2.22. Sean $\delta_1: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\delta_1(s) = \inf\{\max\{\|u + sv\|, \|u - sv\|\} : u, v \in S_X\} - 1,$$

y $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(s) = \delta_1(s)/s$. Entonces la función f es creciente en $(0, \infty)$ y satisface la identidad

$$\frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{2}f\left(\frac{\varepsilon}{2(1 - \delta_X(\varepsilon))}\right), \quad \text{para cada } \varepsilon \in (0, 2).$$

Demostración. Sean $u, v \in S_X$ fijos. Veamos que la función $g_{u,v}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_{u,v}(s) = \max\{\|u + sv\|, \|u - sv\|\} - 1$ es convexa. Sean $f_1, f_2: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_1(s) = \|u + sv\|$ y $f_2(s) = \|u - sv\|$. Probaremos que f_1 es convexa, esto es, si $t \in [0, 1]$ y $s_1, s_2 \geq 0$, entonces $f_1(ts_1 + (1-t)s_2) \leq tf_1(s_1) + (1-t)f_1(s_2)$. Tenemos

$$\begin{aligned} f_1(ts_1 + (1-t)s_2) &= \|u - (ts_1 + (1-t)s_2)v\| \\ &= \|u - ts_1v - (1-t)s_2v\| \\ &= \|t(u - s_1v) + (1-t)(u - s_2v)\| \\ &\leq t\|u - s_1v\| + (1-t)\|u - s_2v\| \\ &= tf_1(s_1) + (1-t)f_1(s_2). \end{aligned}$$

De la misma forma procedemos para mostrar la convexidad de f_2 . Ahora, sea $M: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $M(s) := \max\{f_1(s), f_2(s)\}$, veamos que M es convexa. Sean $t \in [0, 1]$ y $s_1, s_2 \in [0, \infty)$. Supongamos en primer lugar que,

$$f_1(ts_1 + (1-t)s_2) \leq f_2(ts_1 + (1-t)s_2),$$

entonces,

$$\begin{aligned} M(ts_1 + (1-t)s_2) &= \max\{f_1(ts_1 + (1-t)s_2), f_2(ts_1 + (1-t)s_2)\} \\ &= f_1(ts_1 + (1-t)s_2) \\ &\leq tf_1(s_1) + (1-t)f_1(s_2) \\ &\leq tM(s_1) + (1-t)M(s_2). \end{aligned}$$

De forma análoga se demuestra que $M(ts_1 + (1-t)s_2) \leq tM(s_1) + (1-t)M(s_2)$ si se supone la otra desigualdad.

Como $g_{u,v}(s) = M(s) - 1$ para cada $s \geq 0$, concluimos que $g_{u,v}$ es convexa. Observemos

que $g_{u,v}(0) = 0$ pues

$$g_{u,v}(0) = \max\{\|u + 0v\|, \|u - 0v\|\} - 1 = \max\{\|u\|, \|u\|\} - 1 = 0.$$

Con la observación anterior, veremos que la función $h_{u,v}: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_{u,v}(s) = g_{u,v}(s)/s$ es creciente en $(0, \infty)$. Sean $0 < s_1 < s_2$ y $t = s_1/s_2$ entonces:

$$\begin{aligned} g_{u,v}(s_1) &= g_{u,v}((1 - s_1/s_2)0 + (s_1/s_2)s_2) \\ &\leq (1 - s_1/s_2)g_{u,v}(0) + (s_1/s_2)g_{u,v}(s_2) \\ &= (s_1/s_2)g_{u,v}(s_2), \end{aligned}$$

por lo cual $h_{u,v}(s_1) \leq h_{u,v}(s_2)$. Finalmente, de la igualdad

$$f(s) = \frac{\delta_1(s)}{s} = \inf\{g_{u,v}(s) : u, v \in S_X\}$$

concluimos que f es creciente en $(0, \infty)$.

Mostraremos ahora que

$$\frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{2}f\left(\frac{\varepsilon}{2(1 - \delta_X(\varepsilon))}\right), \quad \text{para cada } \varepsilon \in (0, 2).$$

Primero supongamos que $\dim X < \infty$. Sea $\varepsilon \in (0, 2)$ fijo. Escogemos $x, y \in S_X$ tales que, $\|x - y\| = \varepsilon$ y $\|x + y\| = 2(1 - \delta_X(\varepsilon))$. Escribiendo

$$u = \frac{x + y}{\|x + y\|}, \quad v = \frac{x - y}{\|x - y\|}, \quad y, \quad s = \|v\| = \frac{\varepsilon}{2(1 - \delta_X(\varepsilon))},$$

tenemos $\|u\| = 1$ y

$$\|u + v\| = 2\frac{\|x\|}{\|x + y\|} = \frac{1}{1 - \delta_X(\varepsilon)} = \|u - v\|.$$

Entonces

$$\delta_1(s) \leq \|u + v\| - 1 = \frac{\delta_X(\varepsilon)}{1 - \delta_X(\varepsilon)}. \quad (2.4)$$

Ahora, sean $u', v' \in X$ tales que $\|u'\| = 1, \|v'\| = s$ y además $a^{-1} = \max\{\|u' + v'\|, \|u' - v'\|\} = 1 + \delta_1(s)$. Escribimos,

$$x' = a(u' + v'), \quad y, \quad y' = a(u' - v').$$

Por lo tanto, $\|x' - y'\| = \|a(u' + v' - u' + v')\| = 2as$. Ahora, por definición tenemos

$x', y' \in B_X$. Entonces, por el Teorema 2.10 tenemos

$$\delta_X(2as) \leq 1 - \frac{\|x' + y'\|}{2} = 1 - a = \frac{\delta_1(s)}{1 + \delta_1(s)}. \quad (2.5)$$

De las ecuaciones (2.4) y (2.5) concluimos que $\delta_X(2as) \leq \delta_X(\varepsilon)$. Si tuviésemos $\delta_X(2as) = \delta_X(\varepsilon)$, entonces de la ecuación (2.5) tendríamos

$$\delta_X(\varepsilon) \leq \frac{\delta_1(s)}{1 + \delta_1(s)},$$

de donde

$$\frac{\delta_X(\varepsilon)}{1 - \delta_X(\varepsilon)} \leq \delta_1(s),$$

lo cual junto con (2.4) demuestra la conclusión del teorema. Por otra parte, si $\delta_X(2as) < \delta_X(\varepsilon)$, del Teorema 2.11 sigue que $2as < \varepsilon$. Luego

$$\delta_1(s) = a^{-1} - 1 \geq 2s\varepsilon^{-1} - 1 = \frac{\delta_X(\varepsilon)}{1 - \delta_X(\varepsilon)},$$

de lo cual se deduce lo que queríamos. Ahora bien, para el caso en que X tiene dimensión infinita, por el Lema 2.8 podemos tomar una sucesión de subespacios $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X con $\dim Y_n = 2$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{Y_n}(\varepsilon) = \delta_X(\varepsilon)$. Como f es continua (ya que es creciente y está definida en un intervalo) tenemos que para $\varepsilon \in (0, 2)$

$$\begin{aligned} \frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_{Y_n}(\varepsilon)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} f\left(\frac{\varepsilon}{2(1 - \delta_{Y_n}(\varepsilon))}\right) \\ &= \frac{1}{2} f\left(\frac{\varepsilon}{2(1 - \delta_X(\varepsilon))}\right). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 2.23. *Sea X un espacio de Banach. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tales que*

$$\max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| : \varepsilon_i \in \{1, -1\}, i = 1, \dots, n \right\} \leq 2,$$

entonces $\sum_{i=1}^n \delta_X(\|x_i\|) \leq 1$.

Demostración. Si $x_i = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces

$$\sum_{i=1}^n \delta_X(\|x_i\|) = \sum_{i=1}^n \delta_X(\|0\|) = 0 \leq 1,$$

y el resultado se cumple. De lo anterior podemos asumir que $x_i \neq 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y defina

$$S_k = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \dots + \varepsilon_k x_k = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i x_i,$$

donde $\varepsilon_1 = 1$ y para $k = 2, \dots, n$ se tiene que:

$$\varepsilon_k := \begin{cases} 1, & \text{si } \|S_{k-1} - x_k\| \leq \|S_{k-1} + x_k\|; \\ -1, & \text{si } \|S_{k-1} + x_k\| < \|S_{k-1} - x_k\|. \end{cases}$$

Probemos por inducción que $S_k \neq 0$ para cada $1 \leq k \leq n$. Por hipótesis, $S_1 = x_1 \neq 0$. Supongamos que $k < n$ y $S_k \neq 0$. Veamos que $S_{k+1} \neq 0$. Si $S_k = x_{k+1}$, entonces $\varepsilon_{k+1} = 1$ y por tanto $S_{k+1} = S_k + x_{k+1} \neq 0$. De igual forma si $S_k = -x_{k+1}$, entonces $\varepsilon_{k+1} = -1$ y $S_{k+1} = S_k - x_{k+1} \neq 0$. En el caso que $S_k \neq \pm x_{k+1}$, concluimos también que $S_{k+1} \neq 0$. Esto demuestra el resultado.

Si $k \in \{1, \dots, n\}$, sean $u_k, v_k \in X$ definidos como,

$$u_k = \frac{S_k}{\|S_k\|} \quad \text{y} \quad v_k = \frac{S_k - 2\varepsilon_k x_k}{\|S_k\|}.$$

Note que $\|u_k\| = 1$ y

$$\|v_k\| = \left\| \frac{S_k - 2\varepsilon_k x_k}{\|S_k\|} \right\| = \left\| \frac{S_{k-1} - \varepsilon_k x_k}{\|S_k\|} \right\| \leq 1,$$

ya que si $\varepsilon_k = 1$, tenemos $\|S_{k-1} - x_k\| \leq \|S_{k-1} + x_k\| = \|S_k\|$ y si $\varepsilon_k = -1$, tenemos $\|S_{k-1} + x_k\| \leq \|S_{k-1} - x_k\| = \|S_k\|$. Así $u_k, v_k \in B_X$. Por la Proposición 2.10 tenemos

$$\begin{aligned} \|u_k + v_k\| &= \left\| \frac{2S_k - 2\varepsilon_k x_k}{\|S_k\|} \right\| = 2 \left\| \frac{S_{k-1}}{\|S_k\|} \right\| = 2 \frac{\|S_{k-1}\|}{\|S_k\|} \\ &\leq 2 \left(1 - \delta_X \left(2 \frac{\|x_k\|}{\|S_k\|} \right) \right). \end{aligned}$$

Luego

$$\|S_k\| \delta_X \left(2 \frac{\|x_k\|}{\|S_k\|} \right) \leq \|S_k\| - \|S_{k-1}\|. \quad (2.6)$$

Ahora, de la prueba del Lema 2.13 tenemos que la función $\varepsilon \in (0, 2] \mapsto \frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon}$ es creciente. Como $\|S_k\| \leq 2$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ tenemos $0 < \|x_k\| \leq \frac{2}{\|S_k\|} \|x_k\| \leq 2$ y así

$$\frac{\delta_X(\|x_k\|)}{\|x_k\|} \leq \frac{\|S_k\| \delta_X\left(2 \frac{\|x_k\|}{\|S_k\|}\right)}{2\|x_k\|}, \quad \text{esto es,} \quad 2\delta_X(\|x_k\|) \leq \|S_k\| \delta_X\left(2 \frac{\|x_k\|}{\|S_k\|}\right).$$

Combinando esto último con la desigualdad (2.6) obtenemos

$$2\delta_X(\|x_k\|) \leq \|S_k\| - \|S_{k-1}\|,$$

para cada $k \in \{1, \dots, n\}$. Sigue que

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n \delta_X(\|x_k\|) &\leq \sum_{k=1}^n (\|S_k\| - \|S_{k-1}\|) \\ &= \|S_n\| - \|S_0\|, \end{aligned}$$

donde $S_0 := 0$. En consecuencia, $\sum_{k=1}^n \delta_X(\|x_k\|) \leq 1$. □

CAPÍTULO 3

CONSTANTE DE JAMES

En este capítulo definiremos dos constantes asociadas a un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, conocidas como la constante de James $J(X)$ y la constante $A_2(X)$, además mostraremos algunas propiedades que las relacionan. Estas constantes fueron definidas y estudiadas por M. Kato, L. Maligranda, Y. Takahashi en [8]. Finalmente estudiaremos los conceptos de espacios uniformemente no cuadrados y la constante $S(X)$, definidas en 1964 por R.C James [7] y veremos su relación con el módulo de convexidad $\delta_X(\varepsilon)$.

3.1. DEFINICIONES Y EJEMPLOS GENERALES

A continuación, introduciremos las constantes que vamos a estudiar en este capítulo.

Definición 3.1. Sea X un espacio de Banach. Definimos:

1. $J(X) := \sup\{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} : x, y \in S_X\}$;
2. $A_2(X) := \sup\left\{\frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} : x, y \in S_X\right\}$;
3. $S(X) := \inf\{\max\{\|x-y\|, \|x+y\|\} : x, y \in S_X\}$.

El número $J(X)$ es llamado *constante de James* asociada al espacio de Banach X .

En esta sección mostraremos cómo está relacionado las constantes $A_2(X)$ y $J(X)$. Antes de esto probaremos un resultado que relaciona el módulo de convexidad y la constante de James.

Teorema 3.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Entonces*

$$J(X) = \sup\{\varepsilon \in (0, 2) : \delta_X(\varepsilon) \leq 1 - \varepsilon/2\}.$$

Demostración. Sea

$$\sup\{\varepsilon \in (0, 2) : \delta_X(\varepsilon) \leq 1 - \varepsilon/2\} := \beta_X$$

Sea $\varepsilon := \|x - y\|$ y considere los siguientes dos casos:

Caso 1: Supongamos que $\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\} = \|x - y\|$, entonces $\varepsilon \leq \|x + y\| \leq 2(1 - \delta_X(\varepsilon))$ lo cual implica que $\delta_X(\varepsilon) \leq 1 - \varepsilon/2$. Se sigue que $\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\} \leq \beta_X$.

Caso 2: Supongamos que $\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\} = \|x + y\|$, por ende,

$$0 \leq \|x + y\| \leq \|x - y\| \leq 2;$$

es decir, si tomamos $\|x + y\| = \varepsilon'$ tenemos que $\varepsilon' \in [0, 2]$ y además $\delta_X(\varepsilon) \leq 1 - \varepsilon'/2$. Como δ_X es creciente en $(0, 2)$ (Teorema 2.11) y $\varepsilon' \leq \varepsilon$ obtenemos $\delta_X(\varepsilon') \leq 1 - \varepsilon'/2$. Así, $\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\} \leq \beta_X$.

Como consecuencia de los casos anteriores tenemos

$$J(X) \leq \beta_X.$$

Ahora falta ver que se cumple la igualdad. Sea $h > 0$ dado. Entonces existe $\varepsilon \in (0, 2)$ tal que $\beta_X - h < \varepsilon$, donde $\delta_X(\varepsilon) \leq 1 - \varepsilon/2$. Por definición del módulo de convexidad, existen $x_1, y_1 \in S_X$ tales que $\|x_1 - y_1\| = \varepsilon$ y

$$1 - \frac{\|x_1 + y_1\|}{2} \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{esto es, } \varepsilon \leq \|x_1 + y_1\|.$$

De esta manera

$$\beta_X - h < \varepsilon = \min\{\|x_1 - y_1\|, \|x_1 + y_1\|\} \leq J(X).$$

La arbitrariedad de $h > 0$ implica que $\beta_X \leq J(X)$ y concluimos la prueba. \square

Observación 3.3. Si X es un espacio de Banach tal que $J(X) < 2$, entonces

$$\delta_X(J(X)) \leq 1 - \frac{J(X)}{2}. \quad (3.1)$$

En efecto, del Teorema 3.2 se deduce que $\delta_X(\varepsilon) \leq 1 - \varepsilon/2$ si, y solo si, $\varepsilon \leq J(X)$, desde que $\varepsilon \in (0, 2)$. De esto concluimos la desigualdad (3.1). Más adelante demostraremos que de hecho se da la igualdad en (3.1) cuando $J(X) < 2$.

Corolario 3.4. *Sea X un espacio de Banach. Si $J(X) < 2$, entonces*

$$J(X) = 2(1 - \delta_X(J(X))).$$

Demostración. Si $J(X) < h < 2$, entonces por el Teorema 3.2 tenemos $\delta_X(h) > 1 - h/2$. Luego por la continuidad de la función δ_X (Lema 2.13) tenemos que

$$\delta_X(J(X)) \geq 1 - \frac{J(X)}{2}. \quad (3.2)$$

Las desigualdades (3.1) y (3.2) implican el resultado. \square

El próximo resultado establece una relación entre las constantes $J(X)$ y $S(X)$.

Teorema 3.5. *Para todo espacio de Banach X se tiene que*

$$J(X)S(X) = 2.$$

Demostración. Dados $x, y \in S_X$ con $x \neq \pm y$, sean

$$u = \frac{x+y}{\|x+y\|} \quad y \quad v = \frac{x-y}{\|x-y\|}.$$

Se sigue que $u, v \in S_X$ y además

$$u \pm v = \left(\frac{1}{\|x+y\|} \pm \frac{1}{\|x-y\|} \right) x + \left(\frac{1}{\|x+y\|} \mp \frac{1}{\|x-y\|} \right) y.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|u \pm v\| &\geq \left| \|x\| \left| \frac{1}{\|x+y\|} \pm \frac{1}{\|x-y\|} \right| - \|y\| \left| \frac{1}{\|x+y\|} \mp \frac{1}{\|x-y\|} \right| \right| \\ &= \left| \left| \frac{1}{\|x+y\|} \pm \frac{1}{\|x-y\|} \right| - \left| \frac{1}{\|x+y\|} \mp \frac{1}{\|x-y\|} \right| \right| \\ &= 2 \min \left\{ \frac{1}{\|x+y\|}, \frac{1}{\|x-y\|} \right\} \\ &= \frac{2}{\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}}. \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos

$$J(X) \geq \min\{\|u+v\|, \|u-v\|\} \geq \frac{2}{\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\}},$$

y como $x, y \in S_X$ con $x \neq \pm y$ fueron elegidos de forma arbitraria tenemos $J(X) \geq$

$2/S(X)$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \|u \pm v\| &\leq \left| \frac{1}{\|x+y\|} \pm \frac{1}{\|x-y\|} \right| + \left| \frac{1}{\|x+y\|} \mp \frac{1}{\|x-y\|} \right| \\ &= 2 \max \left\{ \frac{1}{\|x+y\|}, \frac{1}{\|x-y\|} \right\} \\ &= \frac{2}{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\}}. \end{aligned}$$

Así

$$S(X) \leq \max\{\|u+v\|, \|u-v\|\} \leq \frac{2}{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\}},$$

y la escogencia arbitraria de $x, y \in S_X$ con $x \neq \pm y$ implica que $S(X) \leq 2/J(X)$. De las desigualdades demostradas inferimos que $J(X)S(X) = 2$. \square

El próximo resultado establece una cota superior para la constante $A_2(X)$ en términos de la constante de James.

Teorema 3.6. *Para cualquier espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se cumple que,*

$$1 \leq A_2(X) \leq \frac{3J(X) - 2}{J(X)}.$$

Demostración. Note que si $x, y \in S_X$, entonces

$$1 = \|x\| \leq \frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} \leq A_2(X).$$

Ahora veamos que $J(X) \leq 2$. Si $x, y \in S_X$ son dados, tenemos que

$$\|x-y\| \leq \|x\| + \|-y\| = 2, \quad \text{y} \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| = 2.$$

De ahí que $\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \leq 2$, y como $x, y \in S_X$ fueron escogidos de forma arbitraria deducimos que $J(X) \leq 2$. Por otra parte, es conocido que para cualquier espacio de Banach X se cumple que $\sqrt{2} \leq J(x)$ [8, Página 279].

Continuando con la prueba, sean $x, y \in S_X$ y consideremos los siguientes casos:

Caso 1: Supongamos que $J(X) \leq \|x-y\| \leq 2$ y sea $\|x-y\| = \varepsilon$. Usando el hecho de que la función $\varepsilon \in (0, 2] \mapsto \delta_X(\varepsilon)/\varepsilon$ es creciente (prueba del Lema 2.13), la desigualdad

$\|x + y\| \leq 2(1 - \delta_X(\varepsilon))$ y el Teorema 3.5 tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x + y\| + \|x - y\| &\leq \varepsilon + 2(1 - \delta_X(\varepsilon)) \\
&= \varepsilon + 2 \left(1 - \frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon} \varepsilon \right) \leq \varepsilon + 2 \left(1 - \frac{\delta_X(\varepsilon)}{J(X)} \varepsilon \right) \\
&\leq \varepsilon + 2 - \frac{2 - J(X)}{J(X)} \varepsilon = \varepsilon + 2 - \left(\frac{2}{J(X)} - 1 \right) \varepsilon \\
&= \varepsilon + 2 - \left(\frac{2}{\sup\{\min\{\|x + y\|, \|x - y\| : x, y \in S_X\}} - 1} \right) \varepsilon \\
&= \varepsilon + 2 - (\inf\{\mbox{máx}\{\|x - y\|, \|x + y\|\} : x, y \in S_X\} - 1) \varepsilon \\
&= \varepsilon + 2 - (S(X) - 1) \varepsilon = \varepsilon(2 - S(X)) + 2 \\
&\leq \mbox{máx}\{(2 - S(X)) : J(X) \leq \varepsilon \leq 2\} \varepsilon + 2 = 6 - 2S(X) \\
&= 6 - \frac{1}{J(X)} = 2 \frac{3J(X) - 2}{J(X)}.
\end{aligned}$$

Caso 2: Supongamos ahora que $\|x - y\| < J(X)$. Si se cumple que $\|x + y\| \leq J(X)$ entonces $\|x - y\| + \|x + y\| \leq 2J(X)$. Ahora note que,

$$J(X) + \frac{2}{J(X)} - 3 = \frac{(J(X) - 1)(J(X) - 2)}{J(X)} \leq 0;$$

$$J(X) \leq 3 - \frac{2}{J(X)} = 3 - S(X),$$

y por tanto, reemplazando tenemos,

$$\|x + y\| + \|x - y\| \leq 6 - 2S(X) = 2 \frac{3J(X) - 2}{J(X)}.$$

Por otra parte, si se cumple que $J(X) \leq \|x + y\|$, sea $\|x + y\| = \varepsilon$. Considere $y = -u$, $-u \in S_X$ y proceda de forma análoga como en el Caso 1.

Debido a que $x, y \in S_X$ fueron escogidos arbitrariamente, concluimos que

$$A_2(X) = \sup \left\{ \frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} : x, y \in S_X \right\} \leq \frac{3J(X) - 2}{J(X)}. \quad \square$$

No es difícil que si X es un espacio de Banach tenemos $J(X) \leq A_2(X)$. A continuación damos una estimativa para la diferencia $A_2(X) - J(X)$.

Teorema 3.7. *Para cada espacio de Banach X tenemos que,*

$$A_2(X) - J(X) \leq (\sqrt{2} - 1)^2.$$

Demostración. De la desigualdad demostrada en el Teorema 3.6 se deduce que,

$$\begin{aligned} A_2(X) &\leq \frac{3J(X) - 2}{J(X)} \\ &= \frac{3J(X) - 2}{J(X)} - \frac{J(X)^2}{J(X)} + J(X). \end{aligned}$$

Por ende obtenemos,

$$\begin{aligned} A_2(X) - J(X) &\leq \frac{-J^2(X) + 3J(X) - 2}{J(X)} \\ &\leq \max \left\{ \frac{-t^2 - 3t - 2}{t} : \sqrt{2} \leq t \leq 2 \right\}. \end{aligned}$$

Si consideramos la función $f : [\sqrt{2}, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(t) = \frac{-t^2 - 3t - 2}{t}$, deducimos que ella alcanza su valor máximo en $(\sqrt{2} - 1)^2$. De ahí se concluye que $A_2(X) - J(X) \leq (\sqrt{2} - 1)^2$. \square

A continuación mostraremos un ejemplo donde se encontrará el valor de la constante de James.

Ejemplo 3.8. Sea $X = \mathbb{R}^2$ junto la norma $\ell_2 - \ell_1$. Veamos que $J(X) = \sqrt{8/3}$, consideremos dos casos:

Caso 1: $0 \leq \varepsilon \leq \sqrt{2}$. Entonces, $-\sqrt{2}/2 \leq -\varepsilon/2$, esto es, $1 - \sqrt{2}/2 \leq 1 - \varepsilon/2$, de ahí tenemos que $\delta_X(\varepsilon) = 0 < 1 - \varepsilon/2$.

Caso 2: $\sqrt{2} < \varepsilon \leq \sqrt{8/3}$. Veamos que $\delta_X(\varepsilon) < 1 - \varepsilon/2$, tenemos entonces,

$$\varepsilon^2 \leq 8/3; \quad 3\varepsilon^2/4 \leq 2;$$

$$\varepsilon^2/4 \leq 2 - \varepsilon^2/2; \quad \varepsilon/2 \leq \sqrt{2 - \varepsilon^2/2};$$

$$1 - \sqrt{2 - \varepsilon^2/2} \leq 1 - \varepsilon/2.$$

Por ende tenemos $\delta_X(\varepsilon) < 1 - \varepsilon/2$.

Caso 3: Se mostrará que si $\sqrt{8/3} < \varepsilon \leq 2$ entonces no se cumple que $\delta_X(\varepsilon) < 1 - \varepsilon/2$. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $\delta_X(\varepsilon) < 1 - \varepsilon/2$ de ahí se puede deducir,

$$1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{8}} \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}; \quad \frac{\varepsilon}{2} \leq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{8}};$$

$$\frac{\varepsilon^2}{4} \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{8}; \quad \varepsilon^2 \leq \frac{8}{3}.$$

Lo cual es una contradicción. Así, si $\varepsilon \in (0, 2)$ solo se cumple que $\delta_X(\varepsilon) < 1 - \varepsilon/2$ si $\varepsilon \in (0, \sqrt{8/3}]$. Concluimos entonces que $J(X) = \sqrt{8/3}$.

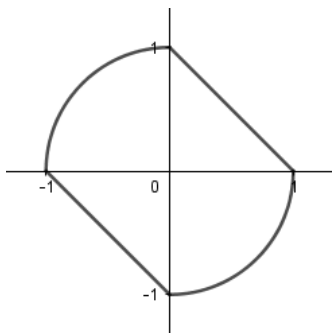
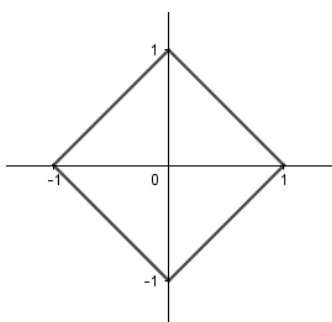
3.2. ESPACIOS UNIFORMEMENTE NO CUADRADOS

En esta sección introducimos otra noción geométrica asociada a la esfera unitaria de un espacio de Banach dado.

Definición 3.9. Diremos que un espacio de Banach X es *uniformemente no cuadrado* (UNS) si $\delta_X(\varepsilon) > 0$ para algún $\varepsilon \in (0, 2)$.

Teniendo en cuenta que el módulo de convexidad mide qué tan redonda es la bola unitaria del espacio, la noción de ser UNS significa que la bola unitaria del espacio no es un cuadrado pero puede poseer segmentos rectilíneos.

A continuación se va a considerar el espacio \mathbb{R}^2 con dos normas, $\|\cdot\|_1$ y $\ell_1 - \ell_2$, las cuales serán útiles para mostrar la geometría de la bola unitaria de un espacio UNS y otro que no lo es. Ver las figuras ?? y ??.

Figura 3.10: $(\mathbb{R}^2, \ell_1 - \ell_2)$ Figura 3.11: $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$

Tenemos pues, que $X = (\mathbb{R}^2, \ell_1 - \ell_2)$ es un espacio UNS, mientras que $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ no lo es. La justificación de esto se deduce a partir de los ejemplos de la sección 2.3.

Con el siguiente resultado, mostramos una relación entre el concepto de ser UNS y la constante $S(X)$.

Teorema 3.10. *Sea X un espacio de Banach. Si $S(X) > 1$ entonces X es UNS. Recíprocamente, supongamos que X es UNS. Entonces, si $\varepsilon' \in (0, 2)$ es la única solución de $\varepsilon' = 2(1 - \delta_X(\varepsilon'))$ tenemos que $S(X) = \frac{2}{\varepsilon'} \in (1, \sqrt{2})$.*

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que X no es UNS, es decir, para todo $\varepsilon \in (0, 2)$, consideramos $\delta = \varepsilon/2$, existe $u, v \in S_X$ tales que:

$$\frac{\|u + v\|}{2} > 1 - \delta, \quad \text{entonces,} \quad \|u + v\| > 2(1 - \delta), \quad \text{así,} \quad \varepsilon > 2 - \|u + v\|.$$

Además se tiene,

$$\frac{\|u - v\|}{2} > 1 - \delta \quad \text{esto es,} \quad \varepsilon > 2 - \|u - v\|.$$

Ahora considere $x = \frac{u+v}{\|u+v\|}$ y $y = \frac{u-v}{\|u-v\|}$, $x, y \in S_X$, así:

$$\begin{aligned}
\|x + y\| &= \left\| \frac{u+v}{\|u+v\|} + \frac{u-v}{\|u-v\|} \right\| \\
&= \left\| u \left(\frac{1}{\|u+v\|} + \frac{1}{\|u-v\|} \right) + v \left(\frac{1}{\|u+v\|} - \frac{1}{\|u-v\|} \right) \right\| \\
&\leq \|u\| \cdot \left| \frac{1}{\|u+v\|} + \frac{1}{\|u-v\|} \right| + \|v\| \cdot \left| \frac{1}{\|u+v\|} - \frac{1}{\|u-v\|} \right| \\
&= \frac{|\|u-v\| + \|u+v\|| + |\|u+v\| - \|u-v\||}{\|u+v\| \cdot \|u-v\|} \\
&\leq \frac{2(2-\varepsilon) + \varepsilon}{(2-\varepsilon)^2}.
\end{aligned}$$

Procediendo de manera análoga se tiene que,

$$\|x - y\| \leq \frac{|\|u+v\| - \|u-v\|| + |\|u+v\| + \|u-v\||}{\|u+v\| \cdot \|u-v\|} \leq \frac{2(2-\varepsilon) + \varepsilon}{(2-\varepsilon)^2}.$$

Esto implica que,

$$\begin{aligned}
\max(\|x - y\|, \|x + y\|) &< \frac{2(2-\varepsilon) + \varepsilon}{(2-\varepsilon)^2} \\
&= \frac{2}{2-\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{(2-\varepsilon)^2},
\end{aligned}$$

de ahí que, $S(X) \leq 1$. Recíprocamente, sean X uniformemente no cuadrado y $\varepsilon' \in (0, 2)$ la única solución de $\varepsilon' = 2(1 - \delta_X(\varepsilon'))$. Recuerde que:

- i) $\delta_1(1, X) = S(X) - 1$;
- ii) $(1 - \delta_X(\varepsilon))\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}(1 - \delta_X(\varepsilon))^{-1}, X\right) = \delta_X(\varepsilon)$,

donde δ_1 es la función definida en el Teorema 2.22. De I) se tiene que $S(X) = \delta_1(1, X) + 1$ y, usando la hipótesis sobre ε' y el Teorema 2.22 se deduce que:

$$\begin{aligned}
(1 - \delta_X(\varepsilon')) \cdot \delta_1\left(\frac{\varepsilon'}{2} \frac{1}{1 - \delta_X(\varepsilon')}, X\right) &= \delta_X(\varepsilon'); \\
\frac{\varepsilon'}{2} \delta_1\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon'}, X\right) &= \delta_X(\varepsilon'); \\
\delta_1(1, X) &= \frac{2\delta_X(\varepsilon')}{\varepsilon'} = \frac{2\delta_X(\varepsilon')}{2(1 - \delta_X(\varepsilon'))}.
\end{aligned}$$

Por ende, $S(X) = \frac{\delta_X(\varepsilon')}{(1 - \delta_X(\varepsilon'))} + 1 = \frac{2}{2 - \delta_X(\varepsilon')} = \frac{2}{\varepsilon'}$. Tenemos además que $\delta_X(\varepsilon') \leq$

$1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon'^2}{4}}$, de ahí note que:

$$\delta_X(\varepsilon') \leq 1 - \sqrt{\frac{4 - \varepsilon'^2}{4}}, \quad \text{esto es,} \quad \sqrt{4 - \varepsilon'^2} \leq 2(1 - \delta_X(\varepsilon')).$$

Como $\varepsilon' \in (0, 2)$, tenemos, $\sqrt{4 - 2} \leq \sqrt{4 - \varepsilon'^2} \leq 2(1 - \delta_X(\varepsilon'))$, por ende,

$$\sqrt{2} \leq 2(1 - \delta_X(\varepsilon')); \quad \frac{1}{1 - \delta_X(\varepsilon')} \leq \frac{2}{\sqrt{2}};$$

$$\frac{2}{2(1 - \delta_X(\varepsilon'))} \leq \sqrt{2}; \quad \frac{2}{\varepsilon'} \leq \sqrt{2}.$$

Así, $S(X) = \frac{2}{\varepsilon'} \in (1, \sqrt{2})$.

□

BIBLIOGRAFÍA

- [1] E. Casini, *About some parameters of normed linear spaces*, Atti. Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 80 (1986), 11–15.
- [2] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396–414.
- [3] T. Figiel, *On the moduli of convexity and smoothness*. Studia Math. 56 (1976), 121–155.
- [4] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler, *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York, 2011.
- [5] J. Gao, K. S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 48 (1990), 101–112.
- [6] D. J. H. Garling, *Inequalities: a journey into linear analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [7] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*. Ann. of Math. (2) 80 (1964), 542–550.
- [8] M. Kato, L. Maligranda, Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*. Studia Math. 144 (2001), 275–295.
- [9] K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 28. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.