EL DISEÑO DE JUEGOS PERSONALES: UN MEDIO PARA ALCANZAR EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO CON FRACCIONES EQUIVALENTES

RODRIGO CARRILLO CAICEDO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2007

EL DISEÑO DE JUEGOS PERSONALES: UN MEDIO PARA ALCANZAR EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO CON FRACCIONES EQUIVALENTES

RODRIGO CARRILLO CAICEDO

Trabajo de grado para optar al título de
Especialista en Educación Matemática

DIRECTOR:
Esp. DANIEL MORENO CAICEDO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2007

A Dios, mi guía y fortaleza.

A mis padres, Luis y Cristina,

por su gran amor durante toda la vida.

AGRADECIMIENTOS

Expreso mis agradecimientos a:

Al Señor Dios Todo Poderoso, por la sabiduría, inteligencia y demás bendiciones recibidas.

A mis padres, por la formación recibida de su parte.

A mis hermanos y sobrinos, por su continuo apoyo y compañía.

A la Universidad Industrial de Santander y la Escuela de Matemáticas, por darme el privilegio de seguir creciendo en mi formación personal.

A Daniel Moreno Caicedo, director de este trabajo, por su continuo apoyo, motivación y colaboración.

Al Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana Sede C, por permitirme llevar a cabo este precioso trabajo.

A Jonathan Ferney, July Victoria, Mónica Yeraldin, Brayan Leonardo y Karen Tatiana, por ser los personajes principales del presente trabajo.

CONTENIDO

Página

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

1. TITULO: EL DISEÑO DE JUEGOS PERSONALES: UN MEDIO PARA ALCANZAR EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO CON FRACCIONES EQUIVALENTES*.

2. AUTOR: RODRIGO CARRILLO CAICEDO**

3. PALABRAS CLAVE:

Diseño de juegos
Fracciones equivalentes
Creatividad
Aprendizaje Significativo
Matemáticas

4. DESCRIPCIÓN O CONTENIDO: Se podría afirmar que una de las posibles causas para que los estudiantes no aprendan realmente las matemáticas, se debe a que se dedican a aprender cosas de memoria y no a interiorizar y asimilar realmente los conceptos que le son presentados. Es ahí donde se observa la necesidad que el aprendizaje de los estudiantes sea realmente significativo, es decir, que los conceptos que van adquiriendo los interioricen y relacionen de manera sustancial con otros conceptos que ya poseen ellos en su estructura cognitiva; siendo esta la condición básica que expresan algunos autores para que se produzca un aprendizaje significativo, (Ausubel, Novak & Hanesian, 1989).

Surge entonces, el deseo de buscar que los estudiantes mejoren el aprendizaje de conceptos matemáticos. Por esto, buscando mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, se han venido ideando nuevos métodos de enseñanza; especialmente en las últimas décadas se le ha dado gran realce a los juegos y actividades lúdicas dentro del aula de clase.

En este trabajo, se explorará y analizará el diseño de juegos matemáticos por parte del estudiante dentro de su proceso de aprendizaje de fracciones equivalentes, buscando alcanzar el aprendizaje significativo en dicho tema, es decir, que los estudiantes asimilen e interioricen aún más los conceptos matemáticos involucrados; se reforzará y complementará ciertos conocimientos previos en el estudiante. Los diseños se elaborarán en varias fases, en el paso de una a otra se corregirán las concepciones erróneas que muestren los estudiantes y se irá observando el progreso que están obteniendo en su proceso de aprendizaje sobre el tema mencionado.

---

* Trabajo de grado
** Facultad de Ciencias. Especialización en Educación Matemática. MORENO, Daniel

SUMMARY

1. TITLE: THE DESIGN OF PERSONAL GAMES: A MEANS TO REACH THE SIGNIFICANT LEARNING WITH EQUIVALENT FRACTIONS *.

2. AUTHOR: RODRIGO CARRILLO CAICEDO**

3. KEY WORDS:
Design of games
Equivalent fractions
Creativity
Significant learning
Mathematics

4. DESCRIPTION OR CONTENT: It could be affirmed that one of the possible causes so that the students do not really learn the mathematics, it is due to that they are devoted to learn things by heart but they do not interiorize and do not really assimilate the concepts that are presented to them. It is there where the necessity is observed that the learning of the students is really significant, that is, it is necessary that the students interiorize the concepts that they are acquiring and relate them in a substantial way with other concepts that they already possess in their cognitive structure; being this the basic condition that some authors express so that a significant learning takes place, (Ausubel, Novak & Hanesian, 1989).

It arises then, the desire of looking for the students improve in their learning of mathematical concepts. For this reason, looking for improving the teaching process and learning, it is being created new teaching methods; especially in the last decades it has been given great enhances to the games and recreational activities inside the classroom.

In this work, it will be explored and analyzed the design of mathematical games on the part of the student inside their process of learning of equivalent fractions, looking for reaching the significant learning in this topic, that is, the students assimilate and interiorize even more the involved mathematical concepts; it will be reinforced and supplemented certain previous knowledge in the student. The designs will be elaborated in several phases, in the step of one to other the erroneous conceptions will be corrected and it will be observed the progress that the students are obtaining in their learning process on the mentioned topic.

* Work of degree
* * Ability of Sciences. Specialization in Mathematical Education. MORENO, Daniel

¿DISEÑO DE JUEGOS?

"Se aprende más sobre las personas jugando con ellas una hora, que conversando todo un año"
Platón, citado por Duque (2003, p.86)

Desde hace décadas entre las preocupaciones de los docentes de matemáticas, ha estado el bajo rendimiento de los estudiantes en esta área de estudio, la poca comprensión de los temas tratados y la imposibilidad de aplicarlos en la vida diaria; es muy común encontrar estudiantes de los últimos grados de secundaria que se les dificulta desarrollar operaciones que conlleven el empleo de la suma o resta de fracciones heterogéneas; es fácil encontrar respuestas como la siguiente:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{6}{8}$$

Se podría pensar que el estudiante está intentando aplicar en forma mecánica un algoritmo que le fue enseñado en las operaciones con fracciones, como sería el caso de la multiplicación, en la cual se multiplica numerador con numerador y denominador con denominador; pero sin detenerse a analizar el caso de una suma de fracciones, ni aún establecer la diferencia entre fracciones homogéneas y heterogéneas.

Surge entonces la idea que para alcanzar un buen proceso de aprendizaje se necesita de un buen proceso de enseñanza; cabe citar en este momento lo expuesto por Ausubel: *"La facilitación del aprendizaje es tan sólo uno de los fines propios de la enseñanza"* (Ausubel, Novak & Hanesian, 1989, p. 26). Por lo cual nuestra preocupación como docentes no debe centrarse exclusivamente en mejorar el proceso de enseñanza, sino también debemos observar con atención cómo se va desarrollando el proceso de aprendizaje en nuestros estudiantes.

Según lo expuesto anteriormente debe ser importante para el docente tomar en cuenta al estudiante en todo su ser, es decir, mirar en él sus diferentes capacidades, su intelectualidad, su motivación, su grado de afectividad, su capacidad creativa y otras características más, que sin duda hallaremos en los estudiantes cuando nos dedicamos a analizarlos debidamente; debemos tener presente por lo tanto que él no es solo un receptor de información, sino que es un intercomunicador y que entre los dos se llegará a mejorar y optimizar este proceso de enseñanza y aprendizaje. Así lo afirma Ausubel cuando señala el momento en que la enseñanza se vuelve eficaz:

> *"La enseñanza en sí es eficaz tan sólo en la medida en que manipula eficientemente las variables psicológicas que gobiernan el aprendizaje".* (Ausubel et al., 1989, p. 26).

En busca de mejorar este proceso de enseñanza y aprendizaje se han venido ideando nuevos métodos de enseñanza. Especialmente en las últimas décadas se le ha dado gran realce a los juegos y actividades lúdicas dentro del aula de clase, así lo confirma la siguiente autora:

> *"Científicos procedentes de distintas disciplinas: psicólogos, pedagogos, didactas, matemáticos, etc., coinciden en que la actividad lúdica constituye una pieza clave en el desarrollo integral del niño."* (Basté, 2006**).**

A raíz de todo lo anterior surge el deseo de buscar que los estudiantes se motiven más hacia las matemáticas, le tengan más agrado y al mismo tiempo mejoren en su aprendizaje y asimilación de conceptos. Por tal razón y buscando complementar en los estudiantes, el aprendizaje memorístico al cual ellos están tan acostumbrados, se empezó a realizar lecturas acerca del aprendizaje significativo y cómo encontrar medios para lograr que dicho aprendizaje se produzca en los estudiantes; se optó por examinar un poco los juegos en el aula de clase en busca de alcanzar ese aprendizaje significativo; se encontró en la literatura mucho acerca de juegos y actividades lúdicas, ciertos juegos aplicados a enseñar temas específicos de la matemática, pero muy poco la verdad sobre cómo aprenden nuestros estudiantes si ellos mismos son los creadores o diseñadores de dichos juegos, por esto decidimos presentar este trabajo que se ha titulado: **"El diseño de juegos personales: Un medio para alcanzar el aprendizaje significativo con fracciones equivalentes"**, en el cual los estudiantes serán los diseñadores de sus propios juegos.

Se podría afirmar que una de las posibles causas para que nuestros estudiantes no aprendan realmente las matemáticas se debe a que se dedican a aprender cosas de memoria y no a interiorizar y asimilar realmente los conceptos que le son presentados. Con frecuencia el docente se encuentra con estudiantes, incluso de los grados superiores, que al estar desarrollando algún problema de los temas vistos en el área, debe realizar operaciones con números racionales y no sabe cómo realizar una suma o resta entre estos; en muchas ocasiones se ve que no saben operar si los racionales son de igual denominador y peor aún si tienen distinto denominador; en este momento es cuando el docente entiende que el estudiante realmente no comprendió el tema, no lo asimiló, en una palabra, no tuvo un aprendizaje significativo. Por esta circunstancia y muchas otras similares con las cuales los docentes nos encontramos a diario en las aulas de clase, nos llevó a plantear la siguiente pregunta:

¿CÓMO EL DISEÑO DE JUEGOS POR PARTE DEL ESTUDIANTE LE PUEDE AYUDAR A OBTENER UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO CON FRACCIONES EQUIVALENTES?

La misma forma como nuestro sistema educativo ha estado estructurado por mucho tiempo, quizás no ha ayudado a que las circunstancias antes mencionadas mejoren, porque siempre hemos creído que los juegos deben estar fuera de las aulas de clase para que se produzca un verdadero aprendizaje, así lo corroboran los siguientes autores al afirmar:

> *"… la escuela actual por su carácter formal y represivo rompe con la relación natural juego-conocimiento e introduce entre ellos una oposición radical hasta el extremo de asociar conocimiento con seriedad, y juego con ocio e improductividad."*
> *(Jiménez, Dinello & Alvarado, 2000, p. 86).*

Por esta razón decidimos establecer el siguiente objetivo para el actual trabajo de investigación: **ANALIZAR Y EXPLORAR EL DISEÑO DE JUEGOS COMO MEDIO PARA ALCANZAR UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO CON FRACCIONES EQUIVALENTES.**

Como fue comentado, si se desea hablar de tipos de aprendizaje se tendrían que mirar dos grandes clasificaciones por así decirlo, que serían el aprendizaje repetitivo o memorístico y el aprendizaje significativo. El primero es el que con mayor frecuencia encontramos en nuestros estudiantes; es fácil encontrar estudiantes que enuncian ciertos conceptos o afirmaciones que han aprendido de memoria pero sin tener una comprensión real de lo que están diciendo. Es ahí donde observamos la necesidad de que el aprendizaje de los estudiantes sea realmente significativo, es decir, que los conceptos que van adquiriendo los interioricen y relacionen de manera sustancial con otros conceptos que ya poseen ellos en su estructura cognitiva; siendo esta la condición básica que expresa Ausubel para que se produzca un aprendizaje significativo:

> *"La esencia del proceso del aprendizaje significativo reside en que ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe."* (Ausubel et al., 1989, p. 48).

Ahora, ¿Por qué recurrir a los juegos y la lúdica para alcanzar un aprendizaje significativo? Son varias las razones, inicialmente se podría decir que en este ambiente se presenta una distensión por parte del estudiante, se encuentra él en un ambiente diferente que le produce satisfacción, diversión, al mismo tiempo que le permite ser más espontáneo y libre; no es un ambiente tan frío y represivo como el de una clase tradicional donde en muchas ocasiones se le coarta su libertad y creatividad; pero no todo es risa y diversión ya que también es un espacio de aprendizaje, espacio que le exigirá al educando esfuerzo, atención, análisis y deducciones según sean enfocados los diferentes juegos empleados. Hay muchos autores a nivel mundial que defienden el empleo de la lúdica en el salón de clase como medio de aprendizaje, así lo afirma la siguiente autora*:*

> *"… y he comprobado también como algunos juegos se han convertido en poderosas herramientas de aprendizajes matemáticos."*
> (Basté, 2006**).**

El hecho no es entonces simplemente poner a jugar a los estudiantes para que se distraigan, sino buscar que a través del juego ellos obtengan un aprendizaje, que adquieran conocimientos, por esta razón nos parece pertinente citar las palabras de los siguientes autores:

> *"El juego que hace parte de la lúdica, es un sendero abierto a los sueños, a los conocimientos, a las incertidumbres, al sin sentido, a la libertad y por lo tanto a la creatividad humana."*
> (Jiménez et al., 2000, p. 17).

En la literatura se puede encontrar bastante información sobre el empleo de los juegos dentro del aula de clase, pero desde nuestro punto de vista deseamos enfocarlo por la parte del diseño del juego como tal; creemos que si un estudiante aprende conceptos matemáticos con un determinado juego, será mayor su comprensión y asimilación de conceptos si es él mismo quien se dedique a crear o diseñar el juego para un tema específico del área de estudio, en este caso las matemáticas; de esta manera se estará convirtiendo el aula de clase en una especie de taller donde el estudiante podrá encontrar todas las herramientas necesarias para poder desarrollar al máximo su potencial imaginativo, creativo y así mismo alcanzar un aprendizaje significativo, ya que tendrá necesidad en muchas ocasiones de ir a leer, releer, pensar, repensar sobre los conocimientos que ya poseía y relacionarlos de alguna manera sustancial con los conocimientos nuevos que está adquiriendo; le será imprescindible como diseñador que va a ser del juego, que sus conocimientos sobre el tema le estén totalmente claros, pues de esta manera el juego producido tendrá esta misma característica, claridad, y así podrá transmitir ese mismo conocimiento a otras personas que vayan a emplear el juego por él diseñado.

De esta manera el estudiante se verá enfrentado a un verdadero problema, ya que necesitará perfeccionar al máximo su aprendizaje para poder dar creación al juego; se le presentarán unas exigencias mayores que lo retarán en cierta forma a desarrollar y poner en funcionamiento toda su capacidad;

mirándolo desde el punto de vista del juego estos autores dicen lo siguiente al respecto*:*

> *"En síntesis, el juego ideal para el aprendizaje es aquel cuyas exigencias son mayores a las habituales. Si el juego exige demasiado poco, el niño se aburre. Si tiene que ocuparse de muchas cosas se vuelve ansioso."* (Jiménez et al., 2000, p. 78).

Decidimos tomar para el título la palabra diseño, en lugar de otras como creación o invención, en primer lugar porque los actos de creación le corresponden al Todo Poderoso, en segundo lugar porque la palabra diseñar como la define el Diccionario de la Real Academia Española (tomado de Microsoft Encarta, 2006) es *"hacer un diseño"*, y a su vez un diseño es definido como *"la traza o delineación de una figura, o como la concepción original de un objeto u obra destinados a la producción en serie"*; asimismo optamos por tomar la palabra medio porque como la define el mismo diccionario, es *"aquella acción conveniente para conseguir algo, o alguna cosa que puede servir para determinado fin"*; como se va a alcanzar un aprendizaje significativo, el medio que se va a emplear para alcanzarlo es el diseño de juegos matemáticos.

El objeto de la investigación es el diseño de juegos matemáticos por parte del estudiante, vistos como un medio para que pueda alcanzar un aprendizaje significativo en matemáticas; este medio se podrá emplear en cualquier tema matemático, pero para este trabajo de investigación se aplicará específicamente con los números racionales, en el subtema de las fracciones equivalentes.

El relato de la investigación se llevará a cabo en cinco capítulos principales los cuales pasan a ser descritos a continuación:

En ***"Los Diseñadores",*** se presentará la institución en donde se realizó la investigación, se hará una pequeña reseña histórica de la misma y se presentará de igual manera los estudiantes participantes en este trabajo.

En el capítulo ***"¿Cómo se hizo?",*** se indicará la metodología general empleada en el presente trabajo; se señalará como se llevó a cabo la investigación, indicando paso a paso el desarrollo de todo el proceso.

El tercer capítulo titulado ***"¿Qué había de esto?",*** presentará inicialmente los trabajos que se revisaron de otros autores referentes al tema de la investigación. También se presentará un marco teórico tratando los temas de fracciones, aprendizaje significativo y el empleo de los juegos y la creatividad dentro del aula de clase.

"Las categorías", es el capítulo donde se analizarán los datos recolectados durante el desarrollo del trabajo de campo de la presente investigación. Este análisis se llevará a cabo mediante el establecimiento de tres categorías principales que son: Diseñando y aprendiendo, siendo creativos y de principio a fin.

El capítulo ***"Las Opiniones",*** recogerá las impresiones finales de cada uno de los estudiantes participantes en la investigación, así como también la forma como estuvieron ellos transmitiendo sus ideas unos a otros.

Finalmente, se presenta el capítulo ***"Reflexiones y Sugerencias",*** en donde se exponen las reflexiones surgidas debido a la investigación llevada a cabo y donde se indican también algunas sugerencias a tener en cuenta en trabajos posteriores.

1. LOS DISEÑADORES

"Lo más peligroso que le podemos entregar al país,
es un científico sin amor."
(Duque, 2003, p. 20)

El actual trabajo de investigación se llevó a cabo en la sede C del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana, institución de carácter oficial cuya sede se encuentra ubicada en el barrio la Cumbre de Floridablanca.

El colegio lleva el nombre de José Elías Puyana en memoria del señor obispo monseñor José Elías Puyana, primer cura párroco de la parroquia de Floridablanca, por lo tanto se dice que es el fundador del municipio.

El colegio fue fundado en el año 1965 siendo gobernador del departamento el doctor Enrique Barco Guerrero; inició sus actividades académicas en el año siguiente en una casa frente al parque principal de Floridablanca con cuarenta y nueve estudiantes, veinticinco estudiantes de quinto primaria, diecisiete de primero y siete de segundo bachillerato. El señor José Hernando Ortega fue el encargado de orientar las actividades educativas como rector de la institución, colaboraron en el desarrollo curricular los profesores Alfredo Afanador, Alfonso Wilches y Lissy Rondón. En 1967 se suspenden actividades académicas y permanece cerrado hasta el 15 de Abril de 1969, fecha en la cual reinicia su actividad educativa pero únicamente con secundaria. En el año 1996 la Institución toma el nombre actual y en el presente año 2006 se anexa el antiguo colegio Jorge Eliécer Gaitán como la sede C del colegio Técnico Industrial José Elías Puyana, sitio donde se llevó a cabo el desarrollo de la investigación.

Los verdaderos artífices de este trabajo y quienes son los creadores o diseñadores de los juegos aquí presentados, son cinco estudiantes del grado 7-1 de la sede C del Colegio Técnico Industrial José Elías Puyana.

En un comienzo se realizó una actividad preliminar con los cuarenta y seis estudiantes del grado séptimo. Con base en dicha actividad y tratando de seleccionar un grupo algo heterogéneo, es decir, estudiantes que hubieran presentado hasta el momento un buen rendimiento académico y otros cuyo rendimiento no fuese precisamente el mejor, se seleccionaron inicialmente seis estudiantes para realizar con ellos el análisis de la investigación. Posteriormente una de las estudiantes que había sido seleccionada presentó excusas por no poder continuar con el trabajo debido a asuntos de tipo familiar, así que nos quedamos con cinco estudiantes para llevar a cabo el análisis posterior del trabajo y a quienes nos permitimos presentar a continuación.

JONATHAN FERNEY CORREA SUAREZ

- Edad: 12 años.
- Estudioso.
- Práctico.
- Ordenado.
- Serio.

JULY VICTORIA MELÉNDEZ CORREA

- Edad: 12 años.
- Compañerista.
- Juiciosa.
- Temperamental.
- Responsable.

MÓNICA YERALDIN GIRALDO QUIROGA

- Edad: 15 años.
- Seria.
- Responsable.
- Persistente.
- Colaboradora.

KAREN TATIANA ESTEBAN ESTEBAN

- Edad: 12 años.
- Creativa.
- Temperamental.
- Descomplicada.
- Buena oyente.

BRAYAN LEONARDO ALVAREZ AMAYA

- Edad: 13 años.
- Alegre.
- Activo.
- Dinámico.
- Cantante.

2. ¿CÓMO SE HIZO?

"El educador es un transformador de almas,
es un despertador de espíritus,
es aquel que es capaz de ver lo invisible en ese alumno"
(Duque, 2003, p.34)

La presente investigación tuvo carácter cualitativo mediante un abordaje fenomenológico-hermenéutico; lo anterior hace referencia a que iremos a analizar qué ocurre con el estudiante, por qué no aprende de manera significativa las fracciones equivalentes; no se estará realizando un estudio estadístico, se tomarán unos pocos estudiantes para realizar la investigación y analizar y explorar si con el diseño de juegos la situación mejora.

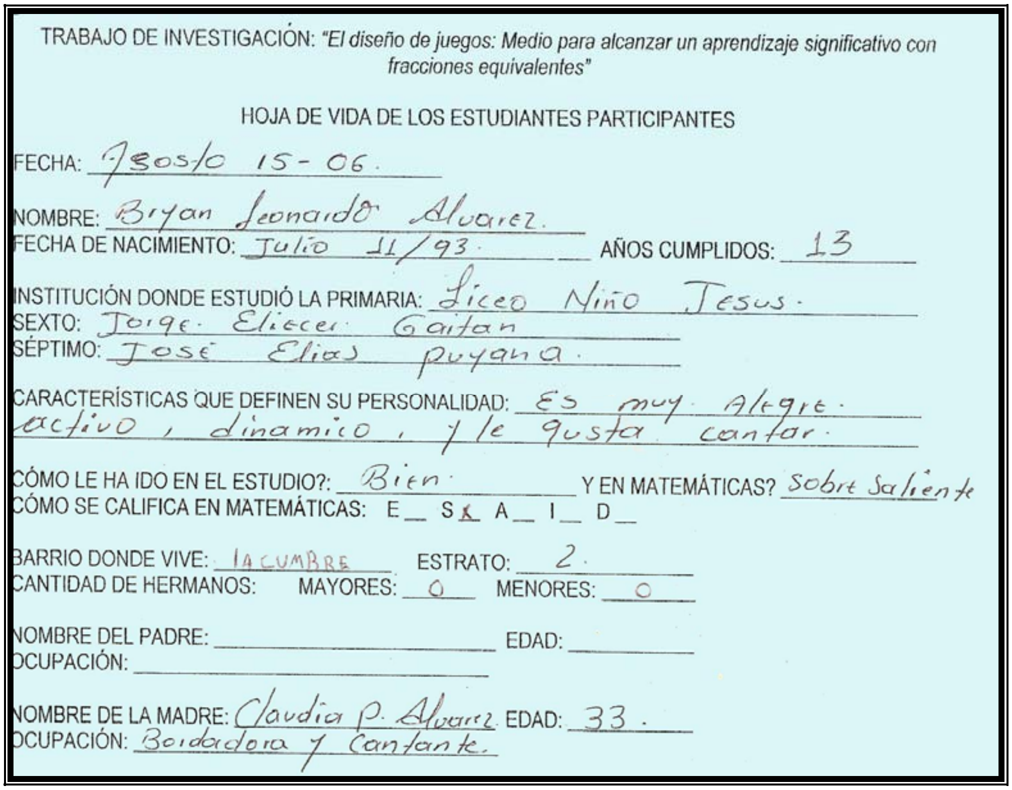
Esta investigación cae dentro de lo que se conoce como un estudio de caso, el cual según Bogdan y Biklen (1991) consiste en la observación detallada de un contexto, de un individuo, de una fuente de documento o de un acontecimiento especifico. Los estudios de casos cualitativos se inician mediante la recolección de datos para ser revisados posteriormente, explorados y luego tomar decisiones acerca de los objetivos del trabajo.

Los elementos mencionados se organizan y distribuyen en un tiempo determinado, se seleccionan las personas que irán a participar en la investigación y los aspectos en que se va a profundizar. Al comienzo todo esto formará parte de algunas ideas iniciales que luego darán lugar a otras ideas nuevas. En una primera instancia se tomarán decisiones sobre aspectos específicos del contexto, individuos y fuente de datos que se irán a estudiar, el área de trabajo se irá delimitando. Al recolectar los datos y las actividades de la investigación se establecen ciertos espacios, los sujetos, los materiales, los asuntos y los temas. De una fase inicial de exploración algo extensa pasan a un área más restringida de análisis de datos.

En la primera semana del mes de Agosto se realizó una actividad preliminar con los estudiantes del grado séptimo de la Institución. La misma consistía en que los estudiantes diseñasen un juego a elección libre con base en cualquiera de los temas que se habían visto hasta el momento; la idea era observar simplemente qué estudiantes se interesaban por esta forma de trabajo. En la semana siguiente no todos llevaron la tarea asignada, algunos habían trabajado por parejas y otros, que al parecer no habían comprendido, llevaron juegos normales que tenían en sus casas como dominó y ajedrez.

Con base en la anterior actividad y tratando de formar un grupo algo heterogéneo, se seleccionaron inicialmente seis estudiantes para realizar con ellos el análisis de la investigación. Posteriormente nos quedamos sólo con cinco estudiantes para realizar el análisis de los datos, como ya fue explicado anteriormente.

Una vez seleccionados los estudiantes se procedió a llenar una especie de hoja de vida de cada uno de ellos, tomando algunos datos básicos. Los datos presentados por Brayan Leonardo fueron los siguientes:



TRABAJO DE INVESTIGACIÓN: *"El diseño de juegos: Medio para alcanzar un aprendizaje significativo con fracciones equivalentes"*

HOJA DE VIDA DE LOS ESTUDIANTES PARTICIPANTES

FECHA: 7 8 05/0 15 - 06.

NOMBRE: Bryan Leonardo Alvarez.

FECHA DE NACIMIENTO: Julio 11/93. AÑOS CUMPLIDOS: 13

INSTITUCIÓN DONDE ESTUDIÓ LA PRIMARIA: Liceo Niño Jesus.

SEXTO: Jorge. Eliecer. Gaitan

SÉPTIMO: Jose Elias Puyana.

CARACTERÍSTICAS QUE DEFINEN SU PERSONALIDAD: Es muy. Alegre. activo, dinamico, y le gusta cantar.

CÓMO LE HA IDO EN EL ESTUDIO?: Bien. Y EN MATEMÁTICAS? Sobre Saliente

CÓMO SE CALIFICA EN MATEMÁTICAS: E__ S X A__ I__ D__

BARRIO DONDE VIVE: LA CUMBRE ESTRATO: 2.

CANTIDAD DE HERMANOS: MAYORES: 0 MENORES: 0

NOMBRE DEL PADRE: ______ EDAD: ______

OCUPACIÓN: ______

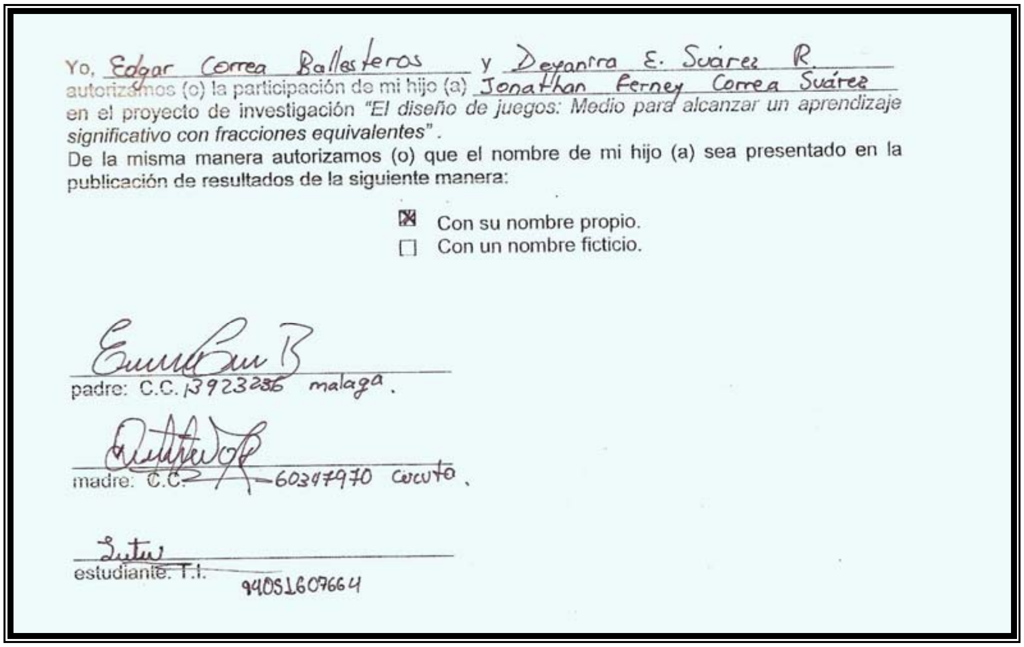
NOMBRE DE LA MADRE: Claudia P. Alvarez EDAD: 33.

OCUPACIÓN: Bordadora y Cantante.

Figura 1. Hoja de vida de Brayan Leonardo

Es necesario aclarar que el titulo inicial del trabajo era el diseño de juegos, posteriormente gracias a una sugerencia de un docente se le agregó la palabra "personales", para dejar claro que los diseños serán una creación personal de cada estudiante.

De la misma manera, siguiendo el conducto regular, se procedió a hablar con la coordinadora de la Institución y solicitar el respectivo permiso para llevar a cabo la investigación con el grado séptimo. Igualmente se redactó una carta la cual fue enviada a cada uno de los padres de los estudiantes seleccionados para el trabajo, en esta se le informaba detalladamente del trabajo que se iba a llevar a cabo y adjunto a ella llevaba una autorización para ser firmada por cada padre de familia y por el estudiante. La autorización firmada por Jonathan Ferney y sus padres se observa en el gráfico siguiente:


Yo, Edgar Correa Ballesteros y Deyanira E. Suárez R.
autorizamos (o) la participación de mi hijo (a) Jonathan Ferney Correa Suárez
en el proyecto de investigación *"El diseño de juegos: Medio para alcanzar un aprendizaje significativo con fracciones equivalentes"* .
De la misma manera autorizamos (o) que el nombre de mi hijo (a) sea presentado en la publicación de resultados de la siguiente manera:

☒ Con su nombre propio.
☐ Con un nombre ficticio.

padre: C.C. 13923286 malaga .

madre: C.C. 60347970 cucuta .

estudiante: T.I. 94051607664

Figura 2. Autorización de Jonathan Ferney

Antes de dar inicio a las actividades propias de la investigación se realizó una actividad diagnóstica con los estudiantes, para a través de esta poder observar cuáles eran las falencias que presentaban con respecto al tema de fracciones equivalentes; analizando los resultados obtenidos en la anterior actividad se procedió a empezar el desarrollo del trabajo de campo, el cual se dividió en dos etapas principales, las cuales fueron:

A. PRIMERA ETAPA

En esta etapa los estudiantes estuvieron realizando sus propios diseños de juegos; la idea de esta etapa era que los estudiantes identificaran fracciones equivalentes y reconocieran la forma de detectar si dos o más fracciones dadas, eran equivalentes o no.

Cabe anotar que cada etapa tuvo varias fases en su desarrollo; esta primera etapa se desarrolló en dos fases, en la fase uno los estudiantes presentaron el bosquejo de su primer diseño; luego de ser debidamente analizado y realizar una entrevista de carácter semi estructurado con cada estudiante, se decidió que pasaran a la segunda fase del diseño; en esta fase los estudiantes modificaban su primer diseño, según los errores que se habían detectado en el mismo; si era el caso podían cambiar por completo su juego; los errores podían ser del juego mismo o conceptos matemáticos que no estaban siendo debidamente manejados por el estudiante.

B. SEGUNDA ETAPA

Los estudiantes estuvieron diseñando un juego donde se aplicara las fracciones equivalentes ya fuera en la recta numérica, con la representación gráfica o con el manejo de áreas.

Para algunos estudiantes esta etapa tuvo sólo dos fases, pero para otros se vio la necesidad de llevar a cabo una tercera fase, para así clarificar un poco más algunos conceptos matemáticos involucrados en el desarrollo del juego diseñado por cada estudiante.

Es de resaltar en este momento la importancia que, para el desarrollo de la investigación, tuvieron las entrevistas realizadas con los estudiantes después de cada diseño elaborado; en estas se pudo observar cuál era la idea del estudiante al elaborar el juego respectivo, así como ver las falencias que tenían en cuanto a sus conceptos matemáticos. Este hecho de poder escuchar a nuestros estudiantes es básico para analizar como va el proceso de aprendizaje en ellos, así lo afirma el Ministerio de Educación Nacional:

> *"En nuestras clases los profesores necesitamos escuchar lo que los estudiantes comprenden, lo que ellos saben, lo que ellos piensan*

> *sobre las matemáticas y sobre su aprendizaje, escuchar las preguntas que hacen y las que no hacen, etc., para conocer cómo van sus procesos de razonamiento, de resolución de problemas, etc., para orientar el uso del lenguaje matemático y ayudarlos a desarrollar su habilidad para comunicar matemáticas." (Lineamientos curriculares, 1998, p. 96)*

De la misma manera tuvo importancia los textos que en algún momento escribieron los estudiantes, así como las reglas o instrucciones que cada uno elaboraba para el desarrollo de su juego.

De esta forma se iba evaluando el estudiante a medida que pasaba cada fase, y se observaba también los progresos que tenía en su proceso de aprendizaje respecto al tema de fracciones equivalentes. Al final de la primera etapa se llevó a cabo una revisión de conceptos, para observar más claramente los avances de los estudiantes. Igual se hizo al final de la segunda etapa, es decir, ya finalizando la investigación se realizó la "Revisión final del aprendizaje", para poder establecer comparaciones entre esta y la actividad diagnóstica realizada en un comienzo.

Se hicieron observaciones de los estudiantes dentro y fuera del aula de clase, los diálogos entre ellos, y el paso de ideas de unos a otros para dar el diseño final de sus respectivos juegos. Este aspecto comunicativo tomó importancia dentro del desarrollo de la investigación y dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, lo cual concuerda con lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional al afirmar lo siguiente:

> *"La comunicación es la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas." (Lineamientos curriculares, 1998, p. 95)*

Finalmente, reunida toda la información, debidamente registrada con sus fechas respectivas, y con la ayuda del diario de campo se procedió a realizar el análisis de los datos, a establecer las diferentes categorías que surgieron de los mismos análisis y a redactar el texto correspondiente arrojado por la investigación desarrollada.

Para el análisis se decidió establecer tres categorías básicas tratando de reunir en ellas toda la información recolectada en la investigación. Las categorías establecidas son las siguientes: diseñando y aprendiendo, siendo creativos y de principio a fin.

En unos capítulos más adelante se presentará cada una de ellas con sus respectivos análisis, se mostrarán los diferentes juegos diseñados por los estudiantes, como fueron modificados para corregir algunos errores, ya fuesen de construcción del juego en sí o errores de conceptos matemáticos, así como también se presentarán los diálogos establecidos con los estudiantes en las entrevistas realizadas.

3. ¿QUÉ HABÍA DE ESTO?

"Le invité a mirar en las vidas de los hombres como en un espejo,
y a tomar de los demás el ejemplo para sí mismo"
Terencio, citado por Duque (2003, p.96)

Dentro de los antecedentes revisados para este trabajo de investigación se encontró una monografía de licenciatura titulada ”Matemática Recreativa de Séptimo Grado”, de Nancy Estela Guecha Ravelo realizada en el año 1993; en este trabajo, la autora presenta un conjunto de talleres realizados a base de juegos para tratar los temas relacionados con números racionales. (Guecha, 1993).

En el primer taller se elaboran tiras de cartulina para identificar y representar números racionales. En el segundo taller aborda el tema de fracciones equivalentes empleando las tiras de cartulina y conjuntos de diferentes elementos como piedras, palos, caramelos y pitillos. En total se elaboraron diez talleres para enseñar los diferentes subtemas relacionados con los racionales como son, la amplificación y simplificación, el orden en los racionales y las cuatro operaciones básicas, adición, sustracción, multiplicación y división de racionales.

Un trabajo más, es la monografía de especialización de Ciro Ernesto Pérez Archila, titulada: “Propuesta Metodológica para el Aprendizaje de temas Matemáticos con base en el juego”, en este trabajo el autor propone diversos juegos para enseñar los temas de números primos y compuestos. (Pérez, 1996).

Otro de los trabajos revisados fue la monografía de especialización en educación matemática titulada “Propuesta didáctica para el Aprendizaje Significativo de las Operaciones con números fraccionarios en Séptimo grado”, realizada por Gustavo Prada Russo en el año 2004. (Prada, 2004). En esta monografía el autor propone el juego “Fraccimundo”, como herramienta didáctica que permite apoyar procesos en las operaciones con números fraccionarios.

El juego sirve para comprender la fracción como parte de un todo, determinar las relaciones de orden entre dos fraccionarios, entender fracciones equivalentes mediante superposición de áreas; asimilar la unidad en forma de fracción y resolver situaciones problemáticas donde se realizan las operaciones con números fraccionarios.

Un trabajo más fue el que llevó a cabo Eduardo Corredor Rojas en el año 2004, una monografía de especialización en educación matemática titulada “Fracciones equivalentes y adición de Números racionales: Su comprensión mediada por el uso de material concreto”. (Corredor, 2004). Esta es una experiencia de aula cuyo objetivo es contribuir al desarrollo de la comprensión del concepto de fracciones equivalentes y la adición de racionales en alumnos de séptimo grado. El autor empleó talleres, tabletas de madera, dominó de fracciones equivalentes y otros materiales para el desarrollo de la experiencia.

Para el análisis del trabajo estableció algunas categorías como interacción grupal y colectiva, mediación del aprendizaje mediante el uso de material concreto, manejo de diferentes formas de representación, comprobación de desempeños flexibles y acción comunicativa.

El autor elaboró tres talleres; en el primero el objetivo era que los estudiantes comprendieran que las fracciones operan sobre las magnitudes y no sobre los objetos. El objetivo del segundo taller fue aplicar el manejo y la manipulación de las tabletas en el proceso de adición de números racionales. El tercer taller tuvo como objetivo evaluar de forma individual la comprensión, tanto conceptual como procedimental, de las fracciones equivalentes y la adición de racionales.

Igualmente se observó el trabajo titulado “La producción de textos: una alternativa para evaluar en matemáticas”, esta fue una monografía de especialización del año 2005 realizada por Sandra Evely Parada Rico. (Parada, 2005).

En el anterior trabajo la autora presentó distintos textos que fueron producidos por los estudiantes abarcando los diferentes temas matemáticos que estaban viendo en sus clases; dentro de los textos producidos se encuentran cuentos, poemas, cartas, coplas y guiones. Este trabajo nos sirvió de inspiración ya que nos proporcionó la idea de que nuestros estudiantes podrían llegar a producir unos muy buenos diseños de sus propios juegos.

En la monografía de especialización titulada “Ensayo metodológico para la construcción del concepto de fracciones equivalentes”, de Myriam Rincón Rivera en el año 1996, se proponen diferentes actividades para que las estudiantes, a través de estas, lleguen a la construcción del concepto de fracciones equivalentes. En la primera actividad se llevaron las estudiantes al comercio para averiguar los precios de ciertos productos como por ejemplo, un galón de pintura, medio galón, un cuarto de galón de pintura, etc. Otra de las actividades fue jugar con máquinas agrandadoras o reductoras, para analizar las fracciones como operadores y los procesos de amplificación y simplificación. (Rincón, 1996)

A nivel internacional también se revisaron algunos estudios sobre los temas relacionados con la presente investigación, como fue el artículo titulado "Juegos matemáticos en la enseñanza", escrito por Miguel de Guzmán. (De Guzmán, 1984). En este escrito, el autor presenta una relación entre la matemática y los juegos; cómo han influenciado estos en el desarrollo histórico de la matemática, y cuales son las consecuencias sobre la didáctica de las mismas.

Otro artículo también escrito por Miguel de Guzmán es el titulado "Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de procesos de pensamiento". (De Guzmán, 1995). En este trabajo el autor presenta inicialmente los bloqueos y desbloqueos típicos presentes en el ser humano para desarrollar su creatividad; igualmente presenta algunas estrategias de pensamiento, mostrando algunas reglas heurísticas para la resolución de problemas.

También se revisó el artículo "Aprendizaje de las matemáticas y desarrollo de habilidades del pensamiento", escrito por Rocío A. González Díaz. (González, 1997). En este artículo la escritora presenta un estudio sobre los juegos mágico-matemáticos; realza la importancia de la creatividad en el área de matemáticas; presenta un desarrollo histórico de los juegos matemáticos y la forma como estos han influenciado sobre esta área de estudio, así como lo que se puede esperar que se alcance con los estudiantes al trabajar con juegos matemáticos.

3.1 FRACCIONES

"El mejor maestro es aquel que es capaz de ubicarse en el lugar de su discípulo"
(Duque, 2003, p.105)

El tema de fracciones no es algo nuevo para los estudiantes de grado séptimo, ya que vienen trabajando con ellas desde la básica primaria, sin embargo se encuentran algunos vacíos en sus concepciones. Además, el ser humano tiene la noción de fracción desde sus primeros años de vida y si nos remontamos a la antigüedad encontramos que el ser humano trabajaba ya con fracciones hacia el año 1800 a.C., según se puede encontrar en documentos hallados y que datan de esta época, (Collette, 1986, p. 25). Estos son documentos que poseen su propia nomenclatura y que emplean un sistema de numeración muy diferente al actual.

Igualmente los egipcios, según se comprueba en el papiro de Rhind, trabajaban las fracciones, pero sólo manejaban aquellas que tenían numerador uno, a excepción de dos tercios. Este pueblo construyó una tabla de las fracciones 2/n, desde n=3 hasta n=101, siendo "n" impar. Fueron capaces de calcular los dos tercios de cualquier número. En el papiro de Rhind uno de los problemas resueltos es el de la distribución de nueve panes entre diez hombres; como respuesta se obtiene que cada hombre recibe $\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{30}$ de nueve panes (sumando equivale a $\frac{27}{30}$).

También se encuentra una forma de desdoblar o transformar una fracción dada; por ejemplo al tomar la fracción $\frac{2}{7}$, la transforman en $\frac{1}{28}+\frac{1}{4}$. Lo anterior lo obtienen realizando los siguientes desdobles:

Desdoblando $\frac{2}{7}$ obtienen $\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$

Desdoblando $\frac{1}{7}$ obtienen $\frac{1}{7}=\frac{1}{14}+\frac{1}{14}$

Desdoblando $\frac{1}{14}$ obtienen $\frac{1}{14}=\frac{1}{28}+\frac{1}{28}$

Por consiguiente: $\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\left[\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{28}\right]$$

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{28}+\left[\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}\right]$$

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{28}+\frac{7}{28}$$

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{28}+\frac{1}{4}$$

Con el paso del tiempo varios autores siguieron tratando el tema de las fracciones, así por ejemplo, Eudoro de Cnido, expone la teoría de las proporciones; Leonardo Fibonacci se encarga de clasificar las fracciones en tres grupos principales que son fracciones comunes, fracciones sexagesimales y fracciones unitarias. De la misma manera Nicolás de Oresme, en su producción “algoritmos proportionum”, se dedica a realizar una exposición sistemática de reglas operacionales, en las cuales la primera de ellas la empieza de la siguiente manera:

"Una mitad se escribe como $\frac{1}{2}$.

Un tercio se escribe como $\frac{1}{3}$.

Dos tercios se escribe como $\frac{2}{3}$.", y así sucesivamente.

El número que está encima de la barra se llama numerador y el que está debajo se llama denominador.

Para los docentes es preocupante ver como al llegar a grados superiores, como décimo o undécimo, nos encontramos con estudiantes que no tienen claro el concepto de fracción, que no identifican fácilmente un conjunto de fracciones equivalentes; es posible que en sus años anteriores a estos estudiantes se les haya enseñado la interpretación típica de fracción y es la de parte de un todo, pero no podemos olvidarnos que existen diversas formas de interpretar las fracciones, entre ellas se podrían citar:

- Las fracciones como subáreas de una región unitaria (parte de un todo).
- Las fracciones como subconjunto de un conjunto de objetos.
- Las fracciones como puntos de una recta numérica.
- Las fracciones como cociente.
- Las fracciones como razón.
- Las fracciones en la comprensión del significado de los decimales y los porcentajes.

Otra interpretación de las fracciones es verlas como operadores; bajo esta interpretación se ven las fracciones como transformadores, es decir, algo que actúa sobre una situación y la modifica. Se observan las fracciones como una sucesión de multiplicaciones y divisiones; así por ejemplo al tener 30 unidades de algún objeto, el efecto de aplicarle un operador como 2/3 se verá como tomar los 30 elementos y multiplicarlos por 2, lo cual dará 60; ahora se debe tomar este último valor y dividirlo entre 3, lo cual daría 20, el cual estará representando el estado final. De esta manera se podrá ver como a partir de un estado inicial de 30 elementos y luego de aplicarle el operador dos tercios, se llegó a un estado final de 20 elementos.

De las demás interpretaciones se hablará un poco más en detalle cuando se estén presentando las diferentes categorías de análisis; especialmente se presentarán las interpretaciones de las fracciones como parte de un todo, las fracciones como puntos de una recta numérica y las fracciones como cociente.

En cuanto a fracciones equivalentes existen diversas aplicaciones que prácticamente obligan a que el estudiante reconozca que todo número racional se puede representar mediante un elemento cualquiera perteneciente a una gran familia de fracciones equivalentes; así en el caso de hablar de una fracción como $\frac{4}{5}$, esta se podría representar por cualquiera de los elementos siguientes de esta familia: $\left\{\frac{4}{5}, \frac{8}{10}, \frac{12}{15}, \frac{16}{20} ...\right\}$

Este aspecto de la equivalencia de fracciones puede ser particularmente útil en los casos siguientes:

- En la relación de orden de fracciones.
- En el desarrollo de adición y sustracción de fracciones que tengan distinto denominador.
- La conceptualización de número racional como clases de equivalencia.
- Para convertir las fracciones en decimales y porcentajes.
- También para el uso de razones.

Dentro de los autores que han estudiado este tema de fracciones equivalentes se podría citar a Bohan, quien en 1971 realizó algunos estudios al respecto, (Llinares & Sánchez, 1988, p. 118).

Bohan en esa ocasión analizó las fracciones recurriendo a tres herramientas como diagramas de área, plegado de papel y mediante la multiplicación por uno, dos, tres, etc. Así por ejemplo se tendría: $\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{2}\right)=\frac{4}{6}$

Otro autor a mencionar puede ser Ellerbruch, quién hablando acerca del doblado de papel afirma que la idea básica de esto es llegar a relacionar los dobleces de la hoja con la idea de doblar, triplicar, cuadruplicar, etc. Lo cual sería equivalente a multiplicar tanto el numerador como el denominador por un mismo número.

Ellerbruch, citado por Llinares & Sánchez, (1988, p. 118), también propone una secuencia de ejercicios para presentar a los estudiantes el tema de fracciones equivalentes y sugiere que se lleve a cabo con material concreto para que así el estudiante pueda corroborar los resultados; los ejercicios propuestos son los siguientes:

- Para ayudar a generalizar se pueden proponer ejercicios como:

$$\frac{2}{4} * \frac{?}{2} = \qquad \frac{3}{4} * \frac{?}{?} =$$

- Dada una fracción y un nuevo denominador se debe encontrar el numerador. $\frac{4}{3} = \frac{?}{12}$

- Dadas varias fracciones y un nuevo denominador, encontrar fracciones equivalentes. $\frac{2}{3} = \frac{?}{12}$ $\frac{3}{4} = \frac{?}{12}$

Estos ejercicios son los típicos, que en un comienzo le pueden servir al estudiante para encontrar fracciones equivalentes, pero lo importante sería no dejar que el educando se quede únicamente en este aspecto sino llevarlo a identificar fracciones equivalentes en otras situaciones, como por ejemplo sobre una recta numérica o empleando áreas.

3.2 APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

"Nunca permita que sus discípulos, pasen por sus manos sin haber aprendido algo bueno sobre ellos mismos"
(Duque, 2003, p.194)

Dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje es necesario prestar atención a las dos etapas que se desarrollan en este, la enseñanza y el aprendizaje, pues no se puede descuidar ninguna de ellas debido a que su funcionamiento en conjunto es lo que llevará al éxito de todo este proceso; lo anterior está muy bien plasmado en las palabras siguientes:

> *"…las teorías del aprendizaje y las de la enseñanza son más interdependientes que mutuamente exclusivas. Ambas son necesarias para una ciencia pedagógica completa y ninguna de ellas es sustituto adecuado de la otra. Las teorías de la enseñanza deben basarse en teorías del aprendizaje…"* (Ausubel et al., 1989, p. 28).

En la literatura se encuentran diversas clasificaciones del aprendizaje, pero como lo dice Ausubel et al. (1989) es necesario formular dos distinciones de procesos que seccionen a todos los tipos de aprendizaje en forma definitiva; en la primera distinción los clasifica como aprendizaje por recepción y por descubrimiento, y en la segunda los divide en aprendizaje repetitivo o mecánico y aprendizaje significativo.

En el aprendizaje por recepción, el contenido total de lo que se va a aprender se le presenta al estudiante en su forma final; en este tipo de aprendizaje el estudiante solo debe interiorizar o incorporar el material que se le presenta de modo que pueda recuperarlo o reproducirlo a posteriori. En el aprendizaje por descubrimiento el contenido principal de lo que va a ser aprendido no se da, sino que debe ser descubierto por el estudiante antes de que pueda incorporar la tarea a su estructura cognoscitiva.

Es de aclarar que estos dos tipos de aprendizaje, por recepción y por descubrimiento, que constituyen una de las clasificaciones del aprendizaje, pueden ser ya sea repetitivo o significativo, pues esta otra clasificación del aprendizaje se encuentra como dicen algunos autores en una línea ortogonal a la clasificación anterior, es una dimensión diferente a la anterior. Esto mismo se puede ver claramente en el gráfico siguiente junto con algunos ejemplos que los autores escriben (Ausubel et al., 1989, p. 35).

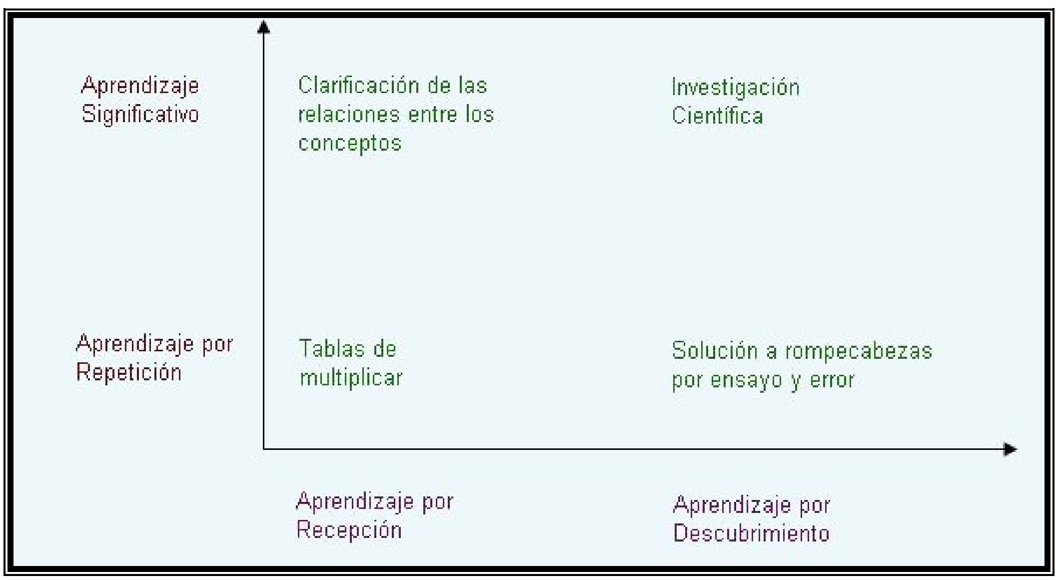


Figura 3. Tipos de Aprendizaje

En el aprendizaje repetitivo el proceso consta de puras asociaciones arbitrarias, el estudiante se limita únicamente a aprender algo al pie de la letra pero sin interiorizarlo verdaderamente ni relacionarlo de ninguna manera con su estructura cognitiva. En el aprendizaje significativo por el contrario, el material es comprendido o hecho significativo por el estudiante durante el proceso de interiorización, en este caso el nuevo material será relacionado por el educando de manera sustancial con lo que él ya sabe.

Analizando el aprendizaje desde estos puntos de vista cabe entonces citar las palabras siguientes:

> *"En lo que concierne al aprendizaje en el salón de clases y a otros tipos semejantes es evidente que el aprendizaje significativo es más importante con respecto al aprendizaje por repetición, de la misma manera que el aprendizaje por recepción lo es con respecto al aprendizaje por descubrimiento"* (Ausubel et al., 1989, p. 37).

Para citar los mismos autores (Ausubel et al., 1989), el aprendizaje significativo por recepción es de gran importancia en la educación ya que se ha convertido en el mecanismo humano por excelencia para la adquisición y almacenamiento de la vasta cantidad de ideas e información que son presentadas y transmitidas dentro de un campo cualquiera del conocimiento.

Para que se produzca un aprendizaje verdaderamente significativo se requiere que se cumplan las dos condiciones siguientes:

A. Requiere de parte del estudiante una actitud de disposición positiva hacia el aprendizaje significativo.

B. Requiere presentarle al estudiante un material que sea potencialmente significativo; esto presupone dos cosas, en primer lugar que el material de aprendizaje en sí esté relacionado no de manera arbitraria, pero sí sustancial con cualquier estructura cognoscitiva apropiada, es decir, que posea un significado lógico. En segundo lugar que la estructura cognoscitiva del estudiante contiene ideas de afianzamiento relevantes con las que el nuevo material puede guardar relación.

Atendiendo a lo ya mencionado, en el salón de clase se le debe dar prioridad al aprendizaje significativo por recepción; Ausubel et al. (1989) distinguen tres tipos de aprendizaje para estas categorías, los cuales son:

A. El aprendizaje de representaciones:

Ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y representan para el estudiante cualquier significado al que sus referentes aludan. Este tipo de aprendizaje es significativo, ya que tales proposiciones de equivalencia representacional se pueden relacionar, de manera no arbitraria, como ejemplares de una generalización presentes en todas las estructuras cognoscitivas del ser humano aproximadamente en el quinto año de vida.

B. El aprendizaje de conceptos:

Para Ausubel los conceptos son objetos, eventos, o situaciones que poseen atributos de criterio comunes y que se designan mediante algún símbolo o signo; igualmente presenta dos formas para el aprendizaje de los conceptos: formación *de conceptos* a partir de las experiencias concretas, y en segundo lugar, *la asimilación de conceptos,* consistente en relacionar los nuevos conceptos con los ya existentes en el alumno formando estructuras conceptuales.

Según el mismo autor entre más edad se tiene, los conceptos tienden a consistir más en abstracciones del más alto orden, a exhibir más precisión y diferenciación, a ser adquiridos principalmente por asimilación y a ir acompañados de la conciencia de las operaciones de conceptualización involucradas.

C. El aprendizaje de proposiciones:

Este tipo de aprendizaje puede ser de tres clases: el subordinado o inclusivo. Este ocurre cuando una proposición lógicamente significativa se relaciona sustancialmente con proposiciones específicas superordinadas en la estructura cognoscitiva del estudiante. La otra clase es el superordinado, ocurre cuando una proposición nueva se relaciona con ideas subordinadas específicas en la estructura cognoscitiva existente, y se relaciona con un fundamento amplio de contenidos generalmente pertinentes en la estructura que puede ser incluida en él. Finalmente el aprendizaje combinatorio de proposiciones, se refiere a los casos en que una proposición potencialmente significativa no se puede relacionar con ideas superordinadas o subordinadas específicas de la estructura cognoscitiva del estudiante, pero es relacionable con un fundamento amplio de contenidos generalmente relevantes de tal estructura.

3.3 JUEGOS Y CREATIVIDAD

"Al igual que una flor necesita del sol para abrir,

su discípulo necesita comprensión para convertirse en excelente"

(Duque, 2003, p.138)

El siguiente aspecto que vamos a tratar dentro del marco teórico es el correspondiente a la parte de los juegos, ya que como se ha mencionado en otros apartes este es un aspecto que ha tomado gran auge durante las últimas décadas en lo concerniente a la educación; así lo confirma, por ejemplo la siguiente autora:

> *"Por otro lado, cada día aumentan las publicaciones de profesionales de la enseñanza, de todos los niveles, que comunican sus experiencias con juegos matemáticos en el aula, con un alto grado de satisfacción ".* (*Basté, 2006*)**.**

Cabe resaltar aquí la concepción errónea que se ha tenido por mucho tiempo sobre la forma como se ven tradicionalmente los juegos dentro del aula de clase, y es que lo consideran como pérdida de tiempo, como que se pierde el carácter serio y formal de la educación; pero debemos tener en cuenta que la actividad lúdica y los juegos bien diseñados y orientados, también contribuyen a la formación de nuestros estudiantes; miremos lo que dicen al respecto los siguientes autores:

> *"Desde esta perspectiva se hizo necesaria una revisión crítica y radical sobre los conceptos de pedagogía y educación, para proponer un modelo lúdico pedagógico fundamentado en la necesidad de la construcción de un nuevo hombre, debido a que en la educación*

> *actual prevalece la formación racionalista, volviendo excluyente los deseos, las fantasías, los juegos, lo lúdico, la risa, la diversión y lo emocional. Como partes fundamentales de la integralidad humana."*
> (Jiménez et al., 2000, p. 10)

Recordemos en esta instancia, la forma en que se ha decidido orientar el presente trabajo de investigación, y es lo referente al objeto de estudio, el cual no son los juegos en sí, sino el diseño de los mismos por parte de los estudiantes como medio para que puedan alcanzar un aprendizaje significativo; es decir, se trata que durante el desarrollo del trabajo el estudiante vaya afianzando y complementando los conceptos previos que poseía sobre el tema de fracciones equivalentes. En el momento que el estudiante se enfrente al diseño de un juego específico, tendrá que relacionar de manera significativa los conceptos nuevos con los que él ya poseía en su estructura cognitiva, conceptos referentes al tema específico matemático del que trate el juego que quiere diseñar; en ese instante el estudiante podrá obtener un verdadero aprendizaje significativo sobre el tema tratado, así lo confirma una investigación realizada por Busch:

> *"Busch (1973) encontró que los estudiantes que ejecutan un juego una vez mostraban cierta ganancia en la comprensión de conceptos sociológicos, pero los estudiantes que trabajaron con esta investigadora en el diseño de los juegos exhibieron una mejor comprensión de los conceptos y las relaciones entre éstos."*
> (Ausubel et al., 1989, p.322)

Algo importante también a tener en cuenta en el aspecto de diseño de juegos será la creatividad del estudiante, su imaginación, su capacidad inventiva, la motivación que esto le produzca, factores todos que serán de gran trascendencia en su proceso de aprendizaje, pero en sí, ¿Qué es la creatividad? El siguiente autor la define de esta manera:

> *"un proceso de encontrar algo nuevo que puede consistir en redescubrir lo que ya había sido mostrado, reorganizar los conocimientos existentes para dar un incremento a dichos conceptos o generar soluciones nuevas a un problema"* (García, 2003, p. 145)

Sin lugar a dudas que una vez que el estudiante tenga el tema matemático definido para trabajar y se enfrente al proceso de diseñar un juego sobre este, será un problema muy especifico que deberá resolver y ahí es donde entrará también en juego su capacidad creativa, por esto se podría hacer la siguiente afirmación:

> *"…la creatividad es esencial en la solución de problemas difíciles, aquellos en que el sujeto debe descubrir nuevos caminos, no trajinados anteriormente, o caminos conocidos pero que nadie ha utilizado para enfrentar el problema particular*."
> (Vélez A., Vélez J., 2002, p. 24).

De esta manera se puede establecer que la creatividad es esencial prácticamente en todos los campos de la actividad humana, como podrían ser el biológico, social, psicológico, científico, económico y es vital para que el individuo pueda llevar a cabo las actividades que desarrolla en su diario vivir. Pero la creatividad debe ser desarrollada, por esto se hace necesario analizar un poco ciertas condiciones que, según García (2003), en algunos casos favorece el desarrollo de la creatividad y en otros la bloquean, estas condiciones pueden ser:

A. CONDICIONES QUE BLOQUEAN LA CREATIVIDAD

1. Dicotomía entre trabajo y juego.

Existe una falsa creencia en que el trabajo académico debe estar acompañado de sacrificio y esfuerzo, y no se debe relacionar en lo más mínimo con el sentir lúdico; esto origina un distanciamiento entre el sentir y el pensar y coloca al conocimiento como un objeto de razón carente de placer por el mismo. Lo anterior agota la sensibilidad en el individuo y limita la generación de ideas eliminando los procesos imaginativos.

2. Atmósferas represivas.

La falta de comunicación entre los individuos y de libertad para que estos puedan pensar, bloquean los actos creativos. Esto se debe a que la creatividad como proceso psicológico surge como la necesidad de expresión del yo creador de cada individuo.

3. Expectativas de evaluación, supervigilancia y control.

Cuando los sujetos esperan ser evaluados, medidos y controlados en sus realizaciones, tienden a no salirse de los esquemas y parámetros prefijados por los evaluadores, con el fin de obtener aprobación y reconocimiento; así sus procesos de producción creativa son coartados desde la obediencia ciega a la regla, haciendo que sus ideas nunca salgan a la luz pública o incluso que abandonen su trabajo.

4. Ambiente de competencia.

La competencia por los primeros lugares entre los sujetos de un grupo, relega lo lúdico que puede ser el crear ideas y produce la sobre valoración de las ideas propias sin importar que otra sea la mejor. De igual manera la competencia entorpece los procesos de transferencia creativa y se convierte en un obstáculo para los procesos comunicativos.

5. Ejecución de tareas repetitivas.

Cuando el sujeto se dedica a la ejecución de acciones que no son posibles de modificar, deja de ejercitar su pensamiento creativo; esto es muy común en los obreros, empleados calificados que controlan procesos y estudiantes que se encuentran en el ciclo formal de educación.

6. Resistencia social al cambio creador.

La persona creadora es alguien de anticipaciones, vive para la producción de cambios en la sociedad y en las instituciones donde pertenece, lo anterior lo hace víctima de conspiraciones contra lo nuevo e inédito; por lo general no se le da el reconocimiento en un primer momento y no se le apoya.

B. CONDICIONES QUE FAVORECEN LA CREATIVIDAD

La generación del pensamiento creativo en los sujetos se produce a partir de condiciones ambientales de carácter externo y condiciones psíquicas e intelectuales relacionadas con el propio individuo.

Las condiciones psicológicas e intelectuales de carácter interno que permiten el desarrollo del pensamiento creativo en los individuos son las que se refieren a sus rasgos de personalidad y a sus capacidades mentales; dentro de estas se podrían citar:

1. Independencia.

La independencia intelectual le facilita al sujeto construir concepciones alternativas sobre los hechos, concepciones que distan de lo que se piensa corrientemente y, además, le brinda la posibilidad de crear sus propios códigos para interpretar los fenómenos.

2. Tolerancia a la ambigüedad.

Las personalidades creativas presentan tolerancia a la confusión e incertidumbre, y preferencia por el desequilibrio y la asimetría, esto es porque la mayoría de ellas tienen creencias sobre el conocimiento, en las que se reconoce la posibilidad de perspectivas múltiples; de esta forma la persona creativa puede cambiar sin dificultad la dirección que sigue cuando se enfrenta a un problema y no desespera, cuando durante meses lo único que puede ver es un montón de datos sin relación o un sinnúmero de modelos interesantes pero inadecuados, pues sabe que el tiempo es la mejor inversión en la calidad de lo que se hace.

3. Equilibrio entre subjetividad y objetividad.

La personalidad creativa, reconoce que crear es un proceso ínter subjetivo, por ello expresa su reconocimiento sobre el valor de la discusión y la crítica, tomándola en cuenta y valorándola en gran medida.

4. Tendencia a explorar.

La persona creativa presenta curiosidad y apertura por el mundo exterior y por el mundo interior, es decir, además de estar preocupada por conocer y comprender el mundo, también le interesa conocerse a sí misma y a los demás. La tendencia a explorar también se expresa en su necesidad de sentir y vivir nuevas experiencias emocionales, estéticas, físicas e intelectuales, y en síntesis, por una mentalidad abierta y una actitud de ganas de vivir la vida y de crecer como individuo.

5. Persistencia ante el fracaso y las dificultades.

Por lo general cuando la persona creativa expone sus ideas encuentra rechazo y oposición, por tal razón debe tener fortaleza y ahínco para superar las dificultades y obstáculos que se le presentan, los constantes rechazos, las burlas y las objeciones que se hacen a sus ideas.

Ahora, las condiciones externas para el desarrollo del pensamiento creativo, están fundamentadas en la implementación de un ambiente propicio, este ambiente debe ser generado por la familia, la escuela y la cultura; dentro de estas condiciones se podrían mencionar:

- ✓ Un ambiente familiar sano donde el individuo encuentre aceptación, respeto, cariño y apoyo para sus ideas creativas.
- ✓ Ambientes familiares y laborales con un clima de comunicación y libertad que le permita al individuo sentirse comprendido y comprenderse. El poder expresarse es fundamental para la personalidad creadora.
- ✓ Pertenencia a una institución educativa con currículos flexibles y disponibilidades horarias que le permitan al individuo tomar decisiones de acuerdo con sus intereses académicos.
- ✓ Independencia económica, que le permita acceder a los recursos que necesita para crear nuevas ideas, por ejemplo es bien sabido que en los albores de la química Lavoisier y otro grupo de químicos reunieron una fuerte suma de dinero para comprar un diamante y poder así estudiar sus propiedades.
- ✓ Disponibilidad del tiempo para acometer el proceso de búsqueda y elaboración de la obra creativa. La creación de algo nuevo requiere de una gran cantidad de tiempo, tiempo para dedicarse a encontrar los problemas, para pensar en las ideas para resolver los problemas, para madurar estas ideas y finalmente, tiempo para ejecutarlas.

4. LAS CATEGORÍAS

"La naturaleza no sería igual de encantadora
si todas sus aves cantaran de la misma forma"
(Duque, 2003, p. 142)

Una vez finalizado el trabajo de campo y recogida toda la información se procedió a realizar el análisis respectivo de la misma; para hacerlo se revisaron los diseños hechos por los estudiantes en cada una de sus fases, se tuvo en cuenta también las entrevistas realizadas, los escritos hechos por los educandos, los datos escritos en el diario de campo y las observaciones realizadas en el aula de clase mientras desarrollaban sus juegos.

Tratando de reunir toda la información posible se establecieron tres categorías de análisis. En cada una de las categorías se estableció una triangulación entre las propias ideas y pensamientos del docente, la información presentada en textos de algunos autores y la información recogida de los estudiantes en la forma como ya se mencionó anteriormente.

Las categorías son:

- **DISEÑANDO Y APRENDIENDO.**
  En esta categoría se trata de mostrar el progreso que el estudiante va teniendo en su proceso de aprendizaje; como él va modificando sus diseños para corregir los errores detectados en cada fase anterior.

- **SIENDO CREATIVOS.**
  Esta categoría muestra el ingenio y la creatividad que cada estudiante tuvo al elaborar sus diseños; mostrará en qué se basaron los estudiantes para la construcción de cada juego.

DE PRINCIPIO A FIN

En este aparte se desea mostrar la evolución que tuvo cada uno de los estudiantes en su proceso de aprendizaje a lo largo de la investigación; se tratará de hacer una comparación entre lo que se observó en cada estudiante en las primeras actividades realizadas con ellos y la actividad final. En algunos casos se mostrará igualmente algunas etapas intermedias que ayuden a tomar una idea más global del proceso llevado a cabo.

4.1 DISEÑANDO Y APRENDIENDO

"Un error que nos enseñe algo,
es un acierto"
(Duque, 2003, p. 141)

Como fue mencionado en el capítulo ¿Cómo se hizo?, el trabajo se llevó a cabo en dos etapas básicas, en las cuales los estudiantes estuvieron diseñando juegos que involucrasen el tema de fracciones equivalentes. Cada etapa tuvo por lo menos dos fases de diseño. En la primera etapa se deseaba ver si los estudiantes reconocían cuándo dos o más fracciones son equivalentes y el proceso que realizaban para obtener fracciones equivalentes a partir de otra dada.

En la etapa uno, la idea de Brayan Leonardo fue presentar un juego tomando como base el conocido juego del dominó. Presentó unas tarjetas las cuales hacían la vez de fichas; en cada una escribió dos fracciones. La idea es que un jugador empieza colocando una ficha cualquiera, el otro debe colocar una ficha pero de tal manera que la primera fracción de esa ficha sea el resultado de dividir las fracciones que estaban en la ficha anteriormente colocada; así se debería continuar el juego alternando cada vez los jugadores, a menos que no tenga la ficha adecuada para colocar, en tal caso pasaría y le daría la oportunidad a otro jugador.

Al parecer lo que Brayan intentó hacer fue desarrollar pares de fracciones complejas, simplemente realizar la división, multiplicando los extremos sobre los medios, pero no tuvo en cuenta para nada el emplear fracciones equivalentes en el desarrollo de su juego, lo cual indicaría que no comprendió quizá el tema visto o que no comprendió la idea de la actividad.

El diseño presentado por Brayan fue el siguiente:

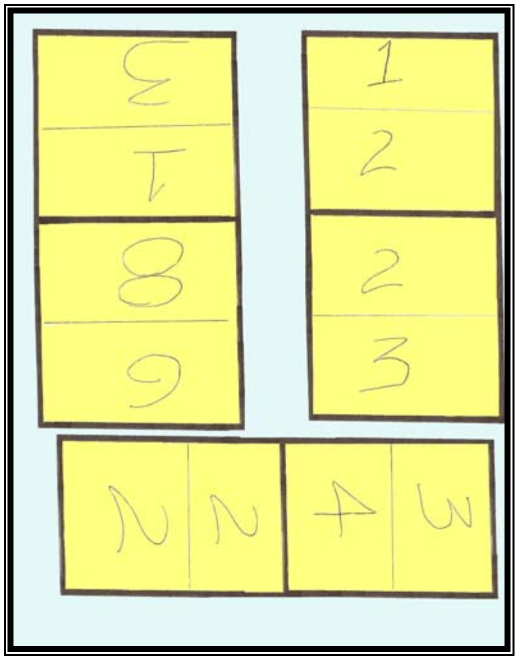


Figura 4. Primer juego de Brayan Leonardo - Fase 1

En la figura se están mostrando tres de las fichas elaboradas por Brayan; la primera es la superior derecha, esta contiene la fracción compleja $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}$, al efectuar dicha división se obtiene $\frac{3}{4}$, por esta razón Brayan elaboró una ficha que empezase con dicha fracción. A su vez esta segunda ficha tiene una fracción compleja, que al resolverla dará $\frac{6}{8}$; por esto la tercera en colocarse debe ser la que empiece por esta fracción. El estudiante elaboró dieciséis fichas en total, siguiendo la misma norma; se advierte que el estudiante podría estar confundiendo lo que son fracciones complejas con fracciones equivalentes. Por esta razón, unos días después de la elaboración de este primer diseño, se realizó una entrevista con el estudiante, quien al preguntársele sobre lo que eran para él fracciones equivalentes, da la respuesta siguiente:

> ***“fracciones equivalentes serían dos fracciones que al multiplicarlas… una fracción al multiplicarla por otra fracción me tendría que dar el mismo significado”***
>
> (Entrevista, 25 septiembre 2006)

Con su respuesta se podría creer que estaba hablando de la multiplicación normal de fracciones, por eso se le dio un ejemplo para que dijera como era lo de la multiplicación y si serían equivalentes, se le dijo dos tercios y seis novenos, Brayan dijo:

> ***“Sí señor, porque dos por nueve me da dieciocho y tres por seis también me da dieciocho”***
>
> (Entrevista, 25 septiembre 2006)

Con las respuestas anteriores se nota como el estudiante maneja el proceso algorítmico para reconocer fracciones equivalentes (multiplicando en cruz), aunque no sea muy claro en sus expresiones. Después de esto se habló con el estudiante y se aclaró la diferencia entre fracciones complejas y fracciones equivalentes, y se dejó para que el estudiante entrase a una segunda fase con este diseño para que aplicase allí las fracciones equivalentes.

En la segunda fase, Brayan construyó nuevamente su dominó cuidándose en esta ocasión de escribir las fracciones equivalentes respectivas. Su nuevo diseño consta de treinta fichas en total, empieza quién tenga la ficha igual, (3/2, 3/2), el otro jugador deberá colocar una ficha cuya primera fracción sea equivalente con la última fracción de la ficha anterior. En el caso de no tener la ficha adecuada dará oportunidad para que el otro jugador coloque la ficha respectiva. De esta manera se continúa el juego y ganará quien al final haya sacado todas sus fichas o quien haya quedado con el menor número de fichas en su poder.

El diseño de Brayan en la segunda fase fue el siguiente:

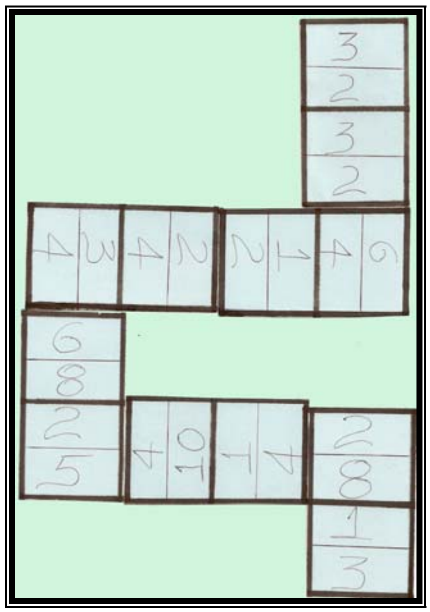


Figura 5. Primer juego de Brayan Leonardo - Fase 2

Se nota como la segunda ficha empieza por $\frac{6}{4}$, que es equivalente con $\frac{3}{2}$; la tercera ficha empieza con $\frac{2}{4}$, que es equivalente con $\frac{1}{2}$; la cuarta ficha empieza con $\frac{6}{8}$, esta es equivalente con $\frac{3}{4}$, que es la última fracción de la ficha inmediatamente anterior; y así se continuaría hasta terminar todas las fichas o hasta que el juego quedase bloqueado.

El proceso de aprendizaje mejorado de Brayan se advierte en la elaboración de las fichas, ya que para ello tuvo que encontrar una fracción equivalente para la última fracción que había escrito en la ficha anterior. En este punto es necesario recordar que este trabajo está orientado a mejorar el aprendizaje del mismo estudiante quien está diseñando el juego, por lo tanto no es de esperar un juego para enseñar fracciones equivalentes a terceros.

El diseño de juegos fue un medio que se empleó en esta investigación para que los estudiantes pudieran alcanzar un aprendizaje significativo en el tema de fracciones equivalentes. Se buscaba que cada estudiante asimilara los conceptos matemáticos y no, que simplemente los aprendiera de memoria.

El aprender los conocimientos declarativos no es suficiente, es necesario aprender también los conocimientos procedimentales, que el estudiante interiorice dichos conocimientos y los incorpore a su estructura cognitiva; es ahí, donde se produce el verdadero aprendizaje significativo.

Nos parece apropiado en este momento presentar las características de estos dos tipos de aprendizaje, según las presenta la autora Carmenza Correa en su libro “El Aprendizaje Significativo: Estrategias y Método de estudio”, (Correa, 1996, p. 99), y que se observa en la figura 6.

ENFOQUE PROFUNDO (significativo)	ENFOQUE SUPERFICIAL (memorístico)
HAY IMPLICACIÓN PERSONAL EN EL CONOCIMIENTO	**NO HAY IMPLICACIÓN PERSONAL EN EL CONOCIMIENTO**
➢ Interés en producir una interpretación personal de la materia. ➢ Interés en relacionar la tarea con experiencias de la vida cotidiana propia o ajena. ➢ Interés en asumir la tarea como parte de su desarrollo personal.	➢ Interés en la tarea en sí misma. ➢ Dependencia de las exigencias del profesor. ➢ Interés en asumir la tarea como una responsabilidad del momento.
SE ES ACTIVO AL ESTUDIAR	**SE ES PASIVO AL ESTUDIAR**
➢ Interés en analizar. ➢ Interés en relacionar con conocimientos previos y relevantes, y con conocimientos nuevos. ➢ Interés en investigar y relacionar la tarea con materiales procedentes de diferentes fuentes. ➢ Interés en usar habilidades intelectuales superiores (comprender, aplicar, evaluar, sintetizar).	➢ Se es irreflexivo con respecto a las demandas cognitivas e implicaciones de la tarea. ➢ Se centra en los aspectos irrelevantes de la tarea. ➢ Interés en terminar pronto con el estudio.
CENTRADO EN EL SIGNIFICADO	**CENTRADO EN LA MEMORIZACIÓN**
➢ Intención en comprender. ➢ Interés en develar la estructura que subyace al texto o tarea. ➢ Intención de percibir el contenido como un todo.	➢ Intención de memorizar la tarea. ➢ Interés en el estudio atomizado, por partes. ➢ Se estudia centrado en la evaluación y no en la comprensión.

Figura 6. Aprendizaje Significativo vs. Aprendizaje Memorístico

Tatiana Esteban es una de las estudiantes participantes en esta investigación, es alguien quien refleja su sinceridad pues al estar escribiendo sobre su desempeño en el área de matemáticas, escribe lo siguiente:

> ***"En ocasiones bien y en otras mal, porque a veces en períodos pongo todo mi esfuerzo y en otros no hago nada".***
>
> (Texto escrito, 30 Agosto de 2006)

Para la primera etapa Tatiana presentó un tablero cuadriculado de 7x7, en el cual había dibujado algunas figuras geométricas como triángulos y cuadrados, y algunos de ellos tenían unas fracciones simples y otros tenían fracciones complejas. Ella adjuntó al juego algunas instrucciones, pero no eran claras, no se entendía como se debía jugar. Por lo que presentó y se puede ver, parece que confundió fracciones complejas con fracciones equivalentes, porque empleó las primeras.

El juego diseñado por ella fue el siguiente:

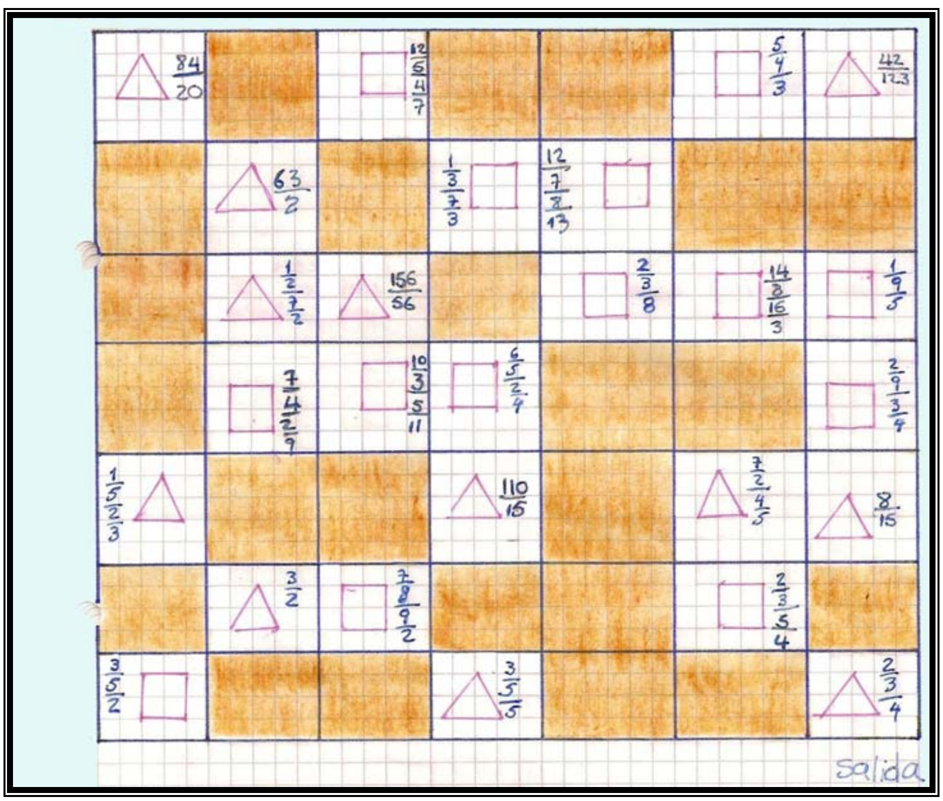


Figura 7. Primer juego de Karen Tatiana - Fase 1

Como se observa en la figura en algunos cuadros hay fracciones sencillas como $\frac{8}{15},\frac{3}{2},\frac{84}{20}$, etc., y en otros hay fracciones complejas como $\frac{\frac{7}{8}}{\frac{9}{2}},\frac{\frac{2}{9}}{\frac{3}{4}}$. La idea de la estudiante era ir avanzando y resolviendo cada fracción que se encontrara.

Con este diseño se puede advertir que quizás Tatiana tiene la misma dificultad de Brayan, al estar confundiendo fracciones complejas con equivalentes. Por esta razón en la entrevista posterior a este diseño se le preguntó sobre lo que ella entendía por fracción equivalente, a lo cual no fue capaz de dar una respuesta. Al solicitarle que diera un ejemplo de fracción equivalente ella hizo lo siguiente:

> ***"Podría ser $\frac{2/3}{5/4}$, porque el dos va con el cuatro y el tres con el cinco"***
>
> (Entrevista, 25 septiembre 2006)

Con esto dejó ver que no tenía claro lo que son fracciones equivalentes y lo que está tratando de expresar es la forma de resolver la división de fracciones que había puesto como ejemplo. Al observar esto se le presentó un par de fracciones equivalentes, $\frac{2}{3}y\frac{4}{6}$, y se le preguntó cómo se hacía para saber si eran equivalentes, a esto ella respondió:

> ***"se multiplica en cruz… y ahí da el resultado y se sabe si son iguales"***
>
> (Entrevista, 25 septiembre 2006)

Igual que en el caso de Brayan, a pesar que la estudiante no comprendía muy bien el concepto de fracción equivalente, sin embargo si tenía bien claro el algoritmo para detectar cuando dos o más fracciones son equivalentes. Esto lo que nos da es evidencia de que la estudiante ha realizado un aprendizaje memorístico, pues sabe aplicar muy bien el algoritmo para identificar dos fracciones equivalentes, sin embargo no comprende verdaderamente lo que eso significa. Este es el gran problema con el que los docentes se encuentran en muchas ocasiones, que los estudiantes se preocupan por memorizar, simplemente para poder responder una "evaluación", pero no se dedican a realizar un verdadero aprendizaje, no se preocupan por asimilar verdaderamente los conceptos involucrados.

Después de hablar con la estudiante y explicarle que fracciones equivalentes son aquellas que representan un mismo racional, que si por ejemplo se desean ubicar sobre una recta, las fracciones deben quedar sobre el mismo punto, se le dio libertad para que modificase su diseño en la forma que considerara necesario para poder observar las fracciones equivalentes en el mismo.

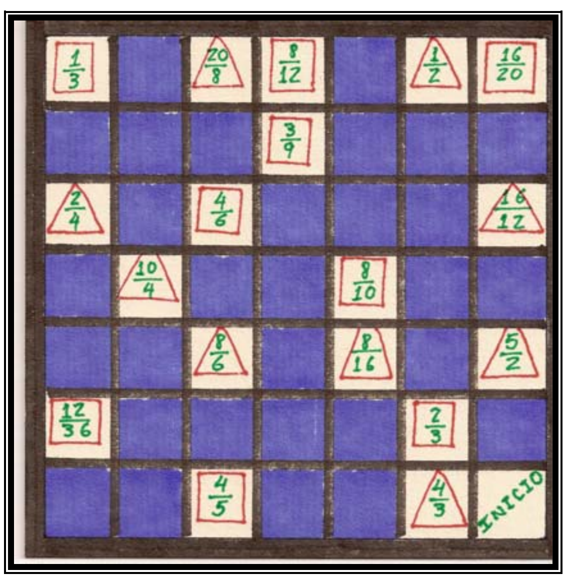


Figura 8. Primer juego de Karen Tatiana - Fase 2

La figura anterior muestra la segunda fase en la que Tatiana modificó su diseño; presentó la misma idea básica pero en esta ocasión estableció reglas muy claras. Escribió en total dieciocho fracciones en el tablero; el juego lo plantea para dos participantes, el jugador que tome la casilla 4/3, deberá buscar dos fracciones equivalentes a esta, las cuales están dentro del tablero, para ello deberá moverse en diagonal el número de cuadros que desee, siempre y cuando no lo bloquee alguna figura o la ficha del otro jugador. Si se desea mover horizontal o verticalmente lo limita únicamente a una sola casilla. El otro jugador tomará la casilla con 2/3, tendrá que realizar un proceso similar para hallar dos fracciones equivalentes a esta. Ganará el jugador quién haya tomado para sí, más fracciones de las que se encuentran en el tablero.

Lo que hizo la estudiante fue constituir familias de equivalentes formadas por tres integrantes cada una; en algunas ocasiones encerraba cada familia en triángulos, otras veces empleaba cuadrados para encerrar los miembros de la familia. Algunas de las familias que la estudiante empleó son las siguientes:

$$\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{8}{12}\right\} \quad \left\{\frac{4}{3},\frac{8}{6},\frac{16}{12}\right\} \quad \left\{\frac{5}{2},\frac{10}{4},\frac{20}{8}\right\} \quad \left\{\frac{4}{5},\frac{8}{10},\frac{16}{20}\right\}$$

Se observa como la estudiante escribió cuidadosamente sólo dos fracciones equivalentes para cada una de las fracciones que están en el tablero. De lo anterior se puede concluir que Tatiana comprendió el proceso de obtener fracciones equivalentes a partir de otra fracción dada, y ahí es donde está la importancia del proceso ya que fue necesario que la estudiante fuera a consultar en sus propios apuntes e incluso con sus compañeros.

Para muchas personas la enseñanza de las matemáticas es algo muy serio y riguroso donde no hay cabida para la actividad lúdica. Nos sorprenderíamos si investigásemos un poco pues nos daríamos cuenta de que muchos aspectos matemáticos han surgido precisamente en medio de actividades lúdicas, así lo confirma Miguel de Guzmán en uno de sus artículos:

> *"Por esto no es de extrañar en absoluto que muchos de los grandes matemáticos de todos los tiempos hayan sido agudos observadores de los juegos, participando muy activamente en ellos, y que muchas de sus elucubraciones, precisamente por ese entreveramiento peculiar de juego y matemática, que a veces los hace indiscernibles, hayan dado lugar a nuevos campos y modos de pensar en lo que hoy consideramos matemática profundamente seria."*
> *(De Guzmán, 1984, p. 3)*

Muchos de los aspectos matemáticos que se trabajan hoy día surgieron en medio de juegos; el autor Miguel de Guzmán nos presenta un recuento histórico en cuanto a este aspecto en su articulo titulado "Juegos matemáticos en la enseñanza", (De Guzmán, 1984, p. 3), del cual deseamos hacer un pequeño resumen en este momento.

En la Edad Media *Leonardo de Pisa* (1170-1250), mejor conocido hoy y entonces como Fibonacci, cultivó una matemática numérica con sabor a juego con la que, gracias a las técnicas aprendidas de los árabes, asombró poderosamente a sus contemporáneos hasta el punto de ser proclamado oficialmente por el emperador Federico II como *Stupor Mundí*.

En la Edad Moderna *Geronimo Cardano* (1501-1576), el mejor matemático de su tiempo, escribió el *Líber de ludo aleae*, un libro sobre juegos de azar, con el que se anticipó en más de un siglo a Pascal y Fermat en el tratamiento matemático de la probabilidad. En su tiempo, como tomando parte en este espíritu lúdico, los duelos medievales a base de lanza y escudo dieron paso a los duelos intelectuales consistentes en resolver ecuaciones algebraicas cada vez más difíciles, con la participación masiva, y más o menos deportiva, de la población estudiantil, de Cardano mismo y otros contendientes famosos.

El famoso problema del Caballero de Meré, consistente en saber cómo deben ser las apuestas de dos jugadores que, habiendo de alcanzar "n" puntos con sus dados, uno ha obtenido "p" y el otro "q" puntos en una primera jugada, fue propuesto por Antoine Gobaud, Caballero de Meré (1610-1685) a Pascal (1623-1662). De la correspondencia entre éste y Fermat (1601-1665) a propósito del problema surgió la moderna teoría de la probabilidad.

Leibniz (1646-1716) fue un gran promotor de la actividad lúdica intelectual: "Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente", escribía en una carta en 1715. Y en particular comenta en otra carta en 1716 lo mucho que le agrada el ya entonces popular solitario de la cruz, y lo interesante que le resulta el jugarlo al revés.

En 1735, Euler (1707-1783), oyó hablar del problema de los siete puentes de Königsberg, sobre la posibilidad de organizar un paseo que cruzase todos y cada uno de los puentes una sola vez (camino euleriano). Su solución constituyó el comienzo vigoroso de una nueva rama de la matemática, la teoría de grafos y la topología general.

También el espíritu matemático de la época de Euler participaba fuertemente del ánimo competitivo de la época de Cardano. *Johann Bernoulli* (1667-1748) lanza el problema de la braquistócrona como un reto a los mejores matemáticos de su tiempo. En este duelo participaron con ardor nada menos que Jakod Bernoulli (creador, precisamente con su solución al problema, del cálculo de variaciones) Leibniz, Newton y Huygens.

Se cuenta que *Hamilton* (1805-1865) sólo recibió dinero directamente por una de sus publicaciones y ésta consistió precisamente en un juego matemático que comercializó con el nombre de *Viaje por el Mundo*. Se trataba de efectuar por todos los vértices de un dodecaedro regular, las ciudades de ese mundo, un viaje que no repitiese visitas a ciudades circulando por los bordes del dodecaedro y volviendo al punto de partida (camino hamiltoniano). Esto ha dado lugar a un problema interesante en teoría de grafos que admiten un camino hamiltoniano.

Los biógrafos de *Gauss* (1777-1855) cuentan que el *Princeps Mathematicorum* era un gran aficionado a jugar a las cartas y que cada día anotaba cuidadosamente las manos que recibía para analizarlas después estadísticamente.

Hilbert (1862-1943) es responsable de un teorema que tiene que ver con los juegos de disección: dos polígonos de la misma área admiten disecciones en el mismo número de triángulos iguales.

Como nos podemos dar cuenta muchos conceptos matemáticos han surgido en medio de juegos y actividades lúdicas, pero ahora volvamos a los diseños que los estudiantes estuvieron haciendo durante la actual investigación.

Para la segunda etapa del proceso se trató de abordar las dificultades que los estudiantes habían mostrado en las actividades preliminares que se realizaron con ellos en este tema de fracciones equivalentes.

Dentro de las dificultades observadas se encuentran la no ubicación correcta de racionales en la recta numérica y por consiguiente de sus respectivos equivalentes. Igualmente se observó dificultad en la representación gráfica de racionales y la no comprensión en el manejo del área de una unidad cualquiera que se tome como referencia.

En esta nueva etapa el estudiante Jonathan Correa decidió trabajar con la recta numérica. En una actividad preliminar donde se le había pedido ubicar algunos racionales sobre una recta numérica, él los ubicó según el denominador que cada uno tuviera. Los racionales a ubicar eran: $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{6}, \frac{4}{2}$. Jonathan los ubicó de la siguiente manera:

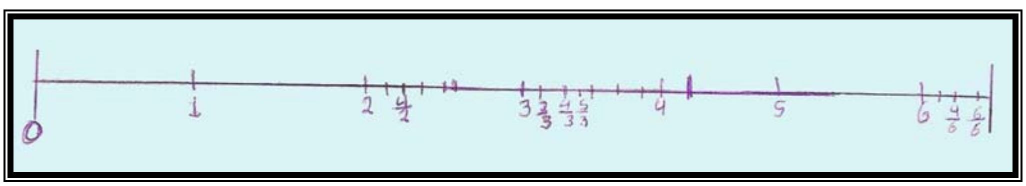


Figura 9. Aparte de la actividad diagnóstica de Jonathan Ferney

Se advierte que Jonathan no sabe como ubicar los racionales en la recta, tampoco identifica las fracciones equivalentes, se limita a ubicar los racionales con denominador dos, después del dos, los que tienen denominador tres, después del tres, y de igual manera hace con los racionales de denominador seis. Es de aclarar que tanto él como sus demás compañeros han visto el tema de racionales desde la básica primaria y aún en el grado sexto de secundaria.

Después de haber pasado ya la primera etapa, diseño del primer juego, y manejar el proceso algorítmico de multiplicar en cruz para encontrar fracciones equivalentes y la ubicación de racionales en la recta numérica, el estudiante Jonathan Ferney propuso como su diseño un juego en el cual trató de aplicar el concepto de recta numérica a un futbolín que el tiene en casa. Inicialmente dibujó una recta y la dividió en tercios. Se observa como colocó correctamente cada número, es más, tuvo el cuidado de escribir $\frac{3}{3}$ para el uno y $\frac{6}{3}$ para el dos. Se advierte el avance del estudiante en el manejo de la recta numérica para racionales. El diseño que Jonathan presentó es el siguiente:

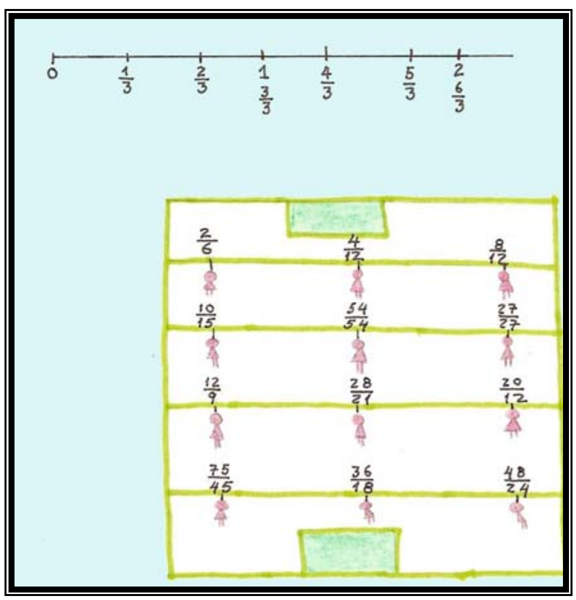


Figura 10. Segundo juego de Jonathan Ferney - Fase 1

El problema fue que no dividió la recta en partes exactamente iguales. En la cancha dibujada, se nota como reconoce la unidad al escribir $\frac{54}{54} y \frac{27}{27}$. El fue ubicando los racionales en forma ascendente y colocó dos racionales para cada uno de los que había escrito en la recta inicial, así: $\frac{2}{6} y \frac{4}{12}$ en representación de $\frac{1}{3}$. Escribió $\frac{8}{12}$ y $\frac{10}{15}$ en representación de $\frac{2}{3}$. Para el mayor, el cual era el 2 o $\frac{6}{3}$, el escribió $\frac{36}{18} y \frac{48}{24}$.

El inconveniente con este diseño es que no se advierte la noción de equivalencia, ya que los racionales equivalentes, ejemplo $\frac{2}{6} y \frac{4}{12}$, están representados por jugadores diferentes y ubicados en puntos distintos de la porción de recta dibujada.

Al hablar posteriormente con el estudiante sobre su propuesta de juego dejó ver que tenía claro la relación de equivalencia entre los racionales $\frac{2}{6} y \frac{4}{12}$, por ejemplo, y entre las demás parejas que escribió en su diseño. Se le hicieron preguntas sobre su juego, algunas de ellas fueron:

¿Si desea ubicar en una recta numérica $\frac{2}{6} y \frac{4}{12}$, cual sería mayor?

> ***"Sería mayor 4/12. ¡No¡ Serían iguales porque los dos son el mismo número… quedarían en la misma parte."***
>
> (Entrevista, 30 de Octubre 2006)

¿Si se desea ubicar en una misma recta todos estos números, cómo se haría?

> ***"Se agarraría un número y se simplificaría por cualquier número, por ejemplo por dos. Se divide y lo que de se ubicaría en la recta."***
>
> (Entrevista, 30 de Octubre 2006)

En este caso, Jonathan se refiere a simplificar para obtener la fracción irreducible de cada par de racionales equivalentes que él había colocado en su juego. En este momento se le hizo ver que de esta manera cada par de jugadores se reducirían solo a uno, que sería la fracción irreducible, por lo cual se perderían algunos jugadores. Por esto se le preguntó lo siguiente:

¿Cómo haríamos para ubicar todos los jugadores en una recta numérica para no eliminar jugadores (por ser equivalentes)?

> ***"Tocaría hacer la cantidad de jugadores en rectas. Haríamos la misma recta con cada equivalente"***

(Entrevista, 30 de Octubre 2006)

Al continuar hablando con él dejó claro que cada equivalente al que se refiere es la fracción irreducible de cada par de racionales. Lo que dice es que tocaría que dibujar varias rectas para ubicar los diferentes racionales en ellas. En este punto se dejó la entrevista para que Jonathan desarrollara su idea en la fase dos de su segundo juego.

En la fase dos Jonathan decidió cambiar el juego del futbolín que había propuesto inicialmente, ya que en este no podía colocar todos los equivalentes que necesitaba. El estudiante fue consecuente con las ideas que había expresado en la entrevista realizada después de la primera fase de este segundo juego, referente a construir una recta para cada fracción irreducible.

Al continuar con la charla el estudiante dijo que esta idea la había obtenido de su prima July Meléndez; ya que la estudiante en una actividad preliminar, había realizado exactamente eso al ubicar racionales sobre una recta numérica. Se le había pedido a la estudiante que ubicara en una recta los racionales $\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{4}{2},\frac{4}{6},\frac{6}{6}$. Para realizar la ubicación en la recta la estudiante trazó tres rectas diferentes, una para los racionales con denominador tres, otra para los racionales con denominador dos y una tercera para los racionales con denominador seis; dividió asimismo cada unidad en las rectas según el denominador indicaba; de esta manera ubicó los racionales dados en sus rectas respectivas.

Este hecho presenta especial interés ya que refleja la importancia de la comunicación entre los estudiantes, de cómo July Victoria explicó a Jonathan la forma en que ella había ubicado los racionales sobre rectas distintas. Sobre el hecho de la comunicación los Lineamientos matemáticos afirman lo siguiente:

> *"La comunicación matemática puede ocurrir cuando los estudiantes trabajan en grupos cooperativos, cuando un estudiante explica un algoritmo para resolver ecuaciones, cuando un estudiante presenta un método único para resolver un problema, cuando un estudiante construye y explica una representación gráfica de un fenómeno del mundo real, o cuando un estudiante propone una conjetura sobre una figura geométrica."*
> *(Lineamientos curriculares, 1998, p.96)*

De esta manera Jonathan tomó la idea de su compañera para realizar el nuevo diseño de su segundo juego. Tomó como racionales representantes a $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$.

Decidió hacer una recta para cada uno de ellos y partir cada unidad de la recta en el número de partes según indicaba el denominador de cada racional. La creatividad del estudiante está en que colocó las rectas en forma vertical y empleó cuatro vasos exactamente del mismo tamaño, colocando las rectas con sus divisiones respectivas sobre la superficie de cada vaso para poder hacer las mediciones necesarias. Los vasos que el estudiante presentó los dividió cada uno en tres unidades del mismo tamaño. Estos fueron los siguientes:

Figura 11. Segundo juego de Jonathan Ferney - Fase 2

La idea del juego consiste en que al participante se le da un racional cualquiera, él deberá escoger el vaso adecuado para llenarlo de líquido hasta la línea donde quede representado el racional dado. Posteriormente deberá hallar un equivalente al racional primero; seleccionará de los restantes tres vasos el adecuado, para llenarlo de líquido de tal manera que quede representado el equivalente y luego comparar los dos vasos para ver si efectivamente en ambos el líquido alcanzó la misma altura.

El diseño es interesante y creativo, tomando en cuenta la edad del estudiante (12 años). Por ejemplo se le da al participante el racional tres medios, el escoge el vaso en el cual cada unidad de la recta se dividió en dos partes, y lo llenará de liquido hasta la tercera línea, representando así los tres medios de la unidad que él tomó para dividir cada recta. Luego obtendrá el equivalente seis cuartos, deberá tomar el vaso en el cual cada unidad de recta está dividida en cuatro partes, lo llenará de líquido hasta la sexta línea para representar así los seis cuartos de la unidad tomada como base. Este ejemplo es el que se observa en la figura siguiente:

Figura 12. Ejemplo uno del segundo juego de Jonathan Ferney.

Efectivamente, al comparar los dos vasos se confirma que la cantidad de líquido en el interior de ellos es exactamente la misma, con lo cual se vería que los dos racionales tres medios y seis cuartos son equivalentes y representan la misma porción, en este caso, de un volumen tomado como referencia. El problema con este diseño sería por la forma del vaso, ya que siendo cónica, las porciones en que se divide el recipiente no serían exactamente iguales.

Después de esta segunda fase se vio la necesidad de realizar una entrevista con el estudiante para analizar su diseño presentado; a esta entrevista se llevó un poco de agua en una vasija y los vasos que Jonathan había entregado en la fase anterior. Se le pidió que representara con los vasos al racional cinco medios. Lo cual hizo tomando el vaso que estaba dividido en medios y lo llenó hasta la quinta línea. Posteriormente se le dijo que representara un equivalente a este; él tomó el vaso de cuartos y lo llena hasta la línea décima. Así como se ve a continuación:

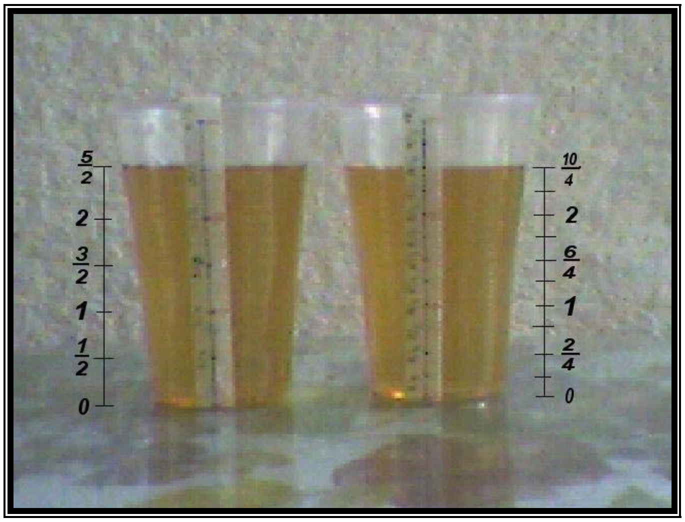


Figura 13. Ejemplo dos del segundo juego de Jonathan - En la entrevista.

Algunas de las preguntas que se hicieron fueron las siguientes.

¿Cómo son las porciones en que dividió cada recta?

"Son iguales"

¿Cada porción de líquido en el vaso será igual?

"Sí, son iguales"

En este momento se tomó un papel y se hizo el dibujo de un vaso, como se muestra en la figura.

¿La cantidad de líquido que hay de cero a un medio, será la misma que hay de un medio a dos medios?

"Sí, es la misma cantidad"

(Entrevista, Noviembre 11 de 2006)

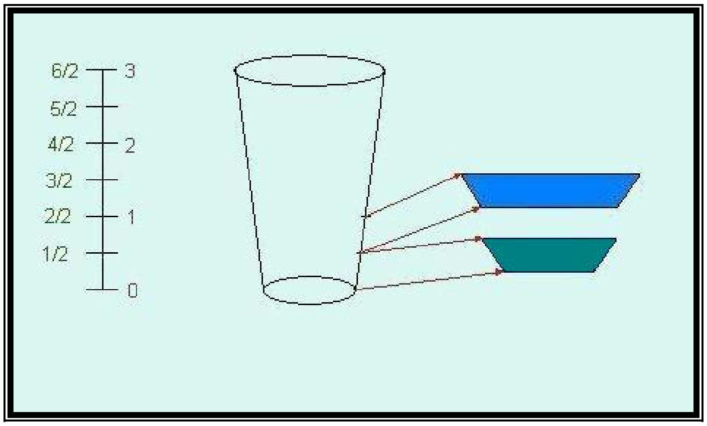


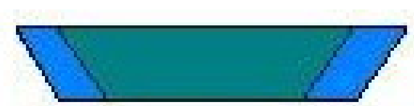
Figura 14. Comparación de porciones de la unidad- vaso cónico

Se trató de dibujar las dos porciones en una especie de aumento, y se volvió a preguntar:

¿Qué dice ahora, son iguales?

"Creo que esta es más pequeña" *(señalando la figura inferior)*

Se procedió a dibujar una porción sobre la otra, para que el estudiante no quedara con dudas:



Se le hizo ver al estudiante que, efectivamente él había dividido la recta en porciones iguales, pero la cuestión es que en este caso se está tratando con volúmenes, y la forma del recipiente es cónica, por tanto el vaso se va haciendo más ancho a medida que su altura va en aumento. De esta manera a pesar de que la altura de cada porción es la misma, no así su volumen, ya que tiene un radio diferente. Se le recomendó por tanto buscar recipientes cuyas paredes fuesen rectas, es decir, recipientes que tengan forma cilíndrica para así asegurarse de que cada porción del vaso tenga exactamente el mismo volumen en su interior.

El día 13 de Noviembre Jonathan presentó cuatro vasos de vidrio que tenían una forma cilíndrica, sus paredes eran rectas. El estudiante no modificó lo que había planteado en la fase anterior, simplemente cambió los recipientes, la imagen de estos es la siguiente:

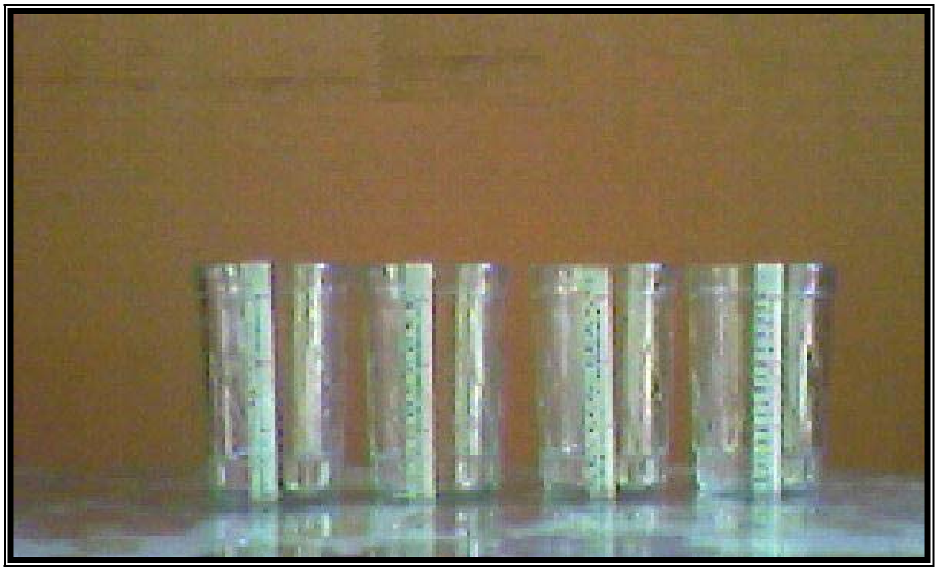


Figura 15. Segundo juego de Jonathan Ferney - Fase 3

De esta manera, teniendo vasos de estos tipos se puede decir que cada porción en que Jonathan dividió las rectas contiene el mismo volumen de líquido en su interior. Cada porción tendrá la misma altura, y como la forma del recipiente es cilíndrica tendrá también el mismo radio, por tanto su volumen será igual. Dibujando cada porción del vaso entre las divisiones de la recta que Jonathan trazó se vería de la siguiente forma:

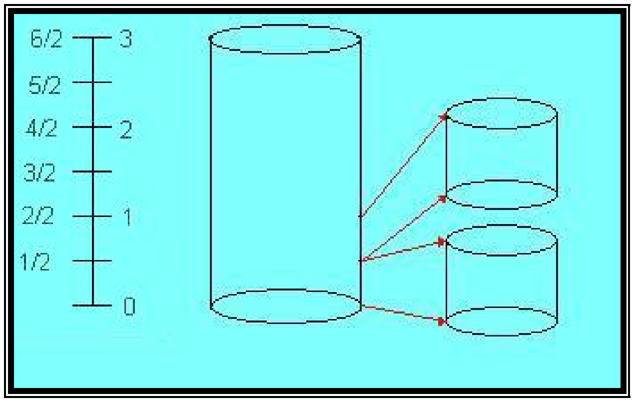


Figura 16. Comparación de porciones de la unidad – vaso cilíndrico

Como ejemplo con estos nuevos vasos se representaron los mismos racionales que habían representado con los vasos cónicos, es decir, los racionales cinco medios y diez cuartos.

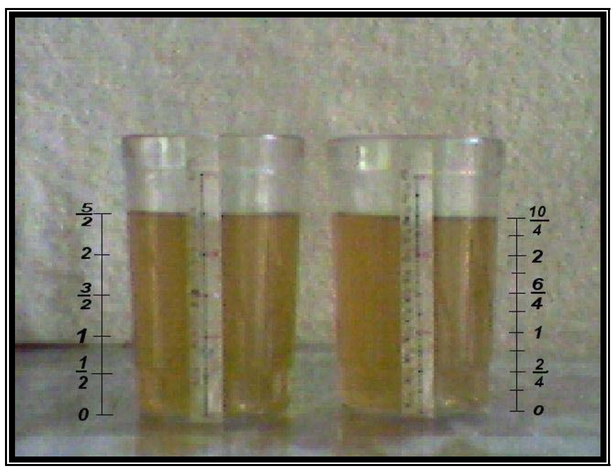


Figura 17. Ejemplo del segundo juego de Jonathan Ferney - Fase 3

El entrar en el mundo de los juegos tiene muchas implicaciones, no es solamente jugar por jugar; como se dice popularmente, *"una persona se conoce en la mesa y en el juego"*. El sociólogo Huizinga, citado por Miguel de Guzmán (De Guzmán, recuperado el 21 julio de 2006, p. 18), presenta unas características muy específicas para el juego, estas son:

- Es una actividad libre, es decir, una actividad que se ejercita por sí misma, no por el provecho que de ella se pueda derivar.
- Tiene una cierta función en el desarrollo del hombre; el niño, como el animal, juega y se prepara con ello para la vida; también el hombre adulto juega y al hacerlo experimenta un sentido de liberación, de evasión, de relajación.
- El juego no es broma; el peor revienta juegos es el que no se toma en serio su juego.
- El juego, como la obra de arte, produce placer a través de su ejecución y contemplación.
- El juego se ejercita separado de la vida ordinaria en el tiempo y en el espacio.
- Existen ciertos elementos de tensión en él, cuya liberación y catarsis causan gran placer.
- El juego da origen a lazos especiales entre quienes lo practican.
- A través de sus reglas el juego crea un nuevo orden, una nueva vida, llena de ritmo y armonía.

Si se mira bien la matemática se puede encontrar muchos rasgos comunes entre ella y el juego; estos rasgos son los que nos presenta Miguel de Guzmán en el artículo anteriormente mencionado y que se presentan a continuación:

- Quien se introduce en la práctica de un juego debe adquirir cierta familiarización con sus reglas, relacionando unas piezas con otras al modo como el novicio en matemáticas compara y hace interactuar los primeros elementos de la teoría unos con otros.
- Quien desea avanzar en el dominio del juego va adquiriendo unas pocas técnicas simples que, en circunstancias que aparecen repetidas a menudo, conducen al éxito. Estos son los hechos y lemas básicos

de la teoría que se hacen fácilmente accesibles en una primera familiarización con los problemas sencillos del campo.

- Una exploración más profunda de un juego con una larga historia proporciona el conocimiento de los caminos peculiares de proceder de los que han sido los grandes maestros en el campo. Estas son las estrategias de un nivel más profundo y complejo que han requerido una intuición especial puesto que se encuentran a veces bien alejadas de los elementos iniciales del juego. Esto corresponde en matemáticas a la fase en la que el estudiante trata de asimilar y hacer profundamente suyos los grandes teoremas y métodos que han sido creados a través de la historia. Son los procesos de las mentes más creativas que están ahora a su disposición para que él haga uso de ellas en las situaciones más confusas y delicadas.
- Más tarde, en los juegos más sofisticados, donde la reserva de problemas nunca se agota, el jugador experto trata de resolver de forma original situaciones del juego que nunca antes han sido exploradas. Esto corresponde al enfrentamiento en matemáticas con los problemas abiertos de la teoría.
- Finalmente hay unos pocos que son capaces de crear nuevos juegos, ricos en ideas interesantes y en situaciones capaces de motivar estrategias y formas innovadoras de jugar. Esto es paralelo a la creación de nuevas teorías matemáticas, fértiles en ideas y problemas, posiblemente con aplicaciones para resolver otros problemas abiertos en matemáticas y para revelar niveles de la realidad más profundos que hasta ahora habían permanecido en la penumbra.

El matemático experto comienza su aproximación a cualquier cuestión de su campo con el mismo espíritu explorador con el que un niño comienza a investigar un juguete recién estrenado, abierto a la sorpresa y con profunda curiosidad.

Desde nuestro punto de vista al hacer que los estudiantes diseñen sus propios juegos les estamos transmitiendo la forma de enfrentarse con problemas reales, deben mirar qué tienen y qué necesitan para poder llegar a crear lo que quieren diseñar.

Por tanto, si queremos que nuestros estudiantes se interesen más por las matemáticas debemos tratar de explorar el mundo de los juegos para intentar despertar en ellos su motivación hacia esta área de estudio; nos parece pertinente en este momento citar las palabras de Miguel de Guzmán cuando hablando acerca del aprendizaje de las matemáticas dice lo siguiente:

> *"En su aprendizaje se puede utilizar con gran provecho, como hemos visto anteriormente, sus aplicaciones, su historia, las biografías de los matemáticos más interesantes, sus relaciones con la filosofía o con otros aspectos de la mente humana, pero posiblemente ningún otro camino puede transmitir cuál es el espíritu correcto para hacer matemáticas como un juego bien escogido." (De Guzmán, recuperado el 21 julio de 2006, p. 21)*

En su propuesta para el segundo juego, la estudiante July Meléndez combina la representación gráfica con el empleo de áreas. Es creativa al utilizar dos colores, el primero para representar el número de partes en que se divide la unidad, y el segundo para señalar las partes que de la unidad se toman. Su diseño es el siguiente:

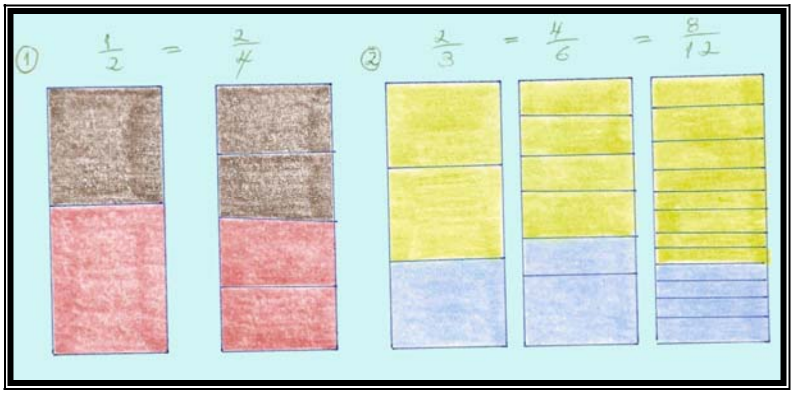
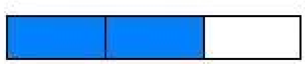


Figura 18. Segundo juego de July Victoria - Fase 1

Aunque no especifica claramente el juego, deja ver la idea de emplear fichas de color rojo (o azul) para indicar las partes en que divide la unidad y fichas de color negro (o amarillo) para indicar las partes tomadas (numerador). Inicialmente el jugador arma un racional cualquiera con las fichas, y luego, con fichas de los mismos colores arma otro racional que sea equivalente con el primero.

Posteriormente a este trabajo se realizó una entrevista con la estudiante; inicialmente se le dijo que representara un racional cualquiera, ella escogió dos tercios, e hizo lo siguiente:

$\frac{2}{3}$



¿Qué significa el denominador?

> ***"Las partes que tenemos. En que se divide la unidad"***

¿Y el numerador?

> ***"Lo que cogemos."***

¿Cómo son las partes en que dividió la unidad?

> ***"iguales"***

(Entrevista, 30 de Octubre 2006)

En este momento se le hizo ver que en el diseño del segundo juego que había presentado, las partes en que ella dividió cada unidad no eran exactamente iguales y se le dejó para que elaborara su segundo juego en la fase número dos.

La estudiante en esta segunda fase continuó con su idea de emplear dos colores distintos, uno para representar el denominador y otro para representar el numerador. Utilizó igualmente dos tipos de figuras, cuadrados de colores amarillo y rojo (para un jugador) y triángulos de colores negro y café (para un segundo jugador).

July construyó fichas del mismo tamaño según las figuras indicadas anteriormente; elaboró treinta fichas para cada figura y para cada color. El modelo de las fichas se observa en la figura siguiente:

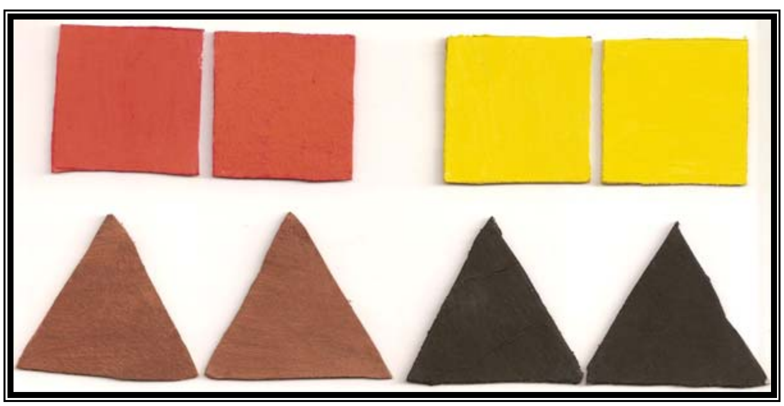


Figura 19. Fichas del segundo juego de July Victoria - Fase 2

Los colores amarillo y negro para representar el denominador y los colores rojo y café para indicar el numerador.

La idea de la estudiante es que participen dos jugadores al mismo tiempo, uno tomará los cuadrados y el otro tomará los triángulos; se le dará un racional cualquiera y cada jugador deberá representarlo con sus fichas respectivas. Posteriormente, cada uno hallará un equivalente para el racional inicial y procederá a representarlo. Ganará el juego quien termine primero la elaboración de las dos figuras, obviamente si están correctamente hallados y graficados los racionales.

La estudiante presentó una buena idea con este juego, ya que al tener fichas que se pueden manejar libremente se presta para que los jugadores armen cualquier tipo de figura y se salgan de la idea tradicional de representar racionales, casi siempre, o con círculos o con rectángulos. Además de esto, al tener las fichas ya elaboradas deja claro que la unidad debe partirse en partes iguales, no importando como sean esas fichas, cuadradas, triangulares o de cualquier otra forma.

Para observar el juego se da por ejemplo un racional cualquiera un medio, el jugador, quién seleccionó las fichas cuadradas, realiza su representación gráfica así:

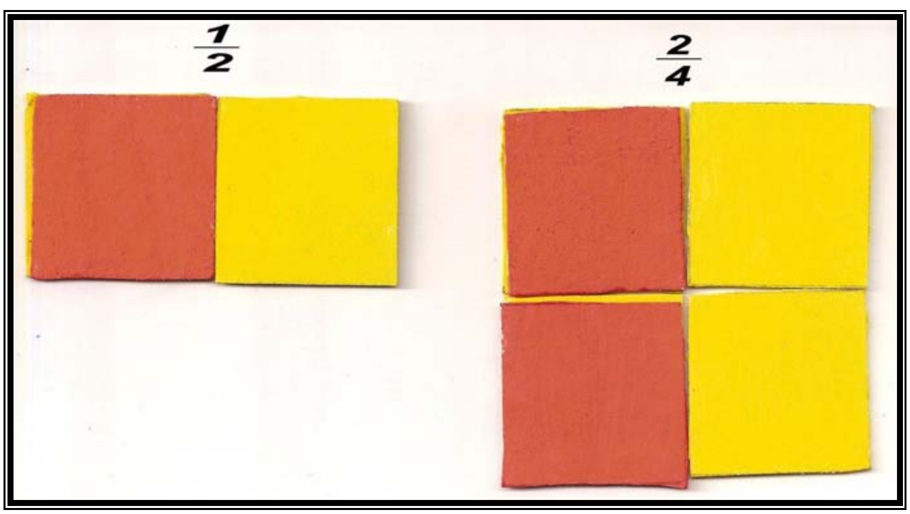


Figura 20. Ejemplo uno del segundo juego de July Victoria - Fase 2

El jugador tomó dos cuadrados amarillos para representar el denominador y sobre uno de ellos colocó un cuadrado rojo simbolizando el numerador. Enseguida se procede a obtener un equivalente para este racional, puede ser dos cuartos. Para representarlo se toma cuatro fichas amarillas, simbolizando el denominador, y dos fichas rojas simbolizando el numerador.

Al analizar lo anterior se observa que los racionales están bien representados, tanto el inicial como su equivalente; también el racional equivalente fue correctamente hallado. Se advierte un problema cuando se va a comparar las dos figuras, la inicial con la que representa a su equivalente. Se observa como la figura cambia totalmente, ya que en un comienzo se tiene un rectángulo de 2x1, mientras en el segundo caso ya la figura global es un cuadrado de 2x2. Luego, al compararlas parecería como si dos cuartos fuese mayor que un medio, y efectivamente para estas áreas será mayor, ya que se estaría hablando de áreas distintas, razón por la cual el jugador podría llegar a confundirse y se perdería la noción de equivalencia, como representantes de la misma porción de una unidad cualquiera.

Con el otro conjunto de fichas se presentaría una situación similar. Si se le da por ejemplo al jugador el racional un tercio, él realizaría lo siguiente:

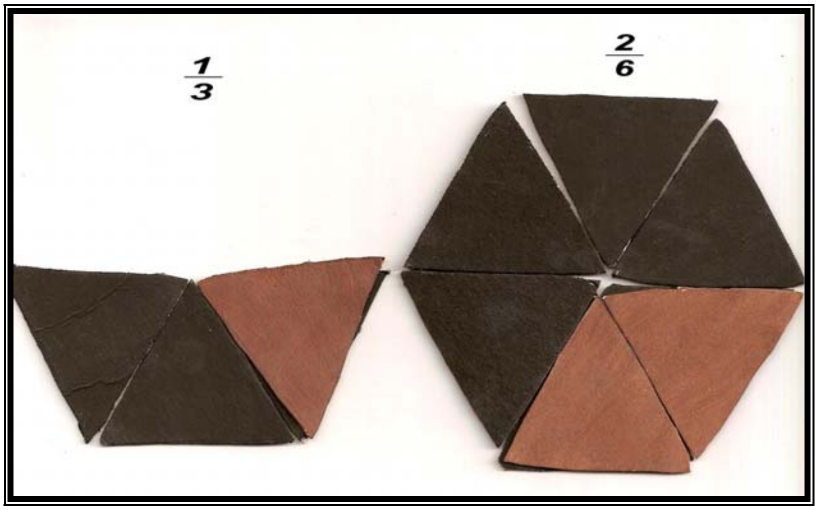


Figura 21. Ejemplo dos del segundo juego de July Victoria - Fase 2

Igualmente si se analizan los racionales, estos están bien representados gráficamente, y el equivalente está correctamente hallado; pero presenta la misma dificultad anotada anteriormente, y es la porción de área, ya que se observa como el área de dos sextos es mayor que el área de un tercio.

La estudiante mostró buena creatividad en su diseño al emplear colores y figuras diferentes, pero se habló con ella para corregir la dificultad observada en la representación de las áreas, de tal manera que cada equivalente represente la misma porción de un área inicial; así se dejó para que la estudiante modificase este diseño en una tercera fase, pero antes se hizo la entrevista respectiva con la estudiante para aclarar las ideas anteriormente expresadas.

A esta entrevista se llevaron las fichas cuadradas que la estudiante había elaborado en la fase anterior; se le pidió que representara un racional cualquiera junto con su equivalente; ella hizo lo siguiente:

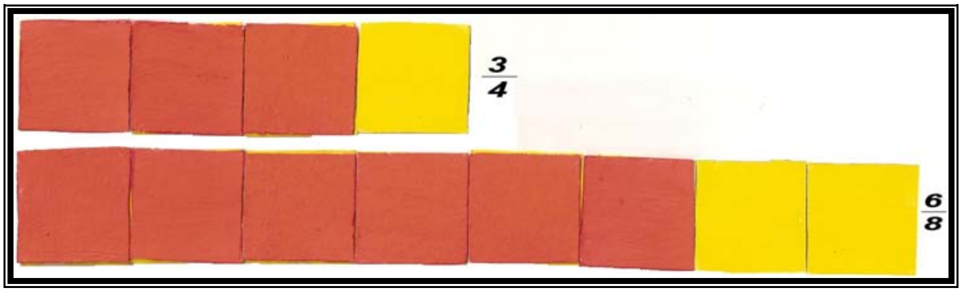


Figura 22. Ejemplo tres del segundo juego de July Victoria - Fase 2

¿Cómo son esos dos racionales?

> ***"Son equivalentes"***

¿Qué significa eso?

> ***"Que son iguales"***

¿La segunda figura que armó es igual a la primera?

> ***"No. La segunda es más larga"***

(Entrevista, Noviembre 11 de 2006)

En este momento se vio la necesidad de aclararle a la estudiante que cuando se toma una unidad fija como referencia, las porciones de esa unidad que estén representadas por racionales equivalentes deben ser exactamente las mismas. Se le recalcó que efectivamente, en esta ocasión la segunda figura era más grande que la primera y por tanto la porción tomada era igualmente mayor que en la primera figura.

¿Cómo se haría para representar $\frac{6}{8}$ pero con el tamaño de la figura primera?

> ***"…deberíamos hacer pedazos más pequeños para que quepan los ocho pedazos acá."***

(Entrevista, Noviembre 11 de 2006)

De esta manera se dejó a la estudiante para que modificase su diseño para observar lo anteriormente anotado por ella misma.

La estudiante lo que hizo fue tomar las fichas que había elaborado, tanto los cuadrados como los triángulos, y dividirlas en partes más pequeñas. Estas se observan en la siguiente figura:

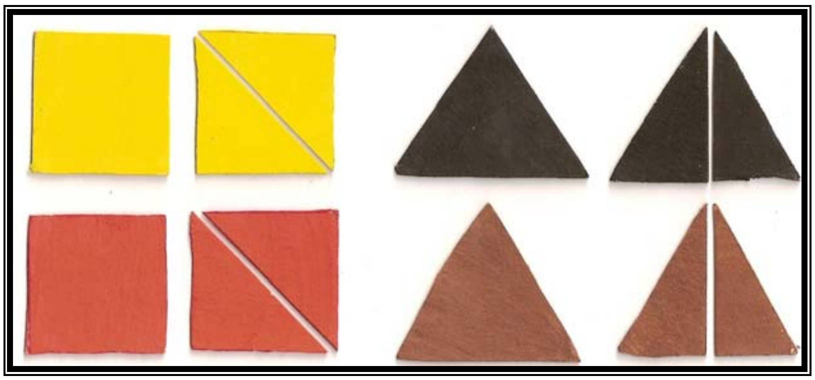


Figura 23. Fichas del segundo juego de July Victoria - Fase 3

Se nota como July al dividir las fichas tuvo el cuidado de que estas le quedaran del mismo tamaño, mostrando así la comprensión del concepto de partir en partes iguales.

De esta manera al representar racionales equivalentes el área ya no se verá modificada y la parte tomada será exactamente la misma; lo anterior se observa claramente en los siguientes gráficos:

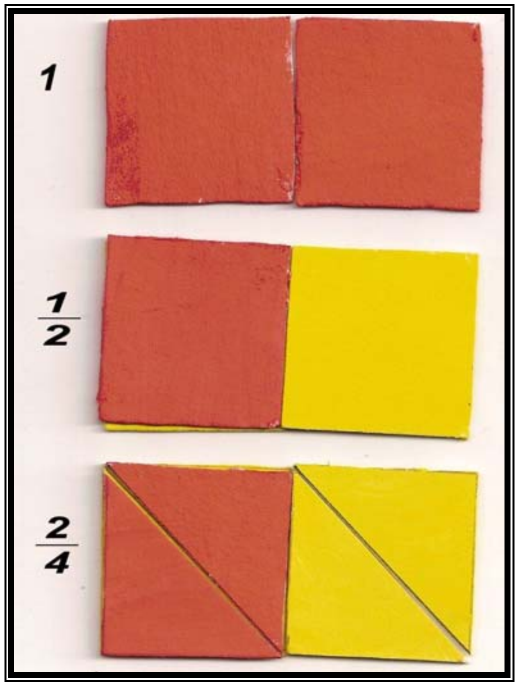


Figura 24. Ejemplo uno del segundo juego de July Victoria - Fase 3

En el ejemplo anterior se está representando inicialmente la unidad tomada como referencia; luego se grafica el racional un medio, y se procede a representar un equivalente a este, el cual sería dos cuartos. Se nota como la unidad base no se modifica y los dos racionales toman exactamente la misma porción de esa unidad, es decir, la mitad.

Igual caso se puede analizar en el siguiente ejemplo, en el cual se están representando los racionales equivalentes un tercio y dos sextos, con su correspondiente unidad base.

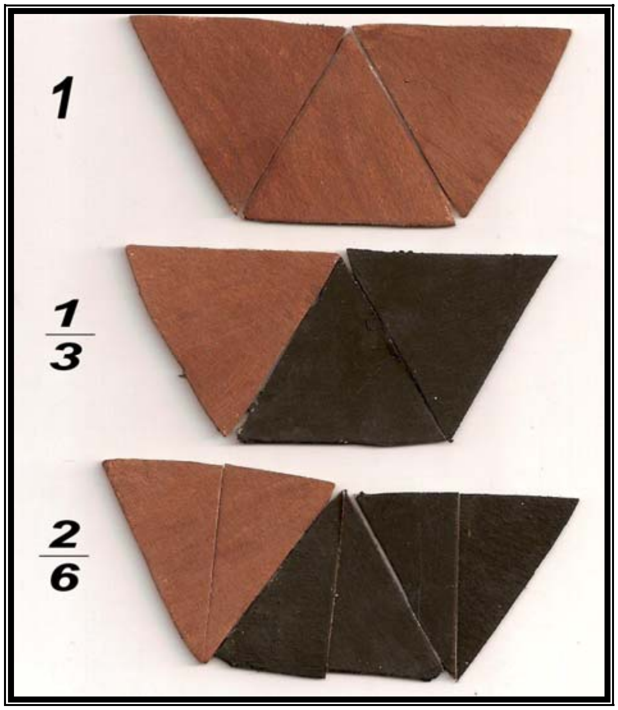


Figura 25. Ejemplo dos del segundo juego de July Victoria - Fase 3

Con estos ejemplos se puede ver que la estudiante comprendió la idea de que fracciones equivalentes, como partes de un todo, representan la misma porción de esa unidad.

Como ya se mencionó, el hecho de introducir el juego dentro del aula de clase no es simplemente para poner a jugar a los estudiantes, para entretenerlos o sencillamente traer una clase diferente; se trata de buscar que se produzca un aprendizaje en los educandos, que se despierte un interés en ellos por las matemáticas. Veamos más exactamente algunos de los puntos que nos presenta la autora Rocío González Díaz en su artículo "Aprendizaje de las matemáticas y desarrollo de habilidades del pensamiento", (González, 1997, p. 2), sobre lo que podemos lograr con nuestros estudiantes al trabajar con juegos matemáticos.

- Generar una necesidad de conocimiento a través del enigma y la sorpresa.
- Crear un gusto por el descubrimiento de lógicas, de reglas, de secuencias, de soluciones alternativas.
- Desarrollar estrategias de creación de modelos matemáticos y de búsqueda creativa de soluciones.
- Construir un lenguaje matemático a partir de su experiencia y comprender el lenguaje matemático convencional.
- Desarrollar habilidades del pensamiento.
- Construir conceptos y procedimientos generales a partir del análisis de problemas concretos.

Con lo anterior se busca que el estudiante sea una persona creativa, que busque sus propias soluciones, que haga sus propios modelos, que construya él mismo los conceptos y los asimile verdaderamente; debe apartarse por tanto del aprendizaje memorístico y buscar que este sea significativo para el mismo; de esta manera es como la autora Rocío González ve al científico y al matemático:

> *"Paradójicamente, ni el matemático ni el científico en general, son personas que repitan y memoricen, sino que son personas que ponen en juego muchas habilidades para resolver problemas y crear nuevos modelos y soluciones."*
> (González, 1997, p. 1)

Lo anterior concuerda con lo establecido en los Lineamientos curriculares cuando citando al autor Thomas Romberg se afirma que el estudiante debe dejar de depender tanto de su profesor y trabajar más bien con sus propias ideas.

"…el trabajo de los alumnos debe dejar de ser actuar con estructuras ajenas, responder a preguntas ajenas y esperar que el profesor compruebe la respuesta." (Lineamientos curriculares, 1998, p. 95)

4.2 SIENDO CREATIVOS

"Una mentalidad no creativa
puede ser capaz de ver que una respuesta es desatinada,
pero hace falta mentalidad creadora
para darse cuenta de que una pregunta está mal planteada"
Bransford, citado por García (2003, p.143)

Este proceso de diseño de juegos no se puede decir que haya sido algo fácil, pues inicialmente los estudiantes, según lo expresaban ellos mismos, no tenían ni idea de cómo empezar a diseñar sus juegos; en un comienzo se les orientó diciéndoles que simplemente mirasen los juegos que tenían en sus casas, y buscaran la forma de poder aplicarlos con el tema de fracciones equivalentes. No es de esperar por tanto que los estudiantes inventasen el gran juego del momento, sino simplemente que plasmaran sus ideas en algún diseño y extractar de allí lo más relevante para su proceso de aprendizaje. Se respetó al máximo las ideas de cada estudiante y sólo se intervino cuándo se veía la necesidad de corregir algún concepto matemático.

Durante todo el desarrollo de la investigación se trató de darle la mayor libertad a cada estudiante y de respetarle sus propias ideas, pues como lo dice Laín Entralgo esta es una de las claves de una verdadera amistad que se debe buscar entre el maestro y su educando.

> *"La verdadera amistad consiste en dejar que el amigo sea lo que él es y quiere ser, ayudándole delicadamente a lograr sus objetivos"*
> *Laín Entralgo, citado por Duque (2003, p.162)*

En el primer juego no se apreció gran esplendor en los diseños, los estudiantes se dedicaron a buscar juegos tradicionales y tratar de adecuarlos al tema en estudio; pero esto también es creatividad, ya que como dice García (2003, p. 145) la palabra creatividad deriva del latín creare que significa crear, es decir, un proceso de encontrar algo nuevo que puede consistir en redescubrir lo que ya había sido mostrado o reorganizar los conocimientos existentes para dar un incremento a dichos conceptos o generar soluciones nuevas a un problema. Por ejemplo el primer diseño propuesto por la estudiante Mónica Yeraldin fue imitando un juego de escalera; este se juega lanzando un dado y según el número que salga se avanzará tantas casillas; el juego es el que se observa a continuación.

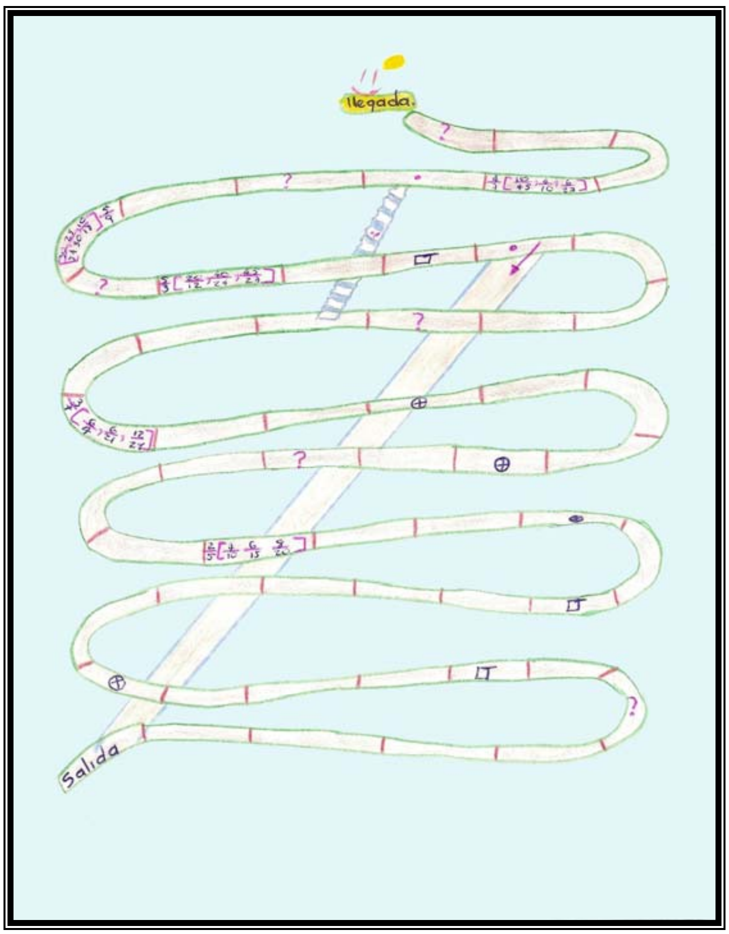
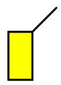


Figura 26. Primer juego de Mónica Yeraldin - Fase 1

Mónica le colocó el titulo “el camino a una buena meta”; su toque personal lo dejó en los símbolos que empleó para el juego:

 Esta figura que representaba una llanta, quería decir que el jugador se había pinchado y retrocedía dos casillas.

El símbolo  representaba una bomba de gasolina, lo cual indicaba que el jugador al caer en esta casilla debía avanzar tres más.

Tenía otros símbolos usuales como la escalera para ascender o descender por ella, y también unos interrogantes, los cuales representaba que se le debía hacer una pregunta sobre fracciones equivalentes al jugador que cayera en esa casilla.

En las demás casillas tenía escritas algunas fracciones y frente a ellas dentro de un corchete tenia otras tres fracciones. En las instrucciones que escribió decía que el jugador debía seleccionar de las tres fracciones la que era equivalente con la que estaba fuera del corchete, si respondía correctamente tenía algunos beneficios, si respondía mal tenía algunos castigos. Pero tuvo algunos errores como los siguientes:

$\frac{2}{5}\left[\frac{4}{10},\frac{6}{15},\frac{8}{20}\right]$ Como vemos todas las fracciones de adentro son equivalentes con la de afuera.

$\frac{5}{3}\left[\frac{20}{12},\frac{40}{24},\frac{45}{27}\right]$ Igual ocurrió en este caso.

$\frac{3}{7}\left[\frac{6}{4},\frac{6}{21},\frac{12}{28}\right]$ En este caso, solo una era equivalente con la de afuera.

Por lo que se puede apreciar la estudiante no obtuvo adecuadamente todas las fracciones dentro del corchete, esto indicaría que no tenía aún muy claro el proceso para obtener fracciones equivalentes, por ello fue necesario recordar el algoritmo de multiplicar en cruz para identificar fracciones equivalentes, y los procesos de amplificación y simplificación. En la segunda fase la estudiante presentó su nuevo diseño:

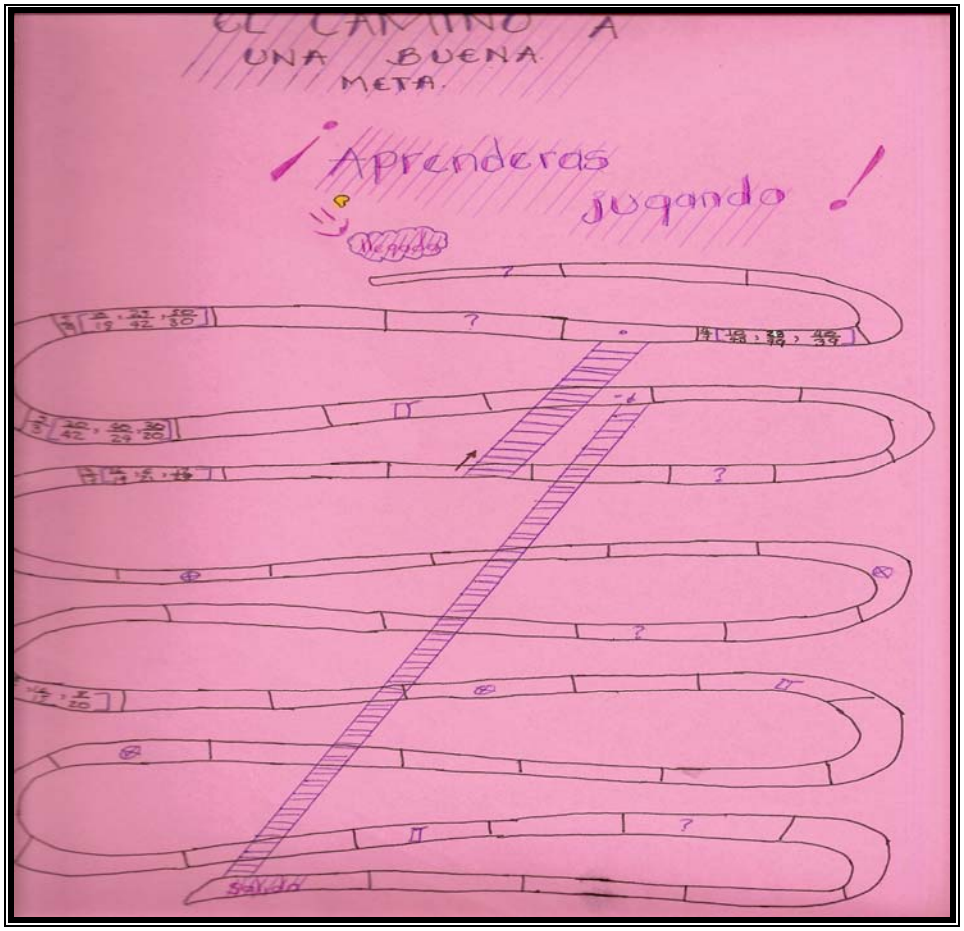


Figura 27. Primer juego de Mónica Yeraldin - Fase 2

En él se observa como Mónica halló cuidadosamente las fracciones internas para que sólo una de ellas fuese equivalente con la fracción que esta en el exterior. Algunas de las fracciones que colocó son las siguientes:

$\frac{4}{7}\left[\frac{10}{45},\frac{28}{49},\frac{40}{39}\right]$ $\frac{5}{9}\left[\frac{10}{18},\frac{25}{42},\frac{50}{30}\right]$ $\frac{5}{3}\left[\frac{20}{42},\frac{40}{24},\frac{30}{20}\right]$

Es necesario aclarar que la creatividad no sólo se debe ver desde el punto de vista clásico, que es el que ya se ha presentado, es decir, producir algo nuevo o redescubrir lo que ya había sido mostrado, sino que la creatividad también se puede ver como un proceso que implica una actividad cognitiva permanente en el individuo, que le debe proveer de una forma singular de pensar, sentir y actuar. Desde este punto de vista, según lo afirma García (2003, p. 146), la creatividad es un conjunto de capacidades y disposiciones que hacen que una persona elabore con frecuencia productos creativos; dichas capacidades son las que nos permitimos presentar a continuación.

❖ **Sensibilidad para los problemas**

Esta capacidad permite a los individuos problematizar las cosas y los nexos causales, es decir, se los pueden presentar como problema e iniciar así las soluciones.

❖ **Habilidad de transferencia**

Es la capacidad que tiene el individuo para cambiar los enfoques con los cuales se enfrenta a un problema, y que le posibilita ser capaz de resolver una serie de tareas cada una de las cuales exige una estrategia diferente.

❖ **Fertilidad de ideas**

Esta capacidad la conforman varios componentes, los tres primeros se relacionan con el lenguaje y son la capacidad para producir palabras con un mismo fonema o a partir de una misma cantidad y tipo de letras; la fluidez para asociar, manifestada en la capacidad para encontrar sinónimos y la fluidez de expresión, que consiste en la capacidad para yuxtaponer palabras y para conformar estructuras gramaticales. El cuarto componente es la fluidez ideacional que consiste en la capacidad de generar ideas en un tiempo limitado para satisfacer ciertos lineamientos.

❖ **Originalidad**

Esta implica la reunión de materiales o conocimientos existentes, para producir elementos nuevos, originalidad es tener ideas y ocurrencias diferentes. Para ser original hay que alejarse de las corrientes y paradigmas que se encuentran en boga y no esperar la aprobación de las mayorías. Los hombres creativos hacen caso omiso de las vinculaciones funcionales entre los objetos, utilizándolas de nuevas maneras siendo capaces además de poner nuevos nombres a las experiencias ya vividas.

Según lo anterior se podría afirmar que los estudiantes fueron originales y por lo tanto creativos, ya que emplearon algo que ya existía pero la utilizaron de una forma nueva; por ejemplo el caso de Brayan y su dominó (ver figuras 4 y 5), tomó este juego clásico pero le dio una nueva forma como dominó de equivalentes; igual sería el caso de Tatiana con su tablero, cuando presentó algo parecido a un tablero de ajedrez, (figuras 7 y 8) pero le dio una nueva utilización y colocó unas nuevas reglas para darle vida a su propio juego.

❖ **Capacidad para percibir ciertas conexiones no obvias entre hechos**

Esta capacidad consiste en la recuperación de información distante pero asociada con el problema, y, de descubrir relaciones entre experiencias antes no relacionadas, relaciones que se manifiestan en forma de nuevos esquemas mentales. Esta capacidad creativa permite generar nuevos órdenes entre contextos y elementos que regularmente no harían parte de una misma estructura.

- **Capacidad de representación**

  Esta capacidad implica el establecimiento por parte del individuo de nuevos modelos de los fenómenos, que esclarezcan y descubran relaciones diferentes entre sus elementos. Esta capacidad implica la elaboración de transformaciones imaginativas de la realidad a través de procesos de imaginación dirigida.

La estudiante July Meléndez presentó un laberinto al cual le adicionó cuatro reglas para poder llevar a cabo el juego; pero las reglas no estaban muy claras, pues hablaba de efectuar algunas operaciones para poder encontrar la salida del laberinto, sin embargo en el juego no se veían cuales eran las operaciones que se debían efectuar; presentó varias fracciones equivalentes dentro de su diseño, como $\frac{5}{9}=\frac{30}{54}$, $\frac{4}{7}=\frac{8}{14}$, pero como ya se escribió, no se entendía qué se debía hacer con ellas.

Su primer diseño fue el siguiente:

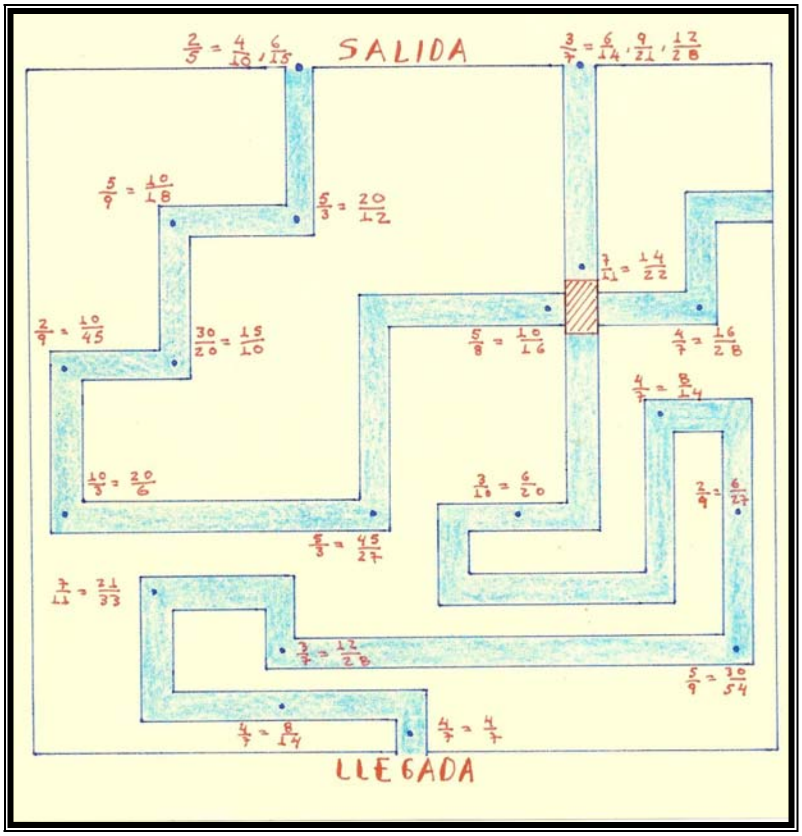


Figura 28. Primer juego de July Victoria - Fase 1

Se nota como todas las fracciones que colocó en su juego son fracciones equivalentes correctamente halladas, al parecer no tenía dificultades en encontrarlas; la cuestión es que no tenía muy claras las reglas de su juego.

Se buscaron dos fracciones equivalentes que ella había utilizado en su juego $\frac{10}{3}=\frac{20}{6}$, y se le preguntó si eran equivalentes, ella dijo:

"Sí, porque al multiplicarla por el mismo número da otro número"
(Entrevista, 25 septiembre 2006)

Al comienzo no se entendió lo que decía, pero al seguir preguntando se comprendió que se refería al proceso de amplificación para obtener fracciones equivalentes y el mismo número al que se refería era los dos medios, que al multiplicarlo por diez tercios nos produce veinte sextos.

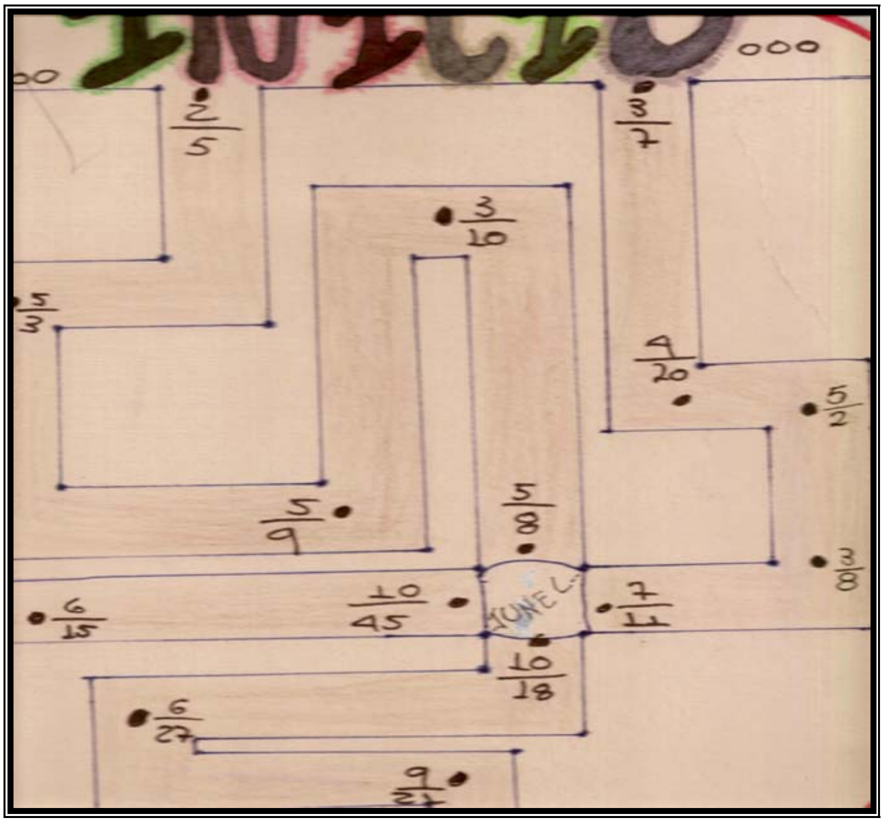


Figura 29. Primer juego de July Victoria - Fase 2

La figura anterior muestra el juego de July en su segunda fase, no modificó su idea básica del laberinto pero en esta ocasión escribió fracciones sencillas en diferentes puntos del tablero; el juego está planteado para dos participantes al mismo tiempo, cada uno escoge un camino diferente, en cada fracción deberán encontrar dos equivalentes para dicha fracción, si lo hace correctamente podrá seguir avanzando, si no halla las fracciones tendrá que devolverse al comienzo, en el caso de fallar por tres veces seguidas quedará descalificado del juego y le dará la oportunidad a otro jugador.

La creatividad es todo un proceso, no se puede llegar a obtener un producto creativo de un momento a otro, lo cual se evidenció en este trabajo con los estudiantes. Según García (2003, p. 149) las etapas que conforman el proceso creativo son las siguientes:

- **Encuentro con el problema**

  En esta fase el sujeto usando su pensamiento crítico y sensibilidad a los problemas, se hace consciente de la necesidad de crear, de solucionar un problema o de exteriorizar unas ideas que le estaban preocupando. Esta fase fue realmente crítica para los estudiantes, pues para el primer juego pasaron varias clases y todavía no tenían claro como debían diseñar sus juegos, en muchas ocasiones se acercaron al docente para solicitar una dirección; luego de darles la dirección adecuada algunos se encontraron con otro problema adicional, y es que no tenían claros los conceptos matemáticos, ahí fue necesario que recurrieran a sus apuntes de clase, al docente y a sus mismos compañeros, estableciendo un círculo comunicativo, para resolver las dudas que tenían y poder dar creación a su juego. Esa comunicación es precisamente la que el Ministerio de Educación Nacional pide que esté presente en nuestras clases:

  > *"Las clases deberían caracterizarse por las conversaciones sobre las matemáticas entre los estudiantes y entre estos y el profesor."*
  > *(Lineamientos curriculares, 1998, p. 96)*

- **Generación de ideas**

  En esta fase el sujeto juega con sus ideas, dejando al mando a la inspiración y avanzando imaginativamente hacia el encuentro de posibles soluciones al problema, para consumar el proceso en la generación de la nueva idea que puede ser con carácter conceptual o con carácter de emoción como en el caso de la creación estética. Esta fase regularmente está libre de controles y juicios de valor, es lúdica y placentera.

Siempre se trató de darles el tiempo prudencial a los estudiantes para que generasen sus ideas; la fase uno de cada juego fueron los bosquejos que cada estudiante elaboró para su juego respectivo, estos bosquejos fueron elaborados en las mismas horas de clase que se tenía con ellos, pero unos días antes se les había dado las indicaciones para que fueran generando sus ideas y llegaran a la clase ya con ideas algo más claras para plasmar en cada bosquejo. Igual ocurrió con la segunda y tercera fase de cada juego, pues después de hacer las entrevistas respectivas y aclarar conceptos con cada estudiante, ellos en sus casas iban generando nuevas ideas para dar la creación a sus nuevos diseños. Por lo general se tuvo un período de ocho días entre una fase y otra.

- **Elaboración de la idea**

En esta fase se materializa el proyecto o creación, entran a jugar el pensamiento lógico, el intelecto y el juicio. Durante esta fase se seleccionan las ideas, se les da cuerpo, se diseñan más claramente sus modelos mentales de soporte, y en fin, se elabora la idea hasta sus últimas consecuencias.

- **Transferencia creativa**

Esta última fase del proceso creador implica relacionar la idea nueva con otros saberes y con otros campos problémicos, además de darla a conocer ampliamente para que entre en el libre juego de la producción de otras ideas.

En la segunda etapa de esta investigación, es decir cuando los estudiantes estuvieron diseñando sus segundos juegos, se pudo observar un poco más de ingenio y creatividad en los mismos; en el caso de Karen Tatiana inicialmente propuso una ruleta, los racionales en el exterior de la rueda están fijos, el jugador selecciona uno de ellos. Hace girar la ruleta; si al detenerse, frente al racional seleccionado queda una porción cuyo dibujo represente un equivalente con aquel, el jugador ganará un punto, si no, tendrá el turno el otro jugador. Es decir, se selecciona por ejemplo un tercio, se gira y para ganar, frente a un tercio debe quedar la porción que está en la parte inferior dividida en seis porciones y coloreadas dos, la cual está representando al racional dos sextos, el cual es equivalente con un tercio. Su diseño en la fase uno fue el siguiente.

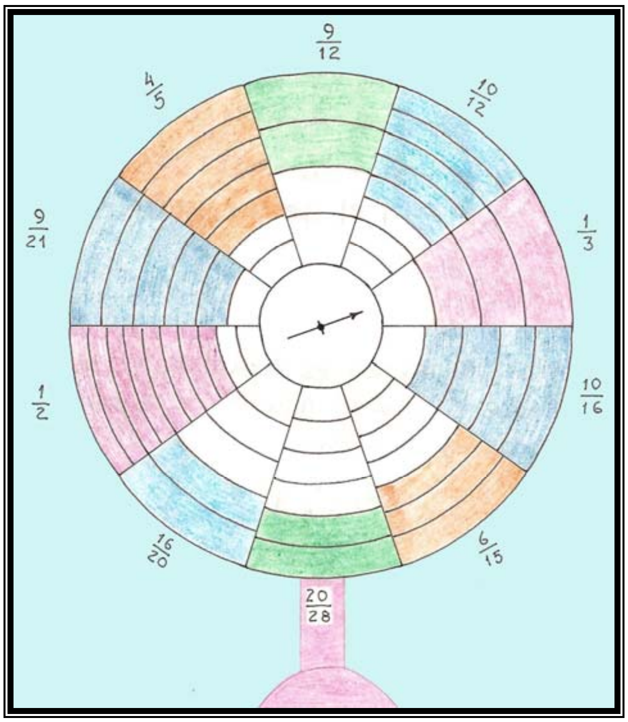


Figura 30. Segundo juego de Karen Tatiana - Fase 1

El juego es bastante creativo y está empleando la representación gráfica, además que se cuidó de buscar los equivalentes para cada racional que había ubicado en el exterior de la rueda. El problema con esta propuesta es que, al dividir cada porción de la rueda, estas no quedaron divididas en partes iguales, ya que del centro hacia fuera cada porción va quedando con un área mayor, lo cual contrasta con la idea de fracción.

En charla posterior con la estudiante se deseó indagar un poco más sobre su propuesta de juego. Inicialmente se le dibuja un rectángulo y se le pide que represente un racional cualquiera, para lo cual ella escoge tres quintos. Se le hizo la siguiente pregunta:

¿Cómo representaría gráficamente tres quintos en este rectángulo?

> ***"Divido el cuadro en cinco partes iguales y rayo únicamente tres."***

¿Por qué hace eso, porque la divide en cinco?

> ***"Porque cinco es el número que va debajo y el de arriba son las partes que uno raya."***

(Entrevista, 30 de Octubre 2006)

En su primera respuesta la estudiante dice que la divide en cinco partes iguales, sin embargo eso no fue lo que se vio en su diseño, ya que cada porción de la ruleta no estaba dividida en partes iguales. Se le aclaró a la estudiante que las porciones de la ruleta eran sectores circulares, que el radio va aumentando y por lo tanto cada parte en que se divide no son exactamente iguales, cada una tendrá un área mayor de dentro hacia fuera, lo cual no es la idea de fracción, ya que esta consiste en dividir, pero en partes iguales; después de esta aclaración fue necesario que la estudiante fuese a trabajar en una segunda fase para mejorar su diseño.

Para corregir lo anterior Tatiana decidió cambiar su juego; la forma de sector circular que tenían las porciones de la ruleta los cambió por rectángulos del mismo ancho y diferente largor; de esta manera ella obtuvo que las divisiones de cada unidad le quedaran del mismo tamaño.

El nuevo diseño de la estudiante consiste en tener dos jugadores que tendrán un número determinado de regletas y tratarán de formar parejas de equivalentes. Los jugadores se irán alternando el turno para colocar sobre la mesa una de las regletas que tienen en su poder; si el oponente tiene una regleta que forme pareja con la que el otro jugador colocó sobre la mesa, la coloca y toma esa pareja para él; al final ganará quien haya acumulado el mayor número de parejas.

Las parejas deben formarse entre racionales equivalentes, es decir, un medio con tres sextos, un cuarto con tres doceavos y así sucesivamente.

Tatiana presentó cuatro grupos con cuatro regletas cada uno, de esta manera:

GRUPO 1: Con los racionales $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$

GRUPO 2: Con los racionales $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}$

GRUPO 3: Con los racionales $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}$

GRUPO 4: Con los racionales $\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}, \frac{4}{20}$

Algunas de las regletas que la estudiante presentó se observan en la figura siguiente:

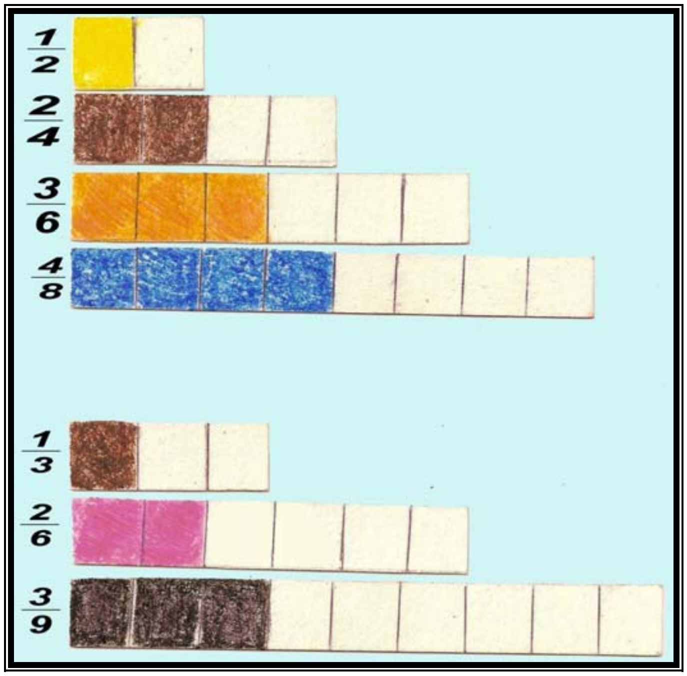


Figura 31. Segundo juego de Karen Tatiana - Fase 2

La idea de la estudiante es interesante, demuestra ingenio y creatividad en el diseño; además halló correctamente los racionales equivalentes, está empleando la representación gráfica lo cual ayuda a identificar más rápidamente un racional cualquiera; por otra parte, como ya se mencionó, se cuidó de que las divisiones le quedaran del mismo tamaño, se nota que tomó medidas para ello. Pero se advirtió una dificultad con este diseño, y es que al hacerlo de esta manera, el área total de la unidad tomada iba aumentando, según aumentaba el número de divisiones; por lo tanto, al colocar una pareja cualesquiera (dos regletas juntas) una de ellas se vería más grande que la otra y se podría perder la noción de equivalencia. Así se observa en la figura siguiente:

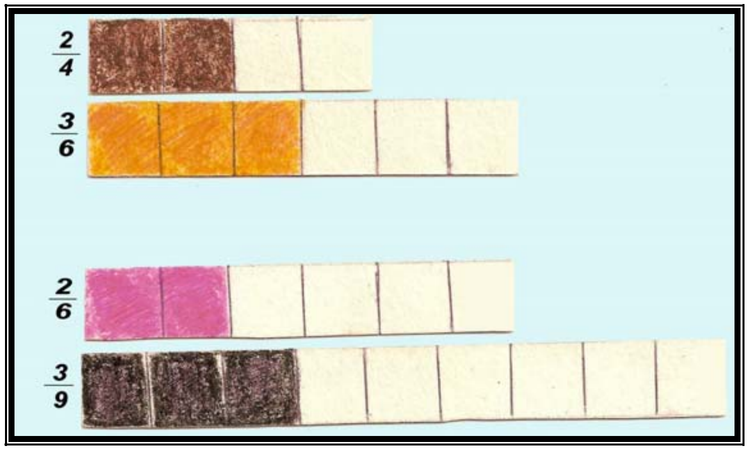


Figura 32. Ejemplo uno del segundo juego de Karen Tatiana - Fase 2

Los racionales dos cuartos y tres sextos son equivalentes, pero como se observa en la figura la segunda regleta tiene mayor área que la primera, razón por la cual el jugador se podría llevar la idea de que tres sextos es siempre mayor a dos cuartos, lo cual será cierto únicamente si se está hablando de una unidad con mayor área que la inicial. Caso similar ocurre por ejemplo con dos sextos y tres novenos.

Para aclarar lo anterior con la estudiante y hacerle ver la dificultad en su nuevo diseño, se decidió realizar una entrevista con ella; a la misma se llevaron dos de las reglillas que ella había elaborado en su diseño anterior, la de un medio y la de dos cuartos.

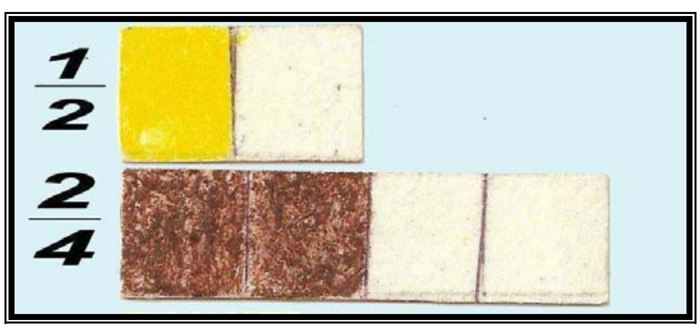


Figura 33. Ejemplo dos del segundo juego de Karen Tatiana - Fase 2

¿Cómo es el tamaño de cada regleta?

"Esta es más larga" (señalando la de dos cuartos)

¿Las partes en que la dividió, cómo son?

"son iguales"

¿Y las que tomó en cada reglilla?

"En la primera tomé dos y en la segunda tomé una."

¿Y son iguales esas dos regiones?

"No, en la de dos cuartos es más grande que la de un medio"

(Entrevista, noviembre 11 de 2006)

Con lo anterior se deseaba que la estudiante advirtiera el mayor tamaño de la porción tomada en la segunda regleta. Lo anterior debido a que los estudiantes tienen la tendencia a decir que el racional dos cuartos es mayor que un medio, por el hecho de que observan números mayores en el racional. Por esta razón se vio la necesidad de hacerle ver a la estudiante que al estar hablando de una misma área tomada como unidad, al representarla gráficamente con cualquier racional equivalente siempre deberá mostrar la misma porción tomada de esa área unitaria. Se le explicó que en esta ocasión efectivamente se veía la porción tomada en dos cuartos, mayor a la porción tomada en la regleta un medio, debido a que el área total de esa unidad era mayor al área total de la otra regleta.

Después de aclarar lo anterior con Tatiana se le recomendó modificar su diseño anterior, para que en el juego se trabajara con un mismo tamaño de regletas y así poder observar que los racionales equivalentes representan la misma porción tomada en el área.

El 13 de Noviembre, Tatiana presentó en la fase tres los mismos cuatro grupos de regletas que había presentado en la fase anterior. En esta ocasión cortó las regletas de una misma longitud y de un mismo ancho, para tener de esta manera la misma área como unidad. También se notó el cuidado que tuvo la estudiante al hacer las divisiones respectivas. Dos de los grupos que ella presentó se muestran en la figura siguiente:

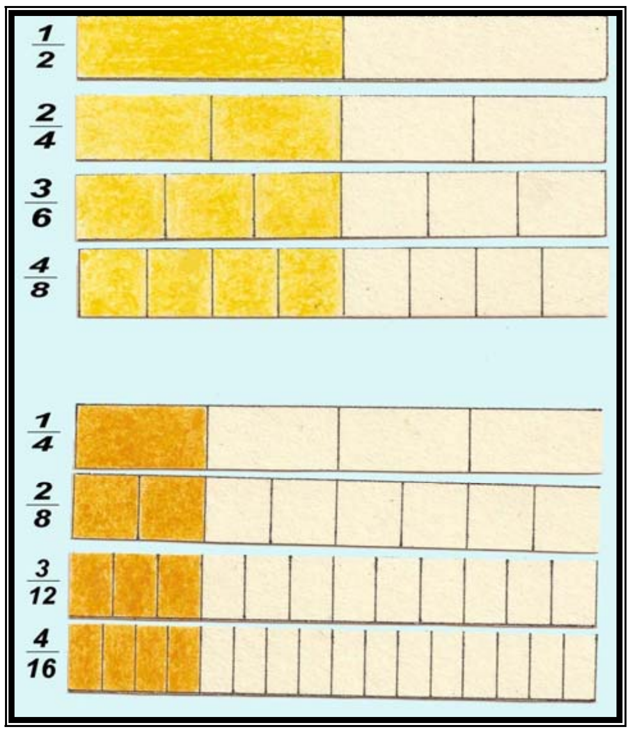


Figura 34. Segundo juego de Karen Tatiana - Fase 3

Como se observa, es evidente que cada familia de racionales equivalentes representa la misma porción del área que se haya tomado como unidad. Adicionalmente queda más fácil la comparación con otros racionales, así se puede decir fácilmente que un cuarto es menor a tres sextos, por ejemplo.

De esta manera, al armar las parejas de equivalentes, se observará como coincide la porción tomada en las regletas.

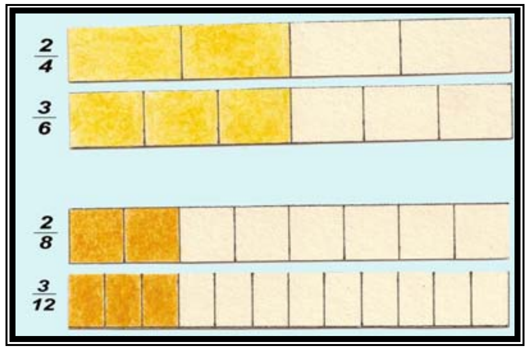


Figura 35. Ejemplo del segundo juego de Karen Tatiana - Fase 3

Al estar hablando de creatividad, ¿Cómo se podría establecer que un producto final es creativo o no? Para dar respuesta a este interrogante se hace necesario analizar los atributos que pueden llegar a caracterizar a un producto como algo creativo; estos atributos según lo expone García (2003, p. 150) son los siguientes:

- **Novedad**

  Este atributo refleja la diferencia con las demás cosas que ya existen, y la unicidad en su género.

- **Impredictibilidad**

  El producto debe ser algo imprevisto, que no podría haber sido predicho, calculado o diseñado fácilmente y con anterioridad.

- **Utilidad y adecuación**

  Este atributo le genera al producto un valor determinado dentro de la propia cultura.

Estas características, que podrían llamarse clásicas, no dejan muy contentos a algunos autores, ya que al parecer implicaría que un producto bastante útil pero sin originalidad no es un producto creativo, y que un producto que no sea útil o que sea inadecuado para la cultura, aunque goce de gran originalidad, tampoco podría ser clasificado como creativo.

Presentando su desacuerdo con lo anteriormente expuesto, Nickerson citado por García afirma lo siguiente:

> *"Los productos significativamente creativos y reconocidos como tales por la cultura poseen como cosa característica unos rasgos más específicos que la sola originalidad y adecuación,… en las artes y hasta cierto punto donde se quiera, se incluyen entre estas características la unidad, la intensidad y la complejidad, la abstracción y la significación simbólica, la trascendencia de las limitaciones, el poder de síntesis, la intuición, la inventiva y la perspectiva a la competencia, los productos creativos extienden o rompen las fronteras."*
>
> *García (2003, p. 150)*

En el diseño del segundo juego la estudiante Mónica Yeraldin presentó un juego de casas y balones; cada casa tiene un racional así como cada balón; se trata de buscar el racional equivalente de los balones con sus respectivos en las casas, una vez hecho esto cada jugador debe hacer la representación de los racionales hallados. El bosquejo que ella presentó es el siguiente:

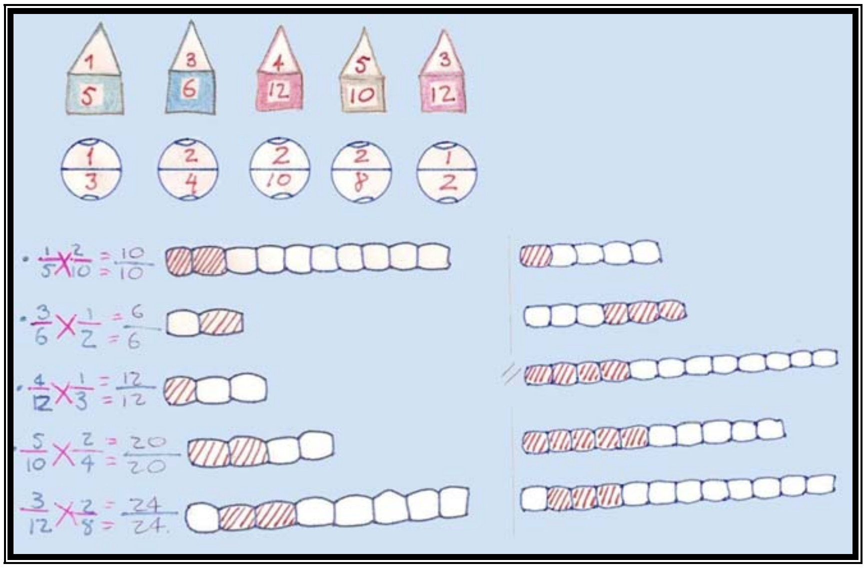


Figura 36. Segundo juego de Mónica Yeraldin - Fase 1

En la primera parte se cuidó de buscar el racional equivalente para cada uno en las casas y en los balones. Se nota que tiene claro la representación numérica de un racional, pero no tanto la gráfica. Es interesante ya que emplea algoritmos que no había empleado antes como la simplificación en el caso $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ó $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$; incluso obtiene fracciones sin emplear la simplificación o amplificación directa como en el caso de hallar $\frac{5}{10}=\frac{2}{4}$ o en el caso de $\frac{3}{12}=\frac{2}{8}$.

También se observa que además de emplear la representación gráfica y numérica incluye el área para simbolizar la unidad. Claro que en este caso se advierten ciertos errores. Si es cierto que al dividir la unidad trata de emplear porciones de igual tamaño y simboliza perfectamente el numerador y el denominador, no advierte que el área de la unidad original está aumentando, razón por la cual se pierde la idea de equivalencia, circunstancia que ya se había advertido también en otros estudiantes.

Después de esto se procedió a tener una entrevista con la estudiante, y se le pide que escoja un racional y lo grafique. Ella escoge dos cuartos y hace lo siguiente:

$\frac{2}{4}$

¿Qué representa el denominador?

> ***"La cantidad que tengo que tomar, no, la cantidad en que tengo que dividir el dibujo"***

¿Y el numerador?

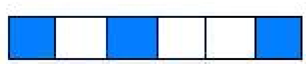
> ***"La cantidad que tengo que tomar."***

¿Escriba un equivalente para ese dos cuartos?

Ella escribe $\frac{3}{6}$.

Represente gráficamente $\frac{3}{6}$.

Ella dibuja:



¿Cómo son las partes en que se divide la unidad?

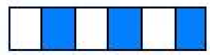
> ***"Iguales."***

¿Cómo debe ser el tamaño total del rectángulo?

> ***"Debe ser más largo para que alcance a dar las partes."***

¿Cómo haríamos para graficar tres sextos, pero en un rectángulo del mismo tamaño del original?

> ***"Pues, lo dividiría más pequeño…tomo partes más pequeñas."***

Y procede a dibujarlo: 

(Entrevista, 30 de Octubre 2006)

Se le hizo ver a la estudiante que en su propuesta de juego ella iba modificando el área original según lo necesitaba; en algunos casos dibujaba los rectángulos unidad más grandes y en otros más pequeños, es decir, solo tomaba en cuenta que las partes le quedaran de igual tamaño, pero no advertía que el área original se le estaba modificando. Se debe aclarar que cada racional se halla bien representado y son equivalentes, la dificultad está cuando se van a comparar los dos gráficos para ver la equivalencia, se vería como si uno fuese mayor que el otro.

Después de hablar con ella y hacerle ver estas cosas, modificó la propuesta inicial que había realizado para llevar a cabo su juego. En esta segunda fase se preocupó para que el área total original no se modificase al ir representando cada equivalente; la estudiante presentó en esta ocasión dos rectángulos, uno de 11x9 centímetros y otro de 12x5 centímetros, los cuales representarían las áreas totales que no se modificarían en ningún momento. Uno de estos rectángulos es el siguiente:

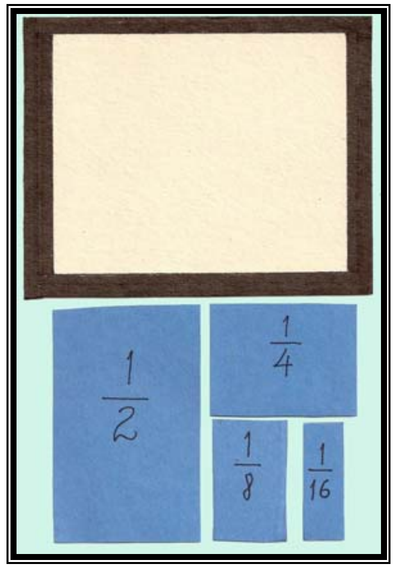


Figura 37. Segundo juego de Mónica Yeraldin - Fase 2 – parte a

Como se observa, la estudiante dividió el rectángulo en diferentes partes de tamaño más pequeño. La dividió en dos partes cada una representando un medio; la dividió en cuatro partes cada una representando un cuarto; la dividió en ocho partes cada una representando un octavo, y también la dividió en dieciséis partes cada una representando un dieciseisavo del área total.

El juego consiste en que el participante toma un racional cualquiera y lo representa en el área que tiene (según el rectángulo que haya tomado), luego busca un equivalente para ese racional y procede igualmente a representarlo en la misma área que tiene buscando las fichas adecuadas para ello, para que de esta manera pueda observar como los dos representan la misma porción del área.

Por ejemplo se le da al jugador el racional tres cuartos, por lo cual toma las fichas de un cuarto y lo representa en el rectángulo, colocando tres de estas fichas; luego halla su equivalente y lo representa también, así como se observa en la figura:

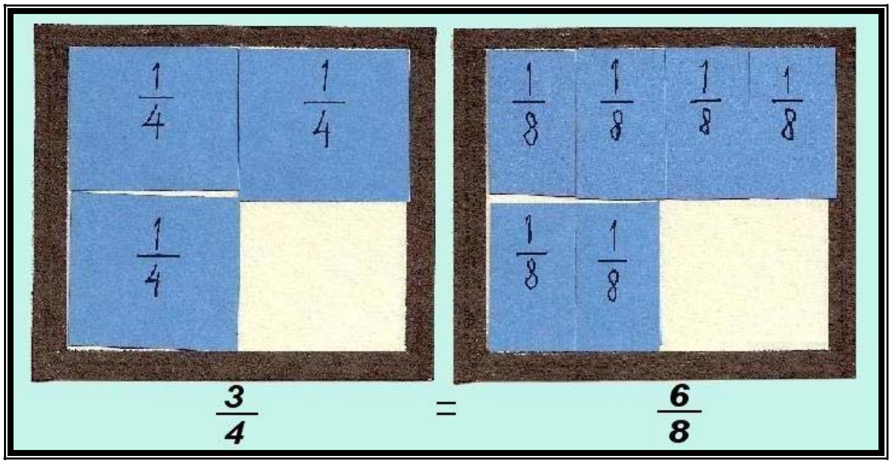


Figura 38. Ejemplo del segundo juego de Mónica Yeraldin - Fase 2 – parte a

Se analiza como la estudiante maneja muy bien el concepto de racionales equivalentes como representantes de la misma porción de un área tomada como unidad. Igualmente al dividir la unidad en partes más pequeñas tuvo el cuidado de hacer bien los recortes para obtener el mismo tamaño original.

La estudiante presentó dos rectángulos, pensando en colocar dos jugadores al mismo tiempo a representar racionales y sus equivalentes en las áreas que cada uno tuviera. El segundo rectángulo fue un poco más pequeño que el anterior y fue el siguiente:

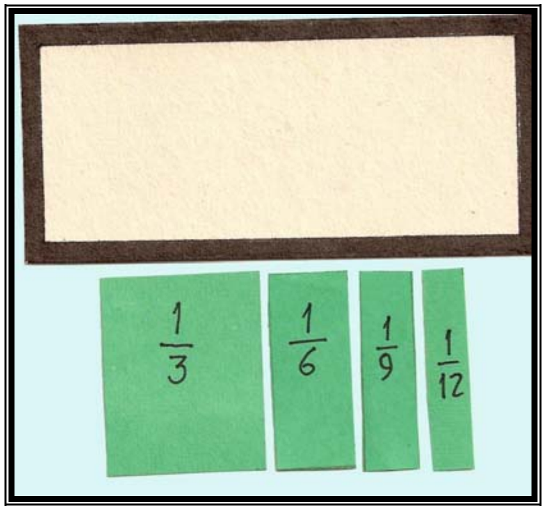


Figura 39. Segundo juego de Mónica Yeraldin - Fase 2 – parte b

Esta área ella la dividió en tres partes representando cada una un tercio del área total; también la dividió en seis partes siendo cada una un sexto del área; la dividió luego en nueve partes siendo cada una un noveno del área y cortó también doce pedazos iguales que cubren completamente el rectángulo, para que cada uno de ellos represente un doceavo del área original.

En este caso, por ejemplo, se da el racional dos tercios, el jugador procede a representarlo en el rectángulo asignado, tomando las fichas de un tercio para colocar dos de ellas sobre el área. Posteriormente obtiene su equivalente, el cual podría ser seis novenos y lo representa de la misma manera sobre el rectángulo anterior, así como se puede observar enseguida:

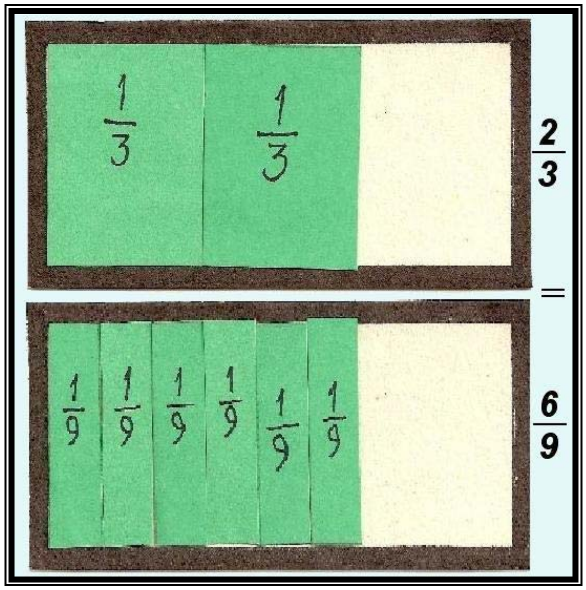


Figura 40. Ejemplo del segundo juego de Mónica Yeraldin - Fase 2 – parte b

Con este nuevo diseño se observa como la estudiante comprendió que no se debe modificar el área original, para que se observe claramente la representación de los equivalentes dentro de una misma área. Igualmente divide cada unidad en partes exactamente iguales, pero más pequeñas, de tal manera que cubran el área inicial. Como no se observaron errores en este diseño no se vio la necesidad de que la estudiante lo modificase.

Se ha observado hasta el momento como el colegio puede convertirse en un lugar adecuado para que nuestros estudiantes vayan desarrollando su creatividad; pero para ello se necesita reunir un conjunto de condiciones materiales que posibiliten el desarrollo de los procesos creativos por parte de los educandos. Estas condiciones según lo presenta García (2003, p. 165) son de tres tipos: condiciones comunicacionales, condiciones organizacionales y condiciones espacio-temporales; condiciones que en su conjunto conforman una atmósfera creativa que puede dar lugar a un encuentro humano pedagógico, denominado clase creativa.

Condiciones comunicacionales

Estas condiciones pretenden eliminar la atmósfera represiva, la dictadura de la opinión y el prejuicio de que todo acto creativo debe inicialmente ser estrictamente lógico; por el contrario se trata de potenciar los actos conversatorios, las relaciones horizontales de poder en el aula y los procesos participativos, imaginativos e involucrativos de los educandos. Estas condiciones pueden ser:

- ✓ Acometimiento de actividades que permitan a los estudiantes sensibilizar su percepción a través del ejercicio de la fantasía, la ficción, la utopía y la imaginación.
- ✓ Posibilidad abierta y permanente para la expresión de las ideas de los estudiantes, y el apoyo irrestricto a sus iniciativas sin importar salirse un poco del tema.
- ✓ Posibilidad explícita del ejercicio de procesos de auto evaluación, que le permitan al alumno y al docente detectar fallas y aciertos en el quehacer del aula y establecer las transformaciones y correctivos necesarios.
- ✓ Modificar las relaciones unidireccionales entre docente y estudiante, para que este pueda comunicarse en forma libre, espontánea y eficiente, y de esta manera se pueda mejorar la capacidad del grupo para dar solución a los problemas.

Condiciones espacio-temporales

El establecimiento de este tipo de condiciones persigue eliminar las atmósferas represivas, el desarrollo de tareas repetitivas y la dicotomía entre arte y ciencia. Estas condiciones son:

- ✓ Establecimiento por parte de los estudiantes de un inventario de los recursos con los cuales se puede contar para acometer la resolución creativa de los problemas propuestos.

- ✓ Provisión a los estudiantes del control sobre un área física determinada, donde puedan almacenar y manipular sus propios materiales y reunirse a trabajar con independencia, además de otorgarles autonomía para organizar el espacio de la clase.
- ✓ Realización de las actividades de la clase fuera de las paredes del aula, para encontrarse con nuevos y diferentes ambientes.
- ✓ Transformación de las paredes y los muros del aula, convirtiéndolos en lugares de exposición para los trabajos de los estudiantes y en sitios para exponer sus inquietudes, dudas y resultados.

Condiciones organizacionales

El establecimiento de condiciones organizacionales para la clase creativa persigue mejorar la calidad de las interacciones entre los individuos al interior del aula, y eliminar la dicotomía entre lo lúdico y el trabajo académico. La creación de este tipo de condiciones supone la ejecución de los siguientes procedimientos:

- ✓ Conformación por parte de los estudiantes de equipos de trabajo, con el fin de dar identidad y compromiso a sus miembros con el colectivo de la clase. Estos equipos deberán estar identificados con un símbolo que pueda constituir la marca original de todo lo que el equipo expresa o hace.
- ✓ Posibilidades para que los diferentes equipos puedan realizar trabajos independientes y socializar sus logros e ideas con los otros equipos.
- ✓ Utilización de sistemas de auto dirección y retroalimentación de la información para el trabajo con los alumnos como cuadernos de trabajo y memorias.

4.3 DE PRINCIPIO A FIN

"El maestro es aquel artista que poco a poco, con amor y paciencia,
va descubriendo los dones de sus discípulos
y va encontrando la misión de educar"
Duque (2003, p. 203)

En esta categoría se mostrará los progresos en el proceso de aprendizaje que tuvo cada estudiante desde el comienzo de la investigación con las actividades preliminares desarrolladas, comparándolas con la actividad final que se realizó denominada "Revisión final del aprendizaje"; en algunos casos donde se considere necesario se mostrará también algunos puntos intermedios en todo este proceso, para analizar cómo ha sido la evolución del estudiante en el aprendizaje de las fracciones equivalentes.

En una actividad preliminar, llevada a cabo el día 6 de Septiembre del año 2006, donde se le había pedido ubicar algunos racionales sobre una recta numérica, el estudiante Jonathan Ferney los ubicó según el denominador que cada racional tuviera; los racionales a ubicar eran: $\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{4}{6},\frac{6}{6},\frac{4}{2}$. Jonathan los ubicó de la siguiente manera:

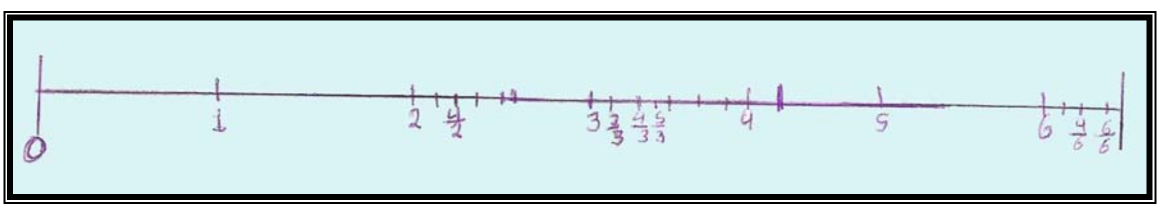


Figura 41. Aparte uno de la actividad Diagnóstica de Jonathan Ferney

Se advierte que Jonathan no tenía claro como ubicar racionales en la recta, tampoco identifica las fracciones equivalentes, se limita a ubicar los racionales con denominador dos, después del dos, los que tienen denominador tres, después del tres, y de igual manera hace con los racionales de denominador seis. Es de aclarar que tanto él como sus demás compañeros vienen viendo el tema de racionales desde la básica primaria y aún en el grado sexto de secundaria.

Posteriormente, cuando elaboró el primer diseño de su segundo juego, el 25 de Octubre, Jonathan dibujó una recta donde ubicó unos racionales seleccionados por él mismo, para emplearlos en el juego del futbolín; en esta ocasión lo hizo de la siguiente manera:

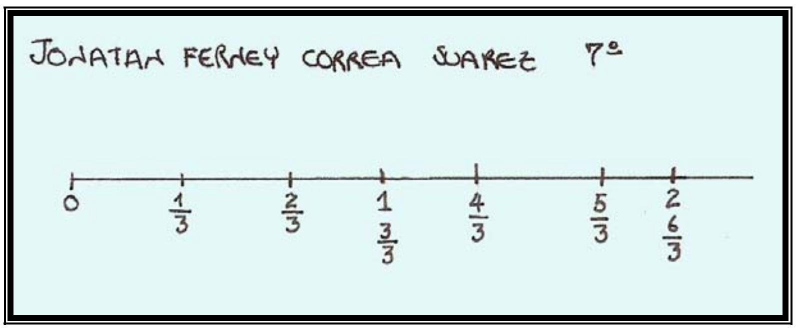


Figura 42. Aparte del segundo juego de Jonathan Ferney

Se nota el progreso en la ubicación de racionales sobre una recta; en la actividad final llevada a cabo el 18 de Noviembre en el primer punto el estudiante realizó lo siguiente:

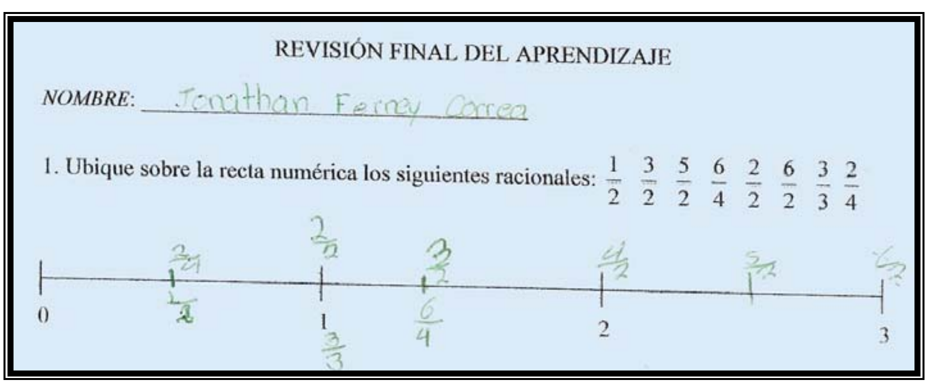


Figura 43. Aparte uno de la actividad final de Jonathan Ferney

Se puede observar como Jonathan ubicó correctamente cada racional, también identificó los equivalentes y los ubicó en el mismo sitio, como es el caso de un medio y dos cuartos, ó de seis medios y el tres. Reconoció igualmente la unidad como dos medios ó tres tercios; solo se nota un pequeño inconveniente al no ubicar exactamente en el punto intermedio entre uno y dos a los racionales tres medios y seis cuartos.

En la actividad diagnóstica se les solicitó representar cuánto se comería cada hijo, en una situación particular, esta fue la siguiente: “El padre fue al supermercado de la esquina a comprar dulces para sus cinco hijos. Al llegar, encontró que sólo había dos chocolatinas de las que le gustaban a sus hijos, decidió comprarlas y se las llevó para repartirlas entre todos sus hijos dándole a cada uno igual cantidad”

Jonathan hizo lo siguiente:

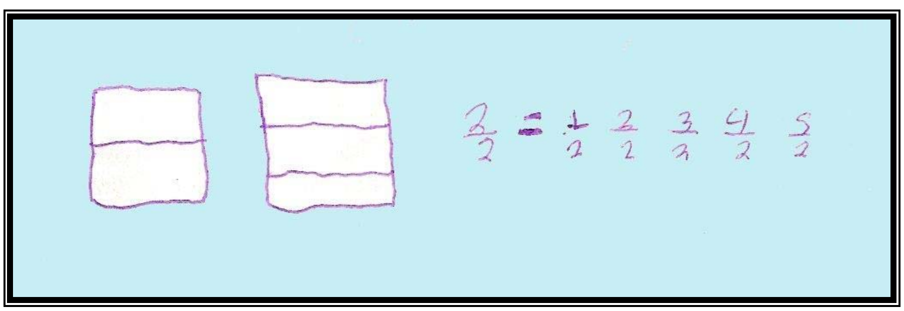
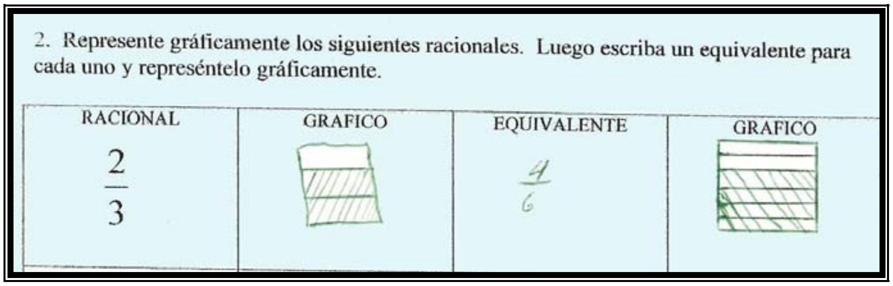


Figura 44. Aparte dos de la actividad diagnóstica de Jonathan Ferney

En primer lugar, divide cada unidad en diferente número de partes, y, en segundo lugar, está tratando de decir que cada hijo comió un medio, otro dos medios, el otro tres medios, el cuarto cuatro medios y el quinto comió cinco medios de chocolatina, comiendo así cada uno diferente cantidad. Pero ya en la actividad final, cuando se les pedía graficar un racional junto con su equivalente, él realizó lo siguiente:


2. Represente gráficamente los siguientes racionales. Luego escriba un equivalente para cada uno y represéntelo gráficamente.

RACIONAL	GRAFICO	EQUIVALENTE	GRAFICO
$\frac{2}{3}$		$\frac{4}{6}$	

Figura 45. Aparte dos de la actividad final de Jonathan Ferney

Halló correctamente el equivalente pedido y los graficó de forma correcta, trató de dividirlos en partes iguales aunque se advierte que el segundo dibujo es un poco más grande que el primero; sin embargo al presentarle una figura no tradicional manifestó dificultad para realizar el grafico respectivo:

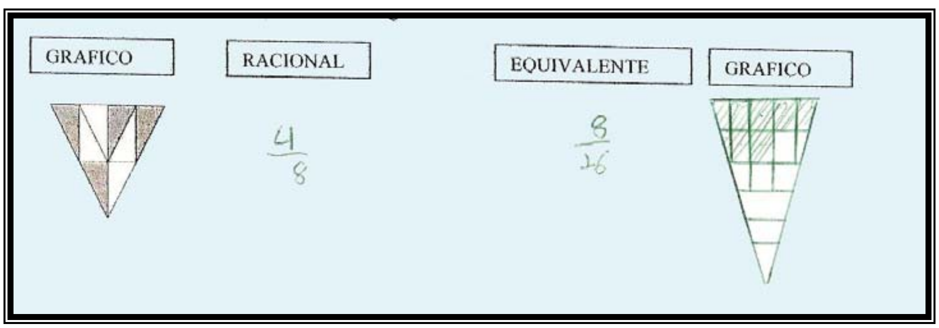


Figura 46. Aparte tres de la actividad final de Jonathan Ferney

Representó numéricamente bien el racional dado, halló correctamente su equivalente y al graficarlo lo dividió en dieciséis partes y tomó ocho, pero no supo cómo hacer para que las dieciséis partes le quedaran del mismo tamaño. Esto fue algo que se notó en este trabajo, y es que los estudiantes están muy acostumbrados a representar racionales con círculos o con rectángulos, y al enfrentarse a otra figura diferente pierden la noción de dividirla en partes iguales.

Con esta investigación se está tratando de involucrar al estudiante en su propio proceso de aprendizaje, se busca alejarlo del aprendizaje mecánico al que se encuentra muy acostumbrado; no se desea simplemente que aprenda conceptos de memoria, sino que aprenda a pensar en la materia, pues este es uno de los motivos por el cual el estudio resulta monótono y rutinario para la mayoría de estudiantes. Cada estudiante al enfrentarse al diseño de su juego tuvo que ir en varias ocasiones a consultar sus propios apuntes, a indagar con sus demás compañeros y profesores y a pensar la manera de cómo emplear los conocimientos matemáticos para plasmarlos en el juego que estaba diseñando. La autora Carmenza Correa nos presenta algunas ventajas que exhibe el proceso de poner a pensar a los estudiantes sobre la materia en estudio, (Correa, 1996, p. 82). Estas ventajas son las siguientes:

- **MEJORA LA RELACIÓN COSTO BENEFICIO**

  Cuando un estudiante fracasa en su proceso de aprendizaje se culpa a él mismo, bajando su autoestima, cuando realmente la causa puede ser el método de estudio que está empleando. Las investigaciones sobre estrategias de aprendizaje han demostrado que la calidad del aprendizaje no depende del coeficiente intelectual sino de la calidad de los procesos de pensamiento y estos se pueden mejorar con el entrenamiento. Un método de estudio eficaz, que conduzca al uso de estrategias adecuadas a la materia de estudio y a su contexto de aprendizaje, permite realizar un aprendizaje significativo.

- **EL ESTUDIANTE APRENDE A PENSAR EN LA MATERIA**

  Toda ciencia tiene implícitos unos procesos de pensamiento específicos para los cuales se requiere ciertos tipos de estrategias. Por lo tanto, si se aprenden los procesos de pensamiento de cada materia y las estrategias para desarrollarlos, permitirá, no solo aprender conocimiento declarativo, sino aprender los procedimientos para abordar inteligentemente un contenido, es decir el estudiante estará en condiciones de tomar decisiones con respecto a qué tipo de procedimiento y estrategias serán más eficientes para cada tema. Así el estudiante no tendrá un sistema único para todas las materias y temas sino aprenderá a adecuarse a la diversidad, a abordar los temas empleando un pensamiento divergente y reflexivo.

- **EL ESTUDIANTE ASUME LA RESPONSABILIDAD DE SU PROPIO APRENDIZAJE**

El alumno es el verdadero protagonista de su propio aprendizaje; nadie puede aprender por él, ningún profesor puede enseñarle si él no tiene interés en aprender. Hoy en día el profesor es un orientador de los procesos de aprendizaje, responsabilizando al alumno de asumir su propio aprendizaje.

- **MEJORA LA AUTOESTIMA**

Cuando el estudiante aprende a estudiar, aprende a pensar y cuando aprende a pensar se beneficia su autoestima. El hecho de adquirir procesos psicológicos superiores, le permitirá enfrentarse con éxito no solo a la vida académica sino a la vida cotidiana; le permitirá tomar decisiones personales con independencia de criterio, podrá alternar críticamente tanto con sus pares académicos, como con personalidades de la vida intelectual, cultural y política.

- **ADQUIERE FLEXIBILIDAD MENTAL**

Al aprender a pensar de manera particular frente a cada temática, de estar en capacidad de controlar su pensamiento, seleccionando con criterio independiente las estrategias para abordar una información, el estudiante adquiere una mayor flexibilidad mental, que le proporciona muchos dividendos. Aprender a escuchar, analizar, criticar, debatir, discernir, concertar, aprender a ponerse en la posición mental del otro para comprender su pensamiento, es de gran utilidad puesto que hace al estudiante intelectualmente competente y competitivo.

Con la estudiante July Meléndez en la actividad diagnóstica no se advirtieron dificultades mayores en la recta numérica, es más se podría decir que fue recursiva y creativa, pues al ubicar varios racionales ella dibujó una recta para cada denominador diferente que tenía, así:

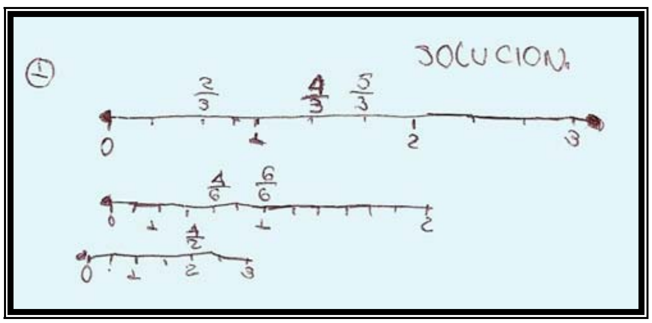


Figura 47. Aparte uno de la actividad diagnóstica de July Victoria

Al no saber quizá cómo ubicar los racionales sobre una misma recta, decidió trazar tres rectas distintas, pero cada una la dividió en diferente número de partes, de esta manera cada racional quedó correctamente ubicado. Al final de la investigación, se vio cómo pudo ubicar ya varios racionales sobre una misma recta, veamos su trabajo:

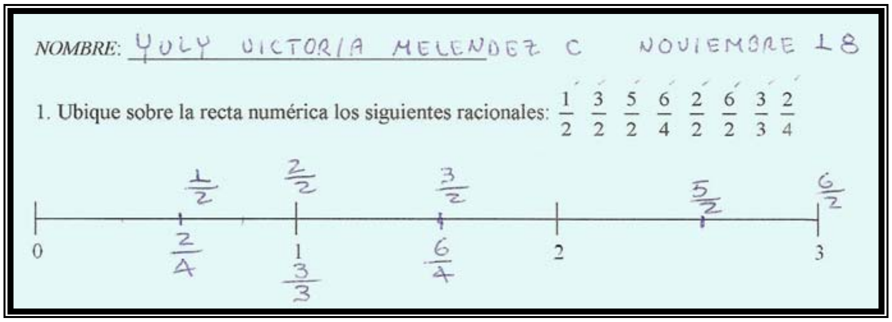


Figura 48. Aparte uno de la actividad final de July Victoria

En cuanto a la representación de racionales se le vio gran dificultad a la estudiante en un comienzo, ya que no pudo hacerlo ni gráfica ni numéricamente; esto realizó en la actividad diagnóstica.

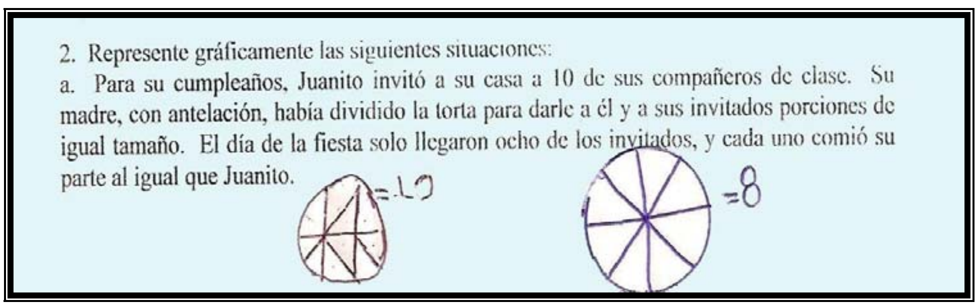


Figura 49. Aparte dos de la actividad diagnóstica de July Victoria

En la parte numérica simplemente escribe diez u ocho, pero no es capaz de identificar numerador ni denominador; en el primer dibujo se ve que lo divide en diez partes, pero no son del mismo tamaño y tampoco señala cuantas partes toma de esa unidad dibujada. Ya en la revisión final del aprendizaje se advierte un gran progreso en la estudiante, pues veamos como señala correctamente las partes de una fracción y como hace su respectiva gráfica.

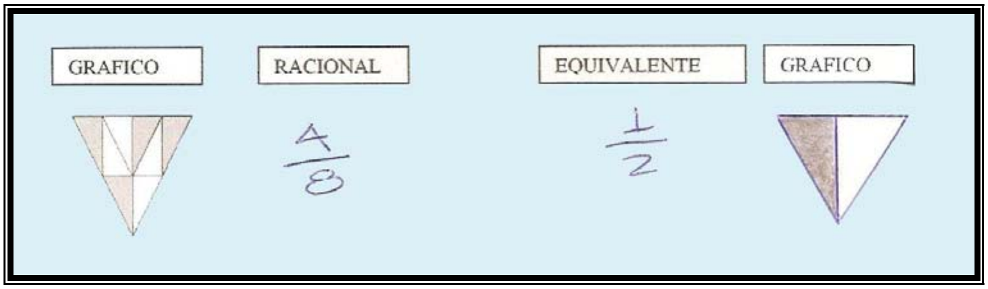


Figura 50. Aparte dos de la actividad final de July Victoria

En el trabajo anterior se advierten varias cosas, en primer lugar, se nota que la estudiante reconoce lo que significa el numerador y el denominador en una fracción; en segundo lugar, se nota que empleó la simplificación para hallar el racional equivalente pedido y de esta manera poder graficarlo. Esto último es importante ya que se nota como empleó algo que ella aprendió durante el diseño de los juegos, pues en la fase tres de su segundo juego ella tuvo que realizar algo similar, partir por la mitad los triángulos que había hecho para que al representar gráficamente un equivalente se notara que representan la misma porción de la unidad. Recordemos lo que hizo en esa ocasión.

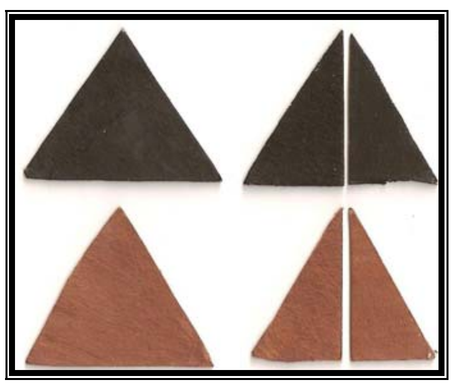


Figura 51. Fichas del segundo juego de July Victoria – Fase 3

Esto que se advierte en la estudiante es lo que precisamente algunos autores califican como lo más importante dentro del proceso de aprendizaje de un educando:

> *"El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya conoce."*
> *(Ausubel et. al., 1989, p. 309)*

En la actividad diagnóstica del día 6 de septiembre la estudiante Mónica Yeraldin realizó algo curioso al graficar racionales en la recta numérica, ella los ubicó según los numeradores de cada racional, es decir, los de numerador dos después del dos, los de numerador cuatro después del cuatro, los de cinco después del cinco y los de seis después del seis, veamos:

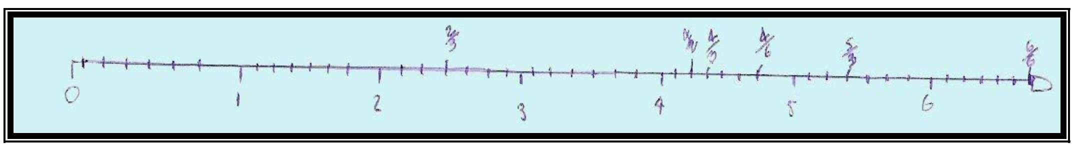


Figura 52. Aparte uno de la actividad diagnóstica de Mónica Yeraldin

Además, trató de dividir cada unidad en seis partes porque según dijo era el mayor número que se encontraba en los denominadores de los racionales dados, pero colocó seis líneas dejando así dividida cada unidad realmente en siete partes. Al final del proceso, el 18 de Noviembre, cuando se realizó la revisión final del aprendizaje colocó en su sitio cada racional que le fue dado, este fue su gráfico en ese momento:

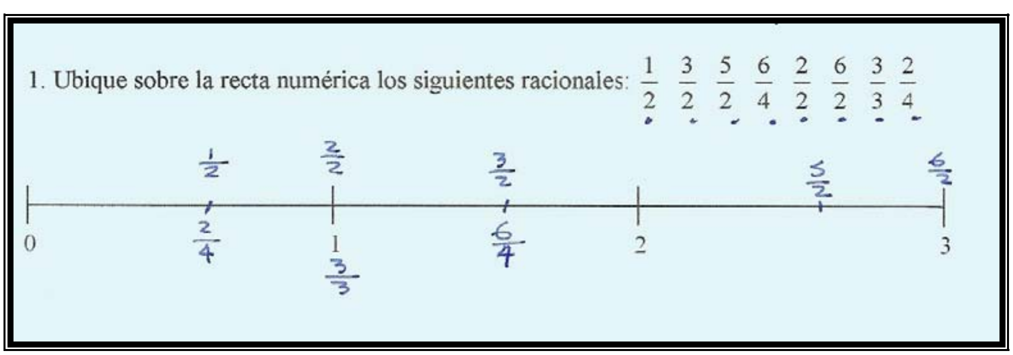
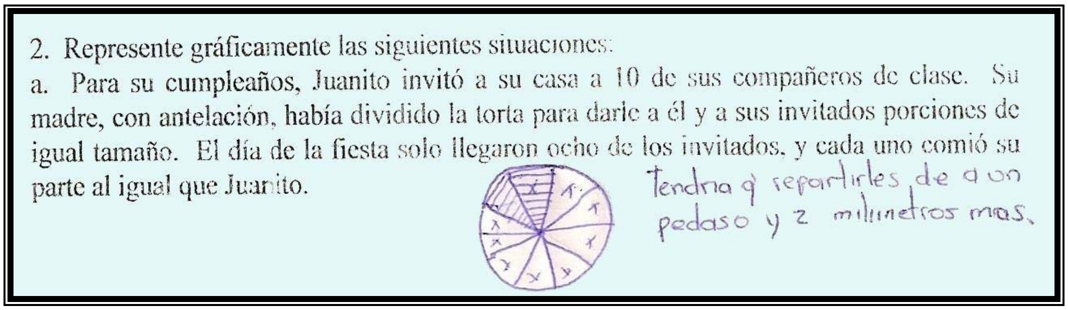


Figura 53. Aparte uno de la actividad final de Mónica Yeraldin

Identificó plenamente los racionales equivalentes y los ubicó en forma acertada. En los primeros momentos de este trabajo de investigación se advirtió en Mónica cierta idea para representar gráficamente un racional. Por ejemplo al pedirle la representación gráfica y numérica para una situación particular donde intervenían racionales, ella realizó lo siguiente:

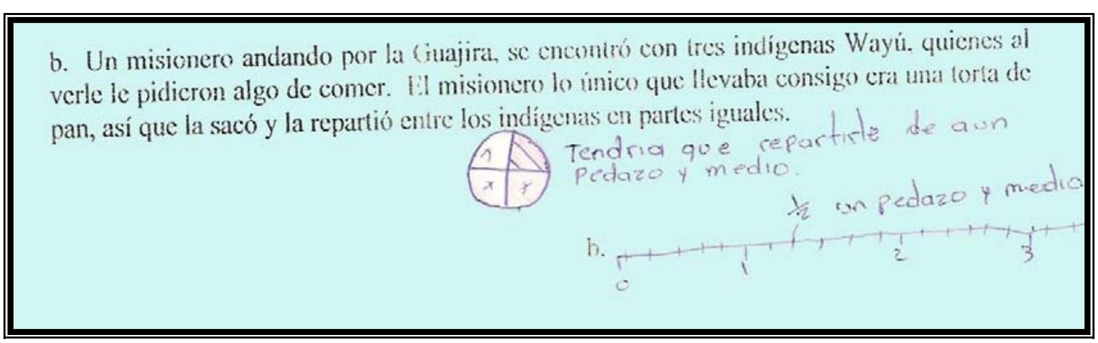

2. Represente gráficamente las siguientes situaciones:
a. Para su cumpleaños, Juanito invitó a su casa a 10 de sus compañeros de clase. Su madre, con antelación, había dividido la torta para darle a él y a sus invitados porciones de igual tamaño. El día de la fiesta solo llegaron ocho de los invitados, y cada uno comió su parte al igual que Juanito.

Tendria q repartirles de a un pedaso y 2 milimetros mas.

Figura 54. Aparte dos de la actividad diagnóstica de Mónica Yeraldin

En esta ocasión dividió la torta en diez partes, a cada niño que llegó le dio una parte y las dos que quedaron las volvió a partir en pedazos más pequeños y les dio de a dos pedazos a cada uno, claro que ella los llama *"2 milímetros".* Algo muy particular ya que reparte toda la unidad que tenía.

En otra situación Mónica volvió a presentar la idea de repartir toda la unidad que se tuviera:


b. Un misionero andando por la Guajira, se encontró con tres indígenas Wayú, quienes al verle le pidieron algo de comer. El misionero lo único que llevaba consigo era una torta de pan, así que la sacó y la repartió entre los indígenas en partes iguales.

Tendria que repartirle de a un Pedazo y medio.

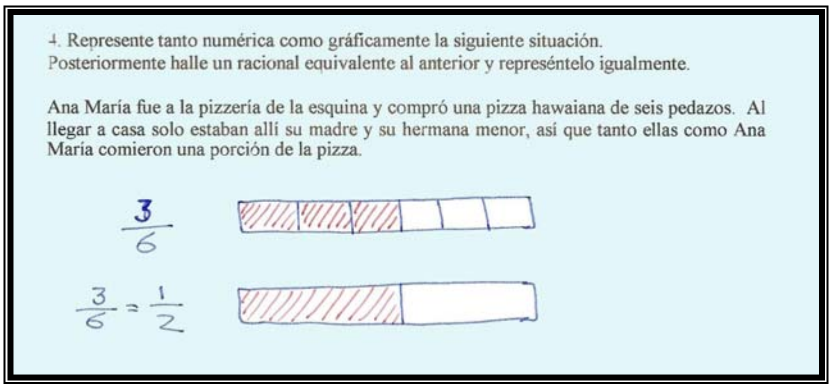
½ un pedazo y medio

b. 0 1 2 3

Figura 55. Aparte tres de la actividad diagnóstica de Mónica Yeraldin

Mónica tomó la torta y la dividió en cuatro partes iguales, lo que sobraba lo volvió a dividir en tres partes más pequeñas para darle a cada indígena una parte (a esta parte ella la llama “y medio”) y de esta manera repartir toda la unidad. Según ella, la dividió inicialmente en cuatro para que los pedazos quedaran iguales, sin embargo al dividir la cuarta porción no advirtió que los tres pedazos no quedaban del mismo tamaño.

Al final de la investigación la estudiante deja ver un progreso en la comprensión de este tema, veamos como realizó la representación de una situación particular.


4. Represente tanto numérica como gráficamente la siguiente situación.
Posteriormente halle un racional equivalente al anterior y represéntelo igualmente.

Ana María fue a la pizzería de la esquina y compró una pizza hawaiana de seis pedazos. Al llegar a casa solo estaban allí su madre y su hermana menor, así que tanto ellas como Ana María comieron una porción de la pizza.

$\frac{3}{6}$

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Figura 56. Aparte dos de la actividad final de Mónica Yeraldin

Se observa cómo representa correctamente la situación planteada, ya no reparte toda la unidad que tiene sino únicamente lo necesario según el enunciado. Igualmente, encuentra acertadamente el equivalente pedido y lo representa teniendo el cuidado de mostrar en ambos gráficos la mitad de la unidad original.

Se puede notar en estas elaboraciones de la estudiante el cambio que ha experimentado en sus concepciones; se ve como ubica de manera correcta diferentes racionales y sus equivalentes sobre una recta numérica, al mismo tiempo que realiza su representación gráfica, manteniendo una misma área para poder observar la correspondencia entre las porciones representadas por los racionales equivalentes. Estos cambios son los que dejan ver el aprendizaje que ha experimentado Mónica en estos aspectos, pues como bien lo dicen algunos autores todo aprendizaje debe involucrar un cambio de capacidad:

> *"Todos estos son seguramente ejemplos de aprendizaje; es decir, involucran un cambio de capacidad que puede inferirse por comparación de ejecuciones del tipo antes y después."*
> *(Ausubel et al., 1989, p. 33)*

El 6 de Septiembre, en la actividad diagnóstica la estudiante Tatiana Esteban dejó ver que no tenía claridad en cómo ubicar racionales sobre una recta, tampoco identificó los racionales equivalentes, en esa ocasión ella realizó lo siguiente.

Figura 57. Aparte uno de la actividad diagnóstica de Karen Tatiana

Al final del trabajo de campo, el día 18 de Noviembre Tatiana aún deja dudas sobre su proceso de aprendizaje en cuanto a la ubicación de racionales en la recta numérica, ya que, si bien es cierto que reconoció las parejas de equivalentes $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$, y los ubicó en forma correcta, también es cierto que no reconoció la unidad en la forma $\frac{2}{2} y \frac{3}{3}$, de la misma manera no ubicó correctamente el racional $\frac{6}{2}$, veamos lo que hizo la estudiante en esa ocasión.

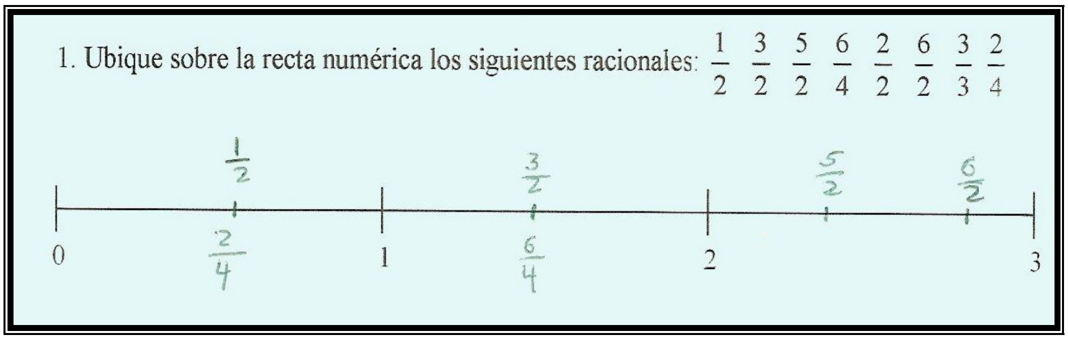


Figura 58. Aparte uno de la actividad final de Karen Tatiana

En cuanto a la representación gráfica y numérica de racionales, en la actividad diagnóstica Tatiana dejó ver dificultades al respecto, en una situación particular donde se solicitaba la representación de la misma ella realizó lo siguiente.

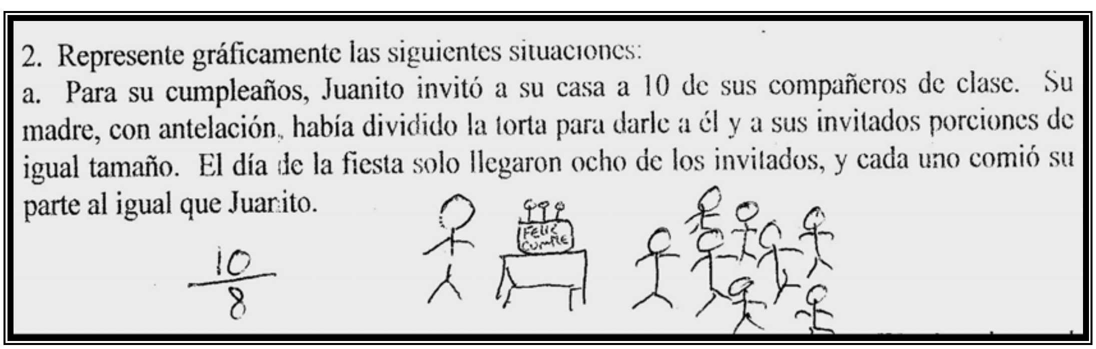


Figura 59. Aparte dos de la actividad diagnóstica de Karen Tatiana

Se nota como en aquel momento no tenía la noción de cómo representar gráficamente racionales; en cuánto a la parte numérica intentó hacerlo pero intercambió el orden del numerador y denominador, según su propia interpretación.

El 25 de Octubre cuando los estudiantes presentaron el diseño de su segundo juego en la primera fase, Tatiana presentó una especie de ruleta, en esta dejó ver cierto progreso en cuanto a la representación gráfica de racionales; en las instrucciones para su juego ella escribió:

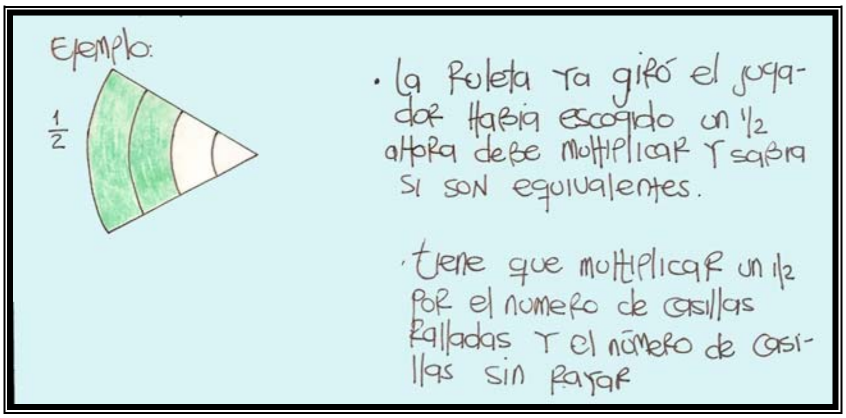


Figura 60. Aparte del segundo juego de Karen Tatiana – Fase 1

En la figura anterior trató de representar el racional dos cuartos, el cual es equivalente con un medio; se observa claramente que las partes blancas y verdes no son exactamente del mismo tamaño, este fue uno de sus errores en ese momento y que ya fue analizado cuando se presentó la segunda categoría. Ahora, en la forma como dice ella de multiplicar para saber si son equivalentes o no, se nota otro error en la forma como lo dice, por esto se le preguntó, en una entrevista posterior, del por qué de multiplicar así, a lo cual ella respondió:

> ***"O sea, el número de casillas rayadas es el que va arriba, que sería dos. El número de casillas sin rayar sería cuatro."***
>
> (Entrevista, 30 de Octubre 2006)

Ella está tratando de explicar la forma de identificar si son o no fracciones equivalentes, se refiere al algoritmo de multiplicar en cruz, que aunque es un proceso mecánico, Tatiana simplemente está expresando lo que le ha quedado hasta el momento después de pasar por la primera etapa de este proceso.

Al final del proceso, el 18 de Noviembre, Tatiana aún dejó ver ciertas falencias en su comprensión sobre este tema; al darle unos racionales para encontrar su equivalente no presentó inconvenientes, los halló en forma correcta, miremos su trabajo:

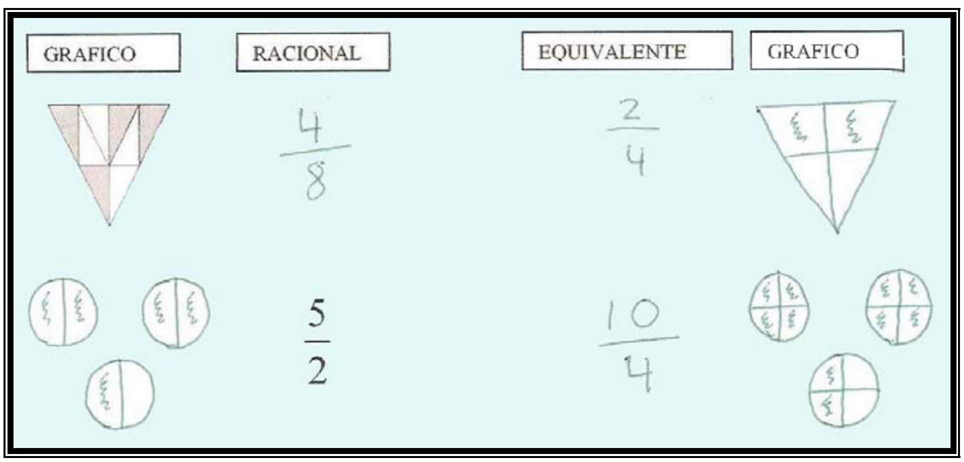


Figura 61. Aparte dos de la actividad final de Karen Tatiana

Como se dijo, halló unas fracciones equivalentes, en un caso empleó la amplificación, en el otro la simplificación; en la segunda parte, para la fracción impropia cinco medios y su equivalente diez cuartos, utilizó círculos para graficarlos y lo hizo en forma correcta; en la primera parte, se le dio el gráfico inicial, debía graficar su equivalente, dos cuartos, se limitó a dividir la unidad que tenía en cuatro partes, pero no tuvo el cuidado de que las partes le quedaran del mismo tamaño.

Se puede notar que no se alcanzó el mismo nivel de aprendizaje con todos los estudiantes; en algunos se puede observar como superaron las dificultades que mostraron en un comienzo, pero en otros aún se advierten ciertas dificultades al manejar algunos conceptos matemáticos. Esto nos demuestra que cada estudiante es un mundo totalmente aparte, que cada uno aprende de forma diferente y que sobre él pueden estar actuando muchas variables que de una forma u otra van a determinar la calidad de su proceso de aprendizaje. Dentro de estas variables, según las presenta Carmenza Correa (Correa, 1996, p. 157), se pueden citar las siguientes:

- **CONOCIMIENTO DE SI MISMO**

  El estudiante debe conocer las propias limitaciones y recursos personales: Qué está en capacidad de hacer y qué no, qué sabe y qué no sabe, qué se le dificulta o facilita. Es importante que tome conciencia del estado de desarrollo en que se encuentran sus habilidades cognitivas: cómo está su capacidad de análisis, de comprensión, de síntesis, etc.

- **CONOCIMIENTO DE LA MATERIA DE ESTUDIO**

  Cada materia está constituida por fenómenos de estudio diferentes, los cuales son expresados y estructurados de una manera particular. Cada materia tiene una estructura interna que le da sentido a la información que presenta. En la medida que el estudiante logre desentrañar esta estructura, tendrá facilidad para abordarla de una manera comprensiva. Muchos estudiantes tienen solo conocimientos de partes de la materia, sin relación ninguna entre ellas; esta atomización no permite la visión global de la materia, la relación de las partes en un todo y la comprensión misma del todo.

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DE LA TAREA

Cada tarea tiene características particulares: unas son extensa, cortas; unas son complejas, fáciles; unas requieren de memorización, otras de interpretación; del análisis de cada característica dependerá el uso de la estrategia adecuada para abordarla. Por ejemplo tareas con tiempo limitado para llevarse a cabo deben abordarse con un enfoque superficial. Las tareas que contienen muchos conceptos y clasificaciones deben abordarse con estrategias de organización, mientras que las que llevan a la memorización de hechos o datos aislados podrían abordarse con procedimientos nemotécnicos.

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

El profesor con su estilo de enseñanza, tipo de tareas asignadas, exigencia con respecto a la asignatura y clases de evaluación, puede condicionar el uso de las estrategias de aprendizaje. Los tipos de enseñanza expositivos, unidireccionales, formales, generalmente crean dependencia del estudiante y llevan a un enfoque superficial con respecto al uso de estrategias; así mismo la asignación de tareas que implican memorización. Mientras que los tipos de enseñanza basados en la discusión y tareas centradas en el razonamiento, donde el tiempo disponible es el apropiado a la tarea, generan alumnos autosuficientes y conducen al tipo de estrategias de enfoque profundo.

LOS ESTILOS DE ESTUDIO

Las características y preferencias personales del estudiante con respecto al estudio, determinan en parte el tipo de estrategias seleccionadas para enfrentar el aprendizaje. Dentro de estas características y preferencia se pueden mencionar: la calidad y cantidad de los conocimientos previos, el ritmo y la velocidad de estudio, el grado de persistencia y concentración, el predominio de la memoria visual o auditiva, el gusto por el estudio individual o colectivo, las aptitudes con respecto a la materia reestudio, el gusto por el sitio y hora de estudio, el gusto por la comprensión o simplemente por el éxito a través de la nota, etc.

ESTILOS DE APRENDIZAJE

Gordan Pask distingue dos estilos de aprendizaje, el holístico y el serialista, que representan las preferencias psicológicas por ciertos procesos del aprendizaje y naturalmente por el uso de estrategias específicas que conllevan esos procesos.

El serialista pone más énfasis en los tópicos separados y las consecuencias lógicas que los conectan, formando una imagen total de lo que ha aprendido solamente al final del proceso. El holístico trata de construir una imagen total como guía del aprendizaje desde el comienzo y solamente después se ve donde encajan los detalles en el todo.

CARACTERÍSTICAS DE PERSONALIDAD

Factores como la habilidad del estudiante hacia las diferentes materias de estudio, la extroversión, la introversión, motivación, flexibilidad o rigidez mental, inciden en el comportamiento estratégico de un estudiante frente al aprendizaje.

Por ejemplo un estudiante introvertido se le dificultará consultar a su profesor o compañeros sobre alguna duda, tendrá dificultades con tareas que impliquen un carácter social; en cambio el extrovertido será fácilmente distraído por actividades sociales y por lo general tiene dificultades para concentrarse por largos períodos de tiempo.

La rapidez o flexibilidad mental es una condición que readquirida debido a experiencias en la infancia. Cuando el estudiante no es capaz de aceptar puntos de vista ajenos, ni cambiar sus apreciaciones de los hechos a pesar de la evidencia, se dice que tiene rigidez mental. Por el contrario la flexibilidad mental se refiere a la capacidad de generar diversas respuestas y aceptar y comprender puntos de vista opuestos.

- **CONDICIONES EXTERNAS DEL APRENDIZAJE**

Existen algunas condiciones externas al aprendizaje como tiempo de estudio, condiciones socio-económicas, de salud física y mental, estados emocionales temporales, ambiente de estudio (luz, calor, ruido, comodidad) etc., que pueden condicionar el uso de estrategias de aprendizaje.

En la medida que todas estas condiciones operen en la mejor forma posible se beneficiará el uso de estrategias de procesamiento profundo. Por el contrario en la medida que varias de estas condiciones confluyan desfavorablemente, el estudiante no se concentrará en condiciones óptimas para el aprendizaje comprensivo.

En el estudiante Brayan Leonardo se notaron algunas dificultades en un comienzo en la ubicación de racionales y sus equivalentes sobre una recta, en la actividad diagnóstica trató de ubicar los racionales con denominador tres, pero dividió cada unidad en cuatro partes –pero, no iguales- y no pudo reconocer los equivalentes que le fueron dados; esto hizo Brayan en la actividad diagnóstica.

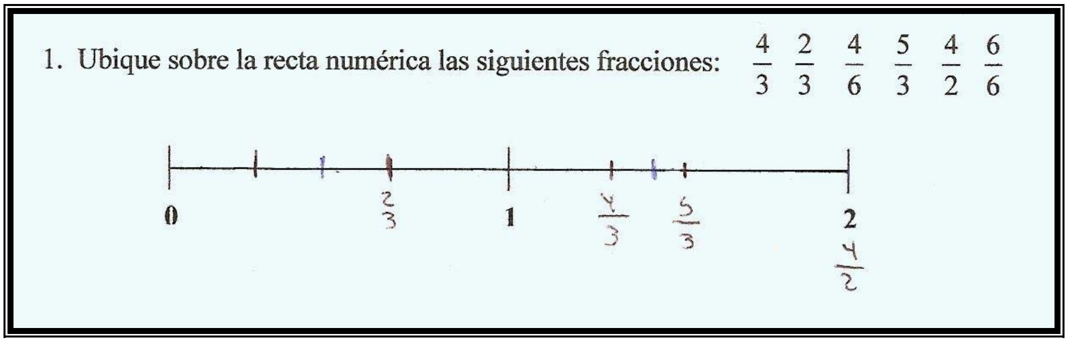


Figura 62. Aparte uno de la actividad diagnóstica de Brayan Leonardo

Se advirtió su progreso en el mes de noviembre al presentar la revisión final del aprendizaje, pues en esta ocasión identificó todos los equivalentes y los ubicó en su sitio respectivo; de la misma manera reconoció la unidad como $\frac{2}{2}$ ó $\frac{3}{3}$

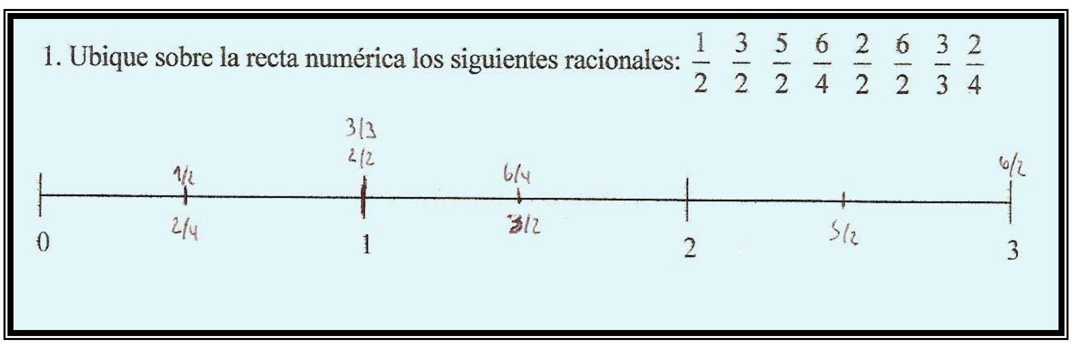


Figura 63. Aparte uno de la actividad final de Brayan Leonardo

De igual manera, en los comienzos de la actual investigación se notaron ciertos errores en el estudiante, tanto en la representación gráfica como numérica de racionales. En una ocasión cuando se le pidió que representara una situación específica, el estudiante realizó lo siguiente:

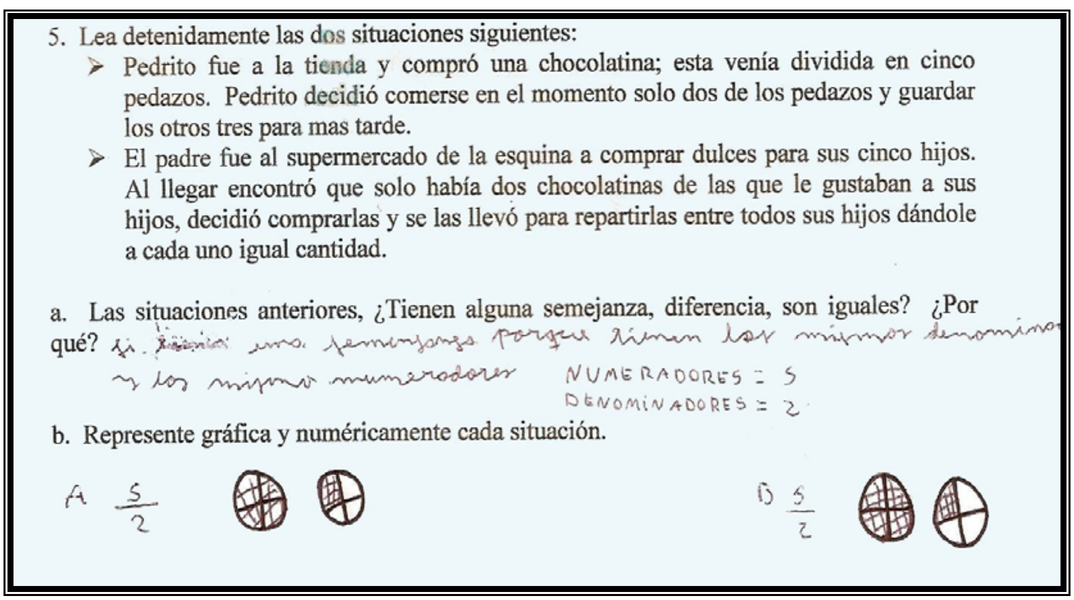
$\frac{3}{1}$

b. Un misionero andando por la Guajira, se encontró con tres indígenas Wayú, quienes al verle le pidieron algo de comer. El misionero lo único que llevaba consigo era una torta de pan, así que la sacó y la repartió entre los indígenas en partes iguales.

Figura 64. Aparte dos de la actividad diagnóstica de Brayan Leonardo

En la parte gráfica el estudiante divide la unidad en cuatro partes, sin embargo en la parte numérica escribe $\left(\frac{3}{1}\right)$, el uno para representar la torta de pan y el tres, los pedazos que se le dio a los indígenas.

En otra situación el estudiante realizó lo siguiente:



5. Lea detenidamente las dos situaciones siguientes:
   - Pedrito fue a la tienda y compró una chocolatina; esta venía dividida en cinco pedazos. Pedrito decidió comerse en el momento solo dos de los pedazos y guardar los otros tres para mas tarde.
   - El padre fue al supermercado de la esquina a comprar dulces para sus cinco hijos. Al llegar encontró que solo había dos chocolatinas de las que le gustaban a sus hijos, decidió comprarlas y se las llevó para repartirlas entre todos sus hijos dándole a cada uno igual cantidad.

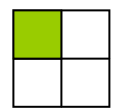
a. Las situaciones anteriores, ¿Tienen alguna semejanza, diferencia, son iguales? ¿Por qué? si. una semenjanza porque tienen los mismos denominadores y los mismos numeradores NUMERADORES = 5 DENOMINADORES = 2

b. Represente gráfica y numéricamente cada situación.

A $\frac{5}{2}$ B $\frac{5}{2}$

Figura 65. Aparte tres de la actividad diagnóstica de Brayan Leonardo

Comparando lo que el estudiante hace en esta ocasión con la anterior comprendemos la idea del estudiante de siempre dividir la unidad en cuatro partes, sin importar la situación planteada. En cuanto a lo numérico se nota como está invirtiendo el orden de los números en la fracción, ya que toma el número de divisiones de la unidad (en este caso son cinco) y las escribe en el numerador, señalándolas igualmente en el grafico. Las partes que realmente son tomadas de cada unidad (en este caso dos) las escribe como denominador.

Se notó cierta mejoría en el proceso de aprendizaje del estudiante en su segundo juego; propuso unas cartas aplicando la representación gráfica de racionales, al mismo tiempo que se observa el empleo de áreas. Para el juego se reparten las cartas entre dos jugadores, algunas contienen números racionales y otras la representación gráfica. Si un jugador lanza la carta un cuarto, el contrincante debe lanzar la carta con este gráfico: 

Si no la tiene, le da la oportunidad al primer jugador. Al final ganará quien se quede sin cartas en la mano.

Sin embargo en el bosquejo que presentó Brayan, el 25 de Octubre, se pueden observar todavía algunos errores, como muestra la figura siguiente:

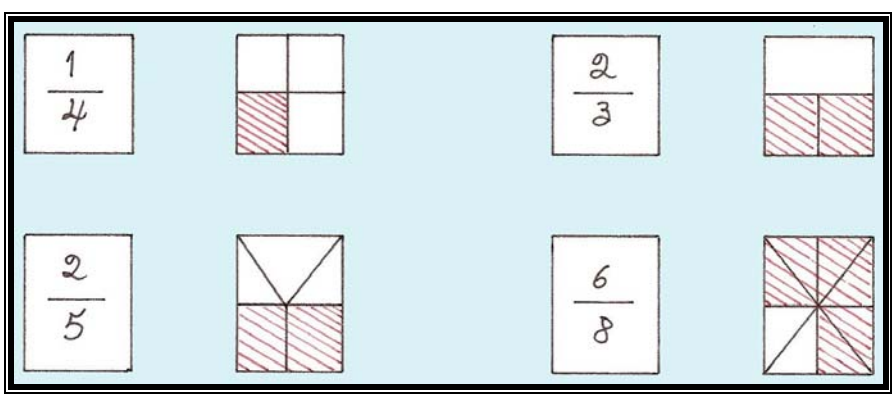


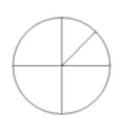
Figura 66. Segundo juego de Brayan Leonardo – Fase 1

Estos son algunos ejemplos que el estudiante hizo para mostrar las cartas de su juego. Se observa en todos de que el estudiante ya clarificó sus dudas en cuanto a qué representa el numerador y el denominador en una fracción. Se ve claramente las partes en que se divide la unidad respectiva (denominador) y las partes que de ella toma (numerador).

El error de Brayan es que al dividir la unidad no tiene el cuidado de hacerlo en partes iguales. Se ve como la segunda fracción dos quintos, efectivamente la divide en cinco partes, pero las dos inferiores, que fueron las que tomó, no son iguales en área a las que están en la parte superior de la figura. Igual ocurrió con la fracción dos tercios, dividió la unidad en tres partes, pero estas no tienen la misma área, ya que la parte superior tiene el doble de área que las inferiores.

Otro asunto a observar en este diseño es que el estudiante no emplea las fracciones equivalentes en ningún momento, se dedica únicamente a aplicar la representación gráfica.

Después de analizar el bosquejo presentado por el estudiante, se procedió a realizar con él una entrevista. Inicialmente se le pidió que escribiera un racional cualquiera y lo graficara. El escribió cinco medios y dibujó lo siguiente:



Al ir a rayar las partes tomadas se quedó pensando y no supo como hacerlo. Se procedió a hacerle la siguiente pregunta:

¿En un racional qué significa el denominador?

"Las partes en que la divido y el numerador las partes que tomo."

(Entrevista, 30 de Octubre 2006)

Siguió mirando el dibujo y dijo: **"No, mejor hagamos dos quintos"**

Luego realizó el siguiente dibujo:

¿Cómo deben ser las partes en que se divide la unidad?

"Deben ser iguales"

¿Y cómo las hizo usted, son iguales?

"No, no son iguales. Porque estos dos son más pequeños."

(Entrevista, 30 de Octubre 2006)

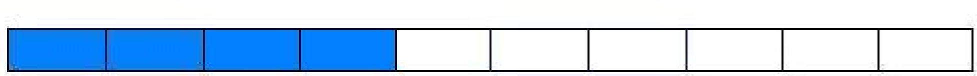
¿Cómo se haría entonces para que todas las partes sean iguales?

"Entonces pintemos mejor un rectángulo."

Después de aclararle que las porciones en que se divide deben ser exactamente iguales, se le dijo que escribiera un racional equivalente al anterior. A lo cual de inmediato escribió: $\frac{4}{10}$

¿Cómo se representaría?

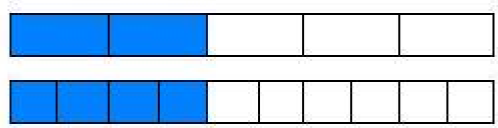
Brayan procede a dibujar lo siguiente:



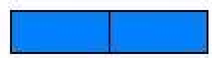
Si se mira el grafico para representar al racional $\frac{4}{10}$ se diría que está correcto, pero para representar un equivalente del gráfico inicialmente dibujado estaría incorrecto, si se está hablando de una misma área original. Al estudiante se le aclaró que no se debe modificar el área original para poder observar la equivalencia. Enseguida se le preguntó:

¿Cómo haríamos para representar $\frac{4}{10}$ pero con un rectángulo exactamente igual al primero?

El estudiante pensó por un momento y luego dibujó el rectángulo inicial y debajo otro del mismo tamaño. Posteriormente procedió a dividir cada porción del segundo rectángulo por la mitad. El nuevo dibujo fue el siguiente:



Al ver que había logrado una comprensión sobre esta parte se decidió volver al primer racional que el estudiante había escrito, el $\frac{5}{2}$. Se le dijo que lo representara gráficamente; después de pensar un poco el estudiante dibujó:



Luego de mirar detenidamente el dibujo anterior dijo: "***Tendríamos que dibujar otros iguales***"

Y procedió a hacerlos: 

Con lo anterior se notó que el estudiante había asimilado la idea de la representación gráfica; razón por la cual se decidió dejar la entrevista hasta este punto resumiendo todas las ideas que se habían aclarado y dando libertad al estudiante para que modificase el diseño de su juego según considerase necesario.

Este tiempo, dado a los estudiantes, para pasar de una fase a otra, fue decisivo en la elaboración final de cada diseño; durante estos días los estudiantes obtenían nuevas ideas para modificar sus diseños, las compartían con sus compañeros y las iban mejorando cada vez hasta llegar al producto final, el cual entregaban en la fase siguiente. Este proceso es lo que algunos autores han denominado la incubación de ideas y que al respecto Miguel de Guzmán afirma lo siguiente:

> *"Es muy importante tener en cuenta el papel definitivo que suele desempeñar en la resolución de un problema la iluminación o inspiración que vienen propiciadas por la incubación activa."*
> *(De Guzmán, 1995, p. 14)*

Para la segunda fase de su juego, Brayan hizo cuatro tableros y dieciséis fichas sueltas para el desarrollo de su juego. Cada tablero representa una fracción irreducible, así: un tablero para el racional un medio, otro para el racional un tercio, otro tablero para el racional dos tercios y otro para tres cuartos. A cada racional le halló cuatro racionales equivalentes, por ejemplo para un medio él halló lo siguiente:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}, \frac{2}{4}, \frac{5}{10}, \frac{4}{8}$$

Cada tablero lo dividió en cuatro partes, para escribir o representar gráficamente un equivalente para el racional respectivo y sus cuatro fichas. El tablero que realizó para el racional un medio fue el siguiente:

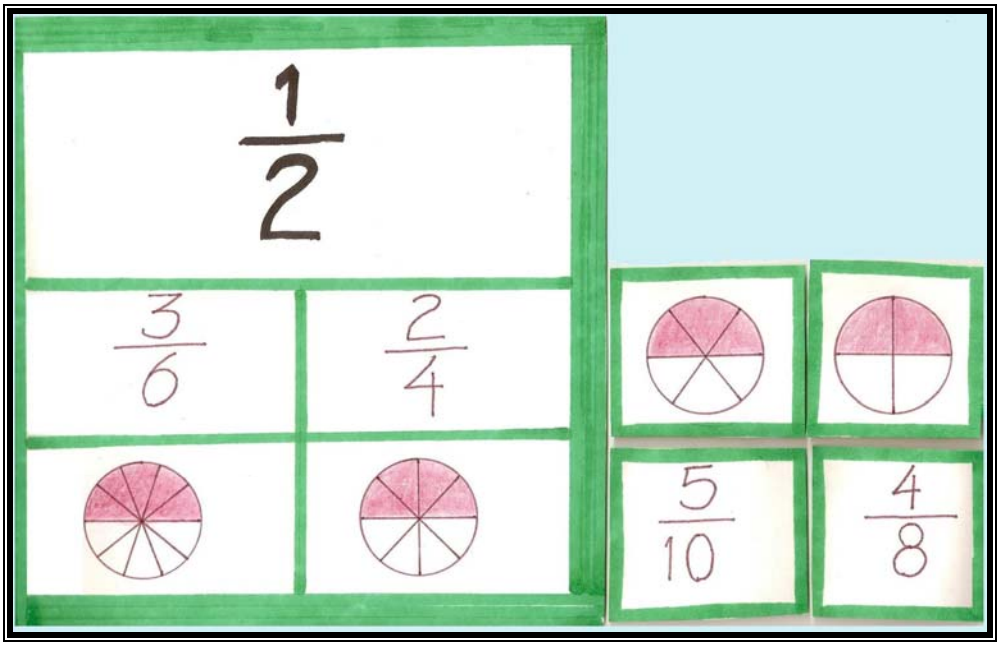


Figura 67. Segundo juego de Brayan Leonardo – Fase 2 – parte a

En cada tablero él escribió dos racionales, hizo la representación gráfica de otros dos equivalentes para el racional representante del tablero. En las fichas tenía de la misma manera, dos representaciones gráficas y dos numéricas, correspondientes a los mismos cuatro equivalentes del racional original que figuraban en el tablero.

Para el juego participarían cuatro personas, cada una con un tablero diferente; habría una quinta persona quien tendría las fichas y las va sacando en un orden cualquiera; ganará quien llene primero su tablero con los cuatro equivalentes para el racional que tuviera el tablero escogido por él.

En el diseño se ve como el estudiante obtuvo perfectamente los cuatro equivalentes para el racional representante de cada tablero. Por otra parte, la representación gráfica está bien realizada; se observa como en el tablero de un medio, tomó como unidad un círculo, y siempre utilizó el mismo tamaño al hacer las diferentes representaciones de los equivalentes; también se nota que trató de hacer las divisiones del círculo en partes iguales y siempre coloreó la misma mitad superior del círculo, para notar la equivalencia de los racionales; se ve claramente que cada uno representa la mitad del círculo que él tomó como unidad.

Al parecer Brayan clarificó las dudas que tenía en cuanto a la representación de racionales y sus respectivos equivalentes. Otro de los tableros que presentó fue para el racional dos tercios, el cual se observa a continuación:

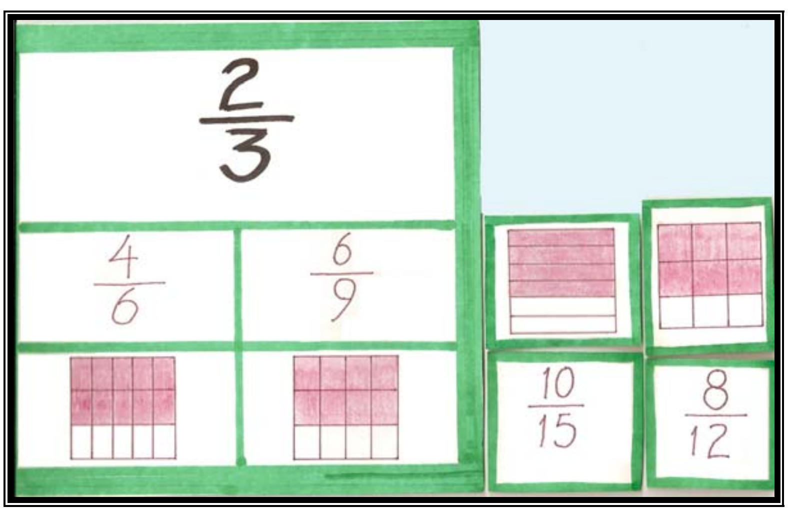


Figura 68. Segundo juego de Brayan Leonardo – Fase 2 – parte b

En este caso Brayan empleó un cuadrado para la representación gráfica; se cuidó de dibujar siempre el mismo cuadrado, también de dividirlo adecuadamente para observar la misma porción de la unidad tomada al representar cada equivalente. En los cuatro tableros presentados por el estudiante empleó solo círculos y cuadrados para realizar los gráficos de cada racional.

Igualmente, en la revisión final del 18 de Noviembre, Brayan dejó ver su comprensión del tema; se le dio un gráfico cualquiera el cual debía representar numéricamente y luego escribir un equivalente y graficarlo también. Esto fue lo que realizó el estudiante en ese momento.

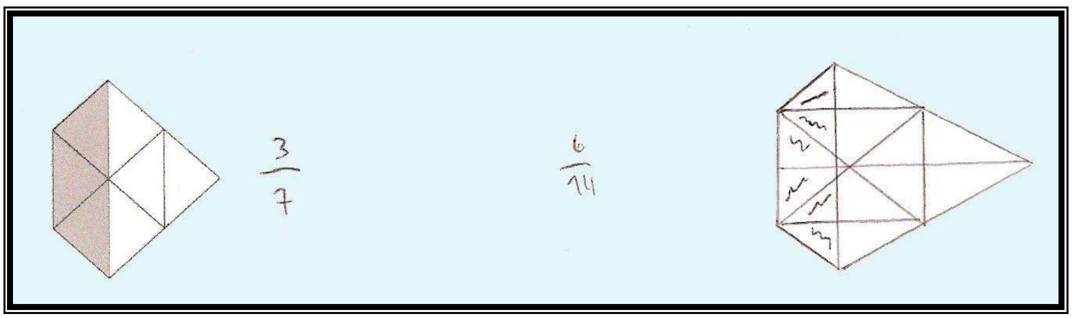


Figura 69. Aparte dos de la actividad final de Brayan Leonardo

Como se observa halló en forma correcta el equivalente respectivo empleando la amplificación; para la parte gráfica dividió cada triángulo inicial por la mitad (se observa como su dibujo no fue muy exacto con el original) y así obtener las partes necesarias para el nuevo racional y tomar las seis que indicaba el mismo.

5. LAS OPINIONES

"La comunicación se pone muy difícil,
cuando el deseo de hablar está por encima
del anhelo de escuchar."
(Duque, 2003, p. 173)

En esta sección se tratará de recoger principalmente las opiniones de cada uno de los estudiantes al final de la investigación, se analizará la forma en que se estuvieron comunicando entre ellos y como emitían ciertos conceptos matemáticos.

La estudiante July Victoria, en la "Revisión final del aprendizaje", al preguntársele si el actual trabajo le ayudó en su proceso de aprendizaje de fracciones equivalentes, da una respuesta afirmativa y dice que le sirvió para clarificar ciertas dudas que tenía en cuanto al tema; resalta el proceso de amplificación y la graficación de racionales.

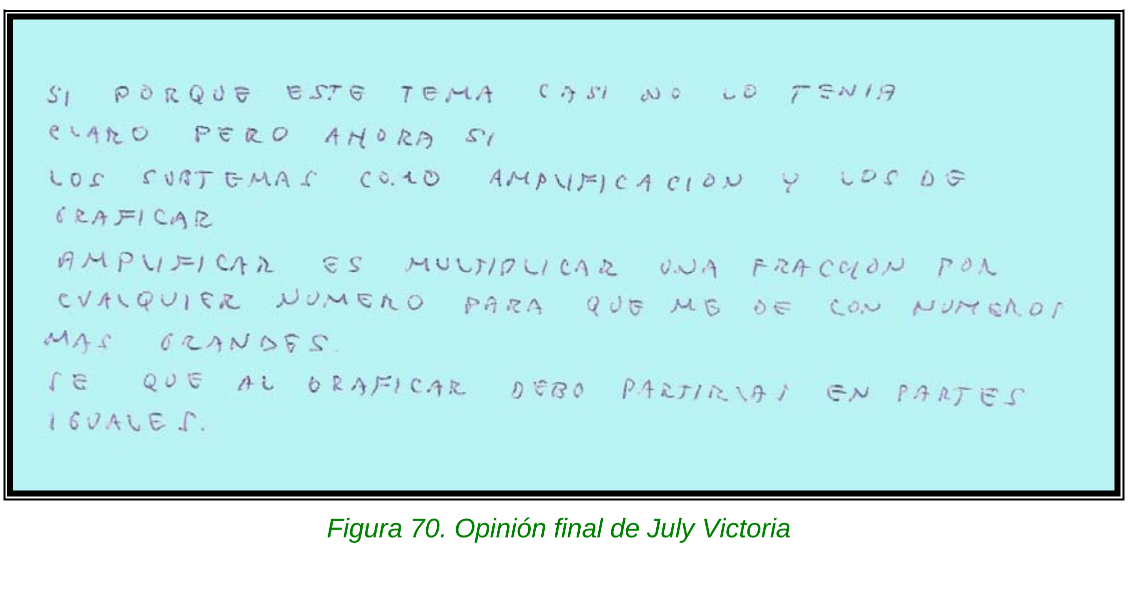

SI PORQUE ESTE TEMA CASI NO LO TENIA CLARO PERO AHORA SI
LOS SUBTEMAS COMO AMPLIFICACION Y LOS DE GRAFICAR
AMPLIFICAR ES MULTIPLICAR UNA FRACCION POR CUALQUIER NUMERO PARA QUE ME DE CON NUMEROS MAS GRANDES.
SE QUE AL GRAFICAR DEBO PARTIRLAS EN PARTES IGUALES.

Figura 70. Opinión final de July Victoria

En la respuesta de la estudiante se observa como se atreve a dar una definición de amplificación; recordemos que en el primer juego la estudiante empleó los procesos de amplificación y simplificación para la fase uno de su juego del laberinto. También hace referencia al hecho de dividir en partes iguales al graficar racionales. Para el segundo juego July en la fase dos tuvo que construir fichas para el desarrollo del mismo, luego se vio la necesidad de partirlas para poder observar con claridad la relación entre fracciones equivalentes. En esto tuvo importancia la manipulación directa del material, ejercitando la estudiante su parte visual y perceptiva para poder detallar ciertas características, como la igualdad entre las partes, para poder representar racionales equivalentes.

El aspecto visual tiene importancia dentro del proceso de aprendizaje, Choat citado por Osorio (2005, p. 2), muestra el ejemplo de un estudiante llamado Johnnie de seis años de edad, cuando se encontraba pegando recortes de papel para componer una figura. Presenta una conversación entre un entrevistador y el estudiante, la cual nos permitimos reproducir a continuación.

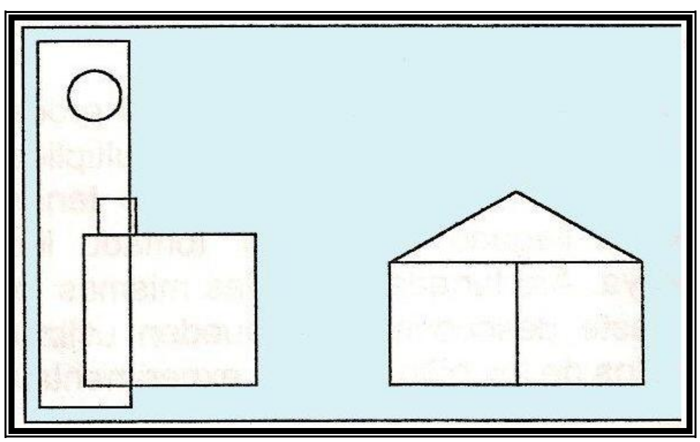


Figura 71. Ejemplo de Choat

Entrevistador: ¿Puedes decirme qué figura es esta?

Johnnie: Es un cuadrado.

Entrevistador: ¿Qué es un cuadrado?

Johnnie dejó de pegar y miró fijamente los cuadrados que componían su casita. Recortó un cuadrado azul, del mismo tamaño que los que había estado utilizando, lo encajó sobre uno de ellos y lo hizo girar.

Johnnie: Tiene cuatro lados.

Entrevistador: Muy bien. ¿Y qué les pasa a los lados?

Johnnie: Son lo mismo.

Entrevistador: Lo mismo… ¿Qué?

El niño gesticuló extendiendo y separando las manos y tratando de mantener la misma distancia entre ellas mientras seguía la dirección de rotación. El entrevistador colocó el cuadrado azul frente a él. Mientras hacía correr el dedo del niño a lo largo de los lados, de un vértice a otro, le dijo:

Entrevistador: Los lados tienen la misma longitud.

Johnnie: Los lados tienen la misma longitud –hizo eco él.

El entrevistador tocó la figura de la casita.

Entrevistador: ¿Cómo es que pudiste ajustar tan bien los dos cuadrados?

Johnnie: Porque encajan.

Entrevistador: Pero, ¿Por qué motivo encajan?

Estuvo pensando un rato, y finalmente levantó la cabeza. Captaba perceptivamente qué era lo relevante, pero la racionalización le desbordaba.

Entrevistador: Todos los lados son rectos, y por eso podemos adosar uno al otro dos lados rectos. Y al hacerlo, los lados de abajo quedan también en línea recta.

Mientras el entrevistador daba la descripción le hizo repasar al niño con su dedo el contorno de la figura.

En este caso, la estrategia de Choat consistió en hacer hincapié en los aspectos visual y perceptivo, los cuales reforzó contorneando la figura con el dedo. Al mismo tiempo, animó al niño a utilizar un lenguaje apropiado.

A la estudiante Karen Tatiana al final de la investigación se le indagó sobre los aspectos aprendidos a lo largo de la investigación, a alo cual ella respondió:

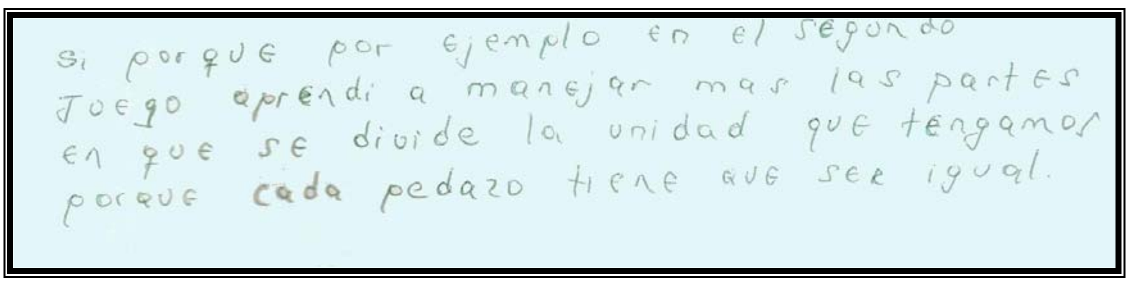


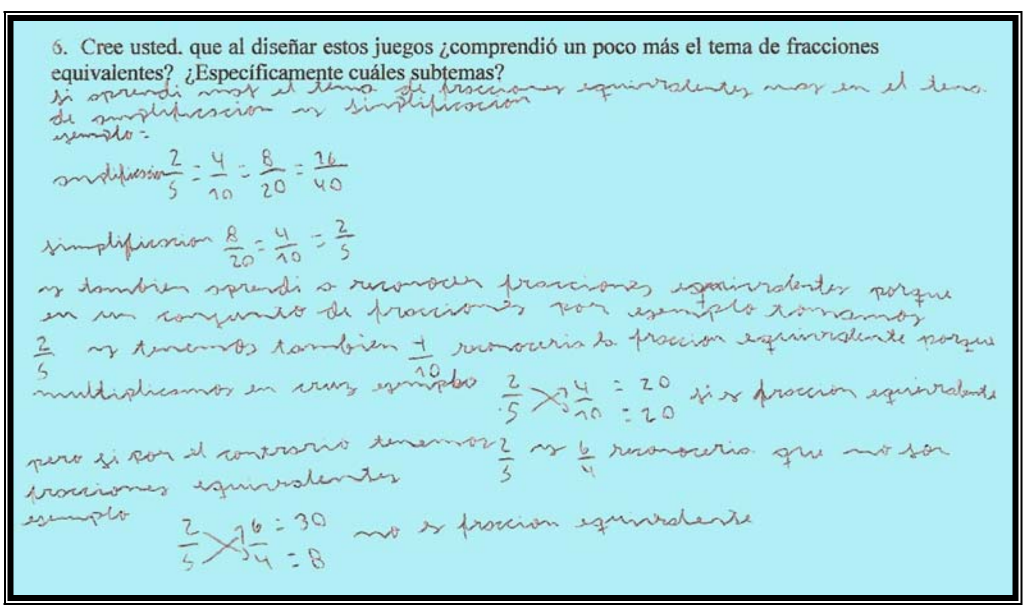
Figura 72. Opinión final de Karen Tatiana

En todo el proceso es de resaltar la importancia que tuvo la comunicación existente entre los estudiantes y entre ellos y los docentes. Gracias a dicha comunicación los estudiantes pudieron aclarar ciertas dudas que tenían y así dar desarrollo a sus juegos.

La habilidad para comunicarnos, como la presentan los lineamientos curriculares, es una necesidad común que tenemos todos los seres humanos en todas las actividades, disciplinas, profesiones y sitios de trabajo. Según el Ministerio de Educación Nacional (Lineamientos curriculares, 1998, p. 94), en todas las profesiones científicas y técnicas las personas deben ser capaces de:

- Expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas.
- Comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual.
- Construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas y de relaciones.
- Hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información.
- Producir y presentar argumentos persuasivos y convincentes.

El estudiante Brayan Leonardo afirma que comprendió un poco más el tema de fracciones equivalentes, resalta sobre todo los procesos de amplificación y simplificación y el método que emplea para reconocer cuando dos o más fracciones son equivalentes; algo importante en él es que presenta ejemplos claros para explicar sus afirmaciones.



6. Cree usted. que al diseñar estos juegos ¿comprendió un poco más el tema de fracciones equivalentes? ¿Específicamente cuáles subtemas?

si aprendi mas el tema de fracciones equivalentes mas en el tema de amplificacion y simplificacion
ejemplo:

amplificacion $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{8}{20} = \frac{16}{40}$

simplificacion $\frac{8}{20} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

y tambien aprendi a reconocer fracciones equivalentes porque en un conjunto de fracciones por ejemplo tomamos $\frac{2}{5}$ y tenemos tambien $\frac{4}{10}$ reconoceria la fraccion equivalente porque multiplicamos en cruz ejemplo $\frac{2}{5} \times \frac{4}{10}$ $= 20$ $= 20$ si es fraccion equivalente

pero si por el contrario tenemos $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{4}$ reconoceria que no son fracciones equivalentes
ejemplo $\frac{2}{5} \times \frac{6}{4}$ $= 30$ $= 8$ no es fraccion equivalente

Figura 73. Opinión final de Brayan Leonardo

Lo que presenta el estudiante es interesante ya que deja ver la confianza que ha adquirido para expresar conceptos y para explicar y presentar ciertos procesos matemáticos que ha comprendido a lo largo de todo este proceso. Si bien es cierto que el estudiante presenta el algoritmo para reconocer fracciones equivalentes, en su segundo juego se notó un avance en el manejo de áreas e identificación de racionales equivalentes. Recordemos su diseño:

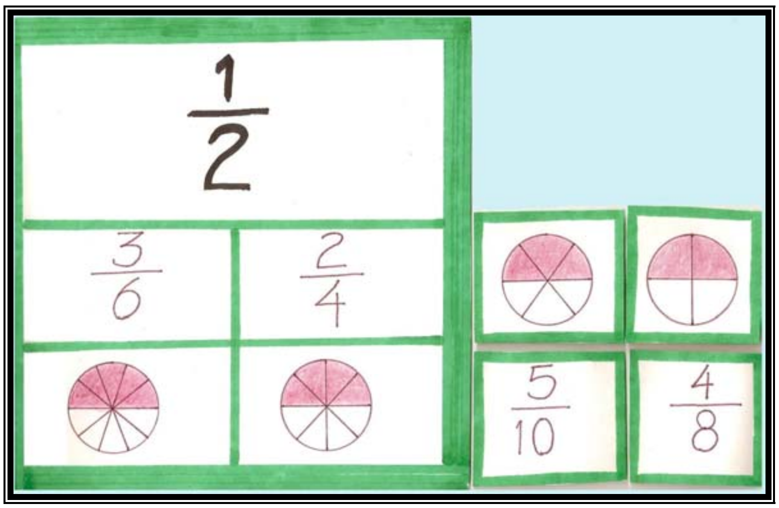


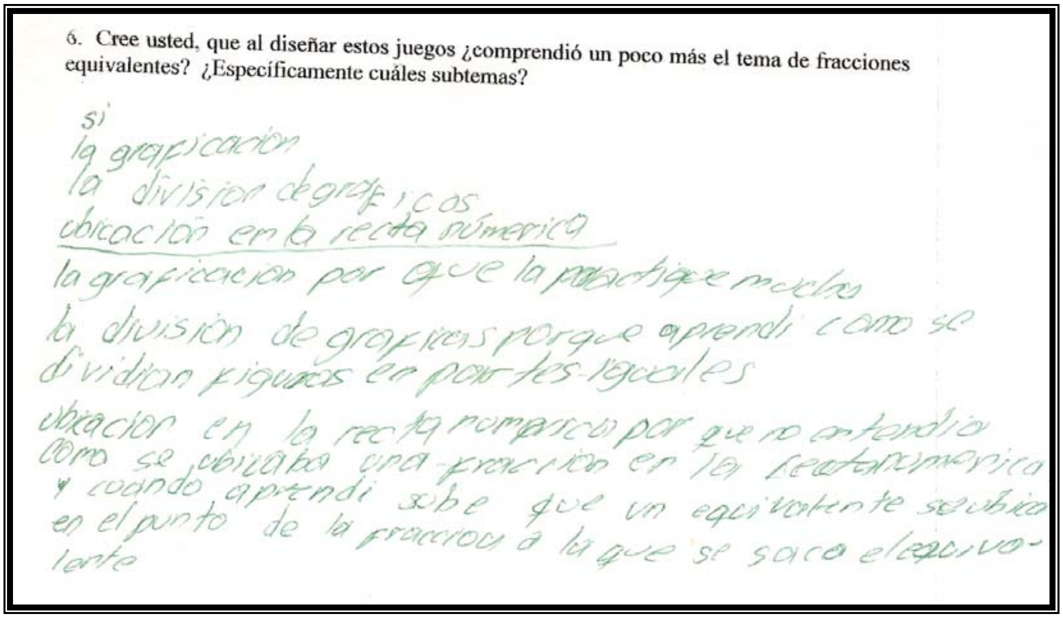
Figura 67. Segundo juego de Brayan Leonardo – Fase 2 – parte a

Estas características de expresión y otras más, son las que precisamente resalta el Ministerio de Educación Nacional que deben tener y ejercer nuestros estudiantes cuando en las clases les proporcionamos un ambiente adecuado para ello (Lineamientos curriculares, 1998, p. 96):

- Deben adquirir seguridad para hacer conjeturas, para preguntar por qué, para explicar su razonamiento, para argumentar y para resolver problemas.
- Se deben motivar a hacer preguntas y a expresar aquellas que no se atreven a exteriorizar.

- Deben leer, interpretar y conducir investigaciones matemáticas en clase; que discutan, escuchen y negocien frecuentemente sus ideas matemáticas con otros estudiantes en forma individual, en pequeños grupos y con la clase completa.
- Que escriban sobre las matemáticas y sus impresiones y creencias tanto en informes de grupo, diarios personales, tareas en casa y actividades de evaluación.
- Deben hacer informes orales en clase en los cuales comunican a través de gráficos, palabras, ecuaciones, tablas y representaciones físicas.
- Deben frecuentemente pasar del lenguaje de la vida diaria al lenguaje de las matemáticas y al de la tecnología.

Para el estudiante Jonathan Ferney, el diseño de juegos le sirvió para comprender mejor algunos temas que involucran fracciones; menciona la graficación y le da prioridad a la ubicación de racionales en la recta numérica. Dice en sus palabras que racionales equivalentes se deben ubicar sobre el mismo punto de la recta numérica. Recordemos que el estudiante en su segundo juego aplicó la recta numérica para diseñar su juego empleando algunos vasos.


6. Cree usted, que al diseñar estos juegos ¿comprendió un poco más el tema de fracciones equivalentes? ¿Específicamente cuáles subtemas?

si
la graficación
la división de graficos
ubicación en la recta númerica
la graficacion por que la practique mucho
la división de graficos porque aprendí como se dividian figuras en partes iguales
ubicacion en la recta numerica por que no entendia como se ubicaba una fracción en la recta numerica y cuando aprendí sabe que un equivalente se ubica en el punto de la fracción a la que se saco el equivalente

Figura 74. Opinión final de Jonathan Ferney

Se puede apreciar con estas opiniones de los estudiantes, y con los resultados obtenidos en la "Revisión final del aprendizaje", el progreso que cada uno de ellos alcanzó en el aprendizaje de las fracciones equivalentes. Se observó en cada uno de ellos un interés, una motivación para desarrollar sus juegos y una comprensión de lo que estaban haciendo, sin embargo no se observó el mismo interés y entusiasmo en los demás estudiantes del grado séptimo, ya que en los momentos en que se socializaron los juegos no le encontraban mayor atractivo a los mismos. Los estudiantes diseñadores en primer lugar debían explicar y aclarar un poco los conceptos matemáticos que estaban involucrados en cada juego, así como explicar también las reglas que habían creado para su desarrollo.

La estudiante Mónica Yeraldin, resalta como aprendió a ubicar racionales en la recta numérica, identificando los equivalentes y ubicándolos sobre un mismo punto de la recta; veamos lo que expresó en la "Revisión final del aprendizaje” cuando se le preguntó si había aprendido algo durante todo el desarrollo del proceso:

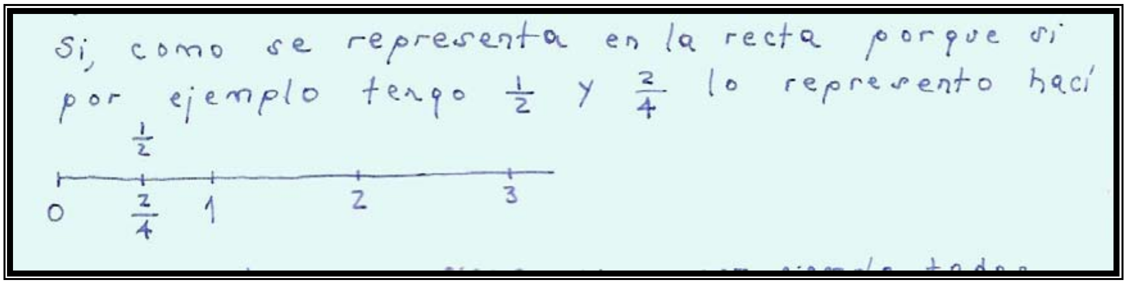

Si, como se representa en la recta porque si por ejemplo tengo $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ lo represento hací

Figura 75. Opinión final de Mónica Yeraldin

Nos parece pertinente en este momento resaltar la importancia que tuvo para los docentes involucrados en la investigación, la socialización de los avances que cada uno iba obteniendo con sus estudiantes en los diferentes trabajos. Fueron esenciales las críticas y consejos que recibimos de nuestros instructores y de los mismos compañeros de la Especialización, ya que gracias a estos se pudieron mejorar muchos aspectos en el desarrollo de las investigaciones; a medida que transcurría el tiempo aprendimos de nosotros mismos y también de los trabajos de los demás, incluso pudimos tomar ideas de lo que nuestros colegas estaban realizando con sus estudiantes y adaptarlas a nuestras propias investigaciones.

Lo anterior fue importante para nosotros los docentes ya que nos permitió ver que somos seres inacabados, que hay mucho por aprender todavía y mucho por mejorar, que cada día tendremos siempre algo nuevo por aprender y así enriquecer más nuestro diario quehacer; por esto deseamos citar las palabras de la Doctora Diana Jaramillo cuando al estar hablando acerca del profesor dice lo siguiente:

"Se constituye en un sujeto de conocimiento. Es decir, se constituye en un individuo que constantemente está construyendo, produciendo y (re)significando conocimientos para su propia práctica pedagógica." (Jaramillo, 2005, p. 4)

6. REFLEXIONES Y SUGERENCIAS

- En un comienzo se les dificultó a los estudiantes diseñar un juego con base en el tema señalado, pero a medida que fueron avanzando las diferentes etapas y fases de la investigación, se notó una mayor facilidad, ingenio y creatividad, en cada uno de los diseños.

- El presente trabajo le permitió a los educandos tener un punto de partida, los conocimientos previos que cada uno de ellos tenía sobre el tema involucrado, para irlos modificando a medida que incorporaban nuevos conocimientos, y de esta manera establecer nuevas estructuras cognitivas.

- En las distintas fases de la investigación se observó la importancia de la motivación dentro del proceso de aprendizaje, ya que los estudiantes se veían motivados a mejorar la adquisición de conocimientos para poder dar feliz término a sus ideas iniciales sobre los diferentes diseños.

- Tuvo igualmente importancia la comunicación entre los estudiantes, el intercambio de ideas entre ellos, pues en algunos casos ciertos estudiantes pudieron diseñar sus juegos a partir de ideas expuestas, en fases anteriores, por sus compañeros.

- Fue primordial el tiempo dado a los estudiantes entre una fase y otra, ya que durante este lapso cada estudiante pudo mejorar, ampliar y modificar sus ideas, para en la fase siguiente presentar un diseño mejorado en comparación con el inicialmente presentado.

- El emplear material físico específico en los diferentes diseños, les permitió a los estudiantes verificar procedimientos, comprender los conceptos matemáticos involucrados, darle sentido a lo que estaban aprendiendo y asimilar verdaderamente los conocimientos que estaban adquiriendo.

- El enfocar las fracciones desde diferentes interpretaciones, fracciones como puntos de una recta numérica y fracciones como partes de una región unitaria, les permitió a los estudiantes adquirir una mejor comprensión tanto conceptual como procedimental en el tema matemático involucrado en la actual investigación.

- Debido a que el aprendizaje es todo un proceso, no es algo que se de instantáneamente, el emplear el diseño de juegos por parte de los estudiantes en este trabajo, se convirtió en un buen medio para que paso a paso, fuesen reforzando y complementando sus conocimientos previos y llegasen a asimilar los conceptos y procedimientos involucrados en el tema de fracciones equivalentes.

- Con el presente trabajo se advirtió que no todos los estudiantes alcanzaron un mismo nivel de aprendizaje; pues en algunos de ellos al final del proceso aún se advierten ciertas deficiencias en algunos conceptos.

- Se apreció como los estudiantes están acostumbrados a trabajar las áreas en la representación gráfica de racionales, mediante el empleo de figuras tradicionales como triángulos y rectángulos, pero al enfrentarse con figuras algo más complejas, se nota una cierta dificultad en algunos de ellos.

- Quedó claro que los estudiantes obtuvieron mejores alcances en los aspectos que cada uno manejó en sus respectivos juegos, es decir, la ubicación de racionales sobre la recta numérica o la representación mediante el manejo de áreas. Pero en algunos se advirtieron deficiencias al final del proceso al trabajar en los aspectos que ellos no habían manejado en sus juegos.

- Se sugiere emplear el diseño de juegos matemáticos con los demás aspectos que involucren el uso de racionales y con los otros temas que conforman el plan de estudios en el grado séptimo, ya que se observaron buenos resultados con el tema de fracciones equivalentes.

- Se puede extender este medio empleado, el diseño de juegos, a grados superiores e inferiores, ya que es una herramienta totalmente abierta, que puede ser empleada con estudiantes de cualquier edad, simplemente tener en cuenta que los grados de dificultad y creatividad en cada juego irán aumentando o disminuyendo según la edad de los educandos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. (1989) Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas.

2. BASTÉ, M. "La Biblioteca: Apuntes de Enseñanza. Juegos y matemáticas en primaria." Recuperado el 10 de Julio de 2006 de http://www.indexnet.santillana.es/rcs/_archivos/Primaria/Biblioteca/Apuntes/juegosmates.pdf

3. BOGDAN, R; BIKLEN, S. (1991). Investigación cualitativa en educación. Portugal: Colección ciencias de la educación, Porto editora.

4. COLLETTE, J. (1986) Historia de las Matemáticas. México: Editorial Siglo XXI.

5. CORREA, C. (1996) El Aprendizaje Significativo: Estrategias y Método de estudio. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

6. CORREDOR, E. (2004) Fracciones equivalentes y adición de Números racionales: Su comprensión mediada por el uso de material concreto. Monografía de Especialización. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

7. DE GUZMÁN, M. Enseñanza de las ciencias y la matemática. Recuperadoel21julio2006de: http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm#A

8. DE GUZMÁN, M. (1984) Juegos matemáticos en la enseñanza. Recuperado el 15 de Julio de 2006 de http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/juemat/juemat.htm

9. DE GUZMÁN, M. (1995) Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos. Recuperado el 21 deJuliode2006de **http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/ppm.htm**

10. Duque, J. (2003) La misión de educar. Santafé de Bogotá: Ediciones y representaciones Eduque.

11. GARCÍA, J. (2003) Didáctica de las ciencias: Resolución de problemas y desarrollo de la creatividad. Santafé de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

12. GONZÁLEZ, R. (1997) Aprendizaje de las Matemáticas y desarrollo de Habilidades del Pensamiento. Revista Padres y Maestros, No. 230, Septiembre 1997. Recuperado el 15 de Julio de 2006 de http://www.educadormarista.com/PQEDISON/aprendizajematematicas.htm

13. GUECHA, N. (1993) Matemática Recreativa de Séptimo Grado. Monografía de Licenciatura. Bucaramanga: UIS.

14. JARAMILLO, D. (2005) Material de clase. Seminario I Didáctica de la Matemática. Especialización en Educación Matemática. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

15. JIMENEZ, C. A.; DINELLO, R. A.; ALVARADO, L. A. (2000) Lúdica y Recreación. Santafé de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

16. LLINARES, S.; SÁNCHEZ, M.; (1988) Fracciones. Madrid: Editorial Sistesis.

17. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998) Lineamientos curriculares del área de Matemáticas. Santafé de Bogotá: Editorial Delfín Ltda.

18. OSORIO, R. (2005) Material de clase. Hacia una didáctica de la Geometría. Especialización en Educación Matemática. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

19. PARADA, S. (2005) La producción de textos: Una alternativa para evaluar en matemáticas. Monografía de Especialización. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

20. PEREZ, C. (1996) Propuesta Metodológica para el Aprendizaje de Temas Matemáticos con base en el juego. Monografía de Especialización. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

21. PRADA, G. (2004) Propuesta didáctica para el Aprendizaje Significativo de las Operaciones con números fraccionarios en Séptimo grado. Monografía de Especialización. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

22. RINCON, M. (1996) Ensayo Metodológico para la construcción del concepto de fracciones equivalentes. Monografía de Especialización. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

23. VÉLEZ, A.; VÉLEZ, J. D. (2002) Neuróbicos: Desafíos para la Inteligencia. Medellín: Dann Regional.

24. ___________ Diccionario de la Real Academia Española. Microsoft Encarta 2006. Tomado el 10 de Julio de 2006.