Identidades Polinomiales Z-graduadas para el álgebra $M_n(\mathbb{F})$ de matrices de orden n sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica cero

Angie Sofía Fonseca Pineda

DIRECTOR
PROF. CARLOS ARTURO RODRIGUEZ PALMA
DOCTOR EN MATEMÁTICAS

Trabajo de Grado para optar al Título de Matemática

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2026

Agradecimientos

Primeramente, agradezco a Dios y a la Virgen María por permitirme estar en este mundo y acompañarme en cada etapa de mi vida, brindándome fortaleza, fe y esperanza para alcanzar mis metas.

En segundo lugar, agradezco profundamente a mi familia, pilar fundamental de este proceso. De manera especial, a mi mamá, Laura Pineda, quien desde el primer momento me apoyó incondicionalmente en todas mis decisiones y estuvo presente en cada paso de este camino. A mi hermana Ingrid, por ser una compañera constante y un apoyo incondicional. A mi hermano Matías y a mis sobrinos Mariana y Santiago, quienes con sus travesuras logran alegrar cada uno de mis días incluso desde lejos.

De igual manera, agradezco a Santiago, quien se convirtió en un apoyo constante y en mi mejor compañía, brindándome felicidad e impulso, haciendo que la fase final de este proceso fuera más llevadera.

Quiero expresar un agradecimiento especial a todos mis profesores, quienes contribuyeron de manera significativa a mi formación académica y personal, sembrando en mí la semilla que hoy me permite ser quien soy. En particular, agradezco a mi director de tesis, el profesor Carlos Arturo Rodríguez Palma, por compartir generosamente sus conocimientos, su orientación y su apoyo, fundamentales para culminar esta etapa de mi vida.

Finalmente, agradezco a todos mis compañeros y amigos que conocí a lo largo de esta vida universitaria, quienes siempre estuvieron dispuestos a compartir sus conocimientos, su tiempo y su apoyo. Gracias a ellos, entre risas y lágrimas, fue posible sacar adelante una carrera que, sin duda, no es nada sencilla.

Índice general

Resumen

Título: Identidades Polinomiales Z-graduadas para el álgebra $M_n(\mathbb{F})$ de matrices de orden n sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica cero.

Autor: Angie Sofía Fonseca Pineda

Palabras clave: Álgebras conmutativas, identidades polinomiales, álgebras graduadas y teoría de álgebras

Descripción: El estudio de las identidades polinomiales constituye una línea central en la teoría de álgebras no conmutativas, debido a su papel en la descripción de propiedades estructurales que permanecen invariantes bajo distintas evaluaciones. En particular, el álgebra de matrices $M_n(F)$, sobre un cuerpo de característica cero, ha sido ampliamente analizada como un ejemplo fundamental de álgebra asociativa que satisface identidades polinomiales. En este contexto, surge el interés por comprender cómo estas identidades se ven afectadas al incorporar estructuras adicionales, como lo es una graduación. Las álgebras graduadas permiten descomponer el álgebra en componentes homogéneas, proporcionando una herramienta más refinada para el estudio de su estructura interna. En este trabajo se abordan las identidades polinomiales graduadas del álgebra $M_n(F)$, analizando las restricciones que impone la graduación y cómo estas influyen en el comportamiento de los polinomios que se anulan en el álgebra. Este enfoque permite obtener una comprensión más detallada de la interacción entre las identidades algebraicas y la estructura graduada.

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Arturo Rodríguez Palma. Dr. Matemático

Abstract

Title: $\mathbb{Z}$-graded Polynomial Identities for the algebra $M_n(\mathbb{F})$ of $n \times n$ matrices over a field $\mathbb{F}$ of characteristic zero.

Author: Angie Sofía Fonseca Pineda

Keywords: Commutative algebras, polynomial identities, graded algebras, algebra theory

Abstract: The study of polynomial identities constitutes a central line of research in the theory of noncommutative algebras, due to its role in describing structural properties that remain invariant under different evaluations. In particular, the matrix algebra $M_n(\mathbb{F})$ over a field of characteristic zero has been widely studied as a fundamental example of an associative algebra satisfying polynomial identities.

In this context, there is an interest in understanding how these identities are affected when additional structures, such as a grading, are introduced. Graded algebras allow the decomposition of the algebra into homogeneous components, providing a more refined tool for studying its internal structure.

In this work, the graded polynomial identities of the algebra $M_n(\mathbb{F})$ are analyzed, focusing on the restrictions imposed by the grading and how these influence the behavior of polynomials that vanish on the algebra. This approach provides a deeper understanding of the interaction between algebraic identities and graded structure.

*Degree Work

**Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director: Carlos Arturo Rodríguez Palma, Ph.D. in Mathematics.

Introducción

El estudio de las identidades polinomiales constituye una línea central en la teoría de álgebras no conmutativas, con aplicaciones tanto estructurales como computacionales. En particular, el álgebra $M_n(\mathbb{F})$ de matrices de orden n, sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica cero, ha sido objeto de un análisis profundo debido a su papel fundamental como ejemplo de álgebra asociativa con identidades polinomiales. Esta monografía tiene como objetivo general el estudio de las identidades polinomiales graduadas que satisfacen estas álgebras matriciales cuando se les dota de una estructura adicional de graduación. Para el desarrollo de este trabajo se ha tomado como referencia principal el artículo de Vasilovsky [6], donde se analizan en detalle las identidades polinomiales $\mathbb{Z}$-graduadas del álgebra completa de matrices.

El trabajo está estructurado de la siguiente forma: en la primera parte se introducen algunas definiciones básicas sobre álgebras asociativas, conmutativas y libres, conceptos necesarios para el desarrollo de esta tesis. En el segundo capítulo se presentan las identidades polinomiales, junto con los polinomios multilineales y multihomogéneos, estos elementos son esenciales para abordar el análisis de identidades en contextos más refinados. En el tercer capítulo aborda las álgebras graduadas y las identidades polinomiales graduadas especialmente graduadas por el grupo $\mathbb{Z}$. Finalmente, en el último capítulo se demuestran en detalle los resultados donde se aplican estas ideas al caso específico de $M_n(\mathbb{F})$, explorando distintos tipos de graduaciones y las identidades que se derivan de ellas.

1. Álgebras

1.1. Álgebras conmutativas y asociativas

Las ideas esenciales que constituyen la base del estudio de las álgebras se presentan en esta sección. Comienza con la definición formal de álgebra sobre un cuerpo, a partir de esta, se introducen los conceptos de subálgebra e ideal. Estos últimos posibilitan el estudio de subconjuntos cerrados bajo las operaciones del álgebra y el análisis de sus propiedades. Además, se analiza el concepto de homomorfismo de álgebras, entendido como una transformación lineal que mantiene los productos establecidos entre las álgebras. Se muestran ejemplos específicos que facilitan la comprensión de estas definiciones, ilustrando cada concepto en contextos familiares, como los espacios de polinomios y las álgebras de matrices.

DEFINICIÓN 1.1.1. *Un espacio vectorial A es llamado un* ***álgebra*** *(o $\mathbb{F}$-álgebra) si A tiene una operación binaria “ $*$" llamada producto (o multiplicación), tal que para todo $a, b, c \in A$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, se tiene*

(i) $(a + b) * c = a * c + b * c$

(ii) $a * (b + c) = a * b + a * c$

(iii) $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$

Usualmente denotamos el producto en A por $(\cdot)$, es decir, $a * b = a \cdot b = ab$.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de espacios vectoriales que son álgebras.

EJEMPLO 1.1. *El espacio vectorial $M_n(\mathbb{F})$, de las matrices de orden n sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, es un álgebra con el producto usual de matrices. Es decir, para $A = (a_{ik})$, $B = (b_{kj}) \in M_n(\mathbb{F})$ definimos el producto AB como*

$$AB = (c_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{F}),$$

donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

EJEMPLO 1.2. *El espacio vectorial $UT_n(\mathbb{F})$, de las matrices triangulares superiores de orden n sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, es un álgebra con el producto definido en el ejemplo anterior.*

EJEMPLO 1.3. *El espacio vectorial $\mathbb{F}[x]$, de todos los polinomios con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{F}$, es un álgebra con el producto usual de polinomios (o producto de Cauchy). Es decir, para $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ con $a_i, b_j \in \mathbb{F}$, definimos el producto de $f(x)g(x)$ como*

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k.$$

Veamos algunas estructuras importates para el desarrollo del trabajo.

DEFINICIÓN 1.1.2.
- *Un subespacio S de un álgebra A, es llamada una **subálgebra** de A si es cerrado respecto al producto en A; es decir, $s_1, s_2 \in S$ implica que $s_1 s_2 \in S$.*
- *Una subálgebra I de un álgebra A es llamada **ideal izquierdo** de A si $AI \subseteq I$; es decir, $ab \in I$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in I$. De manera análoga se define el **ideal derecho**, es decir, la subálgebra I de A es ideal derecho, si $ba \in I$, para todo $a \in A$ y para todo $b \in I$.*
- *Un ideal I de un álgebra A es un ideal **bilateral** (o simplemente ideal) si es ideal derecho e ideal izquierdo, es decir, $IA \subseteq I$ y $AI \subseteq I$.*

A continuación, se muestran algunos ejemplos comunes para subálgebras e ideales para matrices.

EJEMPLO 1.4.
- *El subespacio vectorial $UT_n(\mathbb{F})$ de $M_n(\mathbb{F})$ es una subálgebra de $M_n(\mathbb{F})$, pues si $A, B \in UT_n(\mathbb{F})$, entonces $AB \in UT_n(\mathbb{F})$.*
- *El subespacio vectorial $D_n(\mathbb{F})$, de las matrices diagonales, es una subálgebra de $M_n(\mathbb{F})$, dado que si $A, B \in D_n(\mathbb{F})$, entonces $AB \in D_n(\mathbb{F})$.*
- *El espacio vectorial $Sl_n(\mathbb{F})$, de las matrices de traza cero sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, es un ideal en el álgebra de matrices $M_n(\mathbb{F})$, con el producto siendo el conmutador; es decir, para todo $A, B \in Sl_n(\mathbb{F})$, entonces $[A, B] := AB - BA \in Sl_n(\mathbb{F})$.*

DEFINICIÓN 1.1.3. *La $\mathbb{F}$-transformación lineal $\phi : A_1 \to A_2$, de las álgebras A_1, A_2 sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ es un* ***homomorfismo de álgebra****, si*

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b),$$

para todo $a, b \in A_1$.

Observación: Como el homomorfismo de álgebras $\phi : A_1 \to A_2$ es una $\mathbb{F}$-transformación lineal, entonces se tiene que ϕ es un homomorfismo de álgebras si se cumplen

- $\phi(\alpha a + b) = \alpha\phi(a) + \phi(b)$, para todo $a, b \in A_1$ y $\alpha \in \mathbb{F}$.
- $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$, para todo $a, b \in A_1$.

Veamos algunos ejemplos comunes de homomorfismos de álgebras.

EJEMPLO 1.5.
- *Sea A un álgebra, la transformación lineal $id_A : A \to A$, definida por $id_A(a) = a$ para todo $a \in A$, es un homomorfismo de álgebras.*
- *Sea $\mathbb{F}[x]$ el álgebra de polinomios en la variable x con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{F}$ y $a \in \mathbb{F}$ fijo. La transformación lineal $\phi_a : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}$ definida por $\phi_a(f(x)) = f(a)$, es un homomorfismo de álgebras, llamado homomorfismo de evaluación.*

DEFINICIÓN 1.1.4. *Un* ***endomorfismo de álgebras*** *es un homomorfismo de un álgebra en si misma.*

DEFINICIÓN 1.1.5. *Sea A un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Entonces A es lamada*

(i) ***Asociativa****, si $(ab)c = a(bc)$, para todo $a, b, c \in A$.*

(ii) ***Conmutativa****, si $ab = ba$, para todo $a, b \in A$.*

(iii) ***Unitaria****, si en A existe un elemento 1_A con la propiedad $1_A a = a 1_A = a$, para todo $a \in A$. El elemento 1_A es único y se denomina* ***elemento unitario****.*

En este trabajo se considerán álgebras asociativas con unidad, además todas las subálgebras serán unitarias con el mismo elemento unitario.

1.2. Álgebras libres

En esta sección se define el concepto de álgebra libre, libremente generada por un conjunto, con el fin de establecer el marco en el que se desarrollarán las identidades polinomiales, las cuales constituyen el principal objeto de estudio. La sección se complementa con ejemplos representativos que explican estas ideas en casos específicos, como las álgebras de matrices y otras álgebras asociativas relevantes.

DEFINICIÓN 1.2.1. *Sea $\mathfrak{B}$ una clase de álgebras y sea $A \in \mathfrak{B}$ el álgebra generada por el conjunto X. El álgebra A es llamada un* ***álgebra libre*** *en la clase $\mathfrak{B}$, libremente generada por el conjunto X, si para cualquier álgebra $B \in \mathfrak{B}$, cada función $h : X \to B$ puede extenderse a un homomorfismo $\varphi_h : A \to B$. La cardinalidad $|X|$ del conjunto X es llamado el* ***rango*** *de A.*

Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un conjunto no vacío y enumerable de variables no conmutativas. Una **palabra** en X es una secuencia de la forma $x_{i_1} \cdots x_{i_n}$, donde $x_{i_j} \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ [*]. Denotamos por 1 la **palabra vacía**. Dos palabras son iguales si y solo si tienen la misma longitud (número de variables) y los mismos elementos en las posiciones correspondientes, es decir,

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n} = x_{j_1} \cdots x_{j_m} \quad \text{si y solo si} \quad n = m \text{ e } i_k = j_k \text{ para todo } k = 1, \ldots, n.$$

Denotamos por $\mathbb{F}\langle X\rangle$ el **espacio vectorial** sobre $\mathbb{F}$ cuya base es el conjunto de todas las palabras en X. Así, los elementos de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ son *sumas formales* de términos que consisten en el *producto formal* de un escalar por una palabra en X. A estos productos formales de un escalar y una palabra se les llama **monomios**, y a los elementos de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ se les denomina **polinomios**.

El **grado** de un monomio $m \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, denotado por $\deg m$, es el número de variables en m. El **grado de** m **en la variable** x_i, denotado por $\deg_{x_i} m$, es el número de veces que aparece x_i en m. Por ejemplo, si $m = \alpha x_1 x_3 x_1 x_2^2$, entonces $\deg m = 3$ y $\deg_{x_1} m = 2$.

Si $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, entonces el grado de f, denotado por $\deg f$, es el máximo grado de los monomios en f y el grado de f en la variable x_i, denotado por $\deg_{x_i} f$, es el máximo de los grados en la variable x_i de los monomio en f.
Por ejemplo, si $f(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_3 x_2 x_3 x_1 + \beta x_1^2 x_2 x_3 x_1$, entonces $\deg_{x_3} f = 2$ y $\deg f = 3$.

TEOREMA 1.1. *Para cada conjunto X el álgebra $\mathbb{F}\langle X\rangle$ con base el conjunto de todas las palabras*

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}; \;\; x_{i_j} \in X; \;\; n \in \mathbb{N}$$

y multiplicación definida por

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_m})(x_{j_1} \cdots x_{j_n}) = x_{i_1} \cdots x_{i_m} x_{j_1} \cdots x_{j_m}; \;\; x_{i_k}, x_{j_l} \in X$$

es libre en la clase de todas las álgebras asociativas unitarias.

DEMOSTRACIÓN. *Sea A un álgebra asociativa unitaria, con elemento unidad $1_A \in A$, y sea $h : X \to A$, una aplicación definida por, $h(x_i) = a_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces existe una aplicación lineal $\varphi_h : \mathbb{F}\langle X\rangle \to A$ tal que $\varphi_h(1) = 1_A$ y $\varphi_h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = a_{i_1} \cdots a_{i_n}$. Por lo tanto, φ_h es el único homomorfismo de álgebras que satisface $\varphi_h|_X = h$.* □

[*] $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de los números naturales.

Si $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$, denotaremos por $f(a_1, \ldots, a_n)$ la imagen de f bajo φ_h. En otras palabras, $f(a_1, \ldots, a_n)$ es el elemento de A que se obtiene al reemplazar x_i por a_i en f.

Si consideramos el subespacio de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ generado por las palabras de longitud mayor o igual que 1, obtenemos el álgebra libre asociativa no unitaria, la cual es libre en la clase de todas las álgebras asociativas.

EJEMPLO 1.6. *Para cualquier conjunto X, el álgebra conmutativa libre unitaria $\mathbb{F}\langle X \rangle$ es libre en la clase de álgebras asociativas conmutativas, generadas libremente por X.*

2. Identidades polinomiales

2.1. Definiciones básicas y ejemplos

En esta sección se introducen las nociones de identidad polinomial (PI), de PI-álgebra, esto es, un álgebra que satisface al menos una identidad polinomial no trivial y de T-Ideal del álgebra libre $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Asimismo, se define el conjunto de todas las identidades polinomiales de un álgebra, el cual constituye un T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$, estructura que permite describir de manera formal el comportamiento algebraico invariante bajo endomorfismos. Finalmente, se presentan ejemplos representativos y demostraciones que facilitan la comprensión de estos conceptos.

En adelante, se considerará que todas las álgebras están definidas sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica 0, a menos que se especifique lo contrario.

DEFINICIÓN 2.1.1. *Sea $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ y sea A un álgebra asociativa. Decimos que $f = 0$ es una **identidad polinomial (PI)** para A si*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Si $f = 0$ es una identidad polinomial para un álgebra A, también se dice que el polinomio $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ por si mismo es una **identidad polinomial para** A o que A **satisface el polinomio** f.

Es claro que el polinomio nulo es una identidad polinomial para cualquier álgebra. Esta identidad será llamada **identidad polinomial trivial**.

DEFINICIÓN 2.1.2. *Sea A un álgebra asociativa, decimos que A es una **PI-álgebra** si satisface una identidad polinomial no trivial $f = 0$.*

EJEMPLO 2.1. *Sea A un álgebra conmutativa, entonces A es una PI-álgebra, ya que satisface la identidad polinomial*

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1 = [x_1, x_2],$$

pues $f(a_1, a_2) = a_1a_2 - a_2a_1 = a_1a_2 - a_1a_2 = 0$ para todo $a_1, a_2 \in A$.

Las álgebras poseen propiedades fundamentales que pueden describirse mediante identidades polinomiales; entre los ejemplos más conocidos se encuentran la conmutatividad y la

asociatividad.
Una característica destacable es que todas las PI-álgebras es que tienen propiedades combinatorias similares a las de álgebras conmutativas y de dimensión finita.

Definimos el **polinomio standard** de grado n como sigue

$$\mathrm{St}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

donde S_n el grupo de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ y $(-1)^\sigma$ es el signo de la permutación σ; es decir, $(-1)^\sigma = 1$ si σ es una permutación par y $(-1)^\sigma = -1$ si σ es impar.

En 1950, Amitsur-Levitzki [5] establecieron que el polinomio estándar $\mathrm{St}_{2n} = 0$ es una identidad polinomial del álgebra de matrices de orden n, $M_n(\mathbb{F})$ sobre un cuerpo de característica cero.
Por otra parte, en 1936, Wagner [10] demostró que el álgebra de matrices de orden 2, $M_2(\mathbb{F})$ satisface la identidad polinomial $[[x_1, x_2]^2, x_3]$. Posteriormente, en 1943, Hall [4] probó que si un álgebra de división no conmutativa satisface esta identidad polinomial, entonces es un cuaternión generalizado.
Dado que el álgebra $M_2(\mathbb{F})$ y el álgebra de cuaterniones comparten las mismas identidades polinomiales, durante un largo período esta se conoció como **identidad de Hall**. En este trabajo, se empleará el término de identidad de Wagner-Hall.

De lo anterior se puede deducir que para matrices de orden 2 se tiene lo siguiente

EJEMPLO 2.2. *El álgebra $M_2(\mathbb{F})$ de todas las matrices de orden 2 satisface*

- *La identidad standard:* $\mathrm{St}_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.
- *La identidad de Wagner-Hall:* $[[x_1, x_2]^2, x_3] = 0$.

DEFINICIÓN 2.1.3. *Un ideal I de $\mathbb{F}\langle X \rangle$ es un **T-ideal** si $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo $\varphi : \mathbb{F}\langle X \rangle \to \mathbb{F}\langle X \rangle$.*

Notación: Sea A un álgebra, se denota por $\mathrm{Id}(A)$ al **conjunto de identidades polinomiales** de A. Es decir,

$$\mathrm{Id}(A) = \{f \in \mathbb{F}\langle X \rangle : f = 0 \text{ en } A\}.$$

LEMA 2.1. *El conjunto $\mathrm{Id}(A)$ es un ideal de $\mathbb{F}\langle X \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN. *Dada un álgebra A, veamos que $\mathrm{Id}(A)$ es un subespacio vectorial. Como el polinomio $0 \in \mathrm{Id}(A)$, entonces $\mathrm{Id}(A) \neq \emptyset$. Sean $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, $g = g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Id}(A)$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, veamos que $f + \alpha g \in \mathrm{Id}(A)$; para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$, tenemos que*

$$(f + \alpha g)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + \alpha g(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

Como $f, g \in \mathrm{Id}(A)$*, entonces* $f + \alpha g \in \mathrm{Id}(A)$*. Por lo tanto es un subespacio vectorial.*
Veamos ahora que $\mathrm{Id}(A)$ *es cerrado con el producto, es decir,* $fg \in \mathrm{Id}(A)$*. Como* $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ *y* $g = g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Id}(A)$*, para todo* $a_1, \ldots, a_n$*, tenemos*

$$(fg)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n)g(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

Entonces, $fg \in \mathrm{Id}(A)$*. Por lo tanto,* $\mathrm{Id}(A)$ *es cerrado, así es una subálgebra de* $\mathbb{F}\langle X\rangle$*.*
Sea $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Id}(A)$ *y* $g = g(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$*, entonces* $fg \in \mathrm{Id}(A)$*, puesto que, para todo* $a_1, \ldots, a_n \in A$ *tenemos,*

$$(fg)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n)g(a_1, \ldots, a_n)$$

pero como $f \in \mathrm{Id}(A)$*, entonces* $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$*. Por lo tanto,* $fg = 0 \in \mathrm{Id}(A)$*.*
Análogamente para $gf \in \mathrm{Id}(A)$*. Así* $\mathrm{Id}(A)$ *es un ideal de* $\mathbb{F}\langle X\rangle$ *.* □

TEOREMA 2.1. *Sea* A *un álgebra y* $\mathbb{F}\langle X\rangle$ *el álgebra asociativa libremente generada por* X*, entonces*

i) El conjunto $\mathrm{Id}(A)$ *es un* T*-ideal de* $\mathbb{F}\langle X\rangle$*.*

ii) Si I *es un* T*-ideal de* $\mathbb{F}\langle X\rangle$*, el álgebra* $A = \mathbb{F}\langle X\rangle / I$ *satisface que* $\mathrm{Id}(A) = I$*.*

DEMOSTRACIÓN. .

i) Sea $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Id}(A)$ *y* $\varphi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to \mathbb{F}\langle X\rangle$ *un endomorfismo de* $\mathbb{F}\langle X\rangle$*, es decir,* φ *se define por* $\varphi(x_i) = g_i$*, para todo* i*. Veamos que* $\varphi(f) \in \mathrm{Id}(A)$*. Note que*

$$\varphi(f)(x_1, \ldots, x_n) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = f(g_1, \ldots, g_n)$$

Luego, para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$*, tenemos*

$$\varphi(f)(a_1, \ldots, a_n) = f(g_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, g_n(a_1, \ldots, a_n)) = 0,$$

pues $g_i(a_1, \ldots, a_n) \in A$ *para todo* $i = 1, 2 \ldots, n$*. Por lo tanto,* $\varphi(f) \in \mathrm{Id}(A)$*, así* $\mathrm{Id}(A)$ *es un* T*-ideal de* $\mathbb{F}\langle X\rangle$*.*

ii) Sea A *el álgebra cociente* $A = \mathbb{F}\langle X\rangle / I$ *y la proyección canónica* $\pi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to A$*, se define por* $\pi(g_i) = g_i + I$*. Si* $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Id}(A)$*, entonces* $f(x_1, \ldots, x_n) \in ker\varphi$*, donde* φ *es un endomorfismo de* $\mathbb{F}\langle X\rangle$*. Pero* $\pi(f) = f + I$ *y como* f *se anula en* A*, entonces* $\pi(f) = 0$ *en* A*, por lo tanto,* $f \in ker\pi = I$*. Así* $\mathrm{Id}(A) \subseteq I$*.*
Por otro lado, si $f(x_1, \ldots, x_n) \in I$ *y* $g_1 + I, \ldots, g_n + I \in A$*, entonces* $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ *y* $f(g_1, \ldots, g_n) \in I$*, por ello*

$$f(g_1 + I, \ldots, g_n + I) = f(g_1, \ldots, g_n) + I = I,$$

como $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Id}(A)$. *Por lo tanto,* $I \subseteq \mathrm{Id}(A)$. *De lo anterior podemos concluir que* $I = \mathrm{Id}(A)$.

□

DEFINICIÓN 2.1.4. *Dado un conjunto no vacío* $S \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$. *El* T***-ideal generado por*** S*, denotado por* $\langle S\rangle_T$*, es la intersección de todos los* T*-ideales de* $\mathbb{F}\langle X\rangle$ *que contienen a* S*, es decir,*

$$\langle S\rangle_T = \bigcap_{S\subseteq I}\{I : I \text{ es un T-ideal}\}.$$

Note que el T-ideal generado por S, es el T-ideal más pequeño que contiene S. Observe que $\langle S\rangle_T$ coincide con el subespacio vectorial de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ generado por el conjunto

$$\{h_1 f(g_1, \ldots, g_n)h_2 : f \in S, h_1, h_2, g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{F}\langle X\rangle\}.$$

DEFINICIÓN 2.1.5. *Dos conjuntos de polinomios son* ***equivalentes*** *si generan el mismo T-ideal.*

Dada una álgebra A, decimos que $S \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$ es una **base para las identidades polinomiales** de A, si $S \subseteq \mathrm{Id}(A)$ y satisface $\mathrm{Id}(A) = \langle S\rangle_T$.

En 1987, Kemer en [2], demostró que si A está definida sobre un cuerpo de característica 0, entonces la base para sus identidades polinomiales es finita. Por otra parte, Belov [3] en 1999 mostro qué, para A definida sobre un cuerpo de características positivas existen contraejemplos con bases infinitas.

EJEMPLO 2.3. *Si* A *es una* $\mathbb{F}$*-álgebra conmutativa con unitario y* $\mathbb{F}$ *es un cuerpo infinito, tenemos que* $\mathrm{Id}(A) = \langle [x, y]\rangle_T$.

EJEMPLO 2.4. *Sea* $M_2(\mathbb{F})$ *el álgebra de matrices* 2×2 *sobre* $\mathbb{F}$. *Si* $\mathbb{F}$ *tiene característica cero, Drensky en 1981 en [8] demuestra que*

$$\mathrm{Id} M_2(\mathbb{F}) = \langle \mathrm{St}_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3]\rangle_T.$$

DEFINICIÓN 2.1.6. *Sea* S *un subconjunto no vacío de* $\mathbb{F}\langle X\rangle$. *Si un polinomio* $f \in \langle S\rangle_T$*, decimos que* f ***es consecuencia de*** S.

Note que del Ejemplo 2.3 cada identidad polinomial para toda álgebra A conmutativa con unitario es consecuencia del la identidad $f(x, y) = [x, y]$.

2.2. Polinomios multihomogéneos y multilineales

En esta sección se estudian los polinomios multihomogéneos y multilineales, los cuales tienen un papel fundamental cuando el cuerpo $\mathbb{F}$ es infinito. En este contexto, el estudio de la identidades polinomiales de una $\mathbb{F}$-álgebra puede reducirse al análisis de este tipo de polinomios, especialmente cuando $\mathbb{F}$ tiene característica cero. En particular, si $\mathbb{F}$ es un cuerpo infinito, toda identidad polinomial que satisface una $\mathbb{F}$-álgebra puede expresarse como una combinación lineal de sus componentes multihomogéneas o, más específicamente, multilineales.

A continuación, se introduce el concepto de álgebra graduada para el estudio de las identidades polinomiales.

DEFINICIÓN 2.2.1. *Sea A un álgebra sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, se dice que A es* ***graduada*** *si se puede escribir como una suma directa de subespacios $A^{(\alpha)} \subseteq A$ tales que*

$$A = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}} A^{(\alpha)}.$$

El subespacio $A^{(\alpha)}$ se llama ***componente homogénea*** *de A de grado α.*

La graduación también se denota de la siguiente manera,

$$A = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}} A_{\alpha}.$$

La Definición 2.2.1 también se aplica para espacios vectoriales, en caso de que A sea un espacio vectorial.

EJEMPLO 2.5. *Sea A un álgebra y consideremos los subespacios triviales $A^{(0)} = A$ y $A^{(a)} = \{0\}$ para $a \neq 0$, entonces*

$$A = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} A^{(a)},$$

y por lo tanto A es un álgebra graduada. Dicha graduación se llama graduación trivial.

EJEMPLO 2.6. *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y $\mathbb{F}\langle X \rangle$ el álgebra libre asociativa, consideremos un polinomio no conmutativo $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ donde todo monomio de f tiene la forma $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ con $i_j \in \{1, \ldots, n\}$. Definimos el grado de este monomio respecto a la variable x_1 como la cantidad de veces que x_1 aparece en el producto $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$.*
Ahora para cada $i \geq 0$, sea f_i la suma de todos los monomios que aparecen en f cuyo grado en x_1 es exactamente i, entonces

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i,$$

donde d es el mayor grado de f en la variable x_1.
Por construcción, cada f_i está formado unicamente por monomios en los que la variable x_1 aparece exactamente i veces. Por lo tanto, f_i se denomina la ***componente homogénea de*** *f de grado i en x_1.*

DEFINICIÓN 2.2.2. *Un polinomio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ puede ser*

- ***Multilineal** de grado n si cada variable $x_1, \ldots, x_n$ es de grado 1 en cada monomio de f.*
- ***Homogéneo de grado d en x_i**, si todos sus monomios tienen grado d en x_i.*
- ***Multihomogéneo de multigrado** $(d_1, \ldots, d_n)$ si f es homogéneo de grado d_i en x_i para cada $i = 1, \ldots, n$. Denotamos el multigrado de f por $\mathrm{mdeg}(f) = (d_1, \ldots, d_n)$.*

Veamos algunos ejemplos de estos polinomios

EJEMPLO 2.7.

- *El polinomio $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_1 - x_1x_3x_2$ es multilineal, ya que cada variable es lineal en cada uno de sus monomios. Mientras que el polinomio $g(x_1, x_2, x_3) = x_2^2x_1x_3x_2 - x_2^3x_1^2x_3x_2 + x_1x_3$ es lineal solo en la variable x_3.*
- *El polinomio $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2x_1x_3 - x_1^2x_3x_2 + 7x_2x_1x_3x_1$ es multihomogéneo de multigrado $\mathrm{mdeg}(f) = (2, 1, 1)$, pues f es homogéneo de grado 2 en x_1, de grado 1 en x_2 y de grado 1 en x_3, mientras que el polinomio*

$$h(x_1, x_2, x_3) = 5x_1x_3^2x_2^4 + 2x_1x_2x_1x_3x_2^3$$

es homogéneo de grado 4 en la variable x_2, pero no es homogéneo en la variable x_1.

TEOREMA 2.2. *Sea $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, donde f_i es la componente homogénea de f de grado i en x_1. Si el cuerpo $\mathbb{F}$ es infinito, entonces las identidades polinomiales $f_i = 0$, para $i = 0, \ldots, n$ se siguen de $f = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. *Sea $V = \langle f\rangle_T$ el T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ generado por f, es posible descomponer a f de la siguiente forma,*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

donde f_i es la componente homogénea de f de grado i en la variable x_1.
Sean $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ elementos distintos en $\mathbb{F}$. Como f_i es homogéneo de grado i en x_1 entonces para todo $j = 0, 1, \ldots, d$ tenemos que

$$f_i(\alpha_j x_1, \ldots, x_n) = \alpha_j^i f_i(x_1, \ldots, x_n),$$

luego reemplazando (1) obtenemos que

$$f(\alpha_j x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_j^i f_i(x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Denotemos por $\bar{f}_j = f(\alpha_j x_1, \ldots, x_n)$ y $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, entonces de (2) tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_0^0 f_0 + \alpha_0^1 f_1 + \cdots + \alpha_0^d f_d = \bar{f}_0 \\ \alpha_1^0 f_0 + \alpha_1^1 f_1 + \cdots + \alpha_1^d f_d = \bar{f}_1 \\ \vdots \\ \alpha_d^0 f_0 + \alpha_d^1 f_1 + \cdots + \alpha_d^d f_d = \bar{f}_d \end{cases} \tag{3}$$

Equivalentemente de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0^1 & \cdots & \alpha_0^d \\ 1 & \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_d^1 & \cdots & \alpha_d^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f}_0 \\ \bar{f}_1 \\ \vdots \\ \bar{f}_d \end{pmatrix}.$$

Como la matriz del sistema es una matriz de Vandermonde, entonces su determinante Δ es

$$\Delta = \prod (\alpha_k - \alpha_l).$$

Como los α_i son elementos distintos, entonces $\alpha_k \neq \alpha_l$ para cada k, l con $0 \leq l < k \leq d$ y $k \neq l$, entonces $\Delta \neq 0$, lo cual implica que el sistema (3) tiene solución única. Para cada $i = 0, \ldots, d$, f_i depende de cada $\bar{f}_j$. Como V es un T-ideal y f es una identidad polinomial, entonces $\bar{f}_j = f(\alpha_j x_1, \ldots, x_n)$ es también una identidad polinomial. Luego los f_i son identidades polinomiales para todo $i = 0, \ldots, d$. □

TEOREMA 2.3. ***Proceso de multilinealización***
Si el álgebra A satisface una identidad de grado k, entonces A satisface una identidad polinomial multilineal de grado $\leq k$.

DEMOSTRACIÓN. *Sea $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ una identidad polinomial de grado k.*
Supongamos que $\deg_{x_i}(m) \leq 1$ para cada monomio m de f, entoces podemos escribir $f = f' + f''$ donde $\deg_{x_i}(f') = 1$, $\deg_{x_i}(f'') = 0$ y $f(x_1, \ldots, x_n)|_{x_i=0} = f''(x_1, \ldots, x_n)$, entonces f'' también es una identidad polinomial de A.
Por lo tanto, intercambiando f por f'' tenemos una identidad polinomial de A de grado $\leq k$ con un menor número de variables. Continuamos el proceso anterior hasta obtener una identidad polinomial multilineal de grado $\leq k$ como lo deseamos. Por lo tanto, podemos suponer que existe una variable, digamos x_1, tal que $\deg_{x_1}(f) = d \geq 1$ y consideramos el polinomio

$$g(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) - f(y_1, x_2, \ldots, x_n) - f(y_2, x_2, \ldots, x_n).$$

Observe que g es también una identidad polinomial de A, que contiene una componente homogénea de grado $d - 1$ en y_1 y lineal en y_2. Continuando con el proceso de aumentar el número de variables y disminuir su grado, obtenemos un polinomio, $g_d(y_1, \ldots, y_d, x_2, \ldots, x_n)$ que es lineal en las variables $y_1, \ldots, y_d$. Repitiendo el proceso para cada variable obtenemos el polinomio multilineal deseado. □

TEOREMA 2.4. *Si el cuerpo es de característica cero (o si* $\mathrm{char}(\mathbb{F}) > \deg(f)$*), entonces* $f = 0$*, es equivalente a un conjunto de identidades polinomiales multilineales.*

DEMOSTRACIÓN. *Podemos descomponer a* $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ *de la siguiente forma,*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i(x_1, \ldots, x_n),$$

donde f_i *es la componente homogénea de* f *de grado* i *en la variable* x_1*. Por el teorema anterior, podemos suponer que* $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ *es multihomogéneo. Usando el proceso de multilinealización tenemos que, si* $\deg_{x_1}(f) = d > 1$*, reemplazamos* x_1 *por* $y_1 + y_2$ *entonces*

$$f(y_1 + y_2, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n),$$

donde f_i *es la componente homogénea de grado* i *en* y_1 *y de grado* $d - i$ *en* y_2*, y el grado en* $x_2, \ldots, x_n$ *es el mismo que en* f*. Por lo tanto, todos los polinomios* $f_i = f_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$ *son consecuencia de* f*, pues* f_i *se obtiene de* f *por un cambio de variables lineal.*
Si tomamos $y_1 = y_2$*, para cada* i *tenemos,*

$$f(2y_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ahora como f *es homogéneo de grado* d *en* x_1*, entonces*

$$f(2y_1, x_2, \ldots, x_n) = 2^d f(y_1, x_2, \ldots, x_n),$$

luego,

$$2^d f(y_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{4}$$

sabemos del Teorema del Binomio que

$$2^d = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i},$$

entonces reemplazando en la fórmula (4) obtenemos,

$$\sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Para cada i*, tenemos,*

$$f_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_n),$$

como $\mathrm{char}(\mathbb{F}) = 0$*, entonces* $\binom{d}{i} \neq 0$*, para* $0 \leq i \leq d$ *por lo tanto,* f *es consecuencia de cualquier* f_i *para* $i = 1, \ldots, d-1$*,* f_i *tiene grado* i *en* y_1 *y grado* $d - i$ *en* y_2 *y al menos una de ellas es menor que* d*. Podemos aplicar este proceso nuevamente con otra variable que tenga grado* $d > 1$ *hasta obtener un conjunto de consecuencias multilineales de* f*.* $\square$

3. Graduaciones

3.1. Álgebras graduadas

En la Sección 2.2 se definió el concepto de álgebra graduada mediante algunos ejemplos. En esta sección se estudian las álgebras G-graduadas y sus identidades polinomiales graduadas. Se presenta la definición de álgebra graduada por un grupo, haciendo énfasis en la graduación a través del grupo aditivo $\mathbb{Z}$, y se describen sus componentes homogéneas. Además, se introduce la noción de identidad polinomial graduada como una extensión de las identidades polinomiales clásicas en el contexto graduado. La sección incluye ejemplos, particularmente en álgebras de matrices, que muestran cómo la graduación influye en las identidades que el álgebra satisface.

Existen otros tipos de graduaciones que se obtienen a partir de grupos distintos del grupo de los enteros.

DEFINICIÓN 3.1.1. *Sea G un grupo y A un álgebra, se dice que A es G-**graduada** si se puede escribir como una suma directa de subespacios propios no triviales $A^{(g)} \subseteq A$, es decir,*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)},$$

tales que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$ para todo $g, h \in G$.
*El subespacio $A^{(g)}$ se llama **componente homogénea** de A de grado g y si $a \in A^{(g)}$ el elemento $a \in A$ se llama **homogéneo de grado** g.*

De la Definición 3.1.1 tenemos que todo $a \in A$ se puede escribir de manera única en la forma

$$a = \sum_{g \in G} a^{(g)},$$

donde $a^{(g)} \in A^{(g)}$ para todo $g \in G$. Además, si $e \in G$ es la identidad de G, entonces $A^{(e)}$ es una subálgebra de A.

EJEMPLO 3.1. *Sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ el grupo de orden 2 y sea $A = M_2(\mathbb{R})$ el álgebra de matrices de orden 2. Entonces A es $\mathbb{Z}_2$-graduada, ya que $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$, donde*

$$A^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R} \right\} \;\; ; \;\; A^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

y además $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(g+h)}$ *para todo* $g, h \in \mathbb{Z}_2$.
Veamos que efectivamente $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$.

- $A = A^{(0)} + A^{(1)}$
  Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A$, *entonces, podemos escribir a* X *de la siguiente manera*
  $$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix},$$
  donde $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in A^{(0)}$ *y* $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in A^{(1)}$. *Luego* $X \in A^{(0)} + A^{(1)}$.
- $A^{(0)} \cap A^{(1)} = \{0_2\}$, *donde* 0_2 *es la matriz cero de orden 2.*
  Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A^{(0)} \cap A^{(1)}$, *entonces* $X \in A^{(0)}$ *y* $X \in A^{(1)}$. *Luego, como* $X \in A^{(0)}$, *tenemos que* $b = 0 = c$, *ahora como* $X \in A^{(1)}$, *se tiene que* $a = 0 = d$, *por lo tanto,* $X = 0_2$.

Veamos ahora que $A^{(h)}A^{(g)} \subseteq A^{(h+g)}$ *para todo* $g, h \in \mathbb{Z}_2$. *Es decir, queremos probar que*

$$A^{(0)}A^{(0)} \subseteq A^{(0)}; \quad A^{(0)}A^{(1)} \subseteq A^{(1)}; \quad A^{(1)}A^{(0)} \subseteq A^{(1)}; \quad A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)}.$$

Solo probaremos el caso $A^{(0)}A^{(1)} \subseteq A^{(1)}$, *pues los otros son análogos.*
Sean $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in A^{(0)}$ *y* $Y = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in A^{(1)}$, *entonces* $XY = \begin{pmatrix} 0 & ab \\ cd & 0 \end{pmatrix}$, *así* $XY \in A^{(1)}$.
En consecuencia, de lo anterior expuesto $M_2(\mathbb{R})$ *es un álgebra* $\mathbb{Z}_2$*-graduada.*

EJEMPLO 3.2. *Sea* $G = \mathbb{Z}$ *grupo de los enteros y dado el Ejemplo 2.5. Entonces* A *es* $\mathbb{Z}$*-graduada, ya que*
$$A = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} A^{(a)},$$
donde $A^{(0)} = A$ *y* $A^{(a)} = \{0\}$ *para* $a \neq 0$. *Además observe que* $A^{(a)}A^{(b)} \subseteq A^{(a+b)}$, *para todo* $a, b \in \mathbb{Z}$.

EJEMPLO 3.3. *Sea* $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ *el grupo de orden* 2 *y sea* $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ *el álgebra de polinomios sobre un cuerpo* $\mathbb{F}$, *entonces para cada* $\alpha \in \mathbb{Z}_2$, *se define*

$$\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]^{(\alpha)} = \{f \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n] : f \text{ es homogéneo con } \deg(f) \equiv \alpha (\text{mód} 2)\},$$

En particular,
$$\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]^{(0)} = \{f \text{ es homogéneo de grado par}\},$$

$$\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]^{(1)} = \{f \textit{ es homogéneo de grado impar}\},$$

Entonces se obtiene la descomposición

$$\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n] = \mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]^{(0)} \oplus \mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]^{(1)}.$$

Además, si

$$f \in \mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]^{(\alpha)} \qquad y \qquad g \in \mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]^{(\beta)}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$, entonces fg es homogéneo de grado total

$$\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) \equiv \alpha + \beta (\text{mód} 2)$$

por lo que se obtiene que, $\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]^{(\alpha)} \cdot \mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]^{(\beta)} \subseteq \mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]^{(\alpha+\beta)}$.
Por lo tanto, $\mathbb{F}[x_1,\ldots,x_n]$ es una álgebra $\mathbb{Z}_2$-gradudada.

EJEMPLO 3.4. *Consideremos el grupo aditivo $\mathbb{Z}$ y el álgebra $M_3(\mathbb{F})$ de las matrices de orden 3 sobre $\mathbb{F}$. Para cada entero $-3 < \alpha < 3$ tomemos los subespacios*

$$M_3^{(\alpha)} = gen_{\mathbb{F}}\{E_{ij} : j - i = \alpha\},$$

donde $E_{ij} \in M_3(\mathbb{F})$ es la matriz elemental cuya única entrada distinta de cero es 1 en la posición ij-ésima y para $|\alpha| \geq 3$ tomemos $M_3^{(\alpha)} = \{0_3\}$, donde 0_3 es la matriz cero de orden 3. Notemos que $M_3(\mathbb{F})$ es $\mathbb{Z}$-graduada, ya que

$$M_3(\mathbb{F}) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}} M_3^{(\alpha)}.$$

En efecto, como α toma los valores $\alpha = -2, -1, 0, 1, 2$, consideraremos cada caso

- $\alpha = 0$*;* $(j - i = 0)$

$$M_3^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{F} \right\} = gen\{E_{11}, E_{22}, E_{33}\}.$$

- $\alpha = 1$*;* $(j - i = 1)$

$$M_3^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F} \right\} = gen\{E_{12}, E_{23}\}.$$

- $\alpha = 2$; $(j - i = 2)$

$$M_3^{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{F} \right\} = gen\{E_{13}\}.$$

- $\alpha = -1$; $(j - i = -1)$

$$M_3^{(-1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F} \right\} = gen\{E_{21}, E_{32}\}.$$

- $\alpha = -2$; $(j - i = -2)$

$$M_3^{(-2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{F} \right\} = gen\{E_{31}\}.$$

esto implica que, $M_3(\mathbb{F}) = M_3^{(-2)} \oplus M_3^{(-1)} \oplus M_3^{(0)} \oplus M_3^{(1)} \oplus M_3^{(2)}$.
Por otro lado, si $X \in M^{(\alpha)}$ *y* $Y \in M^{(\beta)}$, *con* $-3 < \alpha, \beta < 3$, *entonces dado que*

$$E_{ij}E_{rs} = \begin{cases} E_{is}, & \textit{si } j = r, \\ 0_3, & \textit{si } j \neq r. \end{cases} \tag{5}$$

tenemos

$$XY \in \begin{cases} M^{(\alpha+\beta)}, & \textit{si } \mid \alpha + \beta \mid < 3, \\ \{0_3\}, & \textit{si } \mid \alpha + \beta \mid \geq 3. \end{cases} \tag{6}$$

Por lo tanto, se concluye que $M_3(\mathbb{F})$ *es una* $\mathbb{Z}$*-graduación.*
A continuación se presenta un ejemplo que ilustra la afirmación (6).
Consideremos las matrices $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_3^{(-1)}$ *y* $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3^{(2)}$, *como* $\mid -1 + 2 \mid < 3$, *se tiene que*

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3^{(1)}.$$

Ahora, consideremos $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3^{(1)}$ *y* $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3^{(2)}$, *en este caso, como*

$|\ 1+2\ |\geq 3$, *se obtiene que*

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \{0_3\}.$$

Esta $\mathbb{Z}$-graduación se puede extender de manera natural a matrices de orden n, como se muestra a continuación.

Ejemplo 3.5. *Para cada entero* $-n+1 \leq \alpha \leq n-1$*, sea* $M_n^{(\alpha)}$ *el subespacio de* $M_n(\mathbb{F})$ *generado por todas las matrices* $E_{i,j}$ *tal que* $j-i=\alpha$ *y sea* $M_n^{(\alpha)} = \{0_n\}$ *para* $|\ \alpha\ |\geq n$. *Entonces* $M_n(\mathbb{F})$ *es* $\mathbb{Z}$*-gradudada, ya que*

$$M_n(\mathbb{F}) = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}} M_n^{(\alpha)}, \tag{7}$$

donde

$$M_n^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \in \mathbb{F} \right\} = \mathrm{gen}\{E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}\},$$

y para cada $0 < \alpha \leq n-1$*, tenemos que*

$$M_n^{(\alpha)} = \left\{ \begin{pmatrix} \cdots & a_{1,\alpha+1} & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a_{n-\alpha,n} \\ & & & \vdots \end{pmatrix} : a_{1,\alpha+1}, \ldots, a_{n-\alpha,n} \in \mathbb{F} \right\} = \mathrm{gen}\{E_{1,\alpha+1}, \ldots, E_{n-\alpha,n}\},$$

$$M_n^{(-\alpha)} = \left\{ \begin{pmatrix} \vdots & & & \\ a_{\alpha+1,1} & & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a_{n,n-\alpha} \quad \cdots \end{pmatrix} : a_{\alpha+1,1}, \ldots, a_{n,n-\alpha} \in \mathbb{F} \right\} = \mathrm{gen}\{E_{\alpha+1,1}, \ldots, E_{n,n-\alpha}\}.$$

Además, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$*, considerando la ecuación (5) tenemos que*

$$M^{(\alpha)}M^{(\beta)} \subseteq \begin{cases} M^{(\alpha+\beta)}, & \textit{si } |\ \alpha+\beta\ | < n, \\ \{0_n\}, & \textit{si } |\ \alpha+\beta\ | \geq n; \end{cases}$$

En adelante, denotaremos la $\mathbb{Z}$*-graduación del álgebra* $M_n(\mathbb{F})$ *simplemente por* M_n.

3.2. Identidades polinomiales graduadas

Sea G un grupo y sea $\{X^{(g)} : g \in G\}$ la familia formada por los conjuntos numerables disjuntos $X^{(g)} = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, x_3^{(g)}, \ldots\}$. Para $X = \bigcup_{g\in G} X^{(g)}$, consideremos el álgebra asociativa libre $\mathbb{F}\langle X\rangle$, libremente generada por X. Una variable $x \in X$ es de grado homogéneo g, lo cual se denota $\partial(x) = g$, si $x \in X^{(g)}$. El grado homegéneo del monomio $\eta = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ se define por $\partial(\eta) = \partial(x_{i_1})\partial(x_{i_2})\cdots\partial(x_{i_n})$. Para $g \in G$, denotemos por $\mathbb{F}\langle X\rangle^{(g)}$ al subespacio de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ generado por todos los monomios de grado homogéneo g. Note que

$$\mathbb{F}\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} \mathbb{F}\langle X\rangle^{(g)},$$

y además, $\mathbb{F}\langle X\rangle^{(g)}\mathbb{F}\langle X\rangle^{(h)} \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle^{(gh)}$ para todo $g, h \in G$. Luego, $\mathbb{F}\langle X\rangle$ es un álgebra G-graduada, la cual denotamos por $\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$.

EJEMPLO 3.6. *Sea $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ dado por*

$$f(x_1^{(g_1)}, x_2^{(g_2)}, x_1^{(g_2)}, x_3^{(g_2)}) = x_1^{(g_1)}x_2^{(g_2)}x_1^{(g_2)}x_3^{(g_2)}x_1^{(g_2)}x_1^{(g_2)}x_3^{(g_2)}x_1^{(g_1)},$$

entonces el grado homogéneo de f es $\partial(f) = g_1g_2g_2g_2g_2g_2g_2g_1 = g_1g_2^6g_1$.

EJEMPLO 3.7. *Sea $M_n = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}} M_n^{(\alpha)}$ la $\mathbb{Z}$-graduación definida en el Ejemplo 3.5. Para cada $\alpha \in \mathbb{Z}$, sea*

$$X^{(\alpha)} = \{x_i^{(\alpha)} \mid i \in I_\alpha\},$$

donde I_α es un conjunto de indices y $X^{(\alpha)}$ un conjunto de variables de grado α y sea

$$X = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{Z}} X^{(\alpha)}.$$

Sea $\mathbb{F}\langle X\rangle$ el álgebra libre generada por X, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}$, definimos $\mathbb{F}\langle X\rangle^{(\alpha)}$ como el subespacio generado por todos los monomios

$$\eta = x_{i_1}^{(\alpha_1)}x_{i_2}^{(\alpha_2)}\cdots x_{i_n}^{(\alpha_n)} \quad \textit{tales que} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \alpha,$$

y definimos $\deg(1) = 0$, entonces

$$\mathbb{F}\langle X\rangle = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}} \mathbb{F}\langle X\rangle^{(\alpha)},$$

y para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ se cumple $\mathbb{F}\langle X\rangle^{(\alpha)}\mathbb{F}\langle X\rangle^{(\beta)} \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle^{(\alpha+\beta)}$. Por lo tanto, $\mathbb{F}\langle X\rangle$ es un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada.

EJEMPLO 3.8. *Sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ grupo de orden 2 y sea $\mathbb{F}\langle X\rangle$ el álgebra libre asociativa sobre $X = X^{(0)} \cup X^{(1)}$, donde $X^{(0)} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots\}$ y $X^{(1)} = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots\}$, se dice que*

$\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ es $\mathbb{Z}_2$-graduado, pues

$$\mathbb{F}\langle X\rangle^{gr} = \mathbb{F}\langle X\rangle^{(0)} \bigoplus \mathbb{F}\langle X\rangle^{(1)}.$$

En particular, si $f(x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = x_1^{(0)}x_1^{(1)} + x_1^{(0)}x_1^{(1)}x_2^{(1)} \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$, entonces $f_1 = x_1^{(0)}x_1^{(1)}$ es de grado homogéneo 1 y grado total 2 y $f_2 = x_1^{(0)}x_1^{(1)}x_2^{(1)}$ es de grado homogéneo 0 y grado total 3.

DEFINICIÓN 3.2.1. *Sean G un grupo y A un álgebra G-graduada, se dice que un polinomio $f = f(x_{i_1}^{(g_1)}, x_{i_2}^{(g_2)}, \ldots, x_{i_n}^{(g_n)}) \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{gr}$ es una **identidad polinomial G-graduada** de A si*

$$f(a_1^{(g_1)}, a_2^{(g_2)}, \ldots, a_n^{(g_n)}) = 0$$

para todo $a_1^{(g_1)} \in A^{(g_1)}, a_2^{(g_2)} \in A^{(g_2)}, \ldots, a_n^{(g_n)} \in A^{(g_n)}$.
*Si A satisface una identidad polinomial graduada no trivial entonces decimos que A es una **PI-álgebra G-graduada**.*

Al conjunto de todas las identidades polinomiales G-graduadas para el álgebra A lo denotamos por $\mathrm{Id}_G(A)$; es decir,

$$\mathrm{Id}_G(A) = \{f \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{gr} : f \text{ es una identidad polinomial } G\text{-graduada para } A\}$$

El siguiente lema aparece como un ejemplo en el artículo de Vasilovsky [6], donde se estudian algunas identidades que satisfacen las álgebras de matrices cuando se consideran graduaciones por $\mathbb{Z}$.

LEMA 3.1. *Los siguientes polinomios son identidades polinomiales $\mathbb{Z}$-graduadas del álgebra M_n*

1. *$f_1(x) = x$, si $|\partial(x)| \geq n$.*
2. *$f_2(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$, si $\partial(x_1) = \partial(x_2) = 0$.*
3. *$f_3(x_1, x, x_2) = x_1xx_2 - x_2xx_1$, si $\partial(x_1) = \partial(x_2) = -\partial(x)$.*

DEMOSTRACIÓN. *Consideremos M_n el álgebra $\mathbb{Z}$-graduada con la graduación dada en el Ejemplo 3.5 y $\alpha \in \mathbb{Z}$.*

1. *Si $|\alpha| = |\partial(x)| \geq n$, entonces $M_n^{(\alpha)} = \{0\}$. Luego, si $A \in M_n^{(\alpha)}$ tenemos que*

$$f_1(A) = A = 0.$$

Por lo tanto, f_1 es una identidad polinomial $\mathbb{Z}$-graduada.

2. *Si* $\alpha = \partial(x_1) = \partial(x_2) = 0$*, entonces* $M_n^{(0)} = \mathrm{gen}\{E_{ii} : i = 1, \ldots, n\} = \{D : D - diagonal\}$*. Luego, si* $A, B \in M_n^{(0)}$ *tenemos que* A *y* B *son matrices diagonales y dado que el producto de las matrices diagonales es conmutativo, tenemos*

$$f_2(A, B) = AB - BA = AB - AB = 0.$$

Por lo tanto, f_2 *es una identidad polinomial* $\mathbb{Z}$*-graduada.*

3. *Si* $\alpha = \partial(x_1) = \partial(x_2) = -\partial(x)$*. Si* $|\alpha| \geq n$*, entonces* $M_n^{(\alpha)} = \{0\}$*. Luego, si* $A_1, A_2 \in M_n^{(\alpha)}$ *y* $A \in M_n^{(-\alpha)}$ *tenemos que* $A_1 = A_2 = 0$*. Luego*

$$f_3(A_1, A, A_2) = A_1AA_2 - A_2AA_1 = 0.$$

Suponga que $|\alpha| \leq n-1$*, entonces* $M_n^{(\alpha)} = gen\{E_{ij} : j-i = \alpha\}$*. Como* $f_3(A_1, A, A_2) = A_1AA_2 - A_2AA_1$ *es un polinomio* $\mathbb{Z}$*-graduado multilineal, para probar que* f_3 *es una identidad polinomial* $\mathbb{Z}$*-graduada es suficiente probar que* f_3 *se anula en los elementos de la base, es decir basta considerar*

$$A_1 = E_{i_1j_1}, \quad A_2 = E_{i_2j_2}, \quad A = E_{rs}$$

donde $E_{i_1j_1}, E_{i_2j_2} \in M_n^{(\alpha)}$ *y* $E_{rs} \in M_n^{(-\alpha)}$*, por lo que tenemos que*

$$j_1 - i_1 = \alpha, \quad j_2 - i_2 = \alpha, \quad y \quad s - r = -\alpha. \tag{8}$$

Note que $E_{i_1j_1}E_{rs}E_{i_2j_2} \neq 0$ *si y solo si* $j_1 = r$ *y* $s = i_2$*. Luego usando (8), tenemos* $r = j_1 = \alpha + i_1$ *y ademas*

$$i_2 = s = r - \alpha = j_1 - \alpha = i_1;$$

$$j_2 = i_2 + \alpha = i_1 + \alpha = j_1.$$

De ahí que, usando (5), tenemos

$$E_{i_1j_1} = E_{i_1j_2} = E_{i_1j_1}E_{rs}E_{i_2j_2} \neq 0.$$

Análogamente, $E_{i_2j_2}E_{rs}E_{i_1j_1} \neq 0$ *si y solo si* $j_2 = r$ *y* $s = i_1$*. Luego usando (8), tenemos* $r = j_2 = i_2 + \alpha$ *y ademas*

$$i_1 = s = r - \alpha = j_2 - \alpha = i_2;$$

$$j_1 = \alpha + i_1 = \alpha + i_2 = j_2.$$

Así, usando (5) obtenemos,

$$E_{i_2j_2} = E_{i_2j_1} = E_{i_2j_2}E_{rs}E_{i_1j_1} \neq 0.$$

Por lo tanto, tenemos que si $j_1 = r = j_2$ *y* $i_1 = s = i_2$*, entonces*

$$f_3(E_{i_1j_1}, E_{rs}, E_{i_2j_2}) = E_{i_1j_1}E_{rs}E_{i_2j_2} - E_{i_2j_2}E_{rs}E_{i_1j_1} = E_{i_1j_2} - E_{i_2j_1} = 0.$$

En caso contrario, tenemos que $E_{i_1j_1}E_{rs}E_{i_2j_2} = E_{i_2j_2}E_{rs}E_{i_1j_1} = 0$ *y por lo tanto,*

$$f_3(E_{i_1j_1}, E_{rs}, E_{i_2j_2}) = 0$$

De donde se tiene que f_3 *es una identidad polinomial* $\mathbb{Z}$*-graduada para* M_n*.*

□

Observación: Todas las identidades polinomiales $\mathbb{Z}$-graduadas son consecuencia de las identidades polinomiales presentadas en el Lema 3.1. En efecto, dicho lema caracteriza explícitamente las identidades que se satisfacen en función del grado de los elementos, lo que permite deducir que cualquier identidad polinomial $\mathbb{Z}$-graduada en M_n se obtiene a partir de las siguientes identidades básicas

$$f_1(x) = 0, \qquad |\ \partial(x)\ | \geq n \tag{9}$$
$$f_2(x_1, x_2) = 0, \qquad \partial(x_1) = \partial(x_2) = 0 \tag{10}$$
$$f_3(x_1, x, x_2) = 0, \qquad \partial(x_1) = \partial(x_2) = -\partial(x). \tag{11}$$

4. Identidades polinomiales para M_n

En este capítulo se presenta la demostración del resultado principal del trabajo, basandonos en el artículo de Vasilovsky [6]. Para ello, inicialmente se desarrollan algunos resultados preliminares para el estudio de las identidades polinomiales $\mathbb{Z}$-graduadas en el álgebra de matrices M_n. De este modo, el capítulo articula tanto los fundamentos teóricos como la demostración central que sustenta la caracterización de dichas identidades.

Consideremos las identidades polinomiales dadas en el Lema 3.1 y sea $\mathcal{I}_n$ el $T_{\mathbb{Z}}$-ideal gerarado por esas indentidades, es decir, $\mathcal{I}_n = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle_T$. Para $x_1, \ldots, x_k \in X$ y $\sigma \in S_k$, sea

$$m_\sigma = m_\sigma(x_1, \ldots, x_k) = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)}.$$

El monomio multilineal en las variables $x_1, \ldots, x_k$ correspondiente a la permutación identidad, está dado por

$$m = m(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \cdots x_k.$$

Claramente, $\partial(m) = \partial(m_\sigma) = \partial(x_1) + \cdots + \partial(x_k)$. Además, todo polinomio multilineal graduado $f = f(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{F}\langle X \rangle$ puede expresarse como

$$f = \sum_{\sigma \in S_k} a_\sigma m_\sigma,$$

donde $a_\sigma \in \mathbb{F}$.
Se entenderá por **sustitución estándar** a una sustitución S de la forma

$$x_1 = E_{i_1 j_1}, \ldots, x_s = E_{i_k j_k}, \ldots, x_k = E_{i_k j_k}, \tag{12}$$

donde

$$j_s - i_s = \partial(x_s), \tag{13}$$

tal que $E_{i_s j_s} \in M_n^{(\partial(x_s))}$, para $s = 1, \ldots, k$. El conjunto de todas las sustituciones estándar se denota por **stSub**. Dado un polinomio graduado $f(x_1, \ldots, x_k)$ y una sustitución $S \in$ **stSub**, denotamos por $f|_S$, al valor de f correspondiente a la sustitución S.
Es fácil ver que si un polinomio multilineal graduado $f(x_1, \ldots, x_k)$ tal que $f|_S = 0$, para todo $S \in$ **stSub**, entonces $f = 0$ es una identidad graduada de M_n. Observe que cuando se realiza

una sustitución (12) el valor de un monomio $m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)$ es diferente de cero, solo si,

$$j_{\sigma(1)} = i_{\sigma(2)},\ j_{\sigma(2)} = i_{\sigma(3)},\ldots,j_{\sigma(k-1)} = i_{\sigma(k)}, \tag{14}$$

en este caso $m_\sigma|_{(12)} = E_{i_{\sigma(1)}j_{\sigma(1)}}E_{i_{\sigma(2)}j_{\sigma(2)}}\cdots E_{i_{\sigma(k)}j_{\sigma(k)}} = E_{i_{\sigma(1)}j_{\sigma(k)}}$.
Para un monomio $m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)$, $\sigma\in S_k$ y dos enteros $1\le p\le q\le k$ cualquiera, denotamos por $m_\sigma^{[p,q]}$ la palabra obtenida de m_σ, descartando los primeros factores $p-1$ y los últimos $k-q$ factores; es decir,

$$m_\sigma^{[p,q]} = x_{\sigma(p)}x_{\sigma(p+1)}\cdots x_{\sigma(q)}.$$

EJEMPLO 4.1. *Sea $m = m(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3$ el monomio multilineal correspondiente a la permutación identidad de S_3, tenemos que $\partial(x_1) = 1,\ \partial(x_2) = 1,\ \partial(x_3) = 1$, entonces la subpalabra completa*

$$\partial(m) = \partial(x_1) + \partial(x_2) + \partial(x_3) = 3$$

Tomemos la sustitución estándar S tal que $x_1 = E_{12}, x_2 = E_{23}, x_3 = E_{32}$, tenemos que

$$m(x_1,x_2,x_3)|_S = E_{12}E_{23}E_{32} = E_{12}\neq 0.$$

Para $1\le p\le q\le 3$, tenemos las siguientes subpalabras de m

$$m^{[1,1]} = x_1,\quad m^{[1,2]} = x_1x_2,\quad m^{[2,3]} = x_2x_3,\quad m^{[1,3]} = x_1x_2x_3,$$

LEMA 4.1. *Si $m_\sigma|_{(12)}\neq 0$, entonces, para cada $1\le p\le q\le k$,*

$$\partial(m_\sigma^{[p,q]}) = j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)}.$$

DEMOSTRACIÓN. *De las ecuaciones (13) y (14), tenemos que,*

$$\begin{aligned}\partial(m_\sigma^{[p,q]}) &= \partial(x_{\sigma(p)}) + \partial(x_{\sigma(p+1)}) + \cdots + \partial(x_{\sigma(q)})\\ &= (j_{\sigma(p)} - i_{\sigma(p)}) + (j_{\sigma(p+1)} - i_{\sigma(p+1)}) + \cdots + (j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(q)})\\ &= j_{\sigma(q)} - i_{\sigma(p)},\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. □

LEMA 4.2. *Sea $\sigma\in S_k$ y sea*

$$x_1 = E_{i_1j_1},\ldots,x_k = E_{i_kj_k}, \tag{15}$$

una sustitución estándar tal que

$$\text{máx}\{i_1,j_1,\ldots,i_k,j_k\} = n-t,\quad \textit{donde } t\ge 1.$$

$$\textit{y}\quad \text{mín}\{i_1,j_1,\ldots,i_k,j_k\} = 1+r,\quad \textit{donde } r\ge 1.$$

i) Si $m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)|_{(15)} = 0$*, entonces para la sustitución estándar*

$$x_1 = E_{i'_1 j'_1}, \ldots, x_k = E_{i'_k j'_k}, \tag{16}$$

con $i'_s = i_s + t$ *y* $j'_s = j_s + t$*, respectivamente* $i'_s = i_s - r$ *y* $j'_s = j_s - r$*,* $s = 1,\ldots,k$*, tenemos que* $m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)|_{(16)} = 0$*.*

ii) Si $m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)|_{(15)} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(k)}}$*, entonces,* $m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)|_{(16)} = E_{i'_{\sigma(1)} j'_{\sigma(k)}}$*.*

DEMOSTRACIÓN. .

i) Supongamos que $m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)|_{(15)} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \cdots E_{i_{\sigma(k)} j_{\sigma(k)}} = 0$*, entonces existe* $s \in \{1,\ldots,k-1\}$ *tal que* $j_{\sigma(s)} \neq i_{\sigma(s+1)}$*, de ahí que,*

$$j'_{\sigma(s)} = j_{\sigma(s)} + t \neq i_{\sigma(s+1)} + t = i'_{\sigma(s+1)}.$$

Luego, $E_{i'_{\sigma(s)} j'_{\sigma(s)}} E_{i'_{\sigma(s+1)} j'_{\sigma(s+1)}} = 0$*. Por lo tanto,*

$$m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)|_{(16)} = E_{i'_{\sigma(1)} j'_{\sigma(1)}} \cdots E_{i'_{\sigma(k)} j'_{\sigma(k)}} = 0.$$

El caso para $j'_{\sigma(s)} = j_{\sigma(s)} - r \neq i_{\sigma(s+1)} - r = i'_{\sigma(s+1)}$ *se demuestra de manera similar.*

ii) Supongamos que $m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)|_{(15)} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(1)}} \cdots E_{i_{\sigma(k)} j_{\sigma(k)}} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(k)}}$*, entonces para todo* $s = 1,\ldots,k-1$*, tenemos que* $j_{\sigma(s)} = i_{\sigma(s+1)}$*, de ahí que*

$$j'_{\sigma(s)} = j_{\sigma(s)} + t = i_{\sigma(s+1)} + t = i'_{\sigma(s+1)}.$$

Por lo tanto, $m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)|_{(16)} = E_{i'_{\sigma(1)} j'_{\sigma(1)}} \cdots E_{i'_{\sigma(k)} j'_{\sigma(k)}} = E_{i'_{\sigma(1)} j'_{\sigma(k)}}$*.*

Lo cual concluye la prueba. □

Para un monomio graduado $\eta(x_1,\ldots,x_r) = x_{i_1}\cdots x_{i_r}$ y los enteros $1 \leq p \leq q \leq r$, $|\partial(\eta^{[p,q]})|$ denota el valor absoluto del grado homogéneo de la subpalabra $\eta^{[p,q]}$. Sea

$$\hat{\partial}(\eta) = \text{máx}\{|\partial(\eta^{[p,q]})| : 1 \leq p \leq q \leq r\}.$$

Es claro que si $\hat{\partial}(\eta) \geq n$, entonces $\eta \in \mathcal{I}_n$. Supongamos que $\hat{\partial}(\eta) \geq n$, entonces existe una subpalabra $\eta^{[p,q]}$ tal que $|\partial(\eta^{[p,q]})| \geq n$. Ahora consideremos una sustitución estándar S donde $x_k = E_{i_k j_k}$, si $\eta|_S \neq 0$, entonces también $\eta^{[p,q]}|_S = E_{i_p j_q} \neq 0$, es decir

$$|j_q - i_p| \leq n - 1,$$

lo que contradice que $|j_q - i_p| = |\partial(\eta^{[p,q]})| \geq n$. Por lo tanto, $\eta|_S = 0$ para toda sustitución estándar S.

Notación: Para $P \subseteq S_k$, denotamos por $f_P(x_1, \ldots, x_k)$ la siguiente suma

$$f_P(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\sigma \in P} a_\sigma m_\sigma(x_1, \ldots, x_k).$$

LEMA 4.3. *Si*

$$x_0 \cdot f_P(x_1, \ldots, x_k) = 0,$$

es una identidad polinomial graduada para M_n, tal que $\hat{\partial}(x_0 m_\sigma) \leq n-1$ para todo $P \subseteq S_k$, entonces

$$f_P(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_n).$$

DEMOSTRACIÓN. *Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe una sustitución estándar (12) de la forma $x_1 = E_{i_1 j_1}, \ldots, x_k = E_{i_k j_k}$, tal que*

$$f_P(x_1, \ldots, x_k)|_{(12)} = f_P(E_{i_1 j_1}, \ldots, E_{i_k j_k}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} E_{ij} \neq 0. \tag{17}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que si $\partial(x_0) \geq 0$, entonces

$$\max\{i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k\} = n,$$

ya que en caso contrario, $\max\{i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k\} = n - t$ con $t \geq 1$, luego del Lema (4.2), podemos usar la sustitución estándar (16) de la forma $x_1 = E_{i'_1 j'_1}, \ldots, x_k = E_{i'_k j'_k}$ para $i'_s = i_s + t$ y $j'_s = j_s + t$, y $s = 1, \ldots, k$, en lugar de la sustitución (12), así tenemos que

$$f_P(E_{i'_1 j'_1}, \ldots, E_{i'_k j'_k}) \neq 0$$

y además

$$\begin{aligned}
\max\{i'_1, j'_1, \ldots, i'_k, j'_k\} &= \max\{i_1 + t, j_1 + t, \ldots, i_k + t, j_k + t\}, \\
&= \max\{i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k\} + t, \\
&= (n - t) + t = n.
\end{aligned}$$

Por otro lado, podemos asumir que si $\partial(x_0) < 0$, entonces

$$\min\{i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k\} = 1,$$

pues en caso contrario, $\min\{i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k\} = 1 + r$ con $r \geq 1$, así, del Lema (4.2), podemos usar la sustitución estándar (16) de la forma $x_1 = E_{i'_1 j'_1}, \ldots, x_k = E_{i'_k j'_k}$ para $i'_s = i_s - r$ y $j'_s = j_s - r$, y $s = 1, \ldots, k$ en lugar de la sustitución (12), luego tenemos que

$$f_P(E_{i'_1 j'_1}, \ldots, E_{i'_k j'_k}) \neq 0$$

y además

$$\begin{aligned}
\text{mín}\{i'_1, j'_1, \ldots, i'_k, j'_k\} &= \text{mín}\{i_1 - r, j_1 - r, \ldots, i_k - r, j_k - r\}, \\
&= \text{mín}\{i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k\} - r, \\
&= (1 - r) - r = 1.
\end{aligned}$$

Afirmación: *Para todo coeficiente $b_{i,j} \neq 0$ en (17), tenemos $1 \leq i - \partial(x_0) \leq n$. Note que $i \in \{i_{\sigma(1)} : \sigma \in P, m_\sigma|_{(12)} \neq 0\}$, por lo tanto para demostrar la afirmación es suficiente probar que*

$$1 \leq i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \leq n \tag{18}$$

para cada $\sigma \in P$ con $m_\sigma|_{(12)} \neq 0$.

Caso A: *Consideremos que $\partial(x_0) \geq 0$ y $\text{máx}\{i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k\} = n$. Por (14), si $\text{máx}\{j_1, \ldots, j_k\} < n$, entonces $\text{máx}\{i_1, \ldots, i_k\} = n$, luego para todo $\sigma \in P$ con $m_\sigma|_{(12)} \neq 0$, lo cual implica que $i_{\sigma(1)} = n$. Como $\partial(x_0) \geq 0$, entonces $-\partial(x_0) \leq 0$, luego*

$$i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \leq i_{\sigma(1)} = n.$$

Por otro lado, como $\hat{\partial}(x_0 m_\sigma) \leq n - 1$, entonces $\partial(x_0) \leq n - 1$, de donde $-\partial(x_0) \geq 1 - n$, luego

$$i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \geq n + (1 - n) = 1.$$

En conclusión,

$$1 \leq i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \leq n.$$

Ahora, si $\text{máx}\{j_1, \ldots, j_k\} = n$, escogemos algún $\sigma \in P$ talque $m_\sigma|_{(12)} \neq 0$ y $j_{\sigma(r)} = n$, para algún $1 \leq r \leq k$. Sabemos del Lema (4.1) que $\partial(m_\sigma^{[1,r]}) = j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(1)}$, entonces

$$\partial(x_0 \cdot m_\sigma^{[1,r]}) = \partial(x_0) + \partial(m_\sigma^{[1,r]}) = \partial(x_0) + j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(1)} = \partial(x_0) + n - i_{\sigma(1)}.$$

Por lo tanto, como

$$\partial(x_0 \cdot m_\sigma^{[1,r]}) \leq \hat{\partial}(x_0 \cdot m_\sigma) \leq n - 1,$$

entonces

$$\partial(x_0) + n - i_{\sigma(1)} \leq n - 1,$$

de donde

$$i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \geq 1.$$

Por otra parte, como $\partial(x_0) \geq 0$, se tiene que $-\partial(x_0) \leq 0$, luego

$$i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \leq i_{\sigma(1)}.$$

Dado que $i_{\sigma(1)} \leq n$, se concluye que

$$i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \leq n.$$

En conclusión,

$$1 \leq i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \leq n.$$

Caso B: *Consideremos que $\partial(x_0) < 0$ y $\min\{i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k\} = 1$. Por (14), si $\min\{j_1, \ldots, j_k\} > 1$, entonces $\min\{i_1, \ldots, i_k\} = 1$, luego para todo $\sigma \in P$ con $m_\sigma|_{(12)} \neq 0$, se tiene que $i_{\sigma(1)} = 1$. Como $\partial(x_0) < 0$, entonces $-\partial(x_0) \geq 0$, luego*

$$i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \geq i_{\sigma(1)} = 1.$$

Por otro lado, como $\hat{\partial}(x_0 m_\sigma) \leq n-1$, entonces $\partial(x_0) \leq n-1$, de donde $-\partial(x_0) \geq 1-n$, de ahi que

$$i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \leq 1 - (1-n) = n.$$

En conclusión,

$$1 \leq i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \leq n.$$

Ahora, si $\min\{j_1, \ldots, j_k\} = 1$, elegimos un $\sigma \in P$ tal que $m_\sigma|_{(12)} \neq 0$ y $j_{\sigma(r)} = 1$ para algún $1 \leq r \leq k$. Sabemos que $\partial(m_\sigma^{[1,r]}) = j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(1)}$, entonces

$$\partial(x_0 \cdot m_\sigma^{[1,r]}) = \partial(x_0) + j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(1)} = \partial(x_0) + 1 - i_{\sigma(1)}.$$

Por lo tanto, dado que

$$\partial(x_0 \cdot m_\sigma^{[1,r]}) \geq -\hat{\partial}(x_0 \cdot m_\sigma) \quad \text{y} \quad -\hat{\partial}(x_0 m_\sigma) \geq 1-n,$$

entonces

$$\partial(x_0) + 1 - i_{\sigma(1)} \geq 1-n,$$

de donde

$$i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \leq n.$$

Por otro lado, como $\partial(x_0) < 0$, tenemos que $-\partial(x_0) \geq 0$, luego

$$i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \geq i_{\sigma(1)}.$$

Dado que $i_{\sigma(1)} \geq 1$, obtenemos que

$$i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \geq 1.$$

En conclusión,

$$1 \leq i_{\sigma(1)} - \partial(x_0) \leq n.$$

Finalmente, elegimos $i_0, j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $b_{i_0,j_0} \neq 0$. Ahora, tomando $x_0 = E_{i_0-\partial(x_0),i_0}$ y la sustitución estándar (12) para las otras variables en la ecuación $x_0 \cdot f_P(x_1, \ldots, x_k) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} x_0 f_P(x_1, \ldots, x_k)|_{x_0=E_{i_0 j_0},(12)} &= E_{i_0-\partial(x_0),i_0} f_P(E_{i_1 j_1}, \ldots, E_{i_k j_k}) \\ &= E_{i_0-\partial(x_0),i_0} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} E_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} b_{i_0.j} E_{i_0-\partial(x_0),j} \neq 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $x_0 \cdot f_P(x_1, \ldots, x_k) = 0$ no es una identidad polinomial, lo cual es una contradicción. □

COROLARIO 4.1. *Para cualquier monomio graduado $m_\sigma(x_1, \ldots, x_k)$ con $\hat{\partial}(m_\sigma) \leq n-1$, existe una sustitución estándar S tal que $m_\sigma(x_1, \ldots, x_k)|_S \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. *Sea $m_\sigma = x_1$, entonces $\hat{\partial}(x_1) \leq n-1$, lo que implica que $1 \leq n-1$, es decir $n \geq 2$. Tomando una sustitución estándar S, donde $x_1 = E_{ij}$ con $j - i = \partial(x_1)$, obtenemos*

$$x_1|_S = E_{ij} \neq 0,$$

por lo tanto se cumple para $k = 1$.
Ahora, supongamos que esto es cierto para todo monomio graduado de k variables, es decir, para cualquier $m_\sigma(x_1, \ldots, x_k)$ con $\hat{\partial}(m_\sigma) \leq n-1$, existe una sustitución estándar S tal que $m_\sigma|_S \neq 0$.
Consideremos el monomio de $k+1$ variables definido así

$$M = x_0 \cdot m_\sigma(x_1, \ldots, x_k),$$

usando el Lema 4.3, obtenemos que

$$\hat{\partial}(M) = \hat{\partial}(x_0 \cdot m_\sigma) = \hat{\partial}(x_0) + \hat{\partial}(m_\sigma) = k+1$$

Podemos elegir $\hat{\partial}(x_0)$ de modo que $\hat{\partial}(x_0 \cdot m_\sigma) \leq n-1$. □

Denotemos por Λ_0 el conjunto de todos los monomios $m_\sigma(x_1, \ldots, x_k)$, $\sigma \in S_k$, tal que $\hat{\partial}(m_\sigma) = n-1$; es decir,

$$\Lambda_0 = \{m_\sigma(x_1, \ldots, x_k) : \hat{\partial}(m_\sigma) \leq n-1 \text{ y } m_\sigma|_S \neq 0\}.$$

LEMA 4.4. *Para cualquier monomio $m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)\in\Lambda_0$, existe exactamente una sustitución estándar S tal que $m_\sigma|_S\neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. *Sea $m_\sigma^{[p,q]}$ es una subpalabra de $m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)\in\Lambda_0$ con $|\partial(m_\sigma^{[p,q]})|=n-1$ y sea (12) la sustitución estándar tal que $m_\sigma|_{(12)}\neq 0$. como $m_\sigma^{[p,q]}=x_{\sigma(p)}x_{\sigma(p+1)}\cdots x_{\sigma(q)}$, tenemos que $m_\sigma^{[p,q]}|_{(12)}=E_{i_{\sigma(p)}j_{\sigma(p)}}E_{i_{\sigma(p+1)}j_{\sigma(p+1)}}\cdots E_{i_{\sigma(q)}j_{\sigma(q)}}=E_{i_{\sigma(p)}j_{\sigma(q)}}\neq 0$, luego por el Lema (4.1) si $\partial(m_\sigma^{[p,q]})=1-n$, entonces $m_\sigma^{[p,q]}|_{(12)}=E_{n1}$, de ahi que $i_{\sigma(p)}=1$ y $j_{\sigma(q)}=n$. Las igualdades anteriores junto con (13) y (14), determinan de forma única todos los índices i_s y j_s, $s=1,\ldots,k$ en (12).*
Similarmente, si $\partial(m_\sigma^{[p,q]})=n-1$, entonces del Lema (4.1) $m_\sigma^{[p,q]}|_{(12)}=E_{1n}$, de donde $i_{\sigma(p)}=1$ y $j_{\sigma(q)}=n$, de modo que todos los índices i_s y j_s, $s=1,\ldots,k$ en (12) nuevamente estan determinados de manera única. □

Para $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ y una sustitución $S\in stSub$, sea

$$\Lambda(S,i,j)=\{m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)\in\Lambda_0 : m_\sigma|_S=E_{ij}\}.$$

Claramente $\Lambda(S,i,j)=\emptyset$ si $j-i\neq\partial(m_\sigma)$. Por el Lema (4.4), los conjuntos $\Lambda(S,i,j)$ son disjuntos dos a dos y su unión coincide con Λ_0; esto es,

$$\Lambda_0=\bigcup_{(S,i,j)}\Lambda(S,i,j), \tag{19}$$

donde (S,i,j) varia sobre las ternas ordenadas (S,i,j), con $S\in\mathbf{stSub}$ e $i,j=1,\ldots,n$.

LEMA 4.5. *Si para una permutación $\sigma\in S_k$, existe una sustitución estándar (12) tal que*

$$m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)|_{(12)}=m(x_1,\ldots,x_k)|_{(12)}\neq 0,$$

entonces,

$$m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)\equiv x_1\cdot\eta(x_2,\ldots,x_k)(\text{mód}\mathcal{I}_n)$$

para algún monomio $\eta(x_2,\ldots,x_k)=x_{l_2}\cdots x_{l_k}$.

DEMOSTRACIÓN. *Supongamos que $\sigma(1)\neq 1$. Entonces $1=\sigma^{-1}(\sigma(1))<\sigma^{-1}(1)$. Sea t el menor entero positivo tal que $\sigma^{-1}(t+1)<\sigma^{-1}(1)$. Es claro que,*

$$1\leq\sigma^{-1}(t+1)<\sigma^{-1}(1)\leq\sigma^{-1}(t).$$

Dado que

$$m_\sigma(x_1,\ldots,x_k)|_{(12)}=m(x_1,\ldots,x_k)|_{(12)}\neq 0,$$

entonces

$$E_{i_1,j_1}\cdots E_{i_k,j_k}=E_{i_{\sigma(1)},j_{\sigma(1)}}\cdots E_{i_{\sigma(k)},j_{\sigma(k)}}\neq 0,$$

de ahí que

$$E_{i_1 j_k} = E_{i_{\sigma(1)} j_{\sigma(k)}} \neq 0,$$

esto implica que $i_1 = i_{\sigma(1)}$, $j_t = i_{(t+1)}$ *y para* $s > 1$, $j_{\sigma(s-1)} = i_{\sigma(s)}$. *Así, tomando* $p = \sigma^{-1}(t+1)$, $q = \sigma^{-1}(1)$ *y* $r = \sigma^{-1}(t)$, *tenemos* $1 \leq p < q \leq r$ *con* $j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_{\sigma(1)}$, $j_{\sigma(r)} = i_{\sigma(p)}$ *y, cuando* $p > 1$, $j_{\sigma(p-1)} = i_{\sigma(p)}$.

Caso 1: *Si* $p > 1$, *desde las ecuaciones*

$$j_{\sigma(r)} = i_{\sigma(p)} = j_{\sigma(p-1)} \quad y \quad j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_{\sigma(1)},$$

vemos que

$$j_{\sigma(p-1)} - i_{\sigma(1)} = i_{\sigma(p)} - j_{\sigma(q-1)} = j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)} = \partial_0$$

para algún $\partial_0 \in \mathbb{Z}$. *Por el Lema (4.1), obtenemos,*

$$\begin{aligned} \partial(m_\sigma^{[1,p-1]}) &= j_{\sigma(p-1)} - i_{\sigma(1)} = \partial_0, \\ \partial(m_\sigma^{[p,q-1]}) &= j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(p)} = -\partial_0, \\ \partial(m_\sigma^{[q,r]}) &= j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)} = \partial_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando (11) tenemos,

$$\begin{aligned} m_\sigma(x_1, \ldots, x_k) =& x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(k)} \\ m_\sigma(x_1, \ldots, x_k) =& m_\sigma^{[1,p-1]} \cdot m_\sigma^{[p,q-1]} \cdot m_\sigma^{[q,r]} \cdot m_\sigma^{[r+1,k]} \\ m_\sigma(x_1, \ldots, x_k) \equiv& m_\sigma^{[q,r]} \cdot m_\sigma^{[p,q-1]} \cdot m_\sigma^{[1,p-1]} \cdot m_\sigma^{[r+1,k]} (\text{mód} \mathcal{I}_n) \\ m_\sigma(x_1, \ldots, x_k) \equiv& x_{\sigma(q)} \cdots x_{\sigma(r)} x_{\sigma(p)} \cdots x_{\sigma(q-1)} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p-1)} x_{\sigma(r+1)} \cdots x_{\sigma(k)} (\text{mód} \mathcal{I}_n) \end{aligned}$$

como $q = \sigma^{-1}(1)$, *entonces* $\sigma(q) = 1$, *luego*

$$m_\sigma(x_1, \ldots, x_k) \equiv x_1 x_{l_2} \cdots x_{l_k} (\text{mód} \mathcal{I}_n).$$

Caso 2: *Si* $p = 1$, *en este caso de las ecuaciones*

$$j_{\sigma(q-1)} = i_{\sigma(q)} = i_{\sigma(1)} = j_{\sigma(r)},$$

vemos que

$$j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(1)} = j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)} = \partial_0,$$

para algún ∂_0, *por el lema (4.1) obtenemos,*

$$\partial(m_\sigma^{[1,q-1]}) = j_{\sigma(q-1)} - i_{\sigma(1)} = \partial_0,$$

$$\partial(m_\sigma^{[q,r]}) = j_{\sigma(r)} - i_{\sigma(q)} = \partial_0.$$

Por lo tanto, usando (10) tenemos,

$$\begin{aligned}
m_\sigma(x_1,\dots,x_k) =& x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(k)}\\
m_\sigma(x_1,\dots,x_k) =& m_\sigma^{[1,q-1]}\cdot m_\sigma^{[q,r]}\cdot m_\sigma^{[r+1,k]}\\
m_\sigma(x_1,\dots,x_k) \equiv& m_\sigma^{[q,r]}\cdot m_\sigma^{[1,q-1]}\cdot m_\sigma^{[r+1,k]}(\text{mód}\mathcal{I}_n)\\
m_\sigma(x_1,\dots,x_k) \equiv& x_{\sigma(q)}\cdots x_{\sigma(r)}x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(q-1)}x_{\sigma(r+1)}\cdots x_{\sigma(k)}(\text{mód}\mathcal{I}_n)
\end{aligned}$$

como $q=\sigma^{-1}(1)$*, entonces* $\sigma(q)=1$*, luego*

$$m_\sigma(x_1,\dots,x_k) \equiv x_1x_{l_2}\cdots x_{l_k}(\text{mód}\mathcal{I}_n).$$

□

Del Lema (4.5) se tienen de forma inmediata el resultado siguiente.

COROLARIO 4.2. *Si para dos permutaciones* $\sigma,\tau\in S_k$*, existe una sustitución estándar* S *tal que*

$$m_\sigma(x_1,\dots,x_k)|_S = m_\tau(x_1,\dots,x_k)|_S \neq 0,$$

entonces,

$$m_\sigma(x_1,\dots,x_k) = x_{\tau(1)}\cdot\eta(x_{\tau(2)},\dots,x_{\tau(k)})(\text{mód}\mathcal{I}_n)$$

para algún monomio $\eta(y_2,\dots,y_k)=y_{l_2}\cdots y_{l_k}$*.*

DEMOSTRACIÓN. *Sea* S *la sustitución estandar (12), es decir,*

$$x_1=E_{i_1j_1},\dots,x_k=E_{i_kj_k},$$

con $j_s-i_s=\partial(x_s)$ *para* $s=1,\dots,k$ *tal que* $m_\sigma|_S=m_\tau|_S\neq 0$*.*
Definamos la sustitución estandar S' *reordenando las matrices elementales de* S *por medio de la permutación* τ*, es decir,*

$$x_1=E_{i_{\tau(1)}j_{\tau(1)}},\dots,x_k=E_{i_{\tau(k)}j_{\tau(k)}}.$$

Denotamos $y_s=x_{\tau(s)}$ *para* $s=1,\dots,k$ *podemos reescribir el monomio* $m_\tau(x_1,\dots,x_k)$ *así*

$$m_\tau(x_1,\dots,x_k)=x_{\tau(1)}\cdots x_{\tau(k)}=y_1\cdots y_k=m_(y_1,\dots,y_k).$$

Luego el monomio $m_\tau(x_1,\dots,x_k)$ *se reescribe en función de las variables* $y_1,\dots,y_k$ *así:*

$$m_\sigma(x_1,\dots,x_k)=x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(k)}=y_{(\tau^{-1}\circ\sigma)(1)}\cdots y_{(\tau^{-1}\circ\sigma)(k)}=m_{(\tau^{-1}\circ\sigma)}(y_1,\dots,y_k).$$

Pues $y_{(\tau^{-1}\circ\sigma)(s)}=x_{\tau((\tau^{-1}\circ\sigma))(s)}=x_{\sigma(s)}$*, para* $s=1,\dots,k$*, por hipotesis* $m_\sigma|_S=m_\tau|_S\neq 0$*. Bajo el cambio de variable* $y_s=x_{\tau(s)}$*, la sustitución* S' *evalua* m_τ *como el monomio identidad*

$m(y_1,\ldots,y_k)$ y el monomio m_σ como el monomio $m_{(\tau^{-1}\circ\sigma)}(y_1,\ldots,y_k)$, como ambos monomios tienen el mismo valor bajo S, tenemos que

$$m_{(\tau^{-1}\circ\sigma)}(y_1,\ldots,y_k)|_{S'} = m(y_1,\ldots,y_k)|_{S'} \neq 0.$$

Luego, por el Lema (4.5) tenemos que

$$m_{(\tau^{-1}\circ\sigma)}(y_1,\ldots,y_k) \equiv y_1 \cdot \eta(y_2,\ldots,y_k)(\text{mód}\mathcal{I}_n)$$

para algún monomio $\eta(y_2,\ldots,y_k) = y_{l_2}\cdots y_{l_k}$.
Deshaciendo el cambio de variable $y_s = x_{\tau(s)}$ tenemos,

$$m_\sigma(x_1,\ldots,x_k) \equiv x_{\tau(1)} \cdot \eta(x_{\tau(2)},\ldots,x_{\tau(k)})(\text{mód}\mathcal{I}_n)$$

donde $\eta(x_{\tau(2)},\ldots,x_{\tau(k)}) = x_{\tau(l_2)},\ldots,x_{\tau(l_k)}$ □

En este trabajo se estudian las identidades polinomiales graduadas para el álgebra $M_n(\mathbb{F})$ con una $\mathbb{Z}$-graduación, tomando como referencia el artículo de Vasilovsky [6]. Este estudio surge del interés por describir las identidades polinomiales $\mathbb{Z}_n$-graduadas de M_n para todo entero positivo n.

Recordemos, del Ejemplo 3.5, el álgebra de matrices M_n admite una $\mathbb{Z}$-graduación natural $M_n = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}} M_n^{(\alpha)}$, donde para cada entero $-(n-1) \leq \alpha \leq n-1$ la componente homogénea $M_n^{(\alpha)}$ es el subespacio generado por todas las matrices elementales E_{ij} tales que $j - i = \alpha$, y $M_n^{(\alpha)} = \{0_n\}$ cuando $|\alpha| \geq n$. En particular, la componente de grado cero es $M_n^{(0)} = \text{gen}\{E_{11}, E_{22},\ldots,E_{nn}\}$, es decir, el subespacio de las matrices diagonales, y para cada $0 < \alpha \leq n-1$ las componentes de grado α y $-\alpha$ son, respectivamente, $M_n^{(\alpha)} = \text{gen}\{E_{1,\alpha+1},\ldots,E_{n-\alpha,n}\}$ y $M_n^{(-\alpha)} = \text{gen}\{E_{\alpha+1,1},\ldots,E_{n,n-\alpha}\}$. Asi mismo, el producto respeta la graduación en el sentido de que $M_n^{(\alpha)}M_n^{(\beta)} \subseteq M_n^{(\alpha+\beta)}$ cuando $|\alpha+\beta| < n$, y $M_n^{(\alpha)}M_n^{(\beta)} = \{0_n\}$ cuando $|\alpha+\beta| \geq n$.

Ademas, del Lema 3.1, los polinomios $f_1(x) = x$ con $|\partial(x)| \geq n$, $f_2(x_1,x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$ con $\partial(x_1) = \partial(x_2) = 0$ y $f_3(x_1,x,x_2) = x_1xx_2 - x_2xx_1$ con $\partial(x_1) = \partial(x_2) = -\partial(x)$ son identidades polinomiales $\mathbb{Z}$-graduadas para M_n.

El teorema principal que se presenta a continuación utiliza las notaciones introducidas en los Lemas 3.1, 4.3, y 4.4, así como las del Corolario 4.2 y del Ejemplo 3.5. Este resultado, debido a Vasilovsky [6], es el eje central de esta monografía.

TEOREMA 4.1. *Todas las identidades polinomiales $\mathbb{Z}$-graduadas del álgebra M_n son conse-*

cuencia de las siguientes identidades

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0, & |\partial(x)| &\geq n \\ f_2(x_1, x_2) &= 0, & \partial(x_1) &= \partial(x_2) = 0 \\ f_3(x_1, x, x_2) &= 0, & \partial(x_1) &= \partial(x_2) = -\partial(x). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. *Queremos probar que* $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_n) = \mathcal{I}_n$*, donde* $\mathcal{I}_n = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle_{T_{\mathbb{Z}}}$*, para esto vamos a proceder por inducción sobre* n*.*
Para $n = 1$*, tenemos que* $M_1 = M_1^{(0)} = \mathbb{F}$*. Luego de la identidad (9), es suficiente considerar las identidades polinomiales graduadas de* M_1 *de la forma* $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$*, donde* $\partial(x_1) = \cdots = \partial(x_k) = 0$*. Estas identidades son, en efecto, identidades polinomiales ordinarias de* $M_1^{(0)} = \mathbb{F}$*. Dado que todas las identidades polinomiales de un cuerpo infinito siguen de la ley conmutativa de la multiplicación, se sigue que* f_1 *y* f_2 *forman la base para* $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_1)$ *tal que* $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_1) = \mathcal{I}_1$*.*

Para $n > 1$*, supongamos que* $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_{n-1}) = \mathcal{I}_{n-1}$ *y probemos que* $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_n) = \mathcal{I}_n$*. Del Lema 3.1 se tiene que* $\mathcal{I}_n \subseteq \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_n)$*. Queremos probar que* $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_n) \subseteq \mathcal{I}_n$*, como* $\mathbb{F}$ *es infinito, del Teorema 2.2, basta probar que toda identidad polinomial graduada multilineal de* M_n *está en* $\mathcal{I}_n$*. Ahora, usando inducción sobre* k*, supongamos que cada polinomio graduado multilineal en* $(k-1)$*-variables* $g(y_1, \ldots, y_{k-1}) \in \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_n)$ *está en* $\mathcal{I}_n$ *y probemos que cada identidad polinomial graduada multilineal en* k*-variables también está en* $\mathcal{I}_n$*. Sea* $f(x_1, \ldots, x_k)$ *un polinomio multilineal graduado en* $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_n)$*. Note que, para cada* $A \in M_{n-1}$*, definimos* $\varphi : M_{n-1} \to M_n$ *por*

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } A \in M_{n-1} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n.$$

Es claro que φ *es un homomorfismo inyectivo de álgebras* $\mathbb{Z}$*-graduadas, tal que* $M_{n-1} \subset M_n$ *y* $M_{n-1}^{(\partial)} \subset M_n^{(\partial)}$*,* $\partial \in \mathbb{Z}$*. Como* $f(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_n)$*, se deduce que* $f(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_{n-1}) = I_{n-1}$*, es decir,* f *es una consecuencia de (9), (10), (11) y la identidad graduada*

$$f_1(x) = x = 0, \quad |\partial(x)| = n - 1. \tag{20}$$

Por lo tanto, f *se puede expresar como la suma*

$$f = f_1 + f_2 + f_3$$

para algunos polinomios graduados multilineales f_1, f_2 *y* f_3*, tales que* $f_1(x) = 0$ *se deduce de (10),* $f_2(x_1, x_2) = 0$ *es una consecuencia de (11), y* $f_3(x_1, x, x_2) = 0$ *se sigue de (9) y (20). Es* *fácil ver que f_3 se puede escribir como*

$$f_3 = \sum_{\hat{\partial}(m_\sigma) \geq n-1} a_\sigma m_\sigma(x_1, \ldots, x_k).$$

Ya que $m_\sigma(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{I}_n$ donde $\hat{\partial}(m_\sigma) > n-1$, se deduce que, modulo $\mathcal{I}_n$

$$f = f_3 = \sum_{\hat{\partial}(m_\sigma) = n-1} a_\sigma m_\sigma(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{m_\sigma \in \Lambda_0} a_\sigma m_\sigma(x_1, \ldots, x_k).$$

Entonces, en vista de (19),

$$f = \sum_{S \in stSub} \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \sum_{m_\sigma \in \Lambda(S,i,j)} a_\sigma m_\sigma \right\} (\text{mód} \mathcal{I}_n) \tag{21}$$

Si podemos demostrar que todo polinomio gradudado $\sum_{m_\sigma \in \Lambda(S,i,j)} a_\sigma m_\sigma$ en (21) pertenece a $\mathcal{I}_n$, entonces $f \in \mathcal{I}_n$ se establece, observe que por el Lema 4.4, para $S_0, S \in stSub$ y $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos,

$$\sum_{m_\sigma \in \Lambda(S,i,j)} a_\sigma m_\sigma|_{S_0} = \begin{cases} 0, & \textit{si } S \neq S_0, \\ [\sum_{m_\sigma \in \Lambda(S_0,i,j)} a_\sigma] \cdot E_{ij}, & \textit{si } S = S_0. \end{cases} \tag{22}$$

Entonces para cualquier $S \in stSub$,

$$f|_S = \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ \sum_{m_\sigma \in \Lambda(S,i,j)} a_\sigma \right\} E_{i,j} = 0,$$

donde $\sum_{m_\sigma \in \Lambda(S,i,j)} a_\sigma = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, entonces por (22), obtenemos

$$\sum_{m_\sigma \in \Lambda(S,i,j)} a_\sigma m_\sigma(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_n), \quad S \in stSub, i, j = 1, \ldots, n.$$

Si $\Lambda(S, i, j) \neq \emptyset$, elegimos una sustitución $\tau \in S_k$ tal que $m_\tau \in \Lambda(S, i, j)$. Por el Colorario 4.2, para cada $m_\sigma \in \Lambda(S, i, j)$ existe un monomio $\eta^{[\sigma]} = \eta^{[\sigma]}(x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(k)})$ tal que $m_\sigma = x_{\tau(1)} \cdot \eta^{[\sigma]}(\text{mód}\mathcal{I}_n)$. Como $x_{\tau(1)} \cdot \eta^{[\sigma]} \notin \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_n)$, se deduce que $\hat{\partial}(x_{\tau(1)} \cdot \eta^{[\sigma]}) \leq n-1$. Sea $P = \{\sigma \in S_k : m_\sigma \in \Lambda(S, i, j)\}$, entonces

$$\sum_{m_\sigma \in \Lambda(S,i,j)} a_\sigma m_\sigma = \sum_{\sigma \in P} a_\sigma m_\sigma = \sum_{\sigma \in P} a_\sigma x_{\tau(1)} \cdot \eta^{[\sigma]} = x_{\tau(1)} \cdot \sum_{\sigma \in P} a_\sigma \eta^{[\sigma]} \quad (\text{mód}\mathcal{I}_n).$$

Por el Lema 4.3, el polinomio $\sum_{\sigma \in P} a_\sigma \eta^{[\sigma]}$ pertenece a $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}(M_n)$, por lo tanto, como la identidad graduada multilineal de M_n en $k-1$ variables para $\mathcal{I}_n$. Por lo tanto, para cualquier

$S \in stSub$ y $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{m_\sigma \in \Lambda(S,i,j)} a_\sigma m_\sigma = 0 \quad (\text{mód} \mathcal{I}_n).$$

Con esto se completa la demostración del Teorema. □

Como para cualquier álgebra $\mathbb{Z}$-graduada, el ideal de sus identidades polinomiales graduadas contiene al T-ideal de las identidades polinomiales ordinarias. En consecuencia, la afirmación anterior también puede entenderse como un caso particular de este hecho general.

COROLARIO 4.3. *Si un álgebra asociativa A con una $\mathbb{Z}$-graduación finita*

$$A = \bigoplus_{\alpha=-n+1}^{n-1} A^{(\alpha)}$$

satisface las identidades graduadas (10) y (11), entonces A satisface todas las identidades polinomiales ordinarias del álgebra de matrices M_n.

5. Conclusión

Durante esta monografía se estudió las identidades polinomiales $\mathbb{Z}$-graduadas del álgebra de matrices de orden n sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ de característica cero, $M_n(\mathbb{F})$, cumpliendo así el objetivo general de presentar un análisis riguroso de su estructura y propiedades desde la teoría de álgebras graduadas. A lo largo del documento se presentaron conceptos fundamentales de álgebras asociativas, álgebras libres, identidades polinomiales, T-ideales y graduaciones por grupo, los cuales contribuyeron al marco teórico para el análisis del problema.

En particular, se abordó el concepto de G-graduación de un álgebra y se analizó detalladamente el caso para las $\mathbb{Z}$-graduaciones del álgebra de matrices $M_n(\mathbb{F})$, explicando sus componentes homogéneas y cómo estas se comportan bajo el producto matricial. Este análisis sirvió para comprender cómo en las identidades polinomiales que satisface el álgebra influye directamente esta estructura de graduación, así satisfaciendo el primer objetivo específico de esta monografía. Adicionalmente, se demostró que ciertos polinomios forman identidades polinomiales $\mathbb{Z}$-graduadas para $M_n(\mathbb{F})$, estos se refieren a las retricciones relacionadas con el grado homogéneo de las variables y a las relaciones de las condiciones conmutativas impuestas por la graduación. Estas identidades claves fueron verificadas utilizando matrices elementales y sustituciones estándar, cumpliendo así el segundo objetivo específico del trabajo.

Finalmente, se evidenció que el ideal generado por estas identidades polinomiales graduadas contiene todas las identidades polinomiales $\mathbb{Z}$-graduadas del álgebra de matrices $M_n(\mathbb{F})$. Este resultado, basado en el Teorema de Vasilovsky, permite afirmar que el conjunto de identidades graduadas del álgebra está completamente definido por un número finito de identidades básicas y se evidencia que el análisis de las PI-graduaciones del álgebra $M_n(\mathbb{F})$ es una herramienta esencial para entender tanto sus identidades graduadas como las identidades polinomiales ordinarias.

Referencias bibliográficas

[1] A. GIAMBRUNO, M. ZAICEV, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, American Mathematical Society, **122** (2005).

[2] A.R. KEMER, *Finite basis property of identities of associative algebras* (Russian), Algebra i Logika. **26** (1987), 597–641. Translation: Algebra and Logic **26** (1988), 362–397.

[3] A.YA. BELOV, *On non-Specht varieties* (Russian), Fundam. Prikl. Mat. **5(1)** (1999), 47–66.

[4] HALL, M, *Projective planes*, Trans. Amer. Math. Soc. **54** (1943), 229–277.

[5] S.A. AMITSUR, J. LEVITZKI, *Minimal identities for algebras,* Proceedings of the American Mathematical Society, **1(4)** (1950), 449-463.

[6] S. Y. VASILOVSKY, *$\mathbb{Z}$-graded polynomial identities of the full matrix algebra*, Communications in Algebra, **26(2)** (1998), 601–612.

[7] V. DRENSKY, *Free Algebras and PI-Algebras Graduate Course in Algebra*, Springer.

[8] V. DRENSKY, *A minimal basis for identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra Logic **20** (1981), 188—194.

[9] V. DRENSKY, E. FORMANEK, *Polynomial Identity Rings*, Springer Basel AG, (2004).

[10] W. WAGNER, *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*, Math. Ann. **113** (1936), 528–567.