

**Comportamiento mecánico en mezclas de concreto auto-compactante reforzado con fibras  
de acero, con base en un modelo probabilístico de la fractura**

**Jhon Jairo Portilla Suárez**

**Aschly Yurley Vesga Rey**

**Proyecto de grado para optar al título de Ingeniero Civil**

**Director:**

**Luis Eduardo Zapata Orduz**

**Dr. en Ingeniería Civil**

**Codirector:**

**David Sebastian Cotes Prieto**

**Ingeniero Civil**

**Universidad Industrial de Santander**

**Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas**

**Escuela de Ingenierías Civil**

**Bucaramanga**

**2019**

**Contenido**

	<b>Pág.</b>
Introducción .....	12
1. Metodología .....	16
1.1 Materiales.....	16
1.1.1 Cemento.....	16
1.1.2 Ceniza Volante.....	16
1.1.3 Agregado Fino.....	16
1.1.4 Agregado Grueso .....	17
2.1.5 Fibras de acero.....	17
1.1.6 Super-plastificante.....	18
1.2 Diseño de experimentos.....	18
1.3 Diseño de Mezclas .....	19
1.4 Proceso de mezclado.....	21
1.5 Ensayos en estado fresco .....	22
1.6 Elaboración de especímenes .....	22
1.7 Ensayos en estado endurecido .....	23
1.7.1 Ensayo a compresión simple.....	23
1.7.2 Ensayo a flexión de 4 puntos.....	24
1.7.3 Ensayo Brasileño (tracción indirecta).....	24

1.7.4 Ensayo Barcelona (tracción indirecta) .....	25
1.8 Curvas esfuerzo-deformación .....	25
1.9 Estimación de parámetros de Weibull .....	26
1.9.1 Método de los momentos (MM).....	27
1.9.2 Método de la máxima verosimilitud (MMV).....	29
1.9.3 Método de los momentos ponderados de probabilidad (MPP).....	31
1.9.4 Método gráfico (MG).....	32
1.10 Bondad de ajuste (Análisis estadístico) .....	34
1.9.1 Coeficiente de determinación ( $R^2$ ).....	34
1.9.2 Razón de verosimilitud ( $G^2$ ).....	34
1.9.2 Estadística de Anderson-Darling ( $A^2$ ).....	35
1.11 Superficie de respuesta .....	36
2. Resultados y Discusión.....	37
2.1 Ensayos en estado fresco .....	37
2.2 Ensayos en estado endurecido .....	38
2.2.1 Ensayo a flexión de cuatro puntos. ....	38
2.2.2 Ensayo Barcelona.....	40
2.2.3 Ensayo a compresión simple.....	41
2.2.4 Ensayo Brasileño. ....	42
2.3 Curvas esfuerzo-deformación .....	43
2.4 Optimización de la energía de la fractura .....	45
2.5 Estimación de parámetros de Weibull .....	47
3. Conclusiones.....	49

Referencias Bibliográficas ..... 51

**Lista de Figuras**

	<b>Pág.</b>
<i>Figura 1.</i> Fibras de acero terminadas en gancho. ....	18
<i>Figura 2.</i> Esquema del diseño estadístico experimental.....	19
<i>Figura 3.</i> Resultados de energía de la fractura promedio. ....	39
<i>Figura 4.</i> Resultados de resistencia a la rotura promedio desde flexión en cuatro puntos.....	40
<i>Figura 5.</i> Resultados de carga máxima promedio desde tracción indirecta (Barcelona). ....	41
<i>Figura 6.</i> Resultados de resistencia a la rotura promedio desde compresión simple. ....	42
<i>Figura 7.</i> Resultados de resistencia a la rotura promedio desde tracción indirecta (Brasileño)...	43
<i>Figura 8.</i> Curvas esfuerzo deformación de mezclas sin fibras. ....	44
<i>Figura 9.</i> Curvas esfuerzo deformación de mezclas con fibras.....	44
<i>Figura 10.</i> Superficie de respuesta del modelo depurado de $G_f$ . ....	46

**Lista de Tablas**

	<b>Pág.</b>
Tabla 1. <i>Granulometría de AG y AF</i> .....	17
Tabla 2. <i>Proporciones de los diseños de mezcla</i> .....	21
Tabla 3. <i>Resultados promedio de ensayos en estado fresco.</i> .....	37
Tabla 4. <i>Análisis ANOVA. Modelo depurado de los factores.</i> .....	45
Tabla 5. <i>Verificación de supuestos de ANOVA.</i> .....	47
Tabla 6. <i>Resultados del análisis estadístico y parámetros de Weibull con mejor ajuste</i> .....	48

## Resumen

**TITULO:** Comportamiento mecánico en mezclas de concreto auto-compactante reforzado con fibras de acero, con base en un modelo probabilístico de la fractura\*

**AUTORES:** Jhon Jairo Portilla Suárez  
Aschly Yurley Vesga Rey\*\*

**PALABRAS CLAVE:** Fibras de acero, Concreto auto-compactante, Energía de fractura, Superficie de respuesta, Módulos de Weibull

### DESCRIPCIÓN:

El concreto auto-compactante reforzado con fibras de acero ha tenido un auge significativo en los últimos años como tema de investigación debido a las ventajas constructivas, económicas y ambientales que ofrece. En vista de esto, el presente proyecto de investigación plantea evaluar el comportamiento mecánico del concreto auto-compactante a partir un estudio de sensibilidad estadístico y un análisis probabilístico de la energía de fractura mediante la distribución de Weibull, bajo el efecto de la adición de fibras de acero en proporciones del 0.0% - 1.0% (con respecto al volumen total de la mezcla) junto con una variación en las relaciones agua/material cementante entre 0.4 - 0.6. Se realizaron 4 tipos de ensayos en estado endurecido con el fin de caracterizar el material en estudio: (i) ensayo a flexión de cuatro puntos, (ii) ensayo Barcelona a tracción indirecta, (iii) ensayo a compresión simple, y (iv) ensayo Brasileño a tracción indirecta, los cuales se ejecutaron mediante un diseño estadístico de experimentos del tipo central compuesto desde puntos axiales basado en un factorial 2k con puntos al centro junto con la metodología de superficie de respuesta y un análisis de varianza (ANOVA); adicionalmente, los parámetros de Weibull se estimaron usando cuatro métodos, entre ellos el método de los momentos (MM). En los resultados obtenidos se evidencia que el método de estimación de parámetros más eficaz es el método de los momentos ponderados de probabilidad (MPP) con un 58.82% de ajuste al modelo; la superficie de respuesta sugiere la localización de un valor máximo de energía de fractura dentro de los dominios planteados y que los dos factores en estudio son estadísticamente significativos ( $\alpha=0.10$ ).

---

\* Proyecto de grado

\*\* Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas Escuela de Ingenierías Civil. Director: Luis Eduardo Zapata Orduz Dr. en Ingeniería Civil Codirector: David Sebastian Cotes Prieto Ingeniero Civil

## Abstract

**TITLE:** Mechanical behavior in self-compacting concrete mixtures reinforced with steel fibers, based on a probabilistic fracture model \*

**AUTORES:** Jhon Jairo Portilla Suárez  
Aschly Yurley Vesga Rey \*\*

**KEYWORDS:** Steel fiber, Self-compacting concrete, Fracture energy, Response Surface, Weibull parameters.

## DESCRIPTION

Steel fiber reinforced self-compacting concrete has had a significant boom as a research topic nowadays due to their constructive, economic and environmental advantages. In view of this, this research proposes to evaluate the mechanical behavior of self-compacting concrete, based on a statistical sensitivity study and a Weibull probabilistic analysis of fracture energy, under the effect of the addition of steel fibers proportion between 0.0% - 1.0% (regarding the total volume of the mixture) and variations of the water-binder ratios between 0.4 - 0.6. Four types of tests were carried out in order to describe the mechanical properties of the material: (i) four-point test, (ii) indirect tensile Barcelona test, (iii) simple compression test, and (iv) indirect tensile Brazilian test, executed using a statistical design of experiments of the type central composed from axial points based on a 2k factorial with central points, along with the response surface methodology and analysis of variance (ANOVA); additionally, the estimated Weibull parameters were obtained using four methods, moments method (MM) being one of them. The obtained results evidenced that the best estimating method was probability weighted moments method (PWMM) with the 58.82% of model fit; the response surface suggests that the two factors studied are statistically significant ( $\alpha=0.10$ ) and the location of the maximum value of fracture energy.

---

\* Proyecto de grado

\*\* Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas Escuela de Ingenierías Civil. Director: Luis Eduardo Zapata Orduz Dr. en Ingeniería Civil Codirector: David Sebastian Cotes Prieto Ingeniero Civil

## Introducción

Actualmente, el concreto es un material muy importante y ampliamente usado en la industria de la construcción, sin embargo, es un material cerámico y pseudo-frágil que presenta deficiencias en algunas de sus propiedades mecánicas en estado endurecido tales como resistencia a la tracción, ductilidad, tenacidad y resistencia al impacto. El uso de materiales de refuerzo en el concreto como cables, perfiles, fibras y varillas de acero corrugado (siendo éstas últimas las más usadas) se ha popularizado debido a que mejoran las propiedades previamente mencionadas (Ghasemi, Ghasemi, & Mousavi, 2018). A pesar de las ventajas que implica el uso de varillas de acero en el concreto, existen desventajas desde el punto de vista constructivo, tales como la baja calidad en el armado de las armaduras de refuerzo, la presencia de vacíos irregulares en las superficies del concreto endurecido y la necesidad de vibrado mecánico (Oikonomou-mpegetis, 2013).

El concreto reforzado con fibras de acero (CRFA) ha tenido un auge significativo como material de construcción, dado que no presenta las deficiencias constructivas previamente mencionadas asociadas al refuerzo con varillas. Adicionalmente, su uso confiere ventajas al concreto tales como la capacidad de mantener su integridad estructural y el control de la propagación de grietas (Gencel, Brostow, Datashvili, & Thedford, 2011), ya que en la etapa de fisuración las fibras de acero actúan como un enlace que permite la transferencia de esfuerzos entre las partes no fisuradas del material (Figueiredo & Ceccato, 2015), (F. AD, *Concreto reforzado con fibras, Tesis de docencia., Sao Paulo: Universidad de Sao Paulo, 2011., n.d.*). Investigaciones previas en el tema han demostrado que este efecto es más sensible a parámetros como el tipo,

volumen, dirección y distribución de fibras en la superficie de fractura (Ghasemi et al., 2018). Además de las ventajas previamente mencionadas, la implementación de las fibras de acero en las estructuras de concreto ofrece ventajas en el proceso constructivo, ya que reduce el nivel de ruido y la mano de obra necesaria para el armado de refuerzo en las construcciones civiles (Oikonomou-mpegetis, 2013), (Persson, 2001). Por otra parte, su implementación resulta en una desventaja pues conlleva a la disminución de la trabajabilidad del material incluso en presencia de vibrado mecánico (Yazici, Inan, & Tabak, 2007).

El concreto auto-compactante (CAC) es un material que en estado fresco tiene la propiedad de fluir de forma natural a través de obstáculos, llenar moldes y estabilizarse por la acción de su propio peso sin necesidad de algún tipo de vibrado, conservando la consistencia suficiente para que los componentes de la mezcla permanezcan homogéneos, evitando fenómenos de segregación, que consisten en la distribución no uniforme de las partículas, y el sangrado, referido a la elevación de agua hacia la superficie de concreto (Pająk & Ponikiewski, 2013), (O. M. Ozawa Kazumasa, «*Proceedings of the international workshop on self-compacting concrete,*» de *International workshop on self-compacting concrete, Tokyo, Japan, 1999.*, n.d.).

En este sentido, el concreto auto-compactante reforzado con fibras de acero (CACRFA) es un material compuesto que aprovecha las ventajas proporcionadas por las fibras de acero en conjunto con las características en estado fresco del CAC (Ghasemi et al., 2018). La implementación del CACRFA, como cualquier material de construcción, exige un proceso de análisis y diseño, para lo cual es necesario realizar una previa caracterización de su comportamiento mecánico tanto en estado fresco como en estado endurecido. Este último a través de los fundamentos de la mecánica, donde se busca conocer propiedades como ductilidad, tenacidad, deformación, módulo de elasticidad, resistencia a la tracción y a la compresión, mediante el análisis de resultados de

laboratorio a través de modelos matemáticos, numéricos y/o estadísticos (RIBEIRO, DIÓGENES, NÓBREGA, & DEBS, 2016).

Dentro de las propiedades importantes a caracterizar del CACRFA destacan la resistencia a la compresión, módulo de elasticidad y curvas de carga desplazamiento, medidas a partir de ensayos de compresión simple en cilindros o cubos; la resistencia a la tracción, curvas de carga-desplazamiento y energía de fractura ( $G_f$ ), definida como la energía requerida para el crecimiento de la grieta inicial en una muestra del material [15], fueron determinadas a partir de ensayos de tracción indirecta, como (i) el ensayo Brasileño (ASTM C496 (ASTM C496/C496M-11, 2011b)), (ii) el ensayo Barcelona (UNE 83515 (Normalización, 2006)) y (iii) el ensayo de flexión en vigas (ASTM C1609 (ASTM, 2012)), comúnmente preferidos respecto a ensayos de tracción directa debido a la facilidad del montaje del experimento (Alhussainy, Hasan, Rogic, Sheikh, & Hadi, 2016). Así mismo, la ductilidad y tenacidad, obtenidas combinando los resultados de curvas de carga-desplazamiento con modelos matemáticos (J. A. O. Barros, 1999).

Para obtener las propiedades previamente mencionadas es necesario realizar un análisis a los datos obtenidos en los ensayos de laboratorio, los cuales pueden ser abordados bajo dos enfoques, el modelo determinístico y el modelo probabilístico. El primero de ellos no incluye elementos aleatorios, es decir, cada vez que se analizan los datos bajo este modelo con las mismas condiciones iniciales de una serie de parámetros definida, se obtendrán los mismos valores como resultados; por otro lado en el segundo de ellos se incorporan aspectos de variación aleatoria, es decir, cada vez que se analizan los datos bajo este modelo es probable obtener resultados diferentes, incluso si se tienen las mismas condiciones iniciales para dichos parámetros, generando así una función de probabilidad (de Vasconcelos, Soares, da Costa, & Raso, 2019).

Una alternativa para modelar el comportamiento de los materiales cerámicos desde un enfoque probabilístico fue propuesta en 1939 por el ingeniero sueco Waldoddi Weibull quien introdujo su función de distribución de probabilidad empírica basada en pruebas de resistencia a la tracción, flexión y torsión en materiales frágiles. El concreto al ser un material cerámico presenta una variación considerable en sus propiedades mecánicas en muestras hechas con la misma dosificación de componentes, por lo cual, un enfoque probabilístico representa de mejor forma el comportamiento mecánico de este material.

Este proyecto de investigación caracteriza las propiedades mecánicas del CACRFA, tales como como la  $G_f$ , módulo de elasticidad, resistencia a la compresión y tracción indirecta; a través de un diseño experimental basado en un factorial  $2^k$ , un análisis probabilístico usando la distribución de probabilidad de Weibull de dos (We2) y tres parámetros (We3), y finalmente se propone la optimización de la  $G_f$  a través de la metodología estadístico-matemática de superficie de respuesta. Cabe resaltar que esta investigación se realiza en apoyo al proyecto de maestría en ingeniería civil titulado “Técnica heurística para determinar la resistencia a flexión en vigas de concreto auto-compactante reforzadas con fibras de acero” desarrollado por el estudiante David Sebastián Cotes Prieto, además de ser una continuación de la investigación realizada previamente del comportamiento mecánico en estado fresco del CACRFA, cuyos resultados son presentados en el proyecto de pregrado titulado “Estudio del estado fresco del concreto auto-compactante reforzado con fibras de acero” desarrollado por los estudiantes Sara Juliana Carrillo Quintero e Iván Camilo Cotes Prieto.

## 1. Metodología

### 1.1 Materiales

Las propiedades de los materiales empleados para la elaboración del CACRFA fueron caracterizados por medio de ensayos de laboratorio siguiendo los lineamientos de la American Society of Testing Materials (ASTM). A continuación, se muestra la información obtenida.

**1.1.1 Cemento.** El cemento utilizado fue Portland Tipo I, con gravedad específica de 3.03, ensayado según la ASTM C188 (ASTM International, 2017).

**1.1.2 Ceniza Volante.** Como material de reemplazo parcial del cemento se utilizó ceniza volante proveniente de la hidroeléctrica Termotasajero (Norte de Santander, Colombia) con gravedad específica de 2.22, ensayado según la ASTM C311 (Concrete, 2003).

**1.1.3 Agregado Fino.** El agregado fino (AF) usado fue obtenido de proveedores locales (Bucaramanga, Santander). El AF presentó una gravedad específica de 2.59, capacidad de absorción de 1.85% y contenido de humedad de 8.41%, estos ensayos se realizaron según la ASTM C128 (Ag-, Statements, & Pycnometer, 2017) ; módulo de finura de 2.01, obtenido con base en la ASTM C136 (C136 & ASTM C136, 2014). La granulometría del AF se muestra en la Tabla 1.

**1.1.4 Agregado Grueso** El agregado grueso (AG) usado fue obtenido de proveedores locales (Bucaramanga, Santander). El AG presentó una gravedad específica de 2.61, peso unitario de 1462.69 [kg/m<sup>3</sup>], contenido de humedad de 0.3% y capacidad de absorción de 0.55% en condición compactado saturado superficialmente seco. Los ensayos de laboratorio se realizaron con base en la ASTM C127 (ASTM C128, 2015); tamaño máximo nominal de 3/8" (9.52 mm), el cual fue obtenido con base en la norma ASTM C136 (C136 & ASTM C136, 2014). La granulometría del AG se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1.

*Granulometría de AG y AF*

Tamaño	Grueso (%)	Fino (%)
12.70	99.69	100.00
9.52	91.84	99.80
4.75	4.38	98.92
2.00	1.15	97.71
0.84	1.12	93.98
0.42	1.09	72.41
0.25	1.04	26.61
0.15	0.98	9.48
0.07	0.66	2.27
Fondo	0.00	0.00

**2.1.5 Fibras de acero.** Las fibras utilizadas fueron fibras de acero terminadas en gancho como se muestra en la Figura 1. La gravedad específica de las fibras fue 7.85, longitud (L) de 60 mm, diámetro (D) de 0.75 mm y relación de aspecto (L/D) de 80. Estos valores fueron proporcionados por los proveedores del material, C.A. Mejía & Cia.

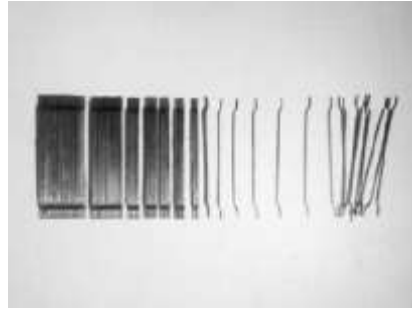


Figura 1. Fibras de acero terminadas en gancho.

**1.1.6 Super-plastificante.** El super-plastificante (SP) empleado fue un aditivo líquido, reductor de agua de ultra alto rango, basado en policarboxilatos y sin contenido de cloruros; el cual mediante experimentaciones previas mostró un buen comportamiento en términos de fluidez y estabilidad en las mezclas de concreto (A. D. de Figueiredo and M. R. Ceccato, “*Workability Analysis of Steel Fiber Reinforced Concrete Using Slump and Ve-Be Test*,” *Mater. Res.*, vol. 18, no. 6, pp. 1284–1290, 2015., n.d.). Presentó 35% de contenido de sólidos (en masa) determinado a partir de ensayos de laboratorio. La gravedad específica fue 1.08 obtenida desde la ficha técnica del material proporcionada por el proveedor.

## 1.2 Diseño de experimentos

Se realizó un diseño de experimentos tipo central compuesto basado en un factorial  $2^k$  con puntos al centro, en conjunto con la metodología de superficie de respuesta con el fin de estudiar la incidencia de los factores sobre la  $G_f$  obtenida a partir de ensayos de flexión en vigas. Los factores estudiados fueron la relación agua material cementante (a/c) en un dominio de 0.40 a 0.60 y el porcentaje de fibras (%F) en un dominio de 0.00% a 1.00% (en volumen). El diseño de experimentos se realizó usando el software *Minitab v.17*<sup>®</sup> [17] de donde se obtuvo la

distribución de puntos experimentales o tratamientos presentada en la Figura 2. Cabe resaltar que únicamente el punto central consta de 5 réplicas y adicionalmente se realizaron mezclas sin adición de fibras, llamados ceros, para cada una de las relaciones a/c, obteniendo un total de 17 tratamientos.

Los puntos experimentales fueron nombrados en el orden de ejecución obtenido del diseño estadístico con su respectiva relación a/c y %F entre paréntesis, iniciando con M1 hasta M13, así mismo, los ceros o mezclas de control fueron nombrados de Z1 a Z4.

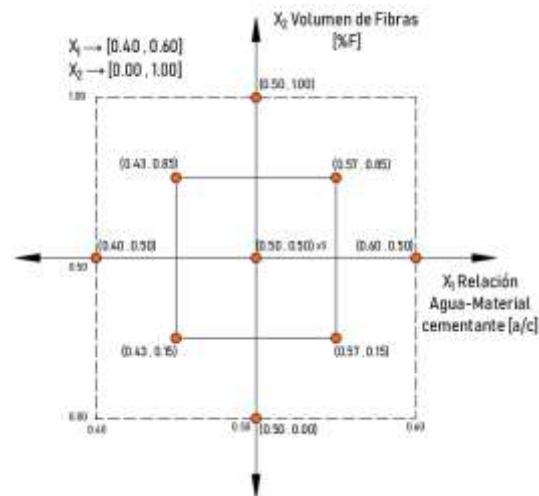


Figura 2. Esquema del diseño estadístico experimental.

### 1.3 Diseño de Mezclas

Para los diseños de mezcla de los puntos experimentales se tomó como punto de partida el método volumétrico propuesto por el American Concrete Institute (ACI) expuesto en el documento ACI 211.1 (211, 1991). Debido a que el material de estudio es CACRFA se realizaron cuatro modificaciones a los diseños de mezcla convencionales, los cuales se describen a continuación.

La primera modificación consistió en la adición de SP en proporciones entre 0.15% y 0.60% medidas en porcentaje del peso del material cementante; estos valores fueron obtenidos a partir de un estudio de compatibilidad realizado por los autores entre el material cementante y el SP, en el cual se evaluaron dosificaciones de SP entre 0.15% y 0.8%. La segunda de ellas consistió en modificar el material cementante mediante un reemplazo del 15% por ceniza volante; este porcentaje fue obtenido a partir de un estudio de compatibilidad realizado por los autores en el cual se evaluaron reemplazos de la masa de cemento entre 0% y 30% por ceniza volante, dichos porcentajes se adoptaron de recomendaciones de literatura [25]. En la tercera modificación se garantizó que la dosificación de los materiales con partículas más finas (aquellos que pasan el tamiz No. 200) fueran aproximadamente 500 kg, esto con el fin de mejorar la fluidez en estado fresco de la mezcla. Por último, se realizaron las respectivas correcciones por humedad de agregados y se fijó la relación de agregados en un 30% para AG y 70% para AF, porcentajes medidos como fracción del peso total de agregados, la cual se obtuvo a partir ensayos de laboratorio realizados por los autores, en mezclas con diferentes proporciones de agregados. Adicionalmente, la cantidad de agua de la mezcla fue determinada a partir de procesos iterativos con el fin de garantizar la estabilidad y fluidez de la misma; esta modificación fue controlada por inspección visual y ensayos en estado fresco como el T500, ensayo de asentamiento.

Las proporciones de los diseños de mezcla para los puntos obtenidos del diseño estadístico se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2.

*Proporciones de los diseños de mezcla*

<b>Mezcla (a/c-%F)</b>	<b>Cemento [kg/m<sup>3</sup>]</b>	<b>Ceniza [kg/m<sup>3</sup>]</b>	<b>Grueso [kg/m<sup>3</sup>]</b>	<b>Fino [kg/m<sup>3</sup>]</b>	<b>Agua [kg/m<sup>3</sup>]</b>	<b>Fibras [kg/m<sup>3</sup>]</b>	<b>SP %</b>
M1 (0.50 - 0.50)	459.13	68.87	412.39	958.38	264.00	39.00	0.38
M2 (0.50 - 0.50)	459.13	68.87	412.39	958.38	264.00	39.00	0.38
M3 (0.43 - 0.85)	506.74	76.01	404.43	943.66	250.00	66.61	0.45
M4 (0.50 - 1.00)	459.13	68.87	407.24	950.22	264.00	78.00	0.38
M5 (0.50 - 0.50)	459.13	68.87	412.39	958.38	264.00	39.00	0.38
M6 (0.57 - 0.85)	411.18	61.68	418.45	979.97	270.00	66.61	0.29
M7 (0.50 - 0.50)	459.13	68.87	412.39	958.38	264.00	39.00	0.38
M8 (0.50 - 0.00)	459.13	68.87	415.25	968.92	264.00	0.00	0.38
M9 (0.57 - 0.15)	411.18	61.68	425.20	992.10	270.00	11.39	0.26
M10 (0.40 - 0.50)	526.09	78.91	406.90	949.42	242.00	39.00	0.49
M11 (0.60 - 0.50)	400.00	60.00	421.62	980.68	276.00	39.00	0.28
M12 (0.43 - 0.15)	506.74	76.01	410.52	956.48	250.00	11.39	0.36
M13 (0.50 - 0.50)	459.13	68.87	412.39	958.38	264.00	39.00	0.38
Z1 (0.40 - 0.00)	526.09	78.91	410.91	958.78	242.00	0.00	0.56
Z2 (0.43 - 0.00)	506.74	76.01	410.16	960.79	250.00	0.00	0.48
Z3 (0.57 - 0.00)	411.18	61.68	426.37	994.84	270.00	0.00	0.26
Z4 (0.60 - 0.00)	400.00	60.00	424.71	990.99	276.00	0.00	0.17

#### 1.4 Proceso de mezclado

El mezclado de todos los puntos experimentales se realizó utilizando una mezcladora de 120 kg de capacidad. Inicialmente se mezclaron los agregados pétreos durante 1 minuto; luego se añadieron el cemento y la ceniza volante, mezclándose durante 1 minuto. Posteriormente se incorporó la totalidad de las fibras y el 40% de SP diluido en el 70% de agua de la mezcla, dejando que esto se mezclara durante 2 minutos. Finalmente, se diluyó el 60% del SP en el 30% de agua

faltante, esta mezcla se dividió en 3 partes y se adicionó en tres fases. A las dos primeras fases se les asignó un tiempo de mezclado de 1 minuto cada una y para la tercera fase se asignó un tiempo de mezclado final de 5 minutos (Basheerudeen & Anandan, 2015).

### **1.5 Ensayos en estado fresco**

Una vez finalizado el proceso de mezclado, se procedió a realizar el ensayo T500, que consiste en medir el tiempo que tarda la mezcla en detenerse una vez retirado el cono de Abrams, y el ensayo de flujo de asentamiento, que consiste en medir el diámetro de la mezcla completamente detenida. Estos ensayos se realizaron siguiendo las recomendaciones dadas por la European Federation for Specialist Construction Chemicals and Concrete Systems (EFNARC) y los mismos entregan medidas empíricas de la fluidez, viscosidad y capacidad de llenado de la mezcla (The European Project Group, 2005).

### **1.6 Elaboración de especímenes**

Para cada uno de los puntos experimentales del diseño experimental se elaboraron 4 cilindros de 75 mm de diámetro y 150 mm de altura para ensayos de compresión (ASTM C39 (ASTM C39, 2016)), 4 cilindros de 75 mm de diámetro y 150 mm de altura para el ensayo Brasileño de tracción indirecta (ASTM C496 (ASTM C496/C496M-11, 2011a)), 4 cilindros de 150 mm tanto de diámetro como de altura para el ensayo Barcelona de tracción indirecta (UNE 83515 (Normalización, 2006)), y finalmente 4 vigas de dimensiones 150x150x500 mm para ensayos de flexión de cuatro puntos (ASTM C1609 (ASTM C1609/C 1609M, 2005)) a las cuales se les realizó

una entalladura en el centro de luz con una profundidad promedio de 22 mm y un ancho promedio de 0.4 mm, ésta fue realizada 3 horas antes de llevar a cabo el respectivo ensayo de acuerdo con las recomendaciones dadas por RILEM TC162-TDF (Recommendation, 2002).

Una vez finalizado el proceso de mezclado y los ensayos de control en estado fresco, se procedió a verter el CACRFA a una distancia no mayor a 125 mm sobre el borde superior de los moldes. La fabricación de los especímenes necesarios para los ensayos en estado endurecido se llevó a cabo según la ASTM C1758 (Ag-, Concrete, & Concrete, 2012). Cabe resaltar que todos los especímenes se retiraron de los moldes 24 horas después de fundidos y posteriormente puestos en una pileta con agua a una temperatura de  $21 \pm 2^\circ \text{C}$  para efectuar el proceso de curado, permaneciendo sumergidos por 147 días.

## 1.7 Ensayos en estado endurecido

Para la ejecución de los 4 tipos de ensayos en estado endurecido bajo carga monotónica se hizo uso de una máquina MTS (Material Testing Machine) modelo 318.5 con capacidad de 500 kN. A continuación, se describen los ensayos realizados:

**1.7.1 Ensayo a compresión simple.** Los ensayos a compresión simple se llevaron a cabo de acuerdo a la norma ASTM C39 (ASTM C39, 2016). La velocidad implementada en el ensayo fue de 1.5 [mm/min] hasta obtener un desplazamiento del actuador de 6 mm. Este ensayo se realizó para 4 cilindros de cada uno de los puntos experimentales, para un total de 68 especímenes ensayados. Los datos obtenidos de este se utilizaron para calcular la resistencia a la rotura y el módulo de elasticidad del CACRFA.

**1.7.2 Ensayo a flexión de 4 puntos.** Los ensayos a flexión se llevaron a cabo de acuerdo a la norma ASTM C1609 (ASTM C1609/C 1609M, 2005) y las recomendaciones del RILEM TC162-TDF (Recommendation, 2002). Estos ensayos se realizaron con velocidades variables según el desplazamiento en el centro de luz; para desplazamientos entre 0 y 1 mm la velocidad fue de 0.2 [mm/min], para desplazamientos entre 1 y 5 mm la velocidad fue de 0.25 [mm/min] y finalmente para desplazamientos entre 5 y 10 mm la velocidad implementada fue de 0.7 [mm/min]. Este ensayo se llevó a cabo para 4 vigas de cada uno de los puntos experimentales, para un total de 68 especímenes ensayados. Los datos obtenidos de este ensayo fueron usados para calcular la resistencia a la rotura, los módulos de Weibull correspondientes para el CACRFA y la energía de fractura comúnmente denotada  $G_f$ . Este parámetro se puede calcular de los resultados de curvas de carga-desplazamiento, a través del método de trabajo de fractura [52] como muestra en la Ecuación (1)

$$G_f = \frac{W}{b(h-a)} \quad (1)$$

Donde  $W$  es el trabajo requerido para formar una superficie de grieta, calculado como el área bajo la curva carga-desplazamiento hasta un desplazamiento de 2 mm [31], el factor denominador representa la sección transversal efectiva de espécimen donde  $b$  y  $h$  son la base y altura de la sección transversal respectivamente, y  $a$  es la profundidad de la entalladura (J. A. O. Barros, 1999).

**1.7.3 Ensayo Brasileño (tracción indirecta).** Este ensayo se llevó a cabo de acuerdo a la norma ASTM C496 (ASTM C496/C496M-11, 2011a). La velocidad implementada en el ensayo fue de 3.0 [mm/min] hasta obtener un desplazamiento del actuador de 8 mm. Este ensayo se realizó para 4 cilindros de cada uno de los puntos experimentales, para un total de 68 especímenes

ensayados. Los datos obtenidos de este ensayo fueron usados para calcular la resistencia a la rotura del CACRFA.

**1.7.4 Ensayo Barcelona (tracción indirecta)** Los ensayos Barcelona se llevaron a cabo de acuerdo a la UNE-83515 (Normalización, 2006). La velocidad implementada en el ensayo fue de 0.5 [mm/min] hasta obtener un desplazamiento del actuador de 6 mm. Este ensayo se realizó para 4 cilindros de cada uno de los puntos experimentales, para un total de 68 especímenes ensayados. Los datos obtenidos de este ensayo fueron usados para calcular la resistencia a la rotura, la tenacidad y las curvas esfuerzo-deformación a tracción del CACRFA.

## 1.8 Curvas esfuerzo-deformación

Las curvas esfuerzo-deformación fueron obtenidas a partir de los ensayos Barcelona a tracción indirecta y utilizando el modelo constitutivo propuesto por Blanco y otros (Blanco, Pujadas, Cavalaro, Fuente, & Aguado, 2014), el cual se rige por las Ecuaciones (2), (3) y (4).

$$\sigma = \frac{F_p}{2 * \pi * A} * \frac{\cos \beta - \mu_k * \sin \beta}{\sin \beta + \mu_k * \cos \beta} \quad (2)$$

$$A = \frac{d * h}{4} - \frac{d'^2}{4 * \tan \beta} \quad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{n * \delta_p}{\pi * R} * \tan \beta * \sin \frac{\pi}{n} \quad (4)$$

Donde  $\sigma$  es el esfuerzo a tracción del material en estudio,  $F_p$  es la fuerza ejercida por el pistón,  $A$  es el área de la superficie radial agrietada,  $\beta$  es el ángulo de falla del material,  $\mu_k$  es el coeficiente de fricción cinética,  $d$  y  $h$  son el diámetro y la altura del cilindro en ensayo,  $d'$  es el diámetro del cilindro en acero requerido para el ensayo,  $\varepsilon$  es la deformación a tracción del material,  $n$  es el

número de grietas formadas después de finalizar el ensayo,  $\delta_p$  es el desplazamiento del pistón,  $R$  es el radio del cilindro en ensayo (Blanco et al., 2014).

### 1.9 Estimación de parámetros de Weibull

La evidencia científica ha mostrado que la distribución de Weibull es una representación probabilística adecuada del comportamiento mecánico de concretos (Deng, Jiang, & Gong, 2018), (R.E. Smallman, A.H.W. Ngan, *Physical Metallurgy and Advanced Material, 7th ed., Butterworth-Heinemann (Elsevier), Linacre House, Jordan Hill, Oxford, 2007.*, n.d.). Weibull fue pionero en la investigación estadística de fallas en materiales cerámicos con su distribución de probabilidad empírica, conocida como distribución We3 y mostrada en la Ecuación (5)

$$f_{(x|\varphi,\beta,\lambda)} = \frac{\lambda}{\beta} \left(\frac{x-\varphi}{\beta}\right)^{\lambda-1} \cdot e^{-\left(\frac{x-\varphi}{\beta}\right)^\lambda} \quad (5)$$

De forma similar, la distribución de probabilidad acumulada de la Ecuación (5) está dada por la Ecuación (6)

$$F_{(x|\varphi,\beta,\lambda)} = 1 - e^{-\left(\frac{x-\varphi}{\beta}\right)^\lambda} \quad (6)$$

Donde,  $x \geq \varphi$ ;  $\varphi \in \mathbb{R}$ ;  $\beta$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . La variable  $x$  representa la  $G_f$  del material, el parámetro de ubicación ( $\varphi$ ) representa la  $G_f$  mínima, el parámetro de escala ( $\beta$ ) representa la  $G_f$  característica, definida como aquella para la cual fallarán una cantidad de unidades determinadas de la muestra, y el parámetro ( $\lambda$ ) representa el módulo de Weibull, el cual cuantifica la dispersión de los valores de  $G_f$  en las muestras de estudio (Zapata-Ordúz, Portela, & Suárez, 2014), (Roesler, Harders, & Baeker, 2007). Usualmente, para simplificar la estimación de los parámetros se adopta una

distribución We2, la cual consiste en fijar el parámetro de ubicación ( $\varphi$ ) en cero o una constante previamente determinada desde estudios de laboratorio o literatura (Zapata-Ordúz et al., 2014).

Los parámetros de Weibull pueden ser calculados usando gran cantidad de métodos numéricos disponibles (Roesler et al., 2007). En el presente trabajo se usaron 4 métodos para la estimación de los parámetros de Weibull: (i) método de los momentos (MM) (Murthy, Min Xie, & Jiang, n.d.), (Datsiou & Overend, 2018), (ii) método de la máxima verosimilitud (MMV) (Nielsen, 2011), (iii) método de momentos ponderados de probabilidad (MPP) (Zapata-Ordúz et al., 2014), éstos para la estimación tanto de We2 como de We3 y (iv) método gráfico (MG) para la estimación de We2 (Datsiou & Overend, 2018). La evaluación del ajuste de los métodos previamente enunciados se llevó a cabo mediante las pruebas de bondad de ajuste coeficiente de determinación ( $R^2$ ), razón de verosimilitud ( $G^2$ ) y la estadística de Anderson-Darling ( $A^2$ ).

**1.9.1 Método de los momentos (MM).** En estadística, los momentos son características cuantitativas que permiten describir una distribución de probabilidad o una muestra aleatoria en estudio, tales como la media, la varianza, el coeficiente de asimetría y de curtosis; el número de momentos necesarios para el método está definido por la cantidad de parámetros que se deben estimar (Datsiou & Overend, 2018), en la presente investigación se hace uso de dos y tres momentos. El principio de este método es la igualación de los momentos muestrales (datos medidos) con los momentos poblacionales (distribución) (Usta, Arik, Yenilmez, & Kantar, 2018).

Los momentos muestrales están dados por las Ecuaciones (7) - (9) (Murthy et al., n.d.),

$$\mu_1 = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (\text{Media}) \quad (7)$$

$$\mu_2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (\text{Varianza}) \quad (8)$$

$$\mu_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{n-1} \quad (\text{Coef. asimetría}) \quad (9)$$

Adicionalmente, los momentos poblacionales están dados por las Ecuaciones (10) - (13) (Murthy et al., n.d.)

$$M_1 = \varphi + \beta * \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (10)$$

$$M_{1'} = \beta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (11)$$

$$M_2 = \beta^2 \cdot \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \right] \quad (12)$$

$$M_3 = \beta^3 \cdot \left[ \Gamma\left(1 + \frac{3}{\lambda}\right) - 3 \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{2}{\lambda}\right) - 2 \cdot \Gamma^3\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \right] \quad (13)$$

Donde, n corresponde al número de datos y  $\Gamma$  es la función Gamma definida en la Ecuación (14) (Montgomery & Runger, 2002)

$$\Gamma_{(z)} = \int_0^{\infty} x^{z-1} \cdot e^{-x} dx \quad (14)$$

Para el cálculo de los parámetros  $\lambda, \beta$  y  $\varphi$  en We3, se igualaron los momentos muestrales [Ecuaciones (7), (8), (9)] con sus respectivos momentos poblacionales [Ecuaciones (10), (12), (13)]; de igual forma para el cálculo de los parámetros  $\lambda$  y  $\beta$  en We2 se igualaron los momentos muestrales [Ecuaciones (7) y (8)] con sus respectivos momentos poblacionales [Ecuaciones (11) y (12)], obteniendo así sistemas de ecuaciones no lineales que generalmente se resuelven implementando métodos numéricos.

En la presente investigación se implementó el método numérico generalizado de Halley (Hafiz & Bahgat, 2012), ya que mediante el método tradicional de Newton Raphson no hubo convergencia dada la complejidad de las ecuaciones. Este método hace uso de las segundas derivadas parciales de las ecuaciones del sistema en estudio, lo cual permite que llegue a la

convergencia en menos iteraciones que otros métodos numéricos tradicionales. El método generalizado de Halley está descrito por la Ecuación (15) (Hafiz & Bahgat, 2012)

$$X^{k+1} = X^k - \left\{ J(X^k) - \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{2!} \otimes [J^{-1}(X^k)F(X^k)]^T H_i(X^k) \right\}^{-1} F(X^k) \quad (15)$$

Donde  $F$  es el vector de ecuaciones no lineales,  $X$  es el vector de soluciones,  $J$  (Jacobiano) es la matriz de primeras derivadas parciales y  $H$  (Hessiana) es la matriz de segundas derivadas parciales. El vector  $e_i$  es un vector  $nx1$  de ceros excepto por un 1 en la posición  $i$  y  $\otimes$  es el producto tensorial de Kronecker (Hafiz & Bahgat, 2012).

**1.9.2 Método de la máxima verosimilitud (MMV)** Este método encuentra un conjunto de parámetros  $\lambda, \beta$  y  $\varphi$  que maximiza la función de verosimilitud o proporciona la mayor probabilidad de obtener los datos medidos en los ensayos de laboratorio (Datsiou & Overend, 2018). La función de verosimilitud está definida como el productorio ( $\Pi$ ) de la función de distribución de probabilidad de Weibull, mostrada en la Ecuación (16) (Nielsen, 2011)

$$L_{(\varphi, \beta, \lambda|x)} = \prod f_{(x|\varphi, \beta, \lambda)} \quad (16)$$

El logaritmo de la función de verosimilitud es comúnmente usado ya que reduce la complejidad de los cálculos, como se muestra en la Ecuación (17) (Nielsen, 2011)

$$\mathcal{L}_{(\varphi, \beta, \lambda|x)} = \ln(\prod f_{(x|\varphi, \beta, \lambda)}) = \sum \ln(f_{(x|\varphi, \beta, \lambda)}) \quad (17)$$

Para maximizar el logaritmo de la función de verosimilitud ( $\mathcal{L}$ ) se realizan las derivadas parciales respecto a cada uno de los parámetros desconocidos y se igualan a cero. Para el caso particular de We2, el logaritmo de la función de verosimilitud y sus respectivas derivadas están

dadas por las Ecuaciones (18) - (20) (Zapata-Ordúz et al., 2014), en las cuales  $T$  representa la función transpuesta

$$\mathcal{L}(\varphi, \beta, \lambda|x) = n(\ln \lambda - \lambda \ln \beta) + (\lambda - 1) \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\lambda \quad (18)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \beta, \lambda|x)}{\partial \beta}, \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \beta, \lambda|x)}{\partial \lambda} \right]^T = 0 \quad (19)$$

$$\left[ -\frac{n\lambda}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\lambda, \frac{n}{\lambda} - n \ln \beta + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^\lambda \cdot \ln \left(\frac{x_i}{\beta}\right) \right]^T = 0 \quad (20)$$

La estimación de los parámetros  $\lambda$  y  $\beta$  se realiza por medio del método numérico de Halley, ya que no existe una solución exacta para este sistema de ecuaciones no lineales (Hafiz & Bahgat, 2012).

De forma similar, para We3, el logaritmo de la función de verosimilitud y sus respectivas derivadas están dadas por las Ecuaciones (21) - (23) (Zapata-Ordúz et al., 2014), en las cuales  $T$  representa la función transpuesta

$$\mathcal{L}(\varphi, \beta, \lambda|x) = n(\ln \lambda - \lambda \ln \beta) + (\lambda - 1) \cdot \sum_{i=1}^n \ln(x_i - \varphi) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \varphi}{\beta}\right)^\lambda \quad (21)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \beta, \lambda|x)}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \beta, \lambda|x)}{\partial \beta}, \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi, \beta, \lambda|x)}{\partial \lambda} \right]^T = 0 \quad (22)$$

$$\left[ \begin{array}{c} -(\lambda - 1) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - \varphi} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \varphi}{\beta}\right)^{\lambda-1}, \\ -\frac{n\lambda}{\beta} + \frac{\lambda}{\beta} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \varphi}{\beta}\right)^\lambda, \\ \frac{n}{\lambda} - n \ln \beta + \sum_{i=1}^n \ln(x_i - \varphi) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \varphi}{\beta}\right)^\lambda \cdot \ln \left(\frac{x_i - \varphi}{\beta}\right) \end{array} \right]^T = 0$$

(23)

Para la estimación de los parámetros se realizan arreglos matemáticos en la ecuación (23): (i) resolviendo la expresión relacionada con la derivada parcial de  $\beta$ , éste parámetro se puede expresar en términos de los otros parámetros, (ii) sustituyendo éste último término en las expresiones de las derivadas parciales de  $\lambda$  y  $\varphi$  es posible obtener un par de ecuaciones que no involucran el parámetro (Zapata-Ordúz et al., 2014). Este par de ecuaciones no lineales son resueltas usando el método numérico de Halley (Hafiz & Bahgat, 2012).

**1.9.3 Método de los momentos ponderados de probabilidad (MPP).** Los momentos ponderados de probabilidad (MPP) de una variable  $x$  con una función de distribución acumulada son cantidades representadas en la Ecuación (24) (Dario, Caiza, & Ummenhofer, 2011)

$$M_{p,r,s} = \int_0^1 [x(F)]^p \cdot F^r \cdot (1 - F)^s dF \quad (24)$$

Donde  $p, r, s \in \mathbb{N}$ . Reemplazando  $p = 1$ ,  $r = 0$  y  $F$  como la función de distribución acumulada de Weibull tres parámetros en la Ecuación (24) se obtienen los MPP mostrados en la Ecuación (25) (Dario et al., 2011)

$$M_{1,0,s} = \frac{\varphi}{s + 1} + \frac{\beta}{(s + 1)^{1+(1/\lambda)}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (25)$$

Donde  $\lambda > 0$  y  $\Gamma$  es la función Gamma definida en la Ecuación (11). Para el cálculo de los parámetros  $\lambda, \beta$  y  $\varphi$  es necesario hacer uso de los primeros tres MPP mostrados en las Ecuaciones (26) - (28), siendo  $M_s = M_{1,0,s}$ ,  $s = 0,1,2$ . (Dario et al., 2011)

$$M_0 = \varphi + \beta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (26)$$

$$M_1 = \frac{\varphi}{2} + \frac{\beta}{2^{1+(1/\lambda)}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (27)$$

$$M_2 = \frac{\varphi}{3} + \frac{\beta}{3^{1+(1/\lambda)}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (28)$$

Sin embargo, es necesario conocer los valores de los MPP  $M_0, M_1$  y  $M_2$ , los cuales son calculados a partir de estimadores dados en las Ecuaciones (29) - (31), que dependen de los datos experimentales ordenados de forma ascendente (Dario et al., 2011)

$$\widehat{M}_0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (29)$$

$$\widehat{M}_1 = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)x_i \quad (30)$$

$$\widehat{M}_2 = \frac{1}{n(n-1)(n-2)} \cdot \sum_{i=1}^{n-2} (n-i)(n-i-1)x_i \quad (31)$$

Usando los estimadores denotados con el símbolo circunflejo y una serie de arreglos matemáticos se obtienen las Ecuaciones (32) a (33).

$$\beta = \frac{\widehat{M}_0 - \varphi}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)} \quad (32)$$

$$\widehat{M}_1 = \frac{\varphi}{2} + \frac{\beta}{2^{1+(1/\lambda)}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (33)$$

$$\widehat{M}_2 = \frac{\varphi}{3} + \frac{\beta}{3^{1+(1/\lambda)}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \quad (34)$$

Finalmente para la estimación de los parámetros  $\lambda, \beta$  y  $\varphi$  se sustituye la Ecuación (32) dentro de las Ecuaciones (33) y (34), de las cuales surge un par de ecuaciones no lineales que para esta investigación se resolvieron mediante el método generalizado de Halley (Hafiz & Bahgat, 2012).

**1.9.4 Método gráfico (MG).** Este método, también conocido como método de los mínimos cuadrados, es uno de los más populares para la estimación de los parámetros  $\lambda$  y  $\beta$  en We2 debido a su simplicidad matemática (Usta et al., 2018). Consiste en transformar la función de distribución acumulada [Ecuación (3)] en una función lineal aplicando logaritmo natural dos veces, lo cual lleva a la Ecuación (35) que es en esencia la ecuación de una recta de la forma  $y = mx + b$  (Chaurasiya, Ahmed, & Warudkar, 2018)

$$\ln \left[ \ln \left( \frac{1}{1-F_{(x|\varphi,\beta,\lambda)}} \right) \right] = \lambda \ln x - \lambda \ln \beta \quad (35)$$

Debido a que no es posible conocer el valor real de  $F_{(x|\varphi,\beta,\lambda)}$  para cada uno de los valores de  $x_i$  observados experimentalmente, se hace necesario el uso de estimadores de probabilidad empíricos que permitan calcular estos valores (Deng et al., 2018). En esta investigación se implementó el estimador de Hazen definido en la Ecuación (36), ya que se evidenció experimentalmente que éste permite calcular parámetros con un mejor ajuste a la distribución de Weibull, además de considerar las recomendaciones dadas por literatura (Datsiou & Overend, 2018).

$$F = \frac{i - 0.5}{n} \quad (36)$$

Donde  $F$  es la función de distribución empírica,  $n$  es el número total de datos observados,  $i$  es el  $i$ -ésimo dato ordenado de forma ascendente (Datsiou & Overend, 2018). A la representación gráfica de la Ecuación (35) se le realiza una regresión usando el concepto de mínimos cuadrados, de la cual se pueden obtener directamente los parámetros  $\lambda$  y  $\beta$  de la pendiente de la recta Ecuación (37) y el corte con el eje de las ordenadas Ecuación (3) 8, respectivamente (Chaurasiya et al., 2018).

$$\lambda = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (\ln x_i \cdot y_i) - \sum_{i=1}^n \ln x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 - [\sum_{i=1}^n \ln x_i]^2} \quad (37)$$

$$-\lambda \ln \beta = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \ln x_i}{n} \quad (38)$$

### 1.10 Bondad de ajuste (Análisis estadístico)

Debido a que diferentes pruebas de bondad de ajuste pueden llevar a resultados diferentes para el mismo grupo de datos, en esta investigación se hizo uso de tres pruebas diferentes para determinar si el conjunto de datos observados se comportaba de acuerdo a la distribución de Weibull: (i) Coeficiente de determinación ( $R^2$ ), (ii) Razón de verosimilitud y (iii) Estadística de Anderson-Darling.

**1.9.1 Coeficiente de determinación ( $R^2$ ).** Esta prueba de ajuste es comúnmente usada para juzgar el ajuste de los datos muestrales al modelo estudiado (Montgomery & Runger, 2002), en este caso particular, la función de densidad de probabilidad de Weibull. El coeficiente de determinación se calcula de acuerdo a la Ecuación (39)

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (39)$$

Donde  $n$  es el número total de observaciones,  $y_i$  es la frecuencia de las observaciones,  $\bar{y}_i$  es el valor promedio de las frecuencias de los datos observados y  $\hat{y}_i$  es el  $i$ -ésimo valor estimado usando la distribución de Weibull (Chaurasiya et al., 2018), (Montgomery & Runger, 2002). El valor de  $R^2$  varía de 0 a 1, en este sentido, el valor más alto de  $R^2$  indica un mejor ajuste de los datos observados y los resultados calculados (Usta et al., 2018).

**1.9.2 Razón de verosimilitud ( $G^2$ ).** La prueba  $G^2$  es una prueba estadística usada como criterio para determinar si es apropiado describir los datos obtenidos con la función de densidad de probabilidad teórica, en este caso, la función de densidad de probabilidad de Weibull. Esta prueba se encuentra definida por la Ecuación (40)

$$G^2 = 2 \cdot \sum_{i=1}^k X \cdot \ln\left(\frac{X}{E(X)}\right) \quad (40)$$

Donde  $X = [X_1, X_2, \dots, X_k]$  es el vector de frecuencias de los datos observados  $x_i$  y  $E(X) = [E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_k)]$  es el vector de esperanzas de los datos ajustados a la distribución  $F$ , siendo  $k$  el número de intervalos (Cressie & Read, 2006). La hipótesis nula de esta prueba es que la variable aleatoria  $x_i$  se comporta de acuerdo a la distribución  $F$  y se rechaza a un nivel de significancia  $\alpha = 0.10$  si  $G^2$  excede el valor del estadístico  $X_{teo}^2 = 6.25$  (Montgomery & Runger, 2002).

**1.9.2 Estadística de Anderson-Darling ( $A^2$ ).** La prueba  $A^2$  hace parte del grupo de pruebas de bondad de ajuste usadas para comparar la función de distribución empírica de la muestra con la función de distribución acumulada de Weibull (“R.B. D’Agostino, M. A. Stephens, Goodness-of-Fit Techniques, Marcel Dekker, New York, USA, 1996.” 2017). Es una herramienta estadística poderosa ya que es altamente sensible al comportamiento de la cola de la distribución, además, esta prueba es altamente recomendada para análisis estadístico de materiales compuestos (Zapata-Ordúz et al., 2014), como lo es el CACRFA. Esta prueba está definida por las Ecuaciones (41) y (42)

$$AD^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) \cdot [\ln F_{(i)} + \ln(1 - F_{(n+1-i)})] \quad (41)$$

$$A^2 = AD^2 * \left(1.0 + \frac{0.2}{\sqrt{n}}\right) \quad (42)$$

Donde  $n$  es el número total de datos observados,  $i$  es el  $i$ -ésimo dato ordenado de forma ascendente y  $F$  es la función de distribución acumulada de Weibull evaluada en el  $i$ -ésimo dato.

La hipótesis nula de esta prueba es que la variable aleatoria  $x_i$  se comporta de acuerdo a la distribución  $F$  y se rechaza a un nivel de significancia  $\alpha = 0.10$  si  $A^2$  excede el valor del estadístico  $A_{teo} = 0.63$  (“R.B. D’Agostino, M. A. Stephens, Goodness-of-Fit Techniques, Marcel Dekker, NewYork, USA, 1996.,” 2017).

### 1.11 Superficie de respuesta

Con el fin de optimizar la  $G_f$ , se implementa la metodología de superficie de respuesta, la cual es un modelo predictivo que considera los efectos lineales, cuadráticos y la interacción existente entre la relación a/c y el %F para determinar su influencia sobre la  $G_f$ . Los términos considerados en esta metodología pueden o no ser estadísticamente significativos, por lo cual para determinar los efectos que inciden significativamente sobre la respuesta se aplica el análisis de varianza (ANOVA) a cada uno de los términos, obteniendo de esta forma la superficie de respuesta que contiene únicamente los términos significativos, conocida como superficie de respuesta depurada. Esta superficie depurada es un modelo predictivo que permite estudiar la sensibilidad de variables y en algunos casos localizar valores óptimos (Montgomery & Runger, 2002).

## 2. Resultados y Discusión

### 2.1 Ensayos en estado fresco

Los resultados promedio de las pruebas en estado fresco se muestran en la Tabla 3 junto con sus respectivas desviaciones estándar desde tres réplicas. Así mismo se indica el rango sugerido por el EFNARC para establecer un comportamiento auto-compactante del concreto.

Tabla 3.

*Resultados promedio de ensayos en estado fresco.*

<b>Mezcla (a/c-%F)</b>	<b>T-500 [s]</b>	<b>Ensayo de asentamiento [mm]</b>
M1 (0.50 - 0.50)	1.00 (0.00)*	793.33 (43.67)*
M2 (0.50 - 0.50)	1.14 (0.24)*	691.67 (62.10)*
M3 (0.43 - 0.85)	6.93 (0.98)*	576.67 (49.26)*
M4 (0.50 - 1.00)	1.62 (0.97)*	705.00 (133.98)*
M5 (0.50 - 0.50)	1.13 (0.15)*	650.00 (27.57)*
M6 (0.57 - 0.85)	2.10 (0.97)*	621.67 (123.84)*
M7 (0.50 - 0.50)	1.91 (1.17)*	583.33 (78.66)*
M8 (0.50 - 0.00)	1.12 (0.21)*	575.00 (18.71)*
M9 (0.57 - 0.15)	1.00 (0.00)*	645.00 (12.25)*
M10 (0.40 - 0.50)	3.10 (1.11)*	716.67 (21.60)*
M11 (0.60 - 0.50)	1.00 (0.00)*	701.67 (39.71)*
M12 (0.43 - 0.15)	2.43 (0.71)*	626.67 (45.02)*
M13 (0.50 - 0.50)	1.21 (0.37)*	656.67 (85.71)*

Mezcla (a/c-%F)	T-500 [s]	Ensayo de asentamiento [mm]
Z1 (0.40 - 0.00)	3.31 (2.53)*	695.00 (62.85)*
Z2 (0.43 - 0.00)	3.27 (3.21)*	673.33 (112.37)*
Z3 (0.57 - 0.00)	1.00 (0.00)*	556.67 (28.75)*
Z4 (0.60 - 0.00)	1.00 (0.00)*	556.67 (29.44)*
<b>EFNARC</b>	<b>2-5</b>	<b>650-800</b>

\* (Desviación estándar)

A partir de los resultados de los ensayos realizados en estado fresco, se deduce que las únicas mezclas que cumplen satisfactoriamente con las recomendaciones del EFNARC son M10 (0.40 - 0.50), Z1 (0.40 - 0.00) y Z2 (0.43 - 0.00). Adicionalmente, se evidencia que para mezclas con a/c = 0.43 la medida obtenida del ensayo de asentamiento disminuye conforme el %F de fibras aumenta, por otra parte, para mezclas con a/c de 0.40, 0.50 y 0.6 la medida del ensayo de asentamiento aumenta con el %F, lo que puede indicar que la presencia de fibras contribuye con la disgregación de la mezcla.

## 2.2 Ensayos en estado endurecido

**2.2.1 Ensayo a flexión de cuatro puntos.** En la Figura 3 se muestran los resultados de  $G_f$  promedio junto con sus respectivas desviaciones estándar, obtenidos a partir de los ensayos a flexión de cuatro puntos.

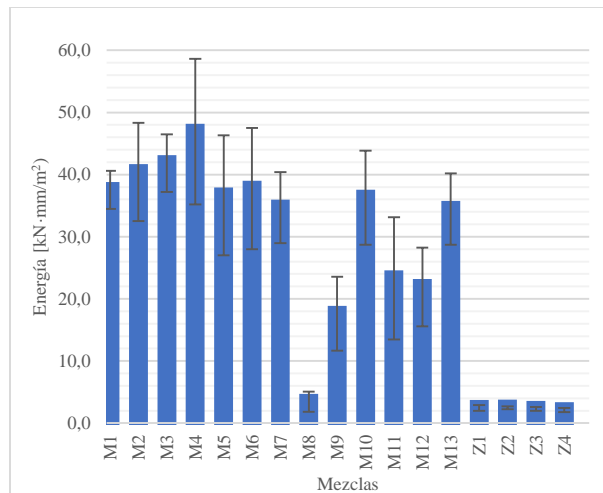


Figura 3. Resultados de energía de la fractura promedio.

De la gráfica anterior se puede evidenciar un aumento significativo de  $G_f$  con el incremento del %F para mezclas con la misma relación a/c, como es el caso de la mezcla M4 (0.50 -1.00) que presentó un aumento del 1262.40% en su  $G_f$  respecto a su correspondiente mezcla de control, esto concuerda con lo expuesto por Barros y otros (J. A. O. Barros, 1999), y se puede atribuir a que en la fisuración del concreto las fibras de acero actúan como un enlace que permite la transferencia de esfuerzos entre las partes no fisuradas del material, otorgando así integridad estructural al mismo [4], [5]. Adicionalmente, se puede observar que las mezclas con adición de fibras de acero presentan mayor desviación estándar que mezclas de control, lo cual se puede atribuir a la dispersión y orientación aleatoria que adoptan las fibras de acero en los especímenes (Dqg, 2013).

Otro de los resultados obtenidos a partir del ensayo a flexión de cuatro puntos es la resistencia a la rotura promedio mostrada en la Figura 4, donde se puede observar un incremento en resistencia a la rotura a medida que se incrementa el %F, lo cual coincide con lo reportado por Pająk y otros (Pająk & Ponikiewski, 2013). La mezcla M4 (0.50 – 1.00) presentó la mayor resistencia a la rotura y un incremento en la resistencia de 390.83% en comparación a su respectiva mezcla de control.

**2.2.2 Ensayo Barcelona** En la Figura 5 se presenta la carga máxima promedio soportada desde ensayos Barcelona a tracción indirecta. En ésta se observa como para mezclas con  $a/c = 0.43$  y  $0.60$ , la adición de fibras conlleva a una disminución en la carga máxima promedio soportada, sin embargo, para mezclas con  $a/c = 0.40$  y  $0.50$  se observa un incremento en la misma. Este incremento es debido a que a medida que se desarrollan micro grietas en la matriz, la fibra en la vecindad intentará detenerlas y evitar una mayor propagación, lo que resulta en la demanda de más energía para la propagación futura, aumentando a su vez la carga final.

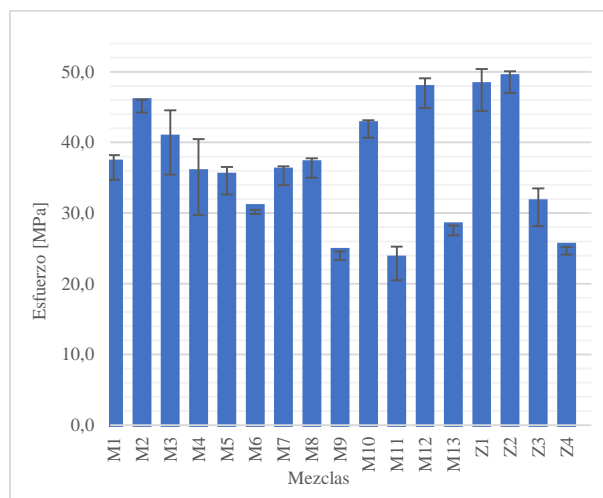


Figura 4. Resultados de resistencia a la rotura promedio desde flexión en cuatro puntos.

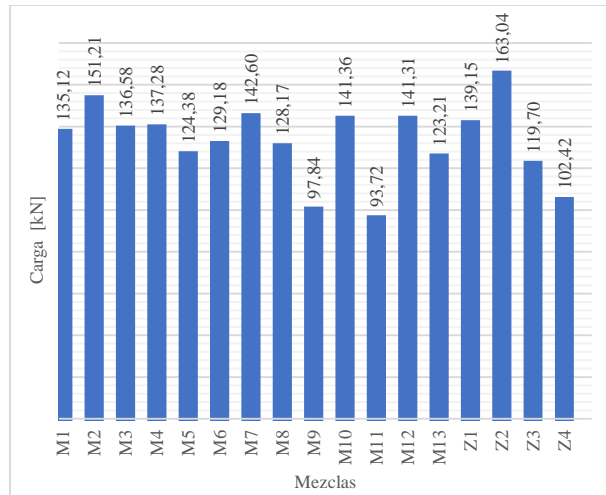


Figura 5. Resultados de carga máxima promedio desde tracción indirecta (Barcelona).

**2.2.3 Ensayo a compresión simple.** A partir de los resultados obtenidos de los ensayos de compresión simple, mostrados en la Figura 6, se puede observar como la resistencia a la rotura promedio para  $a/c = 0.5$  aumenta un 0.81% con  $\%F = 0.50\%$  y 1.13% con  $\%F = 1.00\%$  con respecto a su mezcla control, mientras que para  $a/c = 0.40, 0.43$  y  $0.60$  se evidencia una disminución de dicha propiedad bajo la adición de fibras. Esto puede deberse a la insuficiencia de matriz alrededor de las fibras para transferir los esfuerzos en el concreto a las mismas, tal como lo reporta Krishna y otros (Rao, 2010).

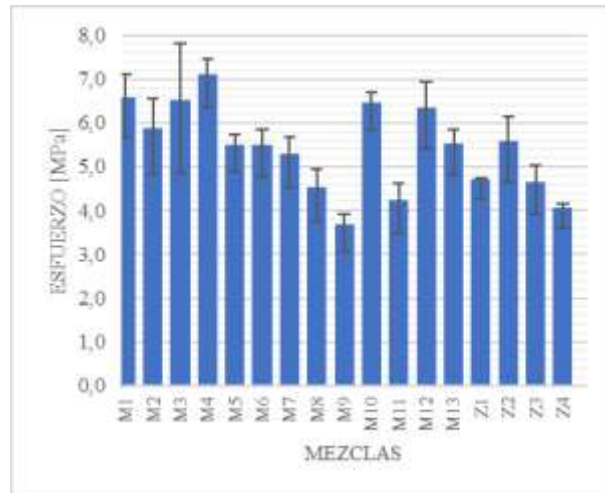


Figura 6. Resultados de resistencia a la rotura promedio desde compresión simple.

**2.2.4 Ensayo Brasileño.** En la Figura 7 se muestran los resultados de la resistencia a la rotura promedio, obtenidos a partir del ensayo Brasileño de tracción indirecta, en los cuales se puede apreciar un incremento de hasta 60.46% para la mezcla M4 (0.50 – 1.00) con base en su respectiva mezcla de control. A pesar de que el ensayo a flexión de cuatro puntos también tiene como fin medir la resistencia a la rotura promedio del material, se puede observar que para la mezcla M4 (0.50 – 1.00) éste tiene una tasa de incremento 6.46 veces mayor que el ensayo Brasileño, lo cual se puede atribuir al comportamiento de endurecimiento por deformación, tal como lo reporta Kang y otros (Kang, Park, Ryu, Koh, & Kim, 2010).

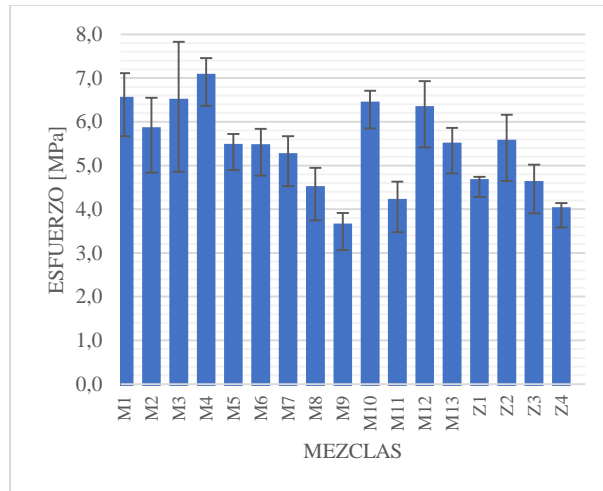


Figura 7. Resultados de resistencia a la rotura promedio desde tracción indirecta (Brasileño).

### 2.3 Curvas esfuerzo-deformación

En la Figura 9 se muestran las curvas esfuerzo-deformación de las mezclas de control y la Figura 10 se presentan las curvas esfuerzo-deformación de las mezclas con adición de fibras de acero, las cuales fueron obtenidas a partir de los ensayos Barcelona. En estas figuras se presentan los esfuerzos de tracción y sus respectivas deformaciones unitarias, ya que ésta propiedad es de interés en el estudio del SFRSCC debido a la incidencia de las fibras de acero en el material (Blanco et al., 2014).

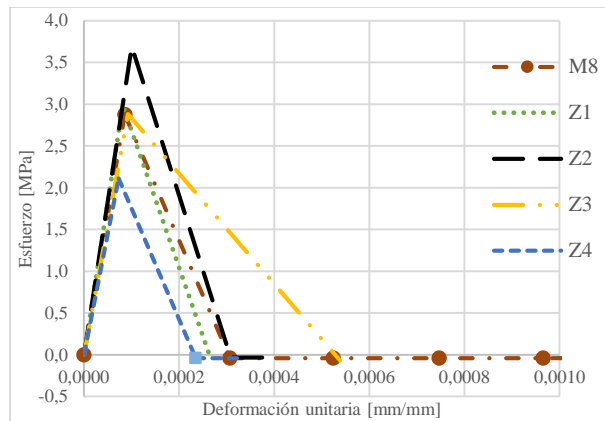


Figura 8. Curvas esfuerzo deformación de mezclas sin fibras.

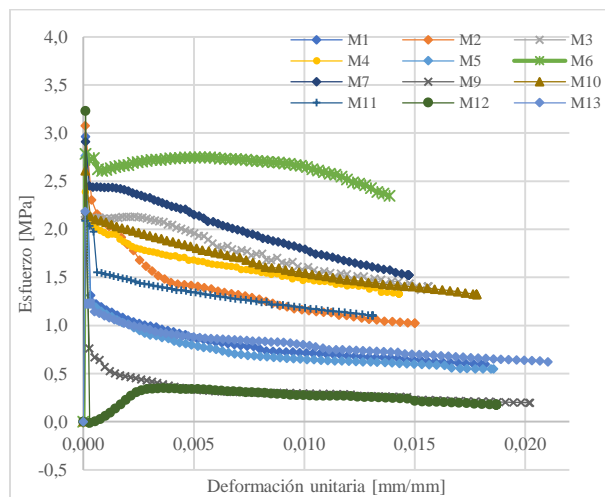


Figura 9. Curvas esfuerzo deformación de mezclas con fibras.

A partir de la Figura 9 y la Figura 10 se evidencia el aumento en la deformación unitaria del SFRSCC a medida que incrementa %F, aportando en este sentido al material un buen comportamiento mecánico después de la carga pico y permitiéndole tener control sobre la propagación de grietas (Gencil et al., 2011), alcanzando así hasta 16.50 veces mayor deformación unitaria en cuanto al SCC con ausencia de fibras de acero.

## 2.4 Optimización de la energía de la fractura

Con el fin de cuantificar el nivel de incidencia del %F y a/c sobre la  $G_f$ , obtenida a partir de los ensayos a flexión de cuatro puntos, se realiza un análisis de superficie de respuesta a través de la metodología ANOVA. Se estableció un nivel de significancia estadístico ( $\alpha = 0.10$ ).

Dado que el término bilineal del modelo completo de superficie de respuesta no fue estadísticamente significativo ( $\alpha = 0.10$ ), se genera un modelo depurado, cuyos resultados se muestran en la Tabla 5.

Tabla 4.

*Análisis ANOVA. Modelo depurado de los factores.*

Parámetro	Término		Valor P	Significancia
<b>Energía de fractura</b>	Lineal	a/c	0.014	Sí
		%F	0.000	Sí
	Cuadrado	a/c · a/c	0.044	Sí
		%F · %F	0.001	Sí
	Falta de ajuste		0.210	No
	$R^2$		71.42%	

La gráfica de superficie de respuesta y la ecuación del modelo depurado de la  $G_f$  se presentan en la Figura 11 y la Ecuación (43).

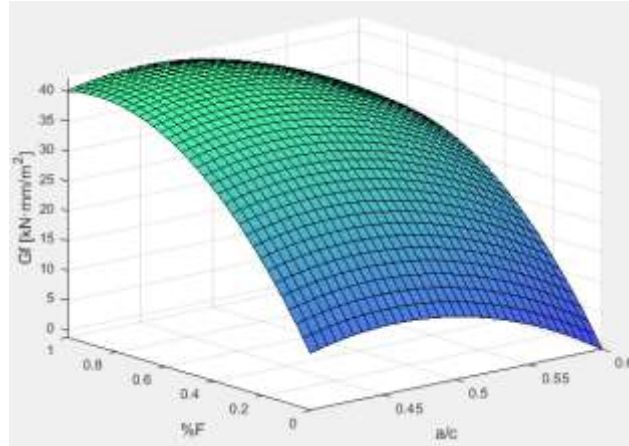


Figura 10. Superficie de respuesta del modelo depurado de  $G_f$ .

$$G_f = -113.2 + 534 \cdot a/c + 77.7 \cdot \%F - 581 \cdot a/c^2 - 41.8 \cdot \%F^2 \quad (43)$$

En los resultados consignados en la Tabla 6 se puede apreciar que tanto el factor  $a/c$  como  $\%F$  tienen significancia estadística, es decir,  $G_f$  se ve afectada por los dos factores en estudio. La capacidad de predicción de la superficie de respuesta realizada permitió localizar un valor máximo de  $G_f$  de 45.61 [ $\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}^2$ ] con una relación  $a/c=0.46$  y  $\%F=0.93$ . Cabe aclarar que este valor máximo obtenido es válido para los dominios de estudio seleccionados en esta investigación, los cuales son 0.40 a 0.60 para  $a/c$  y 0.00% a 1.00% para  $\%F$ .

Para garantizar la validez del análisis presentado, se revisaron los supuestos de ANOVA sobre los residuales del modelo depurado: (i) los datos siguen una distribución normal, (ii) las varianzas son iguales y (iii) las observaciones son independientes. Este análisis se muestra en la Tabla 6.

Tabla 5.

Verificación de supuestos de ANOVA.

Test estadístico ( $\alpha=0.1$ )						
Parámetro	Anderson-Darling		Barlett		Durbin-Watson	
<b>Energía de fractura</b>			Estadístico	10.01	Estadístico	1.953
	P =	0.109	P =	0.265	dL = 1.337	dU = 1.413
	Se acepta la Ho		Se acepta la Ho		Se acepta la Ho	
	La distribución es normal		Las varianzas son iguales		Las observaciones son independientes	

### 2.5 Estimación de parámetros de Weibull

En la Tabla 7 se presenta el análisis estadístico de Weibull llevado a cabo en esta investigación, donde se muestran los parámetros estimados con mejor ajuste según las pruebas estadísticas  $R^2$ ,  $G^2$  y  $A^2$ , además de su respectivo método de cálculo.

Tabla 6.

*Resultados del análisis estadístico y parámetros de Weibull con mejor ajuste*

Mezcla (a/c-%F)	Mejor ajuste	Método	Pruebas de bondad de ajuste			Parámetros estimados		
			R <sup>2</sup>	G <sup>2</sup>	A <sup>2</sup>	λ	β	φ
M1 (0.50 - 0.50)	We2	MPP	0.15	0.37	0.23	12.93	39.07	0.00
M2 (0.50 - 0.50)	We2	MM	0.26	2.50	0.37	5.94	43.59	0.00
M3 (0.43 - 0.85)	We3	MPP	0.87	0.18	0.30	0.94	5.35	36.34
M4 (0.50 - 1.00)	We2	MMV	0.20	0.45	0.32	5.58	50.92	0.00
M5 (0.50 - 0.50)	We2	MPP	0.38	0.21	0.22	3.75	40.60	0.00
M6 (0.57 - 0.85)	We2	MPP	0.88	0.03	0.36	4.06	41.60	0.00
M7 (0.50 - 0.50)	We2	MG	0.24	1.97	0.46	6.34	37.22	0.00
M8 (0.50 - 0.00)	We3	MM	0.96	0.01	0.23	2.21	3.85	0.03
M9 (0.57 - 0.15)	We2	MPP	0.21	2.17	0.37	2.98	19.72	0.00
M10 (0.40 - 0.50)	We3	MPP	0.75	1.52	0.33	0.78	6.61	28.64
M11 (0.60 - 0.50)	We3	MPP	0.96	0.02	0.19	1.46	18.34	6.69
M12 (0.43 - 0.15)	We2	MG	0.45	0.13	0.23	3.59	46.90	0.00
M13 (0.50 - 0.50)	We3	MPP	0.91	1.16	0.42	0.52	2.39	29.97
Z1 (0.40 - 0.00)	We3	MPP	0.85	0.24	0.32	0.84	0.45	1.95
Z2 (0.43 - 0.00)	We2	MPP	0.97	0.02	0.36	11.43	2.59	0.00
Z3 (0.57 - 0.00)	We2	MG	0.54	1.74	0.66	7.10	4.59	0.00
Z4 (0.60 - 0.00)	We3	MM	0.04	0.75	0.17	3.52	1.13	1.09

De la Tabla 7 se puede apreciar que el módulo de Weibull en los puntos experimentales que se ajustaron a We2 presentó una variación entre 2.98 (mínimo) y 12.93 (máximo). Así mismo, en los puntos experimentales que se ajustaron a We3, el módulo de Weibull presentó una variación entre 0.52 (mínimo) y 3.52 (máximo). En los valores promedio de los módulos de Weibull, We2 = 6.37 y We3 = 1.47, se observa una variación considerable en las magnitudes de los mismos, como se ha expuesto en investigaciones previas (Zapata-Ordúz et al., 2014). Esto demuestra el hecho de que los módulos de Weibull son sensibles a los diferentes tipos de metodología de estimación de parámetros que se implementen y se debe tener especial atención al comparar valores ya que su diferencia es considerable (Zapata-Ordúz et al., 2014).

Cabe resaltar, que para mezclas con relación a/c de 0.4, 0.43 y 0.6, los valores del módulo de Weibull se ajustaron a We3 y se ven disminuidos con la adición de fibras de acero, lo que podría indicar que esta adición conlleva a un aumento de dispersión de los datos de  $G_f$  obtenidos. Por otra

parte, la adición de fibras de acero en la mezcla central ( $a/c = 0.50$ ,  $\%F = 0.50\%$ ) presenta una variación considerable en los valores del módulo de Weibull en un rango de 0.52 a 12.93, además de tener un ajuste del 52.14% a  $We_2$  y 42.86% a  $We_3$ ; lo cual impide un apropiado análisis de este punto experimental.

Adicionalmente, se puede apreciar que el método MPP representa el 58.82% de los puntos experimentales ajustados, seguido por MM y MG que representan el 17.65% de los puntos ajustados cada uno y finalmente se tiene MMV con un 5.88% de los tratamientos ajustados al modelo. Debido a esto, se puede afirmar que el método de estimación con mejor ajuste al modelo de Weibull es MPP, lo cual coincide con lo reportado por Zapata y otros (Zapata-Ordúz et al., 2014), y se puede atribuir al alto potencial matemático que implican las ecuaciones no lineales empleadas en este método junto con la efectividad en la convergencia del método de Halley.

### 3. Conclusiones

El presente proyecto de investigación estudió el comportamiento en estado endurecido de mezclas de concreto auto-compactante reforzadas con fibras de acero, con dominios de relación agua cemento de 0.4 a 0.6 y porcentaje de fibras de 0.0% a 1.0% (fracción del volumen total de la mezcla). Se realizó un diseño estadístico de experimentos junto a la metodología de superficie de respuesta y un análisis ANOVA utilizando un nivel de significancia de 0.10. Adicionalmente, se realizó un análisis estadístico mediante la distribución de Weibull. Con base en los resultados obtenidos de ensayos realizados es posible concluir que:

Dentro de los dominios planteados en esta investigación para los dos factores estudiados, relación agua/material cementante y porcentaje de fibras, se evidenció que son estadísticamente significativos e inciden de forma lineal y cuadrática en la magnitud de la energía de fractura del material.

La adición de fibras de acero al concreto auto-compactante mejora el comportamiento mecánico del material después de la carga pico, permitiéndole tener control sobre la propagación de grietas y alcanzando hasta 16.50 veces mayor deformación comparado con el concreto auto-compactante en ausencia de fibras de acero.

Es posible obtener curvas esfuerzo deformación del concreto auto-compactante reforzado con fibras de acero que cumplen con los estándares y pautas ingenieriles, a partir de ensayos no convencionales como el ensayo Barcelona de tracción indirecta.

Con la superficie de respuesta generada en esta investigación fue posible calcular el valor de la pareja de puntos ( $a/c=0.46$ ,  $\%F=0.96$ ) con el cual se obtiene el máximo valor de energía de fractura de  $45.61 \text{ [kJ}\cdot\text{m/m}^2\text{]}$ , entre los dominios de estudio seleccionados para los factores en esta investigación.

El método de estimación de parámetros Momentos Ponderados de Probabilidad destaca entre los cuatro métodos empleados en esta investigación, ya que es el que provee un mejor ajuste a la distribución de Weibull.

### Referencias Bibliográficas

- 211, A. C. I. C. (1991). *Standard Practice for Selecting Proportions for Normal, Heavyweight, and Mass Concrete*. (Reapproved), 1–38.
- A. D. de Figueiredo and M. R. Ceccato, “Workability Analysis of Steel Fiber Reinforced Concrete Using Slump and Ve-Be Test,” *Mater. Res.*, vol. 18, no. 6, pp. 1284–1290, 2015. (n.d.).
- A. D. de Figueiredo and M. R. Ceccato, “Workability Analysis of Steel Fiber Reinforced Concrete Using Slump and Ve-Be Test,” *Mater. Res.*, vol. 18, no. 6, pp. 1284–1290, 2015. (2016). <https://doi.org/10.3390/nano6120241>
- Ag-, C., Concrete, C., & Concrete, C. (2012). *Standard Practice for Fabricating Test Specimens with Self-Consolidating. i(c)*, 1–2. <https://doi.org/10.1520/C1758>
- Ag-, C., Statements, B., & Pycnometer, W. (2017). *Standard Test Method for Relative Density ( Specific Gravity ) and Absorption of Fine. i*, 1–6. <https://doi.org/10.1520/C0128-15.2>
- Alhussainy, F., Hasan, H. A., Rogic, S., Sheikh, M. N., & Hadi, M. N. S. (2016). Direct tensile testing of Self-Compacting Concrete. *Construction and Building Materials*, 112, 903–906. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2016.02.215>
- ASTM. (2012). *ASTM C1609/C1609M - Standard Test Method for Flexural Performance of Fiber-Reinforced Concrete (Using Beam With Third-Point Loading)*. 1–9. <https://doi.org/10.1520/C1609>
- ASTM C128. (2015). C0127 - Standard Test Method for Relative Density (Specific Gravity) and Absorption of Coarse Aggregate. *ASTM International*, 5. <https://doi.org/10.1520/C0127-15.2>

- ASTM C1609/C 1609M. (2005). "Standard Test Method for Flexural Performance of Fiber-Reinforced Concrete ( Using Beam With Third-Point Loading )." *ASTM International*, i(C 1609/C 1609M-05), 1–8. <https://doi.org/10.1520/C1609>
- ASTM C39. (2016). "Standard Test Method for Compressive Strength of Cylindrical Concrete Specimens." *ASTM International*, 1–7. <https://doi.org/10.1520/C0039>
- ASTM C496/C496M-11. (2011a). ASTM C496-11 Standard Test Method for Splitting Tensile Strength of Cylindrical Concrete Specimens. *Annual Book of ASTM Standards Volume 04.02*, 1–5. <https://doi.org/10.1520/C0496>
- ASTM C496/C496M-11. (2011b). "Standard Test Method for Splitting Tensile Strength of Cylindrical Concrete Specimens." *ASTM International*, 5. <https://doi.org/10.1520/C0496>
- ASTM International. (2017). Astm C188-17. *Annual Book of ASTM Standards*, 1–3. <https://doi.org/10.1520/C0188-17.2>
- Basheerudeen, A., & Anandan, S. (2015). Simplified mix design procedures for steel fibre reinforced self compacting concrete. *Engineering Journal*, 19(1), 21–36. <https://doi.org/10.4186/ej.2015.19.1.21>
- Blanco, A., Pujadas, P., Cavalaro, S., Fuente, A. De, & Aguado, A. (2014). Cement & Concrete Composites Constitutive model for fibre reinforced concrete based on the Barcelona test. *CEMENT AND CONCRETE COMPOSITES*, 53, 327–340. <https://doi.org/10.1016/j.cemconcomp.2014.07.017>
- C136, A., & ASTM C136. (2014). Standard Test Method for Sieve Analysis of Fine and Coarse Aggregates. *Annual Book of ASTM Standards*, 1–5. <https://doi.org/10.1520/C0136>
- Chaurasiya, P. K., Ahmed, S., & Warudkar, V. (2018). Study of different parameters estimation methods of Weibull distribution to determine wind power density using ground based Doppler SODAR instrument. *Alexandria Engineering Journal*, 57(4), 2299–2311. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2017.08.008>

- Concrete, P. (2003). Standard Test Methods for Sampling and Testing Fly Ash or Natural Pozzolans for Use. *Glass*, 04, 1–9. <https://doi.org/10.1520/C0311>
- Cressie, N., & Read, T. R. C. (2006). Pearson's  $X^2$  and the Loglikelihood Ratio Statistic  $G^2$ : A Comparative Review. *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique*, 57(1), 19. <https://doi.org/10.2307/1403582>
- Dario, P., Caiza, T., & Ummenhofer, T. (2011). General probability weighted moments for the three-parameter Weibull Distribution and their application in S – N curves modelling. *International Journal of Fatigue*, 33(12), 1533–1538. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2011.06.009>
- Datsiou, K. C., & Overend, M. (2018). Weibull parameter estimation and goodness-of-fit for glass strength data. *Structural Safety*, 73, 29–41. <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2018.02.002>
- de Vasconcelos, V., Soares, W. A., da Costa, A. C. L., & Raso, A. L. (2019). Deterministic and Probabilistic Safety Analyses. In *Advances in System Reliability Engineering*. <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-815906-4.00002-6>
- Deng, B., Jiang, D., & Gong, J. (2018). Is a three-parameter Weibull function really necessary for the characterization of the statistical variation of the strength of brittle ceramics? *Journal of the European Ceramic Society*, 38(4), 2234–2242. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2017.10.017>
- Dqg, R. (2013). *Properties of Steel Fibre Reinforced Self-compacting Concrete for Optimal Rheological and Mechanical Properties in Precast Beams*. 65, 290–295. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.09.045>
- F. AD, *Concreto reforzado con fibras, Tesis de docencia.*, Sao Paulo: Universidad de Sao Paulo, 2011. (n.d.).
- Figueiredo, A. D. de, & Ceccato, M. R. (2015). Workability Analysis of Steel Fiber Reinforced Concrete Using Slump and Ve-Be Test. *Materials Research*, 18(6), 1284–1290. <https://doi.org/10.1590/1516-1439.022915>

- Gencil, O., Brostow, W., Datashvili, T., & Thedford, M. (2011). Workability and mechanical performance of steel fiber-reinforced self-compacting concrete with fly ash. *Composite Interfaces*, 18(2), 169–184. <https://doi.org/10.1163/092764411X567567>
- Ghasemi, M., Ghasemi, M. R., & Mousavi, S. R. (2018). Investigating the effects of maximum aggregate size on self-compacting steel fiber reinforced concrete fracture parameters. *Construction and Building Materials*, 162, 674–682. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.11.141>
- Hafiz, M. A., & Bahgat, M. (2012). *Extended and modified Halley 's iterative method for solving non linear equations.* (August 2014). <https://doi.org/10.13140/2.1.5138.1126>
- J. A. O. Barros, and J. A. F. (1999). “Flexural behavior of sfrc: testing and modeling”, *journal of materials in civil engineering*. 11(November), 331–339.
- Kang, S., Park, J., Ryu, G., Koh, G., & Kim, S. W. (2010). *Comparison of Tensile Strengths with Different Test Methods in Ultra High Strength Steel-Fiber Reinforced Concrete ( UHS-SFRC ).* 649–652. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.417-418.649>
- Montgomery, D. C., & Runger, G. C. (2002). *Douglas C.Montgomery, Applied Statistics and probability for engineers.pdf.*
- Murthy, D. N. P., Min Xie, & Jiang, R. (n.d.). “Weibull Models”, *John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2004.*
- Nielsen, M. A. (2011). *Parameter Estimation for the Two-Parameter Weibull Distribution.*
- Normalización, A. E. de. (2006). “UNE 83515” - *Fibre reinforced concrete determination of cracking strength, ductility and residual tensile strength - Barcelona test.* 1–7.
- O. M. Ozawa Kazumasa, «*Proceedings of the international workshop on self-compacting concrete,*» de *International workshop on self-compacting concrete, Tokyo, Japan, 1999.* (n.d.).

- Oikonomou-mpegetis, S. (2013). Behaviour and Design of Steel Fibre Reinforced Concrete Slabs. *Behaviour and Design of Steel Fibre Reinforced Concrete Slabs*, 1–352.
- Pajał, M., & Ponikiewski, T. (2013). Flexural behavior of self-compacting concrete reinforced with different types of steel fibers. *Construction and Building Materials*, 47, 397–408. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2013.05.072>
- Persson, B. (2001). A comparison between mechanical propel-ties of self-compacting concrete and the corresponding properties of normal concrete. *Cement and Concrete Research*, 31(2), 193–198. [https://doi.org/10.1016/S0008-8846\(00\)00497-X](https://doi.org/10.1016/S0008-8846(00)00497-X)
- R.B. D'Agostino, M. A. Stephens, Goodness-of-Fit Techniques, Marcel Dekker, New York, USA, 1996. (2017). *Construction and Building Materials*, 144, 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.03.049>
- R.E. Smallman, A.H.W. Ngan, *Physical Metallurgy and Advanced Material*, 7th ed., Butterworth-Heinemann (Elsevier), Linacre House, Jordan Hill, Oxford, 2007. (n.d.). <https://doi.org/10.3846/13923730.2012.756425>
- Rao, B. K. (2010). Steel fibre reinforced self-compacting concrete incorporating class F fly ash. *International Journal of Engineering Science and Technology*, 2(9), 4936–4943.
- Recommendation, F. (2002). Rilem TC 162-TDF: Test and design methods for steel fibre reinforced concrete - Bending test. *Materials and Structures/Materiaux et Constructions*, 35(253), 579–582. <https://doi.org/10.1617/13884>
- RIBEIRO, R. R. J., DIÓGENES, H. J. F., NÓBREGA, M. V., & DEBS, A. L. H. C. EL. (2016). A survey of the mechanical properties of concrete for structural purposes prepared on construction sites. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, 9(5), 722–744. <https://doi.org/10.1590/s1983-41952016000500005>
- Roesler, J., Harders, H., & Baeker, M. (2007). *Mechanical Behaviour of Engineering Materials*. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-73448-2>

- The European Project Group. (2005). The European Guidelines for Self-Compacting Concrete: Specification, Production and Use. *The European Guidelines for Self Compacting Concrete*, (May), 63. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2018.03.033>
- Usta, I., Arik, I., Yenilmez, I., & Kantar, Y. M. (2018). A new estimation approach based on moments for estimating Weibull parameters in wind power applications. *Energy Conversion and Management*, 164(January), 570–578. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2018.03.033>
- Yazici, Ş., Inan, G., & Tabak, V. (2007). Effect of aspect ratio and volume fraction of steel fiber on the mechanical properties of SFRC. *Construction and Building Materials*, 21(6), 1250–1253. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2006.05.025>
- Zapata-Ordúz, L. E., Portela, G., & Suárez, O. M. (2014). Weibull statistical analysis of splitting tensile strength of concretes containing class F fly ash, micro/nano-SiO<sub>2</sub>. *Ceramics International*, 40(5), 7373–7388. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2013.12.083>