UN ESTUDIO SISTEMÁTICO DEL *TEOREMA DE TYCHONOFF*

BRAYAN GERSAIN QUINTANILLA GONZALEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2016

UN ESTUDIO SISTEMÁTICO DEL *TEOREMA DE TYCHONOFF*

BRAYAN GERSAIN QUINTANILLA GONZALEZ

Propuesta de trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Directora:
Ph.D. SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2016

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco a Dios por todas las bendiciones que brinda a mi y mi familia.

Agradezco a mis padres Marco Horacio Quintanilla Cala y Cenaida Gonzalez Gallegos por todas sus enseñanzas, consejos y apoyo, soy su reflejo y todo lo que soy es por ustedes, gracias por permitir que esto sea realidad y espero que sirva de ejemplo para mis hermanos.

Quiero agradecer especialmente a la profesora Sonia, por toda su dedicación, esfuerzo y empeño en este trabajo, fue enriquecedor lo que aprendí bajo su dirección y espero poder seguir aprendiendo mucho más de su parte.

Jasneidy, agradezco infinitamente tu compañia en todo este tiempo, tus consejos, tu palabras de aliento, son tantas cosas las que te agradezco. Ésta etapa de nuestras vidas la culminamos juntos y espero que podamos seguir compartiendo mucho más tiempo y poder celebrar más logros; eres una bendición para mi.

Agradezco también a Luis Fernando Silva y Daniel Blanco, dos grandes amigos de ya bastantes años que se sienten igual de felices a mi por poder culminar este logro.

Finalmente agradezco a mi alma mater, la UIS, a todos los profesores de la escuela de matemáticas, a todos esos amigos y colegas que hice en la universidad, en especial Jorge López, Jackson y Yeyo Guevara, Mayer Palacios, Andrea Quintero, Ruben Castellanos...

ÍNDICE GENERAL

TITULO: UN ESTUDIO SISTEMÁTICO DEL TEOREMA DE TYCHONOFF [1]

AUTOR: BRAYAN GERSAIN QUINTANILLA GONZALEZ [2]

PALABRAS CLAVES: Teorema de Tychonoff; Teorema de Tychonoff equivalente al axioma de elección; Teorema de los productos conexos; Compacto; Conexo.

RESUMEN

El objetivo central de este trabajo es realizar un estudio sistemático del teorema de Tychonoff, analizando distintas demostraciones del teorema, que surgieron al pasar el tiempo, y mostrando además su equivalencia con el axioma de elección.

Presentamos distintas demostraciones del teorema objeto de estudio de nuestro trabajo. Dichas demostraciones hacen uso de distintas "herramientas". Hacemos además un análisis a la publicación de J. L. Kelley [5], en la que "demuestra" la equivalencia del teorema de Tychonoff y el axioma de elección. Kelley comete un pequeño error en su prueba, el cuál es mencionado en [7], pero hasta el año 2003, Sangho Kum [6] lo corrige y publica.

Por otra parte, encontramos el artículo [10] de J. A. Pérez, en el cual el autor pretende demostrar que el teorema de los productos conexos, es equivalente al teorema de Tychonoff y por tanto al axioma de elección. Sin embargo al estudiar dicho artículo encontramos un error en la demostración del teorema principal. En este último capítulo presentamos un resumen de lo ocurrido en torno a esta situación.

Esperamos que este trabajo de tesis sea de interés y utilidad para estudiantes de matemáticas, de licenciatura en matemáticas y en general para cualquier lector interesado en el tema.

[1] Proyecto de grado

[2] FACULTAD DE CIENCIAS, ESCUELA DE MATEMÁTICAS.
DIRECTORA: Ph. D. SONIA MARLENI SABOGAL PEDRAZA

TITLE: A SYSTEMATIC STUDY OF THE TYCHONOFF THEOREM [3]

AUTHOR: BRAYAN GERSAIN QUINTANILLA GONZALEZ [4]

KEYWORDS: Tychonoff's Theorem; Tychonoff's theorem equivalent to the axiom of choice; Theorem of connected products; Compact; Connected.

ABSTRACT

The central objective of this work is to perform a systematic study of Tychonoff's theorem, analyzing different proofs of the theorem, which emerged over time, and also showing its equivalence to the axiom of choice.

We present different demonstrations of the theorem object of study of our work. These demonstrations make use of different " tools ". We also analyze the publication of J. L. Kelley [5], in which it "demonstrates" the equivalence of Tychonoff's theorem and the axiom of choice. Kelley makes a small mistake in his test, which is mentioned in [7], but until the year 2003, Sangho Kum [6] corrects and publishes.

On the other hand, we find the article [10] of J. A. Pérez, in which the author intends to show that the theorem of connected products is equivalent to Tychonoff's theorem and hence to the axiom of choice. However when studying this article we find an error in the proof of the main theorem. In this last chapter we present a summary of what happened around this situation.

We hope that this thesis will be of interest and useful to students of mathematics, bachelors in mathematics and in general for any reader interested in the subject.

[3]Degree project

[4]SCIENCE FACULTY, MATHEMATICS SCHOOL.
ADVISOR: Ph. D. Sonia Marleni Sabogal Pedraza

INTRODUCCIÓN

El teorema de Tychonoff, establece que el producto de espacios topológicos compactos, es compacto. Este teorema es considerado por muchos matemáticos, el teorema más importante de la topología general, afirmación que indudablemente se debe, en gran parte, a su equivalencia con el axioma de elección establecida por J. L. Kelley en 1950 [5], axioma que su vez se presenta en diversas formas equivalentes (lema de Zorn, teorema de Zermelo, principio maximal de Hausdorff, principio de buena ordenación de Zermelo, entre otros), y es fundamental en la demostración de grandes teoremas de la matemática como el teorema de Hahn-Banach, en la demostración de que todo espacio vectorial tiene una base, el teorema de categorías de Baire sobre espacios métricos completos, en la demostración de que todo espacio de Tychonoff tiene una compactificación de Stone-$\check{C}$ech, por citar solo algunos ejemplos.

La idea de realizar este trabajo surgió al finalizar un curso de topología, pues no teníamos aún las herramientas necesarias para poder comprender la demostración del Teorema de Tychonoff, ya que la prueba que podríamos haber realizado no era nada fácil ni intuitiva, pero estudiando nuevos conceptos de la topología (propiedad de la intersección finita, filtros, ultrafiltros, redes, ultraredes, entre otros), nos pudimos dar cuenta de que existen demostraciones de este teorema sumamente sencillas y elegantes, usando herramientas que no se alcanzan a estudiar en un primer curso de topología. Todo esto, sumado a la importancia de dicho teorema, nos llevó a plantear la realización de este trabajo

La primera demostración del teorema de Tychonoff, dada por Andrei Nikoláyevich Tychonoff en 1930 [12] se hizo para potencias del intervalo cerrado unitario $[0, 1]$, y fue hasta 1937 que Eduar $\check{C}$ech generalizó este teorema [3].
En el libro de texto de James R. Munkres [8], se da una prueba utilizando la propiedad

de la intersección finita, y esta prueba es una reelaboración de la prueba de Cartan-Bourbaki [2] que no usa el lenguaje de filtros.
En 1992, Paul Chernoff realiza una demostración usando el concepto de redes, pero no redes universales [4].

El objetivo central de este trabajo es realizar un estudio sistemático del teorema de Tychonoff, analizando distintas demostraciones del teorema, que surgieron al pasar el tiempo, y mostrando además su equivalencia con el axioma de elección. Hemos dividido nuestro trabajo en cuatro capítulos: en el primero, titulado: "Preliminares" se hace una recopilación de los conceptos y resultados conocidos, que se necesitarán para el desarrollo de los capítulos posteriores.

En el segundo capítulo que titulamos "Cuatro demostraciones del teorema de Tychonoff" y que constituye el capítulo central del trabajo, presentamos distintas demostraciones del teorema objeto de estudio de nuestro trabajo. Dichas demostraciones hacen uso de distintas "herramientas" y depende del lector escoger su favorita. Presentamos una demostración vía ultrafiltros y otra vía ultraredes, que resultan sumamente sencillas. Además una que nos llamó la atención, realizada por Paul R. Chernoff [4], que utiliza el concepto de red pero no ultrared.

En el tercer capítulo que titulamos "El Teorema de Tychonoff es equivalente al Axioma de Elección" hacemos un análisis a la famosa publicación de John L. Kelley [5], en la que "demuestra" la equivalencia del axioma de elección y el teorema de Tychonoff.
J. L. Kelley comete un pequeño error en su prueba, el cuál es mencionado en [7], pero solo hasta el año 2003, Sangho Kum [6] lo corrige y publica, quedando plenamente establecida dicha equivalencia.

Finalmente el capítulo cuatro titulado "Teorema de los productos conexos vs. Teorema de Tychonoff" ha sido incluido, porque en algún momento de nuestra búsqueda, encontramos el artículo [10] de J. A. Pérez, en el cual el autor pretende demostrar que el teorema de los productos conexos, (esto es: el producto de espacios conexos, es conexo), es equivalente al teorema de Tychonoff y por tanto al axioma de elección. Sin embargo al estudiar dicho artículo encontramos un error en la demostración del teorema principal. En este último capítulo presentamos un resumen de lo ocurrido en torno a esta situación, finalizando con la pregunta de si el resultado de J. A. Pérez es o no válido.

Esperamos que este trabajo de tesis sea de interés y utilidad para estudiantes de matemáticas, de licenciatura en matemáticas y en general para cualquier lector interesado en el tema.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se establecen algunos conceptos y resultados conocidos, que se necesitarán para el desarrollo de los capítulos posteriores. Dichos conceptos y resultados han sido tomados de [1], [8], [9], [13] y [14], de modo que las demostraciones que no incluimos se pueden encontrar en dichas referencias.

1.1. AXIOMA DE ELECCIÓN

El siguiente axioma es asumido por la gran mayoría de los matemáticos cuando lo necesitan, para gran disgusto de unos pocos. Presentamos dos formas equivalentes:

Axioma de elección. 1. *Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia indexada de conjuntos no vacíos, existe una función $f\colon \Lambda \to \bigcup A_\lambda$ tal que $f(\lambda) \in A_\lambda$, para cada $\lambda \in \Lambda$.*

2. *Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de conjuntos no vacíos, existe un conjunto $B \subset \bigcup A_\lambda$ tal que $B \bigcap A_\lambda$ tiene exactamente un elemento para cada $\lambda \in \Lambda$.*

En otras palabras: dada cualquier colección de conjuntos, sin importar lo grande que sea, podemos escoger un elemento de cada conjunto de la colección. Lo que molesta a algunas personas es que afirma la existencia de un conjunto (B *en* 2) sin dar suficiente información para determinar dicho conjunto de forma única (mediante la aplicación de un número finito de reglas), y es el único axioma formal de la teoría de conjuntos que hace esto. Por esta razón se acostumbra a mencionar el axioma de elección cada vez que se usa. No es necesario utilizarlo si el número de conjuntos es finito. En particular, si A es un conjunto no vacío, la afirmación “elegir $a \in A$” no necesita el uso del axioma de elección.

También se sabe que el axioma de elección es independiente de los otros axiomas de la teoría de conjuntos (es decir que el axioma y su negación pueden ser asumidos consistentemente). Además goza de la condición de ser aceptado en las mentes de la mayoría de los matemáticos modernos, es decir, la intuición de casi todos los matemáticos es que el axioma de elección debe ser asumido sin duda, donde sea necesario.

Definición 1.1.1. *Decimos que una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos es de* ***cáracter finito*** *si, y sólo si, cada subconjunto finito de un elemento de $\mathcal{F}$ es también un elemento de $\mathcal{F}$, y además, cada conjunto S pertenece a $\mathcal{F}$, si cada uno de los subconjuntos finitos de S pertenecen a $\mathcal{F}$.*

Definición 1.1.2. *Dada una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto X, decimos que:*

1. *$\mathcal{R}$ es reflexiva, si para todo $x \in X$, $x\mathcal{R}x$.*

2. *$\mathcal{R}$ es simétrica, si para todo $x, y \in X$ tales que $x\mathcal{R}y$, implica que $y\mathcal{R}x$.*

3. *$\mathcal{R}$ es antisimétrica, si para todo $x, y \in X$ tales que $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}x$, implica que $x = y$.*

4. *$\mathcal{R}$ es transitiva, si para todo $x, y, z \in X$ tales que $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$, implica que $x\mathcal{R}z$.*

Una relación $\mathcal{R}$ en X se denomina un ***orden parcial*** *(o simplemente* ***relación de orden****), si $\mathcal{R}$ es reflexia, antisimétrica y transitiva.*
Si un conjunto X está dotado de una relación de orden $\mathcal{R}$, decimos que X es un conjunto ***parcialmente ordenado*** *y se denota $(X, \mathcal{R})$.*

Definición 1.1.3. *Un conjunto* ***totalmente ordenado*** *(o simplemente conjunto* ***linealmente ordenado****) es un conjunto parcialmente ordenado $(X, \mathcal{R})$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$, se tiene que $x\mathcal{R}y$ o $y\mathcal{R}x$. Es decir, en un conjunto totalmente ordenado todos sus elementos son comparables bajo la relación de orden $\mathcal{R}$.*
Si $(X, \mathcal{R})$ es totalmente ordenado, la relación $\mathcal{R}$ se denomina de orden total.

Definición 1.1.4. *Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $A \subseteq X$.*

1. *Diremos que x_0 es el elemento* ***mínimo*** *(****primer elemento*** *o* ***menor elemento****) de X, si para cada $x \in X$ se verifica que $x_0 \leq x$. Análogamente, x_0 es el elemento* ***máximo*** *(****último elemento*** *o* ***mayor elemento****) de X, si para cada $x \in X$ se tiene que $x \leq x_0$.*

2. *Un elemento $c \in X$ es una* ***cota inferior*** *de A si $c \leq a$ para todo $a \in A$. Si existe una cota inferior para A, se dice que A es* ***acotado inferiormente***. *La máxima cota inferior (si existe) es denominada* ***ínfimo*** *de A. Por otra parte, un elemento $c \in X$ es una* ***cota superior*** *de A si $a \leq c$ para todo $a \in A$. Si existe una cota superior para A, se dice que A es* ***acotado superiormente***. *La mínima cota superior (si existe) se denomina* ***supremo*** *de A.*

3. *Diremos que A es una* ***cadena*** *en X, si A es totalmente ordenado con la relación de orden heredada de X.*

Definición 1.1.5. *Una relacion de orden total $\mathcal{R}$ en un conjunto X se dice* ***buen orden*** *si cada subconjunto no vacío A de X tiene un elemento mínimo.*

Mostraremos ahora algunas formas alternativas del axioma de elección.

Teorema 1.1.1. *Los siguientes afirmaciones son todas equivalentes:*

1. *(Axioma de elección) Si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos, existe un conjunto $B \subset \bigcup A_\lambda$ tal que $B \bigcap A_\lambda$ tiene exactamente un elemento para cada $\lambda \in \Lambda$.*

2. *(Lema de Zorn) Si cada cadena (conjunto linealmente ordenado) en un conjunto A no vacío ordenado pacialmente tiene una cota superior, entonces A tiene un elemento maximal.*

3. *(El principio del maximal de Hausdorff) Toda cadena en un conjunto parcialmente ordenado está contenida en alguna cadena maximal de dicho conjunto.*

4. *Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia indexada no vacía de conjuntos no vacíos, entonces el producto cartesiano $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es distinto de vacío.*

5. *(Teorema de Zermelo) Todo conjunto no vacío puede ser bien ordenado.*

6. *(Lema de Tukey) Cada familia no vacía de conjuntos de cáracter finito tiene un elemento maximal.*

Al igual que con el axioma de elección, es costumbre mencionar alguno de ellos donde quiera que se utilice. No se dará aquí la prueba de las equivalencias anteriores; se pueden encontrar en cualquier texto estándar de teoría de conjuntos.

Hagamos un último comentario sobre el axioma de elección aunque ya antes se mencionó algo al respecto. Existen dos versiones de este axioma. Una podría denominarse **axioma de elección finito** el cual asegura que dada una colección finita $\mathcal{A}$ de conjuntos disjuntos no vacíos, existe un conjunto $\mathcal{C}$ formado exactamente por un elemento, de cada elemento de $\mathcal{A}$. Se necesita esta forma débil del axioma de elección todo el tiempo. Ningún matemático tiene problema con el axioma de elección finito, dicho de otra forma, nadie tiene escrúpulos sobre una demostración que necesita sólo finitas elecciones arbitrarias.

La versión más fuerte del axioma de elección, la que se aplica a una familia arbitraria $\mathcal{A}$ de conjuntos no vacíos, es la que se denomina propiamente "el axioma de elección". Cuando un matemático escribe "esta demostración depende del axioma de elección", se refiere invariablemente a esta forma más fuerte del axioma.

Definición 1.1.6. *Una familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X tiene la **propiedad de la intersección finita** (**PIF**) si y sólo si, la intersección de cualquier subcolección finita de C es no vacía.*

Lema 1.1.1. *Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de X verificando la propiedad de la intersección finita. Entonces existe una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X con la propiedad de la intersección finita tal que $\mathcal{D}$ contiene a $\mathcal{A}$. Además, ninguna colección de subconjuntos de X verificando dicha propiedad contiene a $\mathcal{D}$ propiamente.*

Diremos que una colección $\mathcal{D}$ que satisface la conclusión del lema anterior es **maximal** con respecto a la propiedad de la intersección finita.

Lema 1.1.2. *Sea X un conjunto y $\mathcal{D}$ una colección de subconjuntos de X que es maximal con respecto a la propiedad de la intersección finita. Entonces:*

1. *Cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{D}$ es un elemento de $\mathcal{D}$.*
2. *Si A es un subconjunto de X que interseca a cada elemento de $\mathcal{D}$, entonces A es un elemento de $\mathcal{D}$.*

1.2. TOPOLOGÍA PRODUCTO

Las nociones y resultados preliminares de esta sección han sido tomadas de [8] y las demostraciones que omitimos también se pueden encontrar en dicha referencia.

Definición 1.2.1. *Sea* $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *una familia indexada de conjuntos. El* ***producto cartesiano*** *de esta familia indexada es el conjunto:*

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \{x\colon \Lambda \to \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \mid x(\alpha) \in X_\alpha, para\ cada\ \alpha \in \Lambda\}.$$

Si α es un elemento de Λ, lo denotamos por x_α en lugar de $\mathbf{x}(\alpha)$; lo llamaremos la $\alpha - \acute{e}sima$ **coordenada**, y a menudo la denotaremos mediante el símbolo $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.

Si $X_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces se garantiza que $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \neq \emptyset$ por el axioma de elección ($Teorema$ 1,1,1); por otro lado, si X_α es igual a X para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ será denotado simplemente por X^Λ que por definición representa la familia de funciones de Λ en X.

Mostraremos ahora la definición de las funciones proyecciones, las cuales son sumamente importantes para definir la topología producto.

Definición 1.2.2. *Para cada* $\beta \in \Lambda$*, la función* $\pi_\beta\colon \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\beta$ *definida por* $\pi_\beta(x) = x_\beta$*, es llamada la* ***función proyección*** *de* $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *sobre* X_β*.*

Ahora queremos definir una topología sobre el producto cartesiano. Para ello consideremos en primer lugar los productos cartesianos

$$X_1 \times \cdots \times X_n \quad y \quad X_1 \times X_2 \times \cdots$$

donde cada X_i es un espacio topológico. Existen dos métodos posibles para proceder. Uno es tomar como base todos los conjuntos de la forma $U_1 \times \cdots \times U_n$ en el primer caso, y de la forma $U_1 \times U_2 \times \cdots$ en el segundo caso, donde U_i es un conjunto abierto de X_i para cada i. Este procedimiento efectivamente define una topología sobre el producto cartesiano que llamaremos **topología caja**.

Otra forma de hacerlo es tomar como subbase todos los conjuntos de la forma $\pi_i^{-1}(U_i)$, donde i es cualquier índice y U_i es un conjunto abierto de X_i, esta topología se denomina **topología producto**.

¿En qué se diferencian estas topologías? Considere el típico elemento básico de B para la segunda topología. Es una intersección finita de elementos de la subbase $\pi_i^{-1}(U_i)$, digamos para $i = i_1, \cdots, i_k$. Entonces, un punto x pertenece a B si, y sólo si, $\pi_i(x)$ pertenece a U_i para $i = i_1, \cdots, i_k$; no existe restricción alguna sobre $\pi_i(x)$ para los otros valores de i.

Se sigue que estas dos topologías coinciden para el producto cartesiano finito y difieren para el producto infinito, caso en el cual la topología producto es menos fina que la topología caja.

Algunas veces utilizaremos la "notación upla" para los elementos de X^Λ, y otras veces usaremos notación funcional, dependiendo de la que consideremos más conveniente.

A continuación se generaliza la definición de topología caja y topología producto dada en la página anterior.

Definición 1.2.3. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia indexada de espacios topológicos. Tomemos como base para una topología sobre el espacio producto $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ la colección de todos los conjuntos de la forma $\prod_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ donde U_α es abierto en X_α, para cada $\alpha \in \Lambda$. La topología generada por esta base se denomina **topología caja**.*

Definición 1.2.4. *Denotemos por $\mathcal{S}_\beta$ a la colección*

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ es abierto en } X_\beta\},$$

y denotemos por $\mathcal{S}$ a la unión de esas colecciones,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta\in\Lambda} \mathcal{S}_\beta.$$

*La topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ se denomina **topología producto**.*

Teorema 1.2.1. *(Comparación de las topologías por cajas y producto).*
La topología cajas sobre $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$, donde U_α es abierto en X_α para cada α. La topología producto sobre $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ tiene como base a todos los conjuntos de la forma $\prod_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$, donde U_α es abierto en X_α para cada α y U_α es igual a X_α excepto para un número finito de valores α.

Recalcamos que dos cosas están inmediatamente claras. En primer lugar, para productos finitos, las dos topologías son, la misma. En segundo lugar, la topología caja es, en general, estrictamente más fina que la topología producto. En adelante cuando se mencione el espacio producto $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, se entenderá que se está tomando la topología producto.

1.3. FILTROS

Una de las demostraciones del *Teorema de Tychonoff* que presentaremos en el próximo capítulo, hace uso del concepto de ultrafiltro. En esta sección establecemos las definiciones y resultados relativos a filtros y ultrafiltros, que se necesitarán para una cabal comprensión de dicha demostración. Estas nociones preliminares han sido tomadas de [9], [13], [14] y las demostraciones que omitimos también se pueden encontrar en esas referencias.

Definición 1.3.1. *Sea X un conjunto. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(X)$ se dice un* ***filtro*** *sobre X, si cumple las siguientes propiedades:*

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ *y* $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

2. *Si* $F \in \mathcal{F}$ *y* $F \subset G$, *entonces* $G \in \mathcal{F}$.

3. *Si* $F, G \in \mathcal{F}$ *entonces* $F \bigcap G \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 1.3.1. *Sea X un espacio topológico. El conjunto $\mathcal{V}_x$ de todas las vecindades de un punto $x \in X$, es un filtro sobre X.*

Ejemplo 1.3.2. *Si X es un conjunto infinito, $\mathcal{F}_{cof} = \{F \subset X : X \setminus F \ es\ finito\}$ es el* ***filtro de complementos finitos*** *sobre X.*

Definición 1.3.2. *Dados dos filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ sobre el mismo conjunto X, se dice que $\mathcal{F}$ es* ***más fino*** *que $\mathcal{G}$ (o que $\mathcal{G}$ es* ***menos fino*** *que $\mathcal{F}$) si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ es más fino que $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$ se dice que $\mathcal{F}$ es* ***estrictamente más fino*** *que $\mathcal{G}$.*

Tal como sucede con una topología sobre un conjunto X, es posible generar un filtro sobre X si se conoce una base de filtro, concepto que definimos a continuación.

Definición 1.3.3. *Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{B}$ es* ***base*** *de filtro sobre X si:*

1. $\mathcal{B} \neq \emptyset$ *y* $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

2. *Si* $B_1,\ B_2 \in \mathcal{B}$ *entonces existe* $B_3 \in \mathcal{B}$ *tal que* $B_3 \subset B_1 \bigcap B_2$.

Ejemplo 1.3.3. *Sea X un conjunto, entonces todo filtro sobre X es una base de filtro sobre X.*

Ejemplo 1.3.4. *Si $\mathcal{V}_x$ es el filtro de vecindades de un punto x en un espacio topológico X, todo sistema fundamental de vecindades de x constituye una base de $\mathcal{V}_x$.*

Dada una base de filtro $\mathcal{B}$ sobre X, no es díficil demostrar que la familia

$$< \mathcal{B} >= \{F \subset X : B \subset F \ para\ algún\ B \in \mathcal{B}\}$$

es un filtro sobre X y lo llamaremos el **filtro generado** por la base $\mathcal{B}$.
Ahora definiremos la noción de convergencia y punto de acumulación de un filtro.

Definición 1.3.4. 1. *Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico X se dice que* ***converge*** *a $x \in X$ y se escribe $\mathcal{F} \to x$, si $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{F}$, esto es, si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de vecindades de x.*

2. *Decimos que $\mathcal{F}$ tiene a x como* ***punto de acumulación****, si cada $F \in \mathcal{F}$ se interseca con cada $V \in \mathcal{V}_x$.*

3. *Una base de filtro $\mathcal{B}$* ***converge*** *a x, si cada $V \in \mathcal{V}_x$ contiene algún $B \in \mathcal{B}$ (es decir si el $filtro$ generado por $\mathcal{B}$ converge a x).*

4. *Una base de filtro $\mathcal{B}$ tiene a x como* ***punto de acumulación****, si cada $V \in \mathcal{V}_x$ se interseca con $B \in \mathcal{B}$ (es decir si el filtro generado por $\mathcal{B}$ tiene a x como punto de acumulación).*

Ejemplo 1.3.5. 1. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces el filtro $\mathcal{V}_x$ converge a x.*

2. *Sea (X, τ) el espacio topológico indiscreto. Entonces todo filtro sobre X converge a cualquier punto del espacio, pues la única vecindad de cualquier punto de X es el propio espacio X y X está en todo filtro.*

3. *Sean X un conjunto infinito dotado de la topología de complementos finitos, entonces $\mathcal{F}_{cof}$ el filtro de complementos finitos converge a cualquier punto del espacio.*

La colección de todos los filtros definidos sobre un conjunto no vacío X es un conjunto parcialmente ordenado por la relación de inclusión ($\subseteq$). Los filtros maximales sobre un conjunto X reciben el nombre de ultrafiltros y en adelante trabajaremos con ellos, pues su manejo es mucho más sencillo que el de los filtros y además se demostrará su existencia utilizando el lema de Zorn.

Definición 1.3.5. *Un **ultrafiltro** sobre un conjunto X es un filtro $\mathcal{U}$ sobre X tal que no existe ningún filtro sobre X estrictamente más fino que $\mathcal{U}$.*

Ejemplo 1.3.6. *Sea X un conjunto, $x \in X$ y $\mathcal{U}_x = \{F \subset X : \ x \in F\}$, entonces $\mathcal{U}_x$ es un ultrafiltro sobre X, llamado **ultrafiltro principal** generado por x.*

Proposición 1.3.1. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre un conjunto X, entonces para todo subconjunto K de X, $K \in \mathcal{F}$ o $X \setminus K \in \mathcal{F}$, si y sólo si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.*

Proposición 1.3.2. *Sean X un conjunto y $\mathfrak{C} = \{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de filtros sobre X. Si para cualesquiera $\mathcal{F}_1, \ \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{C}$ tenemos que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ o $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ (esto es, si $\mathfrak{C}$ es una cadena), entonces $\bigcup \mathfrak{C}$ es un filtro.*

Proposición 1.3.3. *Sean X, Y conjuntos y $f \colon X \to Y$ función:*

a. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, entonces $f(\mathcal{F}) = \{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtro sobre Y.

b. Si f es sobreyectiva y $\mathcal{F}$ es filtro sobre X, entonces $f(\mathcal{F})$ es un filtro sobre Y.

c. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre X, entonces $f(\mathcal{U}) = \{f(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es una base de ultrafiltro sobre Y.

d. Si f es sobreyectiva y $\mathcal{U}$ es ultrafiltro sobre X, entonces $f(\mathcal{U})$ es un ultrafiltro sobre Y.

Demostración. *a. Claramente $f(\mathcal{F})$ es una familia de subconjuntos de Y. Ahora, como $\mathcal{F} \neq \emptyset$, existe $F \in \mathcal{F}$, entonces $f(F) \in f(\mathcal{F})$ y así $f(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Además, para todo $F \in \mathcal{F}$, $F \neq \emptyset$ entonces $f(F) \neq \emptyset$ por ser f función, de este modo $\emptyset \notin f(F)$. Sean ahora $f(F_1), \ f(F_2) \in f(F)$, es decir $F_1, \ F_2 \in \mathcal{F}$. Tenemos que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ y además:*

$$F_1 \cap F_2 \subseteq f^{-1}(f(F_1 \cap F_2)) \subseteq f^{-1}(f(F_1) \cap f(F_2)).$$

Entonces $f^{-1}(f(F_1) \cap f(F_2)) \in \mathcal{F}$, *de donde:*

$$f(F_1) \cap f(F_2) = f(f^{-1}(f(F_1) \cap f(F_2))) \in f(\mathcal{F})$$

De esta manera $f(\mathcal{F})$ *es una base de filtro sobre* Y. *Es decir, la familia* $\mathcal{G} = \{G \subseteq Y : f(F) \subseteq G$ *para algún* $F \in \mathcal{F}\}$ *es un filtro sobre* Y.

b. *Por (a), solo faltaría probar que si* $F \in \mathcal{F}$ *y* $A \subseteq Y$ *tal que* $f(F) \subseteq A$, *entonces* $A \in f(\mathcal{F})$. *Veamos que* $A = f(F \cup f^{-1}(A))$, *en efecto:*

   sea $a \in A$. *Como* f *es sobre, existe* $x \in X$ *tal que* $f(x) = a$, *entonces* $x \in f^{-1}(a) \subseteq f^{-1}(A) \subseteq F \cup f^{-1}(A)$, *de ahí que* $x \in F \cup f^{-1}(A)$, *luego* $f(x) \in f(F \cup f^{-1}(A))$ *o lo que es lo mismo* $a \in f(F \cup f^{-1}(A))$ *y así* $A \subseteq f(F \cup f^{-1}(A))$. *Recíprocamente sea* $y = f(x)$ *donde* $x \in F \cup f^{-1}(A)$, *esto es* $y \in f(F \cup f^{-1}(A))$, *entonces si* $x \in F$ *tenemos que* $y = f(x) \in f(F) \subseteq A$, *de donde* $y \in A$. *Por otro lado, si* $x \in f^{-1}(A)$, *entonces* $y = f(x) \in A$, *luego* $f(F \cup f^{-1}(A)) \subseteq A$, *por tanto* $A = f(F \cup f^{-1}(A))$, *pero* $F \subseteq F \cup f^{-1}(A)$ *y sabemos que* $F \in \mathcal{F}$, *entonces* $F \cup f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, *luego* $A \in f(\mathcal{F})$.

c. *Sea* $\mathcal{U}$ *ultrafiltro sobre* X, *por (a) sabemos que:*

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= < f(\mathcal{U}) > \\ &= < \{f(U) : U \in \mathcal{U}\} > \\ &= \{G \subseteq Y : f(U) \subseteq G \text{ para algun } U \in \mathcal{U}\} \end{aligned}$$

   es un filtro sobre Y, *veamos que* $\mathcal{G}$ *es ultrafiltro.*
   Sea $G \subseteq Y$, *entonces* $f^{-1}(G) \subseteq X$. *Como* $\mathcal{U}$ *es ultrafiltro sobre* X, $f^{-1}(G) \in \mathcal{U}$, *ó,* $X \setminus f^{-1}(G) \in \mathcal{U}$ *Proposición* (1.3.1).
   Si $f^{-1}(G) \in \mathcal{U}$, *entonces* $f(f^{-1}(G)) \in f(\mathcal{U})$, *pero* $f(f^{-1}(G)) \subseteq G$, *de ahí que* $f(f^{-1}(G)) = f(U)$ *para algún* $U \in \mathcal{U}$, *luego* $f(U) \subseteq G$ *para* $U \in \mathcal{U}$, *lo que implica que* $G \in \mathcal{G}$.
   Ahora, si $X \setminus f^{-1}(G) \in \mathcal{U}$, *entonces* $f(X \setminus f^{-1}(G)) \in f(\mathcal{U})$, *pero sabemos que* $f(X \setminus f^{-1}(G)) = f(X) \setminus G \subseteq Y \setminus G$, *con lo que concluimos que* $Y \setminus G \in \mathcal{G}$.

d. *Ya sabemos que* $f(\mathcal{U})$ *es una base de ultrafiltro, es decir:*

$$\mathcal{G} =< f(\mathcal{U}) >= \{G \subseteq Y : f(U) \subseteq G \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\}$$

es un ultrafiltro sobre Y. Veamos que $\mathcal{G} = f(\mathcal{U})$

Claramente $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{G}$, recíprocamente, sea $G \in \mathcal{G}$, esto es, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f(U) \subseteq G$, veamos que $G = f(U \cup f^{-1}(G))$.

Sea $y \in G$, como f es sobre, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, entonces $x \in f^{-1}(G) \subseteq U \cup f^{-1}(G)$, de ahí que, $y = f(x) \in f(U \cup f^{-1}(G))$, así, $G \subseteq f(U \cup f^{-1}(G))$. Recíprocamente, sea $f(x)$, con $x \in U \cup f^{-1}(G)$.

Si $x \in U$, entonces $f(x) \in f(U) \subseteq G$, luego $f(x) \in G$ y si $x \in f^{-1}(G)$, entonces $f(x) \in G$, así podemos concluir que $f(U \cup f^{-1}(G)) \subseteq G$.

Luego $G = f(U \cup f^{-1}(G))$, $U \subseteq U \cup f^{-1}(G)$, $U \in \mathcal{U}$, y $U \cup f^{-1}(G) \in \mathcal{U}$, entonces $G = f(U \cup f^{-1}(G)) \in f(\mathcal{U})$. Por tanto $f(\mathcal{U}) = \mathcal{G}$ de modo que $f(\mathcal{U})$ es ultrafiltro sobre Y, como se quería probar.

□

Como las funciones proyecciones π_β (*Definición* 1,2,2) son sobreyectivas, tenemos:

Corolario 1.3.1. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $\mathcal{P} = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$, con X_α conjunto para cada α, entonces $\pi_\alpha(\mathcal{U}) = \{\pi_\alpha(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es un ultrafiltro en X_α, para cada $\alpha \in \Lambda$.*

Teorema 1.3.1. *Sean X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. Entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$.*

Demostración. *Sea $\mathcal{C} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G}\ es\ un\ filtro\ sobre\ X\ y\ \mathcal{F} \subset \mathcal{G}\}$. Se tiene que $\mathcal{C}$ está parcialmente ordenado por el orden dado por $\subset$. En efecto,*

1. *Para todo $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$, tenemos que $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$.*
2. *Si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ y $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_3$ por la transitividad de la inclusión de conjuntos, tenemos que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_3$.*
3. *Si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ y $\mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_1$ entonces $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$*

Mostraremos ahora que toda cadena en $\mathcal{C}$ está acotada superiormente. Para ello, sea $\mathfrak{C} = \{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \subset \mathcal{C}$ una cadena, donde Λ es un conjunto arbitrario de índices. Definamos a $\mathcal{U}'$ como sigue

$$\mathcal{U}' = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{G}_\alpha = \bigcup \mathfrak{C}$$

Tenemos que $\mathcal{U}'$ es un filtro. En efecto, sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathfrak{C}$. Entonces, al ser $\mathfrak{C}$ una cadena, o $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ o $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Luego por (Proposición 1,3,2) tenemos que $\mathcal{U}' = \bigcup \mathfrak{C}$ es un filtro.

Por la definición de $\mathcal{U}'$, tenemos que $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{U}'$ para toda $\mathcal{G}_\alpha \in \{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Es decir, $\mathcal{U}'$ es una cota superior de $\{\mathcal{G}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Como la cadena $\mathfrak{C}$ fue arbitraria, podemos aplicar el Lema de Zorn (Teorema 1,1,1) y decir que $\mathcal{C}$ tiene un elemento maximal. Sea $\mathcal{U}$ un elemento maximal de $\mathcal{C}$. Ya que $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{U}$ es filtro, además $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Ahora sólo queda mostrar que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro. En efecto, sea $\mathcal{G}$ un filtro tal que $\mathcal{U} \subset \mathcal{G}$.
Como $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, entonces por transitividad obtenemos que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, de aquí se sigue que $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{U}$ es un elemento maximal de $\mathcal{C}$ con el orden $\subset$, entonces $\mathcal{G} \subset \mathcal{U}$.
Con lo anterior concluimos que $\mathcal{G} = \mathcal{U}$, lo cual prueba que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.

□

1.4. REDES

La segunda y tercera demostración que presentaremos del *Teorema de Tychonoff* hace uso del concepto de ultrared y red respectivamente. A continuación los preliminares relativos a redes y ultraredes que se necesitarán en dicha demostración. De nuevo estos preliminares pueden consultarse en [1] y [13].

Definición 1.4.1. *Un conjunto Λ es un **conjunto dirigido** si existe una relación $\leq$ sobre Λ que satisface:*

i. $\lambda \leq \lambda$, *para cada* $\lambda \in \Lambda$.

ii. *Si* $\lambda_1 \leq \lambda_2$ *y* $\lambda_2 \leq \lambda_3$ *entonces* $\lambda_1 \leq \lambda_3$.

iii. *Si* $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \Lambda$ *entonces existe algún* $\lambda_3 \in \Lambda$ *con* $\lambda_1 \leq \lambda_3,\ \lambda_2 \leq \lambda_3$.

En este caso también se dice que $\leq$ **dirige** Λ.

Definición 1.4.2. *Una **red** en un conjunto X es una función $\rho\colon \Lambda \to X$, donde Λ es un conjunto dirigido.*

El punto $\rho(\lambda)$ es usualmente denotado como x_λ, y se suele hablar de la red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ o sencillamente la red (x_λ).

Ejemplo 1.4.1. *El conjunto $\mathbb{N}$ de enteros positivos es un conjunto dirigido cuando tomamos el orden usual, así cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una red.*

Presentamos ahora la definición de subred, pero antes consideremos dos conjuntos dirigidos Λ_1, Λ_2. La función $\phi\colon \Lambda_2 \to \Lambda_1$ es **cofinal** siempre que, dado $\alpha \in \Lambda_1$, existe $\beta \in \Lambda_2$ tal que, para cada $\beta' \geq \beta$, tenemos $\phi(\beta') \geq \alpha$.

Definición 1.4.3. *Sean Λ_1, Λ_2 conjuntos dirigdos y $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}$ una red en X basada sobre Λ_1. Si $\phi\colon \Lambda_2 \to \Lambda_1$ es una función cofinal, entonces la composición $x \circ \phi = \{x_{\phi(\beta)}\}_{\beta\in\Lambda_2}$ es una red basada sobre Λ_2. Decimos que $x \circ \phi$ es una subred de la red x.*

Ahora definiremos la noción de convergencia y punto de acumulación de una red.

Definición 1.4.4. *Sea (x_λ) una red en un espacio X. Entonces (x_λ) **converge** a $x \in X$, se escribe $(x_\lambda) \to x$ si para cada vecindad U de x, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq \lambda_0$ implica $x_\lambda \in U$. Esto se expresa diciendo que (x_λ) está **residualmente** (o **eventualmente**) en U.*

Definición 1.4.5. *Se dice (x_λ) tiene a x como **punto de acumulación** (o **punto de adherencia**) si para cada vecindad U de x y para cada $\lambda_0 \in \Lambda$ existe $\lambda \geq \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in U$. Esto se expresa diciendo que (x_λ) está **cofinalmente** (o **frecuentemente**) en cada vecindad de x.*

Ejemplo 1.4.2. *Sea X un espacio topológico, $x \in X$ y Λ una base de vecindades de $x \in X$. Entonces la relación de orden $U_1 \leq U_2$ si y sólo si $U_2 \subset U_1$ dirige Λ. Por lo tanto si escogemos x_U para cada $U \in \Lambda$, obtenemos una red (x_U) en X. Además, $x_U \to x$. En efecto:*
Para cualquier vecindad V de x, tenemos que $U_0 \subset V$ para algún $U_0 \in \Lambda$. Entonces $U \geq U_0$ implica que $U \subset U_0$, así $x_U \in U \subset V$.

Los puntos de adherencia de un conjunto en un espacio topológico, en general, no se pueden caracterizar usando convergencia de sucesiones, por ejemplo, en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definamos:

$$E =\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \ f(x) \in \{0,1\} \ y \ f(x) = 1 \ para \ todo \ x \in \mathbb{R}, \ excepto \ para \ un \ número \ finito \ de \ puntos\}$$

si tomamos $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definida por $g(x) = 0$, para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces $g \in \overline{E}$; pero si usando convergencia de redes, como veremos ($Teorema$ 1,4,1).

Teorema 1.4.1. *Si $E \subset X$, entonces $x \in \overline{E}$ si y sólo si existe una red (x_λ) en E tal que $(x_\lambda) \longrightarrow x$.*

Proposición 1.4.1. *Un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ si y sólo si, existe una subred de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ que converge al punto x.*

La noción de continuidad en el contexto general de los espacios topológicos, se puede caracterizar en términos de convergencia de redes, como se establece en el siguiente teorema:

Teorema 1.4.2. *Sean X, Y espacios topológicos, $x_0 \in X$ y sea $f\colon X \to Y$ función. Entonces f es continua en x_0 si y sólo si cada vez que $(x_\lambda) \longrightarrow x_0$ en X, entonces $f(x_\lambda) \longrightarrow f(x_0)$ en Y.*

Como las funciones proyecciones $\pi_\alpha\colon \prod X_\alpha \to X_\alpha$ son continuas, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.4.3. *Una red (x_λ) en un producto $\mathcal{P} = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ converge a x si y solo si para cada $\alpha \in \Lambda$, $\pi_\alpha(x_\lambda) \longrightarrow \pi_\alpha(x)$ en X_α.*

Definición 1.4.6. *Una red (x_λ) en un conjunto X es una **ultrared** ó **red universal** si para cada subconjunto E de X, (x_λ) está residualmente en E ó esta residualmente en $X \setminus E$.*

Teorema 1.4.4. *Si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una ultrared en X y $f\colon X \to Y$ es una función, entonces $(f(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ es una ultrared en Y.*

1.5. RELACIÓN ENTRE FILTROS Y REDES

En esta sección se muestra que toda red genera un filtro y recíprocamente. Además la interrelación: convergencia de filtros vs convergencia de redes.

Definición 1.5.1. *Si (x_λ) es una red en X, el filtro generado por la base de filtro $\mathcal{C}$ que consiste de todos los conjuntos $B_{\lambda_0} = \{x_\lambda | \lambda \geq \lambda_0\}$, $\lambda_0 \in \Lambda$, es llamado el **filtro generado** por (x_λ)*

No es díficil probar que la familia $\{B_{\lambda_0}\}_{\lambda_0\in\Lambda}$ es en efecto una base de filtro.

Definición 1.5.2. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X, sea $\Lambda_{\mathcal{F}} = \{(x, F) | x \in F \in \mathcal{F}\}$. Entonces $\Lambda_{\mathcal{F}}$ es dirigido por la relación $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2)$ si y sólo si $F_2 \subset F_1$, así la función $\rho\colon \Lambda_{\mathcal{F}} \to X$ definida por $\rho(x, F) = x$ es una red en X, llamada la **red basada sobre** $\mathcal{F}$.*

Mostraremos que $\Lambda_{\mathcal{F}}$ es en efecto un conjunto dirigido:

1. Sea $(x, F) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$. Como $F \subset F$, entonces $(x, F) \leq (x, F)$ (Reflexiva).

2. Sean $(x_1, F_1), (x_2, F_2), (x_3, F_3) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ tales que $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2)$ y $(x_2, F_2) \leq (x_3, F_3)$, entonces $F_2 \subset F_1$ y $F_3 \subset F_2$, de donde $F_3 \subset F_1$, luego $(x_1, F_1) \leq (x_3, F_3)$ (Transitiva).

3. Sean $(x_1, F_1), (x_2, F_2) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$, tome $F = F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ y sea $x \in F$, luego $(x_1, F_1) \leq (x, F)$ y $(x_2, F_2) \leq (x, F)$ pues $F = F_1 \cap F_2 \subset F_1$ y $F = F_1 \cap F_2 \subset F_2$.

Luego $\Lambda_{\mathcal{F}}$ es un conjunto dirigido.

Teorema 1.5.1. *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y (x_λ) una red en X. Entonces:*

a. $\mathcal{F}$ converge a $x \in X$ si y sólo si la red basada sobre $\mathcal{F}$ converge a x.

b. La red (x_λ) converge a $x \in X$ si y sólo si el filtro generado por (x_λ) converge a x.

1.6. ESPACIOS COMPACTOS

Definición 1.6.1. *Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un espacio topológico X es un* ***cubrimiento*** *de X, si $\bigcup \mathcal{C} = X$. Si cada elemento de $\mathcal{C}$ es un conjunto abierto en X se dice que $\mathcal{C}$ es un* ***cubrimiento abierto*** *de X.*
Si $\mathcal{C}$ es un cubrimiento de X, un ***subcubrimiento*** *de X es una subcolección $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ tal que $\bigcup \mathcal{A} = X$. De manera natural se dirá que un subcubrimiento $\mathcal{A}$ es* ***finito*** *si tiene un número finito de elementos.*

Definición 1.6.2. *Un espacio topológico X es* ***compacto*** *si todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento finito.*

Mostraremos algunos ejemplos clásicos de espacios compactos.

Ejemplo 1.6.1. *1. $[0, 1]$ es compacto y en general $[a, b]$ como subespacio de $\mathbb{R}$.*

2. (X, τ) donde X es un conjunto finito.

3. (X, τ) donde τ tiene un número finito de abiertos.

4. (X, τ_{cof}) donde τ_{cof} es la topología de complementos finitos.

Proposición 1.6.1. *Si X es un espacio compacto y $K \subset X$ es cerrado, entonces K es compacto.*

Teorema 1.6.1. *Sean X, Y espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función continua y sobreyectiva. Si X es compacto entonces Y es compacto.*

Corolario 1.6.1. *Ser compacto es una propiedad topológica. (invariante topológico).*

El siguiente teorema es fundamental para el próximo capítulo y por tal motivo se presenta su demostración detallada.

Teorema 1.6.2. *Para un espacio topológico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) X es compacto.

b) Cada familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos cerrados de X con PIF tiene intersección no vacía.

c) Cada familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X con PIF, satisface $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} \overline{C} \neq \emptyset$.

d) Cada filtro en X tiene un punto de acumulación.

e) Cada red en X tiene un punto de acumulación.

f) Cada ultrared en X converge.

g) Cada ultrafiltro en X converge.

Demostración. *a) $\Rightarrow$ b) Se demostrará por contradicción; estos es, supongamos que $\{\mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X con PIF que tiene intersección vacía, entonces $\{X \setminus \mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un cubrimiento abierto de X, pues:*

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{C}_\alpha = \emptyset$$

implica

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{C}_\alpha = X$$

Pero por las leyes de Morgan tenemos:

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{C}_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (X \setminus \mathcal{C}_\alpha)$$

Luego:

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (X \setminus \mathcal{C}_\alpha)$$

donde $X \setminus \mathcal{C}_\alpha$ *es abierto, para cada* $\alpha \in \Lambda$*; por la compacidad de* X*, existe un subcubrimiento abierto finito* $\{X \setminus \mathcal{C}_{\alpha_1}, X \setminus \mathcal{C}_{\alpha_2}, \cdots, X \setminus \mathcal{C}_{\alpha_n}\}$ *donde* $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{C}_{\alpha_i} = \emptyset$*, así* $\{\mathcal{C}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *no tiene* PIF.

$\rightarrow\leftarrow$

b) $\Rightarrow$ *c) Sea* $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ *una familia de subconjuntos de* X *con* PIF*. Para cada subfamilia finita* $\{C_{\alpha_1}, \cdots, C_{\alpha_n}\}$ *de* $\mathcal{C}$ *se tiene* $\bigcap_{i=1}^{n} C_{\alpha_i} \neq \emptyset$*. Como* $C_{\alpha_i} \subset \overline{C_{\alpha_i}}$ *para cada* $i = 1, \cdots, n$*, entonces* $\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} C_{\alpha_i} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \overline{C_{\alpha_i}}$*, de modo que la familia* $\mathcal{C}' = \{\overline{C_\alpha}\}_{\alpha \in \Lambda}$ *es una familia de subconjuntos cerrados de* X *con la* PIF*, luego, por hipótesis* $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha \neq \emptyset$ *como se quería ver.*

c) $\Rightarrow$ *d) Si* $\mathcal{F}$ *es un filtro sobre* X*, entonces* $\{\overline{F}\}_{F \in \mathcal{F}}$ *es una familia de subconjuntos de* X *con PIF. Así, por hipótesis existe un punto* $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$*, entonces* $\mathcal{F}$ *tiene un punto de clausura.*

d) $\Rightarrow$ *e) Sea* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *una red en* X *y consideremos la base de filtro* $\mathcal{C}$*,* $\mathcal{C} = \{B_{\lambda_0}\}_{\lambda_0 \in \Lambda}$ *donde* $B_{\lambda_0} = \{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0\}$*. El filtro* $\mathcal{F}$ *generado por la base de filtro* $\mathcal{C}$ *esta dado por:*

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid \exists \lambda_0 \in \Lambda, B_{\lambda_0} \subseteq F\}$$

Por hipótesis, existe x *que es punto de clausura de* $\mathcal{F}$*, veamos que* x *es punto de clausura de* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$*. En efecto, sea* $U \in \mathcal{V}_x$ *y* $\lambda_0 \in \Lambda$*,* $B_{\lambda_0} \in \mathcal{F}$*, se tiene que* $U \cap B_{\lambda_0} \neq \emptyset$*. Sea* $z \in U \cap B_{\lambda_0}$*, como* $z \in B_{\lambda_0}$*, existe* $\lambda \geq \lambda_0$ *donde* $z = x_\lambda \in U$*, entonces,* x *es punto de clausura de* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$*.*

e) $\Rightarrow$ *f) Sea* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *una ultrared en* X*, por hipótesis, existe* $x \in X$ *tal que* x *es punto de adherencia de* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$*. Veamos que* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *converge a* x*.*
Sea $U \in \mathcal{V}_x$*. Debemos probar que existe* $\lambda_0 \in \Lambda$ *tal que si* $\lambda \geq \lambda_0$ *entonces* $x_\lambda \in U$*.*
Como $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *es ultrared, para* $U \subseteq X$ *tenemos que* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *está residualmente en* U

ó en $X \setminus U$.

- ***Caso 1*** $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *está residualmente en* U*, entonces existe* $\lambda_0 \in \Lambda$ *tal que si* $\lambda \geq \lambda_0$ *implica que* $x_\lambda \in U$.

- ***Caso 2*** $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *está residualmente en* $X \setminus U$*, entonces existe* $\lambda_0 \in \Lambda$ *tal que si* $\lambda \geq \lambda_0$ *implica que* $x_\lambda \in X\setminus U$*, de donde* $x_\lambda \notin U$*, pero por hipótesis, existe* $\lambda \geq \lambda_0$ *tal que* $x_\lambda \in U$. $\rightarrow\leftarrow$

f) $\Rightarrow$ *g) Sea* $\mathcal{F}$ *un ultrafiltro sobre* X *y tomemos* $\Lambda_{\mathcal{F}} = \{(x, F) : x \in F \in \mathcal{F}\}$*, sabemos que* $\Lambda_{\mathcal{F}}$ *esta dirigido por la relación* $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2) \Leftrightarrow F_2 \subset F_1$*. Así la función:*

$$\begin{aligned} \rho\colon \Lambda_{\mathcal{F}} &\rightarrow X \\ (x, F) &\rightarrow \rho(x, F) = x \end{aligned}$$

Es una red en X*, llamada la red basada sobre* $\mathcal{F}$.
Ahora probaremos que ρ *es una ultrared, esto es, si* $E \subseteq X$*, se probará que* ρ *esta residualmente en* E *ó en* $X \setminus E$*. Como* $\mathcal{F}$ *es ultrafiltro,* $E \in \mathcal{F}$ *o* $X \setminus E \in \mathcal{F}$ *(Proposición 1,3,1).*

1. *Supongamos que* $E \in \mathcal{F}$*, sea* $x \in E \in \mathcal{F}$*, entonces* $(x, E) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ *y sea* $(y, F) \geq (x, E)$ *con* $(y, F) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$*, como* $F \subset E$*, entonces* $\rho(y, F) = y \in E$

2. *Supongamos que* $X \setminus E \in \mathcal{F}$*, sea* $x \in X \setminus E \in \mathcal{F}$*, entonces* $(x, X \setminus E) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ *y sea* $(y, F) \geq (x, X \setminus E)$ *con* $(y, F) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$*, como* $F \subset X \setminus E$*, entonces* $\rho(y, F) = y \in X \setminus E$.

De donde ρ *es una ultrared en* X*. Probemos ahora que* $\mathcal{F}$ *converge a* $x \in X$*. Por hipótesis* ρ *converge a* $x \in X$*, sea* $U \in \mathcal{V}_x$*, entonces existe* $(y, F) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ *tal que si* $(x_1, F_1) \geq (y, F)$ *entonces* $x_1 = \rho(x_1, F_1) \in U$*, veamos que* $F \subset U$*, sea* $x_1 \in F$*,* $(x_1, F) \in \Lambda_{\mathcal{F}}$ *y además* $(x_1, F) \geq (y, F)$ *con esto tenemos que* $x_1 = \rho(x_1, F) \in U$ *luego* $F \subset U$*, así* $U \in \mathcal{F}$ *y por tanto* $\mathcal{F}$ *converge a* x.

g) ⇒ a) Se demostrará por contradicción, esto es, supongamos que X no es compacto. Entonces existe un cubrimiento abierto de X, $\mathcal{O} = \{O_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ que no admite un subcubrimiento finito. Consideremos la familia

$$\mathcal{C} = \{X \setminus O_1 \bigcup \cdots \bigcup O_n : \ n \in \mathbb{N}\}$$

cada $O_i \in \mathcal{O}$, para $i \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{O}$ no admite un subcubrimiento finito, entonces $X \not\subset (O_1 \bigcup \cdots \bigcup O_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $O_i \in \mathcal{O}$, $i = 1, \cdots n$. De ahí tenemos que $X \setminus (O_1 \bigcup \cdots \bigcup O_n) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde los elementos de $\mathcal{C}$ son no vacíos, entonces $\mathcal{C}$ es una base de filtro sobre X. Sea:

$$\mathcal{F} =< \mathcal{C} >= \{A \subset X : \text{ existe } C \in \mathcal{C} \text{ con } C \subset A\}$$

es un filtro sobre X. Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro sobre X, tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Obsérvese que $\mathcal{U}$ existe por el axioma de elección [1]. Por hipótesis existe $x \in X$ tal que $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}$. Como $X \subset \bigcup_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha$, existe $O_\alpha \in \mathcal{O}$ tal que $x \in O_\alpha$, luego $O_\alpha \in \mathcal{V}_x$, de donde $O_\alpha \in \mathcal{U}$; por otra parte $X \setminus O_\alpha \in \mathcal{C} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ entonces $X \setminus O_\alpha \in \mathcal{U}$.

$\rightarrow\leftarrow$

□

1.7. ESPACIOS CONEXOS

Para finalizar este capítulo de preliminares, incluimos esta sección sobre conexidad, pues la necesitaremos en el último capítulo del trabajo. Las definiciones, ejemplos, proposiciones y teoremas son clásicos y han sido tomados de [1].

Definición 1.7.1. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es **disconexo** (o **no conexo**) si existen U, V abiertos no vacíos de X, tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. En este caso $\{U, V\}$ lo llamaremos una **disconexión** de X. Si X no es disconexo, se dice **conexo**.*

Observación. *La definición anterior, también se puede presentar con cerrados en lugar de abiertos.*

[1] Recuerde el Teorema (1.3.1) y su demostración.

Ejemplo 1.7.1. *El espacio trivial* $(X, \{\emptyset, X\})$ *es conexo. No hay abiertos, disjuntos, no vacíos.*

Proposición 1.7.1. *Sea* $f\colon X \to Y$ *una función continua y sobreyectiva. Si* X *es conexo entonces* Y *es conexo.*

Corolario 1.7.1. *Ser conexo es una propiedad topológica. (invariante topológico).*

Ejemplo 1.7.2. $[0,1]$ *como subespacio de* $\mathbb{R}$ *es conexo, así todo intervalo de la forma* $[a,b]$ *es conexo, pues* $[a,b] \cong [0,1]$.

Teorema 1.7.1. *Sea* X *espacio topológico y* $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *familia de subespacios topológicos conexos de* X*, tal que* $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha \neq \emptyset$*, entonces* $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in\Lambda} C_\alpha$ *es conexo.*

Teorema 1.7.2. *Sea* X *espacio topológico y* $A \subset X$*,* A *conexo. Si* $B \subset X$*,* $A \subset B \subset \overline{A}$*, entonces* B *es conexo.*

CAPÍTULO 2

CUATRO DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE TYCHONOFF

En este capítulo se presentarán distintas demostraciones de uno de los teoremas más importantes de la topología conjuntista, el cual lleva por nombre el *Teorema de Tychonoff*. La prueba original fue presentada por Andréi Nikoláyevich Tichonoff, quien la publicó en 1930 [12] para potencias del intervalo $[0, 1]$ y sólo hasta el año de 1937 que Eduar Čech generalizó este teorema. En este capítulo presentaremos algunas de las demostraciones que han surgido con el paso del tiempo.

Teorema 2.0.1. *(Tychonoff)*
Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *una familia de espacios topológicos no vacíos y* $\mathcal{P} = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *su producto. Entonces* $\mathcal{P}$ *es compacto si y sólo si para cada* $\alpha \in \Lambda$*,* X_α *es compacto.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ *Supongamos que* $\mathcal{P}$ *es compacto, como las funciones proyecciones* $\pi_\alpha \colon \mathcal{P} \to X_\alpha$ *son continuas y sobreyectivas, se tiene que* X_α *es compacto, para cada* $\alpha \in \Lambda$ *(Teorema 1,6,1).*

Dado que la implicación: $\mathcal{P}$ compacto $\Rightarrow$ X_α compacto, para cada $\alpha \in \Lambda$ se puede probar usando las proyecciones π_α y el Teorema 1.6.1, en adelante solo mostraremos la prueba de la implicación recíproca, esto es:

$$X_\alpha \text{ compacto, para cada } \alpha \in \Lambda \;\Rightarrow\; \mathcal{P} \text{ compacto } (\star)$$

usando en cada prueba una “herramienta” diferente, en virtud del Teorema 1.6.2.

2.1. DEMOSTRACIÓN USANDO ULTRAFILTROS

La primera prueba que mostraremos, usa la caracterización de la compacidad en términos de ultrafiltros; esta prueba se debe a Henri Cartan quien la presentó en el año de 1937 y actualmente se encuentra en la mayoría de textos de topología.

Demostración. *Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$, X_α es compacto y demostremos que $\mathcal{P}$ es compacto, probando que todo ultrafiltro en $\mathcal{P}$ es convergente (Teorema 1,6,2)*[1].
Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $\mathcal{P}$, entonces para cada $\alpha \in \Lambda$ arbitrario pero fijo, tenemos que $\pi_\alpha(\mathcal{U}) = \{\pi_\alpha(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es un ultrafiltro en X_α (Proposición 1,3,3).
Por otra parte, por hipótesis, para toda $\alpha \in \Lambda$ existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $\pi_\alpha(\mathcal{U}) \to x_\alpha$.
Definamos:

$$\begin{aligned} z\colon \Lambda &\to \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \\ \alpha &\to z(\alpha) = x_\alpha \end{aligned}$$

Notemos que $z \in \mathcal{P}$, demostraremos que $\mathcal{U} \to z$, es decir, que toda vecindad de z pertenece a $\mathcal{U}$.
Sea V_z una vecindad de z, entonces $z \in \pi_{\alpha_1}^{-1}(A_{\alpha_1}) \bigcap \cdots \bigcap \pi_{\alpha_n}^{-1}(A_{\alpha_n}) \subseteq V_z$, para algunos A_{α_i} abiertos de X_{α_i}, con $i \in \{1, \cdots, n\}$.
Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, tenemos que $x_{\alpha_i} = \pi_{\alpha_i}(z) \in A_{\alpha_i}$, con A_{α_i} abierto de X_{α_i}, luego $A_{\alpha_i} \in \pi_{\alpha_i}(\mathcal{U})$, pues A_{α_i} es vecindad de x_{α_i} y $\pi_{\alpha_i}(\mathcal{U}) \to x_{\alpha_i}$.
Entonces existe $U_{\alpha_i} \in \mathcal{U}$ tal que $A_{\alpha_i} = \pi_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})$, luego $U_{\alpha_i} \subseteq \pi_{\alpha_i}^{-1}(\pi_{\alpha_i}(U_{\alpha_i})) = \pi_{\alpha_i}^{-1}(A_{\alpha_i})$ lo cual implica que $\pi_{\alpha_i}^{-1}(A_{\alpha_i}) \in \mathcal{U}$, pues $U_{\alpha_i} \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es filtro, esto para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$.
Tenemos que $\mathcal{U}$ es filtro, entonces $\pi_{\alpha_1}^{-1}(A_{\alpha_1}) \bigcap \cdots \bigcap \pi_{\alpha_n}^{-1}(A_{\alpha_n}) \in \mathcal{U}$, pero sabemos que $\pi_{\alpha_1}^{-1}(A_{\alpha_1}) \bigcap \cdots \bigcap \pi_{\alpha_n}^{-1}(A_{\alpha_n}) \subseteq V_z$, de donde tenemos que $V_z \in \mathcal{U}$, con lo que hemos probado que toda vecindad de z pertenece a $\mathcal{U}$, de modo que $\mathcal{U} \to z$ y así $\mathcal{P}$ es compacto.

□

[1] La demostración del Teorema (1.6.2), ($g \Rightarrow a$) hace uso del axioma de elección.

2.2. DEMOSTRACIÓN USANDO ULTRAREDES

A continuación mostraremos otra prueba de la implicación ($\star$) del Teorema de Tychonoff vía ultraredes o redes universales. Esta prueba fue dada por John Tukey quien la presentó en 1940 y la versión moderna, que es la que se incluye en este trabajo fue dada por John Kelley quien la presentó en 1950.

Demostración. *Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$, X_α es compacto y demostremos que $\mathcal{P}$ es compacto, probando que toda ultrared en $\mathcal{P}$ es convergente* $(Teorema\ 1{,}6{,}2)$[2]. *Sea $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega}$ una ultrared en $\mathcal{P}$, entonces para cada $\alpha \in \Lambda$ arbitrario pero fijo, tenemos que $(\pi_\alpha(x_\lambda))_{\lambda\in\Omega}$ es una ultrared en X_α $(Teorema\ 1{,}4{,}4)$.*
Por otra parte, por hipótesis, para toda $\alpha \in \Lambda$ existe $x_\alpha \in X_\alpha$ tal que $(\pi_\alpha(x_\lambda))_{\lambda\in\Omega} \to x_\alpha$. Definamos:

$$\begin{aligned} z\colon \Lambda &\to \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \\ \alpha &\to z(\alpha) = x_\alpha \end{aligned}$$

Notemos que $z \in \mathcal{P}$. De modo que $(Teorema\ 1{,}4{,}3)$, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Omega} \to z$ y así $\mathcal{P}$ es compacto.

$\square$

2.3. DEMOSTRACIÓN USANDO LA PIF

A continuación mostraremos otra prueba de la implicación ($\star$), la cual se expresa en términos de la propiedad de la intersección finita.

Demostración. *Supongamos que X_α es compacto para cada $\alpha \in \Lambda$ y demostremos que $\mathcal{P}$ es compacto. Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de $\mathcal{P}$ con la propiedad de la intersección finita, vamos a probar que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} \neq \emptyset$, para concluir la compacidad de $\mathcal{P}$.*
Elegimos una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de $\mathcal{P}$ tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ y $\mathcal{D}$ es maximal con respecto a la propiedad de la intersección finita, tal colección existe en virtud del axioma de elección $(Lema\ 1{,}1{,}1)$; será suficiente probar que $\bigcap_{D\in\mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset$.
Dado $\alpha \in \Lambda$, consideremos la colección $\{\pi_\alpha(D) : D \in \mathcal{D}\}$ de subconjuntos de X_α, es claro que esta colección tiene la propiedad de la intersección finita, pues $\mathcal{D}$ la tiene.

[2] Aquí se usó el axioma de elección.

la compacidad de cada X_α*, podemos elegir para cada* $\alpha \in \Lambda$ *un punto* $x_\alpha \in X_\alpha$ *tal que* $x_\alpha \in \bigcap_{D\in\mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)}$*. Sea* $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \mathcal{P}$*, demostremos que* $x \in \overline{D}$ *para cada* $D \in \mathcal{D}$*, con lo que terminará la prueba.*

Primero, veamos que si $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ *es un elemento cualquiera de la subbase para la topología producto en* $\mathcal{P}$ *conteniendo a* x*, entonces* $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ *intersecta a cada elemento de* $\mathcal{D}$*. El conjunto* U_β *es un entorno de* $x_\beta \in X_\beta$*, como* $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(D)}$ *entonces* $U_\beta \cap \pi_\beta(D) \neq \emptyset$*, entonces existe* $y \in D$ *tal que* $\pi_\beta(y) \in U_\beta \cap \pi_\beta(D)$ *de ahí que* $y \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap D$*.*
Se deduce de la parte (2, *Lema*1,1,2) *que cada elemento de la subbase que contiene* x *pertenece a* $\mathcal{D}$*, y se tiene entonces de la parte* (1, *Lema*1,1,2) *que cada elemento básico que contiene a* x *pertenece a* $\mathcal{D}$*. Como* $\mathcal{D}$ *tiene la propiedad de la intersección finita, cada elemento básico que contiene a* x *intersecta a cada elemento de* $\mathcal{D}$*, por tanto* $x \in \overline{D}$*, para cada* $D \in \mathcal{D}$*.*

$\square$

2.4. DEMOSTACIÓN USANDO REDES

A continuación mostraremos otra prueba de la implicación $(\star)$ del Teorema de Tychonoff vía redes, esta prueba se debe a Paul Chernoff [4] quien la presentó en 1992.

Demostración. *Recordemos que el producto* $\mathcal{P} = \prod_{i\in I} X_i$ *consiste de todas las funciones* f *definidas sobre el conjunto de índices* I*, tal que, para cada* $i \in I$*,* $f(i) \in X_i$*. Una vecindad básica* $\mathcal{N}$ *de* f *en la topología producto es determinada por un subconjunto finito* $F \subseteq I$*, junto con vencidades* U_j *de* $f(j)$ *en* X_j *para cada* $j \in F$*;* $\mathcal{N}$ *consiste de todos los* $h \in \mathcal{P}$ *tales que, para todo* $j \in F$*,* $h(j) \in U_j$*. Será conveniente decir que* $\mathcal{N}$ *tiene* ***soporte*** *sobre* F*, y se escribirá* $\mathcal{N} = \mathcal{N}\{U_j : j \in F\}$*.*
Por un miembro parcialmente definido g *del producto* $\mathcal{P}$ *nos referimos a una función* g *con dominio* $J \subseteq I$*, tal que, para todo* $i \in J$*,* $g(i) \in X_i$*. (Es decir,* $g \in \prod_{i\in J} X_i$*.)*
Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *una red en* $\mathcal{P}$*. Probemos que* $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *tiene un punto de acumulación para entonces usar el Teorema 1.6.2, (e).*
Supongamos que g*, con dominio* $J \subseteq I$*, es un miembro parcialmente definido de* $\mathcal{P}$*. Entonces decimos que* g *es un punto de acumulación parcial de la red dada, siempre que, dado* $\lambda \in A$*, para cada conjunto finito* $F \subseteq J$ *y cada vecindad básica* $\mathcal{N}\{U_j : j \in F\}$

de g en $\prod_{i\in J} X_i$, existe $\beta \in A$, $\beta \geq \alpha$, tal que, para todo $j \in F$, $f_\beta(j) \in U_j$. (En otras palabras, g es punto de acumulación en $\prod_{i\in J} X_i$ de la red $\{f_\alpha|_J : \alpha \in A\}$.) Si g tiene dominio $J = I$, entonces g es un punto de acumulación en $\mathcal{P}$ de la red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Nuestro objetivo es mostrar la existencia de ese tal g, usando el lema de Zorn.

Para este fin, sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los puntos de acumulación parcial de la red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Note que $\mathcal{C}$ es no vacío, pues la función $\emptyset \in \mathcal{C}$ ($\emptyset \subseteq J \times \bigcup_{i\in J} X_i$). $\mathcal{C}$ está ordenado parcialmente por la inclusión (extensión de funciones), esto es, $g_1 \subseteq g_2$ si el dominio de g_1 está contenido en el dominio de g_2, y g_2 coincide con g_1 en su dominio común.

Supongamos que $\mathcal{L} = \{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{C}$. Definamos $g_0 = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} g_\lambda$. Entonces g_0 es un miembro parcialmente definido de $\mathcal{P}$, porque cualesquiera dos miembros de $\mathcal{L}$ tienen su dominio en común. Mas aún $g_0 \in \mathcal{C}$, es decir, g_0 es un punto de acumulación parcial de la red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Esto es inmediato por el hecho de que cualquier vecindad básica de g_0 tiene soporte finito F, y así F esta contenido en el dominio de g_λ, para algún $\lambda \in \Lambda$, y este g_λ es un punto de clausura parcial. En consecuencia $g_0 \in \mathcal{C}$ y g_0 es un cota superior de $\mathcal{L}$. Así $\mathcal{C}$ satisface la hipótesis del lema de Zorn.

Por lo tanto $\mathcal{C}$ contiene un miembro maximal g. Afirmamos que el dominio J de g es todo I. Si este no es el caso podemos escoger $k \in I \setminus J$. Ahora g es un punto de acumulación en $\prod_{i\in J} X_i$ de la red $\{f_\alpha|_J\}_{\alpha\in A}$ y así g es el límite de alguna subred $\{f_{\phi(\beta)|_J}\}_{\beta\in B}$ (Proposición 1,4,1). Además, como X_k es compacto y no vacío, la red $\{f_{\phi(\beta)}(k)\}_{\beta\in B}$ tiene un punto de acumulación $p \in X_k$. Defina una función h con dominio $J \bigcup \{k\}$ con $h = g$ sobre J y $h(k) = p$. Entonces es claro que h es un punto de acumulación parcial de la red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, así que $h \in \mathcal{C}$ y h es estrictamente mayor que g. Esto contradice la maximalidad de g en $\mathcal{C}$. Por lo tanto el dominio de g es I, g es un punto de acumulación de la red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, y la demostración de que $\mathcal{P}$ es compacto esta terminada.

$\square$

Queremos resaltar aquí que en todas las pruebas presentadas de la implicación: X_α compacto, para cada $\alpha \in \Lambda \Rightarrow \mathcal{P}$ es compacto, se usa el axioma de elección.

Para terminar este capítulo incluimos una observación relacionada con la inquietud de, si el teorema de Tychonoff se obtendría también al cambiar la topología producto por la topología caja.

2.5. EJEMPLO

Si (X, τ) es un espacio topológico compacto y μ una topología sobre X menos fina que τ, entonces es inmediato que (X, μ) también es compacto. Lo dual no se cumple, es decir, si μ es más fina que τ, entonces (X, μ) no necesariamente es compacto. Dada una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de espacios topológicos, además de la topología producto sobre $\mathcal{P} = \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, es posible definir como ya se vió en la sección (1.2) otra topología que en principio puede parecer más natural y que consiste en tomar como abiertos básicos los subconjuntos de $\mathcal{P}$ que son producto de abiertos, esto es, conjuntos de la forma $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$, donde U_α es un abierto de X_α, para cada $\alpha \in \Lambda$.
Esta topología, que notaremos τ_c, recordemos que se llama la *topología caja* sobre $\mathcal{P}$, y claramente es más fina que la topología producto, (en el caso particular de un producto finito, es decir si Λ es finito, las dos topologías coinciden).
Una pregunta natural es si para el espacio $(\mathcal{P}, \tau_c)$ también se cumple el teorema de Tychonoff, es decir, ¿si cada espacio X_α es compacto, entonces $(\mathcal{P}, \tau_c)$ es compacto? En esta sección mostramos un ejemplo que permite concluir que la respuesta a esta pregunta es: "no necesariamente"

Afirmación. $([0,1]^{\mathbb{N}}, \tau_c)$ *no es compacto. Más generalmente tenemos la siguiente proposición.*

Proposición 2.5.1. *Si X_n es un espacio topológico T_1 [3], $|X_n| \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\left(\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n, \tau_c\right)$* ***no*** *es compacto. (Observe que cada X_n puede ser compacto)*

Demostración. *Probaremos que $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con la topología caja tiene un subespacio cerrado, infinito y discreto, de modo que F sería un subespacio cerrado pero no compacto y por tanto, (Proposición 1,6,1), $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ no puede ser compacto.*

[3] Recordemos que un espacio topológico X se dice T_1 si para todo par $x, y \in X$, $x \neq y$, existen abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \notin U$, $y \in V$, $x \notin V$, o, equivalentemente si los singletones $\{x\}$ son conjuntos cerrados.

Como $|X_n| \geq 2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, sean* $x_n, y_n \in X_n$*,* $x_n \neq y_n$*.*
Sea $F := \{x_1, y_1\} \times \{x_2, y_2\} \times \cdots \times \{x_n, y_n\} \times \cdots = \prod_{n\in\mathbb{N}} \{x_n, y_n\} \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$*.*

- *F es cerrado:*
  $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \setminus F = (X_1 \setminus \{x_1, y_1\}) \times (X_2 \setminus \{x_2, y_2\}) \times \cdots \times (X_n \setminus \{x_n, y_n\}) \times \cdots$
  Cada $X_n \setminus \{x_n, y_n\}$ *es abierto en* X_n*, pues* X_n *es* T_1 *y por tanto los "singletones" son cerrados, entonces* $\{x_n, y_n\}$ *es cerrado en* X_n*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*
  De esta forma $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \setminus F$ *es abierto en* τ_c*.*

- *Es claro que F es infinito.*
  $x \in F \leftrightarrow \ x = z_1 z_2 \cdots z_n \cdots$*, donde* $z_n \in \{x_n, y_n\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$*.*

- *F hereda la topología discreta.*
  Para cada n*, notemos* $x'_n = y_n$ *y* $y'_n = x_n$*. Sea* $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots) \in F$*, es decir* $z_n \in \{x_n, y_n\}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Entonces* $\{z\} = O \bigcap F$ *donde:*

  $$O := (X_1 \setminus \{z'_1\}) \times (X_2 \setminus \{z'_2\}) \times \cdots \times (X_n \setminus \{z'_n\}) \times \cdots$$

  que es un abierto de $\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, \tau_c\right)$*. De esta forma cada "singleton"* $\{z\}$ *de F es abierto de F, de modo que F es discreto, y por tanto no es compacto, como se quería probar.*

$\square$

CAPÍTULO 3

EL TEOREMA DE TYCHONOFF ES EQUIVALENTE AL AXIOMA DE ELECCIÓN

En este capítulo se presentará la demostración de la equivalencia entre el axioma de elección y el teorema de Tychonoff, la cual fue publicada originalmente por J. L. Kelley en 1950 [5]. Es importante anotar aquí que la demostración de Kelley tiene un error, el cual es mencionado en 1951 por J. Łoś y C. Ryll-Nardzewski [7] resaltando que es un error muy pequeño, fue solo hasta el año 2003 que S. Kum [6] corrige la prueba de Kelley, quedando entonces plenamente establecida esta importante equivalencia. A continuación se presenta un análisis de la prueba de J. L. Kelley con el objetivo de comprender el error que contiene dicha prueba. En la siguiente sección se presentará la demostración realizada por Sangho Kum.

3.1. ANÁLISIS DE LA PRUEBA DE J. L. KELLEY

J. L. Kelley "demuestra" que el Teorema de Tychonoff implica la siguiente forma del axioma de elección:

Si $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *es una familia indexada de conjuntos no vacíos, entonces el producto cartesiano* $\mathcal{P} = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \neq \emptyset$. (*Teorema* 1,1,1)

En su demostración, J. L. Kelley [5] adjunta un punto y a cada uno de los conjuntos

X_α, donde $y \notin X_\alpha$ (por ejemplo basta tomar $y = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$), definiendo $Y_\alpha = X_\alpha \bigcup \{y\}$ y para Y_α asigna la *topología de complementos finitos*,

$$\tau_\alpha = \{G_\alpha \subseteq Y_\alpha : \ Y_\alpha \setminus G_\alpha \ es\ un\ conjunto\ finito\} \bigcup \{\emptyset\}$$

Entonces es inmediato que cada espacio (Y_α, τ_α) es compacto, y por el Teorema de Tychonoff, el espacio $Y = \prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ también lo es.

Para cada $\alpha \in \Lambda$, sea $Z_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha) = X_\alpha \times \prod_{\eta\neq\alpha} Y_\eta$. Kelley afirmó que X_α es cerrrado en Y_α y por lo tanto Z_α es cerrado en Y, por otro lado, para cualquier subconjunto finito Ω de Λ, mostró que la intersección finita $\bigcap_{\alpha\in\Omega} Z_\alpha$ es distinta del vacío usando el axioma de elección caso finito, y de ahí por la propiedad de la intersección finita del espacio compacto Y, el conjunto $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} Z_\alpha = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es no vacío, como se quería.

El error que cometió Kelley en su prueba, fue afirmar que X_α es cerrado en Y_α y por tanto los razonamientos siguientes no serán validos.

Claramente X_α es abierto pero no necesariamente cerrado en Y_α, en efecto, si X_α fuera cerrado en Y_α, entonces $Y_\alpha \setminus X_\alpha = \{y\}$ es abierto en Y_α, de donde X_α sería un conjunto finito. Este no es el caso si X_α es un conjunto infinito.

Ahora mostraremos que Z_α no es cerrado en Y. En efecto, si Z_α fuera cerrado en Y, entonces $Y \setminus Z_\alpha = \{y\} \times \prod_{\eta\neq\alpha} Y_\eta$ es abierto en Y. Como cada Y_α contiene el elemento definido y, $Y \setminus Z_\alpha$ es no vacío. Así existe un número finito de subconjuntos abiertos no vacíos O_{α_i} en Y_{α_i} $(\alpha_i \in \Lambda,\ i = 1, \cdots n)$ tal que

$$O_{\alpha_1} \times \cdots \times O_{\alpha_n} \times \prod_{\eta\neq\alpha_i} Y_\eta \subseteq \{y\} \times \prod_{\eta\neq\alpha} Y_\eta$$

.

Entonces tenemos dos posibilidades:

- Caso 1. $\alpha = \alpha_i$ para algún i.
  Tenemos que $\emptyset \neq O_\alpha \subseteq \{y\}$, de ahí que $O_\alpha = \{y\}$. Como X_α no es cerrado pero si abierto en Y_α, $O_\alpha = \{y\} = Y_\alpha \setminus X_\alpha$ no es abierto en Y_α. Esto contradice el hecho que O_α es abierto en Y_α.

- Caso 2. $\alpha = \eta$ para algún $\eta \neq \alpha_i$, $i = 1, \cdots, n$.
  Entonces tenemos $Y_\alpha \subseteq \{y\}$, por tanto $Y_\alpha = \{y\}$. Así $X_\alpha = \emptyset$, lo que contradice que $X_\alpha \neq \emptyset$.

Claramente $Z_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha) = X_\alpha \times \prod_{\eta \neq \alpha} Y_\eta$ es abierto en Y. Esto completa nuestro análisis.

3.2. DEMOSTRACIÓN DE LA EQUIVALENCIA

Corregir el error cometido por J. L. Kelley es algo que no resulto díficil de hacer. Basta definir para cada conjunto $Y_\alpha = X_\alpha \cup \{y\}$, una topología τ_α tal que (Y_α, τ_α) resulte compacto y X_α cerrado, y después seguir el mismo razonamiento de J. L. Kelley. Quizá la topología τ_α más sencilla que cumple estas condiciones es $\tau_\alpha = \{\emptyset, \{y\}, Y_\alpha\}$, sin embargo Sangho Kum toma en su artículo $\tau_\alpha = \{\emptyset, \{y\}, X_\alpha, Y_\alpha\}$ que claramente también cumple las condiciones requeridas. Veamos entonces la demostración de Khum.

Teorema 3.2.1. *El axioma de elección es equivalente al teorema de Tychonoff.*

Demostración. ($\Rightarrow$) *Del capítulo anterior, tenemos que el axioma de elección implica el teorema de Tychonoff.*

($\Leftarrow$) *Se probará que si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia indexada de conjuntos no vacíos, entonces el producto cartesiano $\mathcal{P} = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \neq \emptyset$.*
Análogamente a la prueba de Kelley, empezaremos añadiendo un punto y a cada uno de los conjuntos X_α, donde $y \notin X_\alpha$ (por ejemplo basta tomar $y = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$), definiremos $Y_\alpha = X_\alpha \bigcup \{y\}$ y asignamos la topología $\tau_\alpha := \{\emptyset,\ \{y\},\ X_\alpha,\ Y_\alpha\}$.
Claramente el espacio topológico (Y_α, τ_α) es compacto, pues el número de todos los conjuntos abiertos es finito. Luego $Y = \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ es compacto, por el teorema de Tychonoff.
Note que X_α es cerrado en Y_α, por la forma como se definió la topología.

Así $Z_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha) = X_\alpha \times \prod_{\eta \neq \alpha} Y_\eta$ es cerrado en Y pues la proyección π_α es continua.
Ahora, para cualquier subconjunto finito $\Omega \subset \Lambda$ podemos escoger, por el axioma de elección, caso finito, $x_\alpha \in X_\alpha \neq \emptyset$ para $\alpha \in \Omega$ y $x_\eta = y$ para $\eta \in \Lambda \setminus \Omega$, entonces se define $z \in \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ por:

$$z_\alpha := \begin{cases} x_\alpha & si \quad \alpha \in \Omega \\ y & si \quad \alpha \in \Lambda \setminus \Omega \end{cases}$$

y tenemos:

$$z \in \bigcap_{\alpha\in\Omega} Z_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\Omega} \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha) = \prod_{\alpha\in\Omega} X_\alpha \times \prod_{\eta\in\Lambda\setminus\Omega} Y_\eta \neq \emptyset$$

Esto significa que la familia de subconjuntos cerrados $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *del espacio topológico compacto* $Y = \prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ *tiene la propiedad de la intersección finita (PIF), de donde toda la intersección:*

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} Z_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha) = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \neq \emptyset$$

lo cual prueba el axioma de elección. $\square$

CAPÍTULO 4

TEOREMA DE LOS PRODUCTOS CONEXOS VS. TEOREMA DE TYCHONOFF

En este capítulo se estudiará una publicación realizada por Juan Antonio Pérez en 2016 [10], cuyo objetivo principal es demostrar, como su título lo indica, que el *Teorema de Tychonoff* y el *Teorema de los productos conexos*, son equivalentes. Por supuesto este artículo nos interesó mucho dada su estrecha relación con el tema de nuestro trabajo. Sin embargo al estudiar el artículo en mención, encontramos un error en la demostración del teorema principal. De esta manera, este capítulo consta de dos secciones: en la primera abordaremos un teorema que se encuentra en la mayoría de libros de topología, al cual, J. A. Pérez ha decidido llamar "El teorema de los productos conexos" y su enunciado es análogo al del Teorema de Tychonoff, cambiando solo la compacidad por la conexidad. En la siguiente sección se mostrará el error en la demostración del teorema principal de la publicación de J. A. Pérez.

4.1. TEOREMA DE LOS PRODUCTOS CONEXOS

En esta sección se presentará la demostración del *Teorema de los productos conexos*, el cual afirma que el producto cartesiano de espacios conexos es conexo. En primer lugar se probará dicho resultado para un producto finito de espacios topológicos conexos y luego se aborda el caso general.

Teorema 4.1.1. *(Productos conexos)*
Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *una familia de espacios topológicos y* $\mathcal{P} = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *su producto. Entonces* $\mathcal{P}$ *es conexo si y solo si para cada* $\alpha \in \Lambda$, X_α *es conexo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) *Supongamos que* $\mathcal{P}$ *es conexo, como las funciones proyecciones* $\pi_\alpha \colon \mathcal{P} \to X_\alpha$ *son continuas y sobreyectivas, se tiene que* X_α *es conexo, para cada* $\alpha \in \Lambda$, *por* ($Proposición$ 1,7,1).

($\Leftarrow$) *Supongamos ahora que* X_α *es conexo, para cada* $\alpha \in \Lambda$ *y probemos que* $\mathcal{P}$ *es conexo. En efecto:*

i. *Veamos que el producto de dos espacios topológicos conexos, es conexo.*
Sean X, Y *espacios topológicos conexos. Si* $X = \emptyset$ *ó* $Y = \emptyset$ *entonces* $X \times Y = \emptyset$ *que es conexo. Si* X, Y *son no vacíos, sea* $b \in Y$. *Como* $X \times \{b\} \cong X$, *entonces* $X \times \{b\}$ *es conexo* ($Corolario$ 1,7,1). *Análogamente, para cada* $a \in X$, $\{a\} \times Y$ *es conexo.*
Además $(X \times \{b\}) \bigcap (\{a\} \times Y) \neq \emptyset$, *pues* $(a, b) \in (X \times \{b\}) \bigcap (\{a\} \times Y)$. *Así por* ($Teorema$ 1,7,1) *tenemos que* $Z_a := (X \times \{b\}) \bigcup (\{a\} \times Y)$ *es conexo, para cada* $a \in X$.
Nótese que $X \times Y = \bigcup_{a\in X} Z_a$, *donde* $X \times \{b\} \subseteq Z_a$, *para cada* $a \in X$. *Luego por teorema* 1,7,1, $X \times Y$ *es conexo. De lo anterior, es claro que, el producto de un conjunto finito de conexos es conexo.*

ii. *Supongamos que* X_α *es conexo, para cada* $\alpha \in \Lambda$ *y demostremos que* $\mathcal{P} = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ *es conexo.*
Si $\mathcal{P} = \emptyset$ *entonces es conexo. Si* $\mathcal{P} \neq \emptyset$ *sea* $x_0 = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in \mathcal{P}$. *Para cada conjunto finito* $\Omega \subset \Lambda$ *definamos:*

$$Y_\Omega := \{x \in \mathcal{P} : \pi_\alpha(x) = x_\alpha, \ para \ cada \ \alpha \notin \Omega\}$$

Es fácil ver que $Y_\Omega \cong \prod_{\alpha\in\Omega} X_\alpha \times \prod_{\alpha\notin\Omega} \{x_\alpha\} \cong \prod_{\alpha\in\Omega} X_\alpha$, *de donde* Y_Ω *es conexo por el ítem anterior.*
Nótese que $x_0 \in \bigcap\{Y_\Omega : \Omega \subset \Lambda, \ \Omega - finito\}$, *de donde por teorema* 1,7,1, $\bigcup\{Y_\Omega : \Omega \subset \Lambda, \ \Omega - finito\}$ *es conexo.*
Por otra parte, es claro que $\bigcup\{Y_\Omega : \Omega \subset \Lambda, \ \Omega - finito\} \subseteq \mathcal{P}$, *veamos ahora que*

$\mathcal{P} = \overline{\bigcup\{Y_\Omega : \Omega \subset \Lambda,\ \Omega - finito\}}$ para así terminar nuestra prueba ($Teorema$ 1,7,2). En efecto, sea $\Omega \subseteq \Lambda$ con $\Omega - finito$ y U_α abierto no vacío de X_α, para cada $\alpha \in \Omega$. El conjunto $\mathcal{U} = \bigcap_{\alpha \in \Omega} \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es un abierto básico de $\mathcal{P}$. Sea $z_\alpha \in U_\alpha$, para todo $\alpha \in \Omega$ y definamos $w = (w_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \mathcal{P}$ por:

$$w_\alpha := \begin{cases} z_\alpha & si \quad \alpha \in \Omega \\ x_\alpha & si \quad \alpha \in \Lambda \setminus \Omega \end{cases}$$

Claramente $w \in \mathcal{U}$ y $w \in Y_\Omega$; de ahí que $w \in \bigcup\{Y_\Omega : \Omega \subset \Lambda,\ \Omega - finito\}$. Así $\mathcal{U} \bigcap \bigcup\{Y_\Omega : \Omega \subset \Lambda,\ \Omega - finito\} \neq \emptyset$ y luego $\mathcal{P} = \overline{\bigcup\{Y_\Omega : \Omega \subset \Lambda,\ \Omega - finito\}}$ como se quería. □

Vale la pena anota aquí que en la demostración anterior, **no** se usa el axioma de elección.

4.2. ANÁLISIS DE LA DEMOSTRACIÓN DE J. A. PÉREZ

En su publicación [10] J. A. Pérez afirma que el teorema de los productos conexos es equivalente al axioma de elección, con lo que a su vez "demuestra", por transitividad, que el teorema de Tychonoff es equivalente con el teorema de los productos conexos. Mostraremos un análisis de la demostración de Pérez y luego un error en dicha demostración, con lo que quedará la pregunta de si esta equivalencia es en efecto verdadera.

J. A. Pérez quiso demostrar que el teorema de los productos conexos implica la siguiente forma del axioma de elección:

Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es una familia indexada de conjuntos no vacíos, entonces el producto cartesiano $\mathcal{P} = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \neq \emptyset$. ($Teorema$ 1,1,1).

En su demostración, J. A. Pérez [10] adjunta un punto y a cada uno de los conjuntos X_α, donde $y \notin X_\alpha$ (por ejemplo basta tomar $y = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$), definiendo para cada $\alpha \in \Lambda$, $Y_\alpha := X_\alpha \bigcup \{y\}$ y para Y_α asigna la topología $\tau_\alpha := \{\emptyset, \{y\}, X_\alpha, Y_\alpha\}$. Obsérvese que hasta aquí, J. A. Pérez sigue los mismos pasos de la demostración de S. Khum ($Teorema$ 3,2,1) . Entonces es inmediato que cada espacio (Y_α, τ_α) es un espacio topológico disconexo, pues

el par $(\{y\}, X_\alpha)$ es una disconexión de Y_α, y por el teorema de los conexos, $Y = \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha$ es disconexo.
Note que:

$$\mathcal{P} = \{x \in Y | \pi_\alpha(x) \neq y, \forall \alpha \in \Lambda\} = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \subseteq Y$$

$$\mathcal{P}^c = \{x \in Y | \pi_\alpha(x) = y, \ para\ alg\acute{u}n\ \alpha \in \Lambda\} \subseteq Y$$

Supongamos que $\mathcal{P} = \emptyset$, la idea es demostrar que $\mathcal{P}^c = Y \setminus \mathcal{P}$ es conexo, con lo que quedará establecido que $\mathcal{P}^c \neq Y$, lo cual contradice $\mathcal{P} = \emptyset$, así que se tendría $\mathcal{P} \neq \emptyset$ como se quiere demostrar.
Supongamos que $\mathcal{P}^c$ es disconexo, entonces existen M, N abiertos de $\mathcal{P}^c$, disjuntos, no vacíos tales que $\mathcal{P}^c = M \bigcup N$. Sea $\overline{y} \in Y$, definido por $\pi_\alpha(\overline{y}) = y$, para todo $\alpha \in \Lambda$, $\overline{y} \in \mathcal{P}^c = M \bigcup N$, supongamos sin pérdida de generalidad que $\overline{y} \in M$.
Existe O abierto de Y tal que $\overline{y} \in M = O \bigcap \mathcal{P}^c$ y existe V abierto básico de Y tal que $\overline{y} \in V \subseteq O$.

V es de la forma:

$$\overline{y} \in V = \pi_{\alpha_1}^{-1}(\{y\}) \bigcap \cdots \bigcap \pi_{\alpha_k}^{-1}(\{y\})$$

para algunos α_1, α_2,$\cdots$, $\alpha_k \in \Lambda$ y algún k natural. Sea $x \in N$ entonces $x \neq \overline{y}$, de donde x tiene un número finito de "coordenadas", distintas de y, digamos x_{β_1}, x_{β_2}, $\cdots$, x_{β_t}.
Existe G abierto de Y tal que, $x \in N = G \bigcap \mathcal{P}^c$. Existe U abierto básico de Y tal que, $x \in U \subseteq G$.
Como $x \in \mathcal{P}^c$, existen α_{k+1}, α_{k+2}, $\cdots$, $\alpha_{k+j} \in \Lambda$ tales que $x_{\alpha_{k+1}} = x_{\alpha_{k+2}} = \cdots = x_{\alpha_{k+j}} = y$.
Entonces U es de la forma:

$$U = \pi_{\alpha_{k+1}}^{-1}(\{y\}) \bigcap \cdots \bigcap \pi_{\alpha_{k+j}}^{-1}(\{y\}) \bigcap \pi_{\beta_1}^{-1}(X_{\beta_1}) \cdots \bigcap \pi_{\beta_t}^{-1}(X_{\beta_t})$$

Sean $z_{\beta_1} \in X_{\beta_1}$, $\cdots$, $z_{\beta_t} \in X_{\beta_t}$ (vale la pena observar que aquí no se está usando el axioma de elección, por tratarse de una familia finita de conjuntos) y sea $z \in Y$, definido por $\pi_{\beta_i}(z) = z_{\beta_i}$, para todo $i \in \{1, \cdots, t\}$ y $\pi_\alpha(z) = y$ en los demás casos, entonces:

$$\begin{aligned} z \in U \bigcap V \bigcap \mathcal{P}^c &= \left(U \bigcap \mathcal{P}^c\right) \bigcap \left(V \bigcap \mathcal{P}^c\right) \\ &\subseteq \left(G \bigcap \mathcal{P}^c\right) \bigcap \left(O \bigcap \mathcal{P}^c\right) \\ &= N \bigcap M \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Lo cual es contradictorio. $\rightarrow\leftarrow$

$\square$

¿Cuál es el error en la "demostración" anterior?. Obsérvese que en el razonamiento anterior **no** es posible garantizar que los subíndices $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ sean distintos de los subíndices $\alpha_{k+1}, \cdots, \alpha_{k+j}$, de modo que **no** es posible garantizar la existencia del punto z. En realidad J. A. Pérez cometió un error al afirmar que $\mathcal{P}^c$ es conexo. En efecto, veamos que, por el contrario $\mathcal{P}^c$ es disconexo. Sea $\alpha \in \Lambda$ arbitrario pero fijo, entonces basta tomar $M := \mathcal{P}^c \bigcap \pi_\alpha^{-1}(y)$ y $N := \mathcal{P}^c \bigcap \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)$.
Tenemos:

1. M y N son abiertos de Y. Veamos que $\mathcal{P}^c$ es abierto en Y.
   Sea $x \in \mathcal{P}^c$, entonces existe $\beta \in \Lambda$ tal que $\pi_\beta(x) = y$. De donde tenemos que $x \in \pi_\beta^{-1}(y) \subseteq \mathcal{P}^c$, y x es punto interior de $\mathcal{P}^c$.
   De donde M y N son abiertos de Y, pues son la intersección de dos abiertos de Y.

2. M y N son no vacíos.

   i. $M \neq \emptyset$ pues basta tomar $\overline{y} = (y) \in \mathcal{P}^c \bigcap \pi_\alpha^{-1}(y)$.

   ii. $N \neq \emptyset$. Sea $\overline{y} \in Y$ definido por, $\pi_\alpha(\overline{y}) \in X_\alpha$ y $\pi_\beta(\overline{y}) = y$, para todo $\beta \neq \alpha$, entonces $\overline{y} \in \mathcal{P}^c \bigcap \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)$.

3. M y N son disjuntos.
   $M \bigcap N = (\mathcal{P}^c \bigcap \pi_\alpha^{-1}(y)) \bigcap (\mathcal{P}^c \bigcap \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)) = \mathcal{P}^c \bigcap (\pi_\alpha^{-1}(y) \bigcap \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)) = \emptyset$

4. $\mathcal{P}^c = M \bigcup N$

   Sea $x \in \mathcal{P}^c$, entonces exiten dos posibilidades:

   i. $\pi_\alpha(x) = y$, lo que implica que $x \in \pi_\alpha^{-1}(y) \bigcap \mathcal{P}^c = M$

ii. $\pi_\alpha(x) \neq y$, entonces $x \in \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha) \cap \mathcal{P}^c = N$

Recíprocamente sea ahora $x \in M \bigcup N$, luego $x \in M = \mathcal{P}^c \bigcap \pi_\alpha^{-1}(y)$ ó $x \in N = \mathcal{P}^c \bigcap \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)$, de donde $x \in \mathcal{P}^c$.

Así se concluye que $\mathcal{P}^c$ es disconexo.

$\square$

En el mes de agosto pasado nos comunicamos directamente con el profesor J. A. Pérez, vía correo electrónico, para manifestarle nuestras inquietudes respecto a su artículo y preguntarle si estaba de acuerdo con nuestros razonamientos. Después de algunas semanas, él respondió admitiendo que en efecto había un error en su demostración, pero que seguía pensando que el resultado era válido y que solo bastaría definir la topología adecuada sobre cada Y_α, de modo que trataría de corregir su demostración. Hasta la presente no hemos obtenido nueva respuesta, quedando entonces por ahora abierta la pregunta: *¿Es el teorema de Tychonoff equivalente al teorema de los productos conexos*?, pregunta con la cual finalizamos este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] J. Camargo and E. Villamizar. *Topología general*. Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, preprint edition, 2016.

[2] H. Cartan. Filtres et ultrafiltres. *CR Acad. Sci. Paris*, 205:777–779, 1937.

[3] E. Čech. On bicompact spaces. *Annals of Math*, 38:823–844, 1937.

[4] P. R. Chernoff. A simple proof of Tychonoff's theorem via nets. *American Mathematical Monthly*, pages 932–934, 1992.

[5] J. Kelley. The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice. *Fundamenta Mathematicae*, 37(1):75–76, 1950.

[6] S. Kum. A correction of Kelley's proof on the equivalence between the Tychonoff product theorem and the axiom of choice. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*, 16(2):75–78, 2003.

[7] J. Łoś and C. Ryll-Nardzewski. On the application of Tychonoff's theorem in mathematical proofs. *Fundamenta Mathematicae*, 38(1):233–237, 1951.

[8] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2 edition, 2002.

[9] C. M. Neira Uribe. *Topología general*. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas, 2011.

[10] J. A. Pérez. Los teoremas de Tychonoff y de los productos conexos son equivalentes. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 23(1):1–10, 2016.

[11] E. Schechter. Kelley's specialization of Tychonoff's theorem is equivalent to the boolean prime ideal theorem. *Fund. Math*, 189:285–288, 2006.

[12] A. Tychonoff. Über die topologische erweiterung von räumen. *Mathematische Annalen*, 102(1):544–561, 1930.

[13] S. Willard. *General topology.* Addison-Wesley publishing company, 1970.

[14] C. Yescas Aparicio. *Filtros en topología y algunas aplicaciones.* Universidad Tecnológica de la Mixteca. Licenciatua en Matemáticas Aplicadas, 2013.

BIBLIOGRAFÍA

J. Camargo and E. Villamizar. *Topología general*. Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, preprint edition, 2016.

J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2 edition, 2002.

C. M. Neira Uribe. *Topología general*. Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemáticas, 2011.

S. Willard. *General topology*. Addison-Wesley publishing company, 1970.