ACELERACIÓN DE UN HAZ DE ELECTRONES NO INTERACTUANTES EN CONDICIONES DE AUTORESONANCIA CICLOTRÓNICA POR UNA ONDA VIAJERA TE_{11} POLARIZADA CIRCULARMENTE

Ana María Herrera Rodríguez

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

2010

ACELERACIÓN DE UN HAZ DE ELECTRONES NO INTERACTUANTES EN CONDICIONES DE AUTORESONANCIA CICLOTRÓNICA POR UNA ONDA VIAJERA TE_{11} POLARIZADA CIRCULARMENTE

TRABAJO DE GRADO
PARA OPTAR AL TÍTULO DE FÍSICO

ANA MARÍA HERRERA RODRÍGUEZ

DIRECTOR: VALERIY DUGAR ZHABON., PH.D.
CODIRECTOR: EDUARDO A. OROZCO OSPINO, MS.C.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
2010

A *Ana, mi mamá,*
con todo mi corazón

AGRADECIMIENTOS

A Dios por mi vida y por todas las cosas maravillosas que me han sucedido en ella.
A mi mamá por sus valiosas enseñanzas, su apoyo constante y su amor incondicional.
A Camilo y Orlando por su compañia durante toda mi vida.
A mi familia por brindarme su apoyo siempre, y por la confianza que me tienen.
A el profesor Valeriy por su dirección y sus explicaciones para la elaboración de este trabajo.
A Eduardo por su paciente guía, y colaboración constante en todos los aspectos de este trabajo, y por ser un ejemplo a seguir como persona.
A Herling por su guía al iniciar la carrera y porque hizo que me gustara la programación.
A Beatriz, por su valioso apoyo a lo largo de mi carrera y por su confianza en mí.
A Ini y Vivi, por la amistad maravillosa que tenemos, que es un de los sucesos más importantes de mi vida.
A César por su valiosa amistad.
A Omar y Martín por su bonita amistad, por los momentos increíbles que hemos pasado, y por lo mucho que me he reído.
A Beto porque a través de él conocí linux y por su ayuda en programación.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

TÍTULO: ACELERACIÓN DE UN HAZ DE ELECTRONES NO INTERACTUANTES EN CONDICIONES DE AUTORESONANCIA CICLOTRÓNICA POR UNA ONDA VIAJERA TE_{11} POLARIZADA CIRCULARMENTE.*

AUTOR: HERRERA RODRIGUEZ, Ana María.†

PALABRAS CLAVES: Haz de electrones, Autoresonancia Ciclotrónica, Corrimiento *Doppler*.

DESCRIPCIÓN:

Se estudia numéricamente la dinámica relativista de un haz de electrones no interactuantes en un acelerador de microondas autoresonante AMA (*Autoresonance Microwave Accelerator*) [7], el cual está constituido por una guía de onda cilíndrica, en donde se excita un campo electromagnético de microondas viajero TE_{11}, la guía se encuentra dentro de un conjunto de bobinas con corriente que forman un campo magnetostático no homogéneo que se adapta para mantener las condiciones de autoresonancia ciclotrónica. La simulación del sistema se realiza a partir de la solución numérica de la ecuación de movimiento de Newton Lorentz utilizando la técnica Leapfrog-Boris [8]. Los campos magnético y eléctrico en las posiciones de los electrones se calculan utilizando los datos calculados en los nodos de la malla computacional e interpolación bilineal. Este estudio se ha orientado principalmente para analizar la influencia del corrimiento *Doppler* sobre las condiciones de resonancia ciclotrónica con ondas viajeras; sin embargo considerando las similitudes existentes entre el fenómeno estudiado con el esquema AMA y el fenómeno de Autoresonancia Ciclotrónica Espacial SARA (*Spatial Autoresonance Accelerator*) [5, 6] en el cual se utiliza una cavidad resonante cilíndrica en la cual se excita una onda electromagnética estacionaria TE_{11p}, los resultados servirán de soporte para un mayor entendimiento del fenómeno SARA. La validación de resultados se realiza mediante la confrontación con los obtenidos en [7].

* Trabajo de Grado.

† Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Valeriy Dugar Zhabon., Ph.D. Codirector: Eduardo A. Orozco Ospino., Ms.c.

ABSTRACT

TITLE: ACCELERATION OF A BEAM OF NO INTERACTING ELECTRONS UNDER CONDITIONS OF CYCLOTRONIC AUTORESONANCE BY A WAVE TE_{11} CIRCULARLY POLARIZED .*

AUTHOR: HERRERA RODRIGUEZ, Ana María .†

KEYWORDS: Electron beam, cyclotron autoresonance, *Doppler* shift.

DESCRIPTION: The relativistic dynamics of a electron beam not interacting in an autoresonance microwave accelerator AMA (Autoresonance Microwave Accelerator) [7] is studied numerically. This scheme consists of a cylindrical waveguide, where is excited a travelling electromagnetic field of microwaves TE_{11}, the guide is within a set Coil-current forming an inhomogeneous magnetostatic field that is adapted to maintain conditions of cyclotronic autoresonance. The simulation system is made from the numerical solution of the Newton-Lorentz equation of motion using the technique Leapfrog-Boris [8]. The electric and magnetic fields in the positions of electrons are calculated using the data calculated at the nodes of the computational grid and bilinear interpolation. This study was primarily aimed to analyze the influence of the Doppler shift on the conditions of cyclotronic resonance with travelling waves; however, considering the similarities between the phenomena studied with the AMA scheme and the phenomenon of Spatial Autoresonance Cyclotronic SARA (Spatial Autoresonance Accelerator) [5, 6] which uses a cylindrical resonant cavity where is excited a stationary electromagnetic wave TE_{11p} , the results will serve as support for a greater understanding of the phenomenon SARA. The verfication of the results is done by comparing them with those obtained in [7].

* Degree work.

† Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Valeriy Dugar Zhabon., Ph.D. Codirector: Eduardo A. Orozco Ospino., Ms.c.

INTRODUCCIÓN

La autoresonancia ciclotrónica ha venido siendo estudiada desde 1963 [1], su interés está enfocado principalmente en aceleradores de partículas que permiten alcanzar energías elevadas, denominados aceleradores ciclotrónicos. Este fenómeno se lleva a cabo mediante el auto-mantenimiento de la resonancia de la interacción ciclotrónica de un electrón en un campo magnético homogéneo, y una onda transversal electromagnética propagándose a lo largo de éste.

En busca de lograr unas condiciones óptimas para la aceleración autoresonante de electrones, se han realizado numerosos estudios teóricos y experimentales, donde se plantean varios esquemas, uno de éstos mecanismos es el GYRAC propuesto por K.S Golovanivsky [2], donde los electrones son capturados en una trampa magnética tipo espejo y luego son acelerados a muy altas energías; para mantener las condiciones de resonancia a medida que el electrón gana energía, se utiliza un campo magnético creciente variable en el tiempo. Basándose en el esquema GYRAC, Oliver Gal hizo un estudio analítico del funcionamiento de un acelerador de electrones cíclico autoresonante [3].
En 1991, se presentó un estudio numérico y experimental de un acelerador de microondas autoresonante (AMA) [7], planteado por R. Shpitalnik, C. Cohen, F. Dothan y L. Friedland, el cual está conformado por una onda electromagnética viajera TE_{11} y un campo magnetostático inhomogéneo ajustado espacialmente para mantener las condiciones de resonancia ciclotrónica. En el esquema AMA y en general en todos los mecanismos de aceleración con ondas viajeras, el corrimiento *Doppler* es un factor que se tiene en cuenta para poder satisfacer las condiciones de resonancia ciclotrónica, puesto que la frecuencia percibida por el electrón cambia con su velocidad longitudinal.
En investigaciones más recientes [4–6], se presenta un estudio teórico de un nuevo mecanismo *Spatial Autoresonance Acceleration* (SARA), ó aceleración por autoresonancia espacial propuesto por V.D Dugar Zhabon y E.A Orozco, donde se utiliza una onda electromagnética estacionaria TE_{11p} y un campo magnetostático no homogéneo que se adapta para mantener las condiciones de resonancia, en este esquema no se ha hecho un análisis del corrimiento *Doppler*.

La dinámica de estos sistemas es un problema muy complejo para resolverse analíticamente, pues deben tomarse en cuenta diversos factores para satisfacer las condiciones de resonancia, por tal razón se requiere de un estudio numérico para poder obtener una solución de los mismos.

CAPÍTULO 1

ACELERADOR DE MICROONDAS AUTORESONANTE

1.1 Descripción esquema AMA

En la Figura 1.1, se describe el esquema físico utilizado para el estudio teórico del acelerador de microondas autoresonante AMA, en donde se usa una guía de onda cilíndrica en la que se excita un onda electromagnética polarizada circularmente modo TE_{11}, la guía es afectada por un campo magnético axialmente simétrico e inhomogéneo, producido por bobinas con corriente. Los electrones son inyectados a lo largo del eje de la guía de onda, el cual es elegido como eje z, mediante un cañon de electrones. En este esquema de aceleración el automantenimiento de la resonancia se obtiene al

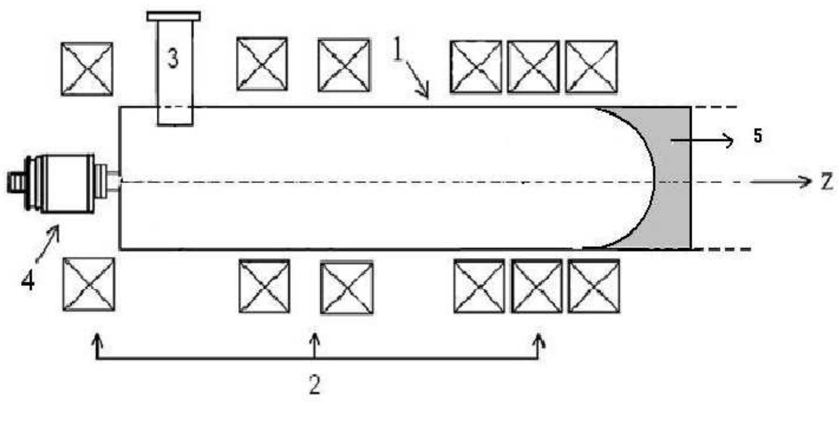

Figura 1.1: Esquema Físico AMA:1-Guía de onda cilíndrica, 2-bobinas,3-guía de onda para la entrada de microondas, 4-cañon de electrones, 5-Absorsor de microondas (Agua).

considerar el corrimiento *Doppler*, el cual disminuye la frecuencia percibida por el electrón, y mediante el incremento del campo magnético en la dirección de propagación del haz. Las componentes del campo electromagnético viajero TE_{11} con polarización circular [7], están dadas en coordenadas cilíndricas por:

$$
\begin{aligned}
E_r &= \frac{2E}{\sigma r} J_1(\sigma r) \cos\alpha, \\
E_\theta &= -2E J_1'(\sigma r) \sin\alpha, \\
B_r &= \frac{2Ek}{\omega\sigma r} J_1'(\sigma r) \cos\alpha, \\
B_\theta &= \frac{2Ek}{\omega\sigma r} J_1(\sigma r) \cos\alpha, \\
B_z &= \frac{2E\sigma}{w} J_1(\sigma r) \cos\alpha,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

donde E es la amplitud del campo eléctrico, $\alpha = (\omega t - kz)$, $k = [\omega - (c\sigma)^2]^{1/2}/c$, $J_1(\sigma r)$ es la función de Bessel de primer tipo, $\sigma = S_{11}/R$, R es el radio de la guía de onda y S_{11} corresponde a la primera raiz de $J_1'(\sigma r)$. Cuando $\sigma r < 1$, $J_1(\sigma r)$ es una función lineal, de manera que puede aproximarse a $J_1(\sigma r) = \sigma r/2$, para el caso que se estudia se cumple está condición, el radio de la trayectoria del electrón se considera lo suficientemente menor que el de la guía de onda, de manera que, las componentes transversales de los campos pueden aproximarse a una onda plana:

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= -E\left(\hat{e_x} \sin\alpha - \hat{e_y} \cos\alpha\right), \\
\vec{B} &= -\frac{Ek}{\omega}\left(\hat{e_x} \cos\alpha + \hat{e_y} \sin\alpha\right).
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Los electrones absorben energía de la onda electromagnética si la diferencia de fase ϕ entre los vectores velocidad transversal $\vec{V_\perp}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$ se encuentra en el intervalo $(\pi/2,\ 3\pi/2)$, al cual denominaremos banda de aceleración. Esto puede observarse en la Figura 1.2.

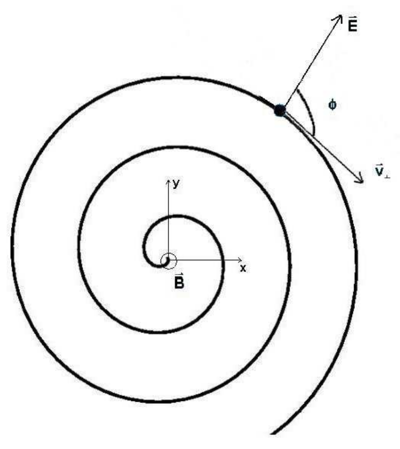

Figura 1.2: Proyección de la trayectoria del electrón en el plano xy, donde se muestra la diferencia de Fase φ, entre los vectores velocidad transversal $\vec{v_\perp}$ y campo eléctrico $\vec{E}$.

Se denomina resonancia exacta cuando la diferencia de fase $\varphi = \pi$, que corresponde al caso más efectivo, en el cual el electrón absorbe energía del campo eléctrico. En la simulación se desprecia la componente longitudinal del campo de microondas B_z debido a que es mucho más pequeña que la componente longitudinal del campo magnetostático axialmente simétrico producido por las bobinas. Este campo magnético se ajusta teniendo en cuenta el corrimiento *Doppler* y se expresa como:

$$\begin{aligned} \vec{B}^b &= -\frac{1}{2}\left[r\frac{dB_z^b(z)}{dz}\right]\hat{r} + B_z^b(z)\hat{z} \qquad \text{con} \\ B_z^b(z) &= \frac{m_e}{e}\left(\omega - kv_z\right)\left[\gamma_0 + b(z)\right], \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde m_e, e, y v_z representan la masa, la carga y la velocidad longitudinal del electrón, ω es la frecuencia de la onda medida en el marco de referencia de laboratorio, k es el número de onda, γ_0 es el factor relativista inicial y $b(z)$ es una función adimensional que determina el perfil del campo magnético. Este perfil de campo magnético no sólo depende de la posición, sino de la velocidad longitudinal local del electrón; por lo tanto éste puede determinarse autoconsistentemente con el movimiento del electrón, en el cual la velocidad longitudinal es determinada en cada paso de tiempo (en la simulación computacional) y por consiguiente para cada valor de z.
Haciendo una expansión en series de Taylor de la velocidad longitudinal se tiene,

$$v_z = v_z(z=0) + v_z'(z=0)z + \left(\frac{1}{2!}\right)v_z''(z=0)z^2 + \cdots, \tag{1.4}$$

donde $v_z' = \frac{dv_z}{dz}$ y $v_z'' = \frac{d^2v_z}{dz^2}$. En los cálculos presentados en esta tésis se aproximará dicha expresión por:

$$B_z^b(z) = \frac{m_e}{e}\left(\omega - kv_{z0}\right)\left[\gamma_0 + b(z)\right], \tag{1.5}$$

donde se hizo una aproximación de orden cero en la velocidad, teniendo en cuenta que v_z' y v_z'' son iguales a cero en el punto de inyección.

Por otra parte, a partir de la ecuación relativista de *Newton-Lorentz* se obtiene (ver apéndice A1):

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= -\left(ev_\perp B_z^b + eE\sin\varphi + ev_z B\sin\varphi\right)\hat{r} - eE\cos\varphi\hat{\theta} \\ &\quad -\left(\frac{m}{2B_z^b}v_\perp^2\frac{dB_z^b}{dz} + ev_\perp B\cos\varphi\right)\hat{z}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde el primer término de la componete z de la ec. (1.6) corresponde a la fuerza diamagnética (ver Apéndice A2) originada debido a la inhomogeneidad longitudinal del campo magnético de las bobinas, ésta fuerza causará que los electrones se frenen a lo largo de la componente longitudinal, como revelan los estudios [5, 6] del esquema SARA. En el esquema AMA, los electrones no se detienen debido al campo magnético de la onda electromagnética viajera, que en caso de encontrarse en un rango de fase cercano a π acelerará positivamente los electrones, como puede verse en el segundo término de la componente z de la fuerza de *Lorentz*.

1.2 Modelado numérico Esquema AMA

En los experimentos numéricos se consideró un haz de electrones no interactuantes, despreciando de este modo el efecto de carga espacial. La dinámica de los electrones que constituyen el haz se describe a partir de la ecuación de *Newton-Lorentz* relativista, la cual puede escribirse en el esquema de diferencias finitas centradas como:

$$\frac{\vec{U}^{n+1/2} - \vec{U}^{n-1/2}}{\triangle\tau} = \vec{g}^n + \frac{\vec{U}^{n+1/2} - \vec{U}^{n-1/2}}{2\gamma^n} \times \vec{B}^n_T, \tag{1.7}$$

donde $\vec{U}$ es la cantidad de movimiento del electrón en unidades $m_0 c$, $\vec{g}^n = \vec{E}^n / B_0 c$ es el campo eléctrico adimensional de la onda viajera modo TE_{11}, $\vec{B}^n_T = \vec{b}^n + \vec{B}^n$ es el campo magnético total en unidades $B_0 = m_0\omega/(-e)$, siendo $\vec{b}^n$ el campo magnético producido por las bobinas y $\vec{B}^n$ el campo magnético de la onda viajera modo TE_{11}, $\gamma = (1 + U^2)^{1/2}$ es el factor relativista y $\triangle\tau = \omega \triangle t$ el paso temporal adimensional, el superíndice n corresponde al número de paso temporal.
La coordenada del electrón normalizada con el radio de Larmor relativista $r_L = c/\omega_c$, se calcula usando el esquema de *Boris* [8],

$$\vec{r}^{n+1} = \vec{r}^n + \vec{U}^{n+1/2} \frac{\triangle\tau}{\gamma^{n+1/2}}. \tag{1.8}$$

Para determinar el campo magético producido por las bobinas con corriente en los puntos donde se encuentra el electrón se usa el método de interpolación bilineal. El campo magnético de las bobinas se determina en los nodos de una malla computacional, y se encuentra el valor desconocido del campo magnético en un punto determinado, a partir de valores conocidos en cuatro nodos de la malla cercanos a la posición del electrón.

$$B^b(r,z)_p = B_{i,j}S_2 + B_{i,j+1}S_1 + B_{i+1,j+1}S_3 + B_{i+1,j}S_4, \tag{1.9}$$

donde

$$\begin{aligned}
S_1 &= (Sz - j)(i + 1 - Sr), \\
S_2 &= (j + 1 - Sz)(i + 1 - Sr), \\
S_3 &= (Sz - j)(Sr - i), \\
S_4 &= (j + 1 - Sz)(Sr - i),
\end{aligned}$$

donde S_z y S_r corresponden a los índices(reales) de la posición de cada electrón dentro de cada celda en la componente z y r respectivamente.

1.3 Resultados de la simulación del Esquema AMA

Se modeló el esquema AMA [7], en el cual se utiliza una guía de onda de radio R =4 cm, amplitud de campo eléctrico $E = 5.1$ kV/cm, energía de inyección de los electrones $K_0 = 79.16$ keV, bajo campos magnéticos inhomogéneos cuya variación espacial está determinada por funciones lineales y parabólicas como sigue:

$$\begin{aligned}
b_l(z) &= \kappa_l z \qquad \text{con} \qquad \kappa_l = \gamma_0(R_m - 1)/d, \\
b_p(z) &= \kappa_p z^2 \qquad \text{con} \qquad \kappa_p = \gamma_0(R_m - 1)/d^2,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Donde d es la longitud de la guía de onda, y R_m corresponde a la razón entre el valor máximo y el valor inicial del campo magnético inhomogéneo. A continuación se muestran los resultados de las simulaciones utilizando el perfil de campo magnético lineal, para diferentes valores de R_m. En la Figura 1.3 se muestra la dependencia del factor relativista γ como una función de la coordenada longitudinal z, en la Figura 1.4 se muestra la dependencia de la diferencia de fase φ en función de z.

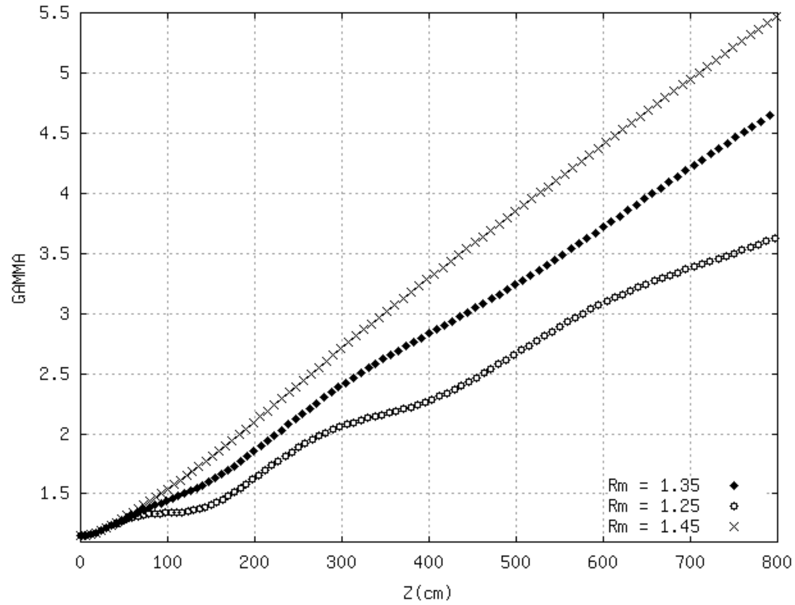

Figura 1.3: γ(Factor relativista) en función de z, para diferentes valores de R_m, con $b_l(z) = \kappa_l z$. $R_m = 1.25$ ($K = 1.35$ MeV), $R_m = 1.35$($K = 1.87$ MeV),$R_m = 1.45$($K = 2.28$ MeV)

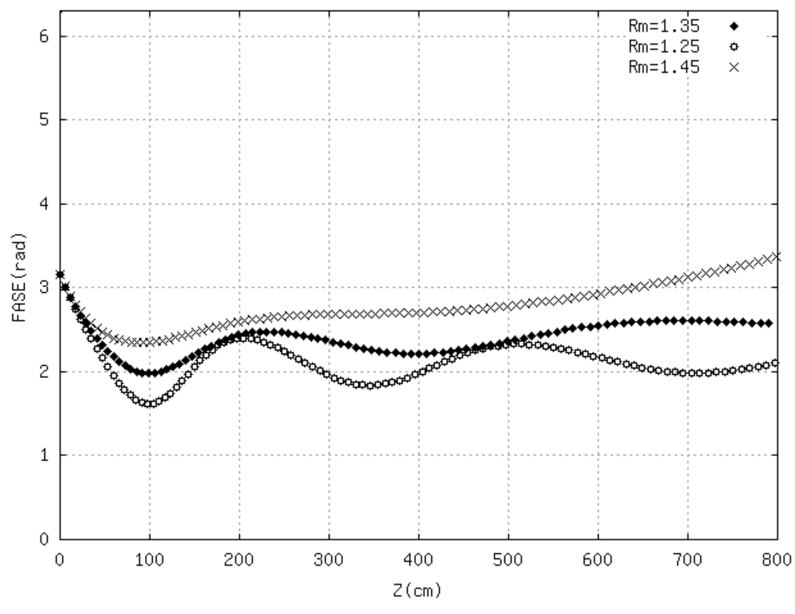

Figura 1.4: φ vs z campo magnético con perfil lineal para diferentes valores de R_m, para el esquema AMA

A continuación se muestran los resultados de las simulaciones utilizando el perfil de campo magnético parabólico, para diferentes valores de R_m. En la Figura 1.4 se muestra la dependencia del factor relativista γ como una función de la coordenada longitudinal z, en la Figura 1.5 se muestra la dependencia de la diferencia de fase φ en función de z.

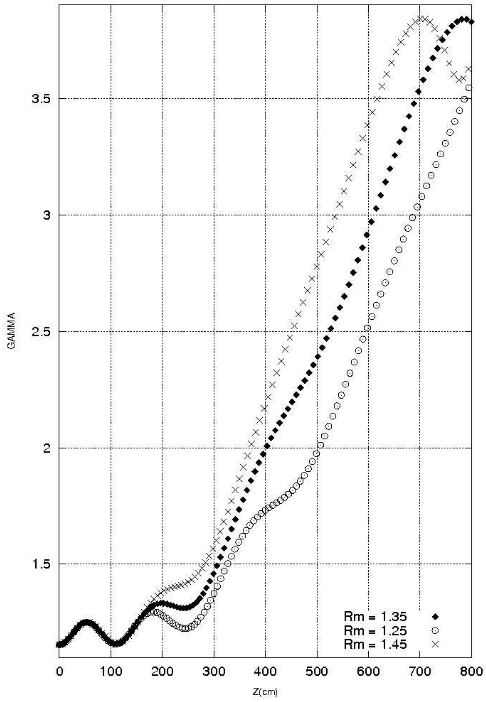

Figura 1.5: γ en función de z, para diferentes valores de R_m, con $b_p(z) = \kappa_p z^2$. $R_m = 1.25$ ($K = 1.30$ MeV), $R_m = 1.35(K = 1.45$ MeV),$R_m = 1.45(K = 1.46$ MeV)

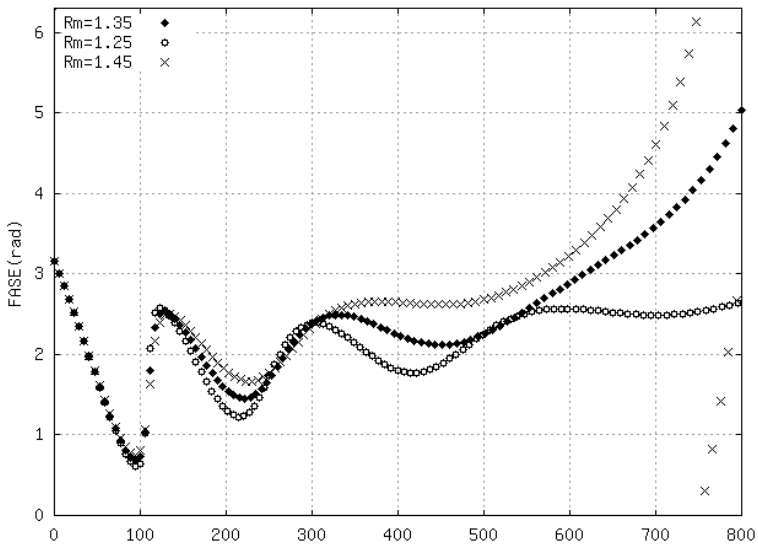

Figura 1.6: φ en función de z campo magnético con perfil parbólico para diferentes valores de R_m

A partir de la Figura 1.3 y 1.5 se observa que al aumentar la intensidad del campo magnético el electrón gana más energía, ya que se van a encontrar en un rango de fase más favorable para la aceleración como se muestra en la Figura 1.4 y 1.6. La fuerza diamagnética de frenado debida a la inhomogeneidad del campo magnético no se manifiesta porque el campo magnético de la onda viajera produce un fuerza magnética longitudinal que acelerará positivamente el haz de electrones, ésta aceleración es mayor en la medida en que la diferencia de fase φ es más cercana a π, como se puede ver también a partir de la ecuación (1.6).

1.4 Validación de la simulación

Los resultados de la presente simulación se confrontan con los datos obtenidos en límites de un modelo semianalítico [7]. En la Figura 1.7 se muestra el perfil del campo magnético utilizado en [7] que aumenta a lo largo del eje del campo magnético de manera prácticamente lineal

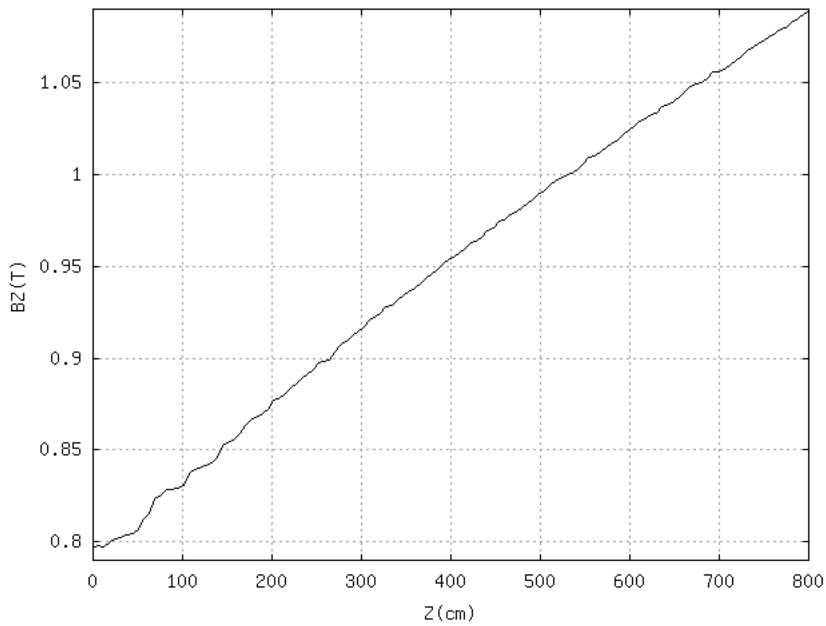

Figura 1.7: Perfil de campo magnético utilizado en [7]

En la Figura 1.8 se muestra la trayectoria espiral del electrón acelerado por la onda viajera TE_{11} con parámetros utilizados en [7] bajo condiciones de autoresonancia ciclotrónica en el campo magnético cuyo perfil longitudinal se muestra en la Figura 1.7. El incremento del radio de Larmor está asociado con la ganancia de energía transversal del electrón, mientras que el cambio de la distancia de separación entre las espiras está relacionada con el incremento de la energía asociada al movimiento longitudinal.

La Figura 1.9 muestra la evolución de las energías electrónicas totales en unidades del factor relativista obtenidas a partir de la simulación realizada en éste trabajo (línea sólida) y en [7], la diferencia es atribuída a las fluctuaciones del campo magnético (ver Figura 1.7), las cuales originan oscilaciones considerables en la componente radial del campo magnético aproximado por (1.3). Sin embargo tal diferencia no excede el 5%.

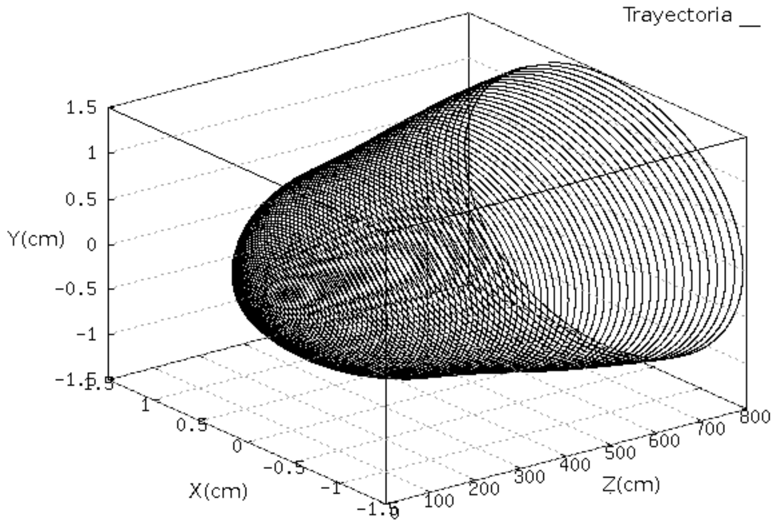

Figura 1.8: Trayectoria del electrón en condiciones de autoresonancia ciclotrónica, con $R = 4cm$, $K_0 = 79{,}8$ keV y $E = 5{,}1$ kV/cm

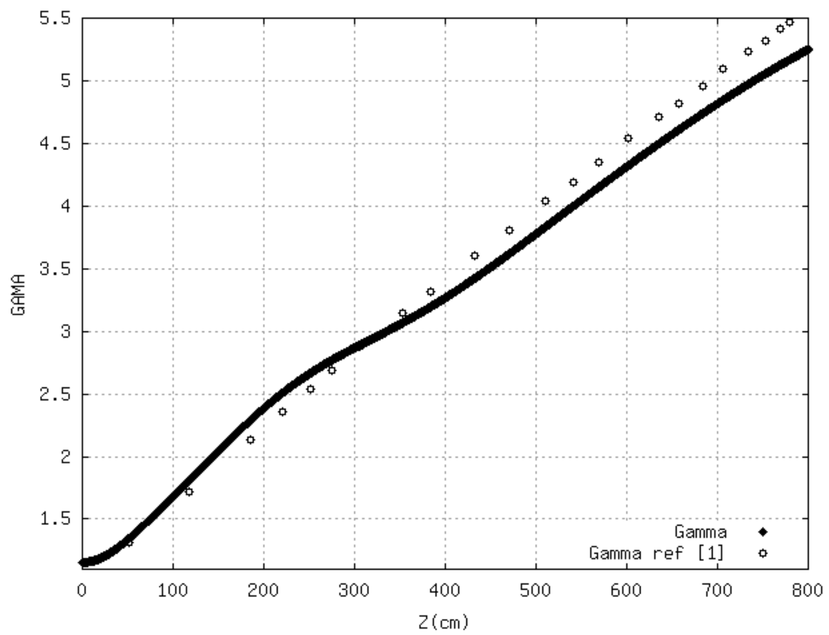

Figura 1.9: γ en función de z, Confrontación de resultados AMA, E =5.1 kV/cm, $R = 4$ cm, $f = 9.55$ GHz, $K_0 = 79{,}16$ keV

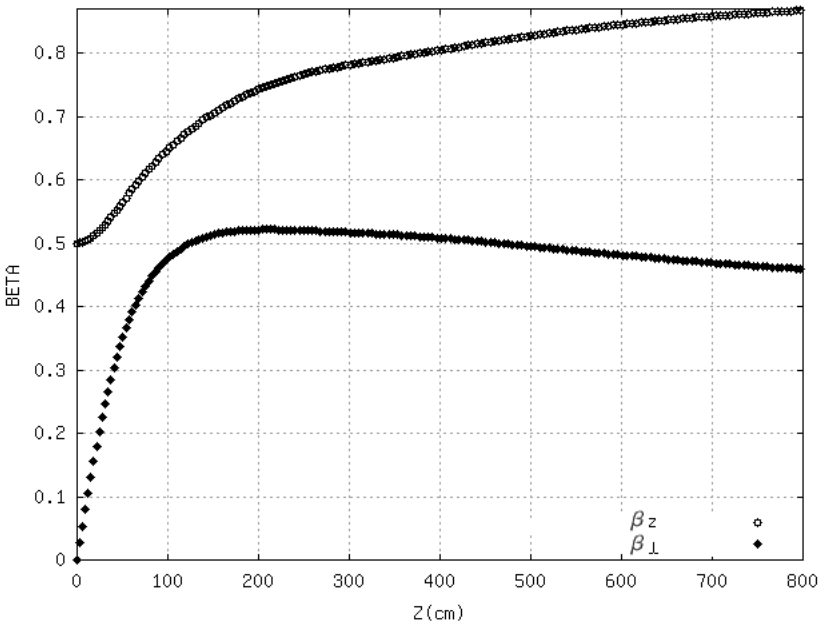

Figura 1.10: β_z, $\beta_\perp$ vs z. Con $R = 4$ cm, $K_0 = 79.16$ keV, $f = 9.55$ GHz, $E = 5.1$ kV/cm

La Figura 1.10 muestra la evolución de las velocidades longitudinal (curva superior) y transversal (curva inferior) en unidades de $\beta_z = v_z/c$ y $\beta_\perp = v_\perp/c$, en la cual puede observarse que la energía del haz está asociada principalmente al movimiento longitudinal, esto conlleva a decir, que en el esquema AMA, la energía longitudinal del electrón es mayor que su energía transversal. En este punto, existe una diferencia con el mecanismo SARA [5,6], en la cuál la fuerza diamagnética es más apreciable dando como resultado que el electrón se frene.

También se confrontaron los resultados obtenidos en el artículo SARA [5], para verificar que los cálculos son correctos. Como estos corresponden a un modelo con campos de microondas estacionarios, se hizo necesario reproducir una onda estacionaria modo TE_{111} para comparar los resultados.
De manera que, la onda estacionaria TE_{111}, puede verse como la suma de dos ondas electromagnéticas viajeras con la misma amplitud y frecuencia, desfasadas π donde una viaja en dirección contraria a la otra e interfieren entre si. Esta comparación con el esquema SARA se muestra en la Figura 1.11:

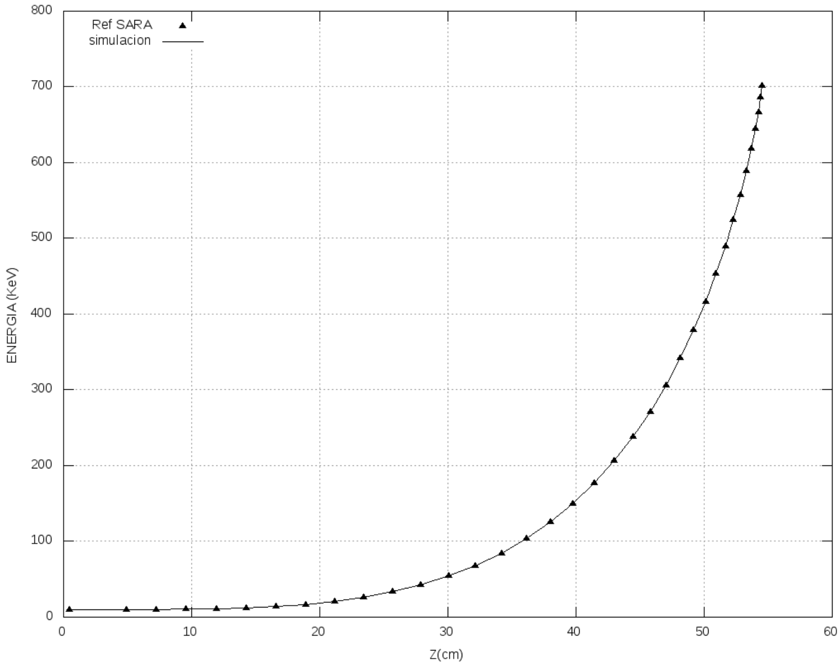

Figura 1.11: Energía en función de z,Confrontación con resultados de [5], $E = 6.0$ kV/cm, $R = 133$ cm,$Lc = 200$ cm, $f = 100$ MHz, $K_0 = 10$ keV, $R_m = 1.3$

CAPÍTULO 2

ANÁLISIS ESQUEMA SARA A PARTIR DEL ESQUEMA AMA

2.1 Descripción esquema SARA

El esquema físico usado para el estudio teórico del fenómeno SARA es similar al acelerador de microondas autoresonante AMA, sus diferencias están en que en el esquema SARA se utiliza un campo electromagnético estacionario TE_{111}, es decir hace uso de una cavidad resonante en lugar de una guía de onda. La expresión matemática de la onda electromagnética estacionaria TE_{111} utilizada en [5] es:

$$\vec{E} = E_0(\hat{e_x}\cos\omega t + \hat{e_y}\sin\omega t)\sin kz, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{E_0 k}{\omega}(\hat{e_x}\cos\omega t + \hat{e_y}\sin\omega t)\cos kz \\ &\quad -E_0\frac{S_{11}}{\omega R_c}\cos(\theta - \omega t)\sin kz\hat{e_z}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde θ es el ángulo azimutal, E_0 es la amplitud del campo de microondas, ω es la frecuencia angular, R_c es el radio de la cavidad y $k = \pi/L_c$, donde L_c es la longitud de la cavidad resonante. Se excluye la componente longitudinal del campo magnético debido a que se considera despreciable respecto al campo magnético de las bobinas con corriente. Por otra parte, en [5, 6] no se tomó en cuenta el campo magnético transversal de la onda electromagnética estacionaria, por considerarse despreciable respecto a la magnitud del campo eléctrico transversal. Hasta el momento no se ha incluido el efecto del corrimiento *Doppler* en el esquema SARA.

Cabe mencionar que el fenómeno SARA también puede realizarse con una onda TE_{11p} polarizada linealmente, ya que una onda polarizada linealmente puede expresarse como la suma de dos ondas circularmente polarizadas, una con polarización circular derecha, y otra con polarización circular izquierda. Hasta el momento sólo se ha utilizado la primera posibilidad, es decir, se ha realizado el fenómeno SARA con una onda con polarización circular.

2.2 Simulación del esquema SARA a partir del esquema AMA

Con el fin de analizar el esquema SARA a partir del AMA, se hace necesario expresar el campo electromagnético estacionario mediante la superposición de dos ondas electromagnéticas viajeras que van en dirección contraria, una respecto a la otra y desfasadas π que interfieren entre sí. Se denominará "onda progresiva ", la onda que se propaga en dirección z positivo, y "onda regresiva ", a la que se propaga en dirección opuesta. Las componentes de la onda progresiva en coordenadas cartesianas están dadas por:

$$\begin{aligned} E_{x_p} &= -\frac{g}{2}\sin(\tau - kz), \\ E_{y_p} &= \frac{g}{2}\cos(\tau - kz), \\ B_{x_p} &= -\frac{gk}{2}\cos(\tau - kz), \\ B_{y_p} &= -\frac{gk}{2}\sin(\tau - kz), \end{aligned} \tag{2.3}$$

y las de la onda regresiva como:

$$\begin{aligned} E_{x_r} &= \frac{g}{2}\sin(\tau + kz), \\ E_{y_r} &= -\frac{g}{2}\cos(\tau + kz), \\ B_{x_r} &= -\frac{gk}{2}\cos(\tau + kz), \\ B_{y_r} &= -\frac{gk}{2}\sin(\tau + kz), \end{aligned} \tag{2.4}$$

$g = E/B_0c$ corresponde al campo elétrico adimensional, $k = \pi/\delta$ y $\tau = \omega t$ corresponde al tiempo normalizado y $\delta = d/r_L$ es el tamaño de la cavidad adimensional.
En la simulación realizada se tomaron los siguientes parámetros:
energía de inyección $K_0 = 1$ MeV, amplitud de campo eléctrico $E = 71$ kV/cm y campo magnético lineal $b_l(z) = \kappa_l z$ con R_m=3.1. En todos los casos se utilizaron los mismos parámetros de la cavidad resonante considerada en [5], R_c =132.9 cm, d =200 cm y f =100 MHz. Para analizar la influencia del corrimiento *Doppler* en el esquema SARA y establecer perfiles de campo magnéticos óptimos para la absorción de energía del haz de electrones, se utilizaron las expresiones de campo magnético que se muestran a continuación

- Considerando el corrimiento *Doppler* para la onda progresiva

$$B_z^b(z) = \frac{m_e}{e}\left(\omega - kv_{z0}\right)\left[\gamma_0 + b(z)\right], \tag{2.5}$$

  se grafica la evolución de la energía y la fase φ en función de z para la onda progresiva, regresiva y estacionaria con este ajuste.

- Considerando el corrimiento *Doppler* para la onda regresiva:

$$B_z^b(z) = \frac{m_e}{e}\left(\omega + kv_{z0}\right)\left[\gamma_0 + b(z)\right], \tag{2.6}$$

se grafica evolución de la energía y la diferencia de fase φ en función de z para cada caso, onda progresiva, regresiva y estacionaria

- No considerando el corrimiento *Doppler*:

$$B_z^b(z) = \frac{m_e}{e}\omega\left[\gamma_0 + b(z)\right], \tag{2.7}$$

graficar energía y diferencia de fase φ en función de z para los tres tipos de onda.

2.3 Resultados y análisis del esquema SARA a partir del esquema AMA

A continuación (Ver Figura 2.1) se muestran las gráficas de los perfiles de campo magnético inhomogéneos con perfil lineal en función de z, expresados por las ecuaciones (2.5) (triángulos), (2.6) (círculos) y (2.7) (línea contínua). Éstos se encuentran en unidades de $B_0 = m_e\omega/e = 0.0036$ T. Se hi-

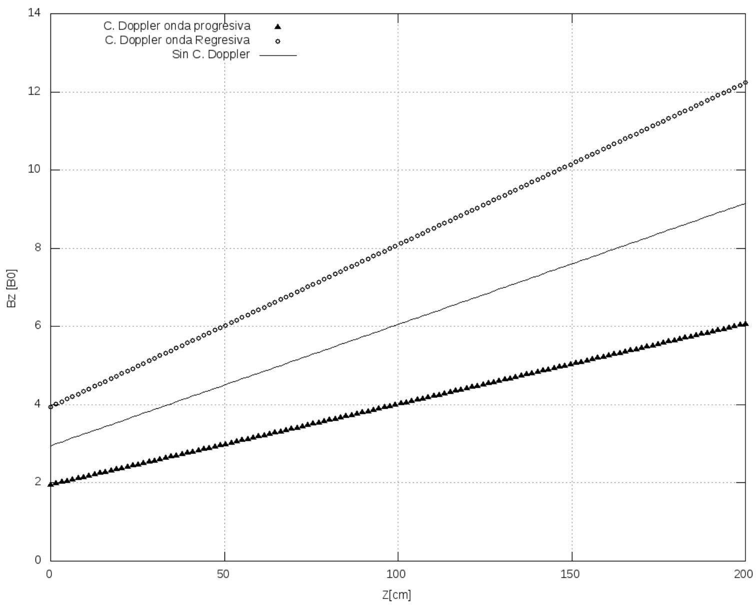

Figura 2.1: Campo magnético B_z^b en función de z para cada ajuste del corrimiento *Doppler*

cieron dos tipos de gráficas, en el primero (TIPO I), en una sóla gráfica se evalúa la evolución de energía y diferencia de fase φ para una sola clase de onda (progresiva, regresiva ó estacionaria), realizando el ajuste del campo magnético. En el segundo tipo (TIPO II), se analiza para cada ajuste de campo magnético, la evolución de energía y diferencia de fase φ de las tres clases de ondas electromagnéticas estudiadas (onda progresiva, onda regresiva y onda estacionaria). Esto se hace, en el primer caso, para analizar cada tipo de onda electromagnética por separado (progresiva, regresiva ó estacionaria) respecto a cada ajuste de campo magnético y observar cual es más conveniente, y en el segundo caso, para establecer diferencias, comparando los resultados del experimento numérico al utilizar una onda progresiva, regresiva y estacionaria respecto a cada ajuste de campo magnético.

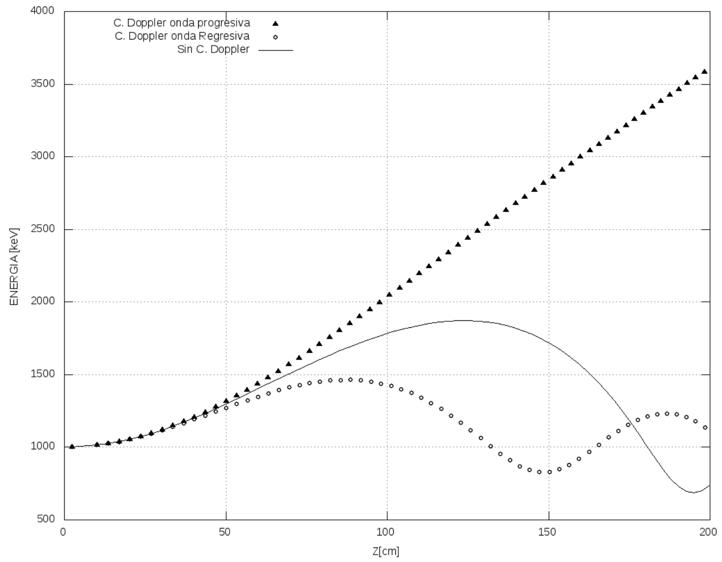

Figura 2.2: Energía en función de z, onda progresiva, para cada ajuste de campo magnético. Energía máxima alcanzada con C. *Doppler* onda progresiva $K = 3.58$ Mev, con C. *Doppler* onda regresiva $K = 1.46$ MeV, sin C. *Doppler* $K = 1.87$ MeV

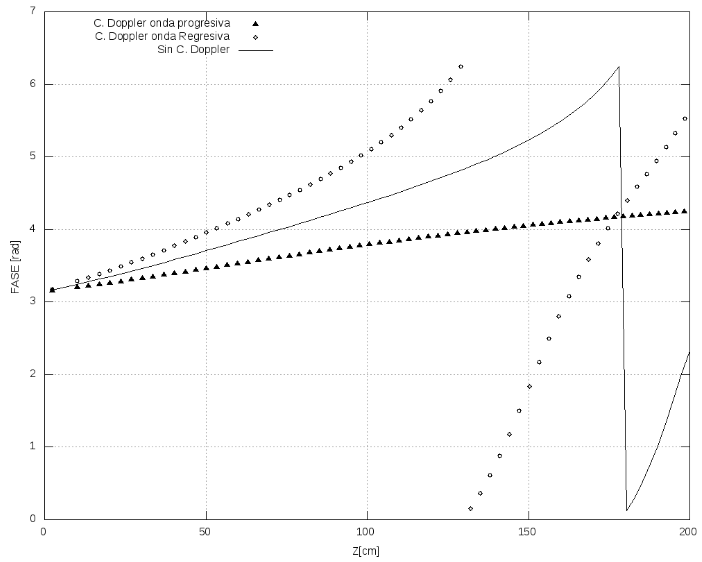

Figura 2.3: Fase φ en función de z, onda progresiva

Para la onda regresiva se tiene:

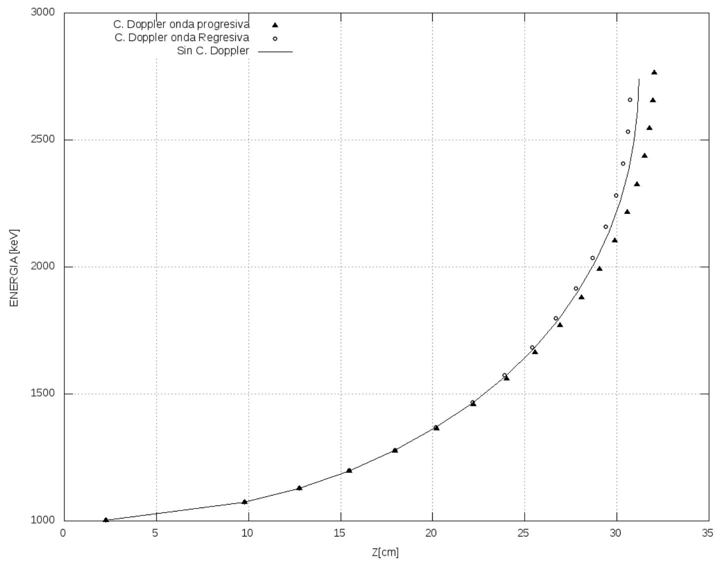

Figura 2.4: Energía en función de z, onda regresiva. Energía máxima alcanzada con C.Doppler onda progresiva $K = 2.76$ Mev, con C. Doppler onda regresiva $K = 2.66$ MeV, sin C. Doppler $K = 2.74$ MeV

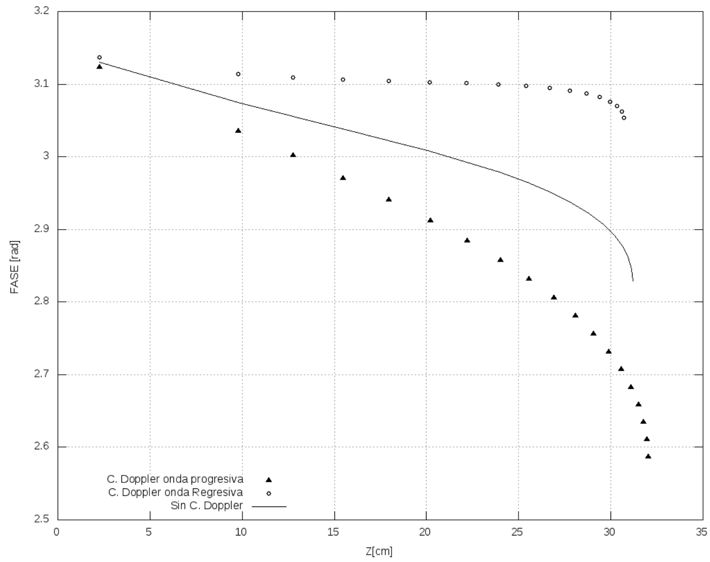

Figura 2.5: Fase φ en función de z, onda regresiva, para cada ajuste de campo magnético

Para la onda estacionaria:

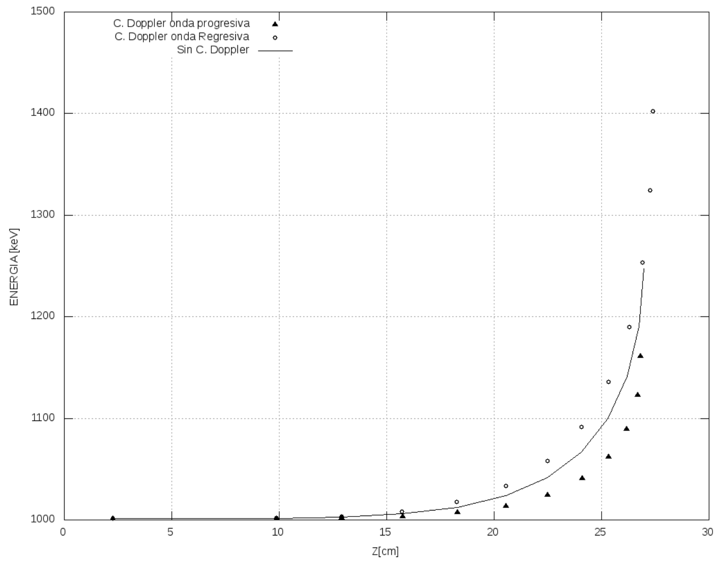

Figura 2.6: Energía en función de z, onda estacionaria, para cada ajuste de campo magnético. Energía máxima alcanzada con C.*Doppler* onda progresiva $K = 1.16$ Mev, con C. *Doppler* onda regresiva $K = 1.40$ MeV, sin C. *Doppler* $K = 1.24$ MeV

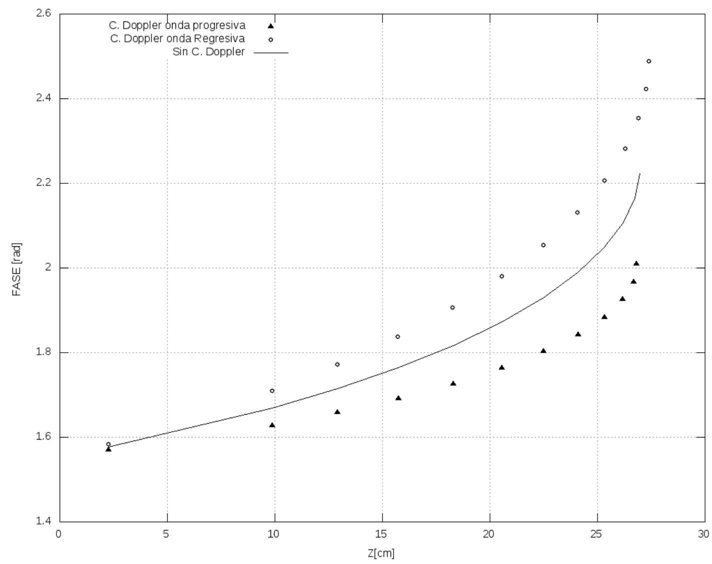

Figura 2.7: Fase φ en función de z, onda estacionaria,para cada ajuste de campo magnético

2.3.1. Análisis de resultados TIPO I

En la Figura 2.2 se muestra que para la onda progresiva la influencia del Corrimiento *Doppler* es bastante significativa para que el electrón absorba energía del campo eléctrico, de manera que se considera como condición para poder satisfacer la resonancia (esto corresponde al esquema AMA, estudiado en el capítulo 1). Esto puede verse en la Figura 2.3, donde la diferencia de fase φ más favorable corresponde al caso en que se incluyó el ajuste del corrimiento *Doppler* para la onda progresiva. Además se observa, que el haz de electrones no se frena a lo largo de toda la cavidad resonante, esto se debe a que el campo magnético de la onda viajera progresiva acelera positivamente el electrón a lo largo de la componente longitudinal. Ésta fuerza es más influyente en la medida en que la diferencia de phase φ se acerca a π, de manera que, se contrarresta el efecto de la fuerza diamagnética producido por el campo magnético de las bobinas. Esto puede observarse gráficamente en la Figura 2.8, donde se muestra un caso particular en el cual se describe la trayectoria del electrón en el plano xy bajo la acción de una onda viajera descrita por la ecuación (2.7), en esta figura (Figura 2.8), se presenta resonancia exacta, es decir $\varphi = \pi$. En este caso, la fuerza magnética producida por el campo magnético de la onda siempre acelerará positivamente los electrones. De la Figura 1.7, que corresponde al esquema AMA, también se evidencia éste fenómeno, pues la energía longitudinal es mayor que la energía transversal. Este comportamiento se debe a que la energía transversal que los electrones ganan de la onda electromagnética debe redistribuirse hacia la componente longitudinal y así acelerar el haz de electrones a lo largo de z, debido a que el campo magnético de la onda no hace trabajo ocasionando que los electrones no puedan absorber energía de este campo.

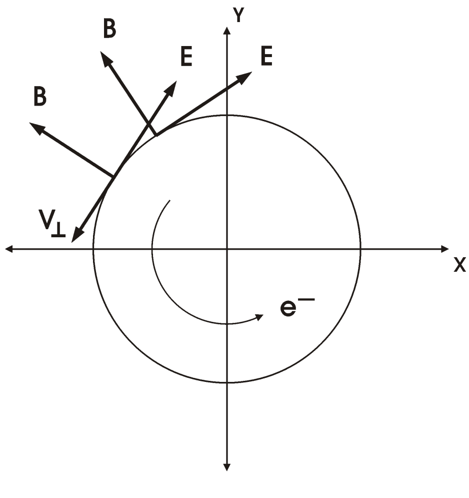

Figura 2.8: Proyección en el plano transversal de la trayectoria del electrón en resonancia exacta para el caso de una onda progresiva

La Figura 2.4 corresponde a la evolución de la energía considerando una onda regresiva, no se puede apreciar una influencia del corrimiento *Doppler* relevante para este caso (difiere muy poco una curva de la otra), esto se debe a que los electrones se frenan mucho antes debido a la fuerza diamagnética y a una fuerza magnética de frenado adicional, producida por el campo magnético de la onda electromagnética, ésta situación puede observarse más claramente en la Figura 2.9 donde se hace una descripción de la trayectoria del electrón en el plano xy para el caso de resonancia exacta, en donde la fuerza magnética producida por el campo magnético de la onda regresiva, se opone al avance de los electrones a lo largo de la componente longitudinal. En la Figura 2.5 se observa que ajustando el corrimiento Doppler para el caso de una onda regresiva, el electrón se mantiene en un rango de fase más favorable, ésto favorece la absorción de energía del campo eléctrico de parte de los electrones, pero no garantiza que al final se obtenga una energía máxima alcanzada mayor que con los otros ajustes de campo magnético, pues la fuerza magnética debido al campo magnético de la onda regresiva en el caso en que la diferencia de fase $\varphi = \pi$ o cercana a π, frena de forma más eficiente los electrones, además, como los electrones pueden absorber más energía del campo eléctrico esto hace que aumente su velocidad transversal, lo cual ocasiona un mayor efecto de la fuerza diamagnética.

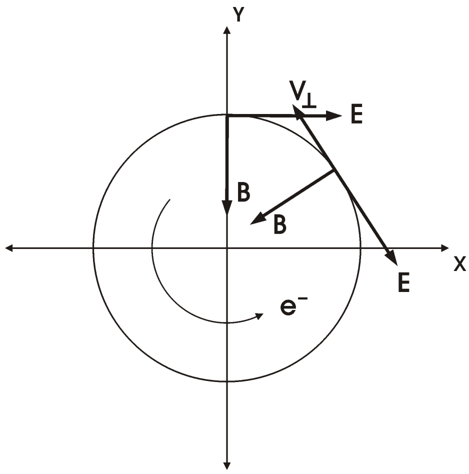

Figura 2.9: Proyección en el plano transversal de la trayectoria del electrón en resonancia exacta para el caso de una onda regresiva

En la Figura 2.6 se muestra la evolución de la energía en función de z considerando una onda electromagnética estacionaria, en donde para el caso en que se ajusta el corrimiento *Doppler* para la onda electromagnética regresiva, se obtienen resultados más favorables en términos de ganancia de energía. De la Figura 2.7 que muestra la evolución de la fase φ en función de z se tiene que la fase más favorable para la ganancia de energía corresponde al ajuste del campo magnético considerando el corrimiento *Doppler* para la onda regresiva. Además se observa que al inicio, los electrones no comienzan en resonancia exacta, sino con diferencia de fase $\varphi = \pi/2$, esto se debe al campo magnético transversal de la onda electromagnética estacionaria TE_{111} que es antiparalelo al campo eléctrico, produciendo en un paso de tiempo posterior a la inyección de los electrones una fuerza de *Lorentz* perpendicular al campo eléctrico, y de la . Caso contrario se presenta con la onda progresiva y la onda regresiva, donde la diferencia de fase inicial corresponde a resonancia exacta $\varphi = \pi$, ya que el campo magnético transversal de la onda electromagética será perpendicular al campo eléctrico.

2.3.2. Resultados y análisis TIPO II

A continuación se muestran las gráficas comparativas para onda progresiva, regresiva y estacionaria de la evolución de energía y diferencia de fase φ en función de la componente longitudinal z. para todas las gráficas, los triángulos corresponden a onda progresiva polarizada circularmente, los círculos a la onda regresiva polarizada circularmente, y la línea continua a la onda electromagnética estacionaria

con polarización circular.
Para el ajuste del campo magnético considerando corrimiento *Doppler* a la onda progresiva se tiene:

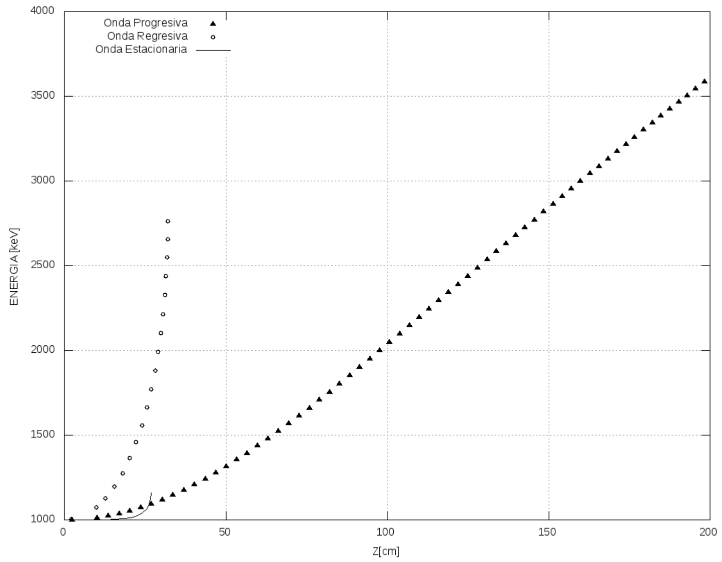

Figura 2.10: Energía en función de z, con ajuste del corrimiento *Doppler* a la onda progresiva. Energía máxima alcanzada onda progresiva $K = 3.58$ Mev, onda regresiva $K = 2.76$ MeV, y onda estacionaria $K = 1.16$ MeV

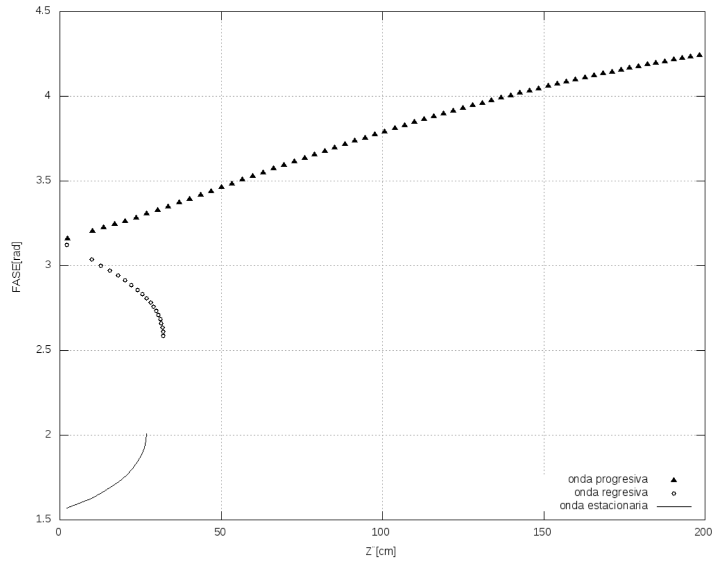

Figura 2.11: Fase φ en función de z, para ajuste del corrimiento *Doppler* onda progresiva

Para el ajuste del campo magnético con corrimiento *Doppler* a la onda regresiva se tiene:

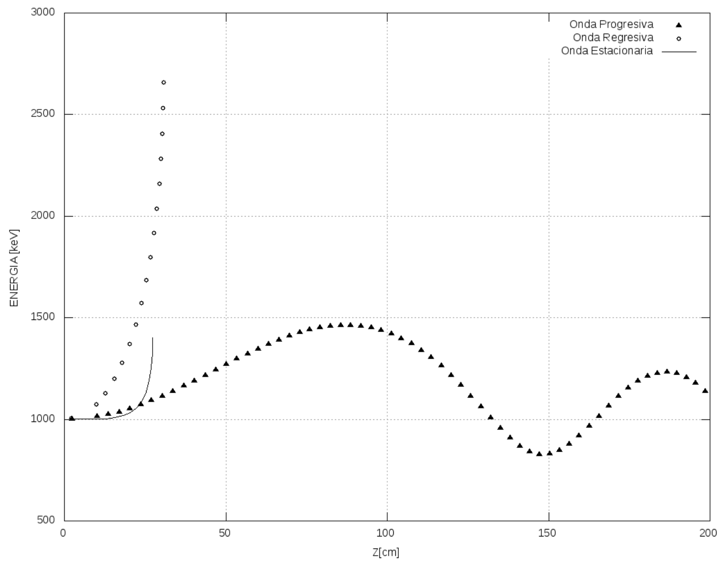

Figura 2.12: Energía en función de z, para ajuste del corrimiento *Doppler* a la onda regresiva. Energía máxima alcanzada onda progresiva $K = 1.46$ MeV, onda regresiva $K = 2.66$ MeV, onda estacionaria $K = 1.40$ MeV

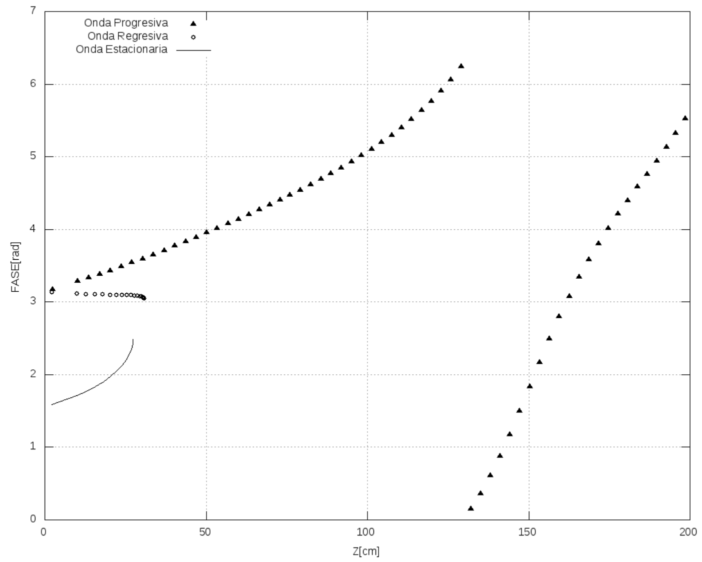

Figura 2.13: Fase φ en función de z, para ajuste del corrimiento *Doppler* onda regresiva

Para el ajuste del campo magnético sin considerar corrimiento *Doppler*:

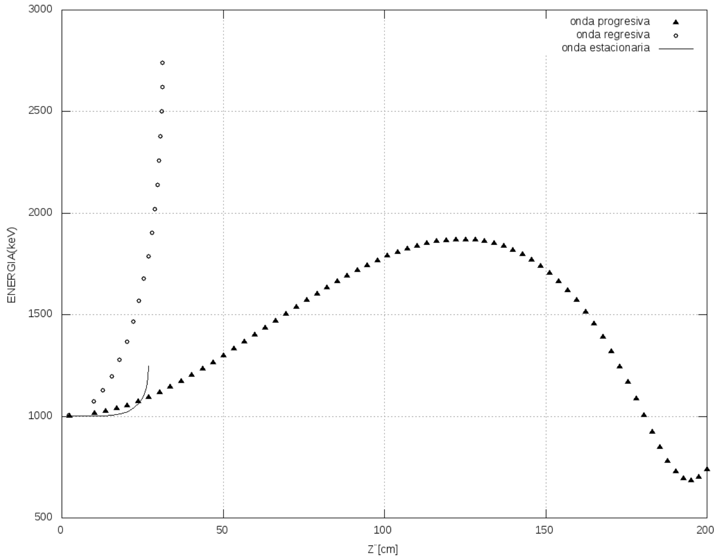

Figura 2.14: Energía en función de z, sin ajuste del corrimiento *Doppler*. Energía máxima alcanzada onda progresiva $K = 1.87$ MeV, onda regresiva $K = 2.74$ MeV, onda estacionaria $K = 1.24$ MeV

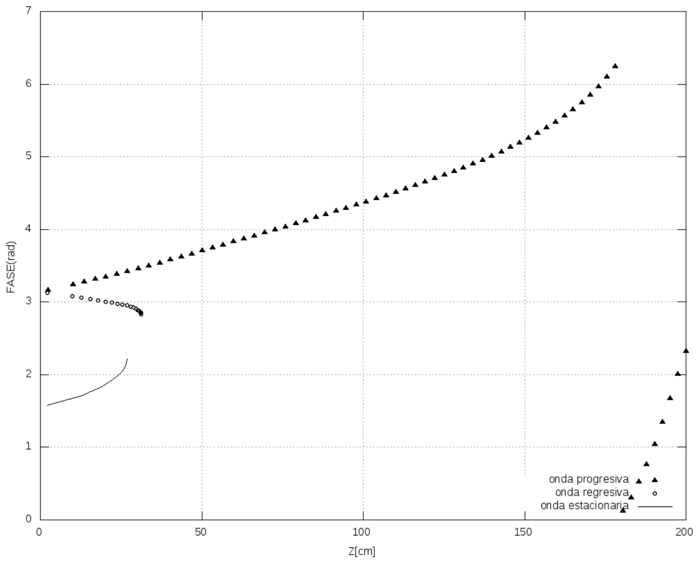

Figura 2.15: Fase φ en función de z, sin ajuste del corrimiento *Doppler*

De la Figura 2.10 se tiene que el ajuste del corrimiento *Doppler* es más favorable para la onda progresiva como es de esperar, por otra parte, se observa que para el caso de la onda regresiva se obtiene más ganancia de energía en el intervalo de 0 a 50 cm, que para las otras dos ondas, el impedimento para que los electrones sigan ganando energía de la onda regresiva está en la fuerza de frenado debido a la fuerza magnética que se produce por el campo magnético de la onda y a la fuerza diamagnética. En la Figura 2.11 se observa que mientras los electrones no se frenen la diferencia de fase más favorable se da para el caso de la onda regresiva, lo cual concuerda con la Figura 2.10, pues la ganancia de energía es mayor.

Cuando se hace el ajuste del corrimiento *Doppler* a la onda regresiva Figura 2.12, se obtiene una mayor ganancia de energía para el caso de la onda estacionaria (línea contínua) comparándolo con los otros dos ajustes de campo magnético, esto sugiere que la ganancia de energía para la onda estacionaria está más influenciada por la onda regresiva. De la Figura 2.13 se observa que la diferencia de fase para el caso de la onda regresiva trata de mantenerse en resonancia exacta a diferencia de los otros dos casos. Por otra parte, la diferencia de fase para la onda estacionaria es más favorable con esta adaptación de campo magnético que para los otros dos ajustes, sin embargo se observa que no es una diferencia de fase acorde para la ganancia de energía si se compara con las obtenidas para la onda progresiva y regresiva. Esto se debe al efecto del campo magnético de la onda estacionaria, el cual provoca que los electrones comiencen con diferencia de fase $\varphi = \pi/2$ como se mencionó anteriormente, además, ésta diferencia de fase ocasiona un mayor efecto del campo magnético de la onda, que causará que los electrones se frenen más rápido. Esto puede analizarse a partir de la expresión para la fuerza de *Newton-Lorentz* para el caso en que se tiene una onda electromagnética estacionaria (esquema SARA) que es (Ver Apéndice A1):

$$\begin{aligned}
\vec{F}_L &= -\left(ev_\perp B_z^b + eE\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\sin\varphi + ev_z B\cos\varphi\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\right)\hat{r} \\
&\quad -eE\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\cos\varphi\hat{\theta} \\
&\quad -\left(\frac{m}{2B^b}v_\perp^2\frac{dB_z^b}{dz} + ev_\perp B\sin\varphi\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\right)\hat{z}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

En la Figura 2.14 se observa una ganancia de energía menor para la onda estacionaria que en el caso anterior, indicando que para la onda estacionaria es mejor adaptar el corrimiento *Doppler* a la onda regresiva. Por otro lado, no ajustar el corrimiento *Doppler* a la onda progresiva conlleva a que se rompa la condición de resonancia para el caso AMA, siendo un factor relevante para que el haz de electrones absorba energía del campo eléctrico, esto puede observarse en las Figuras 2.15 y 2.12, donde se muestra la evolución de la diferencia de fase, siendo poco favorable (ver curva de triángulos).

CONCLUSIONES

- En el esquema AMA la energía longitudinal del haz de electrones es mayor que su energía transversal, la fuerza magnética debido al campo magnético de la onda hace que se redistribuya la energía transversal que los electrones ganan del campo eléctrico hacia la componente longitudinal.
- En el esquema SARA la energía transversal del haz de electrones es mayor que su energía longitudinal, esto está asociado principalmente al campo magnético de la onda regresiva y a la fuerza diamagnética.
- Para el caso AMA y SARA hacer un ajuste del campo magnético incluyendo corrimiento *Doppler* es necesario, pues se presentan diferencias para los tres casos, es decir ajuste del corrimiento *Doppler* a la onda progresiva, onda regresiva y sin considerarlo.
- Los resultados sugieren que el mejor ajuste del corrimiento *Doppler* para el esquema SARA corresponde al de la onda regresiva.
- El esquema AMA no es eficiente desde el punto de vista energético, debido a que la energía se va encontrar en las dos componentes (transversal y longitudinal). Cuando se requiera aprovechar la energía ya sea para obtener radiación electromagnética ó para colisión de partículas cargadas, se tendrán inconvenientes debido a que las partículas tendrán movimiento en la componente longitudinal y en la componente transversal, esto ocasiona dificultades a la hora de establecer un blanco en el cual puedan colisionar.
- Debido a la componente magnética de la onda estacionaria, la fase de interacción del electrón con el campo eléctrico de microondas es $\pi/2$. Esto ocasiona un mayor efecto de frenado de los electrones. Por tal razón, en el esquema SARA no debe despreciarse la componente magnética de la onda electrómagnética estacionaria polarizada circularmente modo TE_{111}.

APÉNDICES

A.1 Fuerza de Lorentz esquema SARA y esquema AMA

En éste apéndice se describe el procedimiento para la obtención de la fuerza de Lorentz para los mecanismos SARA y AMA respectivamente.

A.2.1. Fuerza de Lorentz esquema SARA

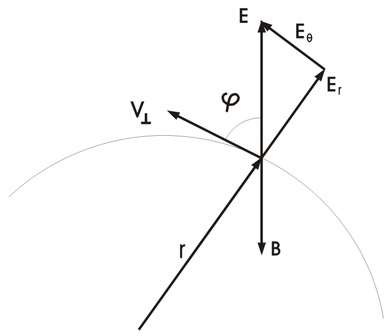

Figura A.1: Proyección de la trayectoria del electrón en el plano transversal, bajo una onda electromagnética estacionaria TE_{11p}

A partir de la Figura A.1, el campo electromagnético estacionario puede expresarse en términos de la diferencia de fase φ como sigue

$$\vec{E} = E\left(\sin\varphi\hat{r} + \cos\varphi\hat{\theta}\right)\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right), \tag{A.1}$$

$$\vec{B} = -B\left(\sin\varphi\hat{r} + \cos\varphi\hat{\theta}\right)\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right), \tag{A.2}$$

teniendo en cuenta la expresión (A.1) la fuerza eléctrica actuante sobre el electrón en coordenadas cilíndircas es:

$$\vec{F}_E = -eE\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\sin\varphi\hat{r} - eE\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\cos\varphi\hat{\theta} \tag{A.3}$$

A continuación se describe el procedimiento para calcular la fuerza magnética que actúa sobre el electrón en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{F}_M = -e\left[(v_\theta B_z - v_z B_\theta)\hat{r} + (v_z B_r - v_r B_z)\hat{\theta} + (v_r B_\theta - v_\theta B_r)\hat{z}\right] \tag{A.4}$$

Si se considera baja inhomogeneidad del campo magnético de las bobinas, se cumple:

$$\begin{array}{ccc} B_z >> B_r, B_\theta & \text{y} & v_\theta >> v_r \\ \Rightarrow v_z B_\theta << v_\theta B_z & \text{y} & v_r B_\theta << v_\theta B_r, \end{array}$$

con las aproximaciones anteriores, la fuerza magnética se expresa:

$$\vec{F}_M = -ev_\theta B_z \hat{r} - e(v_z B_r - v_r B_z)\hat{\theta} + ev_\theta B_r \hat{z}. \tag{A.5}$$

De las ecuaciones (A.2), (A.3) y (A.5) y considerando que $(F_M)_\theta << (F_E)_\theta$ y $v_\perp = (v_r^2 + v_\theta^2)^{1/2} \approx v_\theta$ se obtiene la fuerza de lorentz, que es la suma de la fuerza magnética y la fuerza eléctrica,

$$\begin{aligned} \vec{F}_L = & -\left(ev_\perp B_z^b + eE\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\sin\varphi + ev_z B\cos\varphi\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\right)\hat{r} \\ & -eE\sin\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\cos\varphi\hat{\theta} \\ & -\left(\frac{m}{2B^b}v_\perp^2\frac{dB_z^b}{dz} + ev_\perp B\sin\varphi\cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right)\right)\hat{z}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

A.2.2. Fuerza de Lorentz esquema AMA

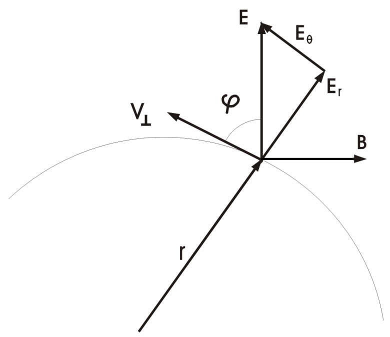

Figura A.2: Proyección de la trayectoria del electrón en el plano transversal, bajo una onda electromagnética viajera TE_{11}

Para el esquema AMA, se hace un procedimiento similar al realizado en el cálculo de la fuerza de Lorentz para el esquema SARA, la única diferencia está en las expresiones de la onda electromagnética, las cuales corresponden a un campo electromagnético viajero TE_{11}. Mediante el esquema mostrado en la Figura A.2, se observa que ésta onda viajera en términos de la diferencia de fase φ se puede expresar como:

$$\begin{aligned} E_r &= E\sin\varphi \\ E_\theta &= E\cos\varphi \\ B_r &= -B\cos\varphi \\ B_\theta &= B\sin\varphi \end{aligned} \tag{A.7}$$

La expresión de la fuerza de Lorentz que actúa sobre el electrón para el caso del esquema AMA es:

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= -\left(ev_\perp B_z^b + eE\sin\varphi + ev_z B\sin\varphi\right)\hat{r} - eE\cos\varphi\hat{\theta} \\ &\quad -\left(\frac{m}{2B^b}v_\perp^2\frac{dB_z^b}{dz} + ev_\perp B\cos\varphi\right)\hat{z}\end{aligned} \tag{A.8}$$

A.2 Fuerza Diamagnética

Considerando un campo magnético axialmente simétrico ($B_\theta = 0$ y $\frac{\partial}{\partial\theta}$=0), en el cual su dirección está a lo largo de la componente longitudinal, elegida como z, y donde su magnitud aumenta a lo largo de z. Como se muestra en la Figura A.3

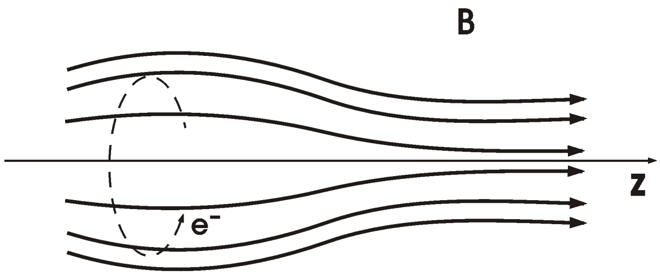

Figura A.3: Campo magnético inhomogéneo axialmente simétrico a lo largo de z

Se puede obtener B_r de $\nabla.\mathbf{B} = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \tag{A.9}$$

Si $\partial B_z/\partial z$ está dado en $r = 0$ y no varia mucho con r, se puede aproximar a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} rB_r &= -\int_0^r r\frac{\partial B_z}{\partial z}dr \simeq -\frac{1}{2}r^2\left[\frac{\partial B_z}{\partial z}\right]_{r=0}, \\ B_r &= -\frac{1}{2}r\left[\frac{\partial B_z}{\partial z}\right]_{r=0}\end{aligned} \tag{A.10}$$

Las componentes de la fuerza de Lorentz son:

$$\begin{aligned} F_r &= -ev_\theta B_z, \\ F_\theta &= -e(v_z B_r - v_r B_z), \\ F_z &= ev_\theta B_r.\end{aligned} \tag{A.11}$$

El interés en este caso, va a estar en la componente longitudinal de la fuerza magnética, utilizando la ecuación (A.10), se obtiene:

$$F_z \;=\; \frac{1}{2} e v_\theta r \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Promediando ahora sobre un giro. Por simplicidad considerar que el electrón está girando alrededor del eje del campo magnético, es decir el eje z. Entonces $v_\theta = v_\perp$ es una constante durante un giro. Si $r = r_L$, el promedio de la fuerza magnética longitudinal es:

$$\overline{F}_z = -\frac{1}{2} e v_\perp r_L \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} e \frac{v_\perp^2}{\omega_c} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{m_e v_\perp^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{A.12}$$

Donde $r_L = v_\perp/\omega_c$ es el radio de Larmor, y ω_c es la frecuencia ciclotrónica del electrón. Definiendo el momento magnético asociado al giro del electrón se tiene:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{m v_\perp^2}{B}. \tag{A.13}$$

Entonces la ec (A.12) se puede escribir como:

$$\overline{F}_z = -\mu \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \tag{A.14}$$

Este es un ejemplo específico de la fuerza sobre una partícula diamagnética.

REFERENCIAS

[1] A.A. Kolomenskii and A.N. Levedek, *Sov. Phys. Dokl.*, **7**, 492 (1962).

[2] K.S Golovanivsky, “Autoresonant acceleration of electrons at nonlinear ECR in a magnetic field which is smoothly growing in time”.*Phys. Scr.* **22**, 126 (1980).

[3] O.Gal, “GYRAC: A compact, cyclic electron accelerator ”, *IEEE Trans.Plasma Sci.,* **17**, 622 (1989).

[4] V. D. Dugar-Zhabon, A. Martinez and Anatoly M. Umnov “Simulacion de aceleración de electrones por la onda TE_{113} de 2.45 GHz ”, *Revista Colombiana de Física*, **p 858-861**, 38 (2006).

[5] V. D. Dugar-Zhabon and E. A. Orozco. “Cyclotron spatial Autoresonance acceleration model ”. *Phys. Rev. ST. Accel. Beams.* **12**, 041301 (2009).

[6] V. D. Dugar-Zhabon, E. A. Orozco and Anatoly M. Umnov.“Modeling of electron cyclotron resonance acceleration in a stationary inhomogeneous magnetic field ”. *Phys. Rev. ST. Accel. Beams.* **11**, 041302 (2008).

[7] R. Shpitalnik, C. Cohen, F. Dothan and L. Friedland. “Autoresonance microwave accelerator ”. *J. Appl. Phys.* **70**, 1101, (1991).

[8] C. K. Birdsall and A. B. Langdon, “Plasma Physics Via Computer Simulation ”, **p. 356**, (Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing, 1991).

[9] W. Greiner., “Classical Electrodynamics ”, **p. 358**, (Springer-Verlag,1998).

[10] Francis F. Chen., “Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion ”, **p. 30**, (Plenum Press New york and London,1984).