

CUATRO EXTENSIONES DE LA DUALIDAD DE STONE

Autor:

Edwar Alexis Ramírez Ardila

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2017

CUATRO EXTENSIONES DE LA DUALIDAD DE STONE

Autor:

EDWAR ALEXIS RAMÍREZ ARDILA

Trabajo de grado como requisito para optar al título de:

Matemático

Directora:

SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA

Doctora en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga
2017

*A mi Hermana y
mejor amiga Zuly*

AGRADECIMIENTOS

Mis más sinceros agradecimientos

★ A **Dios**.

★ A la profesora **Dra. Sonia M. Sabogal** que, como directora de esta tesis, me ha orientado, apoyado, corregido y motivado a continuar con mis estudios.

★ A mis padres, **Luis Carlos** y **María del Carmen** que gracias a sus esfuerzos y sacrificio me han permitido ser quien soy.

★ A mi hermana **Yully Zuley**, ella siempre ha estado a mi lado dándome ánimos, su apoyo incondicional y alientos han sido de gran ayuda para seguir adelante.

★ A mi tía **Mónica** que de una u otra forma me brindó su apoyo en el transcurso de mi carrera y en general agradezco a toda mi familia.

★ A todo aquel que durante los últimos cuatro años me brindó su amistad. En especial agradezco a mis amigos de carrera por su apoyo moral, por darme fuerzas en momentos difíciles y por todas las alegrías que pasamos. Mis mejores recuerdos de la universidad son gracias a ustedes.

★ A cada profesor que contribuyó en mi formación como matemático.

TÍTULO: CUATRO EXTENSIONES DE LA DUALIDAD DE STONE.¹

AUTOR: RAMÍREZ ARDILA Edwar Alexis.²

PALABRAS CLAVES: Anillos de Boole, Espacios de Stone, categoría, funtor, dualidad, dualidad de Stone, adjunción, relación de ligazón y conexidad algebraica.

DESCRIPCIÓN

Este trabajo consiste principalmente en estudiar y presentar cuatro extensiones de la dualidad de Stone, para ello una idea esencial será considerar las categorías **ABR** y **STR**, luego se extenderán los funtores clásicos de Stone a estas categorías y se dará una adjunción (estos conceptos por supuesto se precisan en el trabajo).

En el primer capítulo (preliminares) se hace un breve repaso de la teoría de anillos de Boole con 1, la teoría de los espacios de Stone y también de los conceptos de la teoría de categorías que se va a usar. En el segundo capítulo se hace un estudio de la dualidad de Stone, que se da entre las categorías **AB₁** y **ST**.

En el último capítulo se van enriqueciendo las categorías **ABR** y **STR** al dotar a los anillos de Boole con una “cierta” relación, lo que significará, enriquecer también al espacio de Stone correspondiente con una “cierta” relación de tal manera que la adjunción establecida en el segundo capítulo restringida a estas nuevas categorías resulte ser una dualidad, obteniendo así cuatro extensiones de la dualidad de Stone.

Finalmente y como aplicación de la dualidad entre **ABRL** (anillos de Boole con una relación de “ligazón”) y **RCHS** (Espacios de Stone con una relación cerrada y de equivalencia), se da una visión algebraica de la conexidad en la categoría **ABRL** y se muestra que la conexidad topológica en los cocientes Hausdorff de espacios de Stone coincide con la propiedad algebraica de la conexidad ya definida y en particular se demuestra que todo continuo se puede representar algebraicamente mediante un objeto conexo de la categoría **ACRL** (anillo de Cantor con una relación de “ligazón”).

¹Trabajo de grado

²Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Sonia Marleni Sabogal Pedraza (Doctora en Matemáticas).

TITLE: FOUR EXTENSIONS OF THE STONE DUALITY.³

AUTHOR: RAMÍREZ ARDILA Edwar Alexis.⁴

KEY WORDS: Boolean rings, Stone spaces, category, functor, duality, Stone duality, adjunction y algebraic connectivity.

DESCRIPTION

This work mainly studies and presents four extensions of Stone duality. For this purpose an essential idea will be to consider the categories **ABR** and **STR**, then the classic functors of Stone will be extended to these categories giving an adjunction (Of course these concepts are precised later into the work).

The first chapter (preliminaries) is a brief review of the theory of Boolean rings with unity and the Stone spaces theory, also some concepts of categoriy theory which will be used. In the second chapter we give a study of the Stone duality that occurs between the categories **AB₁** and **ST**.

In the last chapter the categories **ABR** and **STR** are enriched by endowing Booleans rings with a “certain” relation, this means also to enrich the corresponding Stone space with a “certain” relation such that the adjunction established in the second chapter, restricted to these new categories results to be a duality, obtaining in this manner four extensions of the Stone duality.

Finally, as an application of the duality between the categories **ABRL** (Boolean rings with unit and a “link” relation) and **RCHS** (Stone space with a closed and equivalence relation), we present an algebraic view of the connectedness in **ABRL** and this show that the topological connectedness in the Hausdorff quotients of Stone space can be traslated to the algebraic property of the connectedness already defined about a certain object of the category **ABRL**, and in particular this shows that any continuum can be represented algebraically as a connected object of the **ACRL** category (Cantor ring with a “link” relationship).

³degree work

⁴Faculty of Sciences. School of Mathematics. Advisor: Sonia Marleni Sabogal Pedraza (PhD in mathematics).

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	11
1 PRELIMINARES	13
1.1 ANILLOS DE BOOLE	13
1.2 ESPACIOS DE STONE	22
1.3 ANILLOS DE BOOLE <i>vs</i> ESPACIOS DE STONE	26
1.4 CATEGORÍAS, FUNTORES Y DUALIDAD	32
1.5 ADJUNCIÓN	36
2 UNA VERSIÓN MODERNA DE LA DUALIDAD DE STONE	39
2.1 DUALIDAD DE STONE	40
2.2 LA ADJUNCIÓN $\langle \mathcal{S}, \mathcal{A} \rangle$	43
3 CUATRO EXTENSIONES DE LA DUALIDAD DE STONE	49
3.1 $ABR\mathcal{L}$ <i>vs</i> STRC	50
3.2 $ABR\mathcal{L}_1$ <i>vs</i> SRCS y $ABR\mathcal{L}_2$ <i>vs</i> RPHS	56
3.3 ABRL <i>vs</i> RCHS	58
3.4 EXTENDIENDO LA DUALIDAD	60
3.5 APLICACIONES DE LA DUALIDAD	62
REFERENCIAS	64
BIBLIOGRAFÍA	66

ÍNDICE ALFABÉTICO

- Átomo, 15
- Adjunción, 37
- Anillo de Boole, 13
- Base de filtro, 16
- Bifunctor, 36
- Categoría, 32
- Categoría producto, 36
- Categorías equivalentes, 36
- Categorías isomorfas, 36
- Compactación, 28
- Compactificación de Stone-Čech, 28
- Conexidad en la categoría **ABRL**, 63
- Continuo, 62
- Corretracción, 35
- Dualidad, 36
- El espacio de Cantor, 24
- El funtor \mathbb{A} , 43
- El funtor \mathbb{S} , 43
- Espacio compacto, 22
- Espacio conexo, 23
- Espacio de Hausdorff, 22
- Espacio de Stone, 23
- Espacio producto, 23
- Espacio totalmente desconexo, 23
- Filtro, 15
- Funciones abiertas, 24
- Funciones cerradas, 24
- Functor contravariante, 34
- Functor covariante, 34
- iso natural, 36
- Isomorfismo, 35
- La categoría **AB**₁, 33
- La categoría **ABRL**, 58
- La categoría **ABR**, 37
- La categoría **ABRL**, 50
- La categoría **ABRL**₁, 56
- La categoría **ABRL**₂, 57
- La categoría **ACRL**, 62
- La categoría **RCHC**, 62
- La categoría **RCHS**, 59
- La categoría **RPHS**, 58
- La categoría **Set**, 35
- La categoría **SRCS**, 58
- La categoría **STRC**, 50
- La categoría **STR**, 37
- La categoría **ST**, 33
- Los bifuntores H y H' , 36
- Retracción, 35
- Subcategoría plena, 33
- Subcategoría propia, 33
- Topología cociente, 25
- Topología de Zariski, 19
- Transformación natural, 34
- Ultrafiltro, 16

INTRODUCCIÓN

El teorema de **representación de Stone** fue establecido por **Marsall Harvey Stone** en los años treinta, en el artículo [6] y quizá es cronológicamente es el primer teorema que conecta dos campos de la matemática: el álgebra y la topología. En dicho artículo, entre otros resultados, M.H. Stone demuestra que la teoría de los anillos de Boole es matemáticamente equivalente a la teoría de los espacios topológicos localmente compactos, Hausdorff y totalmente disconexos, también llamados por Stone, espacios Booleanos. Esto significa, traducido al lenguaje actual de la teoría de categorías (aunque es de resaltar que ésta aún no existía en esa época), que las categorías **AB**: *anillos de Boole - homomorfismos propios*, es decir, homomorfismos de anillos tales que la imagen inversa de todo ideal maximal es ideal maximal, y **ST_p**: *espacios Booleanos - funciones propias*, es decir, funciones continuas entre espacios Booleanos tales que la imagen inversa de todo compacto es compacto, son equivalentes como categorías (mas adelante en el desarrollo del presente trabajo, se precisarán estos conceptos).

Una versión un poco mas particular del teorema de representación de Stone es la que se presenta en el capítulo 2 del presente trabajo y establece que las categorías **AB₁**: *anillos de Boole con uno - homomorfismos de anillos que respetan el uno* y **ST**: *Espacios topológicos Hausdorff, compactos y totalmente disconexos (espacios de Stone) - funciones continuas*, son equivalentes como categorías.

La idea principal de esta monografía es estudiar y presentar cuatro extensiones

del teorema de representación de Stone para anillos de Boole con uno (vea [1] capítulo 2). Para este fin, una idea esencial será considerar dos nuevas categorías: *Anillos de Boole con uno y con una relación - homomorfismos de anillos de Boole que respetan el uno y la relación “hacia atrás”* y *Espacios de Stone con una relación - funciones continuas que respetan la relación “hacia adelante”*. Aunque estas categorías son adjuntas, no resultan equivalentes, así que gradualmente se establecerán condiciones sobre tales relaciones para que la adjunción establecida resulte ser una equivalencia dual de tal manera que las categorías clásicas de los anillos de Boole con uno y los espacios de Stone puedan ser vistas como subcategorías de las nuevas categorías definidas y los funtores asociados al teorema de representación de Stone puedan extenderse a estas nuevas categorías, de modo que la equivalencia se siga manteniendo en cada extensión.

En virtud de la dualidad establecida y a manera de una aplicación de ella, daremos una propiedad “algebraica” que caracterice exactamente a todos los cocientes Hausdorff de espacios de Stone, presentaremos la conexidad topológica desde un punto de vista algebraico (vea [1], definición 2.7.3) y se establecerá una condición necesaria y suficiente, “*en términos algebraicos*” para que un cociente Hausdorff del espacio de Cantor resulte ser conexo capturando así a todos los continuos, es decir los espacios métricos, compactos y conexos.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el primer capítulo (*Preliminares*) se definen e ilustran algunos conceptos básicos de la teoría de anillos de Boole con uno, la teoría de espacios de Stone y la teoría de categorías.

En el segundo capítulo se estudia la dualidad de Stone. Éste capítulo es de gran importancia para el resto del trabajo pues en él, entre otros resultados, se muestra una forma de extender el mecanismo de dicha dualidad a unas categorías más generales que resultarán ser duales.

En el último capítulo se presentan cuatro extensiones de la dualidad de Stone y como aplicación, se muestra una propiedad en términos algebraicos que caracteriza la conexidad en los cocientes Hausdorff de espacios de Stone y en particular una propiedad algebraica que caracteriza los continuos.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Esta sección está hecha con el fin de proporcionarle al lector algunos conceptos y resultados básicos de la teoría de anillos de Boole, la teoría de espacios de Stone y la teoría de categorías. Estos conceptos y resultados son necesarios pues serán útiles en el siguiente capítulo.

1.1. ANILLOS DE BOOLE

Definición 1.1.1. Un anillo A es un **Anillo de Boole** si para todo $x \in A$, $x^2 = x$.

Ejemplo 1.1.1. (i) Es claro que el anillo $\langle \mathbb{Z}_2, +, \cdot \rangle$ con la suma y la multiplicación usual es un anillo de Boole.

(ii) Sea X un conjunto no vacío, no es difícil ver que $\langle PX, \Delta, \cap \rangle$ es un anillo; dado $S \in PX$: $S \cap S = S$, entonces $\langle PX, \Delta, \cap \rangle$ es un anillo de Boole.

Teorema 1.1.1. *Todo anillo de Boole es conmutativo y de característica 2 siempre que $A \neq \{0\}$.*

Demostración. Sea A un anillo de Boole y $a, b \in A$, $a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b$, entonces $ab = -ba$:

Si $a = b$ entonces $aa = -aa$ luego $2a = 0$, y así $\text{Char}(A) = 2$.

Como $ab = -ba$ entonces $ab = (-ba)^2 = (ba)^2 = ba$ y así A es conmutativo. \square

Si A es un anillo de Boole, de manera natural podemos definir una relación en A con lo cual $\langle A, \leq \rangle$ resultará ser un retículo.

Definición 1.1.2. Sea A un anillo de Boole, se define una relación de orden parcial “ \leq ” en A de la siguiente manera: Dados $a, b \in A$, $a \leq b$ si y solo si $ab = a$.

Veamos la transitividad de “ \leq ”: Dados $x, y, z \in A$ con $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $xy = x$ y $yz = y$ y

$$\begin{aligned}xz &= (xy)z \\ &= x(yz) \\ &= xy \\ &= x\end{aligned}$$

así $x \leq z$ y “ \leq ” es transitiva en A . \square

Dados $x, y \in A$, tenemos que $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ y $x \vee y = \sup\{x, y\}$, siendo

$$x \wedge y = xy \quad \text{y} \quad x \vee y = x + y + xy$$

Veamos que $x \vee y = x + y + xy$: Note que $x \leq x \vee y$ y $y \leq x \vee y$, entonces $x \vee y$ es una cota superior de $\{x, y\}$ y si existiera $z \in A$ tal que $x \leq z$, $y \leq z$, entonces $xz = x$ y $yz = y$, es decir

$$\begin{aligned}(x \vee y)z &= (x+y+xy)z \\ &= xz+yz+x(yz) \\ &= x+y+xy \\ &= x \vee y\end{aligned}$$

Así se concluye que $x \vee y = \sup\{x, y\}$ \square

Note que en el anillo $\langle PX, \Delta, \cap \rangle$, $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$, $A \vee B = A \cup B$ y $A \wedge B = A \cap B$, $\forall A, B \in PX$.

Definición 1.1.3. Sea A un anillo de Boole, un elemento $a \in A$ se dice un **átomo** de A si a es un minimal de $A - \{0\}$.

En el Capítulo 3 se dará un ejemplo de un anillo de Boole sin átomos.

Definición 1.1.4. Sea A un anillo de Boole, $\mathcal{F} \subseteq A$ no vacío. Diremos que \mathcal{F} es un **filtro** de A si satisface las siguientes condiciones:

- i) $\forall x, y \in \mathcal{F} : x \wedge y \in \mathcal{F}$;
- ii) $\forall x \in \mathcal{F}, \forall y \in A : x \vee y \in \mathcal{F}$.

Diremos que un filtro \mathcal{F} de A es **propio** si $\mathcal{F} \neq A$.

Observación. \mathcal{F} es filtro propio si y solo si \mathcal{F} es filtro y $0 \notin \mathcal{F}$.

Proposición 1.1.1. Sea A un anillo de Boole, $\mathcal{F} \subseteq A$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Entonces \mathcal{F} es un filtro de A si y solo si satisface:

- (i') $\forall x, y \in \mathcal{F}, x \wedge y \in \mathcal{F}$;
- (ii') $\forall x \in \mathcal{F}, \forall y \in A, x \leq y \Rightarrow y \in \mathcal{F}$.

Demostración. \Rightarrow] (i') Es inmediato;

(ii') Sean $x \in \mathcal{F}, y \in A$ y tal que $x \leq y$, como \mathcal{F} es filtro, $x \vee y \in \mathcal{F}$ y además $xy = x$, entonces $x \vee y = x + y + xy = xy + y + xy = y$. Luego $y \in \mathcal{F}$

\Leftarrow] (i) Es inmediato;

(ii) Sean $x \in \mathcal{F}$ y $y \in A$, como $x \vee y = \sup\{x, y\}$, entonces $x \leq (x \vee y)$ y por (ii') $x \vee y \in \mathcal{F}$. □

Ejemplo 1.1.2. Sea $T \in PX$ con PX el anillo del Ejemplo 1.1.1 (ii), $\mathcal{F}_T := \{S \in PX : T \subseteq S\}$ es un filtro de PX . En efecto, $\mathcal{F}_T \neq \emptyset$ pues $T \in \mathcal{F}_T$;

- i) Dados $R, S \in \mathcal{F}_T$: $T \subseteq R$ y $T \subseteq S$, entonces $T \subseteq R \cap S = R \wedge S$ y $R \wedge S \in \mathcal{F}_T$.
- ii) Dado $R \in \mathcal{F}_T$ y $S \in PX$ con $R \subseteq S$, se tiene que $T \subseteq R \subseteq S$, entonces $T \subseteq S$ y por lo tanto $S \in \mathcal{F}_T$.

Así por la Proposición 1.1.1 \mathcal{F} es filtro. \square

Definición 1.1.5. Sea A un anillo de Boole, se dice que $Y \subseteq A$, $Y \neq \emptyset$ tiene la **propiedad de intersecciones finitas** (P.I.F.) si dado $Y' \subseteq Y$ finito, $\inf Y' \neq 0$.

Definición 1.1.6. Sea A un anillo de Boole y $S \subseteq A$, diremos que S es una **base de filtro** si $S \neq \emptyset$, $0 \notin S$ y para todo $x, y \in S$ existe $z \in S$ tal que $z \leq xy$. Si definimos

$$\mathcal{F}_S := \{x \in A : s \leq x \text{ para algún } s \in S\}$$

\mathcal{F}_S es un filtro de A , además si $z \in S$, por la reflexividad de “ \leq ”, $z \leq z$. Así se tiene que $S \subseteq \mathcal{F}_S$.

Ejemplo 1.1.3. Sea A un anillo de Boole y $Y \subseteq A$ con la P.I.F. Defina

$$S := \{\inf Y' : Y' \subseteq Y \text{ y } Y \text{ finito}\}$$

S es base de filtro, en efecto:

- $S \neq \emptyset$ pues $Y \subseteq S$ ($x \in Y$, $x = \inf\{x\}$), entonces $Y \neq \emptyset$;
- $0 \notin S$ pues si suponemos que $0 \in S$, entonces existe $Y' \subseteq Y$ finito tal que $\inf Y' = 0$ y esto contradice que Y tenga la P.I.F;
- Dados $x, y \in S$, entonces existen $Y', Y'' \subseteq Y$ finitos y tal que $x = \inf Y'$ y $y = \inf Y''$. Sea $z = \inf (Y' \cup Y'')$, $z \in S$ pues $Y' \cup Y''$ es un subconjunto finito de Y además $(xy)z = z$. Así $z \leq xy$ y $xy \in S$.

Así se concluye que S es una base de filtro de A . \square

Definición 1.1.7. Sea A un anillo de Boole y \mathcal{F} un filtro propio de A , \mathcal{F} es un **ultrafiltro** o **filtro maximal** si no existe otro filtro \mathcal{G} de A tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G} \subsetneq A$.

Lema 1.1.1. Sea A un anillo de Boole, si $Y \subseteq A$ tiene la P.I.F, entonces existe un ultrafiltro \mathcal{F} de A que contiene a Y .

Demostración. Por el ejemplo 1.1.3 existe \mathcal{F}_Y filtro con $Y \subseteq \mathcal{F}_Y$. Sea

$$F_{\subseteq} = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \text{ es filtro y } \mathcal{F}_Y \subseteq \mathcal{F}\}$$

y sea $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$ una cadena en F_{\subseteq} , veamos que $\mathcal{C} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{G}_i$ es un filtro.

- (i) $\mathcal{C} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{F}_Y \subseteq \mathcal{G}_i \forall i \in I$ entonces $\mathcal{F}_Y \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{F}_Y \neq \emptyset$;
- (ii) $0 \notin \mathcal{C}$ pues $0 \notin \mathcal{G}_i, \forall i \in I$;
- (iii) Sean $x, y \in \mathcal{C}$, entonces existen $i, j \in I$ tales que $x \in \mathcal{G}_i$ y $y \in \mathcal{G}_j$, sin pérdida de generalidad sea $\mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{G}_j$, tenemos que $x, y \in \mathcal{G}_j$, luego $x \wedge y \in \mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{C}$ y así $x \wedge y \in \mathcal{C}$.
- (iv) Dado $x \in \mathcal{C}$ y $y \in A$, existe $i \in I$ tal que $x \in \mathcal{G}_i$, entonces $x \vee y \in \mathcal{G}_i$ y así $x \vee y \in \mathcal{C}$.

Así \mathcal{C} es filtro. Además $\mathcal{F}_Y \subseteq \mathcal{C}$, entonces $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$ está acotado superiormente en F_{\subseteq} y por el Lema de Zorn, F_{\subseteq} tiene un elemento maximal \mathcal{U} . Veamos que \mathcal{U} es ultrafiltro: Si existe \mathcal{G} filtro con $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{F}_Y \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \in F_{\subseteq}$ y como \mathcal{U} es maximal en F_{\subseteq} , $\mathcal{U} = \mathcal{G}$ con lo que completamos la prueba. \square

Teorema 1.1.2. *Sea A un anillo de Boole con 1 y \mathcal{F} un filtro de A , son equivalentes:*

- i) \mathcal{F} es un ultrafiltro;
- ii) $(\forall a \in A)(a \notin \mathcal{F} \Rightarrow \exists f \in \mathcal{F} \text{ tal que } af = 0)$;
- iii) $(\forall a, b \in A)(a \vee b \in \mathcal{F} \Rightarrow a \in \mathcal{F} \text{ ó } b \in \mathcal{F})$;
- iv) $(\forall a, b \in A)(a + b \in \mathcal{F} \Rightarrow a \in \mathcal{F} \text{ o } b \in \mathcal{F})$;
- v) $\forall a \in A, a \in \mathcal{F} \text{ o } 1 + a \in \mathcal{F}$.

Demostración. i) \Rightarrow ii) Sea $a \in A - \mathcal{F}$ no nulo y supongamos que $\forall f \in \mathcal{F}, af \neq 0$. Entonces el conjunto

$$S := \{af : f \in \mathcal{F}\}$$

tiene la P.I.F. ya que $0 \notin \mathcal{F}$ y si $af_1, \dots, af_n \in S \Rightarrow \inf_{i=1}^n \{af_i\} = af_1 \wedge \dots \wedge af_n = a(f_1 \dots f_n) \neq 0$ (pues $f_1 \dots f_n \in \mathcal{F}$) y aplicando el lema 1.1.1 existe un ultrafiltro \mathcal{F}_S tal que $S \subseteq \mathcal{F}_S$.

Veamos que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}_S \subsetneq A$.

Si $f \in \mathcal{F}$, $(af)f = af$ entonces $af \leq f$ y como $af \in \mathcal{F}_S$, $f \in \mathcal{F}_S$ y por lo tanto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_S$. Por otro lado note que dado $f \in \mathcal{F}$, se tiene que $af \in \mathcal{F}_S$ y $af \leq a$, entonces $a \in \mathcal{F}_S$ y $a \notin \mathcal{F}$, así $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}_S$ pero esto contradice que \mathcal{F} sea ultrafiltro.

ii) \Rightarrow iii) Supongamos que $a \vee b \in \mathcal{F}$ y $a, b \notin \mathcal{F}$. Por (ii) existen $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ tal que $af_1 = 0$ y $bf_2 = 0$. Como $a \vee b \in \mathcal{F}$, entonces $(f_1 f_2)(a \vee b) \in \mathcal{F}$ pero

$$\begin{aligned} (f_1 f_2)(a \vee b) &= (f_1 f_2)(a + b + ab) \\ &= (f_1 f_2)a + (f_1 f_2)b + (f_1 f_2)ab \\ &= (f_1 a)f_2 + f_1(f_2 b) + (f_1 a)(f_2 b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo que es una contradicción.

iii) \Rightarrow iv) Si $a + b \in \mathcal{F}$, note que $a + b = a(a + ab) \vee b(b + ab)$, entonces por (iii) $a(a + ab) \in \mathcal{F}$ o $b(b + ab) \in \mathcal{F}$ y como $a(a + ab) \leq a$ y $b(b + ab) \leq b$, entonces $a \in \mathcal{F}$ o $b \in \mathcal{F}$.

iv) \Rightarrow i) Supongamos que \mathcal{F} no es ultrafiltro, entonces existe \mathcal{G} filtro propio tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$. Sea $g \in \mathcal{G} - \mathcal{F}$, tenemos $g + (1 + g) = 1 \in \mathcal{F}$, como $g \notin \mathcal{F}$, usando (iv), $1 + g \in \mathcal{F}$, entonces $1 + g \in \mathcal{G}$ y como \mathcal{G} es filtro $g(1 + g) = 0 \in \mathcal{G}$ lo que es una contradicción.

iv) \Rightarrow v) Dado $a \in \mathcal{A}$, como $1 \in \mathcal{F}$ y $1 = a + (1 + a)$, entonces por hipótesis $a \in \mathcal{F}$ o $1 + a \in \mathcal{F}$.

v) \Rightarrow iv) Sean $a, b \in A$, si $a + b \in \mathcal{F}$ y suponemos que $a \notin \mathcal{F}$ (el otro caso es

análogo), entonces por hipótesis $1 + a \in \mathcal{F}$, entonces $(a + b)(1 + a) \in \mathcal{F}$ y como $(a + b)(1 + a) = b + ab = b(1 + a)$, $b(1 + a) \in \mathcal{F}$ y or lo tanto $b \in \mathcal{F}$. \square

Observación. Aunque en $\text{iv}) \Rightarrow \text{i})$ se usó el hecho de que A tiene 1, en general, si el anillo de Boole no tiene 1 las propiedades de $\text{i})$ a $\text{iv})$ son equivalentes. (Para $\text{iv}) \Rightarrow \text{i})$ véase [1], Proposición 2.16.).

Dado un anillo de Boole A , dotaremos a la familia de ultrafiltros de A , de una topología que será completamente determinada por A .

Definición 1.1.8. Dado un anillo de Boole A con 1, defina

$$\text{Spec}(A) := \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro de } A\}$$

Es posible dotar a $\text{Spec}(A)$ de una topología llamada **la topología de Zariski** de la siguiente manera: Se define $\forall a \in A$,

$$D(a) := \{\mathcal{U} \in \text{Spec}(A) : a \in \mathcal{U}\}$$

Entonces $\{D(a)\}_{a \in A}$ es una base de topología en $\text{Spec}(A)$, en efecto,

- $\bigcup_{a \in A} D(a) = \text{Spec}(A)$ pues si $\mathcal{U} \in \text{Spec}(A)$ y $a \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in D(a) \subseteq \bigcup_{a \in A} D(a)$;
- Dados $a, b \in A$: $D(a) \cap D(b) = D(ab)$, pues $\mathcal{U} \in D(a) \cap D(b) \Leftrightarrow \mathcal{U} \in D(a)$ y $\mathcal{U} \in D(b) \Leftrightarrow a \in \mathcal{U}$ y $b \in \mathcal{U} \Leftrightarrow ab \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{U} \in D(ab)$

Nota. Hay otras maneras equivalentes de definir el espectro de un anillo de Boole con 1 A , por ejemplo tomando (dualmente) los ideales maximales del anillo A , es decir:

$$\text{Spec}_P(A) = \{\mathcal{I} : \mathcal{I} \text{ es ideal maximal de } A\}$$

y como abiertos básicos los conjuntos $D(a) := \{\mathcal{I} : \mathcal{I} \text{ es ideal maximal y } a \notin \mathcal{I}\}$. Por otra parte, se puede probar que en un anillo de Boole con 1, los ideales

maximales son exactamente los mismos ideales primos, en efecto, dado \mathcal{I} un ideal de A , si \mathcal{I} es maximal, como A es un anillo conmutativo con 1, por la teoría de anillos, se sabe que \mathcal{I} es ideal primo, ahora si \mathcal{I} es un ideal primo y suponemos que existe \mathcal{J} ideal de \mathcal{I} tal que $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{J} \subsetneq A$, entonces existe $j \in \mathcal{J} - \mathcal{I}$, como $0 = j(1 + j)$, $j(1 + j) \in \mathcal{I}$ y ya que \mathcal{I} es ideal primo, $j \in \mathcal{I}$ ó $1 + j \in \mathcal{I}$. $j \notin \mathcal{I}$ por hipótesis, entonces $1 + j \in \mathcal{I}$ entonces $1 + j \in \mathcal{J}$, luego $0 = j + (1 + j) \in \mathcal{J}$ y $\mathcal{J} = A$ lo que es una contradicción. Así \mathcal{I} es ideal maximal. Además existe un homeomorfismo φ

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Spec}(A) &\longrightarrow \text{Spec}_P(A) \\ \mathcal{F} &\longmapsto \mathcal{I}_{\mathcal{F}} := \{1 + x : x \in A\} \end{aligned}$$

De este modo, el conjunto $\text{Spec}(A)$ que estamos definiendo aquí coincide con lo que se conoce como el espectro primo del anillo A .

En la Sección 1.3 se mostrarán las propiedades topológicas mas importantes del espectro $\text{Spec}(A)$. También más adelante se mostrará un ejemplo del $\text{Spec}(A)$ para el anillo de Boole, $\langle P\mathbb{N}, \Delta, \cap \rangle$ y se verá que este espectro no es otra cosa que el compactado de Stone-Čech de \mathbb{N} con la topología discreta.

En la siguiente proposición se establece una lista de propiedades de los abiertos básicos $D(a)$, que se usarán mas adelante.

Proposición 1.1.2. *Sean A un anillo de Boole con 1 y $a, b \in A$, entonces*

1. $D(a) \cap D(b) = D(ab)$;
2. $\bigcup_{a \in W} D(a) = D(\sup W)$ con $W \subseteq A$ finito y no vacío;
3. $D(a) = \emptyset \Leftrightarrow a = 0$;
4. $D(1 + a) = \text{Spec}(A) - D(a)$;
5. $D(a + b) = D(a) \Delta D(b)$;
6. $a \leq b \Leftrightarrow D(a) \subseteq D(b)$.

Demostración.

1. Ya fue probado.
2. Basta hacer la prueba para dos elementos y luego aplicar inducción: Dados $a, b \in A$: $\mathcal{U} \in D(a) \cup D(b)$ y esto equivale a que $a \in \mathcal{U}$ o $b \in \mathcal{U}$ y por la Proposición 1.1.1 se sigue que $a \vee b \in \mathcal{U}$ o bien $\mathcal{U} \in D(a \vee b)$.
3. \Leftarrow] Esta implicación es inmediata ya que 0 no pertenece a ningún filtro propio.
 \Rightarrow] Suponga que $D(a) = \emptyset$ con $a \neq 0$. Como $\{a\} \subseteq A$ tiene la P.I.F. existe \mathcal{F} ultrafiltro de A con $a \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} \in D(a)$, contradicción.
4. Note que $D(a(1+a)) = \emptyset$ y por 1, $D(a) \cap D(1+a) = \emptyset$. Además por 2, $D(a) \cup D(1+a) = D(a \vee (1+a)) = D(1) = \text{Spec}(A)$, luego $D(1+a) = \text{Spec}(A) - D(a)$.
5. Usando 1,2,3 y 4 tenemos: $D(a) \Delta D(b) = (D(a) \cap (D(b))^c) \cup (D(b) \cap (D(a))^c) = (D(a) \cap D(1+b)) \cup (D(b) \cap D(1+a)) = D(a(1+b) \vee b(1+a)) = D(a+b)$.
6. \Rightarrow] Sea $\mathcal{U} \in D(a) \Rightarrow a \in \mathcal{U}$ y como $a \leq b$, $b \in \mathcal{U}$, es decir $\mathcal{U} \in D(a)$.
 \Leftarrow] Supongamos que $a \not\leq b$ (pues si $a = 0$, $0 \leq b$, $\forall b \in A$) y supongamos además que $a \not\leq b$, o bien $ab \neq a$, entonces $a+ab \neq 0$ y el conjunto $\{a+ab\}$ tiene la P.I.F, por el lema 1.1.1 existe \mathcal{F} ultrafiltro con $a+ab \in \mathcal{F}$. Ahora, note que $a(a+ab) = a+ab \Rightarrow a+ab \leq a$ y como \mathcal{F} es filtro $a \in \mathcal{F}$, entonces por hipótesis $b \in \mathcal{F}$ y $0 = b(a+ab) \in \mathcal{F}$ lo que es absurdo. Así se concluye que $a \leq b$.

□

Observación. Note que en el ítem 2 de la proposición anterior, si W es **infinito** y $\sup W$ existe, puede ocurrir que $\bigcup_{a \in W} D(a) \neq D(\sup W)$.

Ejemplo 1.1.4. Tome el anillo producto $A := \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$, A es un anillo de Boole con $1_A = (1)_{n \in \mathbb{N}}$. Dados $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A$, note que

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \leq (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \forall i \in \mathbb{N}$$

Dado $k \in \mathbb{N}$, sea $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}^k \in A$ tal que

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

y sea $W = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, entonces $D(\sup W) = D((1)_{i \in \mathbb{N}}) = A$ pero si tomamos $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A$ tal que

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es par} \\ 0 & \text{si } i \text{ es impar} \end{cases}$$

y definimos el ultrafiltro principal $\mathcal{F} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in A : (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \leq (x_i)_{i \in \mathbb{N}}\}$, entonces $\mathcal{F} \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D((x_i)_{i \in \mathbb{N}}^k)$ pues si existiera $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F} \in D((x_i)_{i \in \mathbb{N}}^{k_0})$ o bien $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}^{k_0} \in \mathcal{F}$ entonces $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \leq (x_i)_{i \in \mathbb{N}}^{k_0}$ lo que es una contradicción.

1.2. ESPACIOS DE STONE

En esta sección se precisa el concepto de espacio de Stone, así como otros conceptos y resultados conocidos de la topología general, que se aplicarán posteriormente. Las demostraciones que se omiten de esta sección, se pueden encontrar por ejemplo en [7] o en [1].

Definición 1.2.1. Un espacio topológico X es **Hausdorff**, si dados $x, y \in X$, $x \neq y$ existen $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Definición 1.2.2. Un espacio topológico X es **compacto**, si toda cubierta abierta de X admite una subcubierta finita.

Note que si X es compacto y $Y \subseteq X$ es cerrado, entonces Y es compacto. Además si X es Hausdorff y $Y \subseteq X$ es compacto, entonces Y es cerrado

Definición 1.2.3. Un espacio topológico X se dice **disconexo**, si existen U y V abiertos disjuntos no vacíos tal que $U \cup V = X$. En caso contrario, se dice que X es **conexo**.

Definición 1.2.4. Un espacio topológico X se dice **totalmente desconexo**, si X admite una base de abierto-cerrados.

Las propiedades de compacidad, conexidad, desconexidad, desconexidad total y Hausdorff, son todas propiedades topológicas, es decir, se preservan por homeomorfismos.

Definición 1.2.5. Un espacio topológico X se dice **espacio de Stone** si es Hausdorff, compacto y totalmente desconexo.

Antes de dar un ejemplo de un espacio de Stone, recordemos cómo se define la topología producto para una familia arbitraria de espacios topológicos.

Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos, definamos:

$$\mathcal{B}_P := \left\{ \bigcap_{i \in J} \pi_i^{-1}(U_i) : U_i \text{ es abierto de } X_i \text{ y } J \subseteq I, J \text{ finito} \right\}$$

donde cada $\pi_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i$ es la i -ésima proyección $\forall i \in I$. En estas condiciones \mathcal{B}_P es una base de topología sobre $\prod_{i \in I} X_i$ y la topología generada por \mathcal{B}_P se conoce como **topología producto** o **topología de Tychonoff**. De esta manera el conjunto $\prod_{i \in I} X_i$ dotado con la topología producto, se llama el **espacio producto** de los $\{X_i\}_{i \in I}$.

Los siguientes resultados son ampliamente conocidos:

Teorema 1.2.1. *El espacio producto de espacios Hausdorff, es también Hausdorff.*

Teorema 1.2.2. *(Teorema de Tychonoff) El espacio producto de espacios compactos, es también compacto.*

Ejemplo 1.2.1. (El espacio de Cantor) Sea $\{0, 1\}$ con la topología discreta; definimos $\mathfrak{C} := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ con la topología producto, es decir, U es un abierto básico de \mathfrak{C} , si y solo si U es de la forma:

$$U := \bigcap_{i \in J} \pi_i^{-1}(U_i)$$

con U_i abierto de $\{0, 1\}$, $J \subseteq \mathbb{N}$ finito y $\pi_i : \mathfrak{C} \rightarrow \{0, 1\}$ la proyección i . Obsérvese que para cada U_i tenemos cuatro casos:

$$\text{Si } U_i = \{0\} \Rightarrow \pi_i^{-1}(U_i) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{C} : x_i = 0\};$$

$$\text{Si } U_i = \{1\} \Rightarrow \pi_i^{-1}(U_i) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{C} : x_i = 1\};$$

$$\text{Si } U_i = \emptyset \Rightarrow \pi_i^{-1}(U_i) = \emptyset;$$

$$\text{Si } U_i = \{0, 1\} \Rightarrow \pi_i^{-1}(U_i) = \mathfrak{C}.$$

Como $\{0, 1\}$ es Hausdorff y compacto, en virtud de los Teoremas 1.2.1 y 1.2.2, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es Hausdorff y compacto. Además si U es abierto básico de \mathfrak{C} , entonces

$$\mathfrak{C} - U = \mathfrak{C} - \bigcap_{i \in J} \pi_i^{-1}(U_i) = \bigcup_{i \in J} \pi_i^{-1}(\{0, 1\} - U_i)$$

que es un abierto de \mathfrak{C} de modo que los abiertos básicos U de \mathfrak{C} , son también cerrados y por tanto \mathfrak{C} es totalmente desconexo, luego es un espacio de Stone.

Definición 1.2.6. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Diremos que:

- i) f es abierta si $f(U)$ es abierto en Y , para cada abierto U de X ;
- ii) f es cerrada si $f(A)$ es cerrado en Y , para cada cerrado A de X .

Proposición 1.2.1. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y biyectiva. Son equivalentes:

- i) f es un homeomorfismo;

ii) f es abierta;

iii) f es cerrada.

Proposición 1.2.2. *Si X es compacto, Y es Hausdorff y $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces f es cerrada.*

Demostración. Sea $A \subseteq X$ cerrado, como X es compacto, A es compacto, entonces $f(A)$ es compacto y ya que Y es Hausdorff, $f(A)$ es cerrado. \square

Definición 1.2.7. Sea X un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \rightarrow Y$ una función sobreyectiva. Podemos definir una topología τ_f sobre Y de la siguiente manera:

$$\tau_f = \{V \subseteq Y : f^{-1}(V) \text{ es abierto de } X\}$$

τ_f es llamada la **topología cociente** y es la topología mas fina sobre Y que hace a f continua. En estas condiciones Y se dice un **espacio cociente** de X .

Ejemplo 1.2.2. Sea X un espacio topológico y \sim una relación de equivalencia en X , $\rho : X \rightarrow X/\sim$ la proyección natural. Entonces la topología cociente τ_ρ sobre X/\sim está dada por:

\mathcal{U} es abierto de X/\sim , si y solo si $\rho^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto de X , es decir, si y solo si

$$\rho^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_{A \in \mathcal{U}} A \text{ es un abierto de } X$$

En las condiciones anteriores tenemos el siguiente lema, el cual se presenta en [8] como ejercicio:

Lema 1.2.1. *Sea X un espacio compacto Hausdorff y sea $f : X \rightarrow Y$ una función cociente, son equivalentes:*

1) Y es Hausdorff;

2) f es cerrada;

3) $E := \{(x, y) \in X \times X : f(x) = f(y)\}$ es un cerrado de $X \times X$.

1.3. ANILLOS DE BOOLE vs ESPACIOS DE STONE

En esta sección se presentan resultados básicos de la teoría de Stone, los cuales en los años treinta establecieron por primera vez en la historia de la matemática, un “puente” importante entre el álgebra y la topología.

Teorema 1.3.1. *Sea A un anillo de Boole, entonces $D(a)$ es compacto $\forall a \in A$.*

Demostración. Sea $W \subseteq A$ y $D(a) \subseteq \bigcup_{b \in W} D(a) \cap D(b) = \bigcup_{b \in W} D(ab)$ (Proposición 1.1.2). Supongamos que para todo $W' \subseteq W$, W' finito, $D(a) \neq \bigcup_{b \in W'} D(ab)$, o bien $D(a) \neq D(a \sup W')$. Entonces $D(a + a \sup W') \neq \emptyset$ (pues si $D(a + a \sup W') = \emptyset$ se tiene que $a + a \sup W' = 0$ o bien $a = a \sup W'$, entonces $D(a) = D(a \sup W') = \bigcup_{b \in W'} D(ab)$ y esto contradice la hipótesis). Entonces $a + a \sup W' \neq 0$ y $\inf\{a + ab : b \in W'\} = (a + ab_1) \dots (a + ab_n) = a + a(b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_n) = a + a \sup W' \neq 0$ con $W' = \{b_1, \dots, b_n\}$. Luego el conjunto

$$Y := \{a + ab : b \in W\}$$

tiene la P.I.F. y por el Lema 1.1.1 existe un filtro maximal \mathcal{F} que contiene a Y . Tenemos que $a + ab \in \mathcal{F}$ para todo $b \in W$, entonces $b \notin \mathcal{F}$ para ningún $b \in W$, o bien $\mathcal{F} \not\subseteq D(b)$. Por otro lado, como $a + ab \leq a$, $\mathcal{F} \in D(a) \subseteq \bigcup_{b \in W} D(ab)$, es decir, existe $b_0 \in W$ tal que $ab_0 \in \mathcal{F}$ y como $ab_0 \leq b_0$, entonces $b_0 \in \mathcal{F}$, esto es absurdo pues $b \notin \mathcal{F}$ para ningún $b \in W$. Así existe $W' \subseteq W$ finito tal que

$$D(a) \subseteq \bigcup_{b \in W'} D(a) \cap D(b)$$

y $D(a)$ es compacto. □

Teorema 1.3.2. *Si A es un anillo de Boole con 1, entonces $\text{Spec}(A)$ es un espacio de Stone.*

Demostración. Note que $\text{Spec}(A) = D(1)$ y por el Teorema 1.3.1, $D(1)$ es compacto, entonces $\text{Spec}(A)$ es compacto.

Sean $\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \text{Spec}(A)$ con $\mathcal{I} \neq \mathcal{J}$; como \mathcal{I} y \mathcal{J} son ultrafiltros, entonces $\mathcal{I} \not\subseteq \mathcal{J}$ y $\mathcal{J} \not\subseteq \mathcal{I}$, es decir, existen $a \in \mathcal{I} - \mathcal{J}$ y $b \in \mathcal{J} - \mathcal{I}$. Entonces como $b \in A$, por la proposición 1.1.2 v) se debe tener que $1 + b \in \mathcal{I}$ y ya que $a \in \mathcal{I}$, $a + ab \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I} \in D(a + ab)$. Por otro lado $b \in \mathcal{J}$, entonces $\mathcal{J} \in D(b)$, además

$$D(a + ab) \cap D(b) = D((a + ab)b) = D(0) = \emptyset$$

entonces $\text{Spec}(A)$ es Hausdorff.

Como $D(a)$ es compacto en un espacio de Hausdorff se sigue que $D(a)$ es cerrado, entonces $\text{Spec}(A)$ es totalmente desconexo y por tanto es un espacio de Stone.

Nota. Otra forma de probar que $D(a)$ es cerrado, es sencillamente observando que su complemento $\text{Spec}(A) - D(a) = D(1 + a)$ es abierto. \square

De esta manera, todo anillo de Boole con 1 determina un espacio topológico (que resulta ser de Stone). En el sentido opuesto se puede probar que todo espacio topológico determina un anillo de Boole con 1 como lo mostraremos en la siguiente proposición:

Proposición 1.3.1. *Sea X un espacio topológico y sea*

$$\mathbb{A}(X) := \{A \subseteq X : A \text{ es abierto-cerrado de } X\}$$

Entonces $\langle \mathbb{A}(X), \Delta, \cap \rangle$ es un anillo de Boole con 1.

Demostración. Note que $\mathbb{A}(X) \subseteq PX$, así basta ver que $\mathbb{A}(X)$ es subanillo de PX :

- (i) $\mathbb{A}(X) \neq \emptyset$ pues $\emptyset, X \in \mathbb{A}(X)$;
- (ii) Note que $1_{\mathbb{A}(X)} = X$; sean $A, B \in \mathbb{A}(X)$, entonces $A^c, B^c \in \mathbb{A}(X)$, luego $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \in \mathbb{A}(X)$ y $\langle \mathbb{A}(X), \Delta \rangle$ es un grupo abeliano;
- (iii) Claramente $A \cap B \in \mathbb{A}(X)$, entonces $\mathbb{A}(X)$ es cerrado bajo \cap .

Así $\mathbb{A}(X)$ es subanillo con uno, de PX . \square

Definición 1.3.1. Sea X un conjunto, se dice que $\mathcal{F} \subseteq PX$ es un filtro de X , si verifica las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$;
2. $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
3. Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$;
4. Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$.

Observe que es la misma noción de filtro de la Definición 1.1.4, tomando como anillo de Boole $A = PX$.

\mathcal{F} se dice **ultrafiltro** de X si no existe un filtro \mathcal{G} de X tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G} \subsetneq PX$, o equivalentemente si dado $A \in PX$, entonces $A \in \mathcal{F}$ ó $X - A \in \mathcal{F}$.

Definición 1.3.2. Sea X un espacio topológico, una **compactificación** de X es un par $\langle Y, \varphi \rangle$ donde Y es compacto, Hausdorff, $\varphi : X \rightarrow Y$ es una función continua, inyectiva y tal que $\varphi(X)$ es denso en Y .

Definición 1.3.3. Sea X un espacio topológico y sea $\langle Y, \varphi \rangle$ una compactación de X , diremos que $\langle Y, \varphi \rangle$ es **la compactación de Stone-Čech de X** si dado Z compacto, Hausdorff y $f : X \rightarrow Z$ continua, existe $\phi : Y \rightarrow Z$ continua y tal que $\phi \circ \varphi = f$.

Ejemplo 1.3.1. Por lo visto anteriormente $\langle P\mathbb{N}, \Delta, \cap \rangle$ es un anillo de Boole con $1_{P\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.

Si \mathbb{N} tiene la topología discreta, entonces $\mathbb{A}(\mathbb{N}) = P\mathbb{N}$. Definimos:

$$\beta\mathbb{N} := \{\mathcal{P} : \mathcal{P} \text{ es ultrafiltro de } \mathbb{N}\}$$

Es posible dotar a $\beta\mathbb{N}$ de una topología de la siguiente manera: Se define $\forall A \subseteq \mathbb{N}$,

$$\widehat{A} := \{\mathcal{P} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{P}\}$$

Entonces $\{\widehat{A}\}_{A \subseteq \mathbb{N}}$ es una base de topología de $\beta\mathbb{N}$, en efecto

- $\widehat{\emptyset} = \{\mathcal{P} \in \beta\mathbb{N} : \emptyset \in \mathcal{P}\} = \emptyset;$
- Como $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$, entonces $\widehat{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N};$
- Dados $A, B \subseteq \mathbb{N} : \widehat{A \cap B} = \widehat{A} \cap \widehat{B}$, en efecto, $\mathcal{P} \in \widehat{A \cap B}$ esto equivale a que $A \cap B \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{P}$ y $B \in \mathcal{P}$, así $\mathcal{P} \in \widehat{A} \cap \widehat{B}$.

Se puede demostrar que el espacio $\beta\mathbb{N}$ es la compactificación de Stone-Čech de \mathbb{N} (vea [2], capítulo 3) y en estas condiciones $Spec(P\mathbb{N}) = \beta\mathbb{N}$.

$\beta\mathbb{N}$ y $Spec(P\mathbb{N})$ tienen la misma topología pues para cada $A \subseteq \mathbb{N} :$

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= \{\mathcal{P} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{P}\} \\ &= \{\mathcal{P} \in Spec(P\mathbb{N}) : A \in \mathcal{P}\} \\ &= D(A). \end{aligned}$$

Se presentará la demostración de los siguientes dos teoremas, adaptados de una demostración hecha por Stone en [6].

Teorema 1.3.3. *Si A es un anillo de Boole con 1, entonces*

$$\begin{aligned} \mathbb{D} : A &\longrightarrow \mathbb{A}(Spec(A)) \\ c &\longmapsto D(c) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de anillos.

Demostración. En primer lugar obsérvese que la función \mathbb{D} está bien definida pues ya se probó en la demostración del Teorema 1.3.2 que si A es un anillo de Boole con 1 y $c \in A$, $D(c)$ es un abierto-cerrado de $Spec(A)$.

Sean $c, d \in A$, usando la proposición 1.1.2, numerales 1 y 4 tenemos:

- $\mathbb{D}(c + d) = D(c + d) = D(c) \triangle D(d) = \mathbb{D}(c) \triangle \mathbb{D}(d);$
- $\mathbb{D}(cd) = D(cd) = D(c) \cap D(d) = \mathbb{D}(c) \cap \mathbb{D}(d).$

Así \mathbb{D} es un homomorfismo de anillos.

\mathbb{D} es inyectiva pues si $c \in Ker(\mathbb{D})$, entonces $\mathbb{D}(c) = D(c) = \emptyset$ y así $c = 0$

(Proposición 1.1.2).

Veamos que \mathbb{D} es sobre, es decir, los únicos abiertos-cerrados de $\text{Spec}(A)$ son los $D(a)$ para todo $a \in A$:

Sea U un abierto-cerrado del $\text{Spec}(A)$, $U = \bigcup_{a \in W_1} D(a)$, como $\text{Spec}(A)$ es compacto y U es cerrado, U es compacto, entonces existe $W' \subseteq W$, W' finito tal que

$$U = \bigcup_{a \in W'} D(a) = D(\sup W')$$

Se sigue que \mathbb{D} es un isomorfismo de anillos. □

El teorema anterior permite afirmar que todo anillo de Boole con 1, es isomorfo al anillo de los abierto-cerrados de un cierto espacio de Stone. Recíprocamente, el siguiente teorema nos permitirá afirmar que todo espacio de Stone es homeomorfo al espectro de un cierto anillo de Boole con 1, para ello necesitaremos antes una definición y un lema.

Definición 1.3.4. Sea X un espacio topológico y \mathcal{F} un filtro de X . Diremos que \mathcal{F} **converge** a $x \in X$ lo cual se nota $\mathcal{F} \rightarrow x$, si $\mathfrak{B}_x \subseteq \mathcal{F}$ con \mathfrak{B}_x la familia de las vecindades de x .

La demostración del siguiente Lema se puede encontrar en [8]

Lema 1.3.1. X es compacto, si y solo si, para todo \mathcal{U} ultrafiltro de X , \mathcal{U} converge en X .

Teorema 1.3.4. Sea X un espacio de Stone, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : X &\longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{A}(X)) \\ x &\longmapsto \mathcal{U}_x := \{C \in \mathbb{A}(X) : x \in C\} \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. \mathcal{U} está bien definida, es decir, si $x \in X$, \mathcal{U}_x es ultrafiltro de $\mathbb{A}(X)$. En efecto, en primer lugar note que $\mathcal{U}_x \neq \emptyset$ pues $X \in \mathcal{U}_x$, además de la definición de \mathcal{U}_x , $\emptyset \notin \mathcal{U}_x$.

- Si $C, D \in \mathcal{U}_x$, entonces $C, D \in \mathbb{A}(X)$, $x \in C$ y $x \in D$, es decir, $C \cap D \in \mathbb{A}(X)$ y $x \in C \cap D$, así $C \cap D \in \mathcal{U}_x$;
- Dados $C \in \mathcal{U}_x$ y $D \in \mathbb{A}(X)$ tal que $C \leq D$, es decir, $C \cap D = C$, entonces $C \subseteq D$ y como $x \in C$ se tiene que $x \in D$, luego $D \in \mathcal{U}_x$ y \mathcal{U}_x es un filtro.

Falta ver que \mathcal{U}_x es un ultrafiltro:

Dado $C \in \mathbb{A}(X)$ y suponga que $X - C \notin \mathcal{U}_x$. Si $C \notin \mathcal{U}_x$, entonces $x \notin C$ o bien $x \in X - C$ y $X - C \in \mathcal{U}_x$. Luego por el Teorema 1.1.2, \mathcal{U}_x es un ultrafiltro.

\mathcal{U} es continua:

Sea $C \in \mathbb{A}(X)$ y $D(C)$ un abierto básico de $\text{Spec}(\mathbb{A}(X))$:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{-1}(D(C)) &= \{x \in X : \mathcal{U}_x \in D(C)\} \\ &= \{x \in X : C \in \mathcal{U}_x\} \\ &= \{x \in X : x \in C\} = C, \text{ con } C \text{ abierto de } X. \end{aligned}$$

\mathcal{U} es inyectiva:

Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$, como X es Hausdorff y totalmente desconexo, existen B_x, B_y abierto-cerrados básicos de X tal que $x \in B_x$, $y \in B_y$ y $B_x \cap B_y = \emptyset \Rightarrow B_x \in \mathcal{U}_x$ y $B_x \notin \mathcal{U}_y$ (pues $y \notin B_x$), así $\mathcal{U}_x \neq \mathcal{U}_y$.

\mathcal{U} es sobre:

Sea $\mathcal{F} \in \text{Spec}(\mathbb{A}(X))$, entonces \mathcal{F} es un ultrafiltro del anillo $\mathbb{A}(X)$.

Defina

$$\mathcal{G} := \{B \subseteq X : A \subseteq B \text{ para algún } A \in \mathcal{F}\}$$

Es claro que \mathcal{G} es un filtro del espacio X , luego por el Lema de Zorn existe \mathcal{H} ultrafiltro de X con $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$. Ahora, como X es compacto por el Lema 1.3.1, existe $x \in X$ tal que $\mathcal{H} \rightarrow x$. Veamos que $\mathcal{G} \rightarrow x$:

Dada U una vecindad de x en X , como X es totalmente desconexo, existe B vecindad abierto-cerrada básica de x con $B \subseteq U$, como \mathcal{F} es ultrafiltro en $\mathbb{A}(X)$, $B \in \mathcal{F}$ ó $X - B \in \mathcal{F}$ pero si $X - B \in \mathcal{F}$, entonces $X - B \in \mathcal{H}$ y ya que $\mathcal{H} \rightarrow x$,

$B \in \mathcal{H}$, así $\emptyset = B \cap (X - B) \in \mathcal{H}$, lo que es absurdo pues \mathcal{H} es filtro, así $B \in \mathcal{F}$, luego $B \in \mathcal{G}$ y ya que $B \subseteq U$, $U \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \rightarrow x$.

Si $U \in \mathcal{U}_x$, entonces $U \in \mathbb{A}(X)$ y $x \in U$, es decir U es una vecindad de x en X y ya que $\mathcal{G} \rightarrow x$, $U \in \mathcal{G}$, entonces existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \subseteq U$ y como \mathcal{F} es filtro $U \in \mathcal{F}$, así $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}_x$ y como \mathcal{F} es ultrafiltro, se concluye que $\mathcal{U}_x = \mathcal{F}$.

\mathcal{U} es abierta:

Como X es totalmente desconexo, sea B un abierto-cerrado básico, veamos que $\mathcal{U}(B) = D(B)$:

\subseteq] Si $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(B)$, entonces existe $x \in B$ tal que $\mathcal{U}_x = \mathcal{F}$ y como $B \in \mathbb{A}(X)$, $B \in \mathcal{U}_x$, luego $\mathcal{F} = \mathcal{U}_x \in D(B)$ y así $\mathcal{U}(B) \subseteq D(B)$.

\supseteq] Si $\mathfrak{F} \in D(B)$, entonces $B \in \mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F} \in \text{Spec}(\mathbb{A}(X))$, como \mathcal{U} es sobre existe $x \in X$ tal que $\mathcal{U}_x = \mathfrak{F}$. Veamos que $x \in B$, en efecto, si suponemos lo contrario, es decir, $x \notin B$, como $B \in \mathbb{A}(X)$, entonces $B \notin \mathcal{U}_x = \mathfrak{F}$ (Absurdo). Luego $\mathfrak{F} = \mathcal{U}_x \in \mathcal{U}(B)$ y $D(B) \subseteq \mathcal{U}(B)$.

Así \mathcal{U} es abierta, continua y biyectiva, por lo tanto \mathcal{U} es un homeomorfismo. \square

1.4. CATEGORÍAS, FUNTORES Y DUALIDAD

El enfoque principal de la teoría de categorías es describir propiedades de estructuras en términos de morfismos entre objetos. Para esta perspectiva, la estructura de cada objeto es especificada por todos los morfismos entre este y otros objetos. Por otra parte, las pruebas en la teoría de categorías se dan mostrando la conmutatividad de diagramas y usualmente envuelven conceptos estructurales tales como funtores, transformaciones naturales, límites y adjunciones (vea [4] y [6]).

Definición 1.4.1. Una **categoría** \mathcal{C} consta de:

- (1) Una colección no vacía cuyos elementos son llamados **objetos**. Esta colección es denotada por $\mathbf{Ob}(\mathcal{C})$;

- (2) Una colección de conjuntos eventualmente vacía $\{\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)\}_{X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})}$. Los elementos del conjunto $\mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ son llamados **morfismos** del objeto X en el objeto Y y se representan por $f : X \longrightarrow Y$;
- (3) Una operación entre morfismos llamada **composición** notada \circ y tal que si $X, Y, Z \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \longrightarrow & \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

La operación cumple las siguientes condiciones:

- (i) \circ es asociativa;
- (ii) Para cada objeto X en \mathcal{C} existe un morfismo identidad $i_X \in \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$ tal que

$$i_X \circ f = f \text{ y } g \circ i_X = g$$

para todo $f \in \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, todo $g \in \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ y todo Y objeto de \mathcal{C} .

Definición 1.4.2. Sea \mathcal{C} una categoría, \mathcal{D} se dice una **subcategoría** de \mathcal{C} si $\mathbf{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ y dados $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$, $\mathbf{Mor}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subseteq \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, si se da la igualdad se dice que \mathcal{D} es una **subcategoría plena** de \mathcal{C} . Por otro lado \mathcal{D} se dice una **subcategoría propia** de \mathcal{C} si \mathcal{D} es una subcategoría de \mathcal{C} y $\mathbf{Ob}(\mathcal{D}) \subsetneq \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$.

Se definirán las categorías \mathbf{AB}_1 y \mathbf{ST} las cuales serán útiles en el siguiente capítulo en donde se mostrará una versión un poco mas particular del teorema de representación de Stone el cual establece una dualidad entre \mathbf{AB}_1 y \mathbf{ST} (vea [2]).

Definición 1.4.3. La categoría \mathbf{AB}_1 consta de:

- La colección $\mathbf{Ob}(\mathbf{AB}_1)$ formada por los anillos de Boole con uno;
- Dados $A, B \in \mathbf{Ob}(\mathbf{AB}_1)$, $\mathbf{Mor}_{\mathbf{AB}_1}(A, B)$ es la familia de homomorfismos de anillos de Boole que respetan el uno.

Definición 1.4.4. La categoría \mathbf{ST} consta de:

- La colección $\mathbf{Ob}(\mathbf{ST})$ formada por los espacios de Stone;
- Dados $X, Y \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ST})$, $Mor_{\mathbf{ST}}(X, Y)$ es la familia de funciones continuas de X en Y .

Definición 1.4.5. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías. Un functor **covariante** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ asigna a cada $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ un $FX \in \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$ y a cada $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $F(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ tal que si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ son morfismos en \mathcal{C} , $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ y $F(i_X) = i_{FX}$, $\forall X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$.

Definición 1.4.6. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías. Un functor **contravariante** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ asigna a cada $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ un $FX \in \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$ y a cada $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $F(f) \in Mor_{\mathcal{D}}(FY, FX)$ tal que si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ son morfismos en \mathcal{C} , $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ y $F(i_X) = i_{FX}$ $\forall X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$.

Ejemplo 1.4.1. Sea \mathcal{C} una categoría, definimos $I_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ el functor identidad de \mathcal{C} como sigue:

Si $X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$, $I_{\mathcal{C}}X = X$;

Si $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo de \mathcal{C} , $I_{\mathcal{C}}(f) = f$. Claramente $I_{\mathcal{C}}$ es un functor covariante.

Nota. Los funtores que nos interesan en el presente trabajo, son todos contravariantes.

Definición 1.4.7. Sean $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dos funtores del mismo tipo. Una **transformación natural** (TN) τ entre F y G denotada $\tau : F \longrightarrow G$, consiste de una familia de morfismos $\tau := \{\tau_X : FX \longrightarrow GX\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})}$ tales que si $f \in Mor_{\mathcal{C}}(X, Y)$, y si F y G son covariantes, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & FX & \xrightarrow{\tau_X} & GX & \\ \downarrow f & \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) & \\ Y & FY & \xrightarrow{\tau_Y} & GY & \end{array}$$

conmuta

Es decir, $G(f) \circ \tau_X = \tau_Y \circ F(f)$.

O bien si F y G son contravariantes, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & FY & \xrightarrow{\tau_Y} & GY & \\ \downarrow f & \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) & \\ Y & FX & \xrightarrow{\tau_X} & GX & \end{array}$$

conmuta

Es decir, $G(f) \circ \tau_Y = \tau_X \circ F(f)$.

Ejemplo 1.4.2. (El determinante visto como una TN)

Sea \mathbf{Ani}_1 la categoría cuyos objetos son los anillos conmutativos con 1 y sus morfismos son los homomorfismos de anillos que respetan el 1 y sea \mathbf{Grup} la categoría cuyos objetos son los grupos y sus morfismos son los homomorfismos de grupos, defina:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ani}_1 & \xrightarrow{F} & \mathbf{Grup} & & \mathbf{Ani}_1 & \xrightarrow{\mathcal{GL}_n} & \mathbf{Grup} \\ \langle \mathcal{R}, +, \cdot \rangle & \longmapsto & \langle \mathcal{U}(\mathcal{R}), \cdot \rangle & & \langle \mathcal{R}, +, \cdot \rangle & \longmapsto & \langle \mathcal{GL}_n(\mathcal{R}), \odot \rangle \\ \downarrow f & & \downarrow F(f)=f|_{\mathcal{U}(\mathcal{R})} & & \downarrow f & & \downarrow \mathcal{GL}_n(f) \\ \langle \mathcal{S}, +, \times \rangle & & \langle \mathcal{U}(\mathcal{S}), \times \rangle & & \langle \mathcal{S}, +, \times \rangle & & \langle \mathcal{GL}_n(\mathcal{S}), \otimes \rangle \end{array}$$

Donde $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ son las unidades de \mathcal{R} , $\mathcal{GL}_n(\mathcal{R})$ son las matrices de $n \times n$ invertibles con entradas en \mathcal{R} y \odot, \otimes las multiplicaciones usuales entre matrices en $\mathcal{GL}_n(\mathcal{R})$ y $\mathcal{GL}_n(\mathcal{S})$ respectivamente. Además para $(a_{ij}) \in \mathcal{GL}_n(\mathcal{R})$, $\mathcal{GL}_n(f)(a_{ij}) = (f(a_{ij}))$. Definamos $det_n : \mathcal{GL}_n \rightarrow F$ dada por:

$$det_n := \left\{ \begin{array}{l} det_{\mathcal{R}} : \mathcal{GL}_n(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{R}) \\ A \mapsto det(A) \end{array} \right\}_{\mathcal{R} \in \text{Ob}(\mathbf{Ani}_1)}$$

Entonces det_n es una transformación natural entre F y \mathcal{GL}_n (vea [6], página 16).

Definición 1.4.8. Sea \mathcal{C} una categoría y $f : X \rightarrow Y$ un morfismo en \mathcal{C} , f se dice **retracción (corretracción)** si existe $g : Y \rightarrow X$ morfismo en \mathcal{C} tal que $f \circ g = i_Y$ (o bien $g \circ f = i_X$) respectivamente. Un **isomorfismo (iso)** es un morfismo que es retracción y corretracción.

Ejemplo 1.4.3. Consideremos la categoría **Set** cuyos objetos son los conjuntos y sus morfismos son las funciones entre estos. Se puede demostrar que en ésta categoría las retracciones son las funciones inyectivas y las corretracciones son las funciones sobreyectivas.

Definición 1.4.9. Sean $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dos funtores del mismo tipo y $\tau := \{\tau_X : FX \longrightarrow GX\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})}$ una **TN**. Se dice que τ es un **iso natural** si los τ_X son isos $\forall X \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$.

Definición 1.4.10. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías; decimos que \mathcal{C} y \mathcal{D} son **isomorfos** si existen funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ del mismo tipo, tales que $I_{\mathcal{D}} = FG$ y $I_{\mathcal{C}} = GF$. Por otro lado, decimos que \mathcal{C} y \mathcal{D} son **equivalentes** si existen funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ del mismo tipo, tales que $I_{\mathcal{D}} \cong FG$ y $I_{\mathcal{C}} \cong GF$ donde “ \cong ” significa la existencia de un iso natural.

Si además los funtores F y G son contravariantes, entonces se dice que \mathcal{C} y \mathcal{D} son **dualmente equivalentes** y que $\langle F, G \rangle$ es una **Dualidad**.

1.5. ADJUNCIÓN

Definición 1.5.1. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías, la categoría **Producto** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ consta de:

- La colección $\mathbf{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ está formada por las parejas (A, B) con $A \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C})$ y $B \in \mathbf{Ob}(\mathcal{D})$;
- Dados $(A, B), (C, D) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$, un morfismo de (A, B) en (C, D) es una pareja (f, g) donde $f \in \mathbf{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$ y $g \in \mathbf{Mor}_{\mathcal{D}}(B, D)$;
- Si $(A, B), (C, D), (E, F) \in \mathbf{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$, podemos definir de manera natural una operación entre morfismos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \circ : \mathbf{Mor}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((A, B), (C, D)) \times \mathbf{Mor}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C, D), (E, F)) &\longrightarrow \mathbf{Mor}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((A, B), (E, F)) \\ ((f, g), (h, i)) &\longmapsto (h \circ f, i \circ g) \end{aligned}$$

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ categorías y sea $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ un funtor. Un tal funtor desde una categoría producto se denomina **Bifuntor**.

Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías, $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ contravariantes. Existen dos bifuntores asociados a F y G definidos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} \times \mathcal{D} & \xrightarrow{H} & \mathbf{Set} \\
 (A, B) & \longmapsto & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, GB) \\
 (f, g) \uparrow & & \downarrow G(g) \circ _ \circ f \\
 (A', B') & & \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', GB')
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} \times \mathcal{D} & \xrightarrow{H'} & \mathbf{Set} \\
 (A, B) & \longmapsto & \text{Mor}_{\mathcal{D}}(B, FA) \\
 (f, g) \uparrow & & \downarrow F(f) \circ _ \circ g \\
 (A', B') & & \text{Mor}_{\mathcal{D}}(B', FA')
 \end{array}$$

Definición 1.5.2. Sean $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ dos funtores contravariantes, se dice que F es **adjunto a derecha de G** o que G es **adjunto a izquierda de F** o que $\langle F, G \rangle$ es una **adjunción** si existe un iso natural entre los bifuntores H y H' , lo notaremos $F \dashv G$.

Nota. Existe una definición dual para F y G covariantes (vea [4]).

Se definirán las categorías **ABR** y **STR** las cuales serán útiles en la siguiente sección en donde se mostrará que estas categorías son adjuntas. Un aspecto interesante de las adjunciones es que aunque no sean isomorfismos o equivalencias son candidatos a alcanzar ese estado.

Definición 1.5.3. La categoría **ABR** consta de:

- La colección **Ob(ABR)** son parejas $\langle A, \alpha \rangle$ donde $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{AB}_1)$ y α es una relación sobre A .
- Dados $\langle A, \alpha \rangle, \langle B, \beta \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ABR})$; $\text{Mor}_{\mathbf{ABR}}(\langle A, \alpha \rangle, \langle B, \beta \rangle)$ es la familia de homomorfismos de anillos de Boole de A en B que respetan el 1 y la relación “hacia atrás” *i.e.* Si $f(x)\beta f(y)$, entonces $x\alpha y$.

Definición 1.5.4. La categoría **STR** consta de:

- La colección $\mathbf{Ob}(\mathbf{STR})$ son parejas $\langle X, \gamma \rangle$ donde $X \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ST})$ y γ es una relación sobre X .
- Dados $\langle X, \gamma \rangle, \langle Y, \sigma \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{STR})$; $Mor_{\mathbf{STR}}(\langle X, \gamma \rangle, \langle Y, \sigma \rangle)$ es la familia de funciones continuas de X en Y que respetan la relación “hacia adelante” *i.e.* Si $x\gamma y$, entonces $f(x)\sigma f(y)$.

Observación. Los isos en las categorías definidas anteriormente son los morfismos biyectivos que respetan la relación “en los dos sentidos”.

En la siguiente definición se establecen dos maneras de “extender” una relación α dada en un conjunto X , al hiperconjunto PX (PX es la familia de todos los subconjuntos de X) o a cualquier subfamilia de PX . Las relaciones R_α y R^α que se definen, se usarán para extender los funtores clásicos de la teoría de Stone, a la categoría \mathbf{ABR} y \mathbf{STR} .

Definición 1.5.5. Dado X un conjunto y α una relación en X , se definen en PX o en una subfamilia de PX las relaciones R_α y R^α como sigue: Dados $C, D \in PX$

$$i) CR_\alpha D \Leftrightarrow \exists x \in C, \exists y \in D \text{ tal que } x\alpha y;$$

$$ii) CR^\alpha D \Leftrightarrow \forall x \in C, \forall y \in D, x\alpha y.$$

Ejemplo 1.5.1. Sea $X = \{a, b, c\}$ conjunto y $\alpha = \{(a, b), (a, c), (b, b)\}$ una relación sobre A , en PX :

1. $R^\alpha = \{(\{a\}, \{b\}), (\{a\}, \{c\}), (\{a\}, \{b, c\}), (\{b\}, \{b\}), (\{a, b\}, \{c\})\}$
2. $R_\alpha = R^\alpha \cup \{(\{a\}, \{a, b\}), (\{a\}, \{a, c\}), (\{a\}, X), (\{b\}, \{a, b\}), (\{b\}, \{b, c\}), (\{a, b\}, \{a, c\}), (\{a, b\}, \{b\}), (\{a, b\}\{a, b\}), (\{a, b\}, \{b, c\}), (\{a, b\}, X), (\{a, c\}, \{b\}), (\{a, c\}, \{c\}), (\{a, c\}, \{a, b\}), (\{a, c\}, \{a, c\}), (\{a, c\}, \{b, c\}), (\{a, c\}, \{b, c\}), (\{a, c\}, X), (X, \{b\}), (X, \{c\}), (X, \{a, b\}), (X, \{a, c\}), (X, \{b, c\}), (X, X)\}$

CAPÍTULO 2

UNA VERSIÓN MODERNA DE LA DUALIDAD DE STONE

El teorema de representación de Stone fue presentado por **M.H. Stone** en los años treinta a través del artículo [6] y quizá cronológicamente es el primer teorema que conecta profundamente dos campos de la matemática: El álgebra y la topología. En dicha época aún no existía la teoría de categorías, de modo que la versión que se presenta en este capítulo corresponde a la teoría de Stone, pero traducida al lenguaje de la teoría de categorías. Además en éste capítulo se presenta una versión un poco más particular del teorema que establece M. Stone en [6], la cual, a grandes rasgos muestra que la teoría de anillos de Boole con 1 es matemáticamente equivalente a la teoría de los espacios de Stone, esto es, dada una propiedad p que se quiera verificar en un anillo de Boole A , esta se puede traducir en una propiedad q en $Spec(A)$ de tal manera que si q es cierta en $Spec(A)$, entonces p es cierta en A . Del mismo modo dado un espacio de Stone X y una propiedad γ que se quiera verificar en X , esta se puede traducir en una propiedad φ en $\mathbb{A}(X)$ de tal manera que si φ es cierta en $\mathbb{A}(X)$, entonces γ es cierta en X .

2.1. DUALIDAD DE STONE

Recordando las definiciones 1.4.3 y 1.4.4 se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.1.1. *Las categorías \mathbf{AB}_1 y \mathbf{ST} son dualmente equivalentes.*

Demostración. Definamos

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{AB}_1 & \xrightarrow{\mathbb{S}} & \mathbf{ST} \\
 A \longmapsto & \text{Spec}(A) & \\
 \downarrow f & \mathbb{S}(f)=f^! \uparrow & \\
 B & \text{Spec}(B) & \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{ST} & \xrightarrow{\mathbb{A}} & \mathbf{AB}_1 \\
 X \longmapsto & \mathbb{A}(X) & \\
 \downarrow f & \mathbb{A}(f)=f^! \uparrow & \\
 Y & \mathbb{A}(Y) &
 \end{array}$$

donde $f^!(T) = f^{-1}(T)$. Veamos que \mathbb{S} y \mathbb{A} son funtores contravariantes, para ello basta ver que \mathbb{S} y \mathbb{A} están bien definidos puesto que $(f \circ g)^! = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = g^! \circ f^!$.

\mathbb{S} está bien definido en objetos:

Sea $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{AB}_1)$; por el Teorema 1.3.2, $\text{Spec}(A)$ es un espacio de Stone.

\mathbb{S} está bien definido en morfismos:

Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo en \mathbf{AB}_1 ;

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}(f) = f^! : & \text{Spec}(B) & \longrightarrow & \text{Spec}(A) \\
 & T & \longmapsto & f^{-1}(T)
 \end{array}$$

está bien definido, en efecto, sea $T \in \text{Spec}(B)$, veamos que $f^{-1}(T)$ es un ultrafiltro de A :

- $f^{-1}(T) \neq \emptyset$ (pues $1_B \in T$ y $1_A \in f^{-1}(1_B)$, entonces $1_A \in f^{-1}(T)$);
- Dados $x, y \in f^{-1}(T)$, $f(x), f(y) \in T$, entonces $f(x) \wedge f(y) \in T$ y $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \in T$ y así $x \wedge y \in f^{-1}(T)$;
- Dado $x \in f^{-1}(T)$ y $y \in A$, $f(x) \in T$ y $f(y) \in B$, entonces $f(x) \vee f(y) \in T$ y $f(x) \vee f(y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y) = f(x + y + xy) = f(x \vee y)$ luego

$$x \vee y \in f^{-1}(T);$$

- Supongamos que $a \in A$ y $a \notin f^{-1}(T)$, entonces $f(a) \notin T$, es decir, $1_B + f(a) \in T$ y como $f(1_A) + f(a) = f(1_A + a) \in T$ y $1_A + a \in f^{-1}(T)$, por el Teorema 1.1.2 se tiene que $f^{-1}(T)$ es un ultrafiltro de A .

$\mathbb{S}(f)$ es continua:

Sea $D(a)$ un abierto básico de $\text{Spec}(A)$ con $a \in A$ y sea $\mathcal{F} \in (f^!)^{-1}(D(a))$, esto es $f^!(\mathcal{F}) \in D(a)$, o bien $a \in f^!(\mathcal{F}) = f^{-1}(\mathcal{F}) \Leftrightarrow f(a) \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \in D(f(a))$, en consecuencia $(f^!)^{-1}(D(a)) = D(f(a))$ y $(f^!)^{-1}(D(a))$ es abierto en $\text{Spec}(B)$.

\mathbb{A} está bien definida en objetos:

Sea $X \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ST})$: Por el ejemplo 1.3.1, $\mathbb{A}(X)$ es un anillo de Boole con $1_{\mathbb{A}(X)} = X$.

\mathbb{A} está bien definida en morfismos:

Sea $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo en \mathbf{ST} ,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(f) = f^! : \mathbb{A}(Y) &\longrightarrow \mathbb{A}(X) \\ T &\longmapsto f^{-1}(T) \end{aligned}$$

$f^!$ está bien definida, en efecto, si $A \in \mathbb{A}(Y)$, $f^!(A) = f^{-1}(A)$ que es abierto-cerrado de X pues f es continua, así $f^!(A) \in \mathbb{A}(X)$.

$f^!$ es un homomorfismo de anillos de Boole con uno.

Sea $A, B \in \mathbb{A}(Y)$:

- $f^!(A \triangle B) = f^{-1}(A - B) \cup f^{-1}(B - A) = (f^{-1}(A) - f^{-1}(B)) \cup (f^{-1}(B) - f^{-1}(A)) = f^!(A) \triangle f^!(B)$;
- $f^!(A \cap B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^!(A) \cap f^!(B)$;
- $f^!(1_{\mathbb{A}(Y)}) = f^{-1}(Y) = X = 1_{\mathbb{A}(X)}$.

Veamos que $\langle \mathbb{S}, \mathbb{A} \rangle$ es una dualidad:

Definimos $\tau : I_{\mathbf{ST}} \rightarrow \mathbb{S}\mathbb{A}$ y $\eta : I_{\mathbf{AB}_1} \rightarrow \mathbb{A}\mathbb{S}$ de la siguiente manera:

$$\tau := \{\mathcal{U}_X : X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{A}(X))\}_{X \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ST})}$$

con \mathcal{U}_X como en el teorema 1.3.4, esto es: $\mathcal{U}_X(x) := \{C \in \mathbb{A}(X) : x \in C\}$, con $X \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ST})$ y $x \in X$.

$$\eta := \{\mathbb{D}_A : A \rightarrow \mathbb{A}(\text{Spec}(A))\}_{A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{AB}_1)}$$

con \mathbb{D}_A como en el teorema 1.3.3, esto es: $\mathbb{D}_A(c) := \{\mathcal{U} \in \text{Spec}(A) : c \in \mathcal{U}\}$, con $A \in \mathbf{Ob}(\mathbf{AB}_1)$ y $c \in A$.

Así basta ver que el diagrama de la definición 1.4.7 conmuta para τ y η .

Ahora sea $f : X \rightarrow Y$ un morfismo en \mathbf{ST} :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mathcal{U}_X} & \text{Spec}(\mathbb{A}(X)) \\ \downarrow f & & \downarrow \mathbb{S}(\mathbb{A}(f)) = (f^!)^! \\ Y & \xrightarrow{\mathcal{U}_Y} & \text{Spec}(\mathbb{A}(Y)) \end{array}$$

Veamos que $\mathcal{U}_Y \circ f = (f^!)^! \circ \mathcal{U}_X$:

Sea $x \in X$, $C \in (f^!)^!(\mathcal{U}_X(x)) = (f^!)^{-1}(\mathcal{U}_X(x)) \Leftrightarrow f^!(C) \in \mathcal{U}_X(x) \Leftrightarrow x \in f^!(C) = f^{-1}(C) \Leftrightarrow f(x) \in C \Leftrightarrow C \in \mathcal{U}_Y(f(x)) = \mathcal{U}_Y \circ f(x)$.

Sea $f : A \rightarrow B$ un morfismo en \mathbf{AB}_1 :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mathbb{D}_A} & \mathbb{A}(\text{Spec}(A)) \\ \downarrow f & & \downarrow \mathbb{A}(\mathbb{S}(f)) = (f^!)^! \\ B & \xrightarrow{\mathbb{D}_B} & \mathbb{A}(\text{Spec}(B)) \end{array}$$

Veamos que $(f^!)^! \circ \mathbb{D}_A = \mathbb{D}_B \circ f$:

Sea $x \in A$, $T \in (f^!)^!(\mathbb{D}_A)(x) = (f^!)^{-1}(\mathbb{D}_A(x)) \Leftrightarrow f^!(T) \in \mathbb{D}_A(x) \Leftrightarrow x \in f^!(T) = f^{-1}(T) \Leftrightarrow f(x) \in T \Leftrightarrow T \in \mathbb{D}_B(f(x)) = \mathbb{D}_B \circ f(x)$. Luego τ y η son isos naturales

y $\mathbf{AB}_1 \cong \mathbf{ST}$. □

2.2. LA ADJUNCIÓN $\langle \mathbb{S}, \mathbb{A} \rangle$

Proposición 2.2.1. *Podemos extender los funtores \mathbb{S} y \mathbb{A} del Teorema 2.1.1 como sigue:*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{ABR} \xrightarrow{\mathbb{S}} \mathbf{STR} & & \mathbf{STR} \xrightarrow{\mathbb{A}} \mathbf{ABR} \\
 \langle A, \alpha \rangle \longmapsto \langle \text{Spec}(A), R^\alpha \rangle & & \langle X, \gamma \rangle \longmapsto \langle \mathbb{A}(X), R_\gamma \rangle \\
 \downarrow f & \mathbb{S}(f)=f^\uparrow \uparrow & \downarrow f & \mathbb{A}(f)=f^\uparrow \uparrow \\
 \langle A', \alpha' \rangle & \langle \text{Spec}(A'), R^{\alpha'} \rangle & \langle X', \gamma' \rangle & \langle \mathbb{A}(X'), R_{\gamma'} \rangle
 \end{array}$$

Entonces \mathbb{S} y \mathbb{A} son funtores.

Demostración. \mathbb{S} y \mathbb{A} están bien definidos en objetos pues dados $\langle A, \alpha \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ABR})$ y $\langle X, \gamma \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{STR})$, entonces R^α y R_γ son relaciones en PA y PX respectivamente y ya que $\text{Spec}(A) \subseteq PA$ y $\mathbb{A}(X) \subseteq PX$, se sigue que R^α y R_γ son relaciones en $\text{Spec}(A)$ y $\mathbb{A}(X)$ respectivamente.

Veamos que \mathbb{S} y \mathbb{A} están bien definidos en morfismos:

- Sea $f \in \text{Mor}_{\mathbf{ABR}}(\langle A, \alpha \rangle, \langle A', \alpha' \rangle)$; de la demostración del Teorema 2.1.1 ya tenemos que $f^\uparrow : \text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(A)$ está bien definida y es continua. Veamos ahora que f^\uparrow respeta la relación “hacia adelante”: Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Spec}(A')$ tal que $\mathcal{F}R^{\alpha'}\mathcal{G}$ y sean $x \in f^\uparrow(\mathcal{F})$ y $y \in f^\uparrow(\mathcal{G})$, entonces $f(x) \in \mathcal{F}$ y $f(y) \in \mathcal{G}$ luego $f(x)\alpha'f(y)$ y como f respeta la relación “hacia atrás”, $x\alpha y$, así $f^\uparrow(\mathcal{F})R^\alpha f^\uparrow(\mathcal{G})$.
- Sea $f \in \text{Mor}_{\mathbf{STR}}(\langle X, \gamma \rangle, \langle X', \gamma' \rangle)$. Nuevamente por la demostración del Teorema 2.1.1 tenemos que $f^\uparrow : \mathbb{A}(X') \rightarrow \mathbb{A}(X)$ está bien definida y es homomorfismo de anillos de Boole con 1. Veamos que f^\uparrow respeta la relación R_γ “hacia atrás”: Sea $A, B \in \mathbb{A}(X')$ tal que $f^\uparrow(A)R_\gamma f^\uparrow(B)$, entonces existe $x \in f^\uparrow(A)$ y existe $y \in f^\uparrow(B)$ tal que $x\gamma y$ y como f respeta la relación “hacia adelante”, $f(x)\gamma'f(y)$ con $f(x) \in A$ y $f(y) \in B$, así $AR_{\gamma'}B$.

□

Nota: Observe que estamos abusando de la notación al usar las mismas letras \mathbb{S} y \mathbb{A} de la demostración del Teorema 2.1.1. Lo hacemos solamente para simplificar y no introducir más notación nueva.

Teorema 2.2.1. *Los funtores \mathbb{S} y \mathbb{A} son adjuntos.*

Demostración. Dados $\langle A, \alpha \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ABR})$ y $\langle X, \gamma \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{STR})$, defina

$$\begin{array}{ccc} \theta_{X,A} : \text{Mor}_{\mathbf{STR}}(\langle X, \gamma \rangle, \langle \text{Spec}(A), R^\alpha \rangle) & \longrightarrow & \text{Mor}_{\mathbf{ABR}}(\langle A, \alpha \rangle, \langle \mathbb{A}(X), R_\gamma \rangle) \\ f & \longmapsto & \theta_{X,A}(f) = \theta(f) : \langle A, \alpha \rangle \rightarrow \langle \mathbb{A}(X), R_\gamma \rangle \\ & & a \mapsto f^{-1}(D(a)) \end{array}$$

$\theta_{X,A}$ está bien definida, en efecto, $f^{-1}(D(a))$ es abierto-cerrado de X , dado que $D(a)$ es abierto-cerrado de $\text{Spec}(A)$ y f es continua.

Ahora, dados $a, b \in A$ con $f^{-1}(D(a))R_\gamma f^{-1}(D(b))$, es decir, existe $z \in f^{-1}(D(a))$ y existe $w \in f^{-1}(D(b))$ tal que $z\gamma w$. Como f es morfismo en \mathbf{STR} , $f(z)R^\alpha f(w)$ con $f(z) \in D(a)$ y $f(w) \in D(b)$, en particular $a \in f(z)$ y $b \in f(w)$, entonces aab , así $\theta(f)$ respeta la relación R_γ “hacia atrás”.

$\theta(f)$ es un homomorfismo de anillos:

Sean $a, b \in A$, veamos que $f^{-1}(D(a)) \Delta f^{-1}(D(b)) = f^{-1}(D(a+b))$:

$x \in f^{-1}(D(a+b))$ equivale a que $f(x) \in D(a+b) = D(a) \Delta D(b)$, o bien, $x \in f^{-1}(D(a) \Delta D(b)) = f^{-1}(D(a)) \Delta f^{-1}(D(b))$. Por lo tanto $\theta(f)$ respeta la suma.

$x \in f^{-1}(D(ab))$, equivale a que $f(x) \in D(ab) = D(a) \cap D(b)$ luego $f(x) \in D(a)$ y $f(x) \in D(b)$ y por consiguiente $x \in f^{-1}(D(a)) \cap f^{-1}(D(b))$. Por lo tanto $\theta(f)$ respeta el producto.

$\theta(f)$ respeta el uno, en efecto, $\theta(f)(1_A) = f^{-1}(D(1_A)) = f^{-1}(\text{Spec}(A)) = X = 1_{\mathbb{A}(X)}$.

$\theta_{X,A}$ es 1-1:

Sean $f, g \in \text{Mor}_{\mathbf{STR}}(\langle X, \gamma \rangle, \langle \text{Spec}(A), R^\alpha \rangle)$ tal que $\theta(f) = \theta(g)$ y sea $x \in X$, veamos que $f(x) = g(x)$: $z \in f(x)$, equivale a que $f(x) \in D(z)$, o bien, $x \in f^{-1}(D(z))$

$= \theta(f)(z) = \theta(g)(z) = g^{-1}(D(z))$ así $g(x) \in D(z)$ y por consiguiente $z \in g(x)$.

$\theta_{X,A}$ es sobre:

Sea $g \in \text{Mor}_{\mathbf{ABR}}(\langle A, \alpha \rangle, \langle \mathbb{A}(X), R_\gamma \rangle)$, defina

$$\begin{aligned} f : \langle X, \gamma \rangle &\longrightarrow \langle \text{Spec}(A), R^\alpha \rangle \\ x &\longmapsto g^{-1}(\mathcal{U}_x) \end{aligned}$$

Con $\mathcal{U}_x = \{C \in \mathbb{A}(X) : x \in C\}$. Veamos que f está bien definida:

Dado $x \in X$, $g^{-1}(\mathcal{U}_x)$ es un ultrafiltro de A :

- $g^{-1}(\mathcal{U}_x) \neq \emptyset$, en efecto, como $g : \langle A, \alpha \rangle \longrightarrow \langle \mathbb{A}(X), R_\gamma \rangle$ respeta el 1_A del anillo A , entonces $g(1_A) = X \in \mathcal{U}_x \Rightarrow 1_A \in g^{-1}(\mathcal{U}_x)$ y así $g^{-1}(\mathcal{U}_x) \neq \emptyset$.
- Dados $a, b \in g^{-1}(\mathcal{U}_x)$: $g(a), g(b) \in \mathcal{U}_x$, entonces $x \in g(a) \cap g(b) = g(a \wedge b)$ en consecuencia $g(a \wedge b) = g(ab) \in \mathcal{U}_x$ y $ab \in g^{-1}(\mathcal{U}_x)$.
- Dado $a \in g^{-1}(\mathcal{U}_x)$ y $b \in A$: $g(a) \in \mathcal{U}_x$ y $g(b) \in \mathbb{A}(X)$, entonces $g(a) \cup g(b) \in \mathcal{U}_x$ y $g(a) \cup g(b) = g(a) \triangle g(b) \triangle (g(a) \cap g(b)) = g(a + b + ab) = g(a \vee b) \Rightarrow g(a \vee b) \in \mathcal{U}_x$ y $a \vee b \in g^{-1}(\mathcal{U}_x)$;
- Supongamos que existe $a \in A$ tal que $a, 1+a \notin g^{-1}(\mathcal{U}_x)$, entonces $g(a), g(1+a) \notin \mathcal{U}_x$ y $g(1+a) = g(1) \triangle g(a) = X \triangle g(a)$. Por otro lado como \mathcal{U}_x es un ultrafiltro $g(a) \in \mathcal{U}_x$ ó $X \triangle g(a) \in \mathcal{U}_x$, contradicción.

f respeta la relación hacia adelante:

Si $x, y \in X$ son tal que $x \gamma y$, sean $z \in g^{-1}(\mathcal{U}_x)$ y $w \in g^{-1}(\mathcal{U}_y)$, entonces $x \in g(z)$ y $y \in g(w)$ luego $g(z) R_\gamma g(w)$ y como g es morfismo en \mathbf{ABR} , $z \alpha w$. Así $f(x) R^\alpha f(y)$.

f es continua:

Sea $D(a)$ abierto básico de $\text{Spec}(A)$ con $a \in A$, veamos que $f^{-1}(D(a))$ es abierto en X :

$$\begin{aligned}
f^{-1}(D(a)) &= \{x \in X : f(x) \in D(a)\} \\
&= \{x \in X : g^{-1}(\mathcal{U}_x) \in D(a)\} \\
&= \{x \in X : a \in g^{-1}(\mathcal{U}_x)\} \\
&= \{x \in X : g(a) \in \mathcal{U}_x\} \\
&= \{x \in X : g(a) \in \mathbb{A}(X) \text{ y } x \in g(a)\} \\
&= g(a) \in \mathbb{A}(X)
\end{aligned}$$

Así $f \in \text{Mor}_{\mathbf{STR}}(\langle X, \gamma \rangle, \langle \text{Spec}(A), R^\alpha \rangle)$.

Ahora veamos que $\theta_{X,A}(f) = g$: Dado $a \in A$

$$\begin{aligned}
\theta(f)(a) &= f^{-1}(D(a)) \\
&= \{x \in X : f(x) \in D(a)\} \\
&= \{x \in X : g^{-1}(\mathcal{U}_x) \in D(a)\} \\
&= \{x \in X : a \in g^{-1}(\mathcal{U}_x)\} \\
&= \{x \in X : g(a) \in \mathcal{U}_x\} \\
&= \{x \in X : x \in g(a)\} \\
&= g(a)
\end{aligned}$$

Luego $\theta_{X,A}$ es sobre y así $\theta_{X,A}$ es un iso de \mathbf{Set} , o bien $\theta_{X,A}$ es una función biyectiva $\forall \langle X, \gamma \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{STR})$ y $\forall \langle A, \alpha \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ABR})$.

Ahora definamos los bifuntores H y H' como sigue:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{STR} \times \mathbf{ABR} & \xrightarrow{H} & \mathbf{Set} \\
(\langle X, \gamma \rangle, \langle A, \alpha \rangle) & \longmapsto & \text{Mor}_{\mathbf{STR}}(\langle X, \gamma \rangle, \langle \text{Spec}(A), R^\alpha \rangle) \\
\uparrow (f,g) & & \downarrow g' \circ - \circ f \\
(\langle X', \gamma' \rangle, \langle A', \alpha' \rangle) & & \text{Mor}_{\mathbf{STR}}(\langle X', \gamma' \rangle, \langle \text{Spec}(A'), R^{\alpha'} \rangle)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{STR} \times \mathbf{ABR} & \xrightarrow{H'} & \mathbf{Set} \\
(\langle X, \gamma \rangle, \langle A, \alpha \rangle) & \longmapsto & \text{Mor}_{\mathbf{ABR}}(\langle A, \alpha \rangle, \langle \mathbb{A}(X), R_\gamma \rangle) \\
\uparrow (f,g) & & \downarrow f' \circ - \circ g \\
(\langle X', \gamma' \rangle, \langle A', \alpha' \rangle) & & \text{Mor}_{\mathbf{ABR}}(\langle A', \alpha' \rangle, \langle \mathbb{A}(X'), R_{\gamma'} \rangle)
\end{array}$$

Solo falta ver que

$$\theta := \{\theta_{X,A}\}_{(X,A) \in \mathbf{Ob}(\mathbf{STR} \times \mathbf{ABR})}$$

es una **TN** entre los bifuntores H y H' . Dado

$$(f, g) : (\langle X', \gamma' \rangle, \langle A', \alpha' \rangle) \longrightarrow (\langle X, \gamma \rangle, \langle A, \alpha \rangle)$$

un morfismo en $\mathbf{STR} \times \mathbf{ABR}$ debemos ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathbf{STR}}(\langle X, \gamma \rangle, \langle \text{Spec}(A), R^\alpha \rangle) & \xrightarrow{\theta_{X,A}} & \text{Mor}_{\mathbf{ABR}}(\langle A, \alpha \rangle, \langle \mathbb{A}(X), R_\gamma \rangle) \\ \downarrow H(f,g) & & \downarrow H'(f,g) \\ \text{Mor}_{\mathbf{STR}}(\langle X', \gamma' \rangle, \langle \text{Spec}(A'), R^{\alpha'} \rangle) & \xrightarrow{\theta_{X',A'}} & \text{Mor}_{\mathbf{ABR}}(\langle A', \alpha' \rangle, \langle \mathbb{A}(X'), R_{\gamma'} \rangle) \end{array}$$

Sea $t \in \text{Mor}_{\mathbf{STR}}(\langle X, \gamma \rangle, \langle \text{Spec}(A), R^\alpha \rangle)$:

$$\theta_{X',A'} \circ H(f, g)(t) = \theta_{X',A'}(g^! \circ t \circ f) : \langle A', \alpha' \rangle \longrightarrow \langle \mathbb{A}(X'), R_{\gamma'} \rangle$$

Ahora si $z \in A'$, entonces $(g^!)^{-1}(D(z)) = D(g(z))$, en efecto, $\mathcal{U} \in (g^!)^{-1}(D(z))$ equivale a que $g^!(\mathcal{U}) \in D(z)$, es decir, $z \in g^!(\mathcal{U}) = g^{-1}(\mathcal{U})$, y esto es $g(z) \in \mathcal{U}$. Así $\mathcal{U} \in D(g(z))$. De lo anterior se tiene que $\theta_{X',A'}(g^! \circ t \circ f)(z) = (g^! \circ t \circ f)^{-1}(D(z)) = f^{-1}(t^{-1}((g^!)^{-1}(D(z)))) = f^{-1}(t^{-1}(D(g(z))))(\star)$.

Por otra parte:

$$H'(f, g) \circ \theta_{X,A}(t) = f^! \circ \theta_{X,A}(t) \circ g : \langle A', \alpha' \rangle \longrightarrow \langle \mathbb{A}(X'), R_{\gamma'} \rangle$$

y para z se tiene que $(f^! \circ \theta_{X,A}(t) \circ g)(z) = f^{-1}(t^{-1}(D(g(z))))(\star\star)$

De (\star) y $(\star\star)$ se concluye que el diagrama conmuta y $\langle \mathbb{S}, \mathbb{A} \rangle$ es una adjunción. \square

Observación: Como veremos en la próxima sección, existen objetos en **ABR** tal que $\langle A, \alpha \rangle \cong \mathbb{A}\mathbb{S}\langle A, \alpha \rangle$ pero en general la adjunción establecida no es una equivalencia. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2.2.1. (Tomado de [5], Ejemplo 2.1.8.)

Tome el anillo $\langle P\mathbb{N}, \Delta, \cap \rangle$ y definimos la relación en $P\mathbb{N}$

$$\alpha := \{(C, D) : C \cap D \neq \emptyset\} \cup \{(\{2n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{2n+1\}_{n \in \mathbb{N}}), (\{2n+1\}_{n \in \mathbb{N}}, \{2n\}_{n \in \mathbb{N}})\}$$

Por el ejemplo 1.3.1 $\text{Spec}(P\mathbb{N}) = \beta\mathbb{N}$, veamos que $\langle P\mathbb{N}, \alpha \rangle$ y $\langle \mathbb{A}(\beta\mathbb{N}), R_{R^\alpha} \rangle$ **no** son objetos isomorfos en **ABR**, en efecto,

R^α es la relación de igualdad en $\beta(\mathbb{N})$ pues si $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \beta(\mathbb{N})$ con $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$, entonces $A, B \in \mathcal{F}$ y como \mathcal{F} es ultrafiltro $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A\alpha B$ y $\mathcal{F}R^\alpha\mathcal{G}$. Por otro lado, si $\mathcal{F}R^\alpha\mathcal{G}$ y suponemos que $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$, entonces existen $C \in \mathcal{F}$ y $D \in \mathcal{G}$ tal que $C \cap D = \emptyset$, entonces $(C = \{2n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ y } D = \{2n+1\}_{n \in \mathbb{N}})$ o $(C = \{2n+1\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ y } D = \{2n\}_{n \in \mathbb{N}})$. En el primer caso tendríamos:

$$C = \{2+4n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{4n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{2+4n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F} \text{ o } \{4n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F};$$

$$D = \{1+4n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{3+4n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{G} \Rightarrow \{1+4n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{G} \text{ o } \{3+4n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{G}.$$

Pero si por ejemplo $\{2+4n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ y $\{1+4n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{G}$, entonces $\{2+4n\}_{n \in \mathbb{N}} \alpha \{1+4n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (pues $\mathcal{F}R^\alpha\mathcal{G}$), contradicción.

Los demás casos són análogos, así $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ y $R^\alpha = \{(\mathcal{U}, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \in \beta(\mathbb{N})\}$.

Si existiera $f : \langle P\mathbb{N}, \alpha \rangle \rightarrow \langle \mathbb{A}(\beta(\mathbb{N})), R_{R^\alpha} \rangle$ isomorfismo de **ABR**, como $\{2n\}_{n \in \mathbb{N}} \alpha \{2n+1\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces $f(\{2n\}_{n \in \mathbb{N}})R_{R^\alpha}f(\{2n+1\}_{n \in \mathbb{N}})$ (pues en isomorfismos la relación se preserva en los dos sentidos), entonces existen $\mathcal{F} \in f(\{2n\}_{n \in \mathbb{N}})$ y $\mathcal{G} \in f(\{2n+1\}_{n \in \mathbb{N}})$ tal que $\mathcal{F}R^\alpha\mathcal{G}$, ie. $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{F} \in f(\{2n\}_{n \in \mathbb{N}}) \cap f(\{2n+1\}_{n \in \mathbb{N}}) = f(\{2n\}_{n \in \mathbb{N}} \cap \{2n+1\}_{n \in \mathbb{N}}) = \emptyset$ (Absurdo). \square

CAPÍTULO 3

CUATRO EXTENSIONES DE LA DUALIDAD DE STONE

En el capítulo anterior se estableció una adjunción entre las categorías **ABR** y **STR**, y resulta natural preguntarse si existen subcategorías de **ABR** y **STR** duales. Esta cuestión es resuelta en [1] al dotar a los anillos de Boole con una relación que cumpla ciertas condiciones, lo que significará, enriquecer también al espacio de Stone correspondiente con una relación que cumpla con ciertas condiciones.

En esta sección se presentarán algunas dualidades entre ciertas subcategorías de **ABR** y **STR** respectivamente. Además se mostrará que en efecto estas dualidades son extensiones de la dualidad de Stone mostrando que las categorías clásicas de los anillos de Boole con 1 y los espacios de Stone se pueden ver como subcategorías de las nuevas categorías definidas, y los funtores que establecen las dualidades obtenidas, coinciden con los funtores definidos por Stone, al restringirlos a las categorías **AB₁** y **ST**.

3.1. $ABR\mathcal{L}$ vs $STRC$

Iniciaremos estableciendo dos propiedades sobre la relación α , propiedades que de alguna manera expresan una compatibilidad entre la relación y el orden del anillo A .

Definición 3.1.1. La categoría $ABR\mathcal{L}$ (**Anillos de Boole con una relación de tipo \mathcal{L}**) consta de:

- La colección $Ob(ABR\mathcal{L})$ formada por las parejas $\langle A, \alpha \rangle$ donde $A \in Ob(AB_1)$ y α es una relación en $A - \{0\}$ que satisface:

$$(\mathcal{L}1) (\forall a, b, c, d \in A)(c\alpha d, c \leq a, d \leq b \Rightarrow a\alpha b);$$

$$(\mathcal{L}2) (\forall a, b, c, d \in A)((c \vee d) \alpha (a \vee b) \Rightarrow c\alpha a \text{ o } c\alpha b \text{ o } d\alpha a \text{ o } d\alpha b).$$

En este caso se dice que α es una \mathcal{L} -relación sobre A .

- Dados $\langle A, \alpha \rangle, \langle B, \beta \rangle \in Ob(ABR\mathcal{L})$, $Mor_{ABR\mathcal{L}}(\langle A, \alpha \rangle, \langle B, \beta \rangle)$ es la familia de homomorfismos de anillos entre A y B , que respetan el uno y la relación “hacia atrás” *i.e.* $f(x)\beta f(y) \Rightarrow x\alpha y$.

Definición 3.1.2. La categoría $STRC$ (**Espacios de Stone con una relación cerrada**) consta de:

- La colección $Ob(STRC)$ son parejas $\langle X, \gamma \rangle$ donde $X \in Ob(ST)$ y γ es una relación en X cerrada, es decir γ es un cerrado en el espacio producto $X \times X$.
- Dados $\langle X, \gamma \rangle, \langle Y, \sigma \rangle \in Ob(STRC)$; $Mor_{STRC}(\langle X, \gamma \rangle, \langle Y, \sigma \rangle)$ es la familia de funciones continuas de X en Y que respetan la relación “hacia adelante” *i.e.* $x\gamma y \Rightarrow f(x)\sigma f(y)$.

Teorema 3.1.1. *Al restringir los funtores \mathbb{S} y \mathbb{A} de la Proposición 2.2.1, a las subcategorías $ABR\mathcal{L}$ y $STRC$ respectivamente, se obtienen funtores entre tales subcategorías.*

Demostración. Dados $\langle A, \alpha \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ABR}\mathcal{L})$ y $\langle X, \gamma \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{STRC})$, en virtud de la demostración de la proposición 2.2.1, basta ver que R^α es un cerrado en el espacio producto $\mathfrak{G} = \text{Spec}(A) \times \text{Spec}(A)$ y que R_γ verifica $\mathcal{L}1$ y $\mathcal{L}2$.

R^α es un cerrado:

Sea $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in \overline{R^\alpha}$ y sean $a \in \mathcal{F}$, $b \in \mathcal{G}$. Entonces $\mathcal{F} \in D(a)$ y $\mathcal{G} \in D(b)$, es decir, $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in D(a) \times D(b)$ y $D(a) \times D(b)$ es un abierto básico de \mathfrak{G} , entonces existe $(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \in (D(a) \times D(b)) \cap R^\alpha$, $a \in \mathcal{F}'$, $b \in \mathcal{G}'$ y $(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \in R^\alpha$, luego $a\alpha b$ y así $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \in R^\alpha$.

Obsérvese que por la forma como se define R_γ (recuerde la definición 1.5.5) es inmediato que es una relación en $\mathbb{A}(X) - \{\emptyset\}$ y que satisface $(\mathcal{L}1)$ y $(\mathcal{L}2)$. \square

Los siguientes lemas nos permitirán concluir que los funtores \mathbb{S} y \mathbb{A} de la dualidad de Stone se pueden extender a las categorías $\mathbf{ABR}\mathcal{L}$ y \mathbf{STRC} , de tal manera que el par $\langle \mathbb{S}, \mathbb{A} \rangle$ resultará ser una dualidad.

Lema 3.1.1. *Sea $\langle A, \alpha \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ABR}\mathcal{L})$ y sean \mathcal{F} y \mathcal{G} filtros de A tal que $\mathcal{F}R^\alpha\mathcal{G}$, entonces $\forall x \in A$ se cumple alguna de las siguientes cuatro afirmaciones:*

1. $\forall y \in \mathcal{F}, \forall z \in \mathcal{G}, xy \alpha xz$;
2. $\forall y \in \mathcal{F}, \forall z \in \mathcal{G}, xy \alpha x'z$;
3. $\forall y \in \mathcal{F}, \forall z \in \mathcal{G}, x'y \alpha xz$;
4. $\forall y \in \mathcal{F}, \forall z \in \mathcal{G}, x'y \alpha x'z$.

Definición 3.1.3. Dado X un conjunto y \leq una relación de orden en X . Diremos que $\langle X, \leq \rangle$ es un buen orden si dado $Y \subseteq X$ no vacío, mín Y existe.

Note que si A es un anillo de Boole con 1, por el Teorema de Zermelo $A - \{0\}$ admite un buen orden. Además existe un único ordinal Ω tal que

$$A - \{0\} = \{x_\lambda : \lambda \in \Omega\}$$

(vea [4] capítulo VIII). En estas condiciones tenemos el siguiente lema:

Lema 3.1.2. *Sea A un anillo de Boole con 1 y α una \mathcal{L} -relación en A . Si $c, d \in A$ y $c\alpha d$, entonces para todo $\lambda \in \Omega$ existen filtros \mathcal{F}_λ y \mathcal{G}_λ tales que:*

- (i) $\mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_\lambda$ y $\mathcal{G}_\beta \subseteq \mathcal{G}_\lambda$ para todo $\beta \leq \lambda$;
- (ii) $\mathcal{F}_\lambda R^\alpha \mathcal{G}_\lambda$;
- (iii) $c \in \mathcal{F}_\lambda$ y ($x_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda$ ó $x'_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda$) con $x_\lambda \in A - \{0\}$;
- (iv) $d \in \mathcal{G}_\lambda$ y ($x_\lambda \in \mathcal{G}_\lambda$ ó $x'_\lambda \in \mathcal{G}_\lambda$) con $x_\lambda \in A - \{0\}$.

Demostración. Procedamos por inducción transfinita sobre el ordinal Ω . Dado $a \in A$ y sea $\langle a \rangle := \{x \in A : a \leq x\}$. Como $1c \alpha 1d \Leftrightarrow (x_0 \vee x'_0)c \alpha (x_0 \vee x'_0)d$, entonces por $\mathcal{L}2$, se tiene alguna de las cuatro posibilidades:

- a) $x_0c \alpha x_0d$, sea $\mathcal{F}_0 = \langle x_0c \rangle$ y $\mathcal{G}_0 = \langle x_0d \rangle$
- b) $x_0c \alpha x'_0d$, sea $\mathcal{F}_0 = \langle x_0c \rangle$ y $\mathcal{G}_0 = \langle x'_0d \rangle$
- c) $x'_0c \alpha x_0d$, sea $\mathcal{F}_0 = \langle x'_0c \rangle$ y $\mathcal{G}_0 = \langle x_0d \rangle$
- d) $x'_0c \alpha x'_0d$, sea $\mathcal{F}_0 = \langle x'_0c \rangle$ y $\mathcal{G}_0 = \langle x'_0d \rangle$

Por ejemplo si se da a), es fácil ver que (i), (iii) y (iv) se verifican, veamos (ii): Dados $x \in \mathcal{F}_0$ y $y \in \mathcal{G}_0$, entonces $x_0c \leq x$ y $x_0d \leq y$ y ya que $x_0c \alpha x_0d$ por $\mathcal{L}2$, $x \alpha y$, así $\mathcal{F}_0 R^\alpha \mathcal{G}_0$.

Supongamos ahora que la afirmación es cierta para todo $\beta < \lambda$ y veamos que también vale para λ . Sean

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\beta < \lambda} \mathcal{F}_\beta \quad \text{y} \quad \mathcal{G} = \bigcup_{\beta < \lambda} \mathcal{G}_\beta$$

Por hipótesis de inducción, para todo $\beta < \lambda$ se verifica (i), entonces \mathcal{F} y \mathcal{G} son filtros, además $\mathcal{F} R^\alpha \mathcal{G}$, entonces por el lema 3.1.1, para $x_\lambda \in A$ se tiene alguna de las cuatro posibilidades:

1. $\forall y \in \mathcal{F}, \forall z \in \mathcal{G}, x_\lambda y \alpha x_\lambda z$;

2. $\forall y \in \mathcal{F}, \forall z \in \mathcal{G}, x_\lambda y \alpha x'_\lambda z;$
3. $\forall y \in \mathcal{F}, \forall z \in \mathcal{G}, x'_\lambda y \alpha x_\lambda z;$
4. $\forall y \in \mathcal{F}, \forall z \in \mathcal{G}, x'_\lambda y \alpha x'_\lambda z.$

Y basta tomar en cada caso:

- 1'. $\mathcal{F}_\lambda = \{x_\lambda y : y \in \mathcal{F}\}$ y $\mathcal{G}_\lambda = \{x_\lambda z : z \in \mathcal{G}\};$
- 2'. $\mathcal{F}_\lambda = \{x_\lambda y : y \in \mathcal{F}\}$ y $\mathcal{G}_\lambda = \{x'_\lambda z : z \in \mathcal{G}\};$
- 3'. $\mathcal{F}_\lambda = \{x'_\lambda y : y \in \mathcal{F}\}$ y $\mathcal{G}_\lambda = \{x_\lambda z : z \in \mathcal{G}\};$
- 4'. $\mathcal{F}_\lambda = \{x'_\lambda y : y \in \mathcal{F}\}$ y $\mathcal{G}_\lambda = \{x'_\lambda z : z \in \mathcal{G}\}.$

Por ejemplo si se da 1, los conjuntos \mathcal{F}_λ y \mathcal{G}_λ definidos en 1' son filtros, veamos que las afirmaciones (i),(ii),(iii) y (iv) son ciertas:

Dado $\beta < \lambda$

- (i) Claramente $\mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}$ y además $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_\lambda$ pues dado $y \in \mathcal{F}$, $x_\lambda y \leq y$, entonces $y \in \mathcal{F}_\lambda$, así $\mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}_\lambda$. Del mismo modo se prueba que $\mathcal{G}_\beta \subseteq \mathcal{G}_\lambda$.
- (ii) Como estamos suponiendo 1, por la propiedad $\mathcal{L}1$, es claro que $\mathcal{F}_\lambda R^\alpha \mathcal{G}_\lambda$.
- (iii) y (iv) Note que por hipótesis de inducción $c \in \mathcal{F}_\beta$ y $d \in \mathcal{G}_\beta$, entonces $c \in \mathcal{F}_\lambda$ y $d \in \mathcal{G}_\lambda$, además por como se definieron \mathcal{F}_λ y \mathcal{G}_λ es claro que en este caso $x_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda$ y $x_\lambda \in \mathcal{G}_\lambda$.

□

Lema 3.1.3. *Si $\langle A, \alpha \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ABR}\mathcal{L})$, entonces*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D} : \langle A, \alpha \rangle & \longrightarrow & \langle \mathbb{A}(\text{Spec}(A)), R_{R^\alpha} \rangle \\ c & \longmapsto & D(c) \end{array}$$

es un iso de $\mathbf{ABR}\mathcal{L}$.

Demostración. Por el Teorema 1.3.3, se sabe que $\mathbb{D} : A \longrightarrow \mathbb{A}(\text{Spec}(A))$ es un isomorfismo de anillos de Boole con 1, además como \mathbb{S} y \mathbb{A} están bien definidos R_{R^α} es una \mathcal{L} -relación en $\mathbb{A}(\text{Spec}(A))$. Así basta ver que \mathbb{D} respeta la relación en los dos sentidos. Sean $c, d \in A$ y $A - \{0\} = \{x_\lambda : \lambda \in \Omega\}$ para algún ordinal Ω :

i) Si $c \alpha d$, entonces sean

$$\mathcal{U}_c = \bigcup_{\lambda \in \Omega} F_\lambda \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_d = \bigcup_{\lambda \in \Omega} G_\lambda$$

Donde F_λ y G_λ son los filtros cuya existencia la garantiza el lema 3.1.2, veamos que \mathcal{U}_c y \mathcal{U}_d son ultrafiltros:

- $\mathcal{U}_c \neq \emptyset$ pues $1_A \in F_\lambda \forall \lambda \in \Omega \Rightarrow 1_A \in \bigcup_{\lambda \in \Omega} F_\lambda = \mathcal{U}_c$.
- Sean $x, y \in \mathcal{U}_c$, entonces existen F_λ, F_β filtros de A tales que $x \in F_\lambda$ y $y \in F_\beta$. Por el lema 3.1.2 (i), $F_\lambda, F_\beta \subseteq F_{\max\{\lambda, \beta\}} \Rightarrow x, y \in F_{\max\{\lambda, \beta\}} \Rightarrow xy \in F_{\max\{\lambda, \beta\}} \subseteq \mathcal{U}_c$ y así $xy \in \mathcal{U}_c$.
- Sea $x \in \mathcal{U}_c$ y $y \in A$ tales que $x \leq y$, entonces existe F_λ filtro de A tal que $x \in F_\lambda \Rightarrow y \in F_\lambda \subseteq \mathcal{U}_c \Rightarrow y \in \mathcal{U}_c$ y \mathcal{U}_c es filtro.
- Sea $x_\lambda \in A - \{0\}$, por el Lema 3.1.2 (iii) $x_\lambda \in F_\lambda$ ó $1 + x_\lambda \in F_\lambda$, así $x_\lambda \in \mathcal{U}_c$ ó $1 + x_\lambda \in \mathcal{U}_c$ y \mathcal{U}_c es ultrafiltro.

Análogamente se prueba que \mathcal{U}_d es ultrafiltro. Ahora, como $c \in \mathcal{U}_c$ y $d \in \mathcal{U}_d$, es decir, $\mathcal{U}_c \in D(c)$, $\mathcal{U}_d \in D(d)$, tenemos que $\mathcal{U}_c R^\alpha \mathcal{U}_d$, en efecto, si $a \in \mathcal{U}_c$ y $b \in \mathcal{U}_d$ entonces $a \in F_\lambda$ y $b \in G_\beta$ para algunos $\lambda, \beta \in \Omega$, sin pérdida de generalidad tome $\lambda \leq \beta$, entonces por (i) del lema 3.1.2, $F_\lambda \subseteq F_\beta$, entonces $a \in F_\beta$ y por (ii), $F_\beta R^\alpha G_\beta$. Así $a \alpha b$ y $D(c) R_{R^\alpha} D(d)$. Luego \mathbb{D} respeta la relación “hacia adelante”.

ii) Si $D(c) R_{R^\alpha} D(d)$, entonces existen $\mathcal{U} \in D(c)$ y $\mathcal{G} \in D(d)$ tales que $\mathcal{U} R^\alpha \mathcal{G}$, así $c \alpha d$ y \mathbb{D} respeta la relación “hacia atrás”.

Así se concluye que \mathbb{D} es un isomorfismo de **ABR \mathcal{L}** . □

Lema 3.1.4. *Si $\langle X, \gamma \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{STRC})$, entonces*

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : \langle X, \gamma \rangle &\longrightarrow \langle \text{Spec}(\mathbb{A}(X)), R^{R_\gamma} \rangle \\ x &\longmapsto \mathcal{U}_x \end{aligned}$$

es un iso de \mathbf{STRC} .

Demostración. Del teorema 1.3.4, se sabe que \mathcal{U} es un homeomorfismo de X en $\text{Spec}(\mathbb{A}(X))$, además como \mathbb{S} y \mathbb{A} están bien definidos (Teorema 2.2.1), R^{R_γ} es un cerrado en $\text{Spec}(\mathbb{A}(X)) \times \text{Spec}(\mathbb{A}(X))$. Así basta ver que \mathcal{U} respeta la relación en los dos sentidos:

Si $x\gamma y$ y tomamos $C \in \mathcal{U}_x$ y $D \in \mathcal{U}_y$, entonces $CR_\gamma D$ y así $\mathcal{U}_x R^{R_\gamma} \mathcal{U}_y$. Recíprocamente, si $\mathcal{U}_x R^{R_\gamma} \mathcal{U}_y$, veamos que $(x, y) \in \bar{\gamma}$:

Como X es totalmente desconexo, X admite una base de abierto-cerrados, sean B_x y B_y vecindades abierto-cerradas de x y y respectivamente. Entonces $B_x \in \mathcal{U}_x$ y $B_y \in \mathcal{U}_y \Rightarrow B_x R_\gamma B_y$, es decir, existen $a \in B_x$, $b \in B_y$ y tal que $(a, b) \in \gamma$, así $(B_x \times B_y) \cap \gamma \neq \emptyset$ y por lo tanto $(x, y) \in \bar{\gamma}$, además como γ es un cerrado, $x\gamma y$. \square

Teorema 3.1.2. *Las categorías $\mathbf{ABR}\mathcal{L}$ y \mathbf{STRC} son dualmente equivalentes.*

Demostración. Usando el teorema 3.1.1, los funtores contravariantes \mathbb{S} y \mathbb{A} se pueden restringir a las subcategorías $\mathbf{ABR}\mathcal{L}$ y \mathbf{STRC} respectivamente y por los lemas 3.1.3 y 3.1.4, las transformaciones naturales definidas en la dualidad de Stone son isos naturales, así bastará ver lo siguiente:

Sea $f : \langle X, \gamma \rangle \longrightarrow \langle Y, \varphi \rangle$ un morfismo en \mathbf{STRC} , veamos que

$$(f^!)^! : \langle \text{Spec}(\mathbb{A}(X)), R^{R_\alpha} \rangle \longrightarrow \langle \text{Spec}(\mathbb{A}(Y)), R^{R_\varphi} \rangle$$

respeto la relación “hacia adelante”:

Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Spec}(\mathbb{A}(X))$ tal que $\mathcal{F} R^{R_\alpha} \mathcal{G}$ y sean $\mathcal{U} \in (f^!)^!(\mathcal{F})$, $\mathcal{V} \in (f^!)^!(\mathcal{G})$,

entonces $f^!(\mathcal{U}) \in \mathcal{F}$ y $f^!(\mathcal{V}) \in \mathcal{G}$, luego $f^!(\mathcal{U})R_\gamma f^!(\mathcal{V})$, es decir, existe $x \in f^!(\mathcal{U})$ y existe $y \in f^!(\mathcal{V})$ tal que $x\gamma y$, como f es un morfismo de **STRC**, $f(x)\varphi f(y)$, además $f(x) \in \mathcal{U}$ y $f(y) \in \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{U}R_\varphi \mathcal{V}$. Así $(f^!)^!(\mathcal{F})R^{R_\varphi}(f^!)^!(\mathcal{G})$.

Sea $g : \langle A, \alpha \rangle \longrightarrow \langle B, \beta \rangle$ un morfismo en **ABR** \mathcal{L} , veamos que

$$(g^!)^! : \langle \mathbb{A}(\text{Spec}(A)), R_{R^\alpha} \rangle \longrightarrow \langle \mathbb{A}(\text{Spec}(B)), R_{R^\beta} \rangle$$

Respeto la relación “hacia atrás”:

Sean $C, D \in \mathbb{A}(\text{Spec}(A))$ tal que $(g^!)^!(C)R_{R^\beta}(g^!)^!(D)$, entonces existen $\mathcal{F} \in (g^!)^!(C)$ y $\mathcal{G} \in (g^!)^!(D)$ tal que $\mathcal{F}R^\beta \mathcal{G}$. (\star)

Por otro lado $g^!(\mathcal{F}) \in C$ y $g^!(\mathcal{G}) \in D$ y note que $g^!(\mathcal{F})R^\alpha g^!(\mathcal{G})$ pues si $x \in g^!(\mathcal{F})$ y $y \in g^!(\mathcal{G})$, entonces $g(x) \in \mathcal{F}$, $g(y) \in \mathcal{G}$ y por (\star), $g(x)\beta g(y)$, además como g es un morfismo en **ABR** \mathcal{L} , $x\alpha y$. Así concluimos que $CR_{R^\alpha} D$. \square

Note que la categoría **ABR** \mathcal{L} es una subcategoría propia de **ABR** pues por el ejemplo 2.2.1, α es una relación en $P\mathbb{N}$ que no verifica $\mathcal{L}2$, en efecto, si tomamos $A = \{2n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $B = \{2n + 1\}_{n \in \mathbb{N}}$, $A\alpha B$, además $A = \{4n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{4n + 2\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $B = \{4n + 1\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{4n + 3\}_{n \in \mathbb{N}}$ pero

$$\begin{aligned} \{4n\}_{n \in \mathbb{N}} & \quad \neg\alpha \quad \{4n + 1\}_{n \in \mathbb{N}} \\ \{4n\}_{n \in \mathbb{N}} & \quad \neg\alpha \quad \{4n + 3\}_{n \in \mathbb{N}} \\ \{4n + 2\}_{n \in \mathbb{N}} & \quad \neg\alpha \quad \{4n + 1\}_{n \in \mathbb{N}} \\ \{4n + 2\}_{n \in \mathbb{N}} & \quad \neg\alpha \quad \{4n + 3\}_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

3.2. $ABR\mathcal{L}_1$ vs $SRCS$ y $ABR\mathcal{L}_2$ vs $RPHS$

En esta sección se van exigiendo más condiciones, tanto a la relación α sobre el anillo A , como a la relación γ sobre el espacio X , de modo que se mantenga la equivalencia dual de cada par de las nuevas subcategorías obtenidas.

Definición 3.2.1. Se define la categoría **ABR** \mathcal{L}_1 (anillos de Boole con un relación de tipo \mathcal{L}_1) como la subcategoría plena de **ABR** \mathcal{L} tal que dado $\langle A, \alpha \rangle \in$

$Ob(ABR\mathcal{L}_1)$ se cumple:

($\mathcal{L}3$) α es simétrica.

Note que las propiedades $\mathcal{L}2$ y $\mathcal{L}3$ son equivalentes a $\mathcal{L}2'$ y $\mathcal{L}3$ siendo:

($\mathcal{L}2'$) $(\forall a, b, c \in A)(c\alpha(a \vee b) \Rightarrow caa \text{ o } cab)$.

En efecto, si $c\alpha(a \vee b)$, entonces $(c \vee c)\alpha(a \vee b)$ y por $\mathcal{L}2$, caa o cab . Recíprocamente si $(a \vee b)\alpha(c \vee d)$, por ($\mathcal{L}2'$) $(a \vee b)\alpha c$ o $(a \vee b)\alpha d$ y de nuevo usando ($\mathcal{L}2'$) y ($\mathcal{L}3$) se sigue que caa o daa o cab o $dab \Rightarrow aac$ o bac o aad o bad . \square

Definición 3.2.2. Se define la categoría $ABR\mathcal{L}_2$ (**anillos de Boole con una relación de tipo \mathcal{L}_2**) como la subcategoría plena de $ABR\mathcal{L}_1$ tal que dado $\langle A, \alpha \rangle \in Ob(ABR\mathcal{L}_2)$ se cumple:

($\mathcal{L}4$) α es reflexiva.

Los siguientes dos ejemplos muestran que la categoría $ABR\mathcal{L}_2$ es una subcategoría propia de $ABR\mathcal{L}_1$ y que la categoría $ABR\mathcal{L}_1$ es una subcategoría propia de $ABR\mathcal{L}$.

Ejemplo 3.2.1. (Tomado de [1], ejemplo 2.3.7)

Sea $\mathfrak{A} = P\mathbb{N}$ el anillo del ejemplo 1.1.1 y defina

$$\alpha = \{(C, D) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} : C \cap \{2n\}_{n \in \mathbb{N}} \neq \emptyset \text{ y } D \cap \{2n+1\}_{n \in \mathbb{N}} \neq \emptyset\}$$

$\langle \mathfrak{A}, \alpha \rangle \in Ob(ABR\mathcal{L})$ pero α no verifica ($\mathcal{L}3$) pues si tomamos $A = \{2\}$ y $B = \{1\}$ $A, B \in \mathfrak{A}$, $A\alpha B$ pero $B \neg \alpha A$ pues $B \cap \{2n\}_{n \in \mathbb{N}} = \emptyset$, así $ABR\mathcal{L}_1$ es una subcategoría propia de $ABR\mathcal{L}$.

Ejemplo 3.2.2. (Tomado de [1], ejemplo 2.3.6)

Sea $\mathfrak{A} = P\mathbb{N}$ en anillo del ejemplo 1.1.1 y defina

$$\alpha = \{(C, D) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} : (1 \in C \text{ y } 2 \in D) \text{ o } (1 \in D \text{ y } 2 \in C)\}$$

No es difícil ver que $\langle \mathfrak{A}, \alpha \rangle \in Ob(ABR\mathcal{L}_1)$ pero α no verifica ($\mathcal{L}4$) pues si tomamos $A = \{1\} \in \mathfrak{A}$, $A \neg \alpha A$ y así $ABR\mathcal{L}_2$ es una subcategoría propia de $ABR\mathcal{L}_1$.

Definición 3.2.3. Se define la categoría **SRCS** (espacios de Stone con una relación cerrada y simétrica) como la subcategoría plena de **STRC** tal que dado $\langle X, \gamma \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{SRCS})$, γ es simétrica.

Definición 3.2.4. Se define la categoría **RPHS** (representaciones de “pre-cocientes” Hausdorff de espacios de Stone) como la subcategoría plena de **SRCS** tal que dado $\langle X, \gamma \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{RPHS})$, γ es reflexiva.

Teorema 3.2.1. *Los funtores \mathbb{S} y \mathbb{A} restringidos a las categorías \mathbf{ABRL}_1 y \mathbf{SRCS} son dualmente equivalentes y restringidos a las categorías \mathbf{ABRL}_2 y \mathbf{RPHS} son dualmente equivalentes.*

Demostración. En virtud de la dualidad del Teorema 3.1.2, bastará ver que los funtores \mathbb{S} y \mathbb{A} se pueden restringir a las subcategorías dadas.

No es difícil ver que si A es un anillo de Boole y α es una relación simétrica y reflexiva en $A - \{0\}$, R^α es simétrica y reflexiva en $\text{Spec}(A)$. Del mismo modo si X es un espacio de Stone y γ es una relación simétrica y reflexiva en X , R_γ es simétrica y reflexiva en $\mathbb{A}(X) - \{\emptyset\}$. Así se concluye que $\mathbf{ABRL}_1 \cong \mathbf{SRCS}$ y $\mathbf{ABRL}_2 \cong \mathbf{RPHS}$. \square

3.3. ABRL vs RCHS

Se han mostrado hasta ahora, tres dualidades al estilo de la dualidad de Stone. En esta sección se presenta una nueva dualidad, que queremos destacar, en cuanto ella “captura”, en la parte topológica, todos los cocientes Hausdorff de los espacios de Stone, los cuales constituyen una amplia e importante familia de espacios topológicos, por ejemplo pertenecen a esta familia **todos** los espacios métricos compactos, los cuales a su vez incluyen por ejemplo **todos** los **continuos** (un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo).

Definición 3.3.1. Se define la categoría **ABRL** (anillos de Boole con una relación de ligazón) como la subcategoría plena de \mathbf{ABRL}_2 tal que dado $\langle A, \alpha \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ABRL})$, R^α es transitiva en $\text{Spec}(A)$.

Definición 3.3.2. Se define la categoría **RCHS** (**R**epresentaciones de **c**ocientes **H**ausdorff de **e**spacios de **S**tone) como la subcategoría plena de **RPHS** tal que dado $\langle X, \sim \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{RCHS})$, \sim es transitiva.

Proposición 3.3.1. Sea A un anillo de Boole con uno; definamos una relación α_A sobre $A - \{0\}$ de la siguiente manera:

$$\alpha_A := \{(c, d) \in A \times A : c \wedge d \neq 0\}$$

Entonces α_A es la menor relación de ligazón que existe sobre A , es decir, α_A es de ligazón y si α es otra relación de ligazón sobre A , entonces $\alpha_A \subseteq \alpha$.

Demostración. Sean $a, b, c, d \in A - \{0\}$:

($\mathcal{L}1$) Si $c \alpha_A d$, $c \leq a$ y $d \leq b$. Entonces $c \wedge d \neq 0$, es decir, $\{c, d\}$ tiene la

P.I.F. y por el Lema 1.1.1, existe \mathcal{U} ultrafiltro de A con $c, d \in \mathcal{U}$, entonces $a, b \in \mathcal{U}$ y por lo tanto $a \wedge b \neq 0$. **Nota.** Otra forma de probar ($\mathcal{L}1$) (sin usar ultrafiltros) es como sigue: Tenemos $c \wedge d \neq 0$, $ac = c$ y $bd = d \Rightarrow (ab)(cd) = (ac)(bd) = cd \Rightarrow cd \leq ab$ así $0 \neq c \wedge d \leq a \wedge b \Rightarrow a \wedge b \neq 0$.

($\mathcal{L}2$) Si $c \alpha_A (a \vee b)$ y suponemos que $(c \neg \alpha_A a)$ y $(c \neg \alpha_A b)$, entonces $c \wedge a = 0$ y $c \wedge b = 0$, es decir, $0 = ca + cb + cab = c(a \vee b) = c \wedge (a \vee b)$, contradicción.

Es claro que α_A es reflexiva y simétrica; veamos que R^{α_A} es la relación de igualdad en $\text{Spec}(A)$ (Así la relación R^{α_A} será transitiva en $\text{Spec}(A)$).

\subseteq] Sean \mathcal{U}, \mathcal{V} ultrafiltros de A con $\mathcal{U} R^{\alpha_A} \mathcal{V}$ y sea $S = \{uv : u \in \mathcal{U} \text{ y } v \in \mathcal{V}\}$; note que S tiene la **P.I.F.** entonces existe \mathfrak{F} ultrafiltro de A con $S \subseteq \mathfrak{F}$. Además ya que $u = 1u \in S, \forall u \in \mathcal{U}$ y $v = 1v \in S, \forall v \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathfrak{F}$ y como \mathcal{U} y \mathcal{V} son ultrafiltros, se sigue que $\mathcal{U} = \mathfrak{F} = \mathcal{V}$.

\supseteq] Dado $\mathcal{U} \in \text{Spec}(A)$ y dados $x, y \in \mathcal{U}$, como \mathcal{U} es filtro $x \wedge y \neq 0$, entonces $x \alpha_A y$ y $\mathcal{U} R^{\alpha_A} \mathcal{U}$.

α_A es la menor relación de ligazón sobre A pues si α es una relación de ligazón sobre A y $x \alpha_A y$, entonces $xy \neq 0$, por la reflexividad de α , $xy \alpha xy$, además $xy \leq x$ y $xy \leq y$, así de ($\mathcal{L}1$) se concluye que $x \alpha y$ y $\alpha_A \subseteq \alpha$. \square

Teorema 3.3.1. *Las categorías **ABRL** y **RCHS** son dualmente equivalentes.*

Demostración. En virtud del Teorema 3.2.1, bastará ver que los funtores \mathbb{S} y \mathbb{A} restringidos a las categorías **ABRL** y **RCHS** respectivamente están bien definidos:

Si $\langle A, \alpha \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ABRL})$, por definición R^α es transitiva en el espectro de A . Por otro lado, si $\langle X, \sim \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{RCHS})$, como \mathbb{D} respeta la relación en los dos sentidos se sigue que $R^{R\sim}$ es transitiva. \square

Note que por el Lema 1.2.1, la categoría **RCHS** captura a todos los cocientes Hausdorff de espacios de Stone, en consecuencia tenemos el siguiente corolario en donde se presenta una condición necesaria y suficiente, en términos algebraicos, para que el cociente de un espacio de Stone sea Hausdorff:

Corolario 3.3.1. *Sea $\langle X, \sim \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{RCHS})$. Entonces X/\sim es Hausdorff si y solo si R_\sim es una relación de ligazón en $\mathbb{A}(X)$.*

3.4. EXTENDIENDO LA DUALIDAD

Se mostrará ahora que las equivalencias establecidas anteriormente constituyen efectivamente extensiones de la dualidad de Stone. Para ello bastará ver que la categoría **ABRL** contiene una subcategoría isomorfa a **AB**₁ y que la categoría **RCHS** contiene una subcategoría isomorfa a **ST** de tal manera que al restringir los funtores \mathbb{S} y \mathbb{A} a tales subcategorías se obtenga una dualidad. Es decir se demostrará el siguiente teorema:

Teorema 3.4.1. *La categoría **ABRL** contiene una subcategoría isomorfa a **AB**₁ y la categoría **RCHS** contiene una subcategoría isomorfa a **ST** de tal manera que al restringir los funtores \mathbb{S} y \mathbb{A} a tales subcategorías, estas resultan ser dualmente equivalentes.*

Demostración. Definamos

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{AB}_1 & \xrightarrow{I} & \mathbf{ABRL} \\
A & \longmapsto & \langle A, \alpha_A \rangle \\
\downarrow f & & \downarrow I(f)=f \\
B & & \langle B, \alpha_B \rangle
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbf{ABRL} & \xrightarrow{O} & \mathbf{AB}_1 \\
\langle A, \alpha \rangle & \longmapsto & A \\
\downarrow f & & \downarrow O(f)=f \\
\langle B, \beta \rangle & & B
\end{array}$$

Por la Proposición 3.3.1, I está bien definido en objetos. Veamos que I está bien definido en morfismos: En efecto, sea $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo de anillos de Boole con uno y dados $a, b \in A$ tal que $f(a)\alpha_B f(b)$, entonces $f(a) \wedge f(b) \neq 0 \Rightarrow f(a \wedge b) \neq 0 \Rightarrow a \wedge b \neq 0$ y así $a\alpha_A b$.

Es claro que $IO = id_{I(\mathbf{AB}_1)}$ y $OI = id_{\mathbf{AB}_1}$, así \mathbf{AB}_1 e $I(\mathbf{AB}_1)$ son isomorfas como categorías.

Ahora definamos:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{ST} & \xrightarrow{F} & \mathbf{RCHS} \\
X & \longmapsto & \langle X, = \rangle \\
\downarrow f & & \downarrow F(f)=f \\
Y & & \langle Y, = \rangle
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbf{RCHS} & \xrightarrow{O'} & \mathbf{ST} \\
\langle X, \sim \rangle & \longmapsto & X \\
\downarrow f & & \downarrow O'(f)=f \\
\langle Y, \sim \rangle & & Y
\end{array}$$

F está bien definido en objetos pues la relación de igualdad en X , es de equivalencia y cerrada en $X \times X$. Es claro que $O'F = id_{\mathbf{ST}}$ y $FO' = id_{F(\mathbf{ST})}$, así \mathbf{ST} e $I(\mathbf{ST})$ son isomorfas como categorías.

Tenemos entonces que $I(\mathbf{AB}_1)$ es una subcategoría de \mathbf{ABRL} , isomorfa a \mathbf{AB}_1 , mientras que $F(\mathbf{ST})$ es una subcategoría de \mathbf{RCHS} , isomorfa a \mathbf{ST} .

Veamos que al restringir los funtores \mathbb{S} y \mathbb{A} a las categorías $I(\mathbf{AB}_1)$ y $F(\mathbf{ST})$ estas resultan ser equivalentes, para ello bastará ver que \mathbb{S} y \mathbb{A} están bien definidos:

Por la proposición 3.3.1, \mathbb{S} está bien definido. Ahora si $\langle X, = \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{RCHS})$, la relación $R_=$ es precisamente la relación $\alpha_{\mathbb{A}(X)}$, en efecto, $CR_=D \Leftrightarrow \exists x \in C, \exists y \in D$ tal que $x = y \Leftrightarrow C \cap D \neq \emptyset \Leftrightarrow C\alpha_{\mathbb{A}(X)}D$. \square

3.5. APLICACIONES DE LA DUALIDAD

Un espacio de Stone muy importante es el espacio de Cantor ya que entre otras de sus vastas propiedades se tiene la de que sus cocientes Hausdorff resultan ser exactamente (por homeomorfismos) todos los espacios métricos compactos (vea [7]). Además bajo la dualidad de Stone el anillo de Boole correspondiente al espacio de Cantor es el único (salvo isomorfismos) anillo de Boole con uno, numerable y sin átomos (vea [3]) al cual llamaremos **el anillo de Cantor** y lo notaremos \mathbb{K} .

El objetivo de esta sección es presentar, a manera de una aplicación de la dualidad obtenida en la sección 3.3, una propiedad algebraica que caracterice la conexidad en los cocientes Hausdorff de espacios de Stone y en particular, una propiedad algebraica que caracterice los continuos, es decir, los espacios métricos, compactos y conexos.

Definición 3.5.1. Se define la categoría **ACRL** (**Anillo de Cantor con una relación de ligazón**) como la subcategoría plena de **ABRL**, cuyos objetos son los pares $\langle \mathbb{K}, \alpha \rangle$.

Definición 3.5.2. Se define la categoría **RCHC** (**representaciones de cocientes Hausdorff del espacio de Cantor**) como la subcategoría plena de **RCHS**, cuyos objetos son los pares $\langle \mathfrak{C}, \gamma \rangle$ con \mathfrak{C} el espacio de Cantor.

El siguiente resultado se sigue inmediatamente del teorema 3.3.1 y de que al restringir los funtores \mathbb{S} y \mathbb{A} a las categorías **RCHC** y **ACRL**, se mantiene la equivalencia.

Corolario 3.5.1. *Las categorías **RCHC** y **ACRL** son dualmente equivalentes.*

En virtud de la dualidad anterior los objetos de **ACRL** representan todos los espacios métricos compactos, o dicho de manera formal tenemos:

Corolario 3.5.2. *Sea $\langle \mathfrak{C}, \sim \rangle \in \text{Ob}(\mathbf{RCHC})$. Entonces \mathfrak{C}/\sim es metrizable si y solo si R_{\sim} es una relación de ligazón en el anillo \mathbb{K} .*

Abordaremos ahora el estudio de la conexidad de los cocientes Hausdorff de espacios de Stone. En este sentido se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.5.1. *Sea X un espacio de Stone y X/\sim un cociente Hausdorff de X . Entonces X/\sim es desconexo si y solo si existen C y D abierto-cerrados de X , disjuntos, no vacíos con $C \cup D = X$ y $C \neg R_{\sim} D$.*

Demostración. \Rightarrow] Supongamos que X/\sim es desconexo, entonces existen A y B abierto-cerrados de X/\sim disjuntos, no vacíos y tales que $A \cup B = X/\sim$. Sea $j : X \rightarrow X/\sim$ la función cociente y sean $C = j^{-1}(A)$, $D = j^{-1}(B)$. Como f es continua, tenemos que C y D son abierto-cerrados no vacíos de X y tales que $C \cap D = \emptyset$, entonces $(C, D) \notin \alpha_{\mathbb{A}(X)}$, luego $(C, D) \notin R_{\sim}$ o bien $C \neg R_{\sim} D$.

\Leftarrow] Supongamos que existen C y D abierto-cerrados no vacíos, disjuntos de X tales que $C \cup D = X$ y $C \neg R_{\sim} D$. Como X es compacto Hausdorff, X/\sim es Hausdorff y la función j es cociente, por la Proposición 1.2.2, se sigue que j es cerrada, así $j(C)$ y $j(D)$ son cerrados no vacíos de X/\sim , con $j(C) \cup j(D) = X/\sim$ (ya que $C \cup D = X$ y j es sobre) y note que $j(C) \cap j(D) = \emptyset$ pues

$$\begin{aligned} C \neg R_{\sim} D &\Leftrightarrow \neg(\exists x \in C, \exists y \in D : x \sim y) \\ &\Rightarrow \forall x \in C, \forall y \in D : x \neq y \\ &\Rightarrow \forall x \in C, \forall y \in D : j(x) \neq j(y) \\ &\Leftrightarrow j(C) \cap j(D) = \emptyset \end{aligned}$$

De esta forma $\{j(C), j(D)\}$ forman una desconexión de X/\sim . □

Se propone entonces una definición de la noción de conexidad, desde un punto de vista algebraico, en el contexto de los anillos de Boole con uno y con relación de ligazón, como sigue:

Definición 3.5.3. $\langle A, \alpha \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ABRL})$ se dice **conexo** si $x\alpha(1+x) \forall x \in A - \{0, 1\}$. En caso contrario se dice que $\langle A, \alpha \rangle$ es **no conexo** o **desconexo**.

Lema 3.5.1. *Sea $f : \langle A, \alpha \rangle \rightarrow \langle B, \beta \rangle$ un isomorfismo de \mathbf{ABRL} . Si $\langle A, \alpha \rangle$ es conexo, entonces $\langle B, \beta \rangle$ es conexo.*

Demostración. Sea $y \in B$, como f es sobre, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Ahora, como A es conexo $x\alpha(1_A + x)$ y ya que f respeta la relación hacia adelante, entonces $f(x)\beta f(1_A + x) = 1_B + f(x) \Rightarrow y\beta(1_B + y)$ y $\langle B, \beta \rangle$ es conexo. \square

Del Teorema 3.5.1, se tiene entonces el siguiente resultado:

Corolario 3.5.3. Sean $\langle A, \alpha \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{ABRL})$ y $\langle X, \sim \rangle \in \mathbf{Ob}(\mathbf{RCHS})$. Entonces

(i) X/\sim es conexo si y solo si $\langle \mathbb{A}(X), R_\sim \rangle$ es conexo;

(ii) $\langle A, \alpha \rangle$ es conexo si y solo si $\text{Spec}(A)/R^\alpha$ es conexo.

Demostración. (i) Si X/\sim es desconexo, por el teorema 3.5.1, existen $U, V \in \mathbb{A}(X)$, disjuntos no vacíos tales que $U \cup V = X$ y $U \neg R_\sim V$, entonces $V = X - U = X \Delta U$ y así existe $U \in \mathbb{A}(X) - \{\emptyset, X\}$ que no está relacionado con su complemento, luego $\langle \mathbb{A}(X), R_\sim \rangle$ no es conexo. Recíprocamente si $\langle \mathbb{A}(X), R_\sim \rangle$ no es conexo, existe $C \in \mathbb{A}(X) - \{\emptyset, X\}$ tal que $C \neg R_\sim (X \Delta C)$. Sea $D = X \Delta C$, note que $C \cup D = X, C \cap D = \emptyset$ y $C \neg R_\sim D$, entonces por el Teorema 3.5.1, X/\sim es desconexo.

(ii) Si $\langle A, \alpha \rangle$ es conexo, en virtud de la dualidad $\langle \mathbb{A}(\text{Spec}(A)), R_{R^\alpha} \rangle$ es conexo y por (i) $\text{Spec}(A)/R^\alpha$ es conexo. Recíprocamente si $\text{Spec}(A)/R^\alpha$ es conexo, por (i) tenemos que $\langle \mathbb{A}(\text{Spec}(A)), R_{R^\alpha} \rangle$ es conexo y ya que $\langle A, \alpha \rangle \cong \langle \mathbb{A}(\text{Spec}(A)), R_{R^\alpha} \rangle$, $\langle A, \alpha \rangle$ es conexo. \square

Puesto que los continuos son precisamente todos los cocientes Hausdorff y conexos del espacio de Cantor, el siguiente resultado establece una condición, en términos algebraicos, que caracteriza los continuos (vea [5] Corolario 2.7.5):

Corolario 3.5.4. Todo continuo se puede representar (algebraicamente) mediante un objeto conexo de la categoría \mathbf{ACRL} . Recíprocamente, todo objeto conexo de \mathbf{ACRL} representa un continuo.

REFERENCIAS

- [1] Acosta, L. (1988). *Una demostración algebraica de la unicidad del conjunto de Cantor* (Doctoral dissertation, Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia).
- [2] Hindman, N., & Strauss, D. (1998). *Algebra in the Stone-Čech compactification: theory and applications* (Vol. 27). Walter de Gruyter.
- [3] Mac Lane, S. (2013). *Categories for the working mathematician* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.
- [4] Muñoz, J. M., & María, J. (2002). *Introducción a la teoría de conjuntos*. Universidad Nacional de Colombia.
- [5] Sabogal, S. M. (2000). *Autosemejanza en topología y algunas extensiones de la dualidad de Stone* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá).
- [6] Stone, M. H. (1936). *The theory of representations for Booleans algebras.* , Trans. Amer. Math. Soc., 40(1936), 37-111.
- [7] Stonek, B. (2012). *Functores adjuntos y teoremas de adjunción.*, Monografía de la licenciatura en Matemáticas, Universidad de la República, Uruguay (2012).
- [8] Willard, S. (2004). *General topology*. Courier Corporation.

BIBLIOGRAFÍA

Acosta, L. (1988). *Una demostración algebraica de la unicidad del conjunto de Cantor* (Doctoral dissertation, Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia).

Hindman, N., & Strauss, D. (1998). *Algebra in the Stone-Čech compactification: theory and applications* (Vol. 27). Walter de Gruyter.

Mac Lane, S. (2013). *Categories for the working mathematician* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Sabogal, S. M. (2000). *Autosemejanza en topología y algunas extensiones de la dualidad de Stone* (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá).

Willard, S. (2004). *General topology*. Courier Corporation.