ESTRATEGIAS QUE EL ESTUDIANTE USA PARA RESOLVER PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

ROSALBA DUITAMA PALOMINO
DANIEL OSWALDO TÉLLEZ NAVARRO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2006

ESTRATEGIAS QUE EL ESTUDIANTE USA PARA RESOLVER PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

ROSALBA DUITAMA PALOMINO
DANIEL OSWALDO TÉLLEZ NAVARRO

Trabajo de Grado para optar al título de
Especialistas en Educación Matemática

DIRECTORA:
DIANA JARAMILLO
Ph.D. en Educación Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2006

A los autores de mi inspiración para iniciar y culminar, una meta más en mi vida profesional, MOISÉS ALBERTO, DIANA LIZETH Y FABIÁN ANDRÉS.

Rosalba Duitama

A mi familia por su incondicional motivación y apoyo, y a mi inspiración JULIÁN CAMILO e INDIRA YISETH, pues gracias a ellos inicié y culminé un objetivo más de mi vida.

Daniel Oswaldo Téllez

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos a:

A los estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Provenza, Edgar Mauricio, Gloria Stephany, Alvaro Javier, Juan Sebastián, Jenny Fabiola, Nini Fernanda, Johana Catherine, Diana Carolina, Bryan y Aura Catherine, quienes con su participación y colaboración hicieron posible nuestro trabajo de grado.

A los Docentes de la Especialización en Educación Matemática, por su orientación y aportes para nuestro crecimiento profesional.

A nuestra orientadora, Diana Jaramillo por sus aportes, colaboración, y dedicación, que fueron valiosos para la realización y culminación de nuestro Trabajo Final de Investigación.

TÍTULO: ESTRATEGIAS QUE EL ESTUDIANTE USA PARA RESOLVER PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS CON TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.

AUTOR: ROSALBA DUITAMA PALOMINO, DANIEL OSWALDO TÉLLEZ NAVARRO.

PALABRAS CLAVE: Educación matemáticas, Estrategias, Resolución de Problemas, Trigonometría, Experiencia de Aula.

RESUMEN

Estrategias que el estudiante usa para resolver problemas trigonométricos con triángulos rectángulos es la respuesta al interrogante: ¿qué estrategias utilizan los estudiantes para resolver problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos?

Para alcanzar tal objetivo en esta experiencia de aula, partimos del análisis cualitativo realizado a las diferentes estrategias que los estudiantes de la Institución Educativa Provenza del grado décimo usaron en diferentes experiencias matemáticas en el aula. Este análisis es el resultado de una triangulación entre las voces de los estudiantes, las voces de los autores de esta experiencia y las voces que validan el referencial teórico del trabajo.

Para realizar dicho análisis contamos con la participación de diez estudiantes[1] (cinco grupos) de la Institución, quienes trabajaron dos talleres con diferente enfoque (problemas tradicionales y no tradicionales) y, además, participaron en dos entrevistas semiestructuradas correspondientes a cada uno de los talleres aplicados en donde explicaron las estrategias utilizadas al resolver los problemas, y de donde emergieron tres categorías de análisis: “Realizando un Dibujo”, “Aprender a Aprender” y “Estrategias que utilizan los estudiantes, al resolver problemas sobre triángulos rectángulos”.

Finalmente, como consecuencia del análisis y de las observaciones encontradas al aplicar los talleres, se realizaron algunas conclusiones que esperamos sirvan de apoyo para el docente, en el mejoramiento de estrategias metodológicas apropiadas en la enseñanza de la trigonometría, específicamente en la solución de problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos.

* Trabajo de grado.

** Escuela de Matemáticas, Especialización en Educación Matemática, Diana Jaramillo.

[1] Gloria Stephany, Edgar Mauricio, Álvaro Javier, Juan Sebastián, Jenny Fabiola, Nini Fernanda, Johana Catherine, Diana Carolina, Bryan y Aura Catherine (nombres reales).

TITLE: STRATEGIES THAT STUDENTS USE TO SOLVE TRIGONOMETRICAL PROBLEMS WITH RECTANGLES TRIANGLES*.

AUTHOR: ROSALBA DUITAMA PALOMINO, DANIEL OSWALDO TÉLLEZ NAVARRO **

KEY WORDS: Math Education, Strategies, Problem Solutions, Trigonometry, Classroom experience.

SUMMARY

Strategies that students use to solve trigonometrical problems with rectangles triangles, is the answer to the question: What strategies do students use to solve trigonometrical problems that involve rectangle triangles?

To reach such classroom experience objective, we start from the qualitative analysis made to the different strategies that a group of tenth grade students from “Institución Educativa Provenza” (Provenza Educative Institution), used in different classroom math experiences. The analysis is the result of a triangulation among the students voices, experience autor’s voices and the voices who validate the theoretical reference of the job.

To make this analysis we count on the participation of ten students[2] (five groups) of the Institution who worked two different aproach jobs (traditional and non traditional problems) and, besides, they took part in two semiestructuradas interviews corresponding to each one of the jobs that were applied and where they explained the strategies used to solve the problems and from where appeared three cathegories of analysis: “Makin a draw”, “Learn to learn”, and “Strategies that students use to solve problems about rectangle triangles”.

Finally, as consequence of the analysis and of the observations made at the moment to apply the jobs, we came to some conclusions, we hope, help the teacher in apropiate methodology in improvement strategies in teaching trigonometry, specifically in trigonometrical problems solutions that involve rectangle triangles.

* Trabajo de grado.
** Escuela de Matemáticas, Especialización en Educación Matemática, Diana Jaramillo.
[2] Gloria Stephany, Edgar Mauricio, Álvaro Javier, Juan Sebastián, Jenny Fabiola, Nini Fernanda, Johana Catherine, Diana Carolina**,** Bryan y Aura Catherine (real names).

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ANEXOS

Página

UNA PERSPECTIVA

A través de nuestra experiencia, hemos observado algunas necesidades educativas inmediatas y cambios que se han venido dando en la educación. Al reflexionar sobre estos cambios, somos conscientes que debemos tener un pensamiento abierto hacia lo nuevo e inesperado; nuestro desafío está en ser partícipes de ésta renovación. Por esto, en este trabajo es nuestro objetivo analizar las estrategias que los estudiantes de décimo grado emplean al resolver problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos.

Fue de nuestro interés trabajar con los estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Provenza y responder al interrogante ¿Qué estrategias utilizan estos estudiantes para resolver problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos? Para lograrlo partimos del análisis cualitativo realizado a las diferentes estrategias que el estudiante usó, lo que nos permitió detectar construcciones de conceptos y procesos de pensamiento que usaron en la resolución de problemas. Además, el análisis de errores en los tipos de solución que los estudiantes propusieron al resolver un problema, y el uso inadecuado de algunas estrategias nos sirvieron para ayudar a organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos trigonométricos, tomando en consideración aquellos aspectos que generaron más dificultades y que a la vez contribuyen a una mejor preparación de estrategias para la corrección de los mismos.

Diseñamos dos talleres, donde el primero tenía 3 problemas tradicionales (aquellos problemas donde el estudiante aplica una fórmula y un concepto trigonométrico para resolverlos sin incluir decisiones estratégicas); el segundo tenía 3 problemas no tradicionales (aquellos que involucran preconceptos propios del área y de otras áreas relacionándolos entre sí; donde se incluyen decisiones acerca de un plan para resolver un problema y la evolución de éste durante el proceso de solución). Para el análisis cualitativo se tomaron 10 estudiantes:[3] Gloria Stephany, Edgar Mauricio, Alvaro Javier, Juan Sebastián, Jenny Fabiola, Nini Fernanda, Johana Catherine, Diana Carolina**,** Bryan y Aura Catherine. Estos estudiantes, además de trabajar en los talleres, participaron en dos entrevistas semiestructurada por parejas correspondientes a cada uno de los talleres aplicados, donde explicaron las estrategias utilizadas al resolver los problemas en estudio. El registro de dicha entrevista se realizó mediante una grabación y su respectiva trascripción.

Finalmente, a raíz del análisis y de las observaciones encontradas al aplicar los talleres y las entrevistas, se dieron algunas conclusiones que esperamos sirvan de apoyo para el docente, en el mejoramiento de estrategias metodológicas apropiadas en la enseñanza de la trigonometría, específicamente en la solución de problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos; de esta manera, cuando el estudiante se enfrente a un problema, pueda interiorizar y apropiarse de una serie de estrategias que le permitan resolverlo.

Nuestro trabajo está conformado por cuatro capítulos, los cuales explicaremos de manera breve a continuación:

[3] Los nombres de los estudiantes que aparecen en el presente trabajo son reales, previa autorización de los mismos.

En el primer capítulo, "**Describiendo nuestra labor"**, mostramos el camino seguido para la realización de este trabajo. Aquí describimos las motivaciones que nos llevaron a plantear esta experiencia de aula y las estrategias metodológicas empleadas, cuál es el objetivo propuesto, cuál es la importancia del tema trabajado, entre otros aspectos. También describimos en estos capítulos, como fue el planteamiento y ejecución de los talleres y entrevistas, y cómo realizamos el análisis posterior de las mismas.

En el segundo capítulo, **"Categorías para el análisis"**, abordamos tres categorías emergentes de análisis que recogen toda la experiencia de aula, en cuyo análisis incluimos las voces de los estudiantes, el marco teórico que sustenta este trabajo, así como nuestros puntos de vista. El análisis de estas categorías resultaron de todo un proceso realizado en la recolección de datos como fueron la aplicación de los talleres, la realización de entrevistas y la socialización de las experiencias, que los estudiantes tuvieron en la solución de los problemas planteados en los talleres. Las categorías emergentes analizadas fueron: "Realizando un dibujo"; "Aprender a aprender"; y "Otras estrategias que utilizan los estudiantes al resolver problemas sobre triángulos rectángulos". Dentro de esta última categoría emergente se analizaron tres estrategias que los estudiantes emplearon para la resolución de problemas: lenguaje matemático, relación de los datos con la incógnita y aprendizaje colaborativo.

Para finalizar nuestro trabajo, presentamos el tercer capítulo, **"Finalizando nuestra experiencia"**, donde damos las conclusiones a las que pudimos llegar al terminar esta experiencia, teniendo en cuenta sugerencias de los estudiantes y dificultades que se visualizaron en el uso de estrategias para resolver problemas, que sirvieron para concluir nuestra experiencia y fortalecer nuestro quehacer pedagógico.

DESCRIBIENDO NUESTRA LABOR

La educación de hoy concibe al docente y al estudiante como sujetos activos, integrados y comprometidos en la búsqueda del conocimiento y de estrategias metodológicas para el mejoramiento del aprendizaje de los educandos. En nuestra labor docente, estamos constantemente llamados a participar en los cambios educativos propuestos en matemáticas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

A partir de estas propuestas hemos llegado a conocer algunos trabajos realizados en el área de la trigonometría. Trabajos que nos motivaron a ser partícipes de esta renovación, en lo que respecta al desarrollo del pensamiento espacial y geométrico, a través del análisis de las estrategias que utiliza el estudiante al resolver problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos.

La necesidad de enfocar nuestro trabajo hacia la trigonometría surgió a raíz de las dificultades reflejadas por los estudiantes en el momento de aplicar la modelación geométrica, las razones trigonométricas y algunos presaberes tales como: propiedades geométricas de los triángulos y teorema de Pitágoras, conceptos algebraicos y físicos en la solución de problemas sobre triángulos rectángulos.

Además, dada la importancia que tiene para el estudiante aplicar la trigonometría en el dominio de conceptos físicos tales como: cinemática (movimiento parabólico), dinámica (diagramas de cuerpo libre), vectores (componentes rectangulares); y porque en el transcurso de su formación académica las necesitará en el estudio del álgebra lineal, en las aplicaciones del cálculo diferencial e integral, en las modelaciones físico-mecánicas y electromagnetismo.

Como consecuencia de lo anterior, surgió la pregunta: ¿qué estrategias utilizan los estudiantes para resolver problemas trigonométricos que involucran triángulos rectángulos?

Para poder responder a la pregunta planteada en nuestra investigación partimos, como se dijo anteriormente, de la necesidad de analizar algunas categorías emergentes, como la modelación matemática y su utilización como una estrategia en la resolución de problemas.

Adler (1970), citado por el Ministerio de Educación UDCRESS (2001), afirma que el modelaje matemático constituye una rama propia de la matemática que intenta traducir situaciones reales en un lenguaje matemático. A partir de la experiencia debemos encontrar medios para desarrollar en los alumnos la capacidad de leer e interpretar la matemática, y su aplicación, porque "el divorcio entre el pensamiento y la experiencia directa, priva al primero de cualquier contenido real y lo transforma en una caja vacía de símbolo sin significado", esos medios constituyen una significativa defensa de los procesos del modelaje matemático, en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Otro autor que hace parte de nuestro marco teórico es Luz Manuel Santos Trigos en su obra *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas* quién nos aportó valiosas ideas sobre estrategias metacognitivas, y la representación gráfica, en el momento de abordar el análisis de las categorías emergentes y Polya G. en su obra *Resolución de problemas,* de esta surgieron los aportes y argumentos para analizar la estrategia referente al lenguaje matemático y la relación de los datos con la incógnita. Igualmente, retomamos los aportes de Johnson y Johnson en su artículo *las estrategias y técnicas didácticas en el rediseño* para el análisis de la estrategia relacionada con el aprendizaje colaborativo.

A medida que fuimos avanzando en la investigación surgió la necesidad de profundizar en el análisis de ciertas estrategias, entre ellas las metacognición. Para ello tomamos los aportes de Mar Mateos en su obra *Metacognición y educación* para ampliar las estrategias empleadas por los estudiantes respecto a la representación, planificación, monitoreo y sistemas de creencias que utilizaron los estudiantes al resolver los problemas propuestos en los talleres.

Para analizar las estrategias que utilizaron los estudiantes para resolver problemas trigonométricos que involucraban triángulos rectángulos, que es el objetivo de nuestra investigación, nos basamos en algunos autores como Luz Manuel SantosTrigos y su obra *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas,* de donde surgieron valiosas ideas sobre las estrategias metacognitivas, y la representación gráfica en el momento de abordar el análisis de las categorías emergentes.

Por otro lado, para visualizar las categorías emergentes que surgieron como estrategias, se les dio espacio a los estudiantes que participaron en este trabajo para que contaran y describieran las estrategias que utilizaron para resolver problemas trigonométricos, que involucraban triángulos rectángulos para, posteriormente, realizar el análisis cualitativo a las respuestas que nos permitió detectar procesos de pensamiento, posibles errores y aciertos en las soluciones dadas, y, reconocer el uso del lenguaje matemático y la construcción de conceptos.

Nuestro trabajo es el fruto de una investigación de aula que se realizó en el colegio ya mencionado, desde marzo de 2005 hasta noviembre de 2005. Aclaramos que para la realización de los talleres y entrevistas se contó con la autorización de la institución y de los estudiantes.

Para el análisis cualitativo de los dos talleres se seleccionaron, de los 41 alumnos que conformaban el grado décimo (19 hombres y 22 mujeres), diez estudiantes con los que se formaron 5 grupos. Además, es importante mencionar que, contábamos con la ventaja de haberlos tenido como estudiantes en grados anteriores; esto nos permitió tener mayor información sobre sus ritmos de aprendizaje, características de la personalidad y algunas de las estrategias que usaban al momento de abordar determinado problema.

Referente a los talleres, diseñamos dos: el primero, planteaba tres problemas tradicionales –aquellos en los que el estudiante aplicaba una fórmula y un concepto sin tomar decisiones estratégicas deliberadas y conscientes-. Contrario a éste, el segundo taller planteaba tres problemas no tradicionales –aquellos que requería presaberes y conceptos propios del área y de otras como la física- en los cuales se debía diseñar un plan para, primero, abordar y resolver, el problema; y, segundo, para controlar la evolución de éste durante el proceso de solución (metacognición).

Para el desarrollo de primer taller se dio un tiempo de dos horas; luego en las entrevistas los estudiantes comentaron sus dificultades, procesos lógicos, y las argumentaciones que emplearon como estrategias para resolver los problemas. En el segundo taller, el tiempo lo determinó cada grupo en la medida que iban terminando; las entrevistas fueron semiestructuradas con el fin de socializar las estrategias que se utilizaron para la resolución de los problemas donde los estudiantes de manera muy abierta y espontánea nos hicieron partícipes de sus inquietudes, creencias, dificultades, concepciones que manejan usualmente y aciertos que se reflejaron en la solución de los problemas de dicho taller.

En cuanto a las entrevistas ya referidas[4], se realizaron dos a cada uno de los cinco grupos, repartidas en dos secciones. La primera tenía como propósito registrar los argumentos dados en las soluciones de los problemas tradicionales; y, la segunda, los de los no tradicionales. En ellas, se logró, además, que los estudiantes manifestaran aspectos cognitivos, socio-afectivos y su actitud frente a la matemática.

Dentro del análisis cualitativo, se analizaron los errores cometidos por los estudiantes en las diferentes soluciones y el uso inadecuado de algunas estrategias que nos sirvieron para estructurar y organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos trigonométricos, tomando en consideración aquellos aspectos que generaron más

[4] La primera la realizamos el 5 de agosto de 2005, y la segunda el 28 de noviembre del mismo año.

dificultades y que a la vez contribuyeron a una mejor preparación de estrategias para la corrección de los mismos.

CATEGORÍAS PARA EL ANÁLISIS

1. Realizando un dibujo

... "Si me hubiesen dado el dibujo, habría sido más fácil resolverlo"
Álvaro

Estas palabras nos permitieron comprender que para los estudiantes es de gran ayuda que el profesor les proporcione un gráfico en el momento de plantearles un problema, ya que en él encuentran herramientas para resolverlo. La interpretación de un problema puede no ser clara, pero si el dibujo forma parte del problema planteado permitirá al estudiante tener una mejor orientación en las representaciones mentales las cuales forman parte de las estrategias a seguir en la solución que plantee.

> "En la fase de comprensión del problema, el pensar en una figura o un diagrama muchas veces no solamente ayuda a identificar los elementos importantes del problema sino que también puede sugerir alguna estrategia para resolverlo". Santos (1997, p. 54).

Lo anterior nos llevó a tener en cuenta, y analizar, otras expresiones registradas en la entrevista del taller 1 de los estudiantes como la de Johana, quien afirmó:

"el dibujo ayuda mucho en un problema".
(entrevista, sobre taller 1, agosto 5)

Según Arbeláez (2002), las representaciones mentales se entienden como aquellas formas materiales o simbólicas de dar cuenta de algo real en su ausencia; están organizadas en estructuras que permiten darle sentido al entorno. Sin embargo, no es posible construir representaciones puras y aisladas, sino que se construyen a partir de un contexto representacional delimitado por la actuación cognitiva, constituida por una serie de interacciones aprendidas de la realidad, que la tradición cultural de cada grupo social a llevado a cabo y que por lo tanto es histórica y dependerá del contexto en el que el sujeto se desarrolle.

De otro lado, las representaciones de los conceptos se constituyen en atributos de carácter abstracto, que se forman a través de las experiencias directas, de procesos hipotéticos y de comprobación, y se expresan de manera simbólica. Por ello, es necesario comprender los procesos de construcción representacional.

Los seres humanos construyen representaciones mentales sobre el entorno que los rodea, sobre sí mismos, sobre la sociedad y sobre la naturaleza en la cual se constituyen como personas. Estas representaciones se organizan en estructuras conceptuales, procedimentales y actitudinales para darle sentido a la interioridad y exterioridad de su entorno, con miras al dominio, la intervención y el control y la transformación del mismo. Arbeláez (2002).

Es este ordenamiento el que posibilita cualquier tipo de experiencia, como una de las maneras de actuar intencionalmente. Una vez cifrada la información, las representaciones simbólicas adquirirán su significado en correspondencia con el mundo objetivamente construido. Se tratará de representaciones internas de la realidad externa, entendidas así, la mente es un espejo de la naturaleza y en consecuencia, las representaciones son un espejo de la lógica del mundo externo. Arbeláez (2002).

De acuerdo con la manipulación de símbolos abstractos, representaciones gráficas y su correspondencia con la realidad objetiva, concordamos con Moreira (1996, p. 15) al citar a Lakoff, cuando afirma “no existe una correspondencia uno a uno entre el símbolo y su referente, ya que el mismo referente podría ir asociado a símbolos distintos de una situación a otra”.

Por esto, es posible que, cuando los estudiantes abordaron un problema, se hayan generado diversas interpretaciones y representaciones del mismo, debido a que cada estudiante tiene diferentes concepciones y sus propios argumentos para defender sus propuestas sin importar que sean o no correctas.

La formación de las representaciones se dan en dos niveles: en un nivel primario, las representaciones se forman en una conexión estrecha y de gran fiabilidad con el mundo representado, por ello lo que determina la representación primaria es la realidad percibida. Una vez formada las representaciones a través del contacto con lo representado, pueden conformarse las representaciones secundarias, ya que las representaciones del mundo también representan lo que podría ser. Es así como una imagen o situación puede tener diferentes interpretaciones. Arbeláez (2002).

De esta manera, las representaciones secundarias son voluntariamente separadas de la realidad y constituyen el fundamento de la capacidad para considerar el pasado, el posible futuro e incluso lo que no existe. Tienen que haber representaciones primarias para que sean posible las representaciones secundarias y las metarepresentaciones (la representación que el sujeto tiene del mundo representado), y a partir de estas, construir modelos que expliquen la realidad con los cuales se pueden proyectar estados deseables de la mente. Arbelaez (2002).

> "La mente representa lo que el caso es en realidad, lo que fue, lo que en el futuro podría ser, todo esto al mismo tiempo. Por lo tanto, se tienen diversos modelos mentales. Sin embargo, para planificar una acción simple hay que representar simultáneamente la situación actual y la deseada. El modelo cumple así, una función de razonamiento hipotético, representar una situación, aún cuando no se trate de una situación real". (Arbelaez 2002, p. 4).

Apoyándonos en las afirmaciones de Arbeláez, notamos que cuando los estudiantes representaban una situación a partir de un problema dado, debieron pasar por las características que influyeron en la construcción, o por las representaciones mentales anteriormente mencionadas, ya que sin abordar estos procesos les hubiese sido imposible construir dicha representación de manera completa.

Notamos, por consiguiente, que el grado de dificultad de un problema, disminuía cuando se facilitaba una representación o imagen del mismo, como bien lo mencionó Edgar Mauricio:

> ***"si en un problema nos dan el dibujo, no tendríamos que pensar en cómo lo haríamos, y sin el dibujo es como tener que darle otra solución al problema".***
>
> (entrevista, sobre taller 1, agosto 5)

Por tal razón el estudiante necesita adquirir habilidad y creatividad al hacer la representación gráfica de un problema, porque si en un momento determinado el profesor no les facilita el dibujo, este siente que se le duplica el trabajo; el tener la representación o imagen le ayuda a resolver el problema, ya que el dibujo está muy ligado a la solución misma, porque como dice Gardner, citado por Santos (1997), "la premisa fundamental para el estudio de las representaciones es aceptar que la actividad cognitiva humana debe ser descrita en términos de símbolos, imágenes, esquemas y otras formas de representación mental”.

Aunque para algunos estudiantes el hecho de no tener el dibujo o la representación del problema les hizo sentir que aumentaba las dificultades del mismo, para otros, según expresó Álvaro, esto no fue así:

> ***“el enunciado del problema era claro, creo que sí, y si no hubiera dibujo, lo hubiera podido resolver”.***
>
> (entrevista, taller 1, agosto 5)

Es posible que cuando el enunciado del problema es claro, el lenguaje matemático sencillo, explícito y que permite una conexión entre la pregunta y los datos del problema el estudiante logre resolverlo muy a pesar de la interpretación que hubiese hecho a la representación gráfica de la información.

Por otro lado, nos dimos cuenta de que, para resolver un problema no necesariamente se debían usar todos los datos que dábamos, porque eso dependía de las estrategias empleadas; este aspecto lo observamos en algunos estudiantes que con sólo leer el problema comenzaron a resolverlo sin detenerse a analizar la gráfica que se les dio.

Los estudiantes que tuvieron dificultad para realizar la gráfica en los problemas donde sólo se les daba el enunciado, cuando fueron entrevistados expresaron algunas palabras sobre esta dificultad como es el caso de Sebastián quién dijo:

> ***"la creatividad es una de las fallas, que muchos no imaginan bien...y si les queda mal la figura, les queda mal el problema".***
>
> (entrevista, taller 1 agosto 5)

En estas palabras vimos reflejada la necesidad de darle una representación gráfica correcta al problema para comprenderlo y analizarlo de manera más concreta. Dependiendo de qué tan recursiva y clara sea la representación dada por el estudiante, esta será de gran ayuda para orientar la solución del problema.

Por consiguiente, como muy acertadamente afirma Polya (1998), el sólo dibujo como tal, no es suficiente para darle solución al problema, puede o no darle una orientación al estudiante en el tipo de estrategia que escoja para abordarlo.

> "sucede que una figura inexacta sugiere una conclusión errónea, pero el peligro no es grande y podemos subsanarlo de diferentes modos, en especial, modificando la figura. El peligro será nulo si nos concentramos en las relaciones lógicas y asumimos que la figura no es más que una ayuda, que no constituye la base de nuestras conclusiones; son las relaciones lógicas las que constituyen la base real". (Polya 1998, p. 94).

Por lo tanto, volviendo a la experiencia del aula, el dibujo que resultaba de la interpretación del problema, evidentemente era una estrategia que facilitaba las herramientas, que conducían a la solución del problema. Además, era importante que los estudiantes tuvieran un bosquejo inicial que les permitiera ir relacionándolo con los datos del problema, basándose en las relaciones lógicas que surgían al interpretarlo y en la medida en que se resolvían las conclusiones que se daban irían indicando los cambios que se le debían realizar al dibujo que representaba el enunciado del problema.

Citando nuevamente a Polya (1998, p. 93) “las figuras no se reservan al uso exclusivo de los problemas de geometría. Una figura puede ayudar considerablemente en todo tipo de problemas que nada tienen de geométrico”.

Teníamos, pues, buenas razones para considerar el papel que jugaban las figuras en la solución de los problemas. Para realizar una figura los estudiantes debían imaginarla y luego representarla sobre el papel; en ciertos casos podía ser preferible imaginarla sin dibujarla, pero si tenían que examinar detalles diferentes, uno tras otro, era preferible dibujar para no olvidar detalles en el inicio o en el desarrollo del proceso de solución.

En el taller 1 (ver anexo), a la pregunta “¿la gráfica del problema 3 (taller 1) es clara o es difusa?

El ángulo de elevación del punto T, en la parte superior de la torre mostrada en la figura, se mide desde los puntos A y B. Calcúlese la altura de la torre.

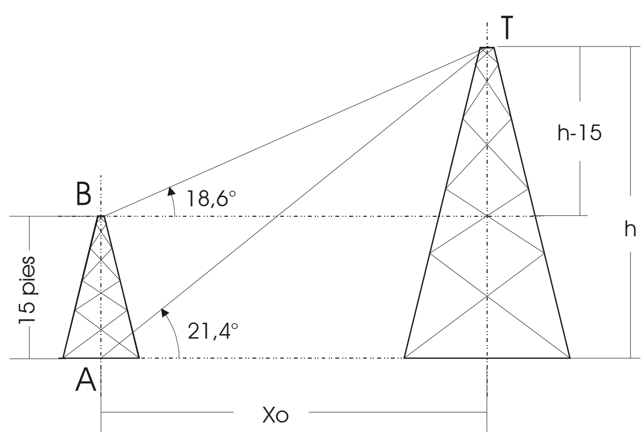


Figura 1. Las Torres-enunciado

Álvaro respondió:

“No. El gráfico lo confunde a uno; lo pone a usted a pensar”.

Consideramos que el dibujo resultó en algunos casos de gran utilidad, dependiendo de la descripción gráfica que comunicaba el enunciado del problema. Sin embargo, esta misma descripción gráfica resultó confusa para los estudiantes y los llevó a interpretaciones erróneas del problema.

> “un dibujo puede ser claro para los autores del problema y sin embargo resulta confuso para el estudiante, porque él lo puede analizar de manera diferente llevándolo a un posible error al no encontrar una representación familiar y el conjunto de procedimientos de solución asociados a ella no le muestran un camino para resolver el problema”. (Mateos, 2001, p.84).

Por lo tanto, un dibujo no siempre proporciona las herramientas necesarias para la solución correcta del problema. Es posible que la interpretación del estudiante no hubiese sido clara, el dibujo pudo confundirlo y resultó siendo un distractor.

En el taller 2, a la pregunta “¿qué dificultad surge al realizar el dibujo que representa el enunciado del problema dos? Diana aseguraba:

> ***“pues es muy difícil, porque lo que está en palabras debe llevarse a una imagen donde se relacionen los datos y la incógnita del problema requiriendo una dosis de imaginación y creatividad”.***
>
> (entrevista, noviembre 28)

Al respecto, Polya (1998, p. 93) argumenta:

> “el estudio detallado de un problema se inicia trazando una figura que comprende la incógnita y los datos reuniendo estos diversos elementos en la forma requerida por la condición del problema. A fin de comprender bien el problema, tenemos que

considerar por separado cada uno de los datos y cada una de las partes de la condición; juntaremos después todas las partes y consideraremos la condición como un todo, tratando de ver simultáneamente las diversas relaciones requeridas por el problema. Es evidente que no podríamos manejar, separar y combinar todos estos detalles sin una figura trazada en el papel".

Concordamos en que inicialmente el dibujo no debe estar totalmente terminado cuando se aborda el problema; al contrario, este puede presentar modificaciones, a medida que se van encontrando las relaciones entre las condiciones dadas y las incógnitas del problema, es decir, el dibujo se va ajustando de manera parcial o total a la solución del problema.

Álvaro comentaba respecto al dibujo que representaba la situación del segundo problema del taller 2:

> "***es un problema que se necesita leer más de dos veces el enunciado, porque podemos cometer una equivocación en la interpretación y nos ocasionaría una representación gráfica errónea".***

De acuerdo con lo expresado por Álvaro, se resaltó la necesidad de leer el problema cuantas veces fuera necesario hasta llegar a la interpretación, que se intentaría mostrar mediante la realización del dibujo; en la medida en que se volvía a leer el problema, el estudiante podía ir encontrando más elementos que contribuyeran a su imaginación y creatividad para, así, diseñar el dibujo que comunicaría lo que estaba entendiendo del problema.

La comprensión de lectura juega un papel importante en la representación gráfica de un problema; si el estudiante tiene falencias en la comprensión de lectura se verá reflejada en los pocos elementos y herramientas que le aportan a la imaginación y creatividad en el momento de diseñar la representación gráfica.

Analizamos los dibujos elaborados por los estudiantes (ver figuras 2, 3 y 4) a partir de la interpretación dada al siguiente problema:

"Un barco navega 400 Km. entre las ciudades A y B, con rumbo 60º al este del norte. Desde la ciudad B se dirige a otra ciudad C con rumbo 30º al este del norte, distante 250 km. Calcule la distancia entre las ciudades A y C y el rumbo que debe tomar el barco si el regreso lo hace directo entre las dos ciudades".

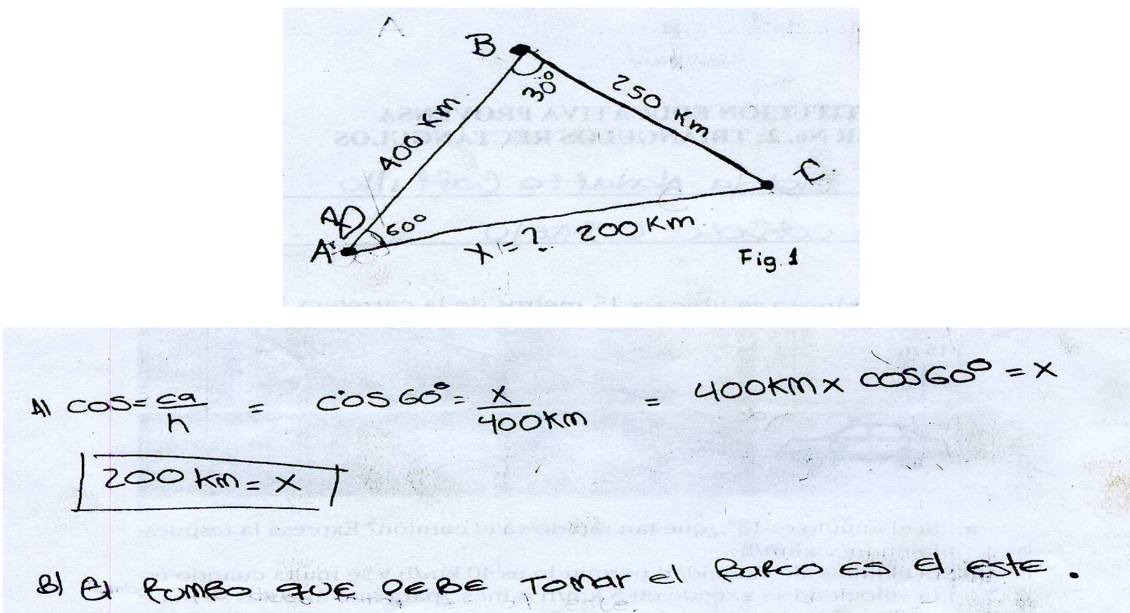


Fig. 2 Trayectoria del barco-solución a

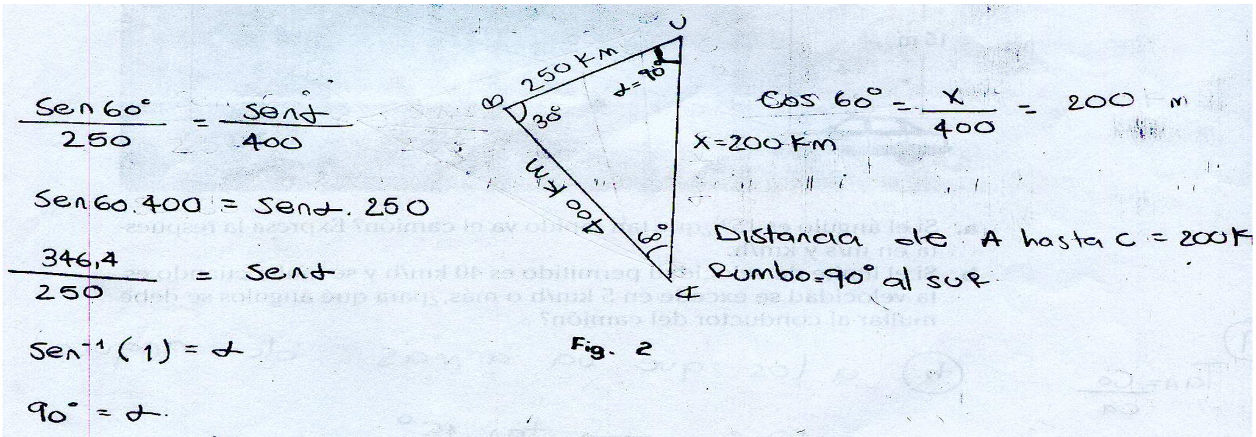


Fig. 3 Trayectoria del barco-solución b

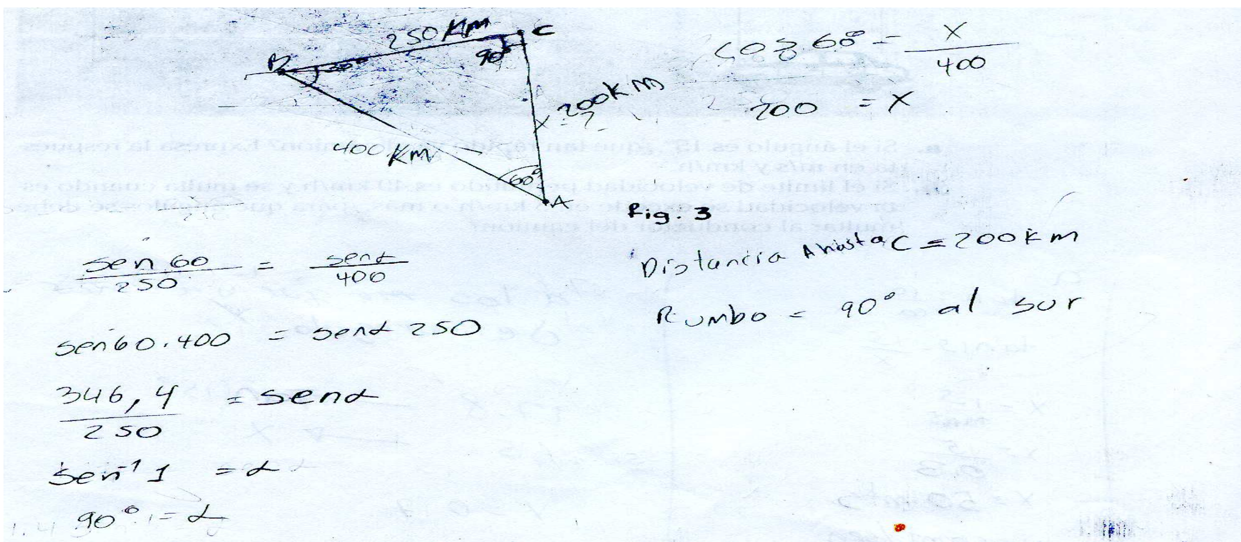


Fig. 4   Trayectoria del barco-solución c

En la representación gráfica de cada figura observamos dificultades en la ubicación espacial, el concepto de vector y su representación geométrica en el plano. Los estudiantes analizaron el vector como una longitud y al dibujar el triángulo que resultó de la interpretación del problema se limitaron simplemente a transcribir los ángulos dentro del triángulo sin analizar las implicaciones que trae la representación de un vector (magnitud, dirección y sentido) en el plano.

Además, las figuras que fueron elaboradas por los estudiantes fueron inexactas y las relaciones lógicas que dedujeron no contribuyeron en la solución del problema, lo cual llevó a conclusiones erróneas, como se muestra en las figuras.

Desafortunadamente, los grupos no pudieron concretar sus ideas y en medio de la frustración de no tener claro el problema y la ausencia de los conceptos físicos necesarios para abordar el problema se limitaron simplemente a relacionar los datos en un triángulo de manera tradicional. Los dibujos fueron elaborados de manera inmediata, lo que dio indicios de la ausencia de un análisis detallado y de la revisión del dibujo para verificar si concuerda con los datos y la pregunta.

Un barco navega 400 Km entre las ciudades A y B, con rumbo 60 ggrados al oeste del norte. Desde la ciudad B se dirige a otra ciudad C con rumbo de 30 grados al oeste del norte, distante 250 Km. Calcule la distancia entre la ciudad A y C y el rumbo que debe tomar el barco si el regreso lo hace directo entre las dos ciudades.

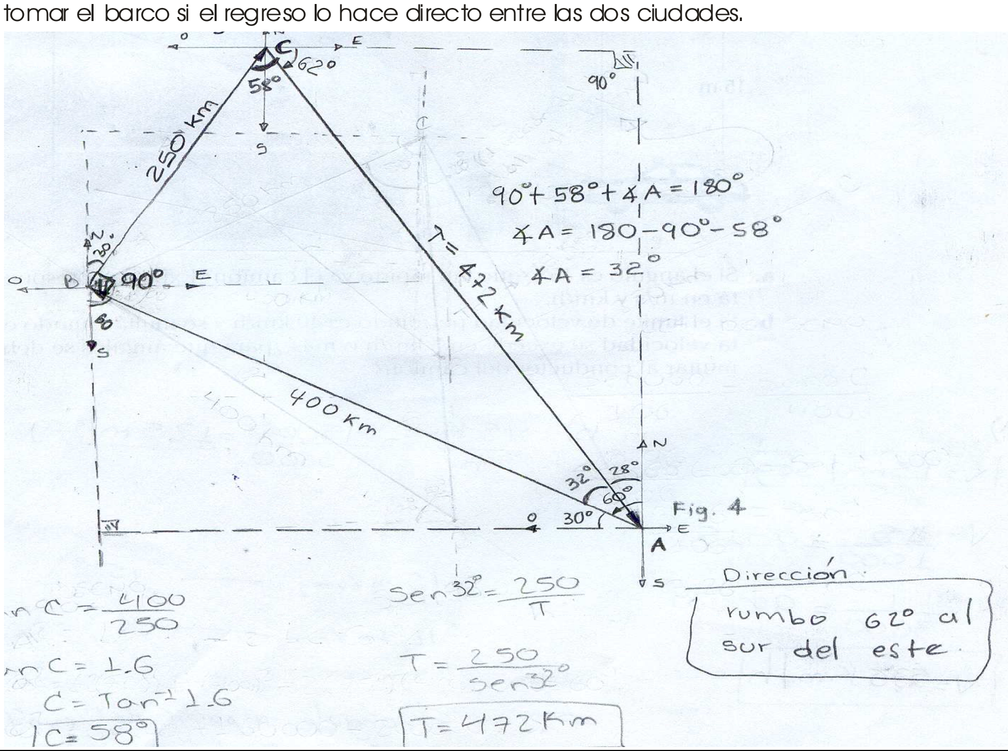


Fig. 5 Trayectoria del barco-solución d

En la figura 5, problema dos del taller 2 se notó un acercamiento al concepto geométrico real con respecto a la ubicación de un vector en el plano, implicando el manejo de la ubicación espacial. Esta gráfica fue elaborada por Gloria y Edgar; en ella reflejaron la capacidad de extrapolar los conceptos físicos con los matemáticos, mostrando claridad en el concepto de vector y su ubicación espacial.

Al respecto, ellos comentaron que el haber trabajado en parejas permitió la interacción de ideas, conceptos, estrategias y la reflexión para elegir la estrategia más adecuada, llevándolos a un análisis más detallado que el de sus compañeros. El análisis detallado, la concertación de ideas y estrategias fueron posibles gracias al tiempo dado para elaborar este taller (libre). De acuerdo a lo anterior, Polya (1993, p. 94) afirma:

> "las figuras exactas juegan por principio, en geometría, el mismo papel que las mediciones exactas en física, pero en la práctica tiene menos importancia que estas, ya que los teoremas de geometría se verifican de un modo más extenso que las leyes de la física. Sin embargo, los principiantes deben construir un gran número de figuras tan exactas como le sean posibles, a fin de adquirir una buena base experimental. Sucede que una figura inexacta sugiere una conclusión errónea, pero el peligro no es grande y podemos subsanarlo de diferentes modos, en especial modificando la figura. El peligro será nulo si nos concentramos en las relaciones lógicas y asumimos que la figura no es más que una ayuda, que no constituye la base de nuestras conclusiones; son las relaciones lógicas las que constituyen la base real".

Al trazar las figuras sobre el papel, estas son mas fáciles de hacer, reconocer y recordar que cuando sólo están en nuestra imaginación. En geometría son particularmente familiares, de hecho las gráficas y diagramas de todo tipo se utilizan en todas las ciencias. Consideramos que los estudiantes cuando realizan una representación geométrica apropiada, tratan de expresarlo todo en el lenguaje de las figuras y de reducir todo tipo de problemas a problemas de geometría, lo que les permitirá un avance sensible hacia la solución.

En ese sentido, citamos algunas sugerencias hechas por Arbeláez (2002, p.13) respecto a la elaboración de un dibujo correspondiente a un problema, donde es necesario tener en cuenta:

- El dibujo debe ser siempre un esbozo esquemático del objeto principal del problema (la figura o imagen, el conjunto de figuras), que incluya la representación por medio de literales y de otros símbolos, de todos los elementos de dicho objeto y de algunas de sus características. Si en la formulación del problema se dan las simbolizaciones de los objetos, entonces se deben emplear estas mismas simbolizaciones en el dibujo; si en el problema no se proporciona simbolización alguna, entonces es necesario emplear las simbolizaciones comúnmente adoptadas o inventar las propias.

- El dibujo debe corresponder al problema. Esto significa, por ejemplo, que si en el problema el objeto en cuestión es un triángulo, y no es explícito el tipo de triángulo de que se trata (rectángulo, isósceles, etc.), entonces hay que dibujar un triángulo escaleno cualquiera y no un triángulo equilátero.

- Al hacer el dibujo no es obligatorio sujetarse a una escala rigurosa. Sin embargo, si es ideal observar ciertas proporciones.

Por ejemplo, en el problema dos del taller 2 (ver anexo) era importante establecer una proporción adecuada en la representación de las distancias que recorría el barco y la ubicación espacial con respecto a la dirección que tomaba al realizar los desplazamientos para ir de una ciudad a otra, porque de lo contrario el dibujo resultante podía ser cualquier tipo de triángulo y la interpretación del problema, podría no ser una ayuda para darle solución.

- Al dibujar figuras en el espacio es necesario observar y analizar todas las condiciones para tales dibujos. Donde sea posible, y conveniente, es mejor dibujar ciertas secciones planas de tales figuras. Además del dibujo, se utiliza la escritura de todas las condiciones y requerimientos del problema. En dicha escritura breve, donde se usan las simbolizaciones aceptadas en el dibujo, se consignan todas las características y relaciones señaladas en las condiciones del problema. En la escritura resumida también se puede utilizar, siempre que sea adecuado, los símbolos matemáticos habituales. Algunos de estos aspectos mencionados los podemos observar en el problema 3 (taller 1).

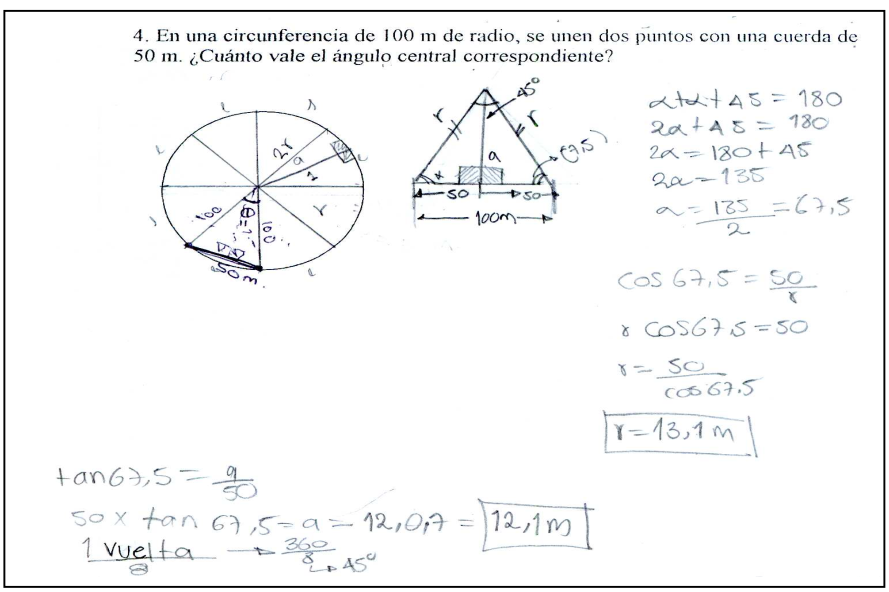


Fig. 6 Ángulo central de la circunferencia-solución

2.2 Aprender a aprender

"Leo bien todo el problema y comprendo lo más que puedo"
Gloria

Saber que la organización de la información en un esquema favorece su adquisición y recuperación posterior o saber que uno recuerda mejor palabras que números son estrategias de aprendizaje que utilizamos en nuestro quehacer diario. Esto implica que de una u otra forma tenemos conocimiento de nuestros métodos de aprendizaje, lo que nos lleva a tomar el concepto de metacognición.

Flavell, citado por Mateos (2001, p.97), se refiere a la metacognición como el conocimiento que las personas adquirimos, supervisamos y regulamos de los propios procesos para el logro de una meta determinada; o como lo define Brown, también citado por Mateos (2001, p.98), es el control deliberado y consciente de la propia actividad cognitiva; a partir de estas definiciones la metacognición constituye procesos que incluyen la planificación de las estrategias mas adecuadas para resolver un problema, supervisar y regular el uso que se hace de las mismas y de su efectividad así como del progreso hacia la meta establecida y de evaluación de los resultados obtenidos.

A partir de lo que es la metacognición, cuando los estudiantes enfrentaron la solución de un problema, lo primero que hacían es leerlo y hasta tener la "luz" necesaria para empezar a resolverlo. En ese momento era cuando empezaban a pensar como utilizar los procesos de aprendizaje que poseían, cómo podían funcionar, cómo hacían para optimizar su funcionamiento y llevar el control de esos procesos.

Cuando les preguntamos a Diana y Johana cómo interpretaron el problema uno del taller 2, ellas respondieron:

> "***primero leímos todo el problema, luego analizamos cada pregunta, después miramos la gráfica y vimos los datos y luego ubicamos lo que nos daban en la solución del problema*".**
>
> **(**entrevista, noviembre 28)

Con esta respuesta, se deslumbró el proceso utilizado en la solución del problema planteado lo cual es importante porque se les permitió pensar y expresar la forma como resolverían el problema porque, como lo expresa Pozo citado por Mateos (2001, p. 49):

> "Es absolutamente preciso hacerle consciente al alumno de los procesos que emplea en la elaboración de conocimientos, facilitándole por todos los medios la reflexión metacognitiva sobre las habilidades de conocimiento, los procesos cognitivos, el control y la planificación de la propia actuación y la de otros, la toma de decisiones y la comprobación de resultados".

Otros hechos que resultaron significativos al momento de resolver un problema es el recuerdo de otro problema que se relacionaba con el nuestro y que ya habían resuelto; esto resultaba ser una asociación esencial que le permitía progresar al estudiante en la dirección correcta pues como dijo Edgar Mauricio, acerca del problema tres del taller 2, cuando se le realizó la entrevista:

En una circunferencia de 100 metros de radio, se unen dos puntos con una cuerda de 50m. ¿Cuánto vale el ángulo central correspondiente?

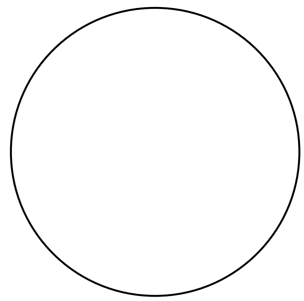


Fig. 7 Ángulo central de la circunferencia-enunciado

“En este problema recordamos que ya habíamos visto uno parecido en clase y cómo el profesor lo había explicado”.

(entrevista, agosto 5)

De esto observamos que, para los estudiantes era, y es, importante iniciar con problemas más sencillos y análogos respecto al nuevo problema que se les planteaba, es decir, ir de lo particular a lo general.

La inducción es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de procesos generales a partir de la observación de ejemplos particulares y de sus combinaciones; al combinar la inducción con las analogías de un problema referente al problema que desean resolver, esto les dará pautas para llegar a su solución, porque como lo asegura Santos Trigo (1997, p. 53):

> “la reducción de un problema a casos más simples es una estrategia que aparece frecuentemente en la resolución de problemas matemáticos. La idea es considerar casos más simples que se derivan del problema original. Estos casos ayudan atacar el problema

por partes. Posteriormente al considerar las soluciones parciales como un todo se obtendrá la solución del problema".

Para ampliar un poco la perspectiva de la metacognición retomamos a Flavell citado por Mateos (2001, p.97):

> "podemos incluir no sólo el conocimiento que tenemos sobre los fenómenos de la naturaleza cognitiva sino también sobre otros fenómenos psicológicos, tales como los motivos o las emociones, y para referirnos no sólo a la supervisión y control de nuestra propia actividad cognitiva sino también de otros tipos de actividad, como la motora".

Este fragmento nos da el soporte para considerar lo expresado por Gloria:

> ***"Un pasado lleno de frases, como: ¡usted es malo!, ¡usted no sirve para las matemáticas!, ¡eso no es así!, esto va creando un complejo y ese complejo pequeñito va creciendo hasta convertirse en una obstrucción en la misma clase. Eso hace que el niño quede frustrado y no piense más de lo que él puede".***
>
> (entrevista, noviembre 18)

En el pasado y en el presente, estos factores influyen en la actitud del estudiante cuando afronta una actividad matemática, o de otra área; en algunos las consecuencias nefastas de estos factores son más evidentes y, por tanto, arraigados en su personalidad lo que genera reacciones negativas hacia la matemática llegando al punto de rechazarla, no permitiendo que los estudiantes, y las personas en formación, puedan desarrollar a plenitud todas sus capacidades aun teniéndolas pues se ha creado en él inseguridad.

De manera inconsciente, se puede estar maltratando y frustrando la imaginación y las habilidades cognitivas, al no permitirle al estudiante expresarse libremente con sus propias ideas aun cuando algunas de sus afirmaciones sean incorrectas. Contribuyendo, desafortunadamente, en la pérdida del interés por las matemáticas olvidando que de los errores también se aprende.

Uno de los aspectos en la actividad cognitiva que podemos desarrollar es el conocimiento de la persona que comprende las creencias, habilidades, recursos y experiencias en la realización de diversas tareas cognitivas, las cuales son relevantes porque afecta el rendimiento de un estudiante.

> "El conocimiento de la persona se refiere al conocimiento que tenemos de nosotros mismos como aprendices y pensadores, e incluye el conocimiento de nuestras capacidades y limitaciones cognitivas, así como de otros estados y características personales que pueden afectar al rendimiento en la tarea. Este tipo de conocimiento metacognitivo ha sido el menos indagado tradicionalmente. Uno de los hallazgos más relevantes es que los niños de 5 y 6 años generalmente tienden a subestimar sus capacidades y su rendimiento, convencidos de que nunca olvidan nada, mientras que los niños de 9 y 11 años son más realistas y reconocen que uno no tiene siempre un buen recuerdo de las cosas y que otras personas pueden tener un recuerdo mejor o peor que el suyo". Mateos (2001, p. 56).

Cuando le preguntamos a Edgar si se le facilitaba resolver problemas matemáticos, respondió:

> ***"En parte sí, como cualquier problema, mientras uno tenga las herramientas básicas del conocimiento, entonces uno puede desarrollar cualquier tipo de problema. Yo me siento bastante preparado".***
>
> (entrevista, noviembre 18)

Con estas palabras Edgar dejó ver que tenía conocimiento del por qué se le facilitaba la matemática y, consecuentemente, de por qué le ha ido bien hasta el momento. Respecto a este estudiante, consideramos que tenía, y tiene, un alto grado de confianza en sus capacidades cognitivas y, al mismo tiempo, control sobre estas ya que manifestaba que siempre y cuando se tengan las herramientas básicas del conocimiento, no hay dificultad para resolver un problema.

Esto referenciaba el manejo de las habilidades que había venido adquiriendo a través de los años en la escuela. El poseer estas habilidades metacognitivas acompañadas de un conocimiento, le ha permitido ser recursivo y creativo en el momento de resolver problemas, no sólo en matemáticas, situación que se evidencia en la solución de los problemas propuestos en los talleres y en el tiempo que hemos sido sus docentes.

Otro factor que notamos, según lo registrado en las entrevistas, es que los estudiantes poseían creencias respecto a la matemática, una de ellas es que la consideraban como un proceso de mecanización sin darse cuenta que la matemática va hacia el desarrollo de un pensamiento lógico, crítico, reflexivo, deductivo e inductivo a través del cual desarrollará habilidades tales como creatividad, imaginación, reversibilidad, extrapolación e invención.

Otro "fantasma" que enfrenta la matemática en el aula es el hecho de que los estudiantes la ven como una materia mecánica y aburrida; esto también se manifestó en una de las estudiantes que participaron de la actividad, Jenny:

> ***Hay problemas que son fáciles y otros que son complicados. En algunas ocasiones le entendía a la profesora o profesor, pero en la evaluación los ejercicios y problemas eran muy enredados, porque su enunciado no era claro, y además los problemas que se trabajaban en clase no eran parecidos a los que se preguntaban en la evaluación".***
>
> (entrevista, agosto 5)

Es evidente que los estudiantes no han podido romper el paradigma de ver la matemática como un proceso terminado, lo que los conduce exigir que el profesor les evalúe los mismos problemas desarrollados en clase, queriendo optar por una estrategia facilista que les evite analizar y proponer estrategias para resolverlos, quedándose únicamente en la repetición de un proceso dado por el docente en clase. Santos (1997).

Si nosotros como docentes caemos en esta situación se pierde el sentido y la esencia de la matemática, nuevamente es importante resaltar que a través de la matemática, debemos formar en los estudiantes un pensamiento reflexivo y de análisis respecto a las situaciones que se le palnteen.

Schoenfeld, citado por Santos Trigo (1997, p.43), cita un ejemplo de sus investigaciones donde afirma que:

> “las ideas que los estudiantes tienen acerca de las matemáticas moldean sus comportamientos en el estudio de esta disciplina y estas creencias provienen de los problemas usados en la clase, la forma de evaluación, las dinámicas de grupo y las tareas contribuyen directamente a que el estudiante desarrolle este tipo de creencias”.

Otros autores, Perkins y Simmons citados por Mateos (2001, p. 53). identifican ciertos patrones de falso aprendizaje que se relacionan directamente con la instrucción que reciben los estudiantes.

> “Un ejemplo que ilustra la presencia de este tipo de falso aprendizaje se relaciona con el concepto de límite: a estudiantes que habían tomado un curso de cálculo se les cuestionó, por un lado, acerca del límite de una sucesión que modelaba el crecimiento de una planta y, por otro lado, el límite de la misma sucesión pero en un contexto matemático”.

Según lo anterior, y nuestro trabajo en el aula, la mayoría de los estudiantes encontraba el límite en el contexto matemático pero no en el contexto de crecimiento. Es decir, los estudiantes mostraron una dualidad en el análisis de relaciones que matemáticamente son equivalentes. Sus experiencias previas delinearon sus formas de razonar o explicar las diversas relaciones.

Entre los resultados de estudios que dedicados a investigar este tipo de conocimiento de los estudiantes, se ha encontrado que muchas de las ideas simplistas que los estudiantes poseen al llegar al salón de clases, persisten a pesar de la instrucción formal que reciben en sus cursos.

En matemáticas, por ejemplo, cuando los estudiantes se enfrentan a problemas donde sólo tienen que aplicar reglas, algoritmos o fórmulas, generalmente se observa cierta fluidez y eficiencia al resolverlos. Sin embargo, cuando se les pide explicar o interpretar cierta información, estos mismos estudiantes muestran serias dificultades (Santos, 1994, p. 44). Esto se identificó cuando los estudiantes aplicaron conocimientos en una forma ritual; esto es, se mostraron incapaces de tratar situaciones nuevas o diferentes aún cuando tenían el conocimiento base adecuado para afrontar tal situación. Los estudiantes desarrollaron ideas de cómo trabajar ejercicios matemáticos, en base a procedimientos que abstraen de su propia experiencia.

Otra estrategia metacognitiva implícita en el proceso que observamos fue revisar y verificar lo que iban haciendo. Autores como Zimmerman y Schunk, citados por Mateos (2001, p.43), lo denominan aprendizaje auto-regulado. Realizar esta supervisión permite al estudiante, hallar posibles errores cometidos en el proceso de solución de un problema o darle mayor seguridad en lo que está realizando.

Una auto revisión del camino escogido, puede permitirle al estudiante analizar, si esta estrategia es la más adecuada o no; generando una posible reestructuración o cambio total de la estrategia seleccionada, situación que se presenta cuando un proceso lógico no le es claro al estudiante, para argumentar el siguiente paso que se da en la solución del problema.

Respecto a esta estrategia les preguntamos a los estudiantes: ¿a medida que resolvían los problemas del taller 2 los iban revisando? Gloria Por ejemplo, contestó:

> ***"Sí. Cuando yo resuelvo un ejercicio vuelvo y retroalimento y finalmente verifico la respuesta".***
>
> (entrevista, noviembre 18)

Edgar dijo al respecto:

> ***"Sí. Porque si llego a un paso donde como que las embarré entonces miro a ver que pasa".***
>
> (entrevista, noviembre 18)

Yenny comentaba:

> ***"Si veo que el ejercicio me está quedando bien, no me devuelvo pero si yo veo una dificultad que no me permite continuar, entonces me devuelvo a revisar y si es posible cambio la estrategia para resolver el problema".***
>
> (entrevista, noviembre 18)

De acuerdo con Zimmerman, citado también por Mateos (2001, p. 45):

> "uno de los rasgos característicos del aprendizaje auto-regulado es el uso que hace el sujeto de las estrategias con el propósito de optimizar su aprendizaje. Aunque tampoco podemos encontrar una postura unánime a la hora de definir las estrategias de aprendizaje, la mayoría de autores atribuyen a las estrategias las siguientes propiedades: 1) son procedimientos o secuencias integradas de acción 2) que constituyen planes de acción 3) que el sujeto selecciona entre diversas alternativas 4) con el fin de conseguir una meta fijada de aprendizaje. En la supervisión del plan trazado por los estudiantes, tienden a ser más concientes de los errores que cometen y regulan su actuación ajustando las estrategias planificadas o modificándolas, cuando es necesario. En cambio los estudiantes novatos, no realizan esta auto revisión, y suelen actuar de un modo menos sistemático, sin supervisar su actuación". (Weinstein y Mayer, 1986; Nisbet y Shucksmith, 1986; Pozo, 1990; Monereo 1994).

La metacognición mantiene también relaciones muy estrechas con el aprendizaje auto-regulado y las estrategias de aprendizaje. La idea básica para las teorías del aprendizaje auto-regulado es que el aprendiz experto o competente es un participante intencional y activo, capaz de iniciar y dirigir su propio aprendizaje, y no un aprendiz reactivo. El aprendizaje auto-regulado está, por tanto, dirigido siempre a una meta y controlado por el propio sujeto que aprende según (Mateos 2001).

El aprendizaje auto-regulado se daba en algunos de los estudiantes del grupo de los diez con los que trabajamos, ya que eran capaces de replantear o cambiar una estrategia seleccionada, para resolver un problema en el momento que la estrategia escogida presentaba inconsistencia en el desarrollo del proceso lógico que maneja.

Esto reflejaba la iniciativa del estudiante y, por tanto, madurez en la capacidad de revisar y confrontar los resultados que iba obteniendo con respecto a la pregunta del problema.

Contrario a estos, había estudiantes que no realizaban supervisión durante el desarrollo del problema, este es el caso de Álvaro quien menciona:

> ***"Yo no hago revisión a medida que resuelvo el problema, la revisión la realizo al final verificando la respuesta que he obtenido".***
>
> (entrevista, noviembre 18)

Estudiantes como él, para evitar confundirse en el proceso de solución de un problema, preferían realizar una única revisión y confrontar su solución una vez terminado el problema; esto llevaba al estudiante, si encontraba error en la respuesta final, a retomar nuevamente el problema desde el inicio. Esta situación podría ameritar el abandono del problema, caso que no se presentó por parte del estudiante a causa de una frustración, que puede estar relacionada con el factor tiempo o con el problema que no es claro para el estudiante, lo que le generaría dudas, incertidumbre y confusión en el momento de crear una nueva estrategia que permita que los procesos lógicos concuerden y satisfagan la pregunta del problema.

Durante el desarrollo del problema dos del taller 2 (ver anexo) observamos que los estudiantes Edgar y Gloria, quienes siempre se han destacado por el dominio y buen desempeño en el área, dedicaron más de la mitad del tiempo que se les había otorgado tratando de comprender el problema, elaborando el dibujo que representara la situación del problema y planificando su solución antes de pasar a la aplicación de algún procedimiento y, además, notamos que controlaban cuidadosamente el proceso de solución, esto es, explorando vías alternativas para enfrentar el problema y abandonaron las que no parecían conducir a la solución. Fueron los únicos que consiguieron resolver el problema.

En contraste con los demás compañeros, Yenny, Álvaro, Sebastián y Nini Fernanda, seleccionaron rápidamente una vía para resolverlo y continuaron en esa misma dirección sin reconsiderarla a pesar de la clara evidencia de que no estaban progresando en la dirección correcta, lo que se reflejó en la representación gráfica no adecuada del problema y en la respectiva solución. Podemos visualizar a continuación lo mencionado anteriormente:

Taller 2 (problema 2, noviembre 19, 2005)

"Un barco navega 400 Km. entre las ciudades A y B, con rumbo 60º al este del norte. Desde la ciudad B se dirige a otra ciudad C con rumbo 30º al este del norte, distante 250 km. Calcule la distancia entre las ciudades A y C y el rumbo que debe tomar el barco si el regreso lo hace directo entre las dos ciudades".

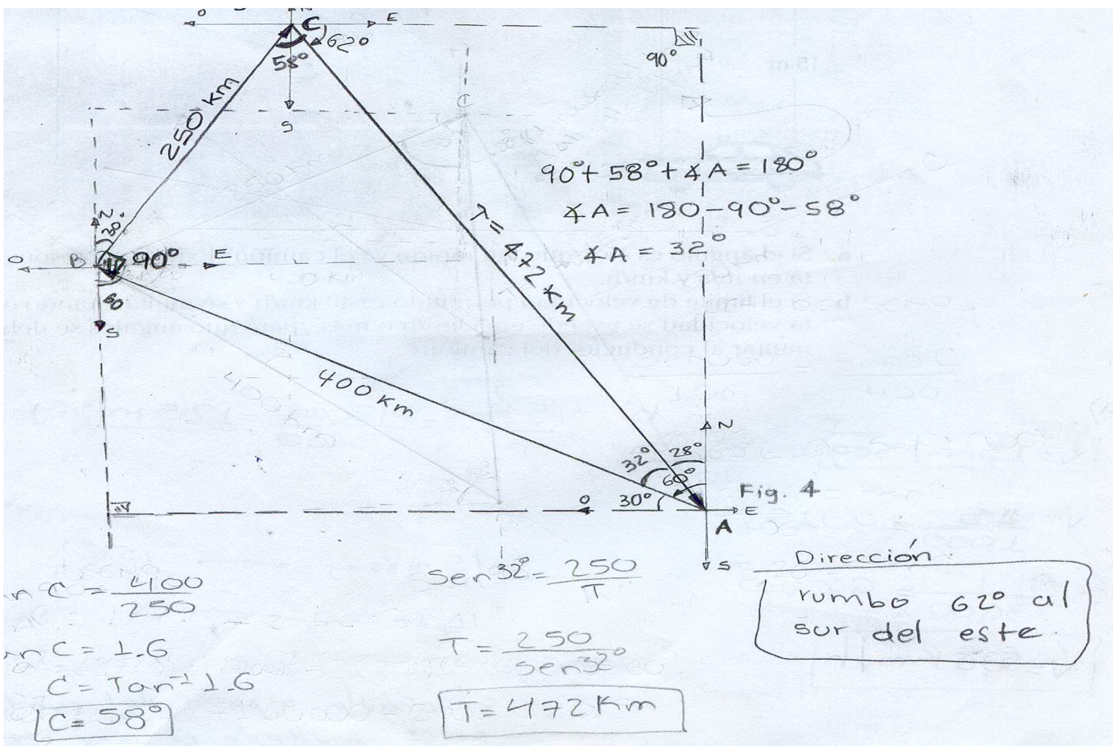


Fig. 8 Trayectoria del barco-solución e

Respecto a la metacognición, Borkowsky y Schneider citado por Mateos (2001, p. 46), elaboraron un modelo de aprendizaje estratégico que "postula que la autorregulación que llevan a cabo los aprendices competentes, resulta de la coordinación de tres componentes entre ellos, el conocimiento de la eficacia de las estrategias (creencias motivacionales, tales como la creencia en la posibilidad general de modificar las propias capacidades mediante el esfuerzo o la creencia en la propia eficacia)".

Estos autores defienden la idea de que el desarrollo de la metacognición inicialmente depende del desarrollo de un sistema motivacional positivo, caracterizado por el sentido de auto-eficacia, la autoestima positiva y las atribuciones del éxito a factores controlables tales como el propio esfuerzo, más que a factores incontrolables, como la habilidad o la suerte y la creencia en que el propio esfuerzo es instrumental para conseguir resultados exitosos".

Frente a las ideas anteriores, Gloria mencionaba:

> "***Algunas personas se les dificulta resolver problemas, porque les falta ganas de aprender y encontrarle el gusto e importancia a la matemática".***
>
> (entrevista, noviembre 18)

Estas palabras evidenciaron en algunos estudiantes la actitud desinteresada en conocer de manera abierta, todos los aportes que brinda la matemática; colocando obstáculos en el aprendizaje y el apropiamiento de la misma fundamentándose en las vivencias y creencias no gratificantes que habían tenido y que, por ende, los marcó, causando desmotivación y desinterés.

Los aspectos anteriormente mencionados pueden ocasionar dificultades e inseguridad por parte de los estudiantes en la escogencia y aplicación de las estrategias que han de utilizar al enfrentar un problema.

Otros factores que inciden en la falta de motivación fueron mencionados por Edgar en la entrevista del taller dos:

> ***"De pronto la forma de enseñanza no es la apropiada para nosotros, los cambios constantes de profesores no nos motiva sino que nos desanima.***
> (entrevista, noviembre 18)

La opinión de Edgar nos llevó a corroborar que existen factores motivacionales que influyen en el aprendizaje y en la continuidad de los procesos que se llevan a cabo en la metodología y estrategias que se desarrollan en el salón de clase. Los constantes cambios de docentes generaron, inicialmente, malestar y "traumas" en los estudiantes, porque esto conlleva a realizar cambios en las metodologías, en las estrategias de evaluación, en el ritmo en el desarrollo de las clases y en la exigencia que propone cada docente.

Estos factores no permiten que el estudiante se apropie de algunas estrategias o, en caso extremo, este termina descartando las que hasta el momento ha adquirido para la solución de problemas.

También nos dimos cuenta de la necesidad que presentaban los estudiantes frente a la motivación extrínseca que resaltará los aspectos positivos durante determinada actividad.

La motivación extrínseca ayuda a los estudiantes y les brinda confianza y seguridad en sí mismos; esto lo puede hacer el profesor haciendo uso de frases y actitudes que en relación con los estudiantes dentro y fuera del salón de clase respecto a su desempeño académico y el tipo de personalidad que cada estudiante tiene.

Generalmente, y desafortunadamente, solemos resaltar más los aspectos negativos que se pueden presentar en los estudiantes, y nos olvidamos de darle importancia a los aspectos positivos, creando actitudes de pesimismo y desmotivación. De igual manera, le damos mayor importancia a las habilidades que muestra el estudiante experto, sin tener en cuenta los esfuerzos que realizan algunos por mostrar sus capacidades a pesar de no tener las habilidades matemáticas.

En ocasiones, los estudiantes reflejan y expresan la necesidad de que los profesores los estimulemos, los animemos para así sentirse motivados hacia la clase, aspecto que encontramos en el momento que Álvaro participó en la entrevista del Taller 2:

> ***"El profesor tiene que hacer una función muy importante y es darle mucha autoestima al estudiante, si el estudiante tiene autoestima, se tiene confianza y si se tiene confianza es capaz de solucionar un problema y así puede llegar a ser una persona importante en el mundo. Entonces todo se basa en autoestima".***
>
> (entrevista, noviembre 18)

Finalmente, si los maestros empezamos por motivar a los estudiantes, quizás nuestra labor iniciaría por buen camino y las dificultades y el rechazo hacia las matemáticas sería menos frecuente en el salón de clase, es decir, si nosotros los profesores nos preocupamos más en nuestra praxis por el "yo" de cada estudiante el proceso de enseñanza-aprendizaje formaríamos, finalmente, personas más humanas y seguras de sí mismas.

2.3 Estrategias que utilizan los estudiantes, al resolver problemas sobre triángulos rectángulos.

> ***"De pronto uno no aprendió ciertos términos matemáticos y cuando son nombrados, ahí uno no sabe que hacer".***
>
> Diana

2.3.1 Lenguaje matemático

Cuando los estudiantes de décimo grado de la Institución Educativa Provenza resolvieron los problemas de matemáticas en diversos contextos, se manifestaron en algunos estudiantes dificultades en: la interpretación, el lenguaje, la modelación, la solución y la verificación del resultado.

Dichas dificultades se deben a un conocimiento incompleto o no acabado que procede de la falta de dominio en los conceptos fundamentales y de un esquema cognitivo inadecuado que se traduce en obstáculos epistemológicos y cognitivos. Los obstáculos corresponden a los cambios en los dominios conceptuales de las matemáticas.

Un obstáculo epistemológico se presenta cuando los estudiantes tienden a llevar las propiedades que tienen los objetos de conocimiento de un dominio conceptual a otro diferente (Corzo y La Menza, 1999).

Algunos estudiantes de los que participaron en las actividades propuestas manifestaron dificultades en la comprensión de conceptos fundamentales como: ubicación espacial, concepto de vector y distancia, procesos de variación, representaciones mediante un dibujo o gráfica, conceptos algebraicos y geométricos, los cuales son importantes al abordar las aplicaciones de la trigonometría.

Al respecto Gloria contestó a la pregunta:

> ***“Más que todo la comprensión de lectura y saber conceptos básicos de la matemática y otras materias”.***
>
> (entrevista, agosto 5)

Con estas palabras Gloria nos hizo notar que es muy importante comprender lo que se lee en el momento de resolver un problema, porque en matemáticas la comprensión de lectura necesita del manejo de un lenguaje matemático adecuado, para lograr una interpretación que facilite plantear estrategias.

En ocasiones un estudiante no puede resolver un problema porque requiere el uso de conceptos de temas anteriores o relacionar conceptos de otras asignaturas, los cuales no recuerdan. Los elementos de la matemática generan significados sintácticos y semánticos en un lenguaje simbólico, equivalente al lenguaje natural de una persona.

Sin embargo, los estudiantes no trasladaban automáticamente el lenguaje natural que utilizan cotidianamente al sistema de escritura matemática, como puede suceder con lo propio de otras áreas del conocimiento, esta particularidad hace que el lenguaje de las matemáticas dificulte la comprensión de los conceptos matemáticos, la forma como se relacionan, el uso de los mismos en la resolución de problemas. Todas estas falencias en cuanto al lenguaje son al pasar del lenguaje natural al lenguaje de las matemáticas o viceversa.

Concordando con La Menza (1999), la comprensión de cualquier área del conocimiento sólo es posible a través del manejo de su lenguaje instrumental. Cada disciplina posee un lenguaje particular construido sobre la base de un sistema de signos y de reglas que le es propio. Hay que saber oir, hablar leer, y escribir en matemática para acceder a la disciplina matemática.

El vocabulario específico de la matemática no es fácil de adquirir, pero tampoco es factible de ser simplificado o modificado. Comprender y usar un concepto matemático, supone saber expresarlo en forma oral o escrita. Al estudiante puede resultarle muy difícil aprender a expresarse matemáticamente con un lenguaje específico, pues tiene que sustituir el lenguaje cotidiano por uno particular que designe los elementos básicos, las operaciones con ellos, sus cualidades o propiedades, los nuevos conceptos, etc.

Cuando hablábamos con algunos de los estudiantes sobre el problema 3 del taller 2 (ver anexo) acerca de los términos empleados como: cuerda, circunferencia, círculo y ángulo central; Diana y Johana afirmaron:

> ***"Círculo es la línea o bolita y circunferencia es lo que está por dentro encerrado por la línea"***
>
> (entrevista, agosto 5)

En estas expresiones notamos que no hay claridad en los conceptos de circunferencia y círculo, luego esto llevó a un inadecuado uso de estos conceptos que se vieron reflejados en la solución del problema.

Respecto a Pimm, citado por Polya (1999, p.83), afirma: “Es claro que el discurso matemático incluye términos especializados y significados distintos de los habituales en el habla cotidiana”, y por ello el lenguaje usado en matemáticas, “que es “claro” para los docentes, no siempre lo es para los estudiantes.

El manejo del lenguaje matemático no se adquiere espontáneamente, ni de manera inmediata, requiere que el estudiante maneje habilidades intelectuales como el análisis,[5] la síntesis[6] y la traducción[7].

Por tal razón, es imperactivo que el docente planifique y proponga actividades que posibiliten al estudiante poner en juego y desarrollar dichas habilidades importantes para el buen ejercicio en la escuela y en la vida misma.

Si no tenemos en cuenta lo anterior, el lenguaje puede convertirse en un inconveniente para comprender los contenidos matemáticos generando una traducción errónea que a menudo se refleja en apatía y desinterés por parte del estudiante tomando posiciones como: “es muy complicado”, “no se le entiende”, “son muy difíciles sus conceptos”, entre otros.

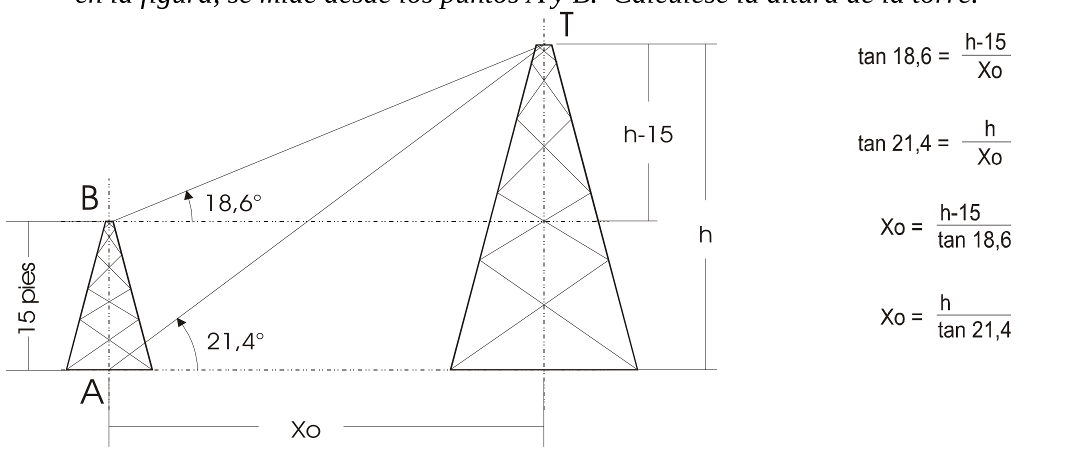
[5] Es la habilidad que se tiene para dividir un todo en sus partes constitutivas, para identificar y clasificar cada parte, ver como están relacionadas entre sí para determinar conexiones e interacciones.
[6] A nivel de síntesis se estará en capacidad de reunir las partes para formar un todo, que antes no estaba presente con claridad.
[7]Nivel de la comprensión en la que el estudiante puede expresar la comunicación recibida en otro lenguaje o en términos distintos de los originales.

En ocasiones el estudiante al no lograr comprender, recurre a la repetición literal,(estrategia de procesamiento superficial) en esfuerzo de memorizar un concepto transformándolo en un conjunto de palabras sin significación. En ese sentido Rojas (2002, p.16) expresa:

> "Una de las razones para que la comunicación en matemáticas sea poco exitosa en nuestros salones de clase, es la ausencia de comprensión significativa, tanto de aquello que hablamos cuando hablamos de matemáticas, como de las conexiones lógicas que validan la coherencia del discurso involucrado".

A continuación presentamos el problema tres del taller 1 donde se pueden observar los conceptos matemáticos necesarios que requerían en el problema:

El ángulo de elevación del punto T, en la parte superior de la torre mostrada en la figura, se mide desde los puntos A y B. Calcúlese la altura de la torre.



$$\frac{h-15}{\tan 18{,}6} = \frac{h}{\tan 21{,}4} \Longrightarrow (h-15)\tan(21{,}4) = h\tan(18{,}6) \Longrightarrow \frac{h-15}{h} = \frac{\tan 18{,}6}{\tan 21{,}4} \Longrightarrow \frac{h-15}{h} = 0{,}86$$

$$h-15 = 0{,}86\,h \Longrightarrow h - 0{,}86\,h = 15 \Longrightarrow h = \frac{15}{0{,}14} \Longrightarrow h = 106{,}2 \text{ pies}$$

Solución: $h = 106{,}2$ pies

Fig. 9 Las Torres-solución

En esta situación los estudiantes necesitaban relacionar los dos triángulos semejantes que se daban en la representación gráfica del problema; los dos triángulos formados coincidían en uno de sus lados y sus alturas estaban relacionadas proporcionalmente.

Observamos que la semejanza entre los triángulos, fue interpretada por los estudiantes como triángulos parecidos, que más que un concepto matemático es una noción matemática ligada fundamentalmente a la percepción que no puede corresponder con el criterio involucrado en la semejanza de triángulos.

Además notamos que los estudiantes tuvieron para plantear la solución del problema que involucraba el planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales donde se relacionaban las alturas de los triángulos con sus respectivas bases. (Rojas, 2002).

La matemáticas presentan un lenguaje de una especificidad semántica y sintáctica que les son propias y que, por lo tanto, lo diferencian significativamente del lenguaje ordinario y frente al planteamiento de ecuaciones lineales, Corso y La Menza (1999, p.151), además dicen:

> "Plantear una ecuación es expresar por medio de símbolos matemáticos, una condición formulada en palabras; para ello se requiere interpretar la situación y conocer las formas de expresión matemática; la traducción de un problema al lenguaje simbólico presenta serias dificultades; así como también su resolución, puesto que implica el dominio de conceptos algebraicos".

Continuando con aspectos que están relacionados con la metacognición, haremos mención del modelo de aprendizaje estratégico elaborado por Pressley, Borkowsky y Schneider citado por Mateos (2001, p. 46) “postula que la autorregulación que llevan a cabo los aprendices competentes, resulta de la coordinación de tres componentes entre ellos, el conocimiento de la eficacia de las estrategias (creencias motivacionales, tales como la creencia en la posibilidad general de modificar las propias capacidades mediante el esfuerzo o la creencia en la propia eficacia)”.

Finalmente, muchas veces sucede que los estudiantes no resuelven un problema no por desconocer el concepto matemático correspondiente, sino porque no saben qué es lo que tienen que hacer; es decir, no entienden el enunciado, ya sea por falta de comprensión de lectura y el manejo del lenguaje matemático, por desconocimiento del significado de algunos términos o porque el enunciado no es muy claro.

Es importante el reconocimiento del significado de las palabras en una situación problema para posibilitar su comprensión, dado que, según el contexto, una misma palabra puede tener distintos significados.

2.3.2 Relación de los datos con la incógnita

Otra de las estrategias que necesitaron idear los estudiantes para la solución de problemas tenía que ver con encontrar la relación entre los datos y la incógnita. En cuanto a este referente, Polya (1998, p. 108) afirma: “resolver un problema esencialmente es encontrar la relación entre los datos y la incógnita”.

Comprender claramente la naturaleza de la incógnita constituye un progreso y cuando logramos entender la pregunta, se puede asociar con algunos de los datos que el problema nos proporciona. Disponer ordenadamente los diversos datos y condiciones puede facilitar el recuerdo de ellos en el momento de usarlos. (Polya 1998)

Cuando preguntábamos a los estudiantes sobre las estrategias que usaban al resolver un problema, al respecto Álvaro comentó:

> ***“Primero me imagino la situación, después identifico los datos y analizo lo que me están preguntando, para decidirme por un procedimiento que me sirva y luego lo ejecuto”***
>
> (entrevista, noviembre 18)

Al igual que Álvaro, otros estudiantes entrevistados expresaron que es importante confrontar la pregunta con los datos dados, porque les ayuda a encontrar el camino para resolver el problema –además, si en un problema se dan ciertos datos es porque sirven o son de ayuda para llegar a la solución-.

Cuando el estudiante analizaba los datos y la pregunta, trataba de pensar en un problema que le fuera familiar y que tuviera, la misma incógnita, o similar, para de esta manera poder asociarlo con el problema propuesto. Si el problema propuesto no figuraba entre los problemas sencillos que recordaba, trataba de modo natural emplear lo que le era familiar en ellos y utilizaba sus resultados para poder introducir un elemento útil conocido que servirá como estratégia para la solución del problema.

La incógnita que se planteó para cada uno de los problemas estaba relacionada con uno de los lados de un triángulo rectángulo en donde el estudiante debía retomar algunos de los problemas resueltos en clase y analizar cuál de ellos tenía similitud con respecto al problema que intentaban resolver. En los triángulos rectángulos se conocían dos o tres elementos del mismo luego la incógnita estaba relacionada con la altura, la base o un ángulo del triángulo; el estudiante debía analizar cuál función trigonométrica le permitiría asociar los datos que le daba el problema, de manera que sólo quedara una incógnita por resolver.

En este caso, la estrategia sugiere realizar una asociación entre un problema ya realizado y un problema nuevo entre los cuales hay un estructurado subyacente similar o igual. Adoptando este tipo de estrategia el estudiante puede encontrar dificultades pero, no obstante, obtendría una idea que le serviría de punto de partida, constituyéndose esto en una gran ventaja contraria a sino encuentra algún problema para asociar a la nueva situación que se le presenta.

¿Podría el estudiante deducir de los datos un elemento útil cuando estamos ante un problema, o pregunta, no resuelto?

Un ejemplo que visualiza dicha dificultad es el problema que resolvió Arquímedes al "determinar la superficie de una esfera de radio dado" del cual no existía un problema más sencillo o que tuviera la misma incógnita de la cual Arquímedes hubiese podido valerse; es por ello que su solución puede verse como una de las más notables en matemáticas. (Polya, 1998).

El estudiante no siempre contará con un problema ya resuelto para resolver uno nuevo, pero el profesor cuenta con una herramienta muy importante y que ayuda muchísimo al estudiante a desarrollar el proceso para alcanzar el objetivo del problema: la pregunta. Esta herramienta también debe aprender el estudiante a usarla autónomamente.

De ahí el hecho y la diferencia de que: "Conocer o no un problema ya resuelto que tenga la misma incógnita es con frecuencia la única diferencia que hay entre un problema fácil y otro difícil" (Polya 1998, p.127).

El paso del problema original al problema auxiliar se llama reducción *convertible* o reducción *bilateral,* o reducción *equivalente,* en el caso en que los problemas sean equivalentes. Las reducciones convertibles son, en cierto aspecto, más importantes y más deseables que otros modos de introducir problemas auxiliares; pero aún problemas auxiliares que no son equivalentes al problema original pueden ser también de gran utilidad. (Polya, 1998)

Finalmente, el estudiante debe aprender a relacionar los datos y la incógnita; esta relación es como un abismo sobre el cual hay que tender un puente. La construcción de dicho puente se empieza a realizar haciendo uso de los datos que proporciona inicialmente el problema y, posteriormente, realizando con estos un razonamiento del problema a partir de la incógnita.

En los talleres, cuando los estudiantes lograron comprender el enunciado del problema planteado, algunos realizaron una representación gráfica que les permitió reconocer la relación entre los datos y la incógnita. Esto gracias a que en la representación gráfica estaban inmersos los datos, lo cual facilitó de manera concreta encontrar la asociación con la pregunta del problema. Esta tarea de asociación formaba parte de la estrategia que orientaba al estudiante hacia la solución.

Al reunir los datos y la incógnita en una figura que haga ver las relaciones requeridas, podría deducirse a partir de los datos algún elemento útil que les pueda dar un camino hacia la solución del problema. (Polya, 1998).

Un ejemplo que ayuda a visualizar lo anteriormente mencionado es cuando hacemos referencia a los siguientes teoremas:

a. En todo triángulo equilátero, cada ángulo mide 60º
b. En todo triángulo equiángulo, cada ángulo mide 60º.

Estos dos teoremas no son idénticos y contienen diferentes nociones respecto a las características de un triángulo. Uno concierne a la igualdad de los lados de un triángulo, el otro a la igualdad de los ángulos. Pero cada uno de ellos se deduce del otro. (Polya, 1998, p.155).

2.3.3 Aprendizaje colaborativo

> ***"El trabajo en quipo permite la discusión sobre el planteamiento y estrategias, que mejor aporten a la solución del problema, permitiendo que si estoy errada la otra persona me pueda orientar y argumentar*** **su punto** ***de vista"***
>
> (entrevista, noviembre 28)

La base de la actividad propuesta para desarrollar esta investigación era el aprendizaje colaborativo (se trabajó en grupos). El aprendizaje cooperativo es una estrategia más con la que cuenta el estudiante y el profesor en el aula.

El aprendizaje colaborativo, en su sentido básico, se refiere a la actividad de pequeños grupos desarrollada en el salón de clase que pretende favorecer el aprendizaje y desarrollo de determinadas estrategias.

Aunque el aprendizaje colaborativo es más que el simple trabajo en equipo por parte de los estudiantes, la idea que lo sustenta es sencilla: los estudiantes forman "pequeños equipos" después de haber recibido instrucciones del docente. Dentro de cada equipo los estudiantes intercambian información y trabajan en una tarea hasta que todos sus miembros la han entendido y terminado, aprendiendo a través de la colaboración.

Comprobando los resultados de esta forma de trabajo con modelos de aprendizaje tradicionales, se ha encontrado que los estudiantes aprenden más cuando utilizan el aprendizaje colaborativo, recuerdan por más tiempo (memoria a largo plazo), desarrollan habilidades de razonamiento superior y de pensamiento crítico y se sienten más confiados y aceptados por ellos mismos y por los demás (Millis, 1996).

Respecto a este tópico, la importancia del aprendizaje colaborativo como una de las estrategias que utilizaron los estudiantes para resolver problemas se evidenció en la entrevista del Taller 2 en la que Gloria nos dijo:

> ***"El trabajo en grupo es mejor, porque las personas interactúan compartiendo ideas y conocimientos de los cuales se aprende más".***
> (entrevista, noviembre 18)

Como bien se explicó anteriormente, los talleres fueron resueltos en parejas con el propósito de darle un espacio abierto al diálogo y a la participaron activa en las diferentes situaciones planteadas en los talleres.

Estas situaciones requirieron que los estudiantes hicieran ejercicio activo y efectivo de la comunicación para explicar al otro compañero lo que entendía y lo que había aprendido una vez alcanzado el objetivo del problema.

Esta fue una gran herramienta en la resolución de los problemas a través de la cual se negociaron nuevos significados, interpretaciones, conceptos y estrategias repercutiendo positivamente en su aprendizaje.

Johana manifestó en su intervención en la entrevista del Taller 2, lo benéfico que resultó trabajar en parejas:

"El trabajo en parejas favorece, porque se puede dar una combinación de conceptos e ideas que permiten entender mejor el problema".

(entrevista, noviembre 18)

Esto nos mostró que los estudiantes pueden aprender de otros puntos de vista diferentes al suyo, dar y recibir ayuda de sus compañeros de equipo y aportar mutuamente para investigar de manera más profunda acerca de la situación problema que están resolviendo.

Las investigaciones de Johnson y Johnson (1997) sobre el aprendizaje cooperativo nos aportan los elementos que siempre están presentes en este tipo de aprendizaje son:

- **Cooperación.** Los estudiantes se apoyan mutuamente para cumplir un doble objetivo: lograr ser expertos en el conocimiento del contenido, además de desarrollar habilidades de trabajo en quipo. Los estudiantes comparten metas, recursos, logros y entendimiento del rol de cada uno. Un estudiante no puede tener éxito a menos que todos en el equipo tengan éxito.

- **Responsabilidad.** Los estudiantes son responsables de manera individual de la parte de la tarea que les corresponde. Al mismo tiempo, todos en el equipo deben comprender todas las tareas que les corresponden a los compañeros.

- **Comunicación.** Los miembros del equipo intercambian información importante, se ayudan mutuamente de forma eficiente y efectiva, ofrecen retroalimentación para mejorar su desempeño en el futuro y analizan las conclusiones y reflexiones de cada uno para lograr pensamientos y resultados de mayor calidad en la solución de problemas.

El trabajo en equipo permite no sólo que los estudiantes aprendan a resolver juntos los problemas sino que desarrollen habilidades de liderazgo, comunicación, confianza, toma de decisiones y solución de situaciones problema.

Además, es importante que los equipos evalúen cuáles acciones han sido útiles y cuáles no (ejercicio de la metacognición). Los estudiantes de cada equipo establecen las metas, evalúan sus estrategias e identifican los cambios que deben realizarse para mejorar su desempeño en las actividades propuestas.

El aprendizaje de los estudiantes es mayor cuando el tipo de ayuda es de un nivel de elaboración alto y hace referencia a aspectos del proceso de resolución del problema (Webb, 1989) citado por Pifarré (2001, p.5). Este tipo de ayuda beneficia tanto al estudiante que la ofrece como al que la recibe; la correlación de la ayuda recibida y el aprendizaje que los diferentes miembros del grupo consiguen depende de la calidad de la ayuda recibida y de la adecuación de la misma.

Los grupos pequeños representan oportunidades para intercambiar ideas con los compañeros en un ambiente libre de competencia, mientras que las discusiones de los grupos grandes tienden a inhibir la participación de los estudiantes tímidos

Un grupo formal y cuidadosamente constituido ayuda a los estudiantes a aprender a trabajar en equipo en un ambiente seguro y estimulante. Para ser efectivos, los equipos deben crearse en ambientes abiertos y de confianza, de forma que los estudiantes se vean motivados a especular, innovar, preguntar y comparar ideas conforme resuelven los problemas.

Además de desarrollar habilidades sociales y de trabajo en equipo los grupos pequeños deben cumplir con actividades académicas asociadas a la solución de problemas, lo que incluye: hacer análisis, comprobar el nivel de comprensión, construir una representación, hacer estimaciones, formular y generar preguntas, hacer listados y predicciones, presentar información, hacer razonamientos, entre otros. Todo esto requiere de un tiempo adecuado para que los estudiantes puedan trabajar en equipo, porque al principio los equipos trabajan lentamente, deben analizar lo que funciona y lo que no funciona, llegar a un consenso y formular opiniones. Una vez que los estudiantes se acoplan al proceso, su nivel de retención y de pensamiento crítico se incrementa al punto de que pueden avanzar más rápidamente (Prescott, 1996). Citado por Pifarré (2001)

Los espacios que se dan al realizar trabajo en equipo permiten que los integrantes se ayuden mutuamente, discutan y puedan debatir sus respuestas, sus métodos y llegar a un acuerdo.

El aprendizaje colaborativo incluye formas de asegurar la responsabilidad individual. Los estudiantes que no participan, usualmente reprueban sus exámenes individuales, exámenes cortos o tareas. Una forma de asegurar la participación de todos los miembros es pedir a un estudiante, al azar, que sustente la solución del equipo.

Esta técnica es más efectiva cuando el docente hace el esfuerzo de no pedirle esto a los estudiantes más destacados. Estos estudiantes generalmente toman la responsabilidad de asegurarse que los demás miembros del equipo entiendan las soluciones. Otra forma de asegurar la responsabilidad de los estudiantes es hacer que ellos evalúen de forma anónima a sus compañeros de acuerdo a la contribución dada en la actividad. Johnson y Johnson (1997).

Es por esto que, el trabajo colaborativo conlleva a delegar un mayor trabajo para los estudiantes que académicamente sobresalen en las matemáticas, aportándole a su equipo para que este logre alcanzar el objetivo trazado en la actividad propuesta.

De acuerdo con lo anterior algunos estudiantes sobresalientes en las matemáticas, como Gloria y Edgar, mencionaron al respecto:

> ***"El trabajo en equipo es bueno cuando los integrantes aportan ideas, pero si alguno de ellos no trabaja, ni aporta ideas, se rompe la armonía del trabajo en grupo"***
>
> (entrevista, noviembre 28)

Esta intervención recalca, y resalta, la necesidad de que los integrantes de los grupos asuman su responsabilidad frente al grupo porque de lo contrario el fin del trabajo colaborativo no se cumpliría; ya que los aportes e ideas serían sólo de unas personas y no serían tan significativas como si fuesen las de todos los integrantes.

Para que el aprendizaje colaborativo, y el propósito de este se cumpliera, debimos seleccionar y diseñar situaciones y preguntas que se pudieran desarrollar en grupo;

de igual manera, debimos orientar a los estudiantes para que utilizaran adecuadamente las habilidades de trabajo en los grupos.

Para nosotros es claro que el docente debe crear un ambiente adecuado en el que los estudiantes puedan aprender a través de un proceso activo de descubrimiento; el tiempo debe ser adecuado tanto para socializar ideas, estrategias y conocimientos como para plantear una solución ya que cada uno de estos momentos contribuyen para alcanzar el fin propuesto.

Además, las habilidades que tengan los estudiantes de argumentación, defensa, capacidad crítica y escucha permitirán que el ambiente de trabajo en equipo sea armónico ya que contribuirá al trabajo individual de los integrantes del grupo.

Consideramos importante retomar las frases de Diana:

> ***"El trabajo en quipo permite la discusión sobre el planteamiento y estrategias, que mejor aporten a la solución del problema, permitiendo que si estoy errada la otra persona me pueda orientar y argumentar*** **su punto** ***de vista"***
>
> (entrevista, noviembre 28)

Estas frases sugieren que el avance del grupo se dará en la medida en que cada uno de sus integrantes comparta sus comentarios y puntos de vista dentro del equipo y se asuma la identificación de los otros compañeros como una nueva forma de comprensión, respetando las ideas y soluciones aportadas por los otros, tomando iniciativa y confianza en la toma de decisiones que más favorezcan al trabajo en grupo. Los estudiantes más aventajados deben prestar atención, interés y persistencia ante las dificultades de los demás.

Todos estos factores estuvieron presentes en el proceso de ejecución de los talleres aplicado incluso en la retroalimentación y socialización de los mismos.

FINALIZANDO NUESTRA EXPERIENCIA

De acuerdo a la experiencia vivida en el presente trabajo de investigación, podemos decir:

- Una de las estrategias que el estudiante usó, al resolver problemas trigonométricos, con triángulos rectángulos, fue la realización de un dibujo de lo que en la mente imaginó, ya que esto le permitió visualizar el problema de manera mas concreta para resolverlo.

- Cuando se les planteó a los estudiantes una situación, en uno de los talleres, donde sólo había enunciado, estos dudaron mucho de la representación gráfica que habían hecho y por consiguiente, en la solución se mostraron indecisos; ya que ellos consideraban que al quedar mal el dibujo, la solución no era correcta.

- Dentro de las estrategias metacognitivas "aprender a aprender", tuvimos la oportunidad de observar que para los estudiantes, era muy valioso ser motivados por los profesores, compañeros y personas que los rodean, ya que esto eleva su autoestima y los hace sentir que ellos son capaces de resolver situaciones problemáticas.

- Cuando los estudiantes abordaron problemas donde tenían que pensar en algunas estrategias para resolverlos, prefirieron no hacerlos y pidieron se les pusieran los mismos problemas resueltos en clase. Esto evidenció que los estudiantes tienden a optar por el camino del menor esfuerzo, repitiendo un proceso dado por el docente en el salón de clase.

- Al resolver los problemas de los talleres, los estudiantes no verificaban si lo que iban realizando, les estaba quedando bien. Al terminar, dieron cuenta de que les había quedado mal el problema y tuvieron que verificar desde el comienzo, es decir, no realizaron un monitoreo de los procesos utilizados en la solución.

- Se observó en algunos estudiantes, la dificultad de resolver problemas debido a que no entendían el lenguaje matemático empleado, en los enunciados; tal fue el caso de las palabras: círculo, circunferencia, cuerda, ángulo de elevación, entre otros.

- Cuando los estudiantes terminaban de leer el enunciado de un problema, generalmente buscaban relacionar los datos con la pregunta planteada, y así empezar a resolverlo, ya sea simplificando el problema inicial a uno más sencillo o relacionándolo con otro realizado por el profesor en clase; y así organizar detalles que le permitían darle solución al problema planteado.

Para la solución de algunos problemas, los estudiantes manifestaron que es fundamental tener las bases necesarias de temas anteriores o de otras áreas del conocimiento. Estas bases les permitió dar solución rápida a algunos de los problemas propuestos.

- El trabajo en equipo permitió a los estudiantes intercambiar ideas, reforzar conceptos, unos adquirieron estrategias de los otros y por esto evidenciaron mejores resultados en las soluciones dadas a los problemas planteados.

En el primer taller se limitó el tiempo para su solución, esto hizo que algunos estudiantes no alcanzaran a terminar los problemas. Este aspecto se tuvo en cuenta para la aplicación del segundo taller, donde se dio más tiempo y los estudiantes se mostraron satisfechos por no sentirse presionados por este factor.

La socialización que se dio entre profesores y estudiantes, de una manera abierta y en un ambiente de confianza, permitió tener un conocimiento más a fondo de las concepciones que tienen los estudiantes, acerca de las matemáticas, las falencias, los aciertos y las estrategias que utilizan al resolver problemas trigonométricos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARBELÁEZ, G. (2002). Las representaciones mentales. Rev.29 Ciencias humanas. Recuperado el 13 de septiembre de 2005 de:
http:// utp.edu.co/%7Echumanas/revistas/revistas/rev29/arbelaez.htm

ESCRIBANO, J., JIMÉNEZ, M., PÉREZ, M., VIRTO, J. (2004). Resolución de triángulos: Un reto para la diversidad. Recuperado el 21 de abril de 2005, de: http://www.educarioja.org/educarioja/html/docs/premios_innovacion/2004/2_secundaria_b.pdf.

GAYÓN, V. (1996). Ensayo metodológico para la solución de triángulos rectángulos. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

JOHNSON Y JOHNSON, COOPER Y CARRASCO, (1999). Las estrategias y técnicas didácticas en el rediseño. Recuperado el 26 de enero de 2006 de: http://www.itesm.mx/va/dide/red/.

LA MENZA, A., & CORSO, L., (1999). La Matemática: del conflicto al diálogo. Buenos Aires. Primera edición. Editorial AIQUE.

MATEOS, M. (2001). Metacognición y Educación. Argentina. Editorial AIQUE. Primera edición.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares. Bogotá.

Ministerio de educación UDCRESS. (2001). Orientaciones del trabajo pedagógico-Matemáticas. Perú. Recuperado el 23 de abril de 2005 de: http://www.minedu.gob.pe/gestion_pedagogica/dir_edu_secun_tecnologica/dir_edu_secun_tecnologica/xtras/otp_matematica.pdf

MOREIRA, M.A. (1996). Modelos mentales y lenguaje. Recuperado el 25 de febrero de 2006 de:
http://www.if.ufrgs.br/ienci

MORENO, V. (2005). Conexiones matemáticas 10. Bogotá. Editorial Norma.

ORTIZ, R. (2000). Diseño metodológico para llegar a la conceptualización de identidades pitagóricas a partir de la aplicación de actividades pedagógicas que requieren el uso de material didáctico. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

PIFARRÉ, MANOLI, SANUY Y JAUME. (2002). Investigación didáctica. Enseñanza de las ciencias. Recuperado el 10 de enero de 2006 de http://pifarre.pip.udl.es.

POLYA, G. (1998). Cómo plantear y resolver problemas. México. Editorial Trillas. Vigésimo segunda edición.

ROJAS, P. (2002). La Transición Aritmética-Algebra. Santa Fe de Bogotá. Editorial Gaia. Tercera edición.

SANTOS, T. (1999). Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México. Grupo editorial Iberoamericana.

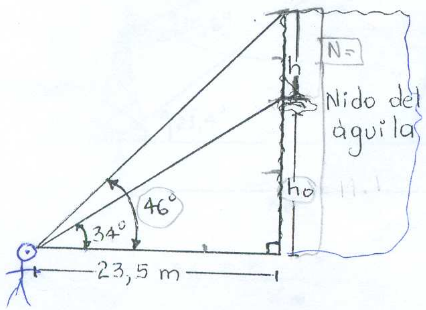
ANEXOS

TALLER Nº 1

Participantes: Alvaro Javier Cordero Y Juan Sebastian Mejia.

Resuelve los siguientes problemas:

1. Un observador de aves mira el nido de un águila, en el claro de un risco como lo indica la figura. ¿Qué distancia hay entre el nido del águila y la cima del risco?



$\tan 34° = \frac{ho}{23.5}$ $\quad ho = 0.674(23.5)$

$ho = \tan 34 \cdot (23.5)$ $\quad \boxed{ho = 15.839}$

$\tan 46° = \frac{N}{23.5}$ $\quad N = \tan 46(23.5)$

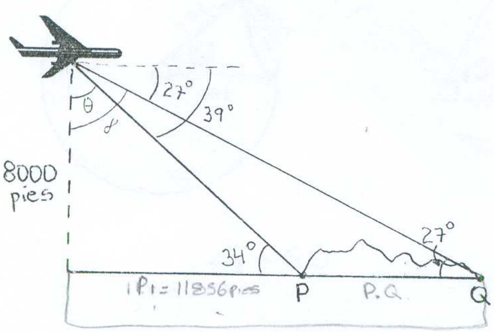
$N = 1.035(23.5)$

$\boxed{N = 24.3225}$

→ si $ho = 15.839$ $N = 24.3225$.

$\boxed{H = 8.4835}$

2. El copiloto del aeroplano de la figura, que vuela a una altura de 8000 pies sobre el nivel del océano, descubre una isla. Calcúlese el ancho de la isla, con aproximación de 10 pies.



Q2 = 15696pies

$\cot 34° \quad \frac{P}{8.000}$

$P_1 = \cot 34°(8 \times 10^3)$

$P_1 = 1.482(8 \times 10^3)$

$P_1 = 11,856 \times 10^3$

$\boxed{P_1 = 11856}$

$\cot 27° \quad \frac{Q2}{8 \times 10^3}$

$Q2 = \cot 27(8 \times 10^3)$

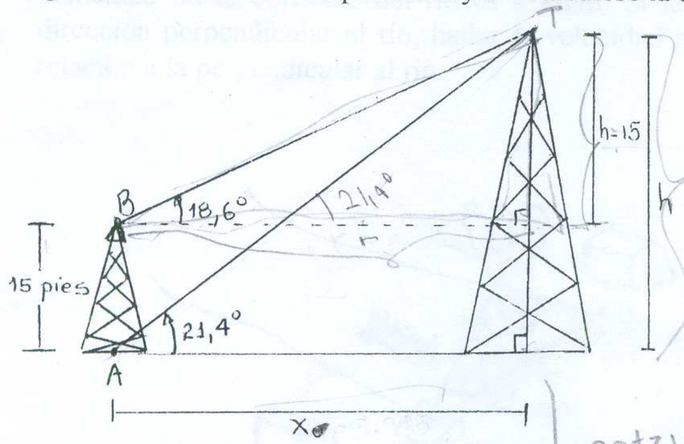
$Q2 = 1.962(8 \times 10^3)$

$\boxed{Q2 = 15696}$

→ si Q2 = 15696 pies y P_1 = 11856 pies

$\boxed{P.Q = 3840 \text{ pies}}$

3. El ángulo de elevación del punto T, en la parte superior de la torre mostrada en la figura, se mide desde los puntos A y B. Calcúlese la altura de la torre.



$\tan 18{,}6 = \frac{h-15}{X_0}$

$\tan 21{,}4 = \frac{h}{X_0}$

$\cot 21.4 = \frac{h}{272.72}$

$h = \cot 21.4 (272.72)$

$h = 2.55\,(272.72) = \boxed{695.89\,h}$

$\frac{-15}{0.055}$

$0.336 = \frac{h-15}{X}$

$0.391 = \frac{h}{X}$

$x = 0.336 \cdot h - 15 \Rightarrow x = 0.391 \cdot h$

$x = 0.336 \cdot h - 15 = 0.391 \cdot h$

$-h \cdot h - 15 = 0.391 - 0.336$

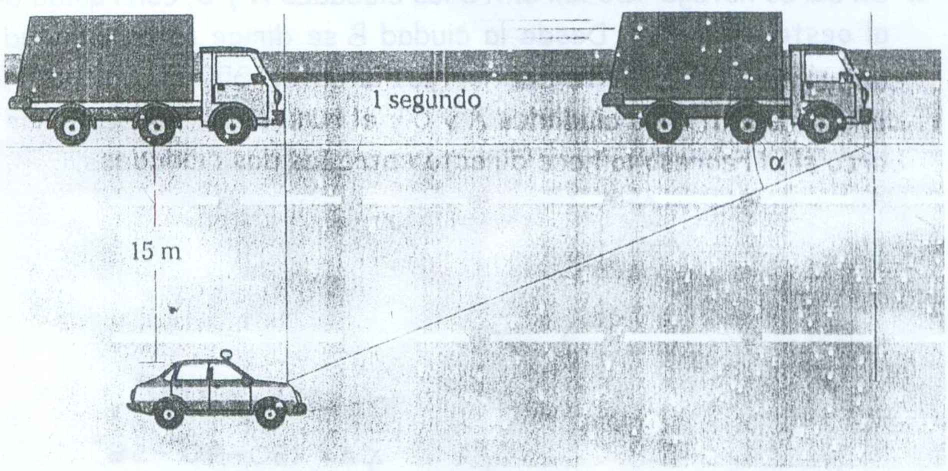
$-15 = 0.055$

$\boxed{x_0 = -272.72}$

INSTITUCIÓN EDUCATIVA PROVENZA
TALLER No. 2: TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Participantes: Edgar Mauricio de Jesús Acelos Montilla
Gloria Stefanny Avendaño Mora

1. Un policía de tránsito se ubica a 15 metros de la carretera. Un segundo después de que un camión pasa frente a él, se mide el ángulo α formado entre la carretera y la visual de la patrulla al camión.



a. Si el ángulo es 15°, ¿que tan rápido va el camión? Expresa la respuesta en m/s y km/h.
b. Si el límite de velocidad permitido es 40 km/h y se multa cuando esta velocidad se excede en 5 km/h o más, ¿para qué ángulos se debe multar al conductor del camión?

a)

$\boxed{V = 15 m|seg}$

$V = \frac{15}{1000} = 0{,}015$

$\frac{1}{3600} = 0{,}00028$

$\boxed{V = 53{,}6 Km|h}$

b) $\frac{45 Km}{h} = \frac{45000}{3600} = 12{,}5 m|seg$

15 m/seg —— 15°

12,5 m/seg —— X

El angulo a partir del cual se es multado el conductor es de 12,5°

. Un barco navega 400 km entre las ciudades A y B, con rumbo 60° al oeste del norte. Desde la ciudad B se dirige a otra ciudad C con rumbo 30° al este del norte, distante 250 km. Calcule las distancias entre las ciudades A y C y el rumbo que debe tomar el barco si el regreso lo hace directo entre las dos ciudades.

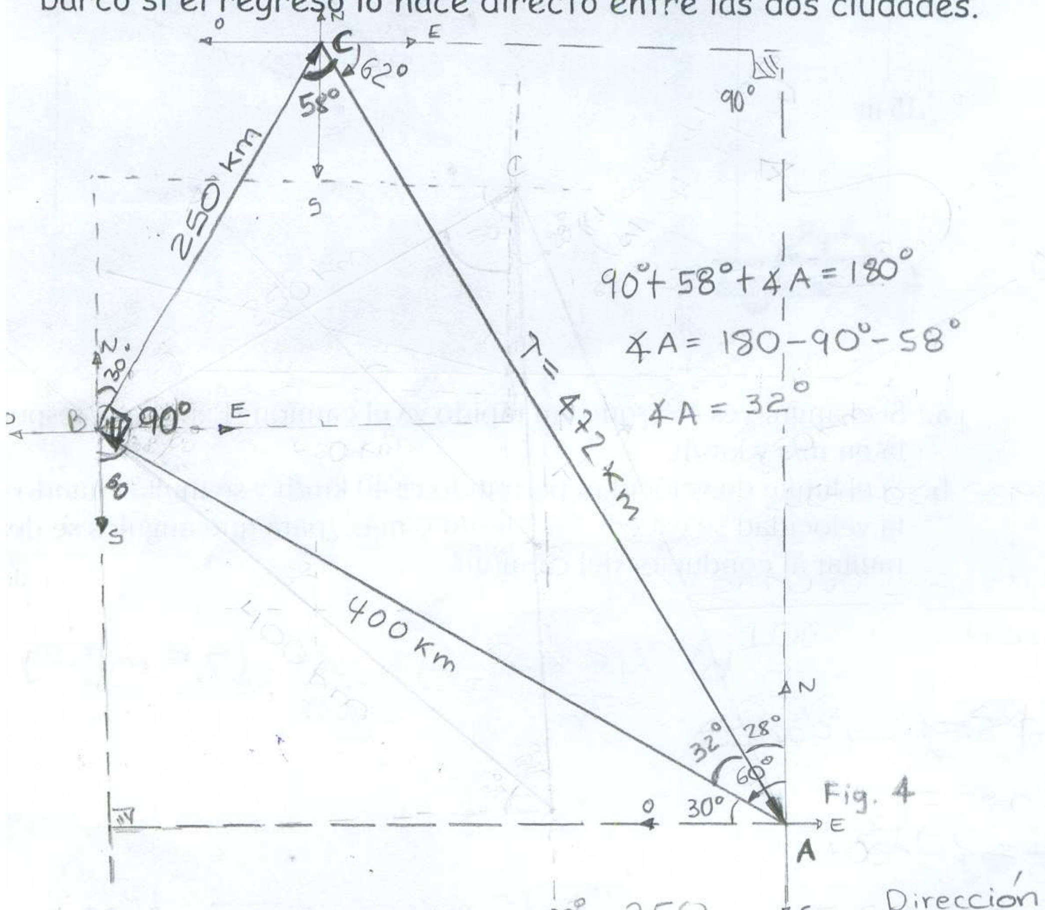


Fig. 4

$n\ C = \frac{400}{250}$

$n\ C = 1.6$

$C = Tan^{-1} 1.6$

$\boxed{C = 58°}$

$Sen 32° = \frac{250}{T}$

$T = \frac{250}{sen 32°}$

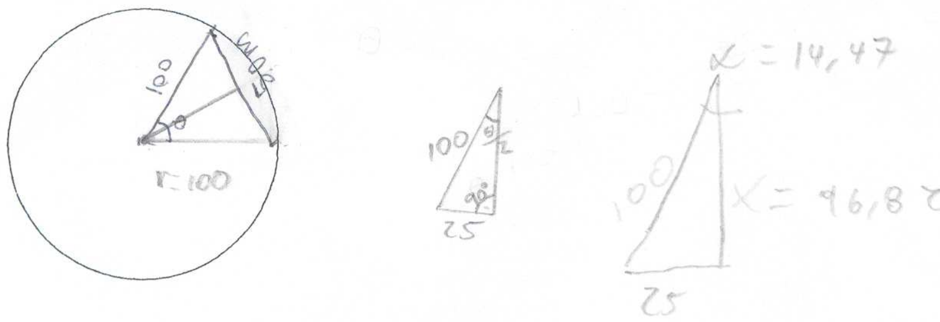
$\boxed{T = 472 Km}$

Dirección

rumbo 62° al sur del este

3. En una circunferencia de 100 m de radio, se unen dos puntos con una cuerda de 50 m. ¿Cuánto vale el ángulo central correspondiente?

$2\alpha = \theta$



$\tan x = \frac{25}{96{,}82}$

$m\alpha = 0{,}258211113$

$\alpha = \tan^{-1} 0{,}258211113$

$\alpha = 14{,}47816875$

$\boxed{\alpha = 14{,}47}$

$C = \sqrt{(100)^2 - (25)^2}$

$C = \sqrt{10000 - 625}$

$C = \sqrt{9375}$

$C = 96{,}82$

$\theta = 2\alpha$

$\theta = 14{,}47(2)$

$\boxed{\theta = 28{,}94}$

El ángulo central es de $28{,}94°$