

**MODELACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LOS PRECIOS DEL PETRÓLEO  
MEDIANTE MODELOS ESTOCÁSTICOS**

**MAYRA ALEJANDRA JEREZ BARAJAS**

**Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ingenierías Físico-mecánicas  
Escuela de Estudios Industriales y Empresariales  
Bucaramanga  
2016**

**MODELACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LOS PRECIOS DEL PETRÓLEO  
MEDIANTE MODELOS ESTOCÁSTICOS**

Autor:

**MAYRA ALEJANDRA JEREZ BARAJAS**

**Trabajo de Grado para optar al título de  
Ingeniera Industrial**

Director:

**HENRY LAMOS DÍAZ**

**Ph.D. Física – Matemáticas**

Codirector:

**CARLOS ENRIQUE VECINO ARENAS**

**Ph.D. Administración**

**Universidad Industrial de Santander  
Facultad de Ingenierías Físico-mecánicas  
Escuela de Estudios Industriales y Empresariales  
Bucaramanga**

**2016**

## DEDICATORIA

*A Dios por brindarme las suficientes herramientas para culminar esta carrera. A mi familia por apoyarme en todos mis sueños. A Fabian, por su compañía, comprensión y afecto, amigos y demás personas que contribuyeron a cumplir esta meta*

## **AGRADECIMIENTOS**

Este trabajo es apoyado por el grupo de Investigación Finance & Management de la Universidad Industrial de Santander. La autora agradece a la Universidad de Santander (UDES) por permitir acceder a su base de datos de precios del petróleo para hacer posible este proyecto. Al economista Sebastián Rangel por su asesoramiento. A los profesores Henry Lamos y Carlos Vecino, quienes estuvieron de manera incondicional en este proceso.

# CONTENIDO

|  | Pág. |
|--|------|
| INTRODUCCION.....  | 15   |
| 1. REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE .....  | 18   |
| 1.1 ANALISIS BIBLIOMETRICO .....   | 20   |
| 1.2 ANALISIS PRELIMINAR DE LITERATURA .....  | 26   |
| 1.3 CONFORMACIÓN DE MODELOS AR, MA Y ARIMA .....                                       | 29   |
| 1.3.1 Proceso autorregresivo (AR) .....  | 29   |
| 1.3.2 Proceso de medios móviles (MA) .....   | 30   |
| 1.3.3 Proceso autorregresivo integrado de promedios móviles (ARIMA) .....              | 31   |
| 1.3.4 Estimación de los modelos ARIMA .....  | 31   |
| 1.3.5 Vectores autorregresivos (ARCH, GARCH).....                                      | 32   |
| 1.4 MOVIMIENTO GEOMÉTRICO BROWNIANO.....   | 33   |
| 1.4.1 Movimiento Geométrico Browniano con Reversión a la Media .....                   | 34   |
| 1.4.2 Movimiento Geométrico Browniano con saltos Poisson.....                          | 37   |
| 2. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA DE LOS DATOS.....   | 39   |
| 2.1 IMPUTACIÓN DE DATOS FALTANTES A LAS SERIES .....                                   | 42   |
| 2.2 DIFERENCIA ENTRE EL PRECIO BRENT Y WTI.....  | 43   |
| 2.3 DESCOMPOSICIÓN ESTACIONAL.....   | 44   |
| 3. MODELAMIENTO Y PREDICCIÓN DEL PRECIO DEL PETRÓLEO A<br>PARTIR DE MODELOS ARIMA..... | 46   |
| 3.1 IDENTIFICACIÓN DEL MODELO PARA BRENT.....  | 47   |
| 3.2 ESTIMACIÓN DEL MODELO BRENT.....   | 50   |
| 3.3 IDENTIFICACIÓN DEL MODELO PARA WTI.....  | 52   |
| 3.4 ESTIMACIÓN DEL MODELO WTI.....   | 55   |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.5 | MODELO GARCH PARA EL PRECIO DEL PETROLEO EN SU REFERENCIA BRENT .....   | 57 |
| 3.6 | MODELO GARCH PARA EL PRECIO DEL PETROLEO EN SU REFERENCIA WTI.....  | 60 |
| 4.  | MODELAMIENTO Y PREDICCIÓN DEL PRECIO DEL PETRÓLEO A PARTIR DE LA TÉCNICA MOVIMIENTO GEOMÉTRICO BROWNIANO..... | 63 |
| 4.1 | MODELAMIENTO MOVIMIENTO GEOMÉTRICO BROWNIANO (GBM)...   | 63 |
| 4.2 | MODELAMIENTO MOVIMIENTO GEOMÉTRICO BROWNIANO CON REVERSIÓN A LA MEDIA (GBMR).....                             | 66 |
| 4.3 | MODELAMIENTO MOVIMIENTO GEOMETRICO BROWNIANO CON SALTOS POISSON .....   | 68 |
| 5.  | CONCLUSIONES .....  | 75 |
| 6.  | RECOMENDACIONES .....   | 77 |
|     | BIBLIOGRAFÍA.....   | 78 |

## LISTA DE FIGURAS

|   | Pág. |
|---|------|
| Figura 1. Serie de tiempo del análisis bibliométrico .....                        | 23   |
| Figura 2. Origen de publicaciones consultadas.....                                | 24   |
| Figura 3. Precios de BRENT 1988-2015.....   | 40   |
| Figura 4. Diagrama de cajas del precio del petróleo referencia BRENT por años     | 40   |
| Figura 5. Precio del WTI 1988-2015 .....  | 41   |
| Figura 6. Diagrama de cajas para el precio del petróleo anual referencia WTI .... | 41   |
| Figura 7. Valores Imputados.....  | 43   |
| Figura 8. Diferencia entre Precio BRENT y WTI .....                               | 43   |
| Figura 9. Descomposición de la serie BRENT .....                                  | 44   |
| Figura 10. Descomposición de la serie WTI.....                                    | 45   |
| Figura 11. Primeras Diferencias.....  | 46   |
| Figura 12. FAC y FACP del BRENT .....   | 48   |
| Figura 13. FAC para log(BRENT) .....  | 49   |
| Figura 14. FAC Modelo 7 Auto.Arima – Referencia BRENT .....                       | 49   |
| Figura 15. Intervalos de Predicción BRENT.....                                    | 51   |
| Figura 16. Histograma de los errores BRENT - ARIMA .....                          | 51   |
| Figura 17. Residuales Modelo 7 BRENT - ARIMA .....                                | 52   |
| Figura 18. Función de FAC Y FACP WTI.....   | 52   |
| Figura 19. FAC para log(WTI).....   | 54   |
| Figura 20. FAC Modelo 7 Auto.Arima – Referencia WTI.....                          | 54   |
| Figura 21. Intervalos para la predicción del WTI.....                             | 56   |
| Figura 22. Histograma de los Errores WTI - ARIMA.....                             | 56   |
| Figura 23. Residuales Modelo 7 WTI - ARIMA.....                                   | 57   |
| Figura 24. Errores al cuadrado del modelo final BRENT.....                        | 58   |
| Figura 25. Análisis Residual del modelo GARCH(3,0) .....                          | 59   |
| Figura 26. Errores al cuadrado del modelo final WTI .....                         | 60   |

|  |    |
|--|----|
| Figura 27. Análisis residual del modelo GARCH(2,0).....                  | 62 |
| Figura 28. Precios WTI vs GBM 2 años .....                               | 64 |
| Figura 29. Precios BRENT vs GBM 2 años .....                             | 64 |
| Figura 30. Precios Simulados BRENT Enero 2016 por GBM.....               | 65 |
| Figura 31. Precios WTI vs GBMR 2010 - 2015 .....                         | 67 |
| Figura 32. Precios BRENT vs GBMR 2010 - 2015.....                        | 67 |
| Figura 33. Evolución Histórica del precio del petróleo.....              | 69 |
| Figura 34. GBM sin saltos Poisson vs Precio del petróleo BRENT .....     | 70 |
| Figura 35. GBM con saltos Poisson vs Precio del petróleo BRENT .....     | 70 |
| Figura 36. Zoom GBM sin saltos Poisson - BRENT .....                     | 71 |
| Figura 37. Zoom GBM con saltos Poisson - BRENT .....                     | 71 |
| Figura 38. GBM sin saltos Poisson vs Precio del petróleo WTI.....        | 72 |
| Figura 39. GBM con saltos Poisson vs Precio del petróleo WTI .....       | 72 |
| Figura 40. Zoom GBM sin saltos Poisson WTI.....                          | 73 |
| Figura 41. Zoom GBM con saltos Poisson WTI .....                         | 73 |
| Figura 42. Precios Simulados BRENT Enero 2016 por GBM con Saltos Poisson | 74 |

## LISTA DE TABLAS

|   | Pág. |
|---|------|
| Tabla 1. 10 mejores Universidades de Colombia .....                     | 21   |
| Tabla 2. Tipos de artículo y fuente de búsqueda .....                   | 22   |
| Tabla 3. 10 Organizaciones de mayor productividad a nivel mundial ..... | 24   |
| Tabla 4. Autores con mayor número de publicaciones.....                 | 25   |
| Tabla 5. Estadística Descriptiva.....                                   | 39   |
| Tabla 6. Prueba Dikey Fuller .....                                      | 47   |
| Tabla 7. Modelos propuestos ARIMA – Referencia BRENT.....               | 48   |
| Tabla 8. Prueba de no correlación de errores Ljung Box - BRENT .....    | 50   |
| Tabla 9. Modelos propuestos ARIMA – Referencia WTI.....                 | 53   |
| Tabla 10 . Prueba de no correlación de errores Ljung Box - WTI.....     | 55   |
| Tabla 11. GARCH (3,0) BRENT.....  | 58   |
| Tabla 12. GARCH(2,0) WTI.....   | 61   |
| Tabla 13. Parámetros WTI y BRENT 2 años.....                            | 63   |
| Tabla 14. Parámetros WTI y BRENT GBMR.....                              | 66   |
| Tabla 15. Comparación precios WTI vs GBM con y sin saltos. ....         | 73   |

## LISTA DE ANEXOS

|  | Pág. |
|--|------|
| Anexo A. Predicción ARIMA (3,1,2) para Log(BRENT).....               | 51   |
| Anexo B. Predicción ARIMA (4,1,0) para Log(WTI).....                 | 56   |
| Anexo C. Predicción modelo GARCH (3,0) BRENT.....                    | 59   |
| Anexo D. Predicción modelo GARCH (2,0) WTI.....                      | 61   |
| Anexo E. Precios BRENT Enero reales vs Simulados GBM.....            | 66   |
| Anexo F. Precios BRENT Enero reales vs Simulados GBM con Saltos..... | 74   |

## RESUMEN

**TÍTULO:** Modelación del comportamiento de los Precios del Petróleo mediante Modelos Estocásticos <sup>1</sup>

**AUTOR:** Mayra Alejandra Jerez Barajas<sup>2</sup>

**PALABRAS CLAVES:** Precios del Petróleo, Modelos Estocásticos, previsión, ARIMA, GBM y simulación.

**DESCRIPCIÓN:** El petróleo se ha convertido en un gran protagonista en la economía global por ser el eje principal de la mayoría de industrias manufactureras y de transporte, afectando de manera significativa la dinámica de las economías de los países en donde su principal actividad económica se fundamenta en la explotación e industrialización del petróleo. La constante variabilidad en el precio del petróleo a través del tiempo, ha generado la necesidad de que a nivel científico se busquen o generen modelos matemáticos que permitan pronosticar a corto y largo plazo el precio del petróleo de manera eficiente. En este trabajo de investigación se estudiaron y analizaron los modelos estocásticos ARIMA y Movimiento Geométrico Browniano (GBM) con posible reversión a la media y saltos Poisson, con el fin de comparar la efectividad de cada modelo al momento de realizar un pronóstico. Se realizaron simulaciones para diferentes periodos de tiempo tomando como base de datos los precios del petróleo en sus referencias WTI y BRENT. Se ha podido concluir en esta tesis que el proceso estocástico ARIMA implementado con un proceso estocástico adicional (ARCH – GARCH) logra generar un pronóstico más eficiente que el Movimiento Geométrico Browniano en cuanto a exactitud y volatilidad.

---

<sup>1</sup> Trabajo de Grado

<sup>2</sup> Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Estudios Industriales y Empresariales.  
Director: Ph.D. Henry Lamos Díaz. Codirector: Ph.D. Carlos Enrique Vecino Arenas.

## ABSTRACT

**TITLE:** Modeling the behavior of Oil prices by Stochastic Models <sup>3</sup>

**AUTHOR:** Mayra Alejandra Jerez Barajas <sup>4</sup>

**KEYWORDS:** Oil Prices, Stochastic Models, forecasting, ARIMA, GBM and simulation.

**DESCRIPTION:** Oil has become one of the principal actor in the global economy as the main focus of most manufacturing industries and transport, affecting significantly the dynamics of the economies of the countries where its main economic activity is based on the oil exploitation and industrialization. The constant variability in the price of oil over the time, has generated the need in a scientific level to search or generate mathematical models to predict short and long term oil prices in a efficiently way. In this research we studied and analyzed the stochastic ARIMA models and Geometric Brownian Motion (GBM) with possible mean reversion and Poisson jumps, in order to compare the effectiveness of each model when making a forecast. Simulations for different periods of time were made on the database in oil prices WTI and BRENT references. It has been concluded in this thesis that the stochastic process ARIMA implemented with an additional stochastic process (ARCH - GARCH) manages to generate a more efficient outcome than the Geometric Brownian Motion in terms of accuracy and volatility.

---

<sup>3</sup> Degree project

<sup>4</sup> Faculty of Physical-Mechanical Engineering. School of Industrial and Business Studies  
Advisor: Ph.D. Henry Lamos Díaz. Co-Advisor: Ph.D. Carlos Enrique Vecino Arenas.

## INTRODUCCIÓN

En las últimas tres décadas, el petróleo se ha vuelto un gran protagonista en la economía global. Este crudo se ha convertido en el eje principal de las industrias manufactureras y de transporte, razón por la cual puede afectar las economías de varios países en los que sus actividades económicas se fundamentan en la actividad petrolera.

Las fuertes variaciones en los precios del petróleo que se han presentado en los últimos años, han motivado a los investigadores a buscar o crear modelos matemáticos que puedan predecir de manera precisa estos precios. Estos modelos han sido adoptados por grandes empresas petroleras, para establecer sus niveles de producción de crudo, ventas, costos de producción, posible oferta y demanda, entre otros aspectos económicos.

El objetivo principal de este trabajo de investigación es comparar algunos modelos matemáticos estocásticos ya existentes dentro de la literatura y la práctica empresarial, con el fin de comparar y determinar la eficiencia de cada uno de ellos para modelar y/o pronosticar el precio del petróleo en diferentes períodos de tiempo comprendidos entre el 24 de Junio de 1988 hasta el 31 de Diciembre de 2015 y entre el 01 de Enero de 2016 hasta el 30 de Enero de 2016.

Este trabajo de investigación inicia con una revisión del estado del arte de los modelos estocásticos empleados para la estimación del precio del petróleo en sus referencias WTI y BRENT, con el fin de conocer y familiarizarse con los conceptos matemáticos de estos procesos estocásticos, identificar su incidencia en el mundo industrial en el cual el petróleo es el protagonista y por último, exponer los modelos estocásticos que se van a estudiar en este proyecto.

En la segunda parte de este trabajo se llevará a cabo la simulación del proceso estocástico ARIMA, buscando establecer su eficiencia en cuanto a la precisión en su estimación de precios del petróleo. Adicionalmente, se pretende adecuar este modelo estocástico con los modelos ARCH y GARCH, con el fin de corregir problemas de volatilidad dentro del modelo principal y observar posibles mejoras en los estadísticos de ajustes o de regresiones espurias.

De igual manera, se realizará el procedimiento mencionado anteriormente empleando el modelo estocástico Movimiento Geométrico Browniano (GBM), adicionándole los modelos de Reversión a la Media y Saltos Poisson, con el objetivo de evaluar las posibles afectaciones que se presenten en el modelo principal.

Por último, se pretende comparar los modelos propuestos para identificar cuál de ellos logra estimar con mayor precisión futuros precios del petróleo, analizando los resultados obtenidos en cada modelamiento. Para llevar a cabo cada uno de las simulaciones de estos modelos estocásticos, se utiliza el programa de simulación estadístico “*R sthatics*”, con el fin de obtener una simulación en tiempo real y con resultados más exactos.

## TABLA DE CUMPLIMIENTO DE OBJETIVOS

| OBJETIVOS   | LOGRO-REFERENCI                        | PAGINAS                       |
|---|--|-------------------------------|
| Realizar una revisión del estado del arte de los modelos estocásticos empleados para la estimación del precio del petróleo.   | Capítulo 1                             | 15 - 26                       |
| Desarrollar los modelos estocástico ARIMA e Implementar los modelos ARCH y GARCH para modelar la volatilidad del precio del petróleo a partir de una base de datos preseleccionada.                                     | Capítulo 3                             | 34 - 50                       |
| Estimar el modelo de Movimiento Geométrico Browniano (con posible Reversión a la media y con posibles saltos Poisson) para el comportamiento de los precios del petróleo a partir de una base de datos preseleccionada. | Capítulo 4                             | 51 - 62                       |
| Evaluar la eficiencia de los modelos utilizados con base en la diferencia entre los resultados obtenidos y los datos originales para el pronóstico en los precios observados en el mercado internacional del petróleo.  | Capítulo 3<br>Capítulo 4<br>Capítulo 5 | 34 – 50<br>51 – 62<br>63 - 64 |

## 1. REVISIÓN DEL ESTADO DEL ARTE

Desde el año 1970 se ha generado la necesidad de usar modelos matemáticos que permitan la fijación de precios en diferentes productos o derivados financieros, permitiendo a las empresas o instituciones financieras crear nuevos portafolios económicos para posibles futuras inversiones, teniendo en cuenta desde su presente las tasas de interés y sus porcentajes de riesgo.

El éxito o fracaso de un proyecto en el que esté involucrado el petróleo depende en gran medida del modelo matemático que se emplee y que describa mejor el movimiento o comportamiento de sus precios durante un período de tiempo determinado. Lograr el adecuado modelamiento de la dinámica del precio del petróleo (variable financiera) depende de la teoría de procesos estocásticos, los cuales son muy útiles en el transcurso del modelamiento en tiempo continuo, característica esencial para la previsión del precio del petróleo<sup>1</sup>.

Los procesos estocásticos son métodos o formas de cuantificar las relaciones dinámicas de secuencias de eventos o sucesos aleatorios<sup>2</sup>. Evidentemente, el precio del petróleo es una variable o suceso aleatorio, ya que su valor actual existente es incierto, y puede tomar cualquier valor dependiendo de su distribución probabilística y el modelo matemático estocástico que se emplee para su previsión. Adicionalmente, uno de los factores que las grandes multinacionales tienen en cuenta en el análisis financiero para la previsión del precio del petróleo, son los diversos eventos aleatorios que afectarían en gran medida el valor de esta variable, tales como el precio del dólar, la demanda actual del petróleo, oferta actual, capacidad de producción, entre otros.

---

<sup>1</sup> ARREDONDO, Brenda Haydee. Un modelo estocástico para los precios de futuros del petróleo. Trabajo de Grado Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales. México D.F: Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, 2012.

<sup>2</sup> TAYLOR, Howard M. and KARLIN, Samuel. An introduction to stochastic modeling. Third Edition. Academic press, 1998.

Varios autores de libros y artículos coinciden en definir que un proceso o modelo estocástico es un conjunto de variables aleatorias, definidas en un espacio de probabilidad y relacionadas o indexadas por un parámetro determinado. Este conjunto se describe de la siguiente manera:

$$\{X_t : t \in T\}^1 \quad (1)$$

Donde  $X$  es una variable aleatoria, el conjunto  $T$  ( $T \subseteq \mathbb{R}$ ) se le denomina como conjunto de índices,  $t$  varía con el conjunto  $T$  y se define como el parámetro con el que se relaciona  $X$ . Generalmente, el parámetro  $t$  se denomina tiempo.

Al conjunto  $T$  también se le denomina como conjunto paramétrico y éste puede ser continuo o numerable. Si el conjunto paramétrico es numerable, el proceso es denominado proceso en tiempo discreto; mientras que si no es numerable, el proceso se denomina como proceso en tiempo continuo<sup>3</sup>.

Para que un proceso o modelo estocástico esté definido en su totalidad, es indispensable determinar sus variables aleatorias, es decir, se debe establecer e identificar la distribución de probabilidad asociada a cada una de las variables y adicionalmente, la distribución conjunta de todas ellas.

Actualmente, en la literatura y en el mundo empresarial, existen varios modelos estocásticos que son útiles para las evaluaciones y toma de decisiones importantes en varios proyectos financieros. Principalmente, se han desarrollado modelos estocásticos especializados en hacer un excelente pronóstico del precio del petróleo, permitiendo a las grandes empresas productoras de este crudo establecer los escenarios económicos que sean necesarios para determinar sus

---

<sup>3</sup> VITORIANO, Begoña. Modelos y Métodos de Simulación Estocástica: Aplicación en la Valoración de Opciones Financieras. Universidad Complutense Madrid. Facultad de Matemáticas, 2012.

niveles de producción y ventas, políticas de financiamiento, inversiones, capital de trabajo, entre otros aspectos económicos.

Por mencionar algunos de estos modelos estocásticos, se encuentran los siguientes:

- Movimiento Geométrico Browniano.
- Modelos de Reversión a la Media.
- Modelos de dos y tres Factores.
- Modelos de Reversión a la Media con Saltos (Poisson).
- Simulación del Proceso Estocástico de Monte Carlo.
- Modelos AR, MA y ARIMA.
- Modelos ARCH y GARCH.

## **1.1 ANALISIS BIBLIOMETRICO**

El presente análisis bibliométrico se centra en el seguimiento y medición de las publicaciones que contienen las palabras “precio y petróleo” en el título de la publicación o sus equivalentes en inglés “oil and Price”. De tal forma, en un primer momento se realizó una consulta de los trabajos de pregrado y posgrado en los repositorios de las 10 mejores universidades de Colombia, según el escalafón de Webometrics<sup>4</sup>, para evidenciar la frecuencia de proyectos de grado que han trabajado este tema y el nivel académico a que pertenecen, esta primera búsqueda se hizo en español. En un segundo momento, se consultaron 8 bases de datos: 6 multidisciplinarias, 1 especializada en hidrocarburos y 1 especializada en análisis bibliométrico con el objetivo de hacer un conteo de las publicaciones según el tipo (artículo, libro, capítulo, noticia, otros), año de publicación, autor, país de publicación y adscripción del autor.

---

<sup>4</sup> WEBOMETRICS. Ranking Web de Universidades Colombianas. [base de datos en línea]. [consultado 26 de Diciembre de 2015]. Disponible en: [http://www.webometrics.info/es/Latin\\_America\\_es/Colombia](http://www.webometrics.info/es/Latin_America_es/Colombia).

En la Tabla 1 se presenta las 10 mejores universidades de Colombia, 5 de ellas de administración privada e igual número públicas.

**Tabla 1. 10 mejores Universidades de Colombia**

| <b>Universidad</b>                  | <b>Proyecto Pregrado</b> | <b>Esp.</b> | <b>Tesis de Maestría</b> | <b>Tesis de Doctorado</b> | <b>Total</b> |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------|--------------------------|---------------------------|--------------|
| Universidad Nacional de Colombia    | 0                        | 3           | 5                        | 0                         | 8            |
| Universidad de los Andes Colombia   | 11                       | 0           | 4                        | 0                         | 15           |
| Universidad de Antioquia            | 5                        | 1           | 0                        | 0                         | 6            |
| Pontificia Universidad Javeriana    | 1                        | 0           | 2                        | 0                         | 3            |
| Universidad del Valle Cali          | 0                        | 0           | 0                        | 0                         | 0            |
| Universidad Pontificia Bolivariana  | 0                        | 0           | 0                        | 0                         | 0            |
| Universidad Industrial de Santander | 0                        | 0           | 0                        | 0                         | 0            |
| Universidad del Rosario             | 0                        | 0           | 0                        | 0                         | 0            |
| Universidad del Cauca               | 0                        | 0           | 0                        | 0                         | 0            |
| Universidad del Norte Barranquilla  | 0                        | 0           | 0                        | 0                         | 0            |

La Tabla 1 evidencia una divergencia de dos grupos de universidades. El primero está conformado por las 4 primeras universidades según el escalón de Webometrics que a la vez son las únicas que han desarrollado tesis de grado relacionadas con el precio del petróleo. La universidad con más trabajos al respecto es la universidad de los Andes con 15 trabajos de grado, seguido de la Universidad Nacional con 8, la Universidad de Antioquia con 6 y la Pontificia Universidad Javeriana con 3.

Además de la discriminación por nivel educativo se logró observar que los programas más comunes donde se adelantaron estas investigaciones fueron en economía, ingeniería industrial y estadística; vinculados a los programas de ingeniería de petróleos o de gerencia en hidrocarburos no se encontraron trabajos de grado algo inesperado en esta investigación. El segundo grupo de universidades las conforman las que no poseen trabajo sobre el temas

relacionados con el precio del petróleo, entre esta la Universidad Industrial de Santander.

En lo que respecta a bases de datos internacionales se encontró que las noticias de periódicos son las que mayor registro tienen de las palabras “oil price” en el título de la publicación con 142.302 ejemplares encontrados, seguido de los artículos con 28.938, libros 1392, otro tipo de publicaciones (informes, información general, materiales de conferencias, críticas documentos primario, etc.) con 204 y capítulos de libros con 128 registros. La Tabla 2 presenta la división según el tipo de artículo y fuente de búsqueda<sup>5</sup>.

**Tabla 2. Tipos de artículo y fuente de búsqueda**

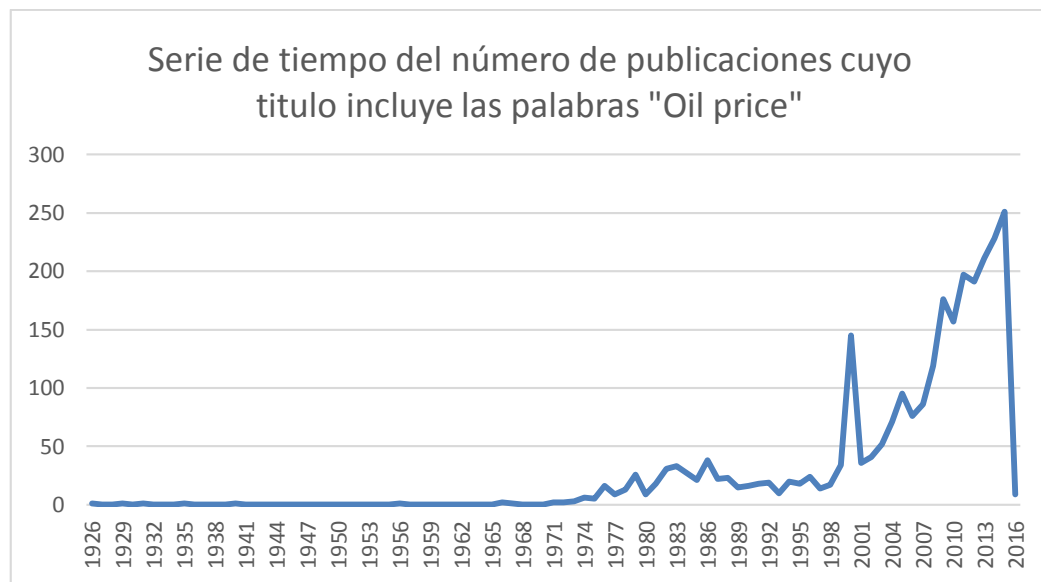
| Base de datos | Noticias | Artículos | Capítulos de libros | Libros | Tesis de doctorado | Otros |
|---------------|----------|-----------|---------------------|--------|--------------------|-------|
| AAPG JOURNALS | 28       | 2         | 0                   | 0      | 0                  |       |
| CRCNETBASE    | 0        | 0         | 10                  | 0      | 0                  | 0     |
| EBSCO HOST    | 8415     | 8102      | 0                   | 2      | 0                  | 463   |
| JSTOR         | 0        | 375       | 3                   | 0      | 0                  | 0     |
| KNOVEL        | 0        | 0         | 1345                | 0      | 0                  | 0     |
| PROQUEST      | 133859   | 17424     | 1                   | 105    | 204                | 19619 |
| SCOPUS        | 0        | 1990      | 33                  | 5      | 0                  | 631   |
| SCIENCEDIRECT | 0        | 1046      | 0                   | 16     | 0                  | 1     |
| TOTAL         | 142302   | 28939     | 1392                | 128    | 204                | 20714 |

La anterior tabla es de utilidad como guía en la búsqueda de la información relacionada con el tema de interés. Resalta de allí las bases de datos PROQUEST, EBSCO HOST y SCIENCEDIRECT por tener el mayor número de artículos evaluados por expertos.

<sup>5</sup> Hay que aclarar que es posible que haya un múltiple conteo ya que algunas bases de datos tienen los mismos suministros de información.

A partir de la base de datos SCOPUS se presentan una descripción más amplia sobre las publicaciones (artículos, libros y capítulos de libros excluyendo noticias) que poseen en el título las palabras “Oil Price”, esta base de datos permite obtener un conteo de registros por año, tal como se presenta en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

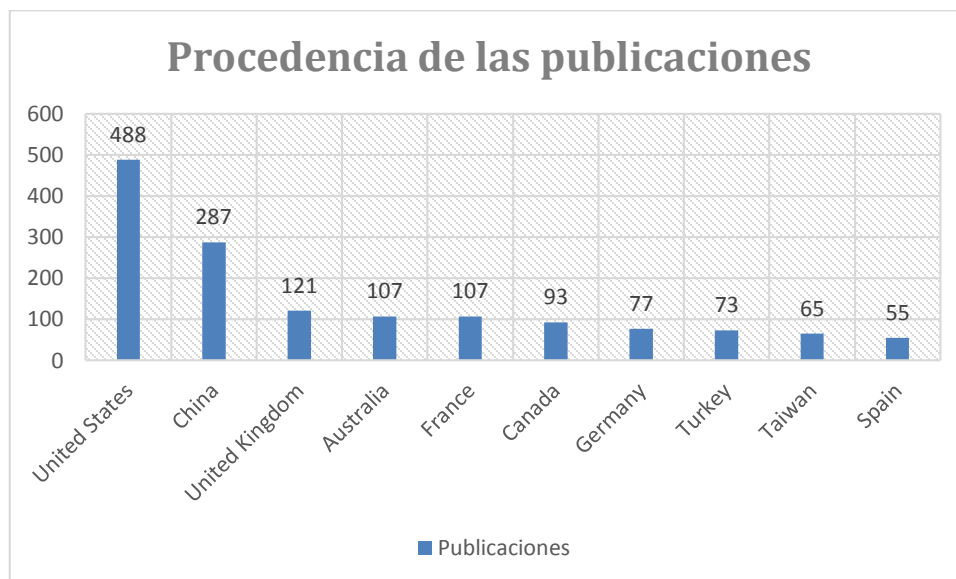
**Figura 1. Serie de tiempo del análisis bibliométrico**



La Figura 1 presenta el número de coincidencias por año de publicación de los artículos que llevan las palabras “oil price”. Es notorio que en la época de 1970 comienza la serie a aumentar su nivel y logra su punto más alto en el 2015, el 2016 presenta solo 6 publicaciones en tan solo pocos días.

Otro indicador relevante es la procedencia de las publicaciones presente en la Figura 1, en este indicador sobresalen las potencias económicas como el origen de la mayor cantidad de documentos relacionados con el tema: Estados Unidos con 488, China con 287 y Reino Unido con 121 son los tres principales.

**Figura 2. Origen de publicaciones consultadas**



La Tabla 3 muestra las 10 organizaciones de mayor productividad en el tema, aunque en la tabla se encuentran solo universidades el listado general incluyen otro tipo de organizaciones como el Banco mundial.

**Tabla 3. 10 Organizaciones de mayor productividad a nivel mundial**

| Organización   | Publicaciones |
|--|---------------|
| Deakin University  | 20            |
| Institute of Policy and Management Chinese Academy of Science          | 20            |
| Academy of Mathematics and System Sciences Chinese Academy of Sciences | 19            |
| City University of Hong Kong   | 19            |
| Drexel University  | 16            |
| Beijing Institute of Technology  | 16            |
| Western Sydney University  | 16            |
| Massachusetts Institute of Technology                                  | 16            |
| University of Calgary  | 15            |
| China University of Petroleum - Beijing                                | 14            |

Para finalizar se presenta un listado de los autores con mayor número de publicaciones sobre el tema del precio del petróleo.

**Tabla 4. Autores con mayor número de publicaciones**

| <b>Autores</b> | <b>Publicaciones</b> |
|----------------|----------------------|
| De Guzman, D.  | 19                   |
| Kilian, L.     | 19                   |
| Wang, S.       | 18                   |
| Hammoudeh, S.  | 17                   |
| Lai, K.K.      | 17                   |
| Fan, Y.        | 15                   |
| Fletcher, S.   | 13                   |
| Nguyen, D.K.   | 13                   |
| Wei, Y.M.      | 12                   |
| Narayan, P.K.  | 12                   |
| Ratti, R.A.    | 12                   |
| Manera, M.     | 11                   |
| Zhang, X.      | 10                   |
| Gupta, R.      | 10                   |
| Sadorsky, P.   | 10                   |
| Zhang, Y.J.    | 10                   |
| Radler, M.     | 10                   |
| Yu, L.         | 10                   |
| He, K.         | 10                   |

## 1.2 ANALISIS PRELIMINAR DE LITERATURA

A continuación, se muestra un breve análisis de algunos artículos que han presentado algunos autores en el que proponen los modelos que mejor describen el comportamiento en los precios del petróleo.

Los autores Mohammed A. Aba Oud y Joanna Goard en su artículo titulado “Stochastic Models for Oil Prices and the Pricing of Futures on Oil” (Modelos Estocásticos para los precios del petróleo y Precios futuros del Petróleo) <sup>6</sup> investigan y comparan el desempeño de varios modelos estocásticos de difusión de un factor en su capacidad para capturar el comportamiento de los precios del petróleo en su referencia BRENT. Adicionalmente, proponen nuevos modelos en los cuales potencian el término de difusión en sus tres cuartas partes, los cuales superan el desempeño de los modelos tradicionalmente usados en este tipo de pronósticos.

Algunos de los modelos que los autores de este artículo indagaron y estudiaron son los siguientes:

- Movimiento Geométrico Browniano.
- Proceso de reversión a la media.
- Proceso de reversión a la media con saltos Poisson
- Nuevos modelos propuestos potencializando en tres cuartas partes el término de difusión.

La técnica de estimación que emplearon fue el método generalizado de momentos (GMMs), la cual es una técnica econométrica genérica de estimación de parámetros de una ecuación de regresión, desarrollada como una extensión del método de momentos. Su aplicación es recomendada cuando hay sospecha de

---

<sup>6</sup> ABA, Mohammed & GOARD, Joanna. Stochastic Models for Oil Prices and the Pricing of Futures on Oil. En: Applied Mathematical Finance, Vol. 22, No. 2 (2015); p.189-206.

problemas de endogeneidad entre las variables explicativas del modelo y el número de momentos es mayor que el número de parámetros a estimar<sup>7</sup>.

Los datos que utilizaron para el desarrollo de este artículo fueron obtenidos de la U.S. Energy Information Administration. Los autores lograron concluir que al usar un modelo en el que se potencialice el término de difusión en sus tres cuartas partes y adicionalmente se involucre la propiedad de reversión a la media, supera los demás modelos matemáticos propuestos, logrando un mejor desempeño en su capacidad para el montaje de datos del mercado y pronosticando precios futuros del petróleo en los próximos 5 días siguientes, convirtiéndose así en una guía útil para los comerciantes de este gremio.

Por otra parte, el autor Mansoor Hamood Al-Harthy en su artículo titulado “Stochastic Oil Price Models: Comparison and Impact” (Modelos Estocásticos para el Precio del Petróleo: Comparación e Impacto)<sup>8</sup>, pretende explorar el impacto que tienen los tres modelos estocásticos más empleados (Movimiento Geométrico Browniano, Proceso de Reversión a la media, Proceso de Reversión a la media con saltos) en este tipo de pronósticos. Adicionalmente, el autor investiga el impacto que se genera en la variación de los parámetros de entrada de estos tres modelos.

El autor de este artículo quiere saber si los tres modelos estudiados tienen el mismo impacto en la incertidumbre de salida del valor presente neto del proyecto a estudiar. De no ser así, busca identificar cuál de ellos tiene mayor impacto y porqué; también desea buscar cuales parámetros tienen un mayor impacto en los resultados arrojados por los modelos si el factor incertidumbre se incluye en los

---

<sup>7</sup> AL-HARTHY, Mansoor. Stochastic Oil Price Models: Comparison and Impact. En: The Engineering Economist, Vol. 52 (2007); p.269-284.

<sup>8</sup> ABDULLAH Rana & SHABRI, Ani. Daily Crude Oil Price Forecasting Model Using Arima: Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic and Support Vector Machine. En: *American Journal of Applied Sciences*, Vol. 11, No. 3 (2014); p. 425-432.

parámetros de entrada de cada uno de los modelos a estudiar, y adicionalmente si uno de los parámetros de entrada de cada modelo no puede ser estimado adecuadamente, esto reduce de manera significativa la calidad en los resultados que presenten cada uno de los modelos estocásticos.

Con el fin de desarrollar este artículo el autor hace sus estudios sobre un campo costero petrolero integrado hipotético, con submodelos de reserva y producción. Aunque el modelo de este campo hipotético es un modelo estocástico totalmente integrado, todos los factores hasta el precio del petróleo se mantienen constantes en los experimentos con el fin de ver claramente el impacto de los modelos de precios en el valor presente neto del proyecto. El autor logra concluir que el modelo estocástico Proceso de reversión a la media con saltos es el modelo que mejor desempeño tiene frente a los otros modelos, los cuales mostraron no poder capturar el verdadero nivel de incertidumbre del proyecto.

Por último, los autores Rana Abdullah y Ani Bin Shabri en el artículo titulado “Daily Crude Oil Price Forecasting model using ARIMA, Generalized Autorregressive Conditional Heteroscedastic and Support Vector Machines”, proponen una nueva modelo para pronosticar mejor el precio del petróleo que se llama Support Vector Machines.

Para llevar a cabo de una forma óptima el estudio, los autores decidieron tomar como base los datos de precios del petróleo en su referencia WTI. Para evaluar el desempeño de este nuevo modelo, se emplean dos medidas: el RMSE y MAE, los cuales se utilizan para comparar el rendimiento del modelo propuesto y el rendimiento del modelo ARIMA y los métodos GARCH. A través de estas medidas los autores pretenden identificar cuál de ellos es más eficiente en pronosticar el precio del petróleo. Los autores de este artículo logran concluir que el método propuesto por ellos supera a los otros dos modelos en términos de precisión en los

pronósticos, al obtener un error de pronóstico menor que los modelos ARIMA y GARCH.

Estos artículos muestran como varios autores proponen nuevos modelos o técnicas de previsión, o siguen utilizando los modelos que tradicionalmente se usan y se conocen, con el fin de establecer cuál de ellos logra hacer un pronóstico en los precios del petróleo más precisa, que se ajuste a las condiciones del mercado y con bajo error de pronóstico. Esto se debe al gran interés que hoy el mundo manifiesta hacia el valor económico que puede generar el petróleo y toda su industria.

Para el desarrollo de esta monografía, se estudiarán los modelos estocásticos Movimiento Geométrico Browniano y Modelos ARIMA. Adicionalmente, a cada uno de estos modelos se les incluirá los conceptos y parámetros de los modelos ARCH y GARCH para ARIMA, y el modelo de reversión a la media y proceso de saltos Poisson para el Movimiento Geométrico Browniano.

### 1.3 CONFORMACIÓN DE MODELOS AR, MA Y ARIMA

**1.3.1 Proceso autorregresivo (AR):** El proceso estocástico AR es un modelo de series temporales donde la variable dependiente se explica con los rezagos de sí misma en (p) períodos junto con una perturbación actual aleatoria. El orden del modelo se relaciona al número de variables regresoras usadas.

El modelo AR (1) o AR de orden uno se expresa:

$$(y_t - \delta) = \alpha_1(y_{t-1} - \delta) + \mu_t^9 \quad (2)$$

---

<sup>9</sup> GUJARATI, Damodar y PORTER, Dawn. *Econometría*. (Quinta Ed.) México: Mc Graw Hill, 2010. 946 p

Donde  $y_t$  es una variable aleatoria en el tiempo  $t$ ,  $\delta$  es la media de  $Y$ , lo cual garantiza la estacionariedad<sup>10</sup> de la serie,  $\alpha_1$  es el cambio de  $y_t$  ante cambios en  $y_{t-1}$  y  $\mu_t$  es el error aleatorio no correlacionado con  $y_t$ , con media cero, varianza constante, independiente e idénticamente distribuido (Ruido blanco). De similar forma un modelo AR (2) es:

$$(y_t - \delta) = \alpha_1(y_{t-1} - \delta) + \alpha_2(y_{t-2} - \delta) + \mu_t \quad (3)$$

Es decir que la variable  $y_t$  depende de los valores en dos periodos anteriores  $y_{t-1}$  y  $y_{t-2}$ .

**1.3.2 Proceso de medios móviles (MA):** El proceso MA es un mecanismo para generar  $y_t$  a partir de un promedio ponderado de perturbaciones aleatorias en  $q$  periodos. Similar al modelo AR, el orden del modelo MA depende de rezagos, pero en este caso los rezagos son de las perturbaciones. La formalización de este modelo es:

$$y_t = \varepsilon + \beta_1\mu_{t-1} + \beta_0\mu_t \quad (4)$$

Siendo  $\varepsilon$  una constante y  $\mu_t$  es el termino del error estocástico. Un MA (2) estará definido por:

$$y_t = \varepsilon + \beta_0\mu_t + \beta_1\mu_{t-1} + \beta_2\mu_{t-2} \quad (5)$$

---

<sup>10</sup> La estacionariedad de la serie es un requisito indispensable para la realización de estos modelos, aquí se maneja el concepto desde una visión no estricta, por eso se considera que una variable es estacionaria si tiene promedio cero, varianza constante y covarianza cero. Ibid. Pag. 740

**1.3.3 Proceso autorregresivo integrado de promedios móviles (ARIMA):** Un proceso ARIMA (p, d, q) es una combinación de un proceso AR (p) y MA (q) diferenciado (d) veces hasta obtener una serie estacionaria. Su expresión estadística es:

$$\nabla y_t = \varepsilon + \alpha_1(y_{t-1} - \delta) + \beta_1\mu_{t-1} + \beta_0\mu_t \quad (6)$$

Donde  $\nabla y_t$  es la serie  $y_t$  diferenciada una vez y logrando estacionariedad.

**1.3.4 Estimación de los modelos ARIMA:** La estimación del modelo ARIMA se puede realizar de forma arbitraria, o sea fijando los parámetros  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\varepsilon$  subjetivamente, pero es preferible usar un método objetivo y estadísticamente apropiado<sup>11</sup>. Comúnmente se usa el método de máxima verosimilitud en las estimaciones del ARIMA, usando la función de densidad conjunta de los errores aleatorios que se suponen que son distribuidos de forma normal con media cero y varianza constante. Dicha función de verosimilitud debe maximizarse con respecto a los parámetros de (6). El método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) también es usado para la predicción de series de tiempo, pero en menor medida que el método de máxima verosimilitud.

---

<sup>11</sup> GUERRERO, Victor. Análisis Estadístico de series de tiempo económicas. México: Thomson, 2003. p. 135.

**1.3.5 Vectores autorregresivos (ARCH, GARCH):** En algunos casos la heterocedasticidad de los errores es un problema en la estimación de los modelos estocásticos, presente en series no estacionarias, en especial cuando el origen es el tiempo de la variable, o sea que la variabilidad de los errores presentes depende de los errores del pasado. En estos casos se suele usar el modelo de heterocedasticidad condicional autorregresivo (ARCH) elaborado por Robert Engle<sup>12</sup>. El objetivo de este método es estimar la ecuación:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \quad (7)$$

En (7) se define a la varianza del error en términos de una constante y la volatilidad del error en el periodo anterior. Tomando en cuenta esta especificación se puede obtener estimadores más eficientes del modelo original especificado que puede es:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t \quad (8)$$

Las estimaciones de los parámetros en (7) y (8) se hacen conjuntamente y, por lo general, por medio de máxima verosimilitud. En el caso donde el error dependa de volatilidad de varios períodos y no solo de uno o dos períodos, se está frente al caso de un modelo de heterocedasticidad condicional autorregresiva generalizada (GARCH). El modelo GARCH (1,1) es:

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \lambda_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (9)$$

La parte derecha de (9) está compuesta por una constante, la volatilidad del último periodo y la varianza del último periodo.

---

<sup>12</sup> PINDYCH, Robert y RUBINFELD, Daniel L. *Econometría: modelos y pronósticos*. Cuarta Edición. Traducido por Jorge Alberto Velázquez Arellano. México: McGraw Hill, 2001. p. 299.

## 1.4 MOVIMIENTO GEOMÉTRICO BROWNIANO

El Movimiento Geométrico Browniano es un proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (10)$$

El término  $\mu S_t dt$  determina la tendencia de la trayectoria de la variable a modelar ( $S_t$  o valor del precio del petróleo<sup>13</sup>) y el término  $\sigma S_t dW_t$  controla el efecto de “ruido aleatorio” que se presente en la trayectoria de este proceso estocástico. La variable  $dW_t$  representa el proceso Wiener que se caracteriza por: primero, ser un proceso de Markov, lo que implica que la distribución de probabilidad de todos los valores futuros del proceso dependen únicamente del valor actual, no siendo afectada por los valores pasados. Segundo, tienen incrementos independientes, y tercero, las variaciones de un proceso siguen una distribución normal<sup>14</sup>.

El proceso Wiener está definido como:

$$dW = \varepsilon \sqrt{dt} \quad (11)$$

donde  $\varepsilon$  es una variable aleatoria con una distribución  $N(0,1)$  y  $dt$  es el paso de tiempo de un precio a otro. La solución de la ecuación diferencial (10) es<sup>15</sup>:

$$S_t = S_0 e^{((\mu - \sigma^2)t + \sigma W_t)} \quad (12)$$

---

<sup>13</sup> YANG, Zhijun. Geometric Brownian Motion Model in Financial Market.

<sup>14</sup> MASCAREÑAS, Juan. Procesos estocásticos: El proceso de Wiener. Universidad Complutense de Madrid. 2008.

<sup>15</sup> OKSENDAL, Bernt. Stochastic differential equations: an introduction with applications. 5th Edition. Springer Science & Business Media, 2013, 62-63 p.

Donde  $S_0$  es el valor del precio inicial del conjunto de datos de precios que se utilizarán para realizar este estudio y los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes.

Ahora bien, la ecuación (10) puede ser expresada en tiempo discreto así<sup>16</sup>:

$$S_t = S_{t-1} + \mu S_{t-1} + \sigma S_{t-1} \varepsilon_t \quad (13)$$

Para la estimación de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  se tiene en cuenta el método de máxima verosimilitud<sup>17</sup>.

**1.4.1 Movimiento Geométrico Browniano con Reversión a la Media:** El Movimiento Geométrico Browniano al seguir un proceso Wiener, en el momento de su modelamiento tiene como consecuencia que los incrementos que se presenten en los precios del petróleo sean independientes entre sí. Es decir, la trayectoria histórica del precio del petróleo que se ha utilizado para estimar su valor actual, es irrelevante para la predicción de la trayectoria futura de los precios del petróleo, sobre todo en los precios que se desean modelar a largo plazo.

El proceso de reversión a la media, también conocido como el proceso de *Ornstein-Uhlenbeck*, permite que al modelar los precios de *commodities*, estos se reviertan a largo plazo a su costo marginal de producción, evitando que estos presenten incrementos o comportamientos abruptos que no van acordes con la realidad. Este proceso está influenciado por una fuerza conocida como tasa de reversión a la media.

---

<sup>16</sup> CAMPBELL, Wallace. Valuation of timberland under price uncertainty. Thesis Doctor of Philosophy Applied Economics. South Carolina: Clemson University, 2013, 7 p.

<sup>17</sup> TEKA, Kubrom Hisho. Parameter estimation of the Black-Scholes-Merton model. Thesis Master of Science. Kansas: Kansas State University, 2013. 25-28 p.

El proceso de Reversión a la Media sigue la siguiente ecuación diferencial<sup>18</sup>:

$$dS_t = \eta(\bar{S} - S_t) dt + \sigma dW_t \quad (14)$$

Donde  $\eta$  es la velocidad o tasa de reversión y  $\bar{S}$  es el nivel “normal” de  $S_t$ , es decir, el nivel al cual  $S_t$  tiende a revertir. Los demás términos de la ecuación cumplen la misma función que los del proceso de Movimiento Geométrico Browniano.

La solución analítica de la ecuación (14) es:

$$S_t = S_0 e^{-\eta t} + \bar{S}(1 - e^{-\eta t}) + e^{-\eta t} \int_0^t \sigma e^{\eta t} dW_t \quad (15)$$

donde  $\bar{S}$ ,  $\sigma$  y  $\eta$  son constantes.<sup>19</sup>

Ahora bien, si se considera que la volatilidad del precio del *commoditie* está ligada al precio entonces la ecuación (14) se puede reescribir así:

$$dS_t = \eta(\bar{S} - S_t) dt + \sigma S_t dW_t \quad (16)$$

Esta ecuación es conocida como el proceso Geométrico de *Ornstein-Uhlenbeck*. Así como el Movimiento Geométrico Browniano, la ecuación (16) puede ser expresada en tiempo discreto así:

$$S_t = S_{t-1} + \eta(\bar{S} - S_{t-1}) + \sigma S_{t-1} \varepsilon_t \quad (17)$$

---

<sup>18</sup> DIXIT, Avinash K and PINDYCK, Robert S. Investment under uncertainty. New Jersey, Princeton university press, 1994. 74 p.

<sup>19</sup> FOUQUE, Jean-Pierre; PAPANICOLAOU, George and SIRCAR, K. Ronnie. Mean-reverting stochastic volatility. International Journal of theoretical and applied finance, 2000, vol. 3, no 01, p. 101-142.

Para la estimación de los parámetros de la ecuación (17), se utiliza el criterio de máxima verosimilitud, del cual se genera el siguiente sistema de ecuaciones<sup>20</sup>:

$$A - E(1 - \eta\Delta t) - \eta\bar{S}\Delta tB = 0 \quad (18)$$

$$C - B(1 - \eta\Delta t) - \eta\bar{S}\Delta tD = 0 \quad (19)$$

A partir de (18) y (19) se despejan los parámetros de interés, obteniendo:

$$\hat{\eta} = \frac{ED - B^2 - AD + BC}{(ED - B^2)\Delta t} \quad (20)$$

$$\bar{S} = \frac{A - E(1 - \eta\Delta t)}{\eta B\Delta t} \quad (21)$$

Los estimadores  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , y  $E$  se definen como:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^N \frac{S_i S_{i-1}}{(S_{i-1})^2}; \quad B = \sum_{i=1}^N \frac{S_{i-1}}{(S_{i-1})^2}; \quad C = \sum_{i=1}^N \frac{S_i}{(S_{i-1})^2}; \\ D &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{(S_{i-1})^2}; \quad E = \sum_{i=1}^N \left( \frac{S_{i-1}}{S_{i-1}} \right)^2 \end{aligned} \quad (22)$$

donde  $N$  es el número total de datos de los precios del petróleo a estudiar. El parámetro  $\sigma$  se obtiene en términos de los parámetros calculados en (20) y (21) mediante la ecuación:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=1}^N \left( \frac{S_i - S_{i-1} - \hat{\eta}(\bar{S} - S_{i-1})\Delta t}{S_{i-1}} \right)^2} \quad (23)$$

<sup>20</sup> PALACIO, Sebastián. Análisis, Descripción y Simulación de Modelos Estocásticos de Tasas de Interés: Un acercamiento desde las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas. Medellín: Universidad EAFIT, 2009. 8-10 p.

**1.4.2 Movimiento Geométrico Browniano con saltos Poisson:** El proceso de salto se define como un tipo de proceso estocástico, el cual tiene movimientos discretos que se denominan “saltos”. El movimiento Geométrico Browniano tradicional presenta pequeños movimientos continuos, lo cual representa su gran diferencia frente al proceso de salto<sup>21</sup>. El proceso de salto más conocido en la literatura es el proceso de distribución Poisson estándar<sup>22</sup>.

En algunas ocasiones, los precios de algunos *commodities* se ven afectados por factores externos periódicamente o éstos siguen algún tipo de distribución. El proceso de saltos Poisson se adapta al Movimiento Geométrico Browniano, con el fin de que este último se ajuste a algunas situaciones más reales en el mercado. La ecuación diferencial estocástica que describe este nuevo proceso es la siguiente:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t + \delta dN_t \quad (24)$$

La solución analítica de la ecuación (24) es:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right) (1 - \delta)^{N_t} \quad (25)$$

Así mismo, la ecuación (24) puede ser expresada en tiempo discreto de la siguiente manera:

$$S_t = S_{t-1}(1 + \mu + \sigma \varepsilon_t + \delta N_t) \quad (26)$$

---

<sup>21</sup> YANG, Zhijun, et al. Geometric Brownian Motion Model in Financial Market.

<sup>22</sup> MONTGOMERY, Douglas C., et al. Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería. CATIE, Turrialba (Costa Rica), 2006.

Donde  $\delta$  es la tasa de fracción del proceso y  $N_t$  representa una distribución Poisson dominada por la siguiente ecuación:

$$P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (27)$$

Para la estimación de los parámetros, cabe resaltar que el factor  $\lambda$  expresado en la ecuación (27) simboliza el número promedio de saltos que se presentan en un intervalo de tiempo determinado, expresándose de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{\text{Número de Saltos}}{\text{Intervalo de Tiempo}} \quad (28)$$

El parámetro  $\delta$  se estima a partir de una distribución normal con una media y desviación estándar determinadas.

## 2. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA DE LOS DATOS

En esta parte se dará comienzo a la descripción de los datos del precio del petróleo con referencia BRENT en las fechas 24 de Julio de 1988 a 31 de Diciembre de 2015 y WTI (referencia para Colombia) en las fechas 5 de Abril de 1988 a 31 de Diciembre de 2012. Lo primero que se presentará será la estadística descriptiva de las series, para luego dar paso al proceso de selección y estimación de los modelos estocásticos.

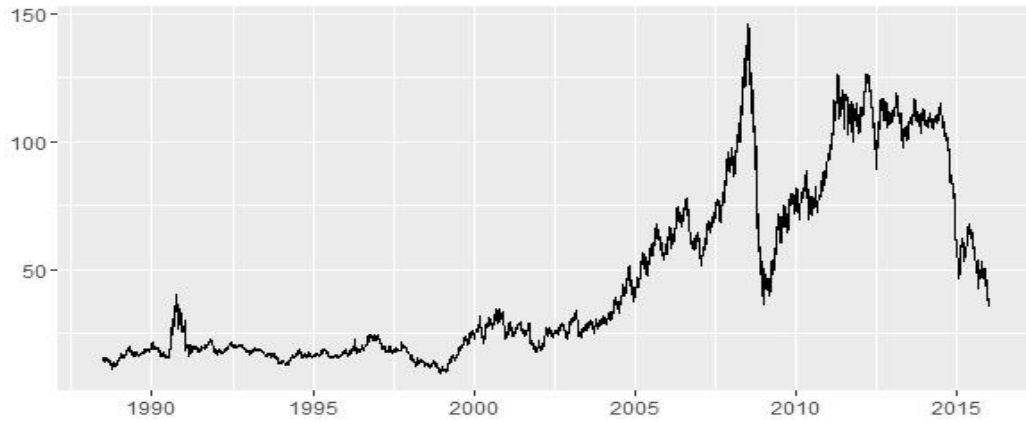
Tabla 5. Estadística Descriptiva

| Referencia | Rango  | Mínimo | Máximo | Media   | Desviación estándar | N    |
|------------|--------|--------|--------|---------|---------------------|------|
| BRENT      | 136,44 | 9,64   | 146,08 | 46,5742 | 34,81847            | 7010 |
| WTI        | 134,57 | 10,72  | 145,29 | 45,0703 | 30,97493            | 6910 |

En la Tabla 5 se observa que el precio del petróleo en los últimos 27 años ha tenido un rango de 136 dólares en el caso de la referencia BRENT y 134 para la referencia WTI. En ambos casos el valor mínimo se presentó el 10 Diciembre de 1998 causado por una contracción de la demanda del Este asiático y un invierno cálido<sup>23</sup> llevando al precio de este insumo a menos de 11 dólares por barril. En oposición, aproximadamente 10 años después se obtuvieron los precios más altos del petróleo, el 3 de Julio de 2008 alcanzando los 145 dólares por barril en el caso del WTI y 146 para el caso BRENT.

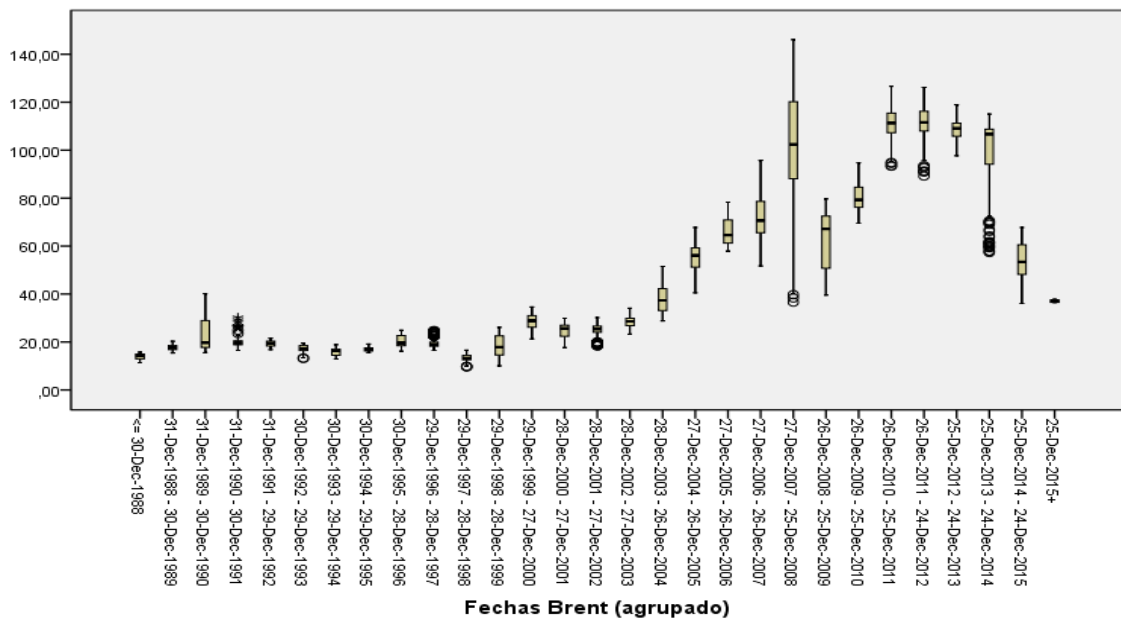
<sup>23</sup> EL PAIS. Madrid, 8 de Diciembre de 1998

**Figura 3. Precios de BRENT 1988-2015**



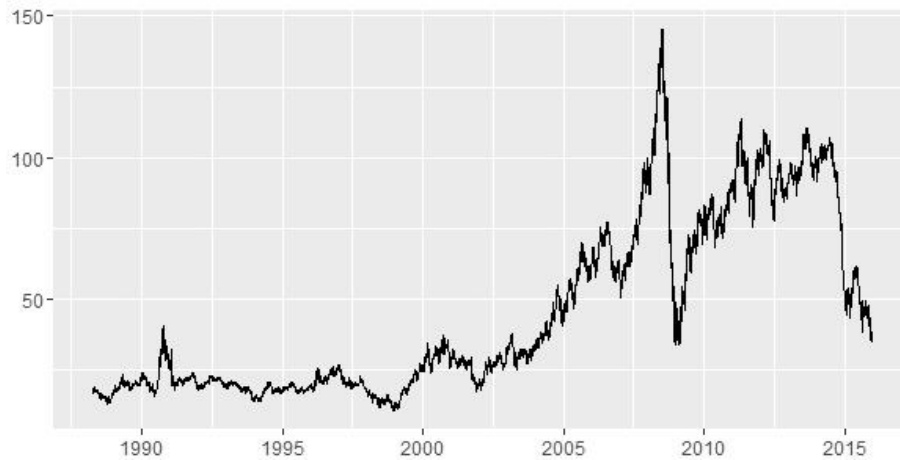
La Figura 3 presenta el comportamiento del precio del petróleo en su referencia BRENT. Se observa que luego de la caída de Diciembre de 1988 los precios se han mantenido al alza hasta el 2008 donde llegó a su pico para luego descender, en menos de medio año, a por debajo de 50 dólares el barril.

**Figura 4. Diagrama de cajas del precio del petróleo referencia BRENT por años**



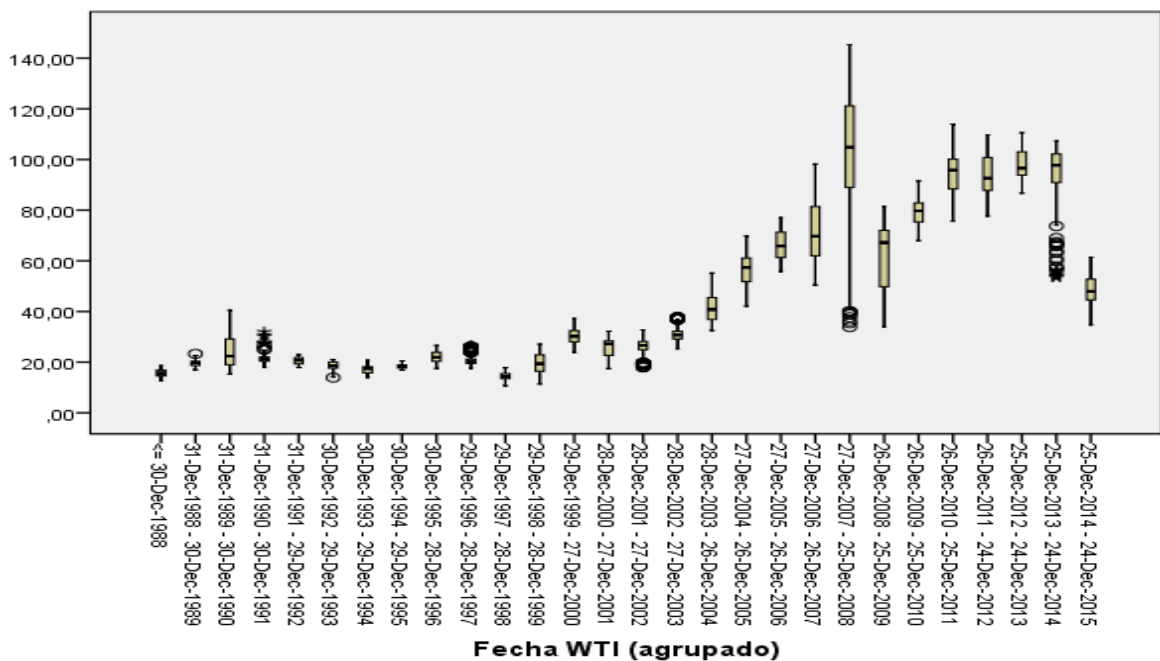
La Figura 4 analiza la serie por décadas a través de un diagrama de cajas donde se resalta la gran variabilidad de los años 2007, 2008, 2009 y 2014. Entre estos años el 2008 fue el de mayor variabilidad.

**Figura 5. Precio del WTI 1988-2015**



En la Figura 5 se presenta el precio del petróleo de referencia WTI, donde es notoria la similitud del comportamiento y la escala al BRENT.

**Figura 6. Diagrama de cajas para el precio del petróleo anual referencia WTI**



La Figura 6 presenta la serie por décadas a través de un diagrama de cajas del WTI. Se evidencia un comportamiento similar a la referencia BRENT, donde la mayor variación la tienen los años 2007,2008, 2009 y 2014.

## 2.1 IMPUTACIÓN DE DATOS FALTANTES A LAS SERIES

En las series expuestas se encontró un gran porcentaje de datos faltantes. En el caso del precio de referencia WTI se encuentran 3162 observaciones sin registro y para la serie BRENT son 3043 observaciones, representando aproximadamente el 30% de la totalidad de los datos. La gran cantidad de datos faltantes es producto del cierre de la bolsa de New York los fines de semana y los días festivos, tal como sucede con la BVC para el caso colombiano.

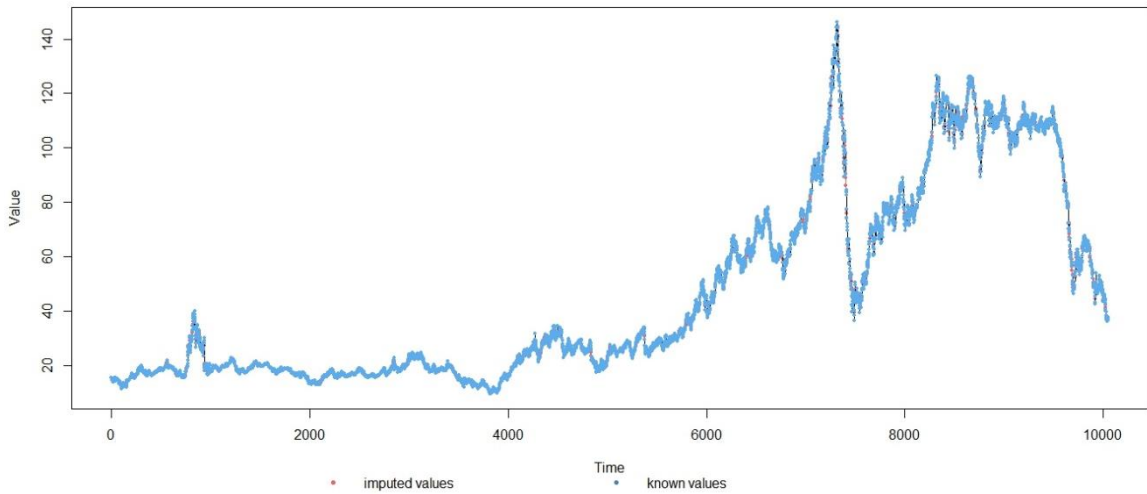
El problema de los datos faltantes para los modelos de series de tiempo está en la imposibilidad de hacer la descomposición estacional de la serie, pues esta se basa en las relaciones de los datos según su periodicidad (semanal, mensual, trimestral entre otras). También un impedimento de trabajar con los datos faltantes se encuentra al estimar los modelos ARIMA con componente estacional conocidos como SARIMA. Por ende, se procede a imputar los datos faltantes por medio de un promedio móvil exponencial con  $k = 6$  . Lo anterior se hizo con ayuda del paquete “imputeTs” de R, debido a que da mayor ponderación a los valores alrededor del dato faltante y menor a las observaciones más lejanas<sup>24</sup>.

La Figura 7 presenta los valores imputados y los valores observados. Es claro que parecen pocos los valores imputados pues, como ya se mencionó estos son el 30% del total de observaciones. Su poca visibilidad en la gráfica se debe a que estos están dispersos y aislados de uno o dos consecutivos.

---

<sup>24</sup> [Citado el 15 de Junio de 2016] Disponible en: <https://cran.r-project.org/web/packages/imputeTS/imputeTS.pdf>

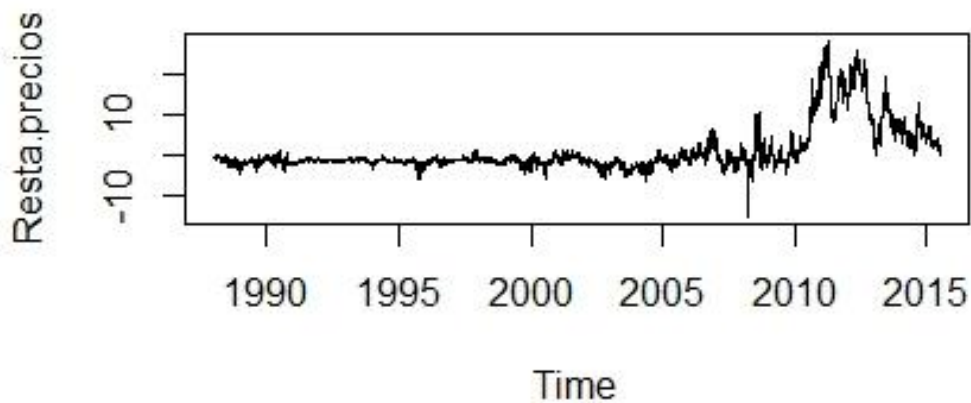
**Figura 7. Valores Imputados**



## 2.2 DIFERENCIA ENTRE EL PRECIO BRENT Y WTI

Al tener los datos imputados aseguramos que ambas series tienen 1032 observaciones cada una. La diferencia mínima entre la referencia BRENT y WTI fue de 14.88 dólares por barril, esto se observó cuando la referencia WTI estuvo por encima del precio BRENT y el valor máximo de la diferencia fue de \$27.88. En promedio la diferencia entre estas referencias fue de \$1.031 con una desviación de 5.64 dólares.

**Figura 8. Diferencia entre Precio BRENT y WTI**

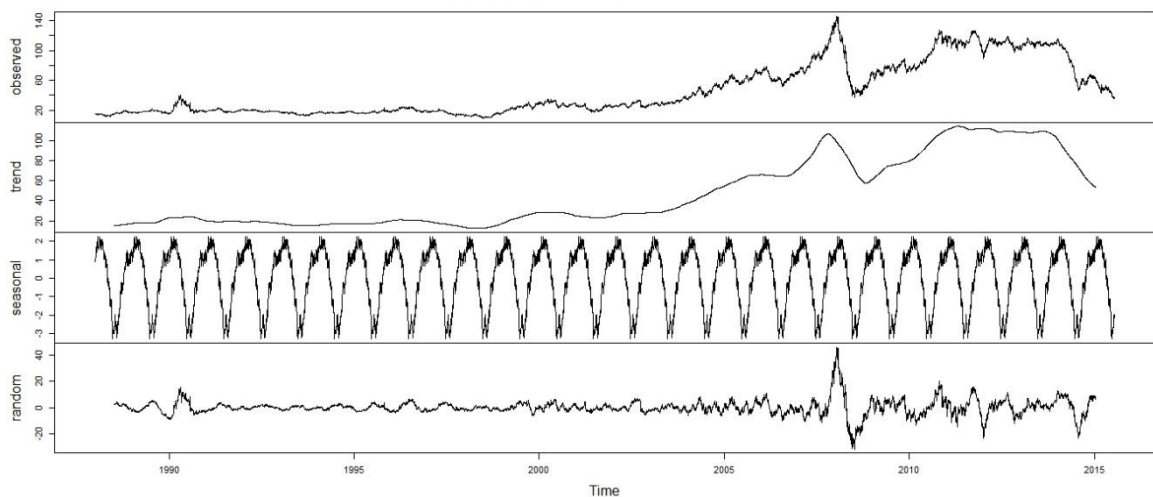


Hay que recordar que se espera que la referencia BRENT tenga un precio mayor que la WTI por la calidad del primero.

### 2.3 DESCOMPOSICIÓN ESTACIONAL

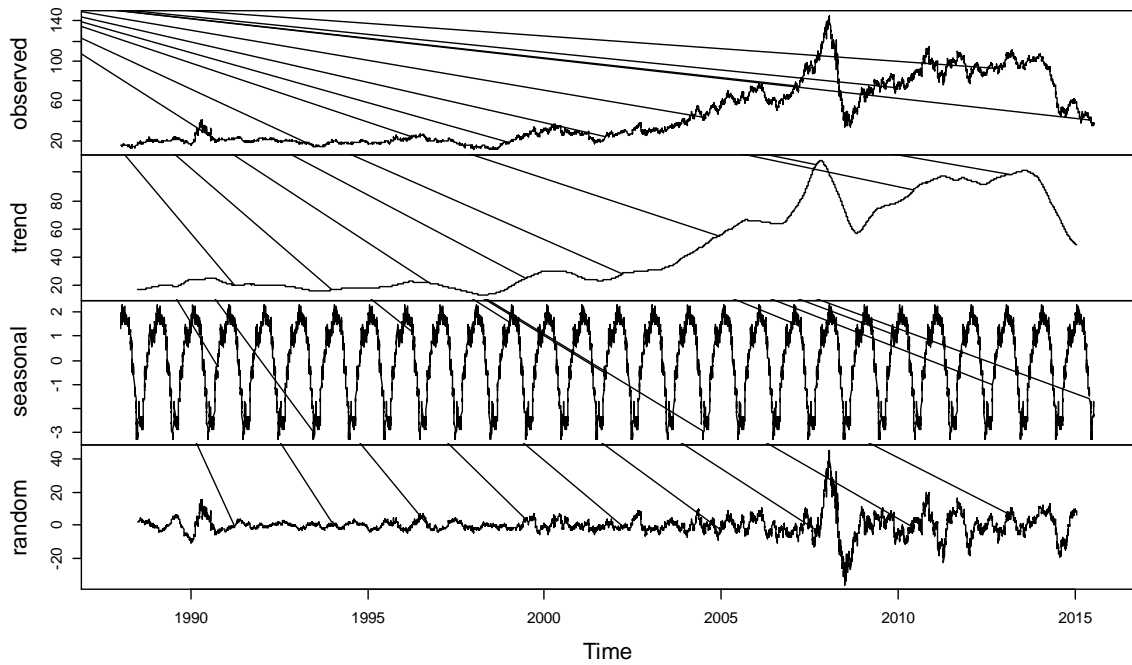
Las series estacionales están conformadas por tres componentes: la tendencia, la estacionalidad y el aleatorio, las cuales conforman la totalidad de la serie. En el caso del precio del petróleo es intuitivo pensar que tiene un componente estacional pues, este commodity está afectado por variables externas, como las condiciones ambientales (lluvias) y los ciclos económicos, ambas estacionales.

**Figura 9. Descomposición de la serie BRENT**



La Figura 9 nos muestra la tendencia, la estacionalidad y el componente aleatorio del precio BRENT.

Figura 10. Descomposición de la serie WTI

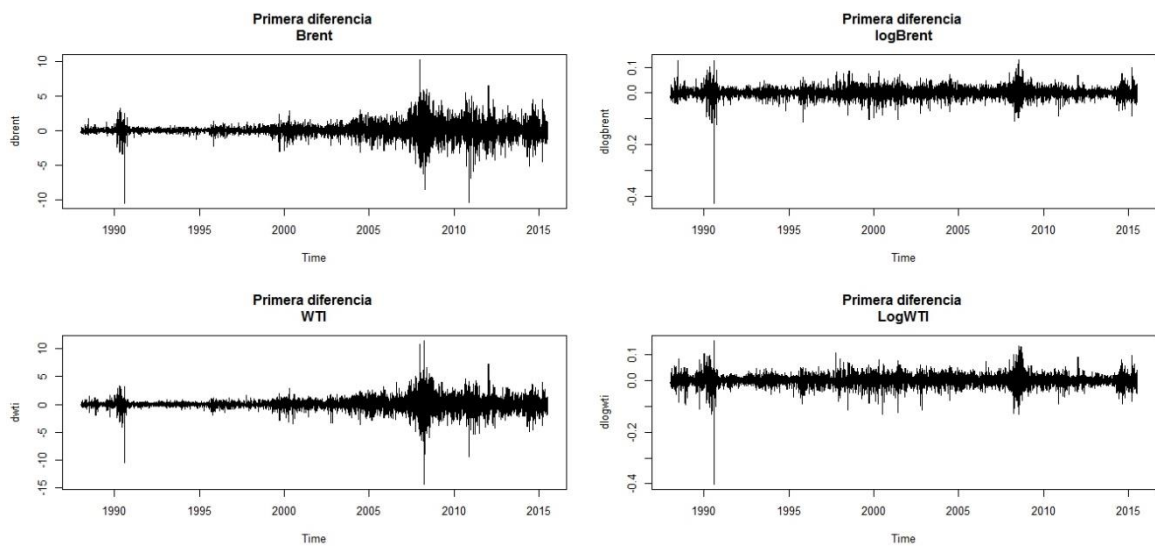


La Figura 9 y la Figura 10 son similares en tendencia, componente estacional y componente aleatorio. Algo que se desprende de lo anterior es que el modelo que describa de mejor forma a una serie será el mismo que lo haga para la otra.

### 3. MODELAMIENTO Y PREDICCIÓN DEL PRECIO DEL PETRÓLEO A PARTIR DE MODELOS ARIMA

Para la conformación de los modelos ARIMA es necesario corroborar la estacionariedad de las series, es decir, es necesario que la serie tenga promedio cero y varianza constante. Como se observó en la Figura 3 y 3 el BRENT y WTI tienen promedios diferentes a cero y evidencian una mayor varianza en las últimas décadas. Por lo cual, no se puede asegurar la estacionariedad y es necesario calcular las primeras diferencias de las series.

Figura 11. Primeras Diferencias



La Figura 11 permite observar las primeras diferencias de los valores originales y el logaritmo de la serie BRENT y WTI. Luego de la transformación, las series oscilan en cero, pero las diferencias de los valores originales presentan mayor variabilidad en algunos tramos de la serie. Por lo que se transformó la serie original con el logaritmo en base 10 antes de calcular las primeras diferencias, reduciendo la variabilidad.

**Tabla 6. Prueba Dikey Fuller**

| <b>Prueba Dickey-Fuller</b>    | <b>Estadístico</b> | <b>p-valor</b> |
|--------------------------------|--------------------|----------------|
| BRENT (original)               | -0.5484            | 0.4415         |
| WTI (original)                 | -0.6288            | 0.4159         |
| Primera diferencia de BRENT    | -76.5974           | 0.01*          |
| Primera diferencia de WTI      | -76.6491           | 0.01*          |
| Primera diferencia de LogBRENT | -134.6568          | 0.01*          |
| Primera diferencia de LogWTI   | -134.6568          | 0.01*          |

\* Significancia al 0.05%

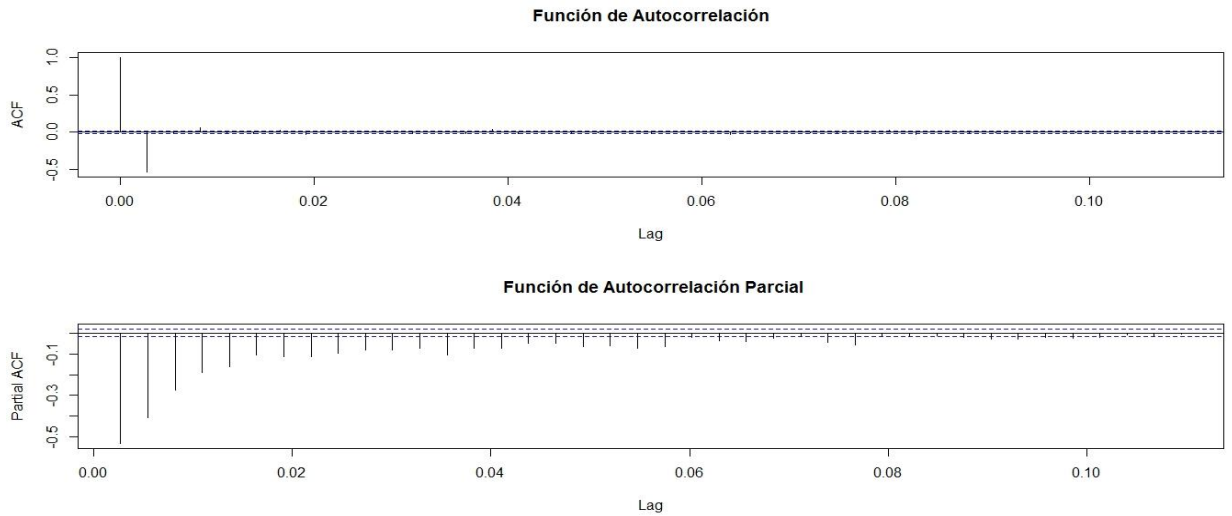
Con la información de la Tabla 6 y al 0.05% de confianza se rechaza la hipótesis nula de raíz unitaria para los casos de las primeras diferencias del BRENT, WTI, LogBRENT y LogWTI. Para las variables originales se detectó la raíz unitaria, a partir de lo anterior se trabajará con las primeras diferencias de los logaritmos en base 10 de las series.

### **3.1 IDENTIFICACIÓN DEL MODELO PARA BRENT**

La identificación de la Función de Autocorrelación (FAC) y la Función de Autocorrelación Parcial (FACP) nos ayudará en la selección del mejor modelo según la metodología Box-Jenquis.

La Figura 12 muestra una caída rápida del FAC luego del segundo rezago, y una convergencia lenta de la FACP, lo cual sugiere un modelo MA o un ARMA. Para seleccionar el mejor modelo se comparará por el criterio AIC, análisis residual gráfico y la prueba Ljung y Box.

**Figura 12. FAC y FACP del BRENT**



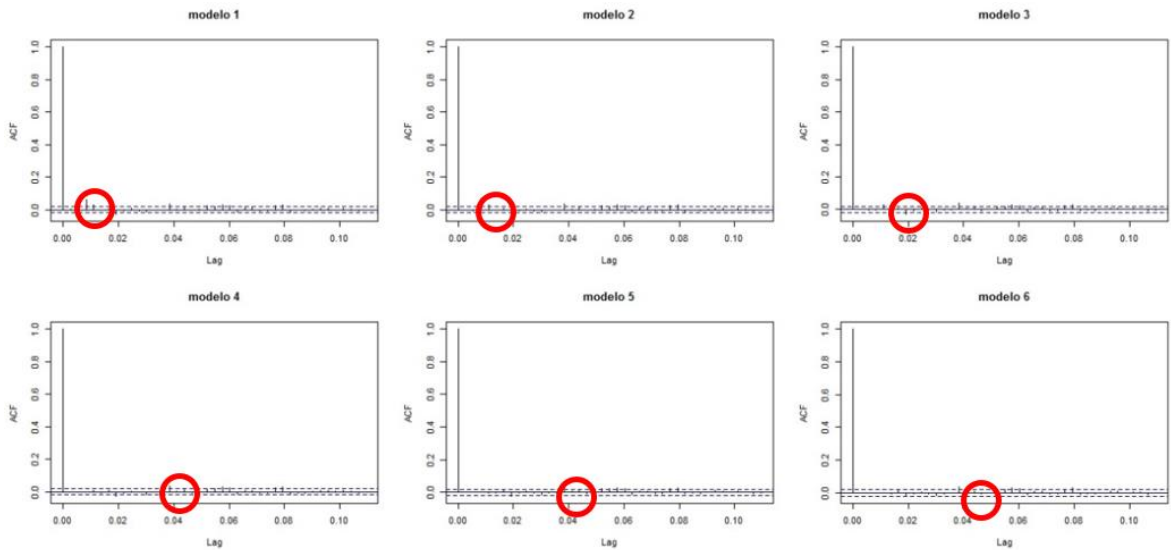
En la Tabla 7 se presentan el Akaike Information Criterion (AIC) el cual es un indicador del ajuste de los datos que penaliza según el número de parámetros del modelo. El mejor modelo será el que tenga menor AIC, en este caso se observa que el modelo ARIMA(3,1,2), seleccionado a partir del código auto.arima en R, es el mejor.

**Tabla 7. Modelos propuestos ARIMA – Referencia BRENT**

| <b>Modelo</b> | <b>Especificación</b> | <b>AIC</b> |
|---------------|-----------------------|------------|
| Modelo 1      | ARIMA(0,1,1)          | 25751.31   |
| Modelo 2      | ARIMA(0,1,2)          | 25753.04   |
| Modelo 3      | ARIMA(0,1,3)          | 25724.00   |
| Modelo 4      | ARIMA(1,1,3)          | 25697.31   |
| Modelo 5      | ARIMA(2,1,3)          | 25698.31   |
| Modelo 6      | ARIMA(3,1,3)          | 25693.40   |
| Modelo 7      | ARIMA(3,1,2)*         | 25674.09   |

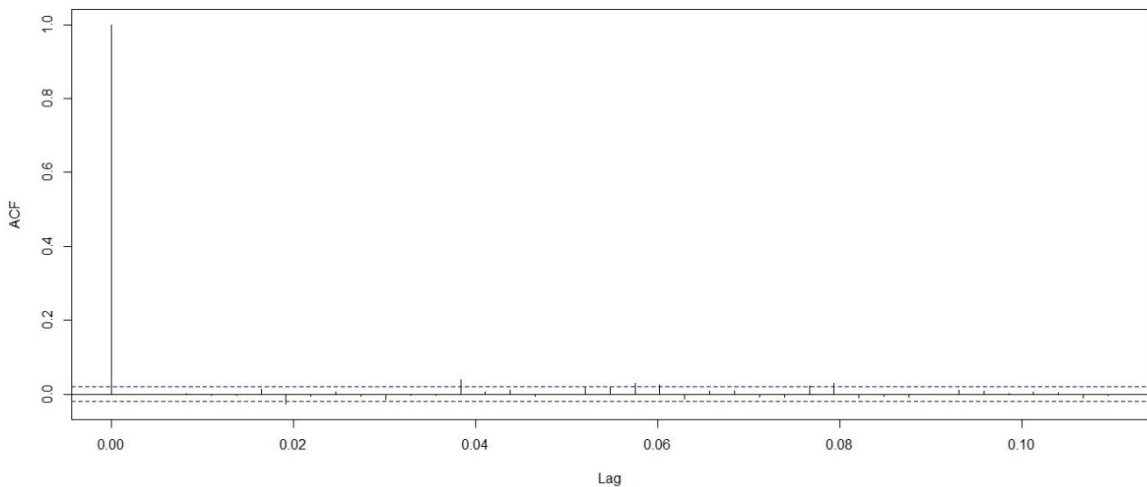
\*Modelo propuesto por el código auto.arima del paquete forecast de R.

**Figura 13. FAC para log(BRENT)**



La Figura 13 muestra los primeros 6 modelos propuestos a partir del análisis de FAC y FACP de la serie. Se espera que el mejor modelo no tenga rezagos por fuera de las bandas, pues esto indicaría una correlación entre los errores del modelo. Para los modelos 1, 2 y 3 se observa rezagos con correlación significativa en los tiempos cercanos y en los modelos 4, 5 y 6 se observan correlaciones en tiempos lejanos.

**Figura 14. FAC Modelo 7 Auto.Arima – Referencia BRENT**



El FAC de la función auto.arima tiene rezagos con correlaciones significativas, se asemeja a los modelos 4, 5 y 6.

**Tabla 8. Prueba de no correlación de errores Ljung Box - BRENT**

| <b>Modelo</b> | <b>Estadístico de prueba</b> | <b>Significancia</b> |
|---------------|------------------------------|----------------------|
| Modelo 1      | 0.000328                     | 0.9856               |
| Modelo 2      | 0.0092702                    | 0.9233               |
| Modelo 3      | 0.0058326                    | 0.9391               |
| Modelo 4      | 0.040987                     | 0.8396               |
| Modelo 5      | 0.00075518                   | 0.9781               |
| Modelo 6      | 0.000328                     | 0.9856               |
| Modelo 7      | 7.4751e-05                   | 0.9931               |

En la Tabla 8 se presentan los resultados de la prueba Ljung Box de no correlación de errores. Las hipótesis de este *test* son  $H_0 = \rho_1 = \rho_2 = \dots = 0$  y  $H_a \neq \rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq 0$ . Todos los modelos cumplen con el supuesto de no correlación de los errores, pero el modelo 7 tiene el mayor valor de significancia de esta prueba, superior al 99%, lo cual indica que con un 99% de confianza las correlaciones son cero.

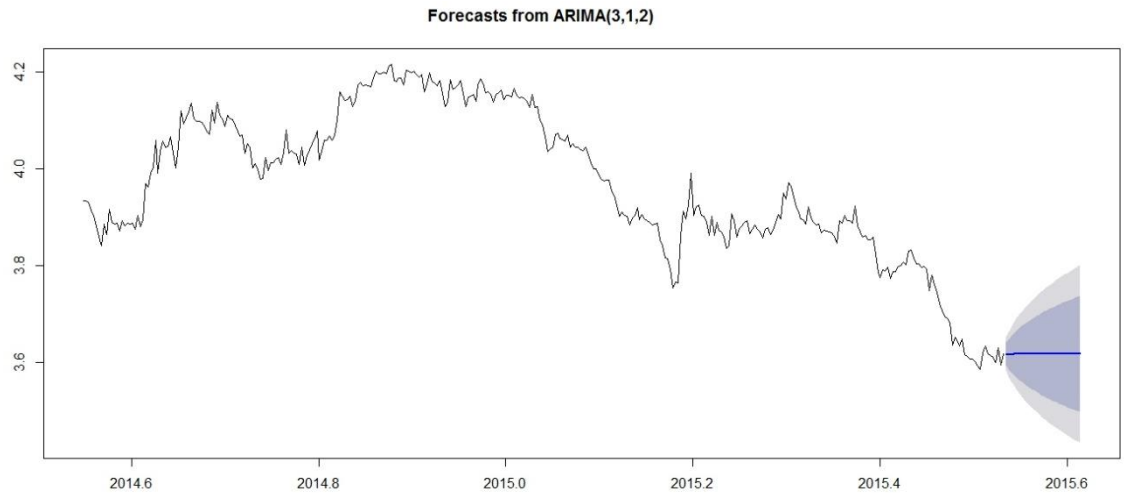
### **3.2 ESTIMACIÓN DEL MODELO BRENT**

El modelo 7 se considera el mejor modelo por tener mejor comportamiento de los errores.

$$y_t = (0.51 * y_{t-1}) - (0.24 * y_{t-2}) + (0.04 * y_{t-3}) - (0.60 * \mu_{t-1}) + (0.27 * \mu_{t-2})$$

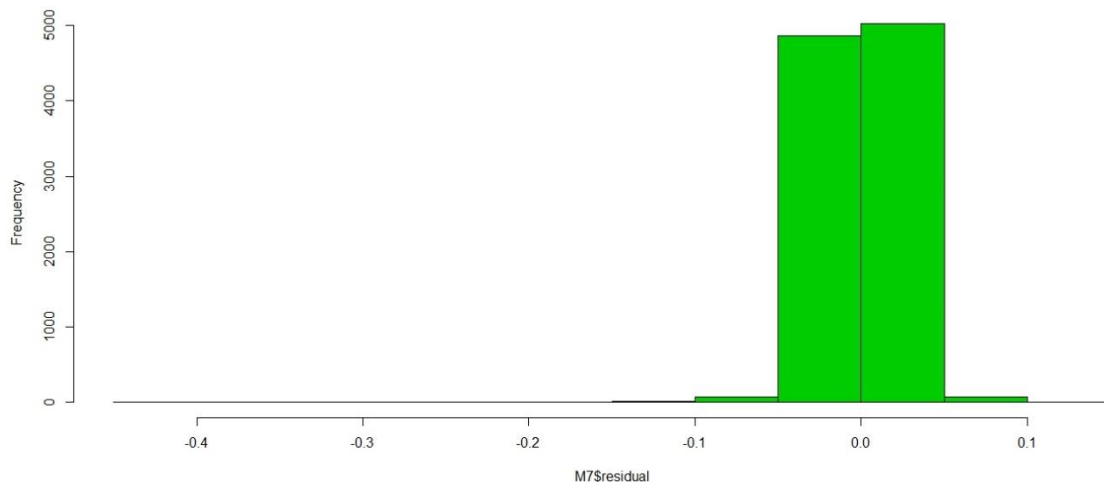
Con lo cual se tiene la predicción de \$37.28 dólares para el mes de Enero del 2016 (Anexo A).

**Figura 15. Intervalos de Predicción BRENT**



Al realizar un histograma de los errores, presentado en la Figura 16, se observa que estos tienen promedio cero y su distribución es simétrica, lo cual sugiere normalidad de los errores.

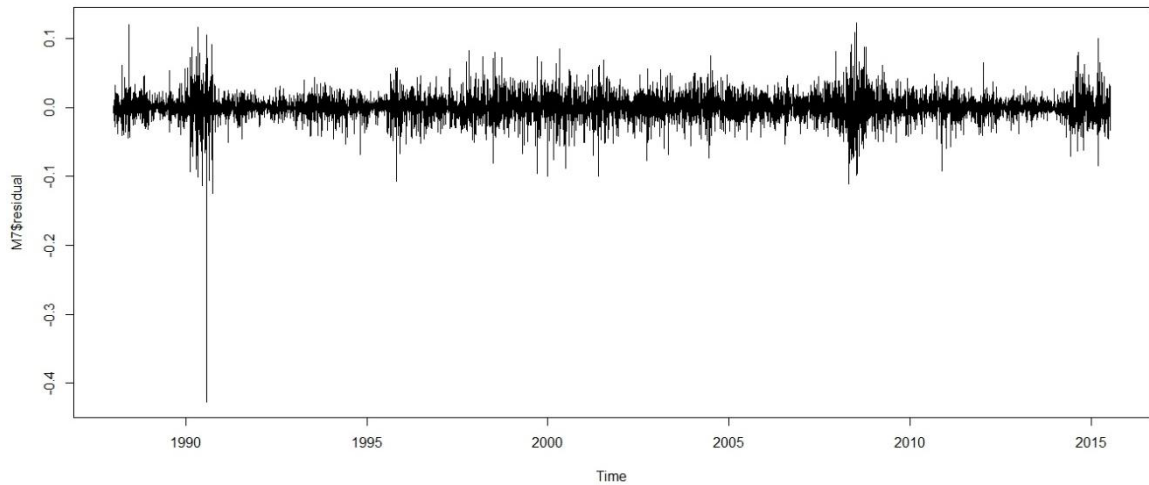
**Figura 16. Histograma de los errores BRENT - ARIMA**



La Figura 17 muestra los errores del modelo final contra el tiempo. Se puede concluir que no existe homogeneidad en varianza, pues se alcanza a observar que

en los años de 1992 y del 2008 la variabilidad de los errores es mayor, debido a una mayor variabilidad de los precios en esas fechas.

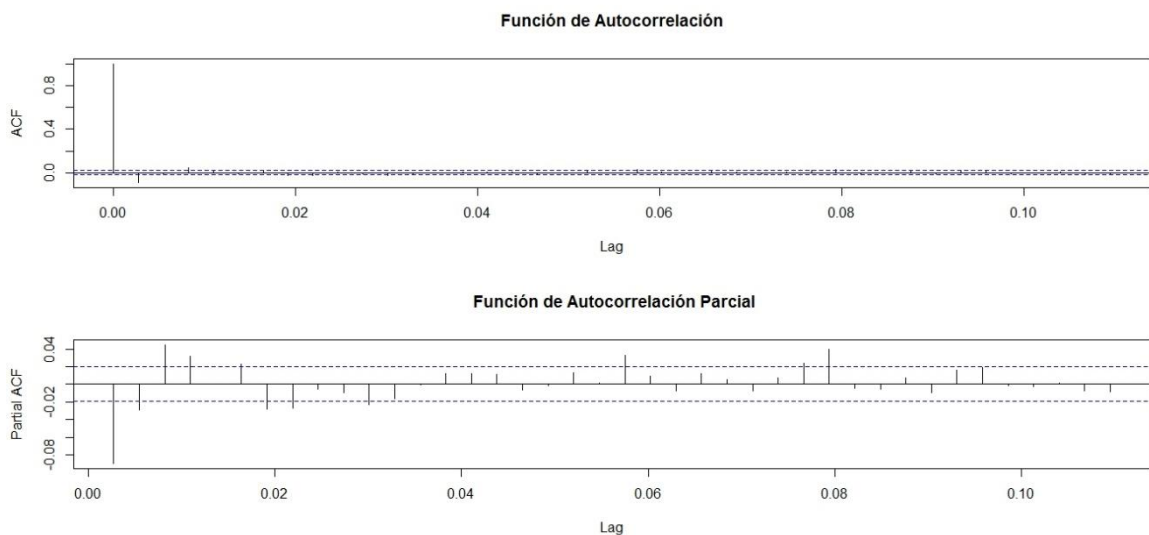
**Figura 17. Residuales Modelo 7 BRENT - ARIMA**



### 3.3 IDENTIFICACIÓN DEL MODELO PARA WTI

La función de auto correlación y auto correlación parcial de la serie WTI tiene un comportamiento similar al BRENT, según se muestra en la Figura 18.

**Figura 18. Función de FAC Y FACP WTI**



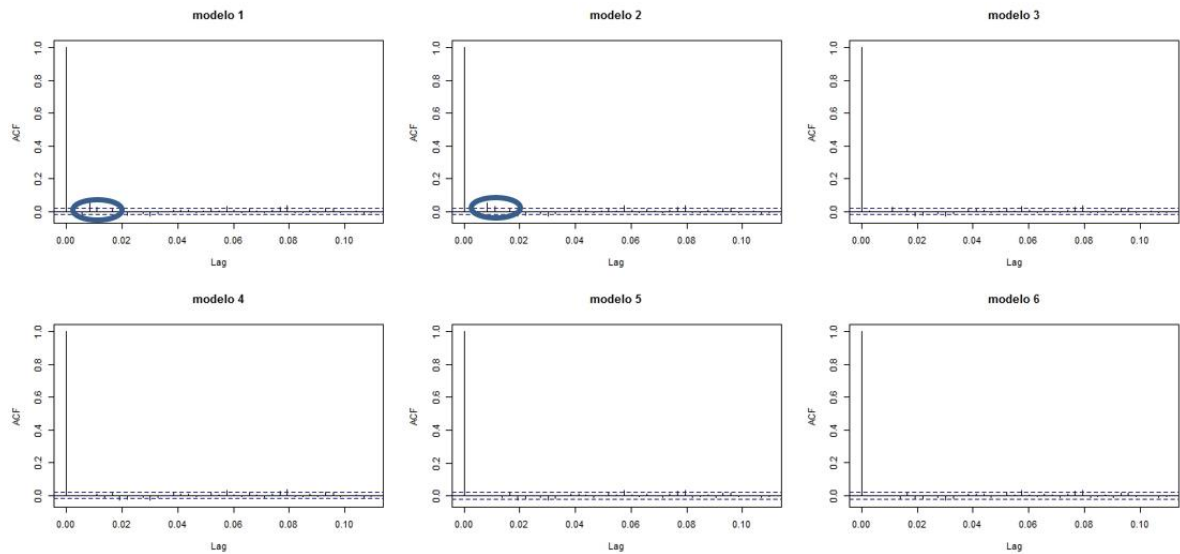
Los modelos que sugiere la Figura 18 son los modelos MA y ARIMA. Siguiendo la misma metodología que se aplicó en el análisis del precio en su referencia BRENT, se probaron los siguientes modelos:

**Tabla 9. Modelos propuestos ARIMA – Referencia WTI**

| <b>Modelo</b> | <b>Especificación</b> | <b>AIC</b> |
|---------------|-----------------------|------------|
| Modelo 1      | ARIMA(0,1,1)          | -51780.40  |
| Modelo 2      | ARIMA(0,1,2)          | -51779.53  |
| Modelo 3      | ARIMA(0,1,3)          | -51806.14  |
| Modelo 4      | ARIMA(1,1,3)          | -51810.57  |
| Modelo 5      | ARIMA(2,1,3)          | -51809.49  |
| Modelo 6      | ARIMA(3,1,3)          | -51807.57  |
| Modelo 7      | ARIMA(4,1,0)*         | -51810.18  |

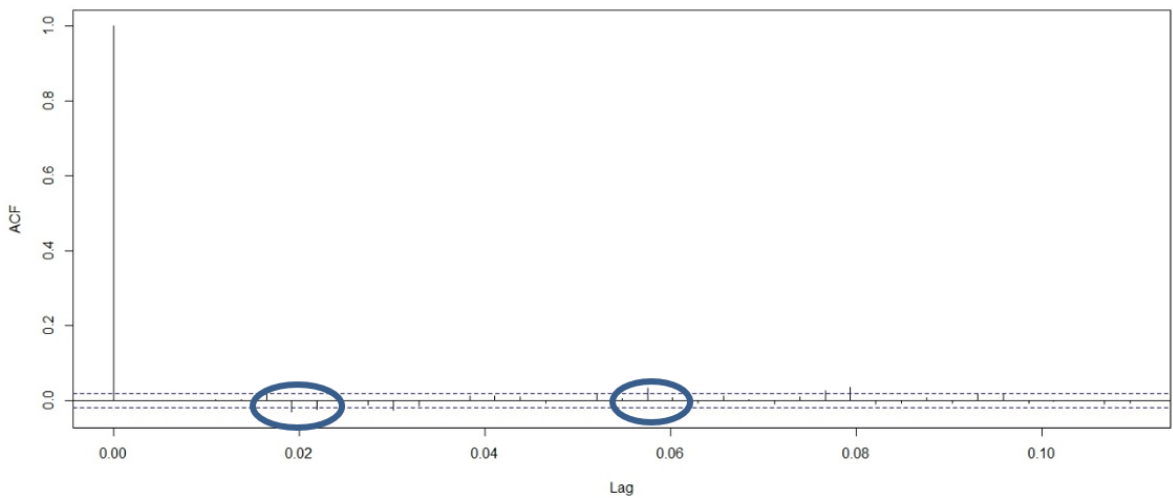
En la Tabla 9 se presenta el Akaike Information criterion (AIC). El mejor modelo en este caso, según el criterio AIC, es el modelo ARIMA(1,1,3) seguido del ARIMA (4,1,0) generado por la función auto.arima.

**Figura 19. FAC para log(WTI)**



La Figura 19 muestra los primeros 6 modelos propuestos a partir del análisis de FAC y FACP de la serie. Tal como en el caso del BRENT, se espera que el mejor modelo no tenga rezagos por fuera de las bandas. Para los modelos 1 y 2 se observa rezagos con correlación significativa en los tiempos cercanos y en los modelos 3, 4, 5 y 6 no se observan correlaciones en tiempos lejanos.

**Figura 20. FAC Modelo 7 Auto.Arima – Referencia WTI**



El FAC de la función auto.arima tiene rezagos con correlaciones significativas, se asemeja a los modelos 4, 5 y 6.

**Tabla 10 . Prueba de no correlación de errores Ljung Box - WTI**

| <b>Modelo</b> | <b>Estadístico de prueba</b> | <b>Significancia</b> |
|---------------|------------------------------|----------------------|
| Modelo 1      | 0.0093813                    | 0.9228               |
| Modelo 2      | 0.0035395                    | 0.9526               |
| Modelo 3      | 0.019427                     | 0.8892               |
| Modelo 4      | 0.00054321                   | 0.9814               |
| Modelo 5      | 0.00021247                   | 0.9884               |
| Modelo 6      | 0.00028985                   | 0.9864               |
| Modelo 7      | 1.1212e-05                   | 0.9973               |

En la Tabla 10 se presentan los resultados de la prueba Ljung Box de no correlación de errores para los modelos ARIMA de la serie WTI. Todos los modelos cumplen con el supuesto de no correlación de los errores, pero el modelo 7 tiene el mayor valor de significancia de esta prueba superior al 99%, lo cual indica que con un 99% de confianza las correlaciones son cero.

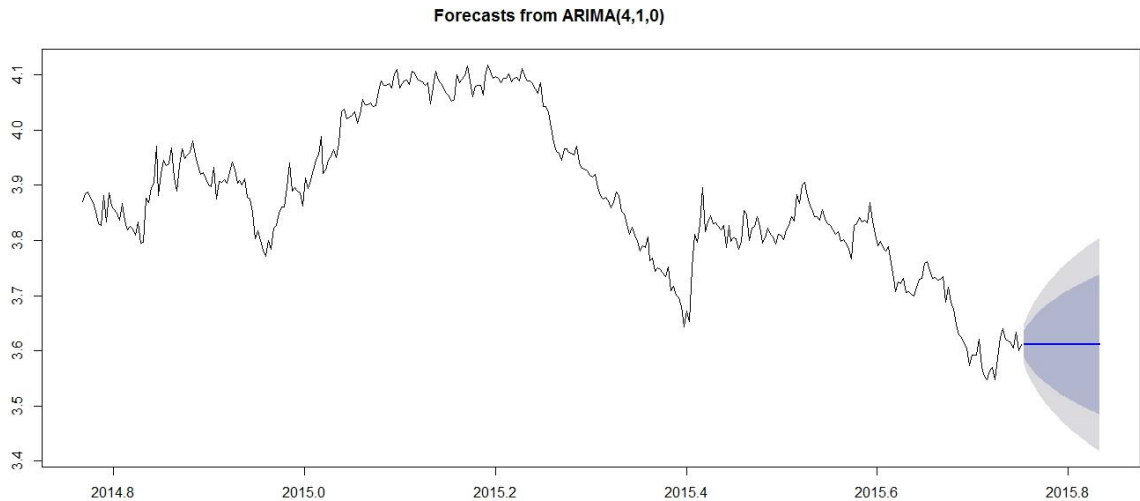
### **3.4 ESTIMACIÓN DEL MODELO WTI**

El modelo 7 se considera el mejor modelo por tener mejor comportamiento de los errores.

$$y_t = (-0.0922 * y_{t-1}) + (-0.0236 * y_{t-2}) + (-0.0481 * y_{t-3}) + (-0.0317 * y_{t-4})$$

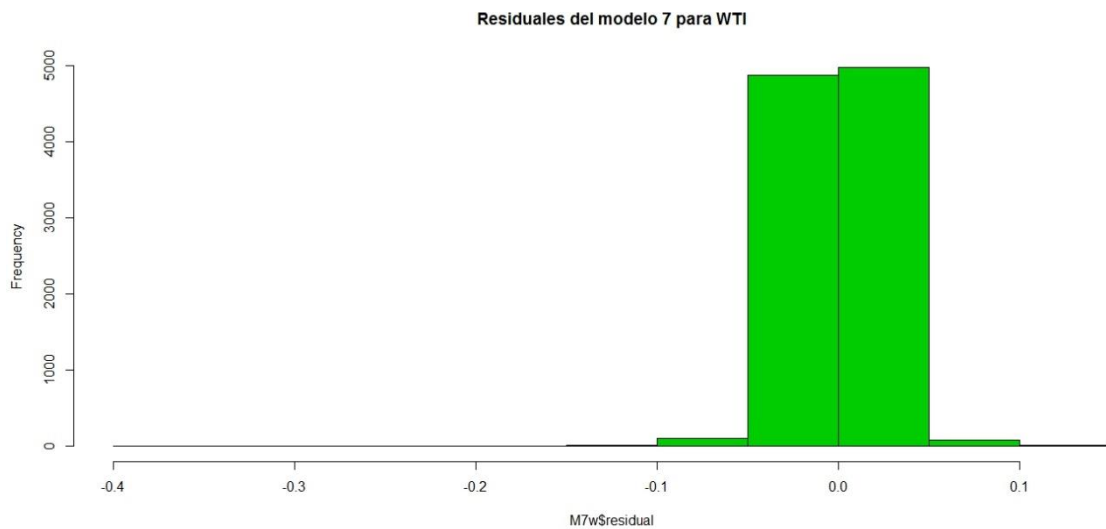
Con lo cual se tiene la predicción de 35.02 dólares para el mes de Enero del 2016 (Anexo B).

**Figura 21. Intervalos para la predicción del WTI**



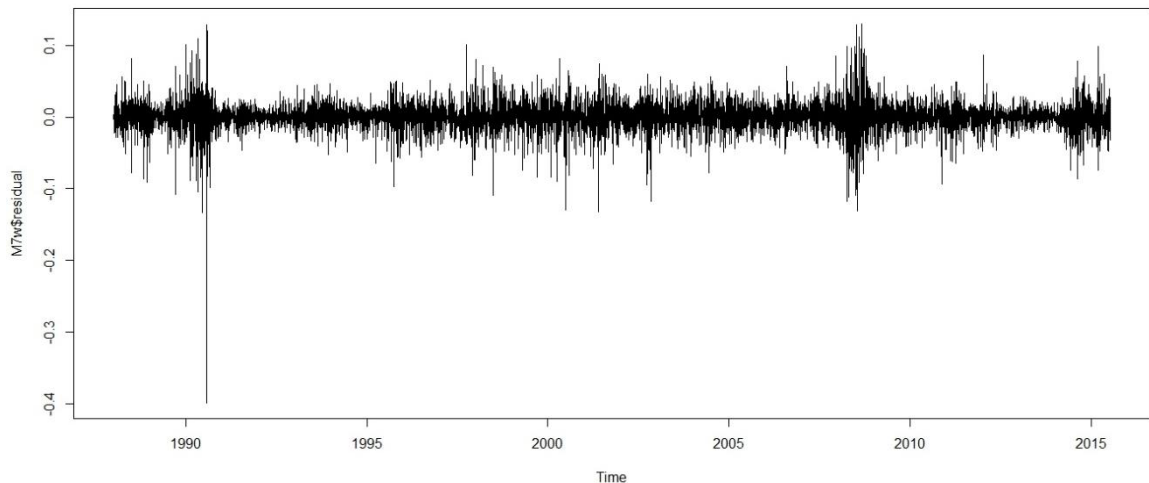
Al realizar el histograma de los errores, presentado en la Figura 22, se observa que estos tienen promedio cero y su distribución es simétrica, lo cual sugiere normalidad de los errores.

**Figura 22. Histograma de los Errores WTI - ARIMA**



La Figura 23 muestra los errores del modelo final contra el tiempo, allí se puede concluir que no existe homogeneidad en varianza, tal como sucedió en el modelo para el BRENT, pues se alcanza a observar que en los años de 1992 y de 2008 la variabilidad de los errores es mayor, debido a una mayor variabilidad de los precios en esas fechas.

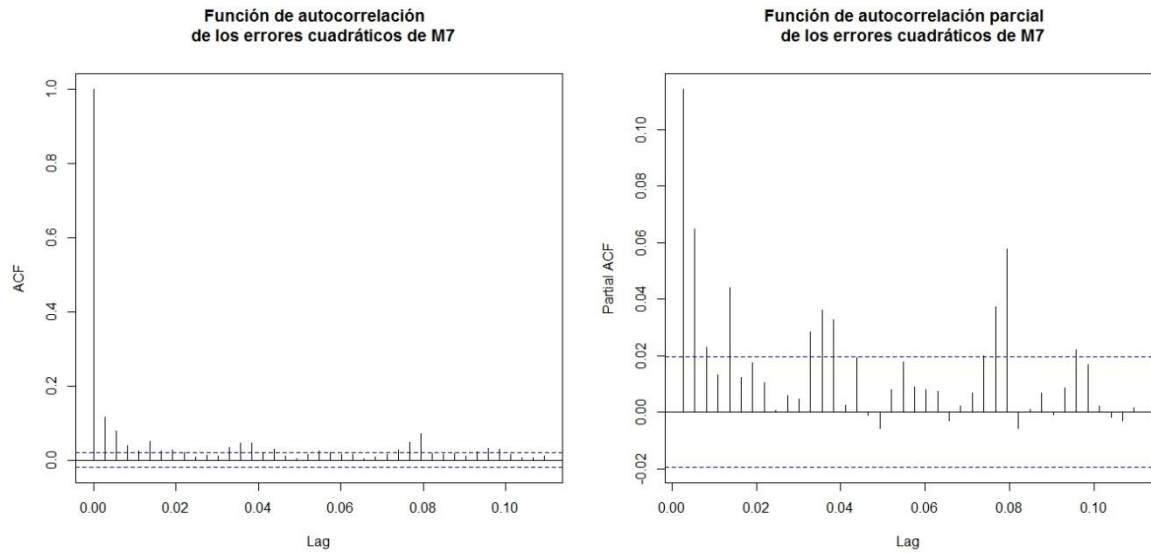
**Figura 23. Residuales Modelo 7 WTI - ARIMA**



### **3.5 MODELO GARCH PARA EL PRECIO DEL PETROLEO EN SU REFERENCIA BRENT**

Para probar si hay problemas de heterogeneidad en la varianza de los errores se implementará el modelo GARCH, que es la generalización del modelo de heterocedasticidad condicional autorregresivo (ARCH). La conveniencia en la implementación de este modelo se puede sustentar en el análisis de la Figura 17, donde se observa que los errores tienen varianza variable a través del tiempo o en una prueba del multiplicador de Lagrange para heterocedasticidad condicional autorregresiva, cuya hipótesis nula es el no efecto del modelo ARCH la cual es rechazada con 95% de confianza con un chi-cuadrado de 250.19 y un p-valor cercano a cero, sugiriendo que sí hay un efecto del modelo ARCH.

**Figura 24. Errores al cuadrado del modelo final BRENT**



De tal forma que se trabajará con los errores cuadráticos del modelo final ARIMA (3, 1,2). La Figura 24 presenta el ACF y PACF, allí se observa que existen rezagos cuadráticos correlacionados. Para identificar el grado del GARCH, Wiley (2001)<sup>25</sup> recomienda centrarse en el PACF y determinar el número de rezagos que salen de las bandas de confianza, para este caso el mejor modelo sería un GARCH(3,0).

**Tabla 11. GARCH (3,0) BRENT**

| Parámetros    | Estimación | Error estándar | Valor-t     | Pr(> t ) |
|---------------|------------|----------------|-------------|----------|
| <b>Mu</b>     | 0,00038    | 0,000142       | 2,6709      | 0,007566 |
| <b>ar1</b>    | 0,385974   | 0,012407       | 31,1087     | 0        |
| <b>ar2</b>    | 0,516448   | 0,009883       | 52,2552     | 0        |
| <b>ar3</b>    | 0,072368   | 0,011359       | 6,3712      | 0        |
| <b>ma1</b>    | -0,481643  | 0,000021       | -23301,6011 | 0        |
| <b>ma2</b>    | -0,492153  | 0,00002        | -24790,1757 | 0        |
| <b>omega</b>  | 0,00013    | 0,000004       | 34,8571     | 0        |
| <b>alpha1</b> | 0,462983   | 0,024294       | 19,0577     | 0        |
| <b>alpha2</b> | 0,192092   | 0,016718       | 11,4898     | 0        |
| <b>alpha3</b> | 0,028566   | 0,009153       | 3,121       | 0,001802 |

<sup>25</sup> MCLACHLAN, Geoffrey J. and KRISHNAN, Thriyambakam. Wiley series in probability and statistics. The EM Algorithm and Extensions, Second Edition, 2000, p. 361-369.

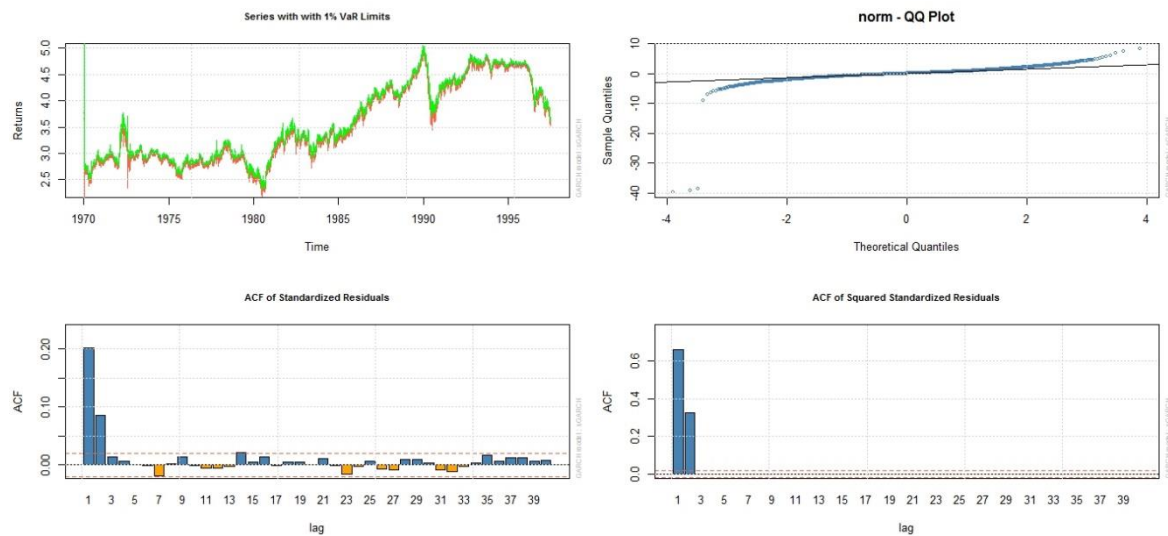
De la Tabla 11 se observan los parámetros del modelo GARCH(3,0) con la variable en primeras diferencias del logaritmo en base 10 del BRENT. Todos los coeficientes son altamente significativos, incluso al 1%. De tal forma que, el modelo GARCH estimado es:

$$r_t = 0,00038 + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0,00013 + 0,462983 * a_{t-1}^2 + 0,192092 * a_{t-2}^2 + 0,028566 * a_{t-3}^2$$

De la anterior ecuación se calcula la predicción a 30 días del precio de la referencia BRENT, tal como se presenta en el Anexo C, el primer valor de la predicción es de 37.22 para el día 1 de enero de 2016 y de 37.26 para el 31 de enero. Al comparar estas predicciones se observan un menor error con respecto a otros modelos.

**Figura 25. Análisis Residual del modelo GARCH(3,0)**

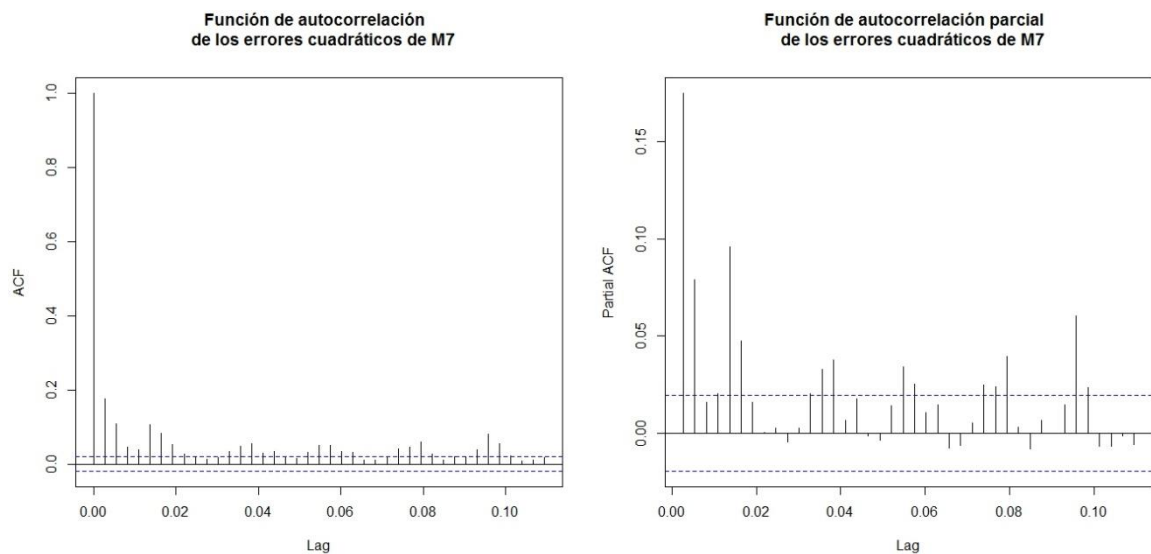


De la Figura 25 se infiere que los primeros rezagos de los residuales tienen correlación alta.

### 3.6 MODELO GARCH PARA EL PRECIO DEL PETROLEO EN SU REFERENCIA WTI

La conveniencia en la implementación de este modelo se puede sustentar en el análisis de la Figura 23 donde se observa que los errores tienen varianza variable a través del tiempo, o en una prueba del multiplicador de Lagrange para heterocedasticidad condicional autorregresiva, cuya hipótesis nula es el no efecto del modelo ARCH la cual es rechazada con 95% de confianza con un chi-cuadrado de 548.41 y un p-valor cercano a cero, sugiriendo que sí hay un efecto del modelo ARCH.

Figura 26. Errores al cuadrado del modelo final WTI



De tal forma que se trabajará con los errores cuadráticos del modelo final ARIMA (4,1,0). La Figura 26 presenta el ACF y PACF, donde se observa que existen rezagos cuadráticos correlacionados. Para identificar el grado del GARCH, como en el caso BRENT, se recomienda centrarse en el PACF y determinar el número de rezagos que salen de las bandas de confianza, para este caso el mejor modelo sería un GARCH(2,0).

Tabla 12. GARCH(2,0) WTI

| Parámetros | Estimación | Error estándar | Valor-t  | Pr(> t ) |
|------------|------------|----------------|----------|----------|
| Mu         | 1.611722   | 0.001638       | 984.128  | 0,007566 |
| ar1        | 0.927965   | 0.000151       | 6159.472 | 0        |
| ar2        | 0.067154   | 0.000031       | 2175.994 | 0        |
| ar3        | 0.047240   | 0.000056       | 842.419  | 0        |
| ar4        | -0.042205  | 0.000050       | -835.865 | 0        |
| omega      | 0.000138   | 0.000004       | 34.726   | 0        |
| alpha1     | 0.598519   | 0.027460       | 21.796   | 0        |
| alpha2     | 0.218925   | 0.017080       | 12.817   | 0        |

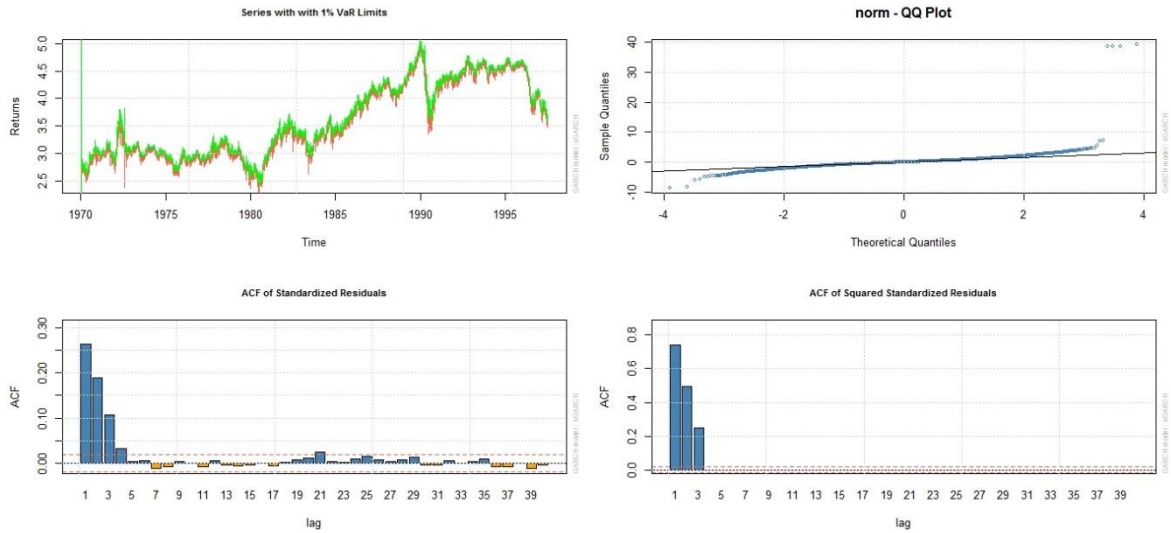
De la Tabla 12 se observan los parámetros del modelo GARCH(2,0) con la variable en primer diferencias del logaritmo en base 10 del WTI. Todos los coeficientes son altamente significativos, incluso al 1%. De tal forma, el modelo GARCH estimado es:

$$r_t = 1.611722 + a_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.000138 + 0.598519 * a_{t-1}^2 + 0.218925 * a_{t-2}^2$$

De la anterior ecuación se calcula la predicción a 30 días del precio de la referencia WTI, tal como se presenta en el Anexo D. El primer valor de la predicción es de \$37.07 para el día 1 de Enero de 2016 y de \$37.33 para el 31 de Enero. Al comparar estas predicciones se observa un menor error con respecto a otros modelos.

Figura 27. Análisis residual del modelo GARCH(2,0)



De la Figura 27 se infiere que los primeros rezagos de los residuales tienen correlación alta.

## 4. MODELAMIENTO Y PREDICCIÓN DEL PRECIO DEL PETRÓLEO A PARTIR DE LA TÉCNICA MOVIMIENTO GEOMÉTRICO BROWNIANO.

En este capítulo, se mostrarán los resultados obtenidos aplicando el proceso estocástico Movimiento Geométrico Browniano, a partir de la base de datos de precios del petróleo en sus referencias WTI y BRENT mencionada anteriormente. Los resultados y simulaciones se lograron a partir de la programación realizada en el programa estadístico “R sthatics”; mientras que los parámetros matemáticos con los que se trabajó, que dominan las ecuaciones estocásticas del proceso, se calcularon en el programa “Excel” utilizando los conceptos y herramientas estadísticas disponibles en este programa.

### 4.1 MODELAMIENTO MOVIMIENTO GEOMÉTRICO BROWNIANO (GBM)

Para el análisis de este proceso estocástico, se calcularon los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  utilizando la ecuación (15) sobre los datos observados entre el 01 de Enero de 2014 y 31 de Diciembre de 2015, obteniendo los siguientes resultados:

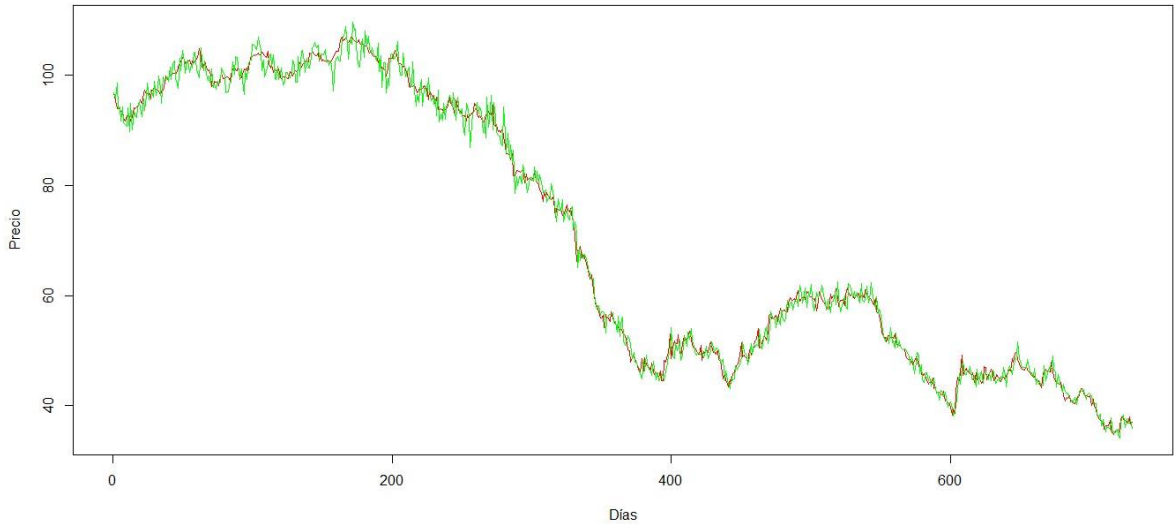
Tabla 13. Parámetros WTI y BRENT 2 años

| PARAMETRO | WTI         | BRENT       |
|-----------|-------------|-------------|
| $\mu$     | -0,00114741 | -0.00132383 |
| $\sigma$  | 0,01846898  | 0.01736635  |

El parámetro  $\mu$  representa el cambio porcentual promedio en los precios sobre un período de tiempo y  $\sigma$  controla la variabilidad del proceso.

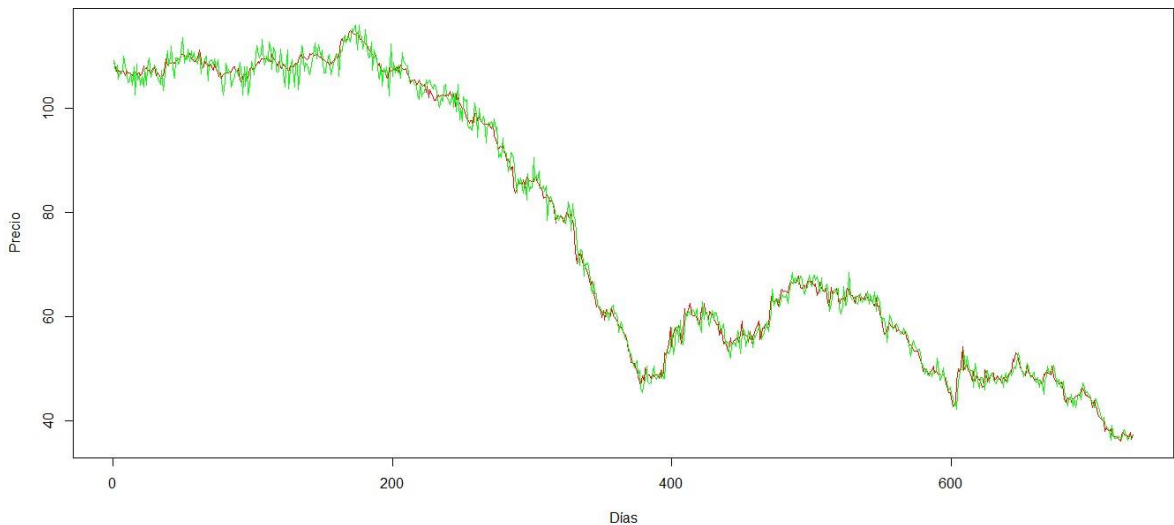
Con estos parámetros se procede a hacer el respectivo modelamiento del Movimiento Geométrico Browniano, utilizando “R sthatics”. La Figura 28 muestra los resultados:

**Figura 28. Precios WTI vs GBM 2 años**



La línea roja representa el comportamiento y tendencia de los precios reales del petróleo en su referencia WTI con un precio final de \$37.04, mientras que la línea verde representa el resultado obtenido de la simulación a partir del proceso Movimiento Geométrico Browniano con un precio final de \$35.79, es decir, un error del 3.3%.

**Figura 29. Precios BRENT vs GBM 2 años**



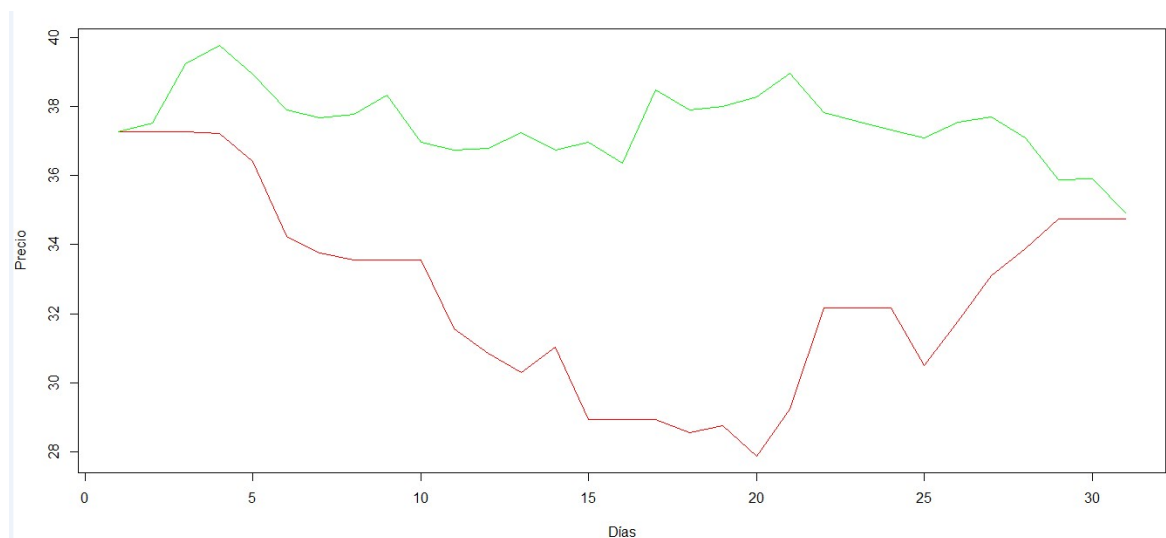
De igual manera, se realizó este mismo procedimiento utilizando como base los datos de los precios del petróleo en su referencia BRENT. En la Figura 29, el

precio real final fue de \$37.28 y el precio final modelado fue de \$37.04, es decir, un error teórico del 0.6 %.

Se puede apreciar que los precios modelados por el proceso Movimiento Geométrico Browniano (verde) siguen la misma tendencia que los precios reales (rojo), es decir, que en ambos escenarios los precios siguen una tendencia decreciente a través del tiempo. Adicionalmente, se observa que el modelamiento trata de ajustarse de manera significativa al comportamiento real del precio del petróleo, sin embargo, el modelo añade cierta volatilidad al precio del petróleo.

Con base en el análisis realizado, se decidió efectuar el pronóstico del precio del petróleo en su referencia BRENT para el mes de Enero del 2016 tomando como base los 2 años previos a este mes. Los parámetros empleados para el modelamiento del precio fueron los mismos de la Tabla 13, obteniendo los siguientes resultados:

**Figura 30. Precios Simulados BRENT Enero 2016 por GBM**



En la Figura 30 se puede apreciar que, si bien el proceso de Movimiento Geométrico Browniano (línea verde) se acerca de manera significativa al precio

final del día 31 de Enero de 2016, este no evidencia el comportamiento real que tuvo el precio del petróleo en su referencia BRENT durante todo el mes; al contrario, muestra diferencias significativas con los precios reales (línea roja). En el Anexo E se muestran los precios obtenidos utilizando el Movimiento Geométrico Browniano contra los precios reales para estimar sus errores.

#### 4.2 MODELAMIENTO MOVIMIENTO GEOMÉTRICO BROWNIANO CON REVERSIÓN A LA MEDIA (GBMR)

Para realizar un modelamiento a largo plazo, es necesario implementar el proceso de reversión a la media con el fin de que los precios simulados a largo plazo se reviertan a su costo marginal de producción, para evitar que se presente dentro del modelamiento variaciones abruptas que puedan afectar el pronóstico.

Para analizar la eficiencia de este modelo, se pronosticarán los precios observados del petróleo en sus referencias WTI y BRENT comprendidos entre el 01 de Enero de 2010 y 31 de Diciembre de 2015 y se comparan dichos resultados con los observados.

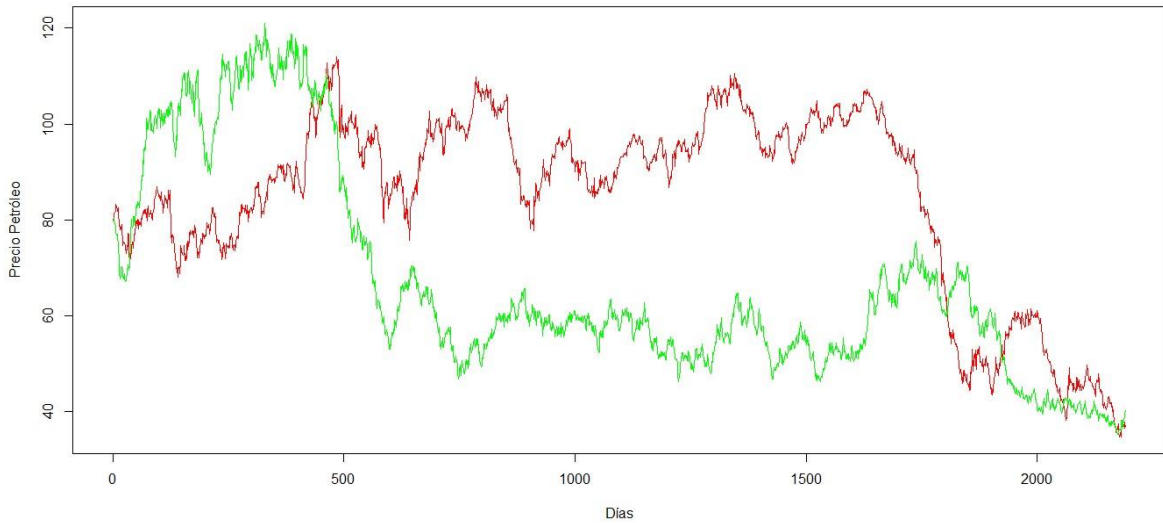
Para llevar a cabo este nuevo modelamiento, se calcularon los parámetros requeridos de las ecuaciones (22 - 25), obteniendo los siguientes resultados:

Tabla 14. Parámetros WTI y BRENT GBMR

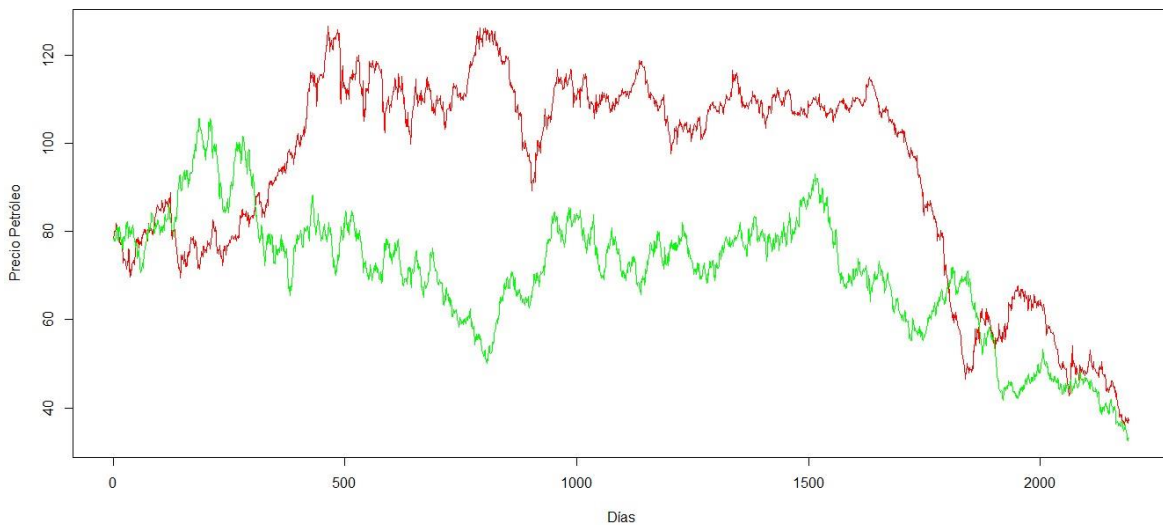
| PARAMETRO | WTI     | BRENT   |
|-----------|---------|---------|
| $\bar{S}$ | 31.9044 | 30.7732 |
| $\sigma$  | 0.01729 | 0.0161  |
| $\eta$    | 0.00099 | 0.00078 |

La Figura 31 y la Figura 32 muestran el comportamiento y tendencia entre los precios reales y simulados del petróleo en sus referencias WTI y BRENT respectivamente.

**Figura 31. Precios WTI vs GBMR 2010 - 2015**



**Figura 32. Precios BRENT vs GBMR 2010 - 2015**



La línea roja representa el comportamiento y tendencia de los precios reales del petróleo en su referencia WTI con un precio final de \$37.04, mientras que la línea verde representa el resultado obtenido de la simulación a partir del proceso GBMR con un precio final de \$40.09. Para el caso del precio del petróleo en su referencia BRENT el valor final es de \$37.28 mientras que la simulación arrojó un valor de \$33.03. Los errores teóricos son del 8.5% y 11.40% para el WTI y BRENT respectivamente.

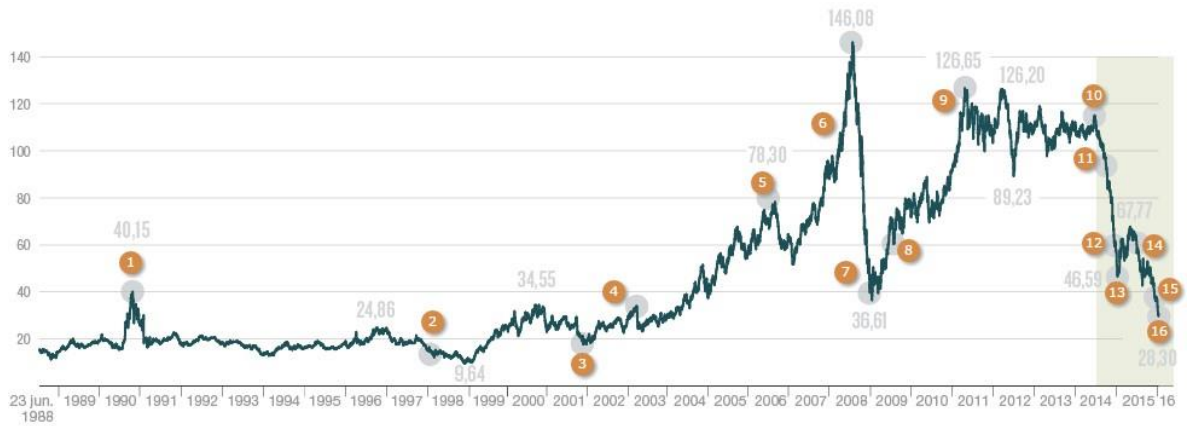
Es posible evidenciar a partir de los resultados anteriores que existen diferencias significativas en el comportamiento entre los precios pronosticados y los observados. Sin embargo, los resultados muestran que el precio final pronosticado se acerca de manera significativa al observado, satisfaciendo la teoría de exactitud del pronóstico del precio del petróleo a largo plazo. Otra forma de evidenciarlo es mediante el parámetro asociado al costo marginal de producción ( $\bar{S}$ , Tabla 14), el cual es cercano al del 31 de Diciembre de 2015.

#### **4.3 MODELAMIENTO MOVIMIENTO GEOMETRICO BROWNIANO CON SALTOS POISSON**

En los análisis evidenciados en el Movimiento Geométrico Browniano y en el GBMR, se ha evidenciado como falencia común la ausencia de algún parámetro matemático que controle las variaciones abruptas que experimenta el precio del petróleo en sus referencias WTI y BRENT a través del tiempo. Cabe resaltar que el precio se encuentra expuesto a sufrir cambios sustanciales por eventos o situaciones ya sean políticas, económicas o de cualquier otra índole.

Por este motivo, a continuación se hará el análisis del proceso estocástico Movimiento Geométrico Browniano con saltos Poisson, con el fin de determinar si a través de este proceso es posible controlar de manera significativa las variaciones mencionadas anteriormente. La Figura 33 permite visualizar en orden cronológico las diversas fluctuaciones que el precio del petróleo en su referencia BRENT ha experimentado en el intervalo de tiempo seleccionado para este estudio.

Figura 33. Evolución Histórica del precio del petróleo

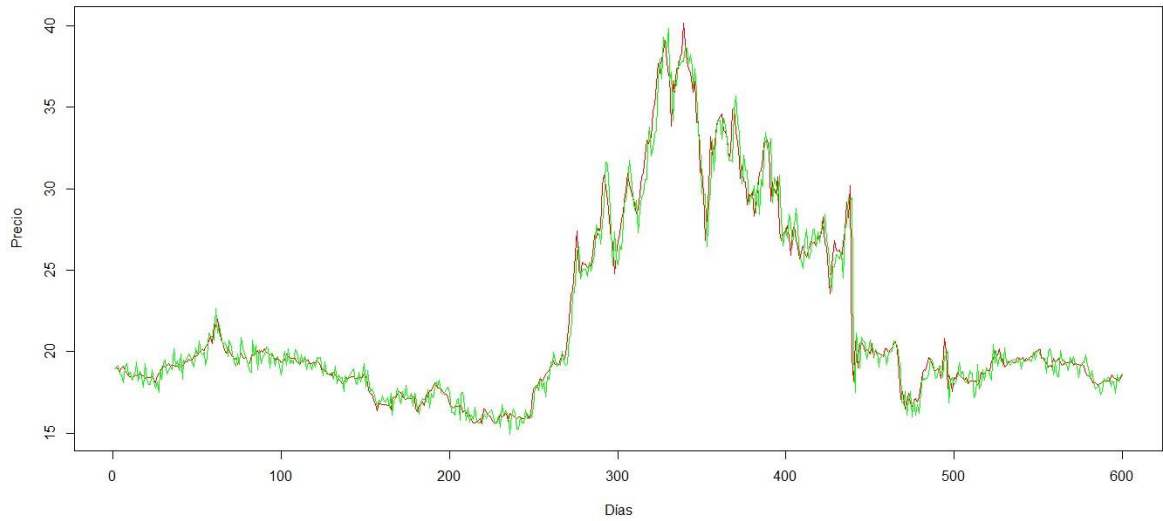


Tomado de [http://cincodias.com/cincodias/2014/12/16/graficos/1418753470\\_135679.html](http://cincodias.com/cincodias/2014/12/16/graficos/1418753470_135679.html)

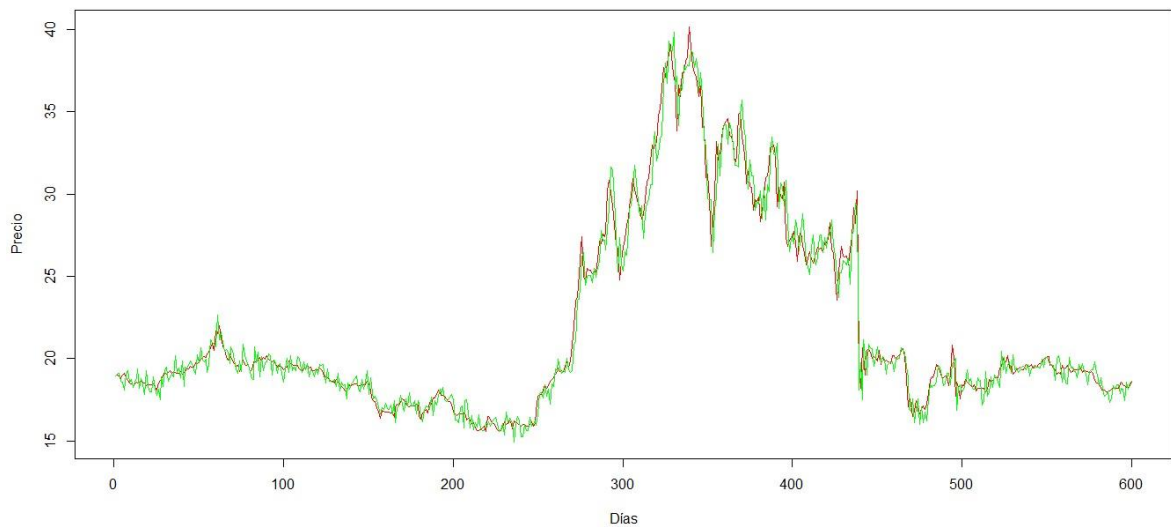
Para llevar a cabo dicho análisis, se ha seleccionado los precios del petróleo en su referencia BRENT comprendidos entre el 05 de Noviembre de 1989 y 28 de Junio de 1991 (Figura 33, 1), período en el cual se presentó una variabilidad considerable del precio debido al desarrollo de mercados y *forwards* y a la guerra del Golfo<sup>26</sup>. La Figura 34 y la Figura 35 muestran el modelamiento del precio del petróleo en este intervalo de tiempo mediante GBM sin saltos y con saltos Poisson respectivamente.

<sup>26</sup> [Citado el 25 de Julio de 2016] Disponible en <<http://servicio.bc.uc.edu.ve/derecho/revista/mempol11/n11-6.pdf>>.

**Figura 34. GBM sin saltos Poisson vs Precio del petróleo BRENT**

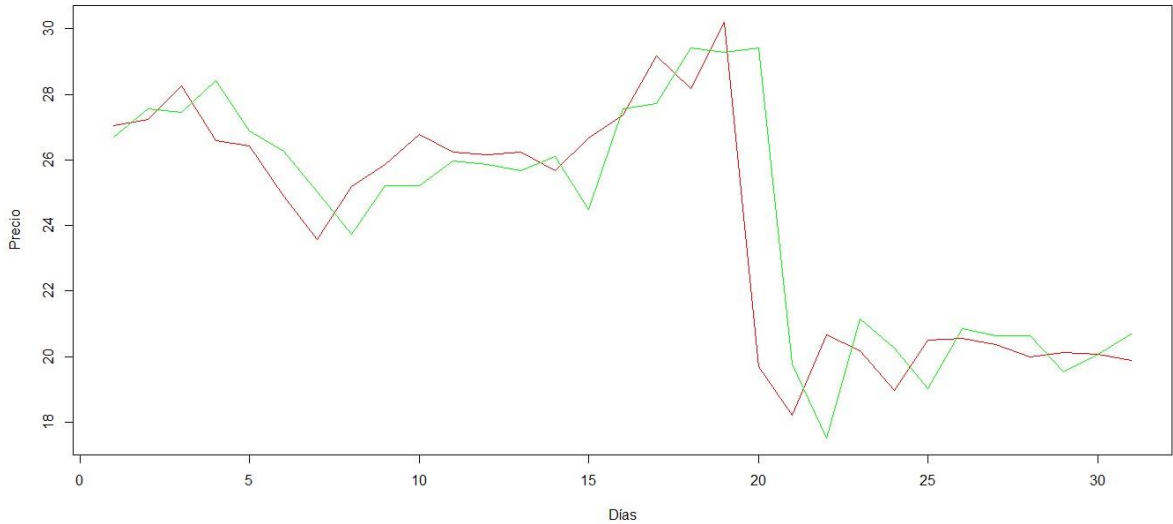


**Figura 35. GBM con saltos Poisson vs Precio del petróleo BRENT**

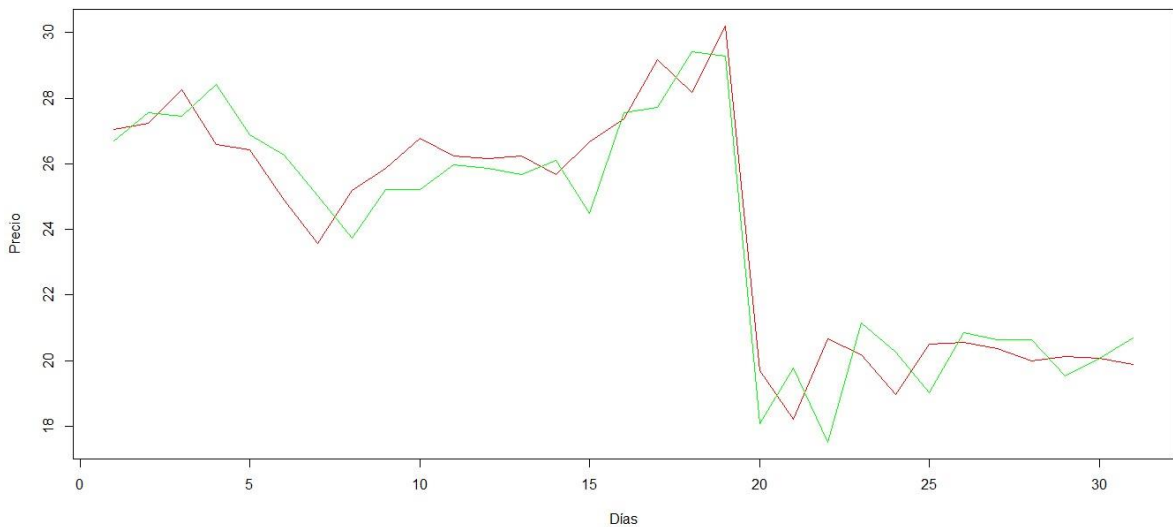


En este período de tiempo, se consideró como salto abrupto el cambio de precio entre el 16 de Enero de 1991 (30.20 dólares) y el 17 de Enero de 1991 (19.70 dólares). Por tal motivo se hará énfasis en esta variación para analizar la eficiencia del Movimiento Geométrico Browniano con saltos Poisson. En la Figura 36 y la Figura 37 se observan más detenidamente dichos cambios:

**Figura 36. Zoom GBM sin saltos Poisson - BRENT**



**Figura 37. Zoom GBM con saltos Poisson - BRENT**

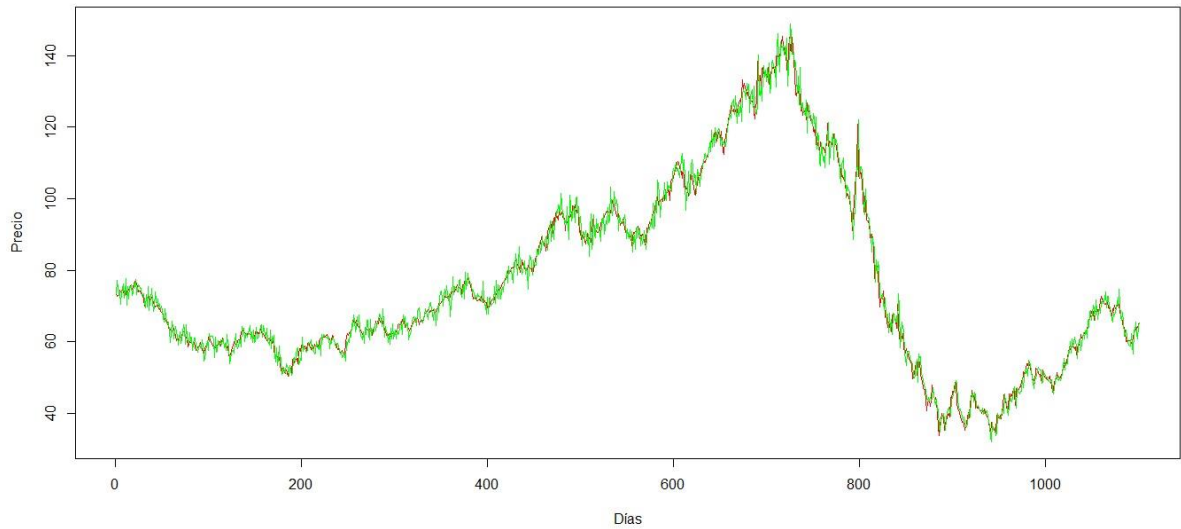


Adicionalmente se ha seleccionado los precios del petróleo en su referencia WTI comprendidos entre el 18 de Julio de 2006 y 22 de Julio de 2009 (Figura 33, 7), periodo en el cual se presentó una variabilidad considerable del precio debido a la creciente demanda en los mercados emergentes como China y la desaceleración de la economía global a finales del 2008<sup>27</sup>. La Figura 38 y la Figura 39 muestran el

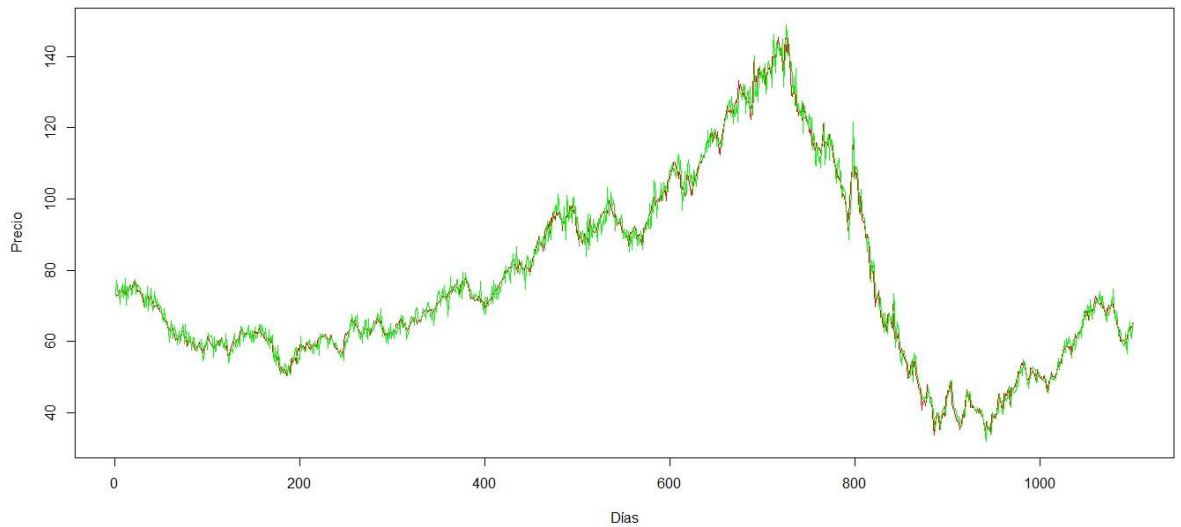
<sup>27</sup> [Citado el 25 de Julio de 2016] Disponible en <<http://www.preciopetroleo.net/precio-petroleo-2008.html>>.

modelamiento del precio del petróleo en este intervalo de tiempo mediante GBM sin saltos y con saltos Poisson respectivamente.

**Figura 38. GBM sin saltos Poisson vs Precio del petróleo WTI**

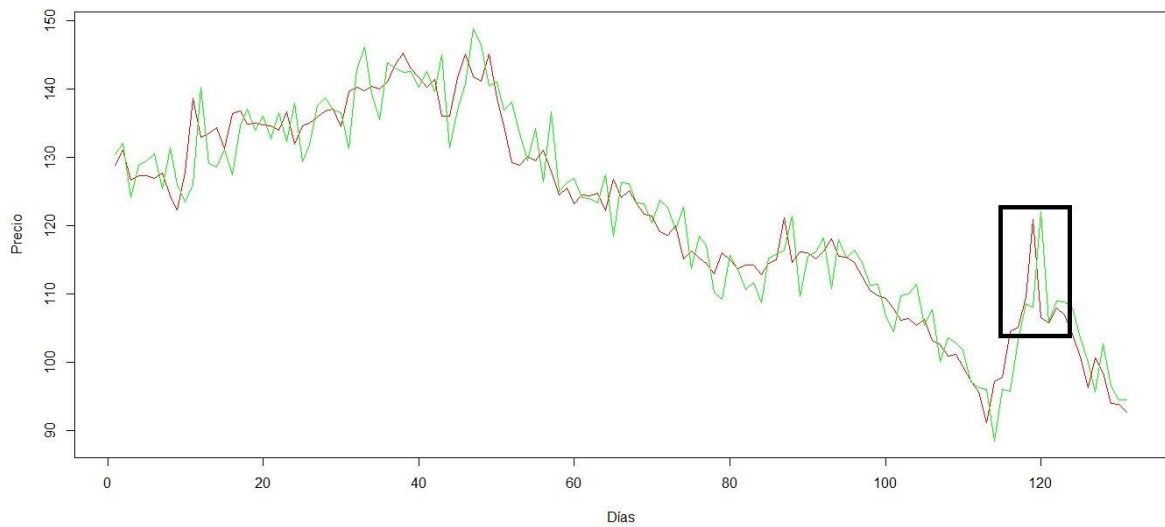


**Figura 39. GBM con saltos Poisson vs Precio del petróleo WTI**

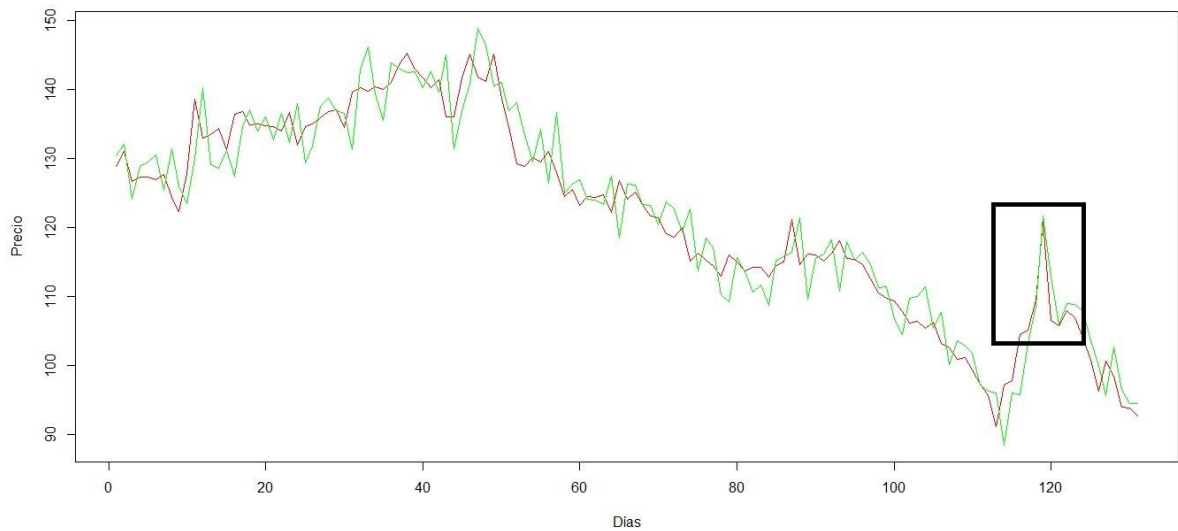


En este período de tiempo, se consideraron como saltos abruptos los cambios de precio entre los días 21-23 de Septiembre de 2008. La Figura 40 y la Figura 41 muestran un zoom durante este periodo para ambos modelos.

**Figura 40. Zoom GBM sin saltos Poisson WTI**



**Figura 41. Zoom GBM con saltos Poisson WTI**



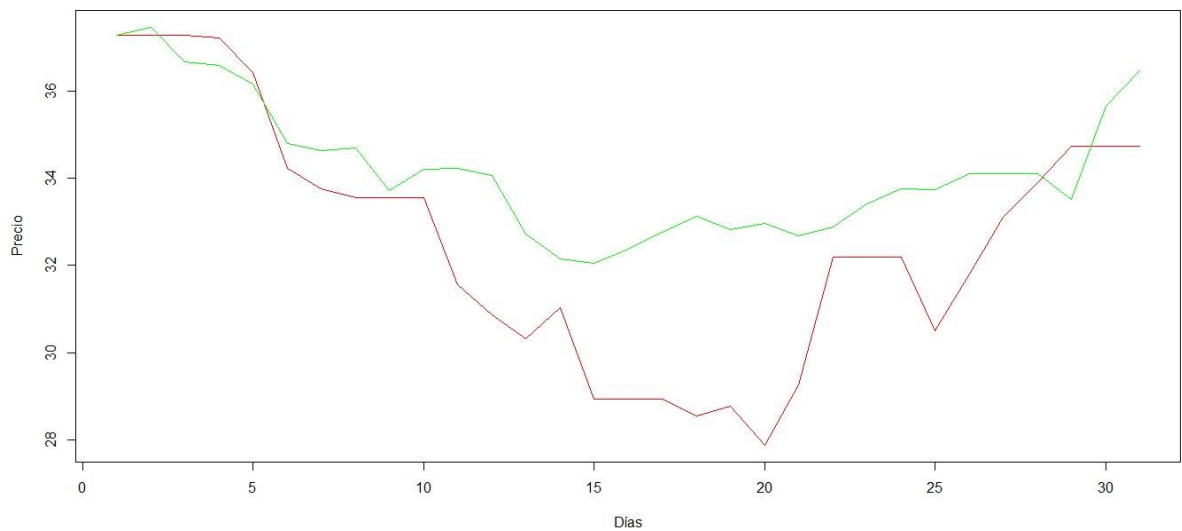
**Tabla 15. Comparación precios WTI vs GBM con y sin saltos.**

| <b>Fechas/Precios</b> | <b>21/09/2008</b> | <b>22/09/2008</b> | <b>23/09/2008</b> |
|-----------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| <b>Observados</b>     | 109,57            | 120,92            | 106,61            |
| <b>GBM</b>            | 108,66            | 108,12            | 122,05            |
| <b>GBM con Saltos</b> | 108,66            | 121,62            | 112,96            |

Se evidencia a partir de la Tabla 15 que bajo la estrategia de saltos Poisson el modelamiento se ajusta de manera más eficiente a los precios observados que sin saltos.

Con base en el análisis realizado, se decidió efectuar el pronóstico del precio del petróleo en su referencia BRENT para el mes de Enero del 2016 tomando como base los 2 años previos a este mes, obteniendo los siguientes resultados:

**Figura 42. Precios Simulados BRENT Enero 2016 por GBM con Saltos Poisson**



En esta sección, es evidente que el Movimiento Geométrico Browniano con saltos Poisson logra modelar eficientemente las grandes fluctuaciones a las que se ve sometido el precio del petróleo en sus referencias WTI y BRENT a través del tiempo, en comparación al Movimiento Geométrico Browniano sin saltos.

Por otra parte, el Movimiento Geométrico Browniano con saltos Poisson es el más eficiente en pronosticar el precio del petróleo para el mes de Enero de 2016, en comparación del GBM sin saltos y GBM con reversión a la media. (Ver Anexo F)

## 5. CONCLUSIONES

Se han realizado dos modelamientos para el precio del petróleo en sus referencias WTI y BRENT con el fin de determinar cuál de ellos ofrece de manera más eficiente un modelamiento y pronóstico de dicho *commoditie*. Los modelos a evaluar fueron los procesos estocásticos ARIMA con el proceso ARCH – GARCH y el Movimiento Geométrico Browniano (GBM) con posible Reversión a la Media o saltos Poisson. Para la simulación de los modelos se utilizó el software “R sthatics”.

El proceso estocástico ARIMA logró establecer un modelo para el precio del petróleo en su referencia BRENT y otro modelo para el precio en su referencia WTI. Ambos procesos lograron modelar con un nivel de significancia del 99% los precios del petróleo en sus dos referencias. Adicionalmente, estos modelos logran pronosticar un precio constante para todo el mes de Enero de 2016, el cual es un valor que se acerca de manera significativa a los precios reales que se presentaron en este mes. Sin embargo, es claro que estos modelos presentaron ciertos niveles de errores, lo cual es normal por las variaciones abruptas que ha presentado el precio del petróleo en sus dos referencias a través del tiempo. Con el fin de controlar la heterocedasticidad de los errores presentados en los modelos ARIMA, se implementó el modelo ARCH – GARCH en ambas referencias, obteniendo un pronóstico más exacto que el propuesto por ARIMA para el mes de Enero de 2016.

Por otra parte, en el proceso estocástico Movimiento Geométrico Browniano se logran modelar de manera eficiente la tendencia (*drift*) del precio del petróleo en sus referencias WTI y BRENT a través del tiempo. Sin embargo, este modelo añade un nivel de volatilidad debido a la presencia de componentes estocásticos con distribuciones de probabilidad definidas que afecta el comportamiento del precio a través del tiempo.

Al realizar el análisis del Movimiento Geométrico Browniano con Reversión a la Media, es notable que si bien este modelo sirve para hacer un pronóstico a largo plazo, este solo se limita a pronosticar un valor en un tiempo específico, mas no es eficiente en pronosticar el comportamiento del precio a través del tiempo.

Se implementó el Movimiento Geométrico Browniano con saltos Poisson, con el fin de modelar los cambios abruptos que experimenta el precio del petróleo por motivos externos a su dinámica normal. Es notable que su capacidad de modelamiento es superior que la del GBM sin saltos Poisson, ya que éste no posee un parámetro matemático que logre simular de manera eficaz estas fluctuaciones inesperadas.

Como fruto de este proyecto de investigación, se redactó un artículo científico de carácter publicable para una revista Colombiana indexada por Colciencias.

Finalmente, en este proyecto de investigación se concluye que de los modelos propuestos a estudiar, el que logra modelar eficientemente a través del tiempo el precio del petróleo en sus referencias WTI y BRENT y logra realizar un pronóstico para el mes de Enero de 2016, en cuanto a variabilidad y exactitud, es el modelo ARIMA implementándole el modelo ARCH – GARCH.

## 6. RECOMENDACIONES

Para el análisis, modelamiento y pronóstico del precio de petróleo en su referencia WTI y BRENT se tuvo en cuenta el comportamiento del precio en dichas bases. Sería interesante y beneficioso para el modelo, el agregar variables que afectan de manera significativa el precio del petróleo tales como el precio del dólar u otros valores de monedas extranjeras, situaciones económicas, sociales y políticas globales, entre otras.

Para futuros proyectos de investigación en donde se evalué una posible inversión o una fuerte inyección de capital, sería deseable dentro de su análisis, el tener en cuenta el modelamiento y pronóstico del *commoditie* que da el valor agregado a estas nuevas ideas de mercado, utilizando este tipo de modelos, con el fin de establecer un panorama más confiable al futuro inversionista.

## BIBLIOGRAFÍA

ABA, Mohammed & GOARD, Joanna. Stochastic Models for Oil Prices and the Pricing of Futures on Oil. En: *Applied Mathematical Finance*, Vol. 22, No. 2 (2015); p.189-206.

ABDULLAH Rana & SHABRI, Ani. Daily Crude Oil Price Forecasting Model Using Arima: Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic and Support Vector Machine. En: *American Journal of Applied Sciences*, Vol. 11, No. 3 (2014); p. 425-432.

AL-HARTHY, Mansoor. Stochastic Oil Price Models: Comparison and Impact. En: *The Engineering Economist*, Vol. 52 (2007); p.269-284.

ALVAREZ, Sergio. La predicción del precio del petróleo: Una aproximación basada en Series Temporales de Intervalos (STI) . Madrid: Universidad Pontificia Comillas. 2014.

ARREDONDO, Brenda Haydee. Un modelo estocástico para los precios de futuros del petróleo. Trabajo de Grado Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales. México D.F: Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, 2012.

CAMPBELL, Wallace. Valuation of timberland under price uncertainty. Thesis Doctor of Philosophy Applied Economics. South Carolina: Clemson University, 2013, 7 p.

CELEDÓN, Nohora. Caída Del Precio Del Petróleo Afecta Metas Del 2015. En: *Portafolio*. [En Línea]. Noviembre 30 De 2014. [Consultado 01 de Enero de 2016]. Disponible En: [Http://Www.Portafolio.Co/Economia/Caida-Del-Precio-Del-Petroleo-Afecta-Metas-Del-2015](http://Www.Portafolio.Co/Economia/Caida-Del-Precio-Del-Petroleo-Afecta-Metas-Del-2015).

DIXIT, Avinash K. and PINDYCK, Robert S. Investment under uncertainty. New Jersey, Princeton University Press, 1994. 74 p.

FOUQUE, Jean-Pierre; PAPANICOLAOU, George and SIRCAR, K. Ronnie. Mean-reverting stochastic volatility. International Journal of theoretical and applied finance, 2000, vol. 3, no 01, p. 101-142.

GUERRERO GUZMÁN, Víctor Manuel, *et al.* Análisis estadístico de series de tiempo económicas. Thomson: México. 2003. 120 p.

GUJARATI, Damodar y PORTER, Dawn. Econometría. (Quinta Ed.) México: Mc Graw Hill, 2010. 946 p.

MASCAREÑAS, Juan. Procesos estocásticos: El proceso de Wiener. Universidad Complutense de Madrid. 2008.

MCLACHLAN, Geoffrey J. and KRISHNAN, Thriyambakam. Wiley series in probability and statistics. The EM Algorithm and Extensions, Second Edition, 2000, p. 361-369.

MONTGOMERY, Douglas C., *et al.* Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería. CATIE, Turrialba (Costa Rica), 2006.

OKSENDAL, Bernt. Stochastic differential equations: an introduction with applications. 5th Edition. Springer Science & Business Media, 2013, 62-63 p.

Oracle Crystal Ball. EPM Information Development Team. Theil's U. [aplicación en Línea]: Versión 11.1.2.3. U.S.: Oracle, 2013. Disponible en: [https://docs.oracle.com/cd/E40248\\_01/epm.1112/cb\\_statistical/frameset.htm?ch07s02s03s04.html](https://docs.oracle.com/cd/E40248_01/epm.1112/cb_statistical/frameset.htm?ch07s02s03s04.html)

PALACIO, Sebastián. Análisis, Descripción y Simulación de Modelos Estocásticos de Tasas de Interés: Un acercamiento desde las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas. Medellín: Universidad EAFIT, 2009. 8-10 p.

PINDYCH, Robert y RUBINFELD, Daniel L. Econometría: modelos y pronósticos. Cuarta Edición. Traducido por Jorge Alberto Velázquez Arellano. México: McGraw Hill, 2001. p. 299.

TAYLOR, Howard M. and KARLIN, Samuel. An introduction to stochastic modeling. Third Edition. Academic press, 1998.

TEKA, Kubrom Hisho. Parameter estimation of the Black-Scholes-Merton model. Thesis Master of Science. Kansas: Kansas State University, 2013. 25-28 p.

Torben Bosler, Fabian. Models for oil Price prediction and forecasting. San Diego, 2010, 50 p. Thesis (In Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree Master of Science in Applied Mathematics). San Diego State University. Department of Mathematics and Statistics. Disponible en: <http://sdsu-dspace.calstate.edu/handle/10211.10/433>

VITORIANO, Begoña. Modelos y Métodos de Simulación Estocástica: Aplicación en la Valoración de Opciones Financieras. Universidad Complutense Madrid. Facultad de Matemáticas, 2012.

WEBOMETRICS. Ranking Web de Universidades Colombianas. [base de datos en línea]. [consultado 26 de Diciembre de 2015]. Disponible en: [http://www.webometrics.info/es/Latin\\_America\\_es/Colombia](http://www.webometrics.info/es/Latin_America_es/Colombia).

ZHIJUN YANG . Geometric Brownian Motion Model in Financial Market. [Artículo en línea] [Consultado el 11 de Enero de 2016]. Disponible en: <http://www.stat.berkeley.edu/~aldous/Research/Ugrad/ZY3.pdf>

## ANEXOS

### Anexo A. Predicción ARIMA (3,1,2) para Log(BRENT)

| Fecha      | Forecast | Low 95 | High 95 | Exponencial de Forecast | Exponencial Low 95 | Exponencial High 95 |
|------------|----------|--------|---------|-------------------------|--------------------|---------------------|
| 01/01/2016 | 3,619    | 3,584  | 3,653   | 37,289                  | 36,034             | 38,588              |
| 02/01/2016 | 3,617    | 3,571  | 3,664   | 37,238                  | 35,557             | 38,999              |
| 03/01/2016 | 3,618    | 3,562  | 3,673   | 37,251                  | 35,245             | 39,371              |
| 04/01/2016 | 3,618    | 3,554  | 3,682   | 37,270                  | 34,950             | 39,745              |
| 05/01/2016 | 3,618    | 3,546  | 3,691   | 37,275                  | 34,664             | 40,082              |
| 06/01/2016 | 3,618    | 3,538  | 3,698   | 37,273                  | 34,404             | 40,381              |
| 07/01/2016 | 3,618    | 3,531  | 3,705   | 37,272                  | 34,170             | 40,654              |
| 08/01/2016 | 3,618    | 3,525  | 3,711   | 37,272                  | 33,957             | 40,910              |
| 09/01/2016 | 3,618    | 3,519  | 3,717   | 37,272                  | 33,758             | 41,152              |
| 10/01/2016 | 3,618    | 3,514  | 3,723   | 37,272                  | 33,571             | 41,381              |
| 11/01/2016 | 3,618    | 3,508  | 3,728   | 37,272                  | 33,394             | 41,600              |
| 12/01/2016 | 3,618    | 3,503  | 3,733   | 37,272                  | 33,227             | 41,810              |
| 13/01/2016 | 3,618    | 3,499  | 3,738   | 37,272                  | 33,067             | 42,012              |
| 14/01/2016 | 3,618    | 3,494  | 3,743   | 37,272                  | 32,914             | 42,207              |
| 15/01/2016 | 3,618    | 3,489  | 3,747   | 37,272                  | 32,767             | 42,396              |
| 16/01/2016 | 3,618    | 3,485  | 3,751   | 37,272                  | 32,626             | 42,580              |
| 17/01/2016 | 3,618    | 3,481  | 3,756   | 37,272                  | 32,490             | 42,758              |
| 18/01/2016 | 3,618    | 3,477  | 3,760   | 37,272                  | 32,358             | 42,932              |
| 19/01/2016 | 3,618    | 3,473  | 3,764   | 37,272                  | 32,231             | 43,102              |
| 20/01/2016 | 3,618    | 3,469  | 3,767   | 37,272                  | 32,107             | 43,268              |
| 21/01/2016 | 3,618    | 3,465  | 3,771   | 37,272                  | 31,987             | 43,430              |
| 22/01/2016 | 3,618    | 3,462  | 3,775   | 37,272                  | 31,870             | 43,589              |
| 23/01/2016 | 3,618    | 3,458  | 3,778   | 37,272                  | 31,757             | 43,745              |
| 24/01/2016 | 3,618    | 3,455  | 3,782   | 37,272                  | 31,646             | 43,898              |
| 25/01/2016 | 3,618    | 3,451  | 3,785   | 37,272                  | 31,538             | 44,049              |
| 26/01/2016 | 3,618    | 3,448  | 3,789   | 37,272                  | 31,432             | 44,197              |
| 27/01/2016 | 3,618    | 3,445  | 3,792   | 37,272                  | 31,329             | 44,342              |
| 28/01/2016 | 3,618    | 3,441  | 3,795   | 37,272                  | 31,228             | 44,485              |
| 29/01/2016 | 3,618    | 3,438  | 3,798   | 37,272                  | 31,130             | 44,627              |
| 30/01/2016 | 3,618    | 3,435  | 3,801   | 37,272                  | 31,033             | 44,766              |

## Anexo B. Predicción ARIMA (4,1,0) para Log(WTI)

| Fechas     | Forecast | Low 95 | High 95 | Exponencial de Forecast | Exponencial Low 95 | Exponencial High 95 |
|------------|----------|--------|---------|-------------------------|--------------------|---------------------|
| 01/01/2016 | 3,613    | 3,576  | 3,650   | 37,069                  | 35,731             | 38,456              |
| 02/01/2016 | 3,612    | 3,562  | 3,661   | 37,028                  | 35,235             | 38,913              |
| 03/01/2016 | 3,611    | 3,552  | 3,671   | 37,012                  | 34,874             | 39,282              |
| 04/01/2016 | 3,612    | 3,543  | 3,681   | 37,030                  | 34,565             | 39,671              |
| 05/01/2016 | 3,612    | 3,534  | 3,689   | 37,028                  | 34,266             | 40,012              |
| 06/01/2016 | 3,612    | 3,526  | 3,697   | 37,026                  | 34,003             | 40,317              |
| 07/01/2016 | 3,612    | 3,519  | 3,704   | 37,026                  | 33,764             | 40,603              |
| 08/01/2016 | 3,612    | 3,513  | 3,710   | 37,027                  | 33,543             | 40,872              |
| 09/01/2016 | 3,612    | 3,507  | 3,717   | 37,027                  | 33,337             | 41,125              |
| 10/01/2016 | 3,612    | 3,501  | 3,722   | 37,026                  | 33,143             | 41,365              |
| 11/01/2016 | 3,612    | 3,495  | 3,728   | 37,027                  | 32,960             | 41,595              |
| 12/01/2016 | 3,612    | 3,490  | 3,733   | 37,027                  | 32,786             | 41,815              |
| 13/01/2016 | 3,612    | 3,485  | 3,738   | 37,027                  | 32,620             | 42,028              |
| 14/01/2016 | 3,612    | 3,480  | 3,743   | 37,027                  | 32,462             | 42,233              |
| 15/01/2016 | 3,612    | 3,475  | 3,748   | 37,027                  | 32,310             | 42,432              |
| 16/01/2016 | 3,612    | 3,471  | 3,752   | 37,027                  | 32,163             | 42,625              |
| 17/01/2016 | 3,612    | 3,466  | 3,757   | 37,027                  | 32,022             | 42,813              |
| 18/01/2016 | 3,612    | 3,462  | 3,761   | 37,027                  | 31,886             | 42,996              |
| 19/01/2016 | 3,612    | 3,458  | 3,765   | 37,027                  | 31,754             | 43,175              |
| 20/01/2016 | 3,612    | 3,454  | 3,769   | 37,027                  | 31,625             | 43,350              |
| 21/01/2016 | 3,612    | 3,450  | 3,773   | 37,027                  | 31,501             | 43,521              |
| 22/01/2016 | 3,612    | 3,446  | 3,777   | 37,027                  | 31,380             | 43,689              |
| 23/01/2016 | 3,612    | 3,442  | 3,781   | 37,027                  | 31,262             | 43,853              |
| 24/01/2016 | 3,612    | 3,439  | 3,785   | 37,027                  | 31,148             | 44,015              |
| 25/01/2016 | 3,612    | 3,435  | 3,788   | 37,027                  | 31,036             | 44,174              |
| 26/01/2016 | 3,612    | 3,432  | 3,792   | 37,027                  | 30,926             | 44,330              |
| 27/01/2016 | 3,612    | 3,428  | 3,795   | 37,027                  | 30,819             | 44,484              |
| 28/01/2016 | 3,612    | 3,425  | 3,799   | 37,027                  | 30,715             | 44,635              |
| 29/01/2016 | 3,612    | 3,421  | 3,802   | 37,027                  | 30,613             | 44,784              |
| 30/01/2016 | 3,612    | 3,418  | 3,805   | 37,027                  | 30,512             | 44,931              |

**Anexo C. Predicción modelo GARCH (3,0) BRENT.**

| <b>Periodos</b> | <b>Series</b> | <b>Sigma</b> | <b>Exp(series)</b> | <b>Exp(Sigma)</b> |
|-----------------|---------------|--------------|--------------------|-------------------|
| T+1             | 3,617         | 0,023        | 37,226             | 1,023             |
| T+2             | 3,616         | 0,022        | 37,189             | 1,022             |
| T+3             | 3,617         | 0,022        | 37,226             | 1,022             |
| T+4             | 3,617         | 0,021        | 37,226             | 1,022             |
| T+5             | 3,617         | 0,021        | 37,226             | 1,021             |
| T+6             | 3,617         | 0,021        | 37,226             | 1,021             |
| T+7             | 3,617         | 0,021        | 37,226             | 1,021             |
| T+8             | 3,617         | 0,021        | 37,226             | 1,021             |
| T+9             | 3,617         | 0,021        | 37,226             | 1,021             |
| T+10            | 3,617         | 0,021        | 37,226             | 1,021             |
| T+11            | 3,617         | 0,021        | 37,226             | 1,021             |
| T+12            | 3,617         | 0,021        | 37,226             | 1,021             |
| T+13            | 3,617         | 0,021        | 37,226             | 1,021             |
| T+14            | 3,617         | 0,021        | 37,226             | 1,021             |
| T+15            | 3,617         | 0,021        | 37,226             | 1,021             |
| T+16            | 3,617         | 0,021        | 37,226             | 1,021             |
| T+17            | 3,618         | 0,021        | 37,263             | 1,021             |
| T+18            | 3,618         | 0,021        | 37,263             | 1,021             |
| T+19            | 3,618         | 0,021        | 37,263             | 1,021             |
| T+20            | 3,618         | 0,021        | 37,263             | 1,021             |
| T+21            | 3,618         | 0,021        | 37,263             | 1,021             |
| T+22            | 3,618         | 0,021        | 37,263             | 1,021             |
| T+23            | 3,618         | 0,021        | 37,263             | 1,021             |
| T+24            | 3,618         | 0,021        | 37,263             | 1,021             |
| T+25            | 3,618         | 0,021        | 37,263             | 1,021             |
| T+26            | 3,618         | 0,021        | 37,263             | 1,021             |
| T+27            | 3,618         | 0,021        | 37,263             | 1,021             |
| T+28            | 3,618         | 0,021        | 37,263             | 1,021             |
| T+29            | 3,618         | 0,021        | 37,263             | 1,021             |

**Anexo D. Predicción modelo GARCH (2,0) WTI.**

| <b>Periodos</b> | <b>Series</b> | <b>Sigma</b> | <b>exp(series)</b> | <b>exp(sigma)</b> |
|-----------------|---------------|--------------|--------------------|-------------------|
| T+1             | 3,613         | 0,021        | 37,077             | 1,021             |
| T+2             | 3,612         | 0,020        | 37,040             | 1,020             |
| T+3             | 3,612         | 0,022        | 37,040             | 1,022             |
| T+4             | 3,613         | 0,023        | 37,077             | 1,023             |
| T+5             | 3,613         | 0,023        | 37,077             | 1,024             |
| T+6             | 3,613         | 0,024        | 37,077             | 1,024             |
| T+7             | 3,614         | 0,025        | 37,114             | 1,025             |
| T+8             | 3,614         | 0,025        | 37,114             | 1,025             |
| T+9             | 3,614         | 0,025        | 37,114             | 1,026             |
| T+10            | 3,614         | 0,026        | 37,114             | 1,026             |
| T+11            | 3,615         | 0,026        | 37,151             | 1,026             |
| T+12            | 3,615         | 0,026        | 37,151             | 1,027             |
| T+13            | 3,615         | 0,026        | 37,151             | 1,027             |
| T+14            | 3,616         | 0,027        | 37,189             | 1,027             |
| T+15            | 3,616         | 0,027        | 37,189             | 1,027             |
| T+16            | 3,616         | 0,027        | 37,189             | 1,027             |
| T+17            | 3,617         | 0,027        | 37,226             | 1,027             |
| T+18            | 3,617         | 0,027        | 37,226             | 1,027             |
| T+19            | 3,617         | 0,027        | 37,226             | 1,027             |
| T+20            | 3,617         | 0,027        | 37,226             | 1,028             |
| T+21            | 3,618         | 0,027        | 37,263             | 1,028             |
| T+22            | 3,618         | 0,027        | 37,263             | 1,028             |
| T+23            | 3,618         | 0,027        | 37,263             | 1,028             |
| T+24            | 3,619         | 0,027        | 37,300             | 1,028             |
| T+25            | 3,619         | 0,027        | 37,300             | 1,028             |
| T+26            | 3,619         | 0,027        | 37,300             | 1,028             |
| T+27            | 3,620         | 0,027        | 37,338             | 1,028             |
| T+28            | 3,620         | 0,027        | 37,338             | 1,028             |
| T+29            | 3,620         | 0,027        | 37,338             | 1,028             |

## Anexo E. Precios BRENT Enero reales vs Simulados GBM.

| Fecha      | Precios Reales | Simulados GBM | Error % |
|------------|----------------|---------------|---------|
| 01/01/2016 | 37,28          | 37,28         | 0,0%    |
| 02/01/2016 | 37,28          | 37,51         | 0,6%    |
| 03/01/2016 | 37,28          | 39,23         | 5,2%    |
| 04/01/2016 | 37,22          | 39,77         | 6,8%    |
| 05/01/2016 | 36,42          | 38,95         | 6,9%    |
| 06/01/2016 | 34,23          | 37,89         | 10,7%   |
| 07/01/2016 | 33,75          | 37,68         | 11,7%   |
| 08/01/2016 | 33,55          | 37,78         | 12,6%   |
| 09/01/2016 | 33,55          | 38,32         | 14,2%   |
| 10/01/2016 | 33,55          | 36,96         | 10,2%   |
| 11/01/2016 | 31,55          | 36,75         | 16,5%   |
| 12/01/2016 | 30,86          | 36,78         | 19,2%   |
| 13/01/2016 | 30,31          | 37,25         | 22,9%   |
| 14/01/2016 | 31,03          | 36,73         | 18,4%   |
| 15/01/2016 | 28,94          | 36,96         | 27,7%   |
| 16/01/2016 | 28,94          | 36,35         | 25,6%   |
| 17/01/2016 | 28,94          | 38,47         | 32,9%   |
| 18/01/2016 | 28,55          | 37,90         | 32,7%   |
| 19/01/2016 | 28,76          | 38,01         | 32,2%   |
| 20/01/2016 | 27,88          | 38,27         | 37,3%   |
| 21/01/2016 | 29,25          | 38,96         | 33,2%   |
| 22/01/2016 | 32,18          | 37,82         | 17,5%   |
| 23/01/2016 | 32,18          | 37,59         | 16,8%   |
| 24/01/2016 | 32,18          | 37,33         | 16,0%   |
| 25/01/2016 | 30,50          | 37,10         | 21,6%   |
| 26/01/2016 | 31,80          | 37,55         | 18,1%   |
| 27/01/2016 | 33,10          | 37,71         | 13,9%   |
| 28/01/2016 | 33,89          | 37,09         | 9,4%    |
| 29/01/2016 | 34,74          | 35,89         | 3,3%    |
| 30/01/2016 | 34,74          | 35,90         | 3,3%    |
| 31/01/2016 | 34,74          | 34,91         | 0,5%    |

## Anexo F. Precios BRENT Enero reales vs Simulados GBM con Saltos

| Fecha      | Precios Reales | Simulados GBM con Saltos | Error % |
|------------|----------------|--------------------------|---------|
| 01/01/2016 | 37,28          | 37,28                    | 0,0%    |
| 02/01/2016 | 37,28          | 37,46                    | 0,5%    |
| 03/01/2016 | 37,28          | 36,66                    | 1,7%    |
| 04/01/2016 | 37,22          | 36,58                    | 1,7%    |
| 05/01/2016 | 36,42          | 36,15                    | 0,7%    |
| 06/01/2016 | 34,23          | 34,79                    | 1,6%    |
| 07/01/2016 | 33,75          | 34,63                    | 2,6%    |
| 08/01/2016 | 33,55          | 34,69                    | 3,4%    |
| 09/01/2016 | 33,55          | 33,72                    | 0,5%    |
| 10/01/2016 | 33,55          | 34,21                    | 2,0%    |
| 11/01/2016 | 31,55          | 34,23                    | 8,5%    |
| 12/01/2016 | 30,86          | 34,06                    | 10,4%   |
| 13/01/2016 | 30,31          | 32,72                    | 7,9%    |
| 14/01/2016 | 31,03          | 32,14                    | 3,6%    |
| 15/01/2016 | 28,94          | 32,05                    | 10,7%   |
| 16/01/2016 | 28,94          | 32,38                    | 11,9%   |
| 17/01/2016 | 28,94          | 32,76                    | 13,2%   |
| 18/01/2016 | 28,55          | 33,13                    | 16,0%   |
| 19/01/2016 | 28,76          | 32,81                    | 14,1%   |
| 20/01/2016 | 27,88          | 32,97                    | 18,2%   |
| 21/01/2016 | 29,25          | 32,68                    | 11,7%   |
| 22/01/2016 | 32,18          | 32,89                    | 2,2%    |
| 23/01/2016 | 32,18          | 33,42                    | 3,9%    |
| 24/01/2016 | 32,18          | 33,75                    | 4,9%    |
| 25/01/2016 | 30,50          | 33,73                    | 10,6%   |
| 26/01/2016 | 31,80          | 34,09                    | 7,2%    |
| 27/01/2016 | 33,10          | 34,11                    | 3,1%    |
| 28/01/2016 | 33,89          | 34,11                    | 0,6%    |
| 29/01/2016 | 34,74          | 33,52                    | 3,5%    |
| 30/01/2016 | 34,74          | 35,64                    | 2,6%    |
| 31/01/2016 | 34,74          | 36,46                    | 5,0%    |