Copias de $c_0(\Gamma)$ y $\ell_\infty(\Gamma)$ en espacios de funciones

Diego Johann Reyes Rojas

Trabajo de Grado para optar al título de Magister en Matemáticas

Director

Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas

Doctorado en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2021

Dedico esta tesis a dos grandes médicos de mi afecto:

Alejandra Vargas y Sebastián Puerto.

Agradecimientos

Agradezco a mis padres Alfonso Reyes y Celia Rojas por su amor y apoyo incondicional a lo largo de todo mi proceso de formación académica. También a los demás integrantes de la familia y amistades que bien sea desde la distancia o la cercanía supieron estar presentes.

Me siento enormemente agradecido con el profesor Michael Alexánder Rincón y también con el profesor Sergio Pérez quienes sin su ayuda constante, orientación y experiencia en la investigación matemática habría sido imposible la creación de esta tesis.

Quisiera agradecer también al profesor Carlos Wilson Rodríguez quien al final se ofreció amablemente a ser mi tutor y a todos los profesores que hicieron parte de mi proceso, especialmente al profesor Javier Camargo y finalmente, agradecer a todos mis compañeros de maestría de los cuales aprendí mucho mientras trabajabamos. A la Universidad Industrial de Santander que se volvió mi segundo hogar en este tiempo, muchas gracias.

Tabla de Contenido

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Los números naturales.
$\mathbb{N}_0$	Los números naturales incluido el 0.
$\mathbb{K}$	El cuerpo de escalares $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
X,Y	Espacios de Banach.
B_X	La bola cerrada unitaria en X.
S_X	La esfera unitaria en X.
X^*	El dual topológico de X.
$\mathscr{L}(X;Y)$	El espacio de los operadores lineales acotados de X en Y.
$\mathscr{F}(X;Y)$	El espacio de los operadores de rango finito de X en Y.
$K(X;Y)$	El subespacio de $\mathscr{L}(X;Y)$ de los operadores compactos.
$K_{\omega^*}(X^*;Y)$	El subespacio de $\mathscr{L}(X^*;Y)$ de los operadores $\omega^*-\omega-$continuos y compactos.
J_X	El encaje canónico de X en X^{**}.
$X \hookrightarrow Y$	El espacio X es isomorfo a un subespacio cerrado de Y.
ℓ_∞	El espacio de todas las sucesiones de escalares acotadas con la norma del supremo.
$\ell_\infty(\Gamma)$	El espacio de todas las familias de escalares $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ tales que $\sup\limits_{\gamma\in\Gamma}\lvert\alpha_\gamma\rvert < \infty$ con la norma del supremo.

$c_0(\Gamma)$	El subespacio de $\ell_\infty(\Gamma)$ de todas las familias de escalares $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ tales que para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{\gamma \in \Gamma : \|\alpha_\gamma\| \geqslant \varepsilon\}$ es finito.
T^*	El adjunto del operador T.
$\mathscr{L}_a(^nX;Y)$	El espacio vectorial de las aplicaciones $n-$lineales de X en Y.
$\mathscr{L}(^nX;Y)$	El subespacio de $\mathscr{L}_a(^nX;Y)$ de la aplicaciones $n-$lineales continuas.
$\mathscr{P}_a(^nX;Y)$	El espacio vectorial de los polinomios $n-$homogéneos de X en Y.
$\mathscr{P}(^nX;Y)$	El subespacio de $\mathscr{P}_a(^nX;Y)$ de los polinomios $n-$homogéneos continuos.
$\mathscr{P}_K(^nX;Y)$	El subespacio de $\mathscr{P}(^nX;Y)$ de los polinomios $n-$homogéneos compactos.
$\mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$	El espacio de los polinomios $n-$homogénos $\omega^* - \omega-$continuos y compactos de X^* en Y.
$X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$	El producto tensorial de $X_1,...,X_n$.
$\bigotimes_n X$	El producto tensorial de X.
$\bigotimes_{n,\pi} X$	El producto tensorial de X junto con la norma π.
$\bigotimes_{n,s,\pi} X$	El subespacio de $\bigotimes_{n,\pi}$X generado por todos los elementos de la forma $x_1 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n$ junto con la norma π.
$\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X$	El completamiento del espacio $\bigotimes_{n,s,\pi} X$ con respecto a la norma π.
$\overset{\vee}{P}$	La única aplicación $n-$lineal simétrica tal que $P(x) = \overset{\vee}{P}(x,...,x)$ para todo $x \in X$ donde $P \in \mathscr{P}(^nX;Y)$.
$\dfrac{\widehat{d}^kP}{k!}$	El polinomio $n-k-$homogéneo de X^* en $\mathscr{P}(^kX^*;Y)$ dado por $\dfrac{\widehat{d}^kP}{k!}(x^*)(y^*) = \binom{n}{k}\overset{\vee}{P}((x^*)^{n-k},(y^*)^k)$.

Resumen

Título: Copias de $c_0(\Gamma)$ y $\ell_\infty(\Gamma)$ en espacios de funciones [*]

Autor: Diego Johann Reyes Rojas [**]

Palabras Clave: Teorema de Drewnowski, operador lineal $\omega^* - \omega-$continuo y compacto, copias de ℓ_∞, polinomio $n-$homogéneo, copias de $c_0(\Gamma)$ y $\ell_\infty(\Gamma)$.

Descripción: El Teorema de Drewnowski, el cual fue probado por el matemático polaco Lech Drewnowski en 1991 establece condiciones necesarias y suficientes para que el espacio $K_{\omega*}(X^*;Y)$ de los operadores lineales $\omega^* - \omega-$continuos y compactos contenga una copia de ℓ_∞. Esto es, $K_{\omega*}(X^*;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞ si, y solo si, X o Y contiene una copia de ℓ_∞. Una consecuencia de este teorema es que el espacio $K(X;Y)$ de los operadores compactos de X en Y contiene una copia de ℓ_∞ si, y solo si, X^* o Y contiene una copia de ℓ_∞. En este trabajo probaremos que el Teorema de Drewnowski puede ser extendido al espacio $\mathscr{P}_{\omega*}(^nX^*;Y)$ de los polinomios $n-$homogéneos $\omega^* - \omega-$continuos y compactos de X^* en Y. Esto es, $\mathscr{P}_{\omega*}(^nX^*;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞ si, y solo si, X o Y contiene una copia de ℓ_∞. También mostraremos que el Teorema de Drewnowski para el caso de $K(X;Y)$ no puede ser extendido al espacio $\mathscr{P}_K(^nX;Y)$ de los polinomios $n-$homogéneos compactos de X en Y considerando el caso en el que $n = 2$ y $X = Y = \ell_2$, esto es, $\mathscr{P}_K(^2\ell_2;\ell_2)$. Finalmente, daremos condiciones para que el espacio $\mathscr{P}_{\omega*}(^nX^*;Y)$ contenga una copia de $c_0(\Gamma)$ o $\ell_\infty(\Gamma)$.

---

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas, Doctorado en Matemáticas.

Abstract

Title: Copies of $c_0(\Gamma)$ and $\ell_\infty(\Gamma)$ in function spaces *

Author: Diego Johann Reyes Rojas **

Keywords: Drewnowski's Theorem, which was proved by the Polish mathematician Lech Drewnowski in 1991 establishes necessary and sufficient conditions so that the space $K_{\omega*}(X^*;Y)$ of all $\omega^*-\omega-$continuous compact operators contains a copy of ℓ_∞. That is, $K_{\omega*}(X^*;Y)$ contains a copy of ℓ_∞ if, and only if, X or Y contains a copy of ℓ_∞ . A consequence of this theorem is that the space $K(X;Y)$ of all compact operators from X into Y contains a copy of ℓ_∞ if, and only if, X^* or Y contains a copy of ℓ_∞. In this work we will prove that Drewnowski's Theorem can be extended to the space $\mathscr{P}_{\omega*}(^nX^*;Y)$ of all $\omega^*-\omega-$continuous compact $n-$homogeneous polynomials from X^* into Y. That is, $\mathscr{P}_{\omega*}(^nX^*;Y)$ contains a copy of ℓ_∞ if, and only if, X or Y contains a copy of ℓ_∞. We will also show that Drewnowski Theorem for the case of $K(X;Y)$ cannot be extended to the space $\mathscr{P}_K(^nX;Y)$ of all compact $n-$homogeneous polynomials from X into Y considering the case in which $n=2$ and $X=Y=\ell_2$, that is, $\mathscr{P}_K(^2\ell_2;\ell_2)$. Finally, we will give conditions so that space $\mathscr{P}_{\omega*}(^nX^*;Y)$ contains a copy of $c_0(\Gamma)$ or $\ell_\infty(\Gamma)$.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas, Doctorado en Matemáticas.

Introducción

Este trabajo tuvo como propósito inicial abordar el problema de encontrar y establecer condiciones suficientes y necesarias para que dado un espacio de funciones, este contuviera una copia de $\ell_\infty(\Gamma)$ o de $c_0(\Gamma)$. Recordemos que $\ell_\infty(\Gamma)$ es el espacio de Banach de todas las familias de escalares $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ junto con la norma del supremo y $c_0(\Gamma)$ es el subespacio de $\ell_\infty(\Gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ que consta de todas las familias de escalares $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ tales que para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{\gamma \in \Gamma : |\alpha_\gamma| \geqslant \varepsilon\}$ es finito.

Desde este enfoque, estudiamos el teorema probado por el matemático polaco Lech Drewnowski en el año 1991 el cual determina cuándo el espacio $K_{\omega^*}(X^*;Y)$ de los operadores lineales de X^* en Y que son $\omega^* - \omega-$continuos y compactos contiene una copia de $\ell_\infty(\Gamma)$ en el caso tal que $\Gamma = \mathbb{N}$:

Teorema 0.1. ((Drewnowski, 1990, Teorema de Drewnowski)) *Sean X,Y espacios de Banach. Entonces $K_{\omega^*}(X^*;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞ si, y solo si, X o Y contiene una copia de ℓ_∞.*

Dados X,Y espacios de Banach, decimos que una aplicación $P : X \to Y$ es un polinomio $n-$homogéneo si existe asociada una aplicación $n-$lineal L tal que $P(x) = L(\underbrace{x,\ldots,x}_{n \text{ veces}})$ para cada x en X; el espacio de todos los polinomios $n-$homogéneos de X en Y lo denotamos por $\mathscr{P}_a(^nX;Y)$. El candidato para dar respuesta a esta pregunta es el subespacio $\mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$ de $\mathscr{P}_a(^nX^*;Y)$ que consta de todos los polinomios $n-$homogéneos continuos que son $\omega^* - \omega-$continuos y compactos. Esto último hace referencia a que si tomamos un subconjunto acotado A de X^*, entonces $\overline{P(A)}^{\|\cdot\|}$ es un conjunto compacto en norma. Cuando $n = 1$ tenemos que $K_{\omega^*}(X^*;Y) = \mathscr{P}_{\omega^*}(^1X^*;Y)$. De forma natural podemos preguntarnos si el teorema anterior puede ser extendido al espacio de polinomios $n-$homogéneos como se conjetura a continuación:

Conjetura 1. *Sean X y Y espacios de Banach y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞ si, y solo si, X o Y contiene una copia de ℓ_∞.*

Por otro lado, debido a que $K(X;Y)$ y $K_{\omega^*}(X^{**};Y)$ son isométricamente isomorfos (ver Proposición 2.12), se tiene que el Teorema de Drewnowski puede ser adaptado al espacio $K(X;Y)$ de la siguiente forma:

Teorema 0.2. ((Drewnowski, 1990, Corolario 1)) *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces $K(X;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞ si, y solo si, X^* o Y contiene una copia de ℓ_∞.*

Si denotamos por $\mathscr{P}_K(^nX;Y)$ al espacio de polinomios $n-$homogéneos compactos, resulta natural pensar en la siguiente afirmación:

Conjetura 2. *Sean X y Y espacios de Banach y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathscr{P}_K(^nX;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞ si, y solo si, X^* o Y contiene una copia de ℓ_∞.*

En este trabajo abordaremos y daremos solución a ambos problemas, probando así que la Conjetura 1 es verdadera y mostrando que la Conjetura 2 no siempre es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

El trabajo está dividido en dos partes: En la primera parte, correspondiente al Capítulo 2, daremos los preliminares que se usan en la construcción de los dos resultados mencionados anteriormente. En la Sección 2.1 recordaremos conceptos clásicos en espacios de Banach y mostraremos algunos de los espacios de funciones que se usarán. En la Sección 2.2 introduciremos el concepto de polinomio $n-$homogéneo que se define a través de las aplicaciones $n-$lineales y estudiaremos sus propiedades. En la Sección 2.3 introduciremos el producto tensorial y sus propiedades junto con el Teorema de linealización de Ryan que permite linealizar los espacios $\mathscr{P}(^nX;Y)$ y $\mathscr{P}_K(^nX;Y)$. Finalmente, en la Sección 2.4 mencionaremos otros resultados que serán aplicados de forma muy específica en el desarrollo teórico del trabajo.

En la segunda parte, correspondiente al Capítulo 3, abordaremos y desarrollaremos los problemas mencionados anteriormente. En la Sección 3.1 definiremos el espacio de polinomios $\dfrac{\widehat{d}^kP}{k!}$ que nos permitirá establecer un teorema que relaciona los espacios $\mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$ y $K_{\omega^*}(X^*;\mathscr{P}_{\omega^*}(^{n-1}X^*;Y))$, y al final probaremos el Teorema de Drewnowski extendido al espacio $\mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$. En la Sección 3.2 mostraremos a través del espacio $\mathscr{P}_K(^2\ell_2;\mathbb{K})$ que la Conjetura 2 es falsa. Finalmente, en la Sección 3.3 damos condiciones para que el espacio $\mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$ contenga una copia de $c_0(\Gamma)$ o $\ell_\infty(\Gamma)$.

Muchos resultados del Capítulo 2 que en la literatura aparecen sin prueba o con muy pocos argumentos fueron demostrados con mucho detalle y haciendo uso de una notación sencilla en la medida de lo posible. Esperamos entonces que este trabajo pueda ser también un buen material de consulta para quienes estén trabajando temas afines.

1. Objetivos

1.1. Objetivo general

- Estudiar copias de $c_0(\Gamma)$ y $\ell_\infty(\Gamma)$ en espacios de funciones

1.2. Objetivos específicos

- Abordar el problema de encontrar condiciones a fin de establecer la equivalencia entre las siguientes afirmaciones
    - $\mathscr{P}(^nX;Y)$ contiene una copia de $c_0(\Gamma)$;
    - $\mathscr{P}(^nX;Y)$ contiene una copia de $\ell_\infty(\Gamma)$.
- Abordar la validez de la siguiente afirmación: $C(K;X)$ contiene una copia de $\ell_\infty(\Gamma)$ si, y solo si, $C_0(K)$ o X contiene una copia de $\ell_\infty(\Gamma)$.
- Abordar la validez de la siguiente afirmación: Sean X,Y espacios de Banach y $n \in \mathbb{N}$. $\mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞ si, y solo si, X o Y contiene una copia de ℓ_∞.
- Abordar validez de la siguiente afirmación: Sean X,Y espacios de Banach y $n \in \mathbb{N}$. $\mathscr{P}_K(^nX^*;Y)$ contiene copia de ℓ_∞ si, y solo si, X^* o Y contiene copia de ℓ_∞.
- Sean X,Y espacios de Banach. Abordar el problema de encontrar las condiciones suficientes a fin de que las siguientes afirmaciones sean equivalentes:
    - $B(X;Y)$ contiene una copia de $c_0(\Gamma)$;

- $B(X;Y)$ contiene una copia de $\ell_\infty(\Gamma)$.

2. Preliminares

En este capítulo se darán los conceptos previos al desarrollo de los objetivos del trabajo. En la Sección 2.1 daremos las definiciones y resultados básicos acerca de la teoría de espacios de Banach. En la Sección 2.2 definiremos las aplicaciones $n-$lineales, los polinomios $n-$homogéneos junto con algunos resultados importantes. En la Sección 2.3 introduciremos la noción de producto tensorial de espacios de Banach que será de utilidad para establecer algunas propiedades del espacio de polinomios $n-$homogéneos. Finalmente, en la Sección 2.4 mencionaremos más propiedades utilizadas en a lo largo del trabajo.

2.1. Conceptos básicos en espacios de Banach

Todos los espacios vectoriales que aparezcan en este trabajo tendrán a $\mathbb{K}$ como el cuerpo de escalares, donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 2.1. *Sean X y Y espacios de Banach. El espacio de todos los operadores lineales (respectivamente acotados) de X en Y es denotado por $\mathscr{L}_a(X;Y)$ (respectivamente $\mathscr{L}(X;Y)$). Si $Y = \mathbb{K}$ entonces $\mathscr{L}(X;Y)$ es el dual topológico de X que es denotado por X^*.*

A continuación mostramos algunos subespacios importantes de $\mathscr{L}(X;Y)$.

Definición 2.2. *Denotamos por $\mathscr{F}(X;Y)$ al subespacio de $\mathscr{L}(X;Y)$ generado por todos los operadores lineales acotados de la forma $T(x) = \phi(x)b$, con $\phi \in X^*$ y $b \in Y$ el cual es llamado el espacio de los operadores de rango finito.*

Definición 2.3. *Sea $T \in \mathscr{L}(X;Y)$. Diremos que T es compacto si dado $B \subseteq X$ acotado, $\overline{T(B)}^{\|\cdot\|} \subseteq Y$*

es compacto en norma. El espacio de operadores compactos de X en Y se denotará por $K(X;Y)$.

Definición 2.4. *Sean X,Y espacios de Banach. Denotamos por $K_{\omega^*}(X^*;Y)$ al espacio de operadores compactos y ω^*-continuos sobre conjuntos acotados junto con la norma usual de los operadores, esto es, $T \in K_{\omega^*}(X^*;Y)$ si, y solo si, dada una red $(x^*_\alpha)_\alpha$ acotada y ω^*-convergente en X^*, la red de imágenes $(T(x^*_\alpha))_\alpha$ es convergente en norma.*

Definición 2.5. *Sea X un espacio normado. Para cada $x^* \in X^*$ y cada sucesión $(x_n)_n$ en X convergente a 0 en norma, sea*

$$B(x^*,(x_n)_n) = \{y^* \in X^* : |(y^*-x^*)x_n| < 1 \text{ para cada } n\}.$$

Denotamos por $b\omega^*$ a la topología para X^* que tiene como base la colección de todos los conjuntos de la forma $B(x^*,(x_n)_n)$.

Teorema 2.6. ((Megginson, 1998, Teorema 2.7.2)) *Sea X un espacio normado. Si denotamos por τ_n a la topología sobre X^* inducida por la norma entonces se tienen las siguientes contenencias:*

$$\omega^* \subseteq b\omega^* \subseteq \tau_n.$$

Teorema 2.7. ((Megginson, 1998, Corolario 2.7.3)) *Sea X un espacio normado, $(x^*_\alpha)_\alpha$ una red acotada en X^* y $x^* \in X^*$. Entonces $x^*_\alpha \xrightarrow{b\omega^*} x^*$ si, y solo si, $x^*_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x^*$.*

Teorema 2.8. *Sea $T \in \mathscr{L}(X^*;Y)$. Entonces T es $b\omega^*-\|\cdot\|-$continuo si, y solo si, T es $\omega^*-\|\cdot\|-$continuo sobre conjuntos acotados.*

Demostración. Para probar la implicación derecha sea $A \subseteq X^*$ acotado y sea $(x^*_\alpha)_\alpha$ una red en A tal que $x^*_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x^*$. Por el Teorema 2.7 tenemos que $x_\alpha \xrightarrow{b\omega^*} x^*$ y por la hipótesis se sigue que $T(x^*_\alpha) \to T(x^*)$. Supongamos ahora que $(x^*_\alpha)_\alpha$ es una red en X^* tal que $x^*_\alpha \xrightarrow{b\omega^*} x^*$ para algún $x^* \in X^*$. Ya que $b\omega^*$ es una topología más fuerte que ω^* (ver Teorema 2.6), entonces $x^*_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x^*$ y por la hipótesis se sigue que $T(x^*_\alpha) \to T(x^*)$. □

Definición 2.9. *Sea X un espacio de Banach. La aplicación $J_X : X \to X^{**}$ denota la inyección canónica de X en X^{**} definida como sigue: dado $x \in X$, sea*

$$x^* \in X^* \to J_X(x)(x^*) = x^*(x).$$

Se dice que X es reflexivo *si $J_X(X) = X^{**}$.*

La siguiente proposición nos da un criterio útil para determinar cuándo un elemento de $\mathscr{L}(X^*;Y)$ está en $K_{\omega^*}(X^*;Y)$:

Proposición 2.10. ((Myung Kim, 2013, Proposición 3.1)) *Sea $T \in \mathscr{L}(X^*;Y)$ un operador lineal, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) T es $\omega^* - \|\cdot\|-$continuo sobre conjuntos acotados,

b) T es $\omega^* - \omega-$continuo y compacto,

c) T es $b\omega^* - \omega-$continuo y compacto,

d) si $(x^*_\alpha)_\alpha$ es una red en B_{X^*} tal que $x^*_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x^*$, entonces $Tx^*_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx^*$.

Demostración. Sea $T \in \mathscr{L}(X^*;Y)$. Veamos primero que T es $\omega^*-\omega-$continua si, y solo si, T es $b\omega^*-\omega-$continua. Ya que $b\omega^*$ es una topología más fuerte que ω^* (ver Teorema 2.6), se sigue directamente que si T es $\omega^*-\omega-$continua, entonces T es $b\omega^*-\omega-$continua. Supongamos que T es $b\omega^*-\omega-$continua. Entonces T^*y^* es $b\omega^*-$continua para todo $y^* \in Y^*$. En efecto, sea $(x^*_\alpha)_\alpha$ una red en X^* tal que $x^*_\alpha \xrightarrow{b\omega^*} x^*$, entonces $Tx^*_\alpha \xrightarrow{\omega} Tx^*$ y por tanto

$$(T^*y^*)x^*_\alpha = y^*(Tx^*_\alpha) \to y^*(Tx^*) = (T^*y^*)x^* \tag{1}$$

para todo $y^* \in Y^*$. Por lo tanto T^*y^* es $b\omega^*-$continua para todo $y^* \in Y^*$, lo cual es equivalente a que T^*y^* es ω^*-continua para todo $y^* \in Y^*$ (ver (Megginson, 1998, Teorema 2.7.8)). Es decir, $T^*y^* \in J_X(X)$. Concluimos que T es $\omega^*-\omega-$continua ya que T es $\omega^*-\omega-$continua si, y solo si, $T^*(Y^*) \subset J_X(X)$. Para probar a) implica b) supongamos que T es $\omega^*-\|\cdot\|-$continua sobre conjuntos acotados, o equivalentemente, que es $b\omega^*-\|\cdot\|-$continua (ver Teorema 2.8). Entonces T es $b\omega^*-\omega-$continua y por lo anterior, T es $\omega^*-\omega-$continua. Sea $(x^*_\alpha)_\alpha$ una red acotada en X^*. Por el Teorema de Banach-Alaoglu podemos suponer que $x^*_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x^*$ y por tanto $x^*_\alpha \xrightarrow{b\omega^*} x^*$ (ver Teorema 2.7). De a) concluimos que $Tx^*_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx^*$ y así T es compacto. La implicación de b) a c) se sigue directamente. Para probar c) implica d) sea $(x^*_\alpha)_\alpha$ una red en B_{X^*} tal que $x^*_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x^*$. Como $(x^*_\alpha)_\alpha$ es una red acotada, tenemos que $x^*_\alpha \xrightarrow{b\omega^*} x^*$ y así $Tx^*_\alpha \xrightarrow{\omega} Tx^*$ por la hipótesis c). Ya que $\overline{T(B_{X^*})}^{\|\cdot\|}$ es un subconjunto convexo y cerrado de Y tenemos que $\overline{T(B_{X^*})}^{\|\cdot\|} = \overline{T(B_{X^*})}^{\omega}$ (ver (Megginson, 1998, Teorema 2.5.16)) y se sigue directamente que $Tx^*_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx^*$. Finalmente, para probar d) implica a) suponga que $Tx^*_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx^*$ siempre que $x_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x^*$ en B_{X^*}.

Entonces $Tx^*_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx^*$ siempre que $x^*_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x^*$ en tB_{X^*} para cualquier $t > 0$. Esto implica que T es $\omega^* - \|\cdot\|-$continua con respecto a la topología ω^* relativa a tB_{X^*} para cualquier $t > 0$. Sea V un abierto de Y en norma. Ya que $T^{-1}(V) \cap tB_{X^*}$ es un ω^*-abierto en tB_{X^*} para cada $t > 0$, se sigue que $T^{-1}(V)$ es $b\omega^*-$abierto en X^* (ver (Megginson, 1998, Corolario 2.7.4)). Por lo tanto, T es $b\omega^* - \|\cdot\|-$continuo. □

Definición 2.11. *Sean X y Y espacios de Banach. Un isomorfismo de X a Y es un operador lineal $T : X \to Y$ inyectivo, tal que T y su inversa T^{-1} son operadores continuos. Un isomorfismo T es un isomorfismo isométrico si $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Decimos que X es isomorfo (respectivamente isométricamente isomorfo) a Y lo cual denotamos por $X \cong Y$ si existe un isomorfismo sobreyectivo (respectivamente isomorfismo isométrico sobreyectivo) de X en Y.*

Proposición 2.12. ((Ruess, 1984, p. 60)) *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces $K(X;Y)$ y $K_{\omega^*}(X^{**};Y)$ son isométricamente isomorfos.*

Demostración. Supongamos que $T : X \to Y$ es un operador lineal compacto. Ya que $T^{**}(X^{**}) \subseteq J_Y(Y)$ (ver (Mujica, 2006, Proposición 10.4)) tenemos que $T^{**} : X^{**} \to J_Y(Y)$ y podemos definir la aplicación $J_Y^{-1} \circ T^{**} : X^{**} \to Y$. Veamos que $J_Y^{-1} \circ T^{**}$ es un operador $\omega^* - \omega-$continuo y compacto. Sabemos que $J_Y^{-1} : J_Y(Y) \to Y$ es una aplicación $\omega^* - \omega-$continua ya que $J_Y : Y \to J_Y(Y)$ es $\omega - \omega^*-$continua. Además, como $T^* : Y^* \to X^*$ es un operador continuo, tenemos que $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ es $\omega^* - \omega^*-$continuo (ver (Megginson, 1998, Teorema 3.1.11)). Por lo tanto, $J_Y^{-1} \circ T^{**}$ es $\omega^* - \omega-$continua. Por otro lado, T^{**} es compacto ya que T es compacto (consecuencia de (Megginson, 1998, Teorema de Schauder 3.4.15)) y como J_Y^{-1} es una aplicación continua, se sigue que $J_Y^{-1} \circ T^{**}$ es un operador compacto. Por lo tanto, $J_Y^{-1} \circ T^{**} \in K_{\omega^*}(X^{**};Y)$. Veamos ahora que la aplicación $T \in K(X;Y) \to J_Y^{-1} \circ T^{**} \in K_{\omega^*}(X^{**};Y)$ es un isomorfismo isométrico sobreyectivo. Sean $T_1, T_2 \in \mathscr{L}(X;Y)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces

$$J_Y^{-1} \circ (T_1 + \alpha T_2)^{**} = J_Y^{-1} \circ (T_2^* + \alpha T_1^*)^* = J_Y^{-1} \circ (T_1^{**} + \alpha T_2^{**}) = J_Y^{-1} \circ T_1^{**} + \alpha (J_Y^{-1} \circ T_2^{**}).$$

Por lo tanto $T \to J_Y^{-1} \circ T^{**}$ es una aplicación lineal. Supongamos ahora que $S \in K_{\omega^*}(X^{**};Y)$. Como S es $\omega^* - \omega-$continua y J_Y es $\omega - \omega^*-$continua, tenemos que $J_Y \circ S$ es $\omega^* - \omega^*-$continua. Entonces existe una aplicación $A : Y^* \to X^*$ lineal y continua tal que $A^* = J_Y \circ S$ (ver (Megginson, 1998, Teorema 3.1.11)). Veamos que $A : Y^* \to X^*$ es $\omega^* - \omega^*-$continua. Supongamos que $y_\alpha^* \xrightarrow{\omega^*} y^*$ y sea $x \in X$, entonces

$$\begin{aligned} A(y_\alpha^*)(x) = J_X(x)(A(y_\alpha^*)) = A^*(J_X(x))(y_\alpha^*) &= (J_Y \circ S)(J_X(x))(y_\alpha^*) \\ &= y_\alpha^*(S(J_X(x))) \\ &\to y^*(S(J_X(x))) \\ &= J_Y(S(J_X(x)))(y^*) \\ &= A^*(J_X(x))(y^*) \\ &= J_X(x)(A(y^*)) \\ &= A(y^*)(x). \end{aligned}$$

Ya que x se escogió arbitrariamente se sigue que $A(y_\alpha^*) \xrightarrow{\omega^*} A(y)$. Por (Megginson, 1998, Teorema

3.1.11) garantizamos la existencia de una aplicación $T : X \to Y$ lineal y continua tal que $T^* = A$. Esto implica que $T^{**} = A^* = J_Y \circ S$ y como S es compacto, se tiene que T es compacto (ver (Megginson, 1998, Teorema de Schauder 3.4.15)). Finalmente, como $J_Y^{-1} \circ T^{**} = J_Y^{-1} \circ (J_Y \circ S) = S$ concluimos que $T \to J_Y^{-1} \circ T^{**}$ es sobreyectiva. Ya que $J_Y^{-1} \circ T^{**} \circ J_X = T$ para todo $T \in \mathscr{L}(X;Y)$ y $\|T\| = \|T^{**}\|$ para todo $T \in \mathscr{L}(X;Y)$, se sigue que

$$\|J_Y \circ T^{**}\| \leqslant \|J_Y^{-1}\| \cdot \|T^{**}\| = \|J_Y^{-1}\| \cdot \|T\| \tag{2}$$

y

$$\|T\| = \|(J_Y^{-1} \circ T^{**}) \circ J_X\| \leqslant \|J_Y^{-1} \circ T^{**}\| \cdot \|J_X\|. \tag{3}$$

Finalmente, como $\|J_X\| = \|J_Y^{-1}\| = 1$, las ecuaciones (2) y (3) implican que $\|T\| = \|J_Y^{-1} \circ T^{**}\|$ y así $T \to J_Y^{-1} \circ T^{**}$ es una isometría lineal. Por lo tanto, $T \to J_Y^{-1} \circ T^{**}$ es un isomorfismo isométrico sobreyectivo. □

Teorema 2.13. ((Megginson, 1998, Teorema 1.9.1)) *Supongamos que M es un subespacio denso de un espacio normado X, que Y es un espacio de Banach y que $T_0 : M \to Y$ es un operador lineal acotado. Entonces existe una única extensión lineal continua $T : X \to Y$ de T_0 (esto es, $T(x) = T_0(x)$ para todo $x \in M$) tal que $\|T\| = \|T_0\|$. Si T_0 es un isomorfismo o un isomorfismo isométrico, entonces T tiene la misma propiedad.*

Definición 2.14. *Sea X un espacio de Banach. Decimos que X contiene una copia de Y y denota-*

mos $Y \hookrightarrow X$ si existe un subespacio cerrado Z de X, tal que Y es isomorfo a Z. Si Y es isométricamente isomorfo a Z en el enunciado anterior, decimos que X contiene una copia isométrica de Y.

Proposición 2.15. *Sean X,Y espacios de Banach. Entonces $K_{\omega^*}(X^*;Y)$ contiene una copia isométrica de X y Y.*

Demostración. Para probar que $K_{\omega^*}(X^*;Y)$ contiene una copia isométrica de X fijemos un $y \in Y$ donde $\|y\| = 1$ y consideremos la aplicación $x \in X \to T_x \in K_{\omega^*}(X^*;Y)$ dada por $T_x(x^*) := J_X(x)(x^*) \cdot y$. Observe que T_x es compacto ya que el rango de T_x es finito. Finalmente, si $x^* \in X^*$ y $(x^*_\alpha)_\alpha$ es una red acotada tal que $x^*_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x^*$, es claro que $T_x(x^*_\alpha) \to T_\alpha(x^*)$. Así, $T_x \in K_{\omega^*}(X^*;Y)$. Sean $x_1, x_2 \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Como

$$\begin{aligned} T_{x_1+\alpha x_2}(x^*) &= J_X(x_1+\alpha x_2)(x^*) \\ &= (J_X(x_1)+\alpha J_X(x_2))(x^*) = J_X(x_1)(x^*) + \alpha J_X(x_2)(x^*) \\ &= T_{x_1}(x^*) + \alpha T_{x_2}(x^*) \end{aligned}$$

para todo $x^* \in X^*$, se sigue que $x \to T_x$ es una aplicación lineal. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} \|x\| = \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \|x^*(x)\| = \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \|J_X(x)(x^*)\| &= \left(\sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \|J_X(x)(x^*)\| \right) \|y\| \\ &= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} (\|J_X(x)(x^*)\| \|y\|) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \|J_X(x)(x^*)\cdot y\| \\
&= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \|T_x(x^*)\| \\
&= \|T_x\|.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $x \to T_x$ es una isometría lineal y se sigue que es un isomorfismo de X en $K_{\omega^*}(X^*;Y)$. Veamos ahora que $K_{\omega^*}(X^*;Y)$ contiene una copia isométrica de Y. Fijemos $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y consideremos la aplicación $y \in Y \to T_y \in K_{\omega^*}(X^*;Y)$ tal que $T_y(x^*) := x^*(x)\cdot y$. Como demostramos anteriormente, es fácil ver que $T_y \in K_{\omega^*}(X^*;Y)$. Sean $y_1, y_2 \in Y$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Ya que

$$
\begin{aligned}
T_{y_1+\alpha y_2}(x^*) &= x^*(x)\cdot(y_1+\alpha y_2) \\
&= x^*(x)\cdot y_1 + \alpha x^*(x)\cdot y_2 \\
&= T_{y_1}(x^*) + \alpha T_{y_2}(x^*)
\end{aligned}
$$

para todo $x^* \in X^*$, se sigue que $y \to T_y$ es una aplicación lineal. Por otro lado, sabemos que existe $x_0^* \in X^*$ tal que $\|x_0^*\| = 1$ y $x_0^*(x) = \|x\| = 1$ (ver (Kesavan, 2009, Corolario 3.1.1)). Entonces

$$
\begin{aligned}
\|y\| = \|x_0^*(x)\|\|y\| = \left(\sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \|x^*(x)\|\right)\|y\| &= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} (\|x^*(x)\|\|y\|) \\
&= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \|x^*(x)\cdot y\|
\end{aligned}
$$

$$= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \|T_y(x^*)\|$$

$$= \|T_y\|.$$

Por tanto $y \to T_y$ es un isomorfismo de Y en $K_{\omega^*}(X^*;Y)$. $\square$

Definición 2.16. *Denotamos por $\ell_\infty(\Gamma)$ al espacio de familias de escalares $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ tales que*

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} |\alpha_\gamma| < \infty$$

junto con la norma del supremo. Cuando $\Gamma = \mathbb{N}$ escribimos $\ell_\infty(\Gamma) = \ell_\infty$.

Proposición 2.17. *$(\ell_\infty, \|\cdot\|)$ y $(\ell_\infty(\Gamma), \|\cdot\|)$ son espacios de Banach.*

2.2. Polinomios $n-$homogéneos

En esta sección introduciremos los polinomios $n-$homogéneos y algunos subespacios que serán objeto de estudio en este trabajo. Sean $(X_1, \|\cdot\|_1), ..., (X_n, \|\cdot\|_n)$ espacios de Banach. Recordemos que si $(x_1, ..., x_n)$ es un elemento de $X_1, ..., X_n$, la aplicación definida por

$$\|(x_1, ..., x_n)\| = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|x_j\|_j$$

es una norma en $X_1 \times \cdots \times X_n$ y $(X_1 \times \cdots \times X_n, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Definición 2.18. *Sean $(X_1, \|\cdot\|), ..., (X_n, \|\cdot\|)$ espacios de Banach. Decimos que una aplicación $L : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ es $n-$lineal si dados $x_1 \in X_1$,...,x_k y $y_k \in X_k$,...,$x_n \in X_n$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos* *que $L(x_1,..,x_k+\alpha y_k,...,x_n) = L(x_1,...,x_k,...,x_n)+\alpha L(x_1,...,y_k,...,x_n)$ para cualquier $1 \leqslant k \leqslant n$. Denotamos por $\mathscr{L}_a(X_1,...,X_n;Y)$ al espacio vectorial de las aplicaciones $L : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ $n-$lineales. El subespacio de $\mathscr{L}_a(X_1,...,X_n;Y)$ de las aplicaciones $n-$lineales continuas se denotará por $\mathscr{L}(X_1,...,X_n;Y)$. Para cada $L \in \mathscr{L}_a(X_1,...,X_n;Y)$ definimos*

$$\|L\| = \sup_{\|x_1\| \leqslant 1,...,\|x_n\| \leqslant 1} \|L(x_1,...,x_n)\|.$$

Cuando $Y = \mathbb{K}$, escribimos $\mathscr{L}_a(X_1,...,X_n;\mathbb{K}) = \mathscr{L}_a(X_1,...,X_n)$ y $\mathscr{L}(X_1,...,X_n;\mathbb{K}) = \mathscr{L}(X_1,...,X_n)$. Si $X_1 = ... = X_n = X$ denotamos a $\mathscr{L}_a(X_1,...,X_n;Y)$ por $\mathscr{L}_a({}^nX;Y)$ y a $\mathscr{L}(X_1,...,X_n;Y)$ por $\mathscr{L}({}^nX;Y)$. Note que cuando $n = 1$, se tiene que $\mathscr{L}_a({}^1X;Y) = \mathscr{L}_a(X;Y)$ y $\mathscr{L}({}^1X;Y) = \mathscr{L}(X;Y)$.

Ejemplo 2.19. ((Pérez, 2017, Ejemplo 1.2.2)) *Sean $x_1^*,...,x_n^* \in X^*$. La aplicación*

$$(x_1,...,x_n) \in X^n \to L(x_1,x_2,...,x_n) = x_1^*(x_1)x_2^*(x_2)...x_n^*(x_n)$$

está en $\mathscr{L}({}^nX;\mathbb{K})$.

A continuación presentamos una caracterización de la continuidad de un elemento de $\mathscr{L}_a({}^nX;Y)$.

Proposición 2.20. ((Mujica, 1986, Proposición 1.2)) *Para cada $L \in \mathscr{L}_a({}^nX;Y)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *L es continua;*

2. *L es continua en el origen;*

3. $\|L\| < \infty$.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Se sigue directamente. 2. $\Rightarrow$ 3. Si 3. no es cierto, existe una sucesión de puntos $(x_{k,1},\dots,x_{k,n})_k$ en X^n tal que $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\|x_{k,i}\| \leqslant 1$ y $\|L(x_{k,1},\dots,x_{k,n})\| \geqslant k^n$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\|\frac{x_{k,i}}{k}\right\| \leqslant \frac{1}{k}$ y

$$\left\|L\left(\frac{x_{k,1}}{k},\dots,\frac{x_{k,n}}{k}\right)\right\| \geqslant 1$$

para cada k, contradiciendo 2. 3. $\Rightarrow$ 1. Sea $a=(a_1,\dots,a_n)\in X^n$ y $x=(x_1,\dots,x_n)\in X^n$ con $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\|a_i\| \leqslant c$ y $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\|x_i\| \leqslant c$ donde c es constante, entonces

$$\begin{aligned}
\|L(x_1,\dots,x_n)-L(a_1,\dots,a_n)\| &= \|[L(x_1,\dots,x_n)-L(a_1,x_2,\dots,x_n)] \\
&\quad + [L(a_1,x_2,\dots,x_n)-L(a_1,a_2,x_3,\dots,x_n)] \\
&\quad + \dots + [L(a_1,\dots,a_{n-1},x_n)-L(a_1,a_2,\dots,a_n)]\| \\
&= \|\sum_{j=1}^{n}(L(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,\dots,x_n)-L(a_1,\dots,a_j,x_{j+1},\dots,x_n))\| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\|L(a_1,\dots,a_{j-1},x_j-a_j,x_{j+1},\dots,x_n)\| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\|L\|c^{n-1}\|x_j-a_j\| \\
&\leqslant n\|L\|c^{n-1}\|(x_1,\dots,x_n)-(a_1,\dots,a_n)\|,
\end{aligned}$$

y 1. se sigue. □

Proposición 2.21. ((Mujica, 1986, Proposición 1.3)) $(\mathscr{L}(^nX;Y),\|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(L_j)_j$ una sucesión de Cauchy en $\mathscr{L}(^nX;Y)$. Tenemos que $L_j - L_k$ es un elemento de $\mathscr{L}(^nX;Y)$ para todo par $j,k \in \mathbb{N}$ y además

$$\|L_j - L_k\| = \sup_{\|x_1\|\leqslant 1,\ldots,\|x_n\|\leqslant 1} \|(L_j - L_k)(x_1,\ldots,x_n)\|.$$

Sea $(x_1,\ldots,x_n) \in X^n$, entonces

$$\|(L_j - L_k)(\frac{x_1}{\|x_1\|},\ldots,\frac{x_n}{\|x_n\|})\| \leqslant \|L_j - L_k\|,$$

y por propiedades de la aplicación $L_j - L_k$ se sigue que

$$\|L_j(x_1,\ldots,x_n) - L_k(x_1,\ldots,x_n)\| \leqslant \|L_j - L_k\|\|x_1\|\cdots\|x_n\| \tag{4}$$

para todo par $j,k \in \mathbb{N}$. De la ecuación (4) se deduce que $(L_j(x_1,\ldots,x_n))_j$ es una sucesión de Cauchy en Y y ya que Y es completo el límite

$$L(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{j\to\infty} L_j(x_1,\ldots,x_n) \tag{5}$$

existe. Dados $x_1,\ldots,x_k,y_k,\ldots,x_n \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$L_j(x_1,\ldots,x_k+\alpha y_k,\ldots,x_n) = L_j(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) + \alpha L_j(x_1,\ldots,y_k,\ldots,x_n)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Aplicando límite a ambos lados de la igualdad se verifica que L es lineal. Por otro lado, como $(L_j)_j$ es una sucesión acotada por ser de Cauchy, existe una constante $M > 0$ tal que $\|L_j\| \leqslant M$ para todo $j \in \mathbb{N}$, luego $\|L_j(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant M$ para todo $j \geqslant 1$ y todo $(x_1, \dots, x_n) \in B_{X^n}$, entonces

$$\|L(x_1, \dots, x_n)\| = \lim_{j \to \infty} \|L_j(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant M$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in B_{X^n}$. De esta última desigualdad se tiene que $\|L\| \leqslant M$ y por la Proposición 2.20 se concluye que L es una aplicación lineal continua. Finalmente, ya que $(L_j)_j$ es una sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe un entero $N > 0$ tal que

$$\|L_j(x_1, \dots, x_n) - L_k(x_1, \dots, x_n)\| \leqslant \|L_j - L_k\| < \varepsilon/2$$

para todo $j \geqslant k \geqslant N$ y todo $(x_1, \dots, x_n) \in B_{X^n}$. Haciendo $k \to \infty$, por la ecuación (5) tenemos que

$$\|L_j(x_1, \dots, x_n) - L(x_1, \dots, x_n)\| < \varepsilon/2$$

para todo $j \geqslant N$ y todo $(x_1, \dots, x_n) \in B_{X^n}$. Se concluye que $\|L_j - L\| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$ para todo $j \geqslant N$ y por lo tanto $\|L_j - L\| \to 0$ cuando $j \to \infty$. $\square$

Definición 2.22. *Denotamos por $\mathscr{L}^s({}^nX; Y)$ al subespacio de las aplicaciones $L \in \mathscr{L}({}^nX; Y)$ que son simétricas, esto es*

$$L(x_1, \dots, x_n) = L(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

para toda permutación σ de $\{1,2,...,n\}$.

Proposición 2.23. ((Mujica, 1986, Proposición 1.6)) *Para cada $L \in \mathscr{L}_a(^nX;Y)$ sea L^s definida por*

$$L^s(x_1,...,x_n) := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} L(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(n)}).$$

Entonces la aplicación $L \to L^s$ es una proyección de $\mathscr{L}_a(^nX;Y)$ sobre $\mathscr{L}_a^s(^nX;Y)$ con $\|L^s\| \leqslant \|L\|$ para cada $L \in \mathscr{L}_a(^nX;Y)$. Esta aplicación induce una proyección continua de $\mathscr{L}(^nX;Y)$ sobre $\mathscr{L}^s(^nX;Y)$.

Teorema 2.24. ((Mujica, 1986, Teorema 1.8)) *Sea $L \in \mathscr{L}_a^s(^nX;Y)$. Entonces para todo $x_1,...,x_n \in X$ tenemos la siguiente Fórmula de Leibniz*

$$L(x_1+\cdots+x_n)^n = \sum_\alpha \frac{n!}{\alpha!} L(x_1^{\alpha_1},...,x_n^{\alpha_n}),$$

donde $L(x)^n := L(x,...,x)$ con $x \in X$. Además, la suma se toma bajo todos los multi-subíndices $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ tales que $|\alpha| = \alpha_1+\cdots+\alpha_n = n$ y $\alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!$.

Teorema 2.25. ((Mujica, 1986, Teorema 1.10)) *Dada $L \in \mathscr{L}_a^s(^nX;Y)$ y $x_0,...,x_n \in X$ tenemos la Fórmula de Polarización*

$$L(x_1,...,x_n) = \frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_j=\pm1} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n L(x_0+\varepsilon_1 x_1,...,\varepsilon_n x_n)^n,$$

.

Demostración. Por la Fórmula de Leibniz (Teorema 2.24) tenemos que

$$
\begin{aligned}
L(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n)^n &= \sum_{\alpha}\frac{n!}{\alpha_0!\cdots\alpha_n!}L({x_0}^{\alpha_0},(\varepsilon_1x_1)^{\alpha_1},\ldots,(\varepsilon_nx_n)^{\alpha_n})\\
&= \sum_{\alpha}\frac{n!}{\alpha_0!\cdots\alpha_n!}{\varepsilon_1}^{\alpha_1}\cdots{\varepsilon_n}^{\alpha_n}L({x_0}^{\alpha_0},x_1^{\alpha_1},\ldots,{x_n}^{\alpha_n}),
\end{aligned}
$$

donde la suma se toma sobre todo $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ tal que $\alpha_0,\ldots,\alpha_n\geqslant 0$ y $\alpha_0+\cdots+\alpha_n=n$. Entonces

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\varepsilon_j=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_nL(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n)^n\\
&=\sum_{\varepsilon_j=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\sum_{\alpha}\frac{n!}{\alpha_0!\cdots\alpha_n!}{\varepsilon_1}^{\alpha_1}\cdots{\varepsilon_n}^{\alpha_n}L({x_0}^{\alpha_0},x_1^{\alpha_1},\ldots,{x_n}^{\alpha_n})\\
&=n!\sum_{\varepsilon_j=\pm1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\sum_{\alpha}\frac{{\varepsilon_1}^{\alpha_1}\cdots{\varepsilon_n}^{\alpha_n}L({x_0}^{\alpha_0},x_1^{\alpha_1},\ldots,{x_n}^{\alpha_n})}{\alpha_0!\cdots\alpha_n!}\\
&=n!\sum_{\varepsilon_j=\pm1}\sum_{\alpha}\frac{{\varepsilon_1}^{\alpha_1+1}\cdots{\varepsilon_n}^{\alpha_n+1}L({x_0}^{\alpha_0},x_1^{\alpha_1},\ldots,{x_n}^{\alpha_n})}{\alpha_0!\cdots\alpha_n!}\\
&=n!\sum_{\alpha}\sum_{\varepsilon_j=\pm1}\frac{L(x_0^{\alpha_0},x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n})}{\alpha_0!\cdots\alpha_n!}\cdot\varepsilon_1^{\alpha_1+1}\cdots\varepsilon_n^{\alpha_n+1}
\end{aligned}
$$

$$
=n!\sum_{\alpha}\left(\frac{L(x_0^{\alpha_0},x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n})}{\alpha_0!\cdots\alpha_n!}\left[\sum_{\varepsilon_j=\pm1}\varepsilon_1^{\alpha_1+1}\cdots\varepsilon_n^{\alpha_n+1}\right]\right). \tag{6}
$$

Si $\alpha_i=0$ para algún $1\leqslant i\leqslant n$, tendríamos que $\sum\limits_{\varepsilon_j=\pm1}\varepsilon_1^{\alpha_1+1}\cdots\varepsilon_n^{\alpha_n+1}=0$. En efecto, si $\alpha_i=0$, entonces

$$\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1^{\alpha_1+1}\varepsilon_2^{\alpha_2+1}\cdots(\varepsilon_i^1)\cdots\varepsilon_n^{\alpha_n+1} = \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1^{\alpha_1+1}\cdots\varepsilon_{i-1}^{\alpha_i-1}\cdot\varepsilon_{i+1}^{\alpha_i+1}\cdots\varepsilon_n^{\alpha_n+1}$$
$$-\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1^{\alpha_1+1}\cdots\varepsilon_{i-1}^{\alpha_i-1}\cdot\varepsilon_{i+1}^{\alpha_i+1}\cdots\varepsilon_n^{\alpha_n+1} = 0.$$

Por lo tanto $\alpha_i = 1$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$, donde $\alpha_0 = 0$ (recordemos que $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = n$) y $\sum\limits_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1^{\alpha_1+1}\cdots\varepsilon_n^{\alpha_n+1} = \sum\limits_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1^2\cdots\varepsilon_n^2 = 2^n$. Tenemos de la ecuación (6) que

$$\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n L(x_0+\varepsilon_1x_1+\cdots+\varepsilon_nx_n)^n &= n!\sum_{\alpha}\left(\frac{L(x_0^{\alpha_0}x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n})}{\alpha_0!\cdots\alpha_n!}\left[\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\varepsilon_1^2\cdots\varepsilon_n^2\right]\right)\\
&= n!\sum_{\alpha}\frac{L(x_0^{\alpha_0},x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n})}{\alpha_0!\cdots\alpha_n!}\cdot 2^n\\
&= n!2^n\sum_{\alpha}\frac{L(x_0^{\alpha_0},x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n})}{\alpha_0!\cdots\alpha_n!}.
\end{aligned}$$

Finalmente, como $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$ y $\alpha_0 = 0$, entonces $\sum\limits_{\alpha}\frac{L(x_0^{\alpha_0},x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n})}{\alpha_0!+\cdots+\alpha_n!} = L(x_1,\ldots,x_n)$ y así

$$L(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n L(x_0+\varepsilon_1x_1,\ldots,\varepsilon_nx_n)^n.$$

□

Definición 2.26. *Sean X,Y espacios de Banach. Decimos que $P : X \to Y$ es un polinomio $n-$homogéneo si existe una aplicación $L \in \mathscr{L}_a(^nX;Y)$ tal que $\hat{L}(x) := P(x) = L(x,\ldots,x)$ para cada $x \in X$. Denotamos por $\mathscr{P}_a(^nX;Y)$ al espacio de polinomios $n-$homogéneos y por $\mathscr{P}(^nX;Y)$ al subespacio de*

$\mathscr{P}_a(^nX;Y)$ de los polinomios $n-$homogéneos continuos. Para cada $P \in \mathscr{P}_a(^nX;Y)$ definimos

$$\|P\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|P(x)\|.$$

Cuando $Y = \mathbb{K}$ escribimos $\mathscr{P}_a(^nX;\mathbb{K}) = \mathscr{P}_a(^nX)$ y $\mathscr{P}(^nX;\mathbb{K}) = \mathscr{P}(^nX)$. Además, cuando $n = 0$ definimos $\mathscr{P}_a(^nX;Y) = \mathscr{P}(^nX;Y) := Y$.

Teorema 2.27. ((Mujica, 1986, Teorema 2.2)) *Para cada $L \in \mathscr{L}_a(^nX;Y)$ sea $\hat{L} \in \mathscr{P}_a(^nX;Y)$ definido por $\hat{L}(x) = L(x,\ldots,x) = L(x)^n$ para cada $x \in X$. Entonces:*

1. *Las siguientes desigualdades se tienen para cada $L \in \mathscr{L}_a(^nX;Y)$:*

$$\|\hat{L}\| \leqslant \|L\| \leqslant \frac{n^n}{n!}\|\hat{L}\|.$$

2. *La aplicación $L \in \mathscr{L}_a^s(^nX;Y) \to \hat{L} \in \mathscr{P}_a(^nX;Y)$ es lineal y biyectiva.*

Demostración. Para probar 1. veamos primero que $\|\hat{L}\| \leqslant \|L\|$. Sea $x \in B_X$, entonces $\|\hat{L}(x)\| = \|L(x,\ldots,x)\| \leqslant \sup_{\|x_1\|\leqslant 1,\ldots,\|x_n\|\leqslant 1} \|L(x_1,\ldots,x_n)\| \leqslant \|L\|$ y tenemos que $\|\hat{L}\| \leqslant \|L\|$. Veamos ahora que $\|L\| \leqslant \dfrac{n^n}{n!}\|\hat{L}\|$. Sea $(x_1,\ldots,x_n) \in B_{X^n}$. Aplicando la Fórmula de Polarización (Teorema 2.25) con $x_0 = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|L(x_1,\ldots,x_n)\| &\leqslant \left\| \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \hat{L}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n) \right\| \\
&\leqslant \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} |\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n| \|\hat{L}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)\|
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \|\hat{L}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)\|.$$

Ya que

$$\begin{aligned}\|\hat{L}(\frac{1}{n}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n))\| = \|L(\frac{1}{n}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n))^n\| &= \frac{1}{n^n}\|L(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)^n\| \\ &= \frac{1}{n^n}\|\hat{L}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)\|,\end{aligned}$$

y además $\frac{1}{n}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n) \in B_X$ pues

$$\|\frac{1}{n}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)\| \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\|\varepsilon_i x_i\|}{n} \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{|\varepsilon_i|}{n} \leqslant \frac{n}{n} = 1,$$

tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \|\hat{L}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)\| &\leqslant \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} n^n \left\|\hat{L}\left(\frac{1}{n}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)\right)\right\| \\ &\leqslant \frac{n^n}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \|\hat{L}\| \\ &\leqslant \frac{n^n}{2^n n!} \|\hat{L}\| \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} 1 \\ &= \frac{n^n}{2^n n!} \|\hat{L}\| 2^n \leqslant \frac{n^n}{n!} \|\hat{L}\|.\end{aligned}$$

Como $\|L(x_1,...,x_n)\| \leqslant \frac{n^n}{n}\|\hat{L}\|$ para todo $(x_1,...,x_n) \in B_{X^n}$, se sigue que $\|L\| \leqslant \frac{n^n}{n}\|\hat{L}\|$. Para probar 2. veamos primero que $L \to \hat{L}$ es inyectiva. Sean $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_a^s({}^n X; Y)$ tales que $\hat{L_1} = \hat{L_2}$, entonces

$\hat{L_1}(x) = L_1(x,...,x) = L_2(x,...,x) = \hat{L_2}(x)$ para todo $x \in X$. Por la Fórmula de Polarización con $x_0 = 0$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
L_1(x_1,...,x_n) &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n L_1(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)^n \\
&= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n L_2(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)^n = L_2(x_1,...,x_n),
\end{aligned}
$$

para todo $(x_1,...,x_n) \in X^n$ y así $L_1 = L_2$. Veamos ahora que $L \to \hat{L}$ es sobreyectiva. Sea $P \in \mathscr{L}_a(^nX;Y)$, entonces existe $L \in \mathscr{L}_a(^nX;Y)$ tal que $P = \hat{L}$. Veamos que $\hat{L} = \hat{L^s}$ donde L^s es la simetrización de L (ver Proposición 2.23). Sea $x \in X$, entonces

$$
\begin{aligned}
\hat{L^s}(x) = L^s(x,...,x) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} L(x,...,x) = \frac{1}{n!} L(x,...,x) \sum_{\sigma \in S_n} 1 = \frac{n!}{n!} L(x,...,x) \\
= L(x,...,x) = \hat{L}(x)
\end{aligned}
$$

para todo $x \in X$. Por lo tanto $P = \hat{L} = \hat{L^s}$. Finalmente sean $L_1, L_2 \in \mathscr{L}_a(^nX;Y)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces $(L_1 + \alpha L_2)(x,...,x) = L_1(x,...,x) + \alpha L_2(x,...,x) = \hat{L_1}(x) + \alpha \hat{L_2}(x) = (\hat{L_1} + \alpha \hat{L_2})(x)$ para todo $x \in X$. Ya que $L \to \hat{L}$ es biyectiva se sigue que $L_1 \hat{+} \alpha L_2 = \hat{L_1} + \alpha \hat{L_2}$ y así $L \to \hat{L}$ es lineal. Concluimos que $L \in \mathscr{L}_a^s(^nX;Y) \to \hat{L} \in \mathscr{P}_a(^nX;Y)$ es una aplicación lineal biyectiva. □

Corolario 2.28. ((Mujica, 1986, Corolario 2.3)) *Se tienen las siguientes afirmaciones:*

a) La aplicación $L \to \hat{L}$ induce un isomorfismo sobreyectivo entre $\mathscr{L}^s(^nX;Y)$ y $\mathscr{P}(^nX;Y)$;

b) Un polinomio $P \in \mathscr{P}_a(^nX;Y)$ es continuo si, y solo si, $\|P\| < \infty$;

c) $\mathscr{P}(^nX;Y)$ *es un espacio de Banach bajo la norma* $P \to \|P\|$.

Demostración. Sea $L \in \mathscr{L}_a^s(^nX;Y)$ continua y $(x_j)_j$ es una sucesión en X tal que $x_j \to x$. Ya que $(x_j,...,x_j) \to (x,...,x)$ cuando $j \to \infty$ tenemos que $\hat{L}(x_j) = L(x_j,...,x_j) \to L(x,...,x) = \hat{L}(x)$ y se sigue que $\hat{L}$ es continua. Esto implica que la aplicación $L \in \mathscr{L}^s(^nX;Y) \to \hat{L} \in \mathscr{P}(^nX;Y)$ está bien definida. Veamos ahora que la aplicación es sobreyectiva. Sea $P \in \mathscr{P}(^nX;Y)$. Sabemos que existe $L \in \mathscr{L}_a(^nX;Y)$ tal que $P = \hat{L}$. Si $(x_{j,1},...,x_{j,n})_j$ es una sucesión en X^n tal que $(x_{j,1},...,x_{j,n}) \to (x_1,...,x_n)$, por la Fórmula de Polarización dada en el Teorema 2.25 con $x_0 = 0$ tenemos que

$$L(x_{j,1},...,x_{j,n}) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n \hat{L}(\varepsilon_1 x_{j,1} + \cdots + \varepsilon_n x_{j,n}).$$

Ya que $(\varepsilon_1 x_{j,1} + \cdots + \varepsilon_n x_{j,n}) \to (\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)$, por la continuidad de $\hat{L}$ tenemos que $\hat{L}(\varepsilon_1 x_{j,1} + \cdots + \varepsilon_n x_{j,n}) \to \hat{L}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)$. Además se tienen las siguienes convergencias

$$\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n \hat{L}(\varepsilon_1 x_{j,1} + \cdots + \varepsilon_n x_{j,n}) \to \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n \hat{L}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n) \text{ cuando } \varepsilon_j = \pm 1,$$

$$\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n \hat{L}(\varepsilon_1 x_{j,1} + \cdots + \varepsilon_n x_{j,n}) \to \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n \hat{L}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n),$$

y finalmente

$$\frac{1}{2^n n!}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n \hat{L}(\varepsilon_1 x_{j,1} + \cdots + \varepsilon_n x_{j,n}) \to \frac{1}{2^n n!}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n \hat{L}(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n).$$

De la última convergencia se sigue que $L(x_{j,1},...,x_{j,n}) \to L(x_1,...,x_n)$ cuando $j \to \infty$ y así $L \in$

$\mathscr{L}^s(^nX;Y)$. Por otro lado, la inyectividad y la linealidad de $L \in \mathscr{L}^s(^nX;Y) \to \hat{L} \in \mathscr{P}(^nX;Y)$ se heredan de la aplicación $L \in \mathscr{L}^s_a(^nX;Y) \to \hat{L} \in \mathscr{P}_a(^nX;Y)$ y ya que $\|\hat{L}\| \leqslant \|L\| \leqslant \frac{n^n}{n!}\|\hat{L}\| < \infty$ para toda $L \in \mathscr{L}^s(^nX;Y)$ se concluye que la aplicación $L \in \mathscr{L}^s(^nX;Y) \to \hat{L} \in \mathscr{P}(^nX;Y)$ y su inversa son continuas. Por lo tanto, $\mathscr{L}^s(^nX;Y)$ y $\mathscr{P}(^nX;Y)$ son isomorfos y se prueba a). Para probar b) supongamos que $P \in \mathscr{P}_a(^nX;Y)$ es un polinomio continuo. Por el literal a) sabemos que existe $L \in \mathscr{L}^s(^nX;Y)$ tal que $P = \hat{L}$. Si $x \in B_X$ entonces $\|P(x)\| \leqslant \|L(x,\ldots,x)\| \leqslant \|L\| < \infty$ y se tiene que $\|P\| < \infty$. Supongamos ahora que $\|P\| < \infty$ y sea $(x_j)_j$ una sucesión en X tal que $x_j \to x$. Como $\|L\| \leqslant \frac{n^n}{n!}\|P\| < \infty$ donde $P = \hat{L}$, se sigue que L es continua y así $P(x_j) = L(x_j,\ldots,x_j) \to L(x,\ldots,x) = P(x)$. Luego P es un polinomio continuo. Finalmente, para probar c) sea $(P_j)_j$ una sucesión de Cauchy en $\mathscr{P}(^nX;Y)$. Por el literal a), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $L \in \mathscr{L}^s(^nX;Y)$ tal que $\hat{L_n} = P_n$. Ya que $P_j - P_k \in \mathscr{P}(^nX;Y)$ para todo $j,k \in \mathbb{N}$, se sigue de las desigualdades dadas en el teorema anterior que

$$\|P_j - P_k\| \leqslant \|L_j - L_k\| \leqslant \frac{n^n}{n!}\|P_j - P_k\|$$

para todo $j,k \in \mathbb{N}$. De esta desigualdad se sigue que $(L_j)_j$ es una sucesión de Cauchy y como $\mathscr{L}^s(^nX;Y)$ es un espacio de Banach (consecuencia de la Proposición 2.21) entonces $L_j \to L$ para algún $L \in \mathscr{L}^s(^nX;Y)$. Por la continuidad del isomorfismo $L \to \hat{L}$ tenemos que $P_n = \hat{L_n} \to \hat{L} = P$ y concluimos que $\mathscr{P}(^nX;Y)$ es un espacio de Banach. □

Ejemplo 2.29. ((Pérez, 2017, Ejemplo 1.2.7)) *Sea* $P : \ell_2 \to \mathbb{K}$ *tal que* $P((x_j)_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^n$*, donde*

$n \geqslant 2$ y sea $L : \ell_2^n \to \mathbb{K}$ tal que

$$L(x_1,\ldots,x_n) = x_{1,1}x_{2,1}\ldots x_{n,1} + x_{1,2}x_{2,2}\ldots x_{n,2} + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} x_{k,j}\right),$$

donde $x_i = (x_{i,j})_j \in \ell_2$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$. Veamos que $L \in \mathscr{L}_a({}^n\ell_2)$. En efecto, si $x_1,\ldots,x_k,y_k,\ldots,x_n \in \ell_2$, $1 \leqslant k \leqslant n$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned} L(x_1,\ldots,x_k+\alpha y_k,\ldots,x_n) &= \sum_{j=1}^{\infty} x_{1,j}\cdots(x_{k,j}+\alpha y_{k,j})\cdots x_{n,j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} x_{1,j}\cdots x_{k,j}\cdots x_{n,j} + \alpha\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{1,j}\cdots y_{k,j}\cdots x_{n,j}\right) \\ &= L(x_1,..,x_k,\ldots,x_n) + \alpha L(x_1,\ldots,y_k,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

Ya que $P((x_j)_j) = L((x_j)_j)^n$ para todo $(x_j)_j \in \ell_2$, se sigue que $P \in \mathscr{P}_a({}^n\ell_2)$. Por otro lado, supongamos que $x = (x_1,x_2,\ldots) \in B_{\ell_2}$. Ya que $\|x\| \leqslant 1$, entonces $\|x\|^2 \leqslant \|x\| \leqslant 1$ y como $|x_i| \leqslant \|x\| \leqslant 1$ para todo $i \geqslant 1$, tenemos además que $|x_i|^n \leqslant |x_i|^2 \leqslant |x_i|$ para todo $i \geqslant 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|P(x)\| = \|L(x,\ldots,x)\| = |x_1^n + x_2^n + \ldots| &\leqslant |x_1^n| + |x_2^n| + \ldots \leqslant |x_1|^n + |x_2|^n + \ldots \\ &\leqslant |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots \leqslant \|x\|^2 \leqslant \|x\| \leqslant 1. \end{aligned}$$

Así $\|P\| \leqslant 1 < \infty$ y por el Corolario 2.28 concluimos que $P \in \mathscr{P}({}^n\ell_2)$.

Proposición 2.30. *Para cada $P \in \mathscr{P}(^nX;Y)$ existe una única $\overset{\vee}{P} \in \mathscr{L}^s(^nX;Y)$ tal que*

$$P(x) = \overset{\vee}{P}(x,\dots,x)$$

para todo $x \in X$.

Demostración. Ya que $\mathscr{L}^s(X;Y)$ y $\mathscr{P}(^nX;Y)$ son isomorfos (Colorario 2.28, literal a)) existe un isomorfismo sobreyectivo $P \in \mathscr{P}(^nX;Y) \to \overset{\vee}{P} \in \mathscr{L}^s(^nX;Y)$. □

Definición 2.31. *Sean X,Y espacios de Banach. Decimos que $P \in \mathscr{P}(^nX;Y)$ es compacto si para cada subconjunto acotado B de X, el conjunto $P(B)$ es relativamente compacto en Y. Denotamos al espacio de los polinomios $n-$homogéneos compactos por $\mathscr{P}_K(^nX;Y)$.*

Definición 2.32. *Sean X,Y espacios de Banach. Denotamos por $\mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$ al espacio de polinomios $n-$homogéneos continuos y ω^*-continuos sobre conjuntos acotados con la norma definida para los polinomios $n-$homogéneos, esto es, $P \in \mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$ si, y solo si, dada una red $(x^*_\alpha)_\alpha$ acotada y ω^*-convergente en X^*, la red de imágenes $(P(x^*_\alpha))_\alpha$ es convergente en norma.*

Observación 2.33. Cuando $n=0$ tenemos que

$$\mathscr{P}_a(^0X^*;Y) = \mathscr{P}(^0X^*;Y) = \mathscr{P}_{\omega^*}(^0X^*;Y) = Y,$$

y cuando $n=1$ tenemos que

$$\mathscr{P}_{\omega^*}(^1X^*;Y) = K_{\omega^*}(X^*;Y).$$

La siguiente proposición es consecuencia del Teorema 2.25 y de la Proposición 2.30.

Proposición 2.34. *Dado $P \in \mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$ y $x_0^*,\ldots,x_n^* \in X^*$ tenemos la Fórmula de Polarización*

$$\overset{\vee}{P}(x_1^*,\ldots,x_n^*) = \frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n P(x_0^*+\varepsilon_1 x_1^*,\ldots,\varepsilon_n x_n^*).$$

Proposición 2.35. *Sea $P \in P_{\omega^*}(X^*;Y)$. Entonces $\overset{\vee}{P}$ es ω^*-continua sobre conjuntos acotados si, y solo si, P es ω^*-continuo sobre conjuntos acotados.*

Demostración. Sea $(x_\alpha^*)_\alpha$ una red acotada en X^* tal que $x_\alpha^* \xrightarrow{\omega^*} x^*$ y veamos que $P(x_\alpha^*) \to P(x^*)$. En efecto, como $x_\alpha^* \xrightarrow{\omega^*} x^*$ se tiene también que $(x_\alpha^*,\ldots,x_\alpha^*) \xrightarrow{\omega^*} (x^*,\ldots,x^*)$ y por lo tanto $\overset{\vee}{P}(x_\alpha^*,\ldots,x_\alpha^*) \to \overset{\vee}{P}(x^*,\ldots,x^*)$. Por la Proposición 2.30 tenemos que $P(x_\alpha^*) \to P(x^*)$. Por otro lado, sea $(x_{\alpha,1}^*,\ldots,x_{\alpha,n}^*)_\alpha$ una red acotada en $(X^*)^n$ tal que

$$(x_{\alpha,1}^*,\ldots,x_{\alpha,n}^*) \xrightarrow{\omega^*} (x_1^*,\ldots,x_n^*).$$

Entonces $x_{\alpha,k}^* \xrightarrow{\omega^*} x_k^*$ para todo $1 \leqslant k \leqslant n$ y también $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_{\alpha,i}^* \xrightarrow{\omega^*} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^*$. Como P es ω^*-continua sobre conjuntos acotados tenemos que $P\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_{\alpha,i}^*\right) \to P\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^*\right)$ y se sigue que

$$\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n P\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_{\alpha,i}^*\right) \to \varepsilon_1\cdots\varepsilon_n P\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^*\right)$$

para todo $\varepsilon_j = \pm 1$,

$$\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x^*_{\alpha,i}\right) \to \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x^*_i\right),$$

y finalmente

$$\frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x^*_{\alpha,i}\right) \to \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x^*_i\right).$$

De la convergencia anterior y de la Proposición 2.34 tenemos que $\overset{\vee}{P}(x^*_{\alpha,1},\ldots,x^*_{\alpha,n}) \to \overset{\vee}{P}(x^*_1,\ldots,x^*_n)$. Por lo tanto $\overset{\vee}{P}$ es ω^*-continua sobre conjuntos acotados. □

2.3. Linealización de polinomios $n-$homogéneos

En esta sección mostraremos los teoremas importantes en torno a la linealización de polinomios $n-$homogéneos. Sean $X_1,\ldots,X_n$ espacios de Banach y sea I el subespacio de $X_1 \times \cdots \times X_n$ generado por todos los elementos de la forma

$$(x_1,\ldots,(x_k+\lambda y_k),\ldots,x_n) - (x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) - \lambda(x_1,\ldots,y_k,\ldots,x_n) \tag{7}$$

donde $1 \leqslant k \leqslant n$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Definimos el espacio $X_1 \times \cdots \times X_n/I$ como el *Producto tensorial de* $X_1,\ldots,X_n$ el cual denotamos por $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$. Cuando $X_1 = \ldots = X_n$ denotamos a $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ por $\bigotimes_n X$. Los elementos de $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ los llamaremos *tensores* y los tensores de la forma $(x_1,\ldots,x_n)+I$ los cuales llamaremos *tensores básicos* los denotaremos por $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$. Sea $u =$

$\sum_j \lambda_i(x_{i,1},\ldots,x_{i,n})$ un elemento de $X_1 \times \cdots \times X_n$, entonces

$$u+I=\sum_i \lambda_i(x_{i,1},\ldots,x_{i,n})+I=\sum_i \lambda_i[(x_{i,1},\ldots,x_{i,n})+I]=\sum_i \lambda_i x_{i,1}\otimes\cdots\otimes x_{i,n}.$$

Por lo tanto, podemos volver a definir el espacio $X_1\otimes\cdots\otimes X_n$ de la siguiente forma:

Definición 2.36. ((Ryan, 1980, p. 1)) *Sean $X_1,\ldots,X_n$ espacios de Banach. Definimos el producto tensorial $X_1\otimes\cdots\otimes X_n$ como el espacio vectorial generado por todos los elementos de la forma $x_1\otimes\cdots\otimes x_n$, donde $x_1,\ldots,x_n$ son elementos de X, sujetos a las relaciones:*

1. $x_1\otimes\cdots\otimes(\lambda x_i)\otimes\cdots\otimes x_n=\lambda(x_1\otimes\cdots\otimes x_i\otimes\cdots\otimes x_n)$ *para todo i y todo λ en $\mathbb{K}$,*

2. $x_1\otimes\cdots\otimes(x_i+y_i)\otimes\cdots\otimes x_n=x_1\otimes\cdots\otimes x_i\otimes\cdots\otimes x_n+x_1\otimes\cdots\otimes y_i\otimes\cdots\otimes x_n$ *para todo i.*

De la definición anterior tenemos que si u es un elemento de $X_1\otimes\cdots\otimes X_n$, entonces u puede ser escrito (no necesariamente de forma única) como

$$u=\sum_i \lambda_i x_{i,1}\otimes\cdots\otimes x_{i,n}=\sum_i(\lambda_i x_{i,1})\otimes\cdots\otimes x_{i,n}=\sum_i x_{i,1}\otimes\cdots\otimes x_{i,n},$$

donde $\lambda_i\in\mathbb{K}$ y $x_{i,j}\in X_j$ para todo i y todo $1\leqslant j\leqslant n$. Observe que redefinimos $x_{i,1}:=\lambda_i x_{i,1}$ para mostrar que se puede prescindir de los coeficientes λ_i en la representación de u. Podemos definir una norma sobre $X_1\otimes\cdots\otimes X_n$ como lo muestra el siguiente resultado:

Proposición 2.37. *Dado $u = \sum_i \lambda_i x_{i,1} \otimes \cdots \otimes x_{i,n}$ un elemento de $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$, la función*

$$\pi(u) = \text{ínf}\left\{\sum_i |\lambda_i| \|x_{i,1}\| \cdots \|x_{i,n}\| : u = \sum \lambda_i x_{i,1} \otimes \cdots \otimes x_{i,n}\right\}$$

es una norma sobre $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ y $\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para cada $x_j \in X_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Definición 2.38. *Denotaremos al espacio vectorial normado $(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n, \pi)$ por $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$ y cuando $X_1 = ... = X_n$ denotaremos a $(\bigotimes_n X, \pi)$ por $\bigotimes_{n,\pi} X$. Denotaremos a los tensores básicos de $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$ por $x_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi x_n$. Además, denotaremos por $X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n$ ($\hat{\bigotimes}_{n,\pi} X$) al completamiento de $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ ($\bigotimes_{n,\pi} X$, respectivamente) con respecto a la norma π, donde sus tensores básicos serán denotados por $x_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi x_n$ y cuando no haya lugar a confusión los denotaremos simplemente por $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$*

Proposición 2.39. ((Dineen and Mujica, 2015, p. 368)) *Sean $X_1, ..., X_n, Y$ espacios de Banach. Entonces*

$$\mathscr{L}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n; Y) \cong \mathscr{L}(X_1, ..., X_n; Y) \cong \mathscr{L}(X_1; \mathscr{L}(X_2, ..., X_n; Y)).$$

Demostración. Veamos que $\mathscr{L}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n; Y) \cong \mathscr{L}(X_1, ..., X_n; Y)$. Supongamos que $L \in \mathscr{L}(X_1, ...$ $..., X_n; Y)$, que $u = \sum_i \lambda_i x_{i,1} \otimes \cdots \otimes x_{i,n}$ es un elemento de $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$ y que $\tilde{L}$ es la aplicación dada por

$$\tilde{L}(u) = \tilde{L}\left(\sum_i \lambda_i x_{i,1} \otimes \cdots \otimes x_{i,n}\right) = \sum_i \lambda_i L(x_{i,1}, ..., x_{i,n}).$$

Si $(y_1, ..., y_n) \in x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, entonces $(x_1, ..., x_n) - (y_1, ..., y_n) \in I$ (ver Ecuación (7)). Como $L(v) = 0$ para todo $v \in I$, se sigue directamente que $L(x_1, ..., x_n) = L(y_1, ..., y_n)$. En general, si $u_1 = \sum_i \lambda_i x_{i,1} \otimes$

$\cdots\otimes x_{i,n}$ y $u_2 = \sum_i \lambda_i y_{i,1}\otimes\cdots\otimes y_{i,n}$ son iguales, tenemos que $x_{i,1}\otimes\cdots\otimes x_{i,n} = y_{i,1}\otimes\cdots\otimes x_{i,n}$ (luego $(y_{i,1},\ldots,y_{i,n}) \in x_{i,1}\otimes\cdots\otimes x_{y_{i,n}}$) para todo $1 \leqslant i \leqslant n$ y por lo anterior $L(x_{i,1},\ldots,x_{i,n}) = L(y_{i,1},\ldots,y_{i,n})$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$. Entonces $\sum_i \lambda_i L(x_{i,1},\ldots,x_{i,n}) = \sum_i \lambda_i L(y_{i,1},\ldots,y_{i,n})$ y se sigue que $L \to \tilde{L}$ está bien definida. Por otro lado, dado $u = \sum_i x_{i,1}\otimes\cdots\otimes x_{i,n}$ (recordemos que podemos prescindir de los λ_i en la representación de u) tenemos que

$$(L_1 \tilde{+} \alpha L_2)\left(\sum_i x_{i,1}\otimes\cdots\otimes x_{i,n}\right) = \sum_i (L_1+\alpha L_2)(x_{i,1},\ldots,x_{i,n})$$

$$= \sum_i L_1(x_{i,1},\ldots,x_{i,n}) + \alpha \sum_i L_2(x_{i,1},\ldots,x_{i,n}) = \tilde{L_1}(u) + \alpha\tilde{L_2}(u).$$

Por lo tanto $L \to \tilde{L}$ es lineal. Para probar que dicha aplicación es inyectiva supongamos que $\tilde{L_1} = \tilde{L_2}$ y sea $(x_1,\ldots,x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$. Entonces $L_1(x_1,\ldots,x_n) = \tilde{L_1}(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) = \tilde{L_2}(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) = L_2(x_1,\ldots,x_n)$ y así $L_1 = L_2$. Sea $S \in \mathscr{L}(X_1\otimes_\pi\cdots\otimes_\pi X_n;Y)$ y definamos $L : X^n \to Y$ tal que $L(x_1,\ldots,x_n) = S(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)$. Dados $x_1 \in X_1,\ldots,x_k, y_k \in X_k,\ldots,x_n \in X_n$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos que $L(x_1,\ldots,x_k+\alpha y_k,\ldots,x_n) = S(x_1\otimes\cdots\otimes(x_k+\alpha y_k)\otimes\cdots\otimes x_k) = S(x_1\otimes\cdots\otimes x_k\otimes\cdots\otimes x_n) + \alpha S(x_1\otimes\cdots\otimes y_k\otimes\cdots\otimes x_n) = L(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n) + \alpha L(x_1,\ldots,y_k,\ldots,x_n)$ para todo $1 \leqslant k \leqslant n$. Entonces $L \in \mathscr{L}(X_1,\ldots,X_n;Y)$ y así $L \to \tilde{L}$ es sobreyectiva. Por todo lo anterior tenemos que $L \in \mathscr{L}(X_1,\ldots,X_n;Y) \to \tilde{L} \in \mathscr{L}(X_1\otimes_\pi\cdots\otimes_\pi X_n;Y)$ es una aplicación lineal biyectiva. Sea $u = \sum_j x_{j,1}\otimes\cdots\otimes x_{j,n} \in X_1\otimes_\pi\cdots\otimes_\pi X_n$ una representación de u. Tenemos que

$$\|\tilde{L}(u)\| = \left\|\tilde{L}\left(\sum_j x_{j,1}\otimes\cdots\otimes x_{j,n}\right)\right\| = \left\|\sum_j \tilde{L}(x_{j,1}\otimes\cdots\otimes x_{j,n})\right\| = \left\|\sum_j L(x_{j,1},\ldots,x_{j,n})\right\|$$

$$\leqslant \sum_j \|L(x_{j,1},\ldots,x_{j,n})\| \leqslant \|L\| \sum_j \|x_{j,1}\| \cdots \|x_{j,n}\|.$$

Ya que lo anterior se tiene para cualquier representación de u tenemos $\|\tilde{L}(u)\| \leqslant \|L\|\pi(u)$. Por lo tanto, $\tilde{L}$ es acotada y se cumple que $\|\tilde{L}\| \leqslant \|L\|$. Por otro lado, si $(x_1,\ldots,x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$, entonces $\|L(x_1,\cdots,x_n)\| = \|\tilde{L}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)\| \leqslant \|\tilde{L}\|\|x_1\| \cdots \|x_n\|$. Así $\|L\| \leqslant \|\tilde{L}\|$ y $\|L\| = \|\tilde{L}\|$. Por el Teorema 2.13, la aplicación $\tilde{L} : X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \to Y$ admite una única extensión lineal continua $\tilde{L} : X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n \to Y$ tal que sus normas coinciden. Por lo tanto la aplicación $L \in \mathscr{L}(X_1,\ldots,X_n;Y) \to \tilde{L} \in \mathscr{L}(X_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X_n;Y)$ es una isometría lineal. Gracias a esta última propiedad concluimos que $L \to \tilde{L}$ y su inversa son continuas y por tanto $L \to \tilde{L}$ es un isomorfismo isométrico sobreyectivo. Para probar que $\mathscr{L}(X_1,\ldots,X_n;Y) \cong \mathscr{L}(X_1;\mathscr{L}(X_2,\ldots,X_n;Y))$ consideremos la aplicación

$$L \in \mathscr{L}(X_1,\ldots,X_n;Y) \to \tilde{L} \in \mathscr{L}(X_1;\mathscr{L}(X_2,\ldots,X_n;Y)),$$

tal que $\tilde{L}(x_1)(x_2,\ldots,x_n) := L(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ para todo $x_i \in X_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Supongamos que $L_1, L_2 \in \mathscr{L}(X_1,\ldots,X_n;Y)$ son tales que $\tilde{L_1} = \tilde{L_2}$. Entonces $L_1(x_1,\ldots,x_n) = \tilde{L_1}(x_1)(x_2,\ldots,x_n) = \tilde{L_2}(x_1)(x_2,\ldots,x_n) = L_2(x_1,\ldots,x_n)$ para todo $(x_1,\ldots,x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ y así $L_1 = L_2$. Esto implica que $L \to \tilde{L}$ es inyectiva. Para probar que $L \to \tilde{L}$ es sobreyectiva supongamos que $S \in \mathscr{L}(X_1;\mathscr{L}(X_2,\ldots,X_n;Y))$ y definamos $L : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ por $L(x_1,\ldots,x_n) = S(x_1)(x_2,\ldots,x_n)$ para todo $(x_1,\ldots,x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$. La linealidad de L en la primera componente se obtiene directamente de la linealidad de S y la linealidad de L en las demás componentes se obtiene directamente de la linealidad de $S(x_1)$ para cada valor fijo $x_1 \in X_1$. Por otro lado, sea $(x_1,\ldots,x_n) \in B_{X_1 \times \cdots \times X_n}$. Ya que L es continua tenemos que

$\|\tilde{L}(x_1)(x_2,...,x_n)\| = \|L(x_1,...,x_n)\| \leqslant \|L\|$, entonces $\|\tilde{L}(x_1)\| \leqslant \|L\|$ para todo $x_1 \in B_{X_1}$ y así $\|\tilde{L}\| \leqslant \|L\|$. Además, ya que $\tilde{L}$ y $\tilde{L}(x_1)$ son continuas se sigue que $\|L(x_1,...,x_n)\| = \|\tilde{L}(x_1)(x_2,...,x_n)\| \leqslant \|\tilde{L}(x_1)\| \leqslant \|\tilde{L}\|$ y así $\|L\| \leqslant \|\tilde{L}\|$. Entonces $\|L\| = \|\tilde{L}\|$ y $L \to \tilde{L}$ es una isometría lineal. La continuidad de $L \to \tilde{L}$ y de su inversa se sigue directamente del resultado anterior. Concluimos que $L \in \mathscr{L}(X_1,...,X_n;Y) \to \tilde{L} \in \mathscr{L}(X_1;\mathscr{L}(X_2,...,X_n;Y))$ es un isomorfismo sobreyectivo. □

Corolario 2.40. *Si X y Y son espacios de Banach y $L \in \mathscr{L}_a(^nX;Y)$, entonces existe una única aplicación lineal $\tilde{L} \in \mathscr{L}_a(\bigotimes_{n,\pi} X;Y)$ tal que $\tilde{L}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = L(x_1,...,x_n)$ para todo $x_i \in X$, $1 \leqslant i \leqslant n$. La aplicación*

$$L \in \mathscr{L}_a(^nX;Y) \to \tilde{L} \in \mathscr{L}_a(\bigotimes_{n,\pi} X;Y)$$

es lineal biyectiva. Además, dicha aplicación induce un isomorfismo sobreyectivo entre $\mathscr{L}(^nX;Y)$ y $\mathscr{L}(\hat{\bigotimes}_{n,\pi} X;Y)$.

Demostración. Se sigue directamente de la proposición anterior haciendo $X_1 = ... = X_n$ en el primer isomorfismo sobreyectivo. □

Definición 2.41. *Sea $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ de $\bigotimes_{n,\pi} X$. Definimos la simetrización de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ por*

$$x_1 \otimes_s x_2 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)},$$

donde S_n denota el grupo de permutaciones de n elementos. Definimos $\bigotimes_{n,s,\pi} X$ (o simplemente $\bigotimes_{n,s} X$) como el subespacio de $\bigotimes_{n,\pi} X$ generado por los elementos de la forma $x_1 \otimes_s x_2 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n$ con $x_1,...,x_n$ en X. Cuando no haya lugar a confusión escribiremos $x_1 \otimes_s x_2 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n$ simple-

mente como $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$. Además, definimos $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X$ como el completamiento de $\bigotimes_{n,s,\pi} X$ con respecto a la norma π.

Proposición 2.42. *Sean $X_1, ..., X_n, X, Y$ espacios de Banach y $1 \leqslant k \leqslant n$. Entonces la aplicación*

$$L \in \mathscr{L}(X_1, ..., X_n; Y) \to \tilde{L} \in \mathscr{L}(X_1, ..., X_{n-k}; \mathscr{L}(X_{n-k+1}, ..., X_n; Y)),$$

tal que $\tilde{L}(x_1, \ldots, x_{n-k})(x_{n-k+1}, \ldots, x_n) := L(x_1, \ldots, x_n)$ para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ es un isomorfismo sobreyectivo. En particular, si $X_1 = \ldots = X_n = X$ se tiene que $\mathscr{L}(^n X; Y) \cong \mathscr{L}(^{n-k} X; \mathscr{L}(^k X; Y))$ y $\mathscr{L}^s(^n X; Y) \cong \mathscr{L}(^{n-k} X; \mathscr{L}^s(^k X; Y))$.

Demostración. La prueba de este resultado es análoga a la realizada en la Proposición 2.39 para probar que $L \in \mathscr{L}(X_1, ..., X_n; Y) \to \tilde{L} \in \mathscr{L}(X_1; \mathscr{L}(X_2, ..., X_n; Y))$ dada por $\tilde{L}(x_1)(x_2, ..., x_n) := L(x_1, ..., x_n)$ es un isomorfismo sobreyectivo. □

Proposición 2.43. ((Ryan, 1980, Proposición 1.4)) *Dado $u = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \bigotimes_{n,s} X$ tenemos la Fórmula de Polarización*

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n = \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\varepsilon = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n (\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)^n,$$

donde $x^n := x \otimes \cdots \otimes x$ para todo $x \in X$. Por lo tanto, se tiene que si $u \in \bigotimes_{n,s} X$, entonces u puede ser escrito (no necesariamente de forma única) como

$$u = \sum_i x_i \otimes \cdots \otimes x_i.$$

Demostración. Sea $x_1,\dots,x_n \in X$. Entonces

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n(\varepsilon_1 x_1+\cdots\varepsilon_n x_n)^n \\
&=\frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\left[\sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_n\leqslant n}\varepsilon_{i_1}\cdots\varepsilon_{i_n}x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n}\right] \\
&=\frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\sum_{\underbrace{i_1,\dots,i_n}_{\text{distintos}}}\varepsilon_{i_1}\cdots\varepsilon_{i_n}x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n} \\
&+\frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\sum_{\underbrace{i_1,\dots,i_n}_{\text{no todos distintos}}}\varepsilon_{i_1}\cdots\varepsilon_{i_n}x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n} \\
&=A+B.
\end{aligned}
$$

Podemos escribir

$$
\begin{aligned}
A&=\frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\sum_{\underbrace{i_1,\dots,i_n}_{\text{distintos}}}\varepsilon_{i_1}\cdots\varepsilon_{i_n}x_{i_1}\otimes\cdots\otimes x_{i_n} \\
&=\frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_{\sigma(1)}\cdots\varepsilon_{\sigma(n)}x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(n)} \\
&=\frac{1}{n!2^n}\sum_{\sigma\in S_n}\left[\sum_{\varepsilon_j=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n\varepsilon_{\sigma(1)}\cdots\varepsilon_{\sigma(n)}\right]x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(n)}.
\end{aligned}
$$

Dado $1\leqslant i\leqslant n$, como $\varepsilon_i=\varepsilon_{\sigma(j)}$ para un único $1\leqslant j\leqslant n$ se sigue que

$$\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \varepsilon_{\sigma(1)} \cdots \varepsilon_{\sigma(n)} = \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} (\varepsilon_1)^2 \cdots (\varepsilon_n)^2 = 2^n.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\sigma\in S_n} \left[\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \varepsilon_{\sigma(1)} \cdots \varepsilon_{\sigma(n)} \right] x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} \\ &= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\sigma\in S_n} 2^n \cdot x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n. \end{aligned}$$

Si denotamos por D_n al conjunto de funciones de $\{1,...,n\}$ en $\{1,...,n\}$ no sobreyectivas, tenemos que

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \sum_{\tau\in D_n} \varepsilon_{\tau(1)} \cdots \varepsilon_{\tau(n)} x_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau(n)} \\ &= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\tau\in D_n} \left[\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \varepsilon_{\tau(1)} \cdots \varepsilon_{\tau(n)} \right] x_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\tau(n)}. \end{aligned}$$

Sea $\tau \in D_n$, ya que τ no es sobreyectiva, existe $1 \leqslant j \leqslant n$ el cual no pertenece al rango de τ. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_j \cdots \varepsilon_n \varepsilon_{\tau(1)} \cdots \varepsilon_{\tau(n)} &= \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{j-1} (1) \varepsilon_{j+1} \cdots \varepsilon_n \varepsilon_{\tau(1)} \cdots \varepsilon_{\tau(n)} \\ &\quad + \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{j-1} (-1) \varepsilon_{j+1} \cdots \varepsilon_n \varepsilon_{\tau(1)} \cdots \varepsilon_{\tau(n)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{j-1}\varepsilon_{j+1} \cdots \varepsilon_n \varepsilon_{\tau(1)} \cdots \varepsilon_{\tau(n)}$$

$$- \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{j-1}\varepsilon_{j+1} \cdots \varepsilon_n \varepsilon_{\tau(1)} \cdots \varepsilon_{\tau(n)} = 0.$$

Esto implica que $B = 0$ y así

$$\frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n (\varepsilon_1 x_1 + \cdots \varepsilon_n x_n)^n = A + B = A = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n.$$

$\square$

Proposición 2.44. ((Ryan, 1980, Proposición 1.3)) *Sea $P \in \mathscr{P}(^nX;Y)$. Entonces existe una única aplicación lineal $T_P \in \mathscr{L}_a(\bigotimes_{n,s} X;Y)$ tal que $T_P(x \otimes \cdots \otimes x) = P(x)$. Por otro lado, si $S \in \mathscr{L}_a(\bigotimes_{n,s} X;Y)$, entonces la igualdad $P(x) = S(x \otimes \cdots \otimes x)$ define un polinomio $n-$homogéneo P de X en Y tal que $T_P = S$. La aplicación*

$$P \in \mathscr{P}_a(^nX;Y) \to T_P \in \mathscr{L}_a(\bigotimes_{n,s} X;Y)$$

es lineal biyectiva.

Demostración. Sea $P \in \mathscr{P}(^nX;Y)$. Escojamos $L \in \mathscr{L}(^nX;Y)$ tal que $P(x) = L(x,...,x)$ para todo $x \in X$. Entonces $P(x) = \tilde{L}(x \otimes \cdots \otimes x)$ para todo $x \in X$, donde $\tilde{L} : \otimes_n X \to Y$ es la aplicación lineal asociada a L en el Corolario 2.40. Sea T_P la restricción de $\tilde{L}$ a $\bigotimes_{n,s} X$, entonces T_P es lineal y $T_P(x \otimes \cdots \otimes x) = P(x)$ para todo $x \in X$. Además T_P está unívocamente definida por P ya que si $S \in \mathscr{L}(\bigotimes_{n,s} X;Y)$ tiene también la propiedad de que $S(x \otimes \cdots \otimes x) = P(x)$, entonces para cada elemento

$u = \sum_i x_i \otimes \cdots \otimes x_i$ de $\bigotimes_{n,s} X$ (podemos tomarlo así gracias a la Proposición 2.43) tenemos que

$$S(u) = S\left(\sum_i x_i \otimes \cdots \otimes x_i\right) = \sum_j S(x_i \otimes \cdots \otimes x_i) = \sum_i P(x_i) = \sum_i T_P(x_i \otimes \cdots \otimes x_i)$$
$$= T_P\left(\sum_i x_i \otimes \cdots \otimes x_i\right) = T_P(u).$$

Por lo tanto, $S = T_P$. Por otro lado, si S es una aplicación lineal de $\bigotimes_{n,s} X$ en Y, denotemos por $\tilde{S}$ a la única extensión lineal de S que va de $\bigotimes_n X$ a Y (Teorema 2.13). Por el Corolario 2.40 existe una única aplicación $n-$lineal L tal que $L(x, ..., x) = \tilde{S}(x \otimes \cdots \otimes x)$ para todo $x \in X$. Si P es el polinomio asociado a la aplicación L, tenemos que

$$P(x) = L(x, ..., x) = \tilde{S}(x, ..., x) = S(x \otimes \cdots \otimes x)$$

para cada $x \in X$. Por lo tanto $T_P = S$. De lo anterior se sigue que

$$P \in \mathscr{P}_a(^n X; Y) \to T_P \in \mathscr{L}_a(\bigotimes_{n,s} X; Y)$$

es una aplicación biyectiva. Veamos que dicha aplicación es lineal. Sean $P_1, P_2 \in \mathscr{P}_a(^n X; Y)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Como $(P_1 + \alpha P_2)(x) = P_1(x) + \alpha P_2(x) = T_{P_1}(x \otimes \cdots \otimes x) + \alpha T_{P_2}(x \otimes \cdots \otimes x) = (T_{P_1} + \alpha T_{P_2})(x \otimes \cdots \otimes x)$ para todo $x \in X$, se sigue de la biyectividad de $P \to T_P$ que T_P es la única aplicación lineal que cumple esta propiedad, así que $T_{(P_1 + \alpha P_2)} = T_{P_1} + \alpha T_{P_2}$. $\square$

El siguiente resultado se conoce como Teorema de Linealización de Ryan:

Proposición 2.45. *Sean X y Y espacios de Banach y $P \in \mathscr{P}(^nX;Y)$. Entonces existe una única aplicación lineal continua $T_P \in \mathscr{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi}X;Y)$ tal que $T_P(x\otimes\cdots\otimes x) = P(x)$ para todo $x \in X$. La aplicación*

$$P \in \mathscr{P}(^nX;Y) \to T_P \in \mathscr{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi}X;Y)$$

es un isomorfismo sobreyectivo isométrico. Además $P \in \mathscr{P}_K(^nX;Y)$ si, y solo si, $T_P \in K(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi}X;Y)$.

Demostración. Suponga que $P \in \mathscr{P}(^nX;Y)$ y sea T_P es la aplicación lineal asociada a P de la Proposición 2.44. Dado $u \in \bigotimes_{n,s,\pi}X$ tal que $u = \sum_i x_i\otimes\cdots\otimes x_i$ es una representación de u, tenemos que

$$\begin{aligned}\|T_P(u)\| = \left\|T_P\left(\sum_i x_i\otimes\cdots\otimes x_i\right)\right\| &= \left\|\sum_i T_P(x_i\otimes\cdots\otimes x_i)\right\| \leqslant \sum_i \|P(x_i)\| \\ &= \sum_i \left\|P\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right)\right\| \|x_i\|^n \leqslant \|P\| \sum_i \|x_i\|^n.\end{aligned}$$

La última desigualdad se tiene ya que $\dfrac{x_i}{\|x_i\|} \in B_X$. Como estas desigualdades se tienen para cualquier representación de u, tenemos que

$$\|T_P(u)\| \leqslant \|P\| \operatorname{ínf}\left\{\sum_i \|x_i\|^n : u = \sum_i x_i\otimes\cdots\otimes x_i\right\} = \|P\|\pi(u).$$

Por lo tanto $\|T_P\| \leqslant \|P\| < \infty$. Esto prueba que $P \in \mathscr{P}(^nX;Y) \to T_P \in \mathscr{L}(\bigotimes_{n,s,\pi}X;Y)$ está bien definida. Por otro lado, sea $S \in \mathscr{L}(\otimes_{n,s,\pi}X;Y)$ dada. Por la proposición anterior existe $P \in \mathscr{P}_a(^nX;Y)$ tal que $T_P = S$. Veamos que $P \in \mathscr{P}(^nX;Y)$. Dado $x \in B_X$, esto es, $\|x\| \leqslant 1$, observe que $\pi(x\otimes\cdots\otimes$

$x) = 1$. En efecto, $\pi(x\otimes\cdots\otimes x) = \text{ínf}\{\|x\|^n\} = \|x\|^n \leqslant \|x\| \leqslant 1$. Por lo tanto, si $x \in B_X$, entonces $x\otimes\cdots\otimes x \in B_{\bigotimes_{n,s,\pi} X}$ y como T_P es una aplicación lineal continua tenemos que

$$\|P(x)\| = \|T_P(x\otimes\cdots\otimes x)\| \leqslant \|T_P\| < \infty. \tag{8}$$

Por el Corolario 2.28 se sigue que $P \in \mathscr{P}(^nX;Y)$. Esto prueba que la aplicación $P \in \mathscr{P}(^nX;Y) \to T_P \in \mathscr{L}(\bigotimes_{n,s,\pi} X;Y)$ es sobreyectiva. De la ecuación (8) se sigue que $\|P\| \leqslant \|T_P\|$, y así $\|P\| = \|T_P\|$. Luego $P \in \mathscr{P}(^nX;Y) \to T_P \in \mathscr{L}(\bigotimes_{n,s,\pi} X;Y)$ es una isometría, y por lo tanto es una aplicación inyectiva, continua y su inversa es continua. Su linealidad se hereda de la linealidad de la aplicación $P \in \mathscr{P}_a(^nX;Y) \to T_P \in \mathscr{L}_a(\bigotimes_{n,s} X;Y)$ dada en la Proposición 2.44. Así $P \in \mathscr{P}(^nX;Y) \to T_P \in \mathscr{L}(\bigotimes_{n,s,\pi} X;Y)$ es un isomorfismo sobreyectivo isométrico. Por otro lado, ya que $\bigotimes_{n,s,\pi} X$ es un subespacio denso de $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X$, por el Teorema 2.13 para cada $T_P \in \mathscr{L}(\bigotimes_{n,s,\pi} X;Y)$ existe una única extensión lineal continua $T_P \in \mathscr{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X;Y)$ tal que sus normas son iguales. Por lo tanto, la aplicación

$$P \in \mathscr{P}(^nX;Y) \to T_P \in \mathscr{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X;Y)$$

es un isomorfismo sobreyectivo isométrico. Suponga que $P \in \mathscr{P}_K(^nX;Y)$ y $T_P \in \mathscr{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X;Y)$. Sea $(x_j\otimes\cdots\otimes x_j)_j$ una sucesión acotada en $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X$ y consideremos la sucesión $(x_j)_j$ en X. Como P es compacto existe una subsucesión $(x_{j_i})_i$ tal que $(P(x_{j_i}))_i$ es convergente y ya que $T_P(x_{j_i}\otimes\cdots\otimes x_{j_i}) = P(x_{j_i})$ se sigue que $(x_{j_i}\otimes\cdots\otimes x_{j_i})_i$ es una subsucesión tal que $(T_P(x_{j_i}\otimes\cdots\otimes x_{j_i}))_i$ es convergente. Supongamos ahora que T_P es compacto, que $P \in \mathscr{P}(^nX;Y)$ y que $(x_j)_j$ es una sucesión acotada en X. Dada la sucesión $(x_j\otimes\cdots\otimes x_j)_j$ en $\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi} X$ existe una subsucesión $(x_{j_i}\otimes$

$\cdots \otimes x_{j_i})_i$ tal que $(T_P(x_{j_i} \otimes \cdots \otimes x_{j_i}))_i$ es convergente. Como $P(x_{j_i}) = T_P(x_{j_i} \otimes \cdots \otimes x_{j_i})$ se sigue que $(x_{j_i})_i$ es una subsucesión tal que $P(x_{j_i})_i$ es convergente y así P es compacto. Esto demuestra que $P \in \mathscr{P}_K(^nX;Y)$ si, y solo si, $T_P \in K(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi}X;Y)$ en el isomorfismo $P \in \mathscr{P}(^nX;Y) \to T_P \in \mathscr{L}(\hat{\bigotimes}_{n,s,\pi}X;Y)$. □

2.4. Otras propiedades utilizadas

Definición 2.46. *Sea X un espacio de Banach. Decimos que X tiene una expansión incondicional finito dimensional de la identidad si existe una sucesión de operadores lineales acotados $(A_n)_n$ en X de rango finito tal que para todo $x \in X$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) = x,$$

donde la convergencia de la serie es incondicional.

Ejemplo 2.47. *Sea $A_i : \ell_2 \to \ell_2$ la aplicación definida por $A_i(x) = a_i e_i$ si $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ para todo $i \in \mathbb{N}$ donde $e_i = (e_{j,i})_j$ es tal que $e_{i,j} = 1$ cuando $i = j$ y $e_{i,j} = 0$ en los demás casos, entonces A_i es un operador lineal continuo de rango igual a 1 para cada $i \in \mathbb{N}$. Además, se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) = x$$

para todo $x \in \ell_2$. Por lo tanto, ℓ_2 tiene una expansión incondicional finito dimensional de la identidad.

El siguiente resultado que se encuentra de manera más general en Kalton (1974). Para los propósitos del trabajo, lo enunciaremos de la siguiente forma:

Proposición 2.48. *Sea X un espacio de Banach con una expansión incondicional finito dimensional de la identidad $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si Y es cualquier espacio de Banach de dimensión infinita, entonces los siguientes resultados son equivalentes:*

1. $K(X;Y) = \mathscr{L}(X;Y)$;
2. $\mathscr{L}(X;Y)$ *no contiene una copia de* ℓ_∞.

3. Copias de ℓ_∞ y $\ell_\infty(\Gamma)$ en espacios de polinomios

El siguiente resultado, probado en el año 1991 por el matemático polaco Lech Drewnowski establece condiciones necesarias y suficientes para que el espacio $K_{\omega^*}(X^*;Y)$ de los operadores $\omega^* - \omega-$continuos y compactos de X^* en Y contenga una copia de ℓ_∞:

Teorema 3.1. ((Drewnowski, 1990, Teorema de Drewnowski)) *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces $K_{w*}(X^*;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞ si, y solo si, X o Y contiene una copia de ℓ_∞.*

Ya que $K(X;Y)$ y $K_{\omega*}(X^{**};Y)$ son isométricamente isomorfos (ver Proposición 2.12) el Teorema de Drewnowski puede ser adaptado al espacio $K(X;Y)$ como sigue:

Corolario 3.2. ((Drewnowski, 1990, Corolario 1)) *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces $K(X;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞ si, y solo si, X^* o Y contiene una copia de ℓ_∞.*

Demostración. Supongamos que $K(X;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞. Ya que $K(X;Y)$ es isométricamente isomorfo a $K_{\omega*}(X^{**};Y)$ (Proposición 2.12), tenemos que $K_{\omega*}(X^{**};Y)$ contiene una copia de ℓ_∞. Se sigue del Teorema de Drewnowski (Teorema 3.1) que X^* o Y contiene una copia de ℓ_∞. Supongamos ahora que X^* o Y contiene una copia de ℓ_∞. Ya que $K_{\omega*}(X^{**};Y)$ contiene una copia de X^* y Y (ver Proposición 2.15), se sigue directamente que $K_{\omega*}(X^{**};Y)$ contiene una copia de ℓ_∞. Finalmente, como $K_{\omega*}(X^{**};Y)$ es isométricamente isomorfo a $K(X;Y)$, tenemos que $K(X;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞. □

A continuación abordaremos dos de los objetivos importantes de la investigación: extenderemos el Teorema de Drewnowski al espacio $\mathscr{P}_{\omega*}({}^nX^*;Y)$ y veremos que el resultado de Drewnowski para el espacio $K(X;Y)$ no puede ser extendido al espacio $\mathscr{P}_K(^nX;Y)$. Luego abordaremos el problema general de encontrar copias de $\ell_\infty(\Gamma)$ y $c_0(\Gamma)$ donde Γ es un conjunto de cardinal arbitrario en espacios de funciones.

3.1. Resultados preliminares

En esta sección desarrollaremos los conceptos previos a la prueba del Teorema de Drewnowski extendido al espacio $\mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$ y daremos una prueba de dicho resultado.

Definición 3.3. *Sean X,Y espacios de Banach, $P \in \mathscr{P}(^nX^*;Y)$ y $0 \leqslant k \leqslant n$. Definimos la aplicación $\frac{\widehat{d}^kP}{k!} : X^* \to \mathscr{P}(^kX^*;Y)$ dada por*

$$x^* \in X^* \to \frac{\widehat{d}^kP}{k!}(x^*) \in \mathscr{P}(^kX^*;Y),$$

$$\frac{\widehat{d}^kP}{k!}(x^*)(y^*) := \binom{n}{k}\overset{\vee}{P}(\underbrace{x^*,\dots,x^*}_{n-k\ veces},\underbrace{y^*,\dots,y^*}_{k\ veces}) = \binom{n}{k}\overset{\vee}{P}((x^*)^{n-k},(y^*)^k)$$

para todo $x^*,y^* \in X^*$ donde $\binom{n}{k}$ es el número combinatorio n sobre k y $\overset{\vee}{P}$ es la aplicación $n-$lineal definida en la Proposición 2.30. Cuando $k=0$, $\frac{\widehat{d}^kP}{k!} := P$.

Observación 3.4. Para mayor simplicidad de los cálculos asumiremos sin problema alguno que $\frac{\widehat{d}^kP}{k!}(x^*)(y^*) := \overset{\vee}{P}((x^*)^{n-k},(y^*)^k)$ para todo $0 \leqslant k \leqslant n$, omitiendo la constante $\binom{n}{k}$.

Observación 3.5. cuando $k = n-1$, $\frac{\widehat{d}^kP}{k!}$ es un operador lineal. En efecto, sean

$x_1^*, x_2^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{d}^{n-1}P}{n-1!}(x_1^* + \alpha x_2^*)(y^*) = \overset{\vee}{P}(x_1^* + \alpha x_2^*, y^*, \dots, y^*) &= \overset{\vee}{P}(x_1^*, y^*, \dots, y^*) + \alpha \overset{\vee}{P}(x_2^*, y^*, \dots, y^*) \\ &= \frac{\widehat{d}^{n-1}P}{n-1!}(x_1^*)(y^*) + \alpha \frac{\widehat{d}^{n-1}P}{n-1!}(x_2^*)(y^*),\end{aligned}$$

para todo $y^* \in X^*$. Por tanto $\frac{\widehat{d}^{n-1}P}{n-1!}(x_1^* + \alpha x_2^*) = \frac{\widehat{d}^{n-1}P}{n-1!}(x_1^*) + \alpha \frac{\widehat{d}^{n-1}P}{n-1!}(x_2^*)$.

Proposición 3.6. *Si $0 \leqslant k \leqslant n$, entonces* $\frac{\widehat{d}^k P}{k!} \in \mathscr{P}({}^{n-k}X^*; \mathscr{P}({}^k X^*; Y))$.

Demostración. Consideremos los isomorfismos sobreyectivos

$$L \in \mathscr{L}^s({}^n X^*; Y) \to \tilde{L} \in \mathscr{L}^s({}^{n-k}X^*; \mathscr{L}^s({}^k X^*; Y))$$

tal que $\tilde{L}(x_1^*, \dots, x_{n-k}^*)(x_{n-k+1}^*, \dots, x_n^*) := L(x_1^*, \dots, x_n^*)$ para todo $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in (X^*)^n$ (ver Proposición 2.42) y

$$L \in \mathscr{L}^s({}^n X^*; Y) \to \hat{L} \in \mathscr{P}({}^n X^*; Y)$$

tal que $\hat{L}(x^*) = L(x^*, \dots, x^*)$ para todo $x^* \in X^*$ (ver Corolario 2.28). Entonces existe un isomorfismo sobreyectivo

$$L \in \mathscr{L}^s({}^n X^*; Y) \to \bar{L} \in \mathscr{L}^s({}^{n-k}X^*; \mathscr{P}({}^k X^*; Y))$$

tal que $\bar{L}(x_1^*, \dots, x_{n-k}^*)(y^*) := \tilde{L}(x_1^*, \dots, x_{n-k}^*)(y^*)^k = L(x_1^*, \dots, x_{n-k}^*, (y^*)^k)$ para todo $x_1^*, \dots, x_{n-k}^*, y^* \in$

X^*. Si denotamos a $\overset{\vee}{P}$ por L_P, como $L_P \in \mathscr{L}^s({}^nX^*;Y)$, tenemos que

$$L_P((x^*)^{n-k},(y^*)^k) = \tilde{L_P}(x^*)^{n-k}(y^*)^k = \bar{L_P}(x^*)^{n-k}(y^*).$$

Luego

$$\frac{\widehat{d}^kP}{k!}(x^*)(y^*) = L_P((x^*)^{n-k},(y^*)^k) = \tilde{L_P}(x^*)^{n-k}(y^*)^k = \bar{L_P}(x^*)^{n-k}(y^*)$$

para todo $x^*,y^* \in X^*$. Por lo tanto $\frac{\widehat{d}^kP}{k!}(x^*) = \bar{L_P}(x^*)^{n-k}$ para todo $x^* \in X^*$ y ya que $\bar{L_P} \in \mathscr{L}^s({}^{n-k}X^*;\mathscr{P}({}^kX^*;Y))$ se sigue del Corolario 2.28 que $\frac{\widehat{d}^kP}{k!} = \hat{\bar{L_P}} \in \mathscr{P}({}^{n-k}X^*;\mathscr{P}({}^kX^*;Y))$.

□

Definición 3.7. *Sea X un espacio normado y $(x^*_\alpha)_\alpha$ una red en X^*. Decimos que $(x^*_\alpha)_\alpha$ es ω^*-Cauchy si para cada $U \in \omega^*$ tal que $0_{X^*} \in U$, existe un α_U tal que $x^*_\beta - x^*_\gamma \in U$ siempre que $\alpha_U \preceq \beta$ y $\alpha_U \preceq \gamma$.*

Lema 3.8. *Sea $L \in \mathscr{L}({}^nX^*;Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) L es ω^*-continua sobre conjuntos acotados;

b) si $(x^*_{\alpha,i})_\alpha$ es una red acotada y ω^*-Cauchy en X^* para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ y existe $1 \leqslant k \leqslant n$ tal que $(x^*_{\alpha,k})_\alpha$ es ω^*-nula, entonces $L(x^*_{\alpha,1},\ldots,x^*_{\alpha,n}) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$;

c) si $(x^*_{\alpha,i})_\alpha$ es una red acotada y ω^*-Cauchy en X^* para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces $(L(x^*_{\alpha,1},\ldots, x^*_{\alpha,n}))_\alpha$ es una red de Cauchy;

d) L es ω^*-uniformemente continua sobre conjuntos acotados.

Demostración. Usaremos inducción sobre n. Supongamos que $n=1$. Si $(x_\alpha^*)_\alpha$ es una red ω^*-nula en X^* y $L: X^* \to Y$ es $\omega^* - \|\cdot\|-$continua, entonces $L(x_\alpha^*) \to 0$ en norma. Así, a) implica b). Sea $(x_\alpha^*)_\alpha$ una red en X^* acotada y ω^*-Cauchy en X^*. Por el Teorema de Banach-Alaoglu, $(x_\alpha^*)_\alpha$ tiene una subred $(x_\gamma^*)_\gamma$ que es ω^*-convergente. Si $x_\gamma^* \xrightarrow{\omega^*} x^*$ tenemos que $x_\alpha^* \xrightarrow{\omega^*} x^*$. Ya que $(x_\alpha^* - x^*)_\alpha$ es acotada y ω^*-nula (ver (Megginson, 1998, Corolario 2.6.10)), se sigue de la hipótesis b) que $(L(x_\alpha^*)) \to 0$ en norma y así $(L(x_\alpha^*))_\alpha$ es una red de Cauchy. Por lo tanto, b) implica c). Para mostrar que c) implica d) supongamos que $B \subset X^*$ es acotado. Debemos probar que $L|_B$ es ω^*-uniformemente continua, esto es, que dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ y $F \subset X$ finito tal que si $x^*, y^* \in \mathscr{V}(0,F,\delta) \cap B$, entonces $\|L(x^*) - L(y^*)\| < \varepsilon$ donde $\mathscr{V}(0,F,\delta) := \{y^* \in X^* : |y^*(x)| < \delta, x \in F\}$. Si no fuera así, existiría $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ y $F \subset X$ finito, podemos encontrar $x_{\delta,F}^*, y_{\delta,F}^* \in \mathscr{V}(0,F,\delta) \cap B$ tales que $\|L(x_{\delta,F}^*) - L(y_{\delta.F}^*)\| \geqslant \varepsilon_0$. Sea $[X]^{<\omega}$ la colección de todos los subconjuntos finitos de X y considere el conjunto $\mathscr{A} = \mathbb{N} \times [X]^{<\omega}$ ordenado por $(n,F) \preceq (m,G)$ si, y solo si, $n \leqslant m$ y $F \subset G$. Para cada $(n,F) \in \mathscr{A}$, sea $z_{n,F}^* := x_{1/n,F}^* - y_{1/n,F}^*$. El Teorema de Banach-Alaoglu implica que $(z_{n,F}^*)_{n,F}$ tiene una subred $(z_\alpha^*)_\alpha$ ω^*-convergente. Por lo tanto, $(z_\alpha^*)_\alpha$ es una red acotada y ω^*-Cauchy. Pero por la hipótesis c), $(L(z_\alpha^*))_\alpha$ es una red de Cauchy en norma lo cual es absurdo ya que $\|L(z_{n,F}^*)\| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $(n,F) \in \mathscr{A}$. Es claro que d) implica a). Supongamos ahora que las afirmaciones son equivalentes para todas las aplicaciones $(n-1)-$lineales. Si la hipótesis a) se tiene para una aplicación $n-$lineal continua L pero b) es falsa, existe una colección de redes $(x_{\alpha,i}^*)_\alpha$ acotadas y ω^*-Cauchy con $i = 1, \ldots, n$ donde al menos una de ellas, digamos $(x_{\alpha,1}^*)_\alpha$ es ω^*-nula y $L(x_{\alpha,1}^*, \ldots, x_{\alpha,n}^*) \nrightarrow 0$. Así, existe $\varepsilon_0 > 0$ y una subred $(L(x_{\gamma,1}^*, \ldots, x_{\gamma,n}^*))_\gamma$ tal que $\|L(x_{\gamma,1}^*, \ldots, x_{\gamma,n}^*)\| \geqslant \varepsilon_0$ para todo γ. Sea γ fijo y considere la aplicación

$(n-1)-$lineal $Lx^*_{\gamma,n} : (X^*)^{n-1} \to Y$ dada por

$$(z_1^*,\dots,z_{n-1}^*) \mapsto Lx^*_{\gamma,n}(z_1^*,\dots,z_{n-1}^*) = L(z_1^*,\dots,z_{n-1}^*,x^*_{\gamma,n}).$$

Note que $Lx^*_{\gamma,n}$ es una aplicación ω^*-continua sobre conjuntos acotados. Por hipótesis de inducción, existe $k_\gamma \geqslant \gamma$ tal que si $\beta \geqslant k_\gamma$, entonces

$$\|Lx^*_{\gamma,n}(x^*_{\beta,1},\dots,x^*_{\beta,n-1})\| = \|L(x^*_{\beta,1},\dots,x^*_{\beta,n-1},x^*_{\gamma,n})\| < \varepsilon_0/2.$$

Se sigue que

$$\|L(x^*_{k_\gamma,1},\dots,x^*_{k_\gamma,n-1},x^*_{k_\gamma,n}-x^*_{\gamma,n})\| \geqslant \|L(x^*_{k_\gamma,1},\dots,x^*_{k_\gamma,n-1},x^*_{k_\gamma,n})\| \tag{9}$$

$$- \|L(x^*_{k_\gamma,1},\dots,x^*_{k_\gamma,n-1},x^*_{\gamma,n})\| \tag{10}$$

$$\geqslant \varepsilon_0 - \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0/2 \tag{11}$$

para cada γ. Si $y^*_{\gamma,n} := x^*_{k_\gamma,n} - x^*_{\gamma,n}$, entonces $y^*_{\gamma,n} \xrightarrow{\omega^*} 0$ y

$$\|L(x^*_{k_\gamma,1},\dots,x^*_{k_\gamma,n-1},y^*_{\gamma,n})\| \geqslant \varepsilon_0/2$$

para todo γ. Ahora, si k_γ es fijo, sea $Lx^*_{k_\gamma,n-1} : (X^*)^{n-2} \to Y$ dada por

$$(z_1^*,\dots,z_{n-2}^*) \to Lx^*_{\gamma,n-1}(z_1^*,\dots,z_{n-2}^*) = L(z_1^*,\dots,z_{n-2}^*,x^*_{k_\gamma,n-1},y^*_{\gamma,n}).$$

Entonces la aplicación $Lx^*_{k_\gamma,n-1}$ es ω^*-continua sobre conjuntos acotados. Una vez de nuevo por hipótesis de inducción, existe $k_\gamma^{'} \geqslant k_\gamma$ tal que si $\beta \geqslant k_\gamma^{'}$, entonces

$$\|Lx^*_{k_\gamma,n-1}(x^*_{\beta,1},...,x^*_{\beta,n-2})\| = \|L(x^*_{\beta,1},...,x^*_{\beta,n-2},x^*_{k_\gamma,n-1},y^*_{\gamma,n})\| < \varepsilon_0/2.$$

Usando el mismo razonamiento de la ecuación (9) tenemos que

$$\|L(x^*_{k'_\gamma,1},...,x^*_{k'_\gamma,n-2},x^*_{k'_\gamma,n-1} - x^*_{k_\gamma,n-1},y^*_{\gamma,n})\| \geqslant \varepsilon_0/2$$

para cada γ. Haciendo $y^*_{\gamma,n-1} := x^*_{k'_\gamma} - x^*_{k_\gamma,n-1}$ tenemos que $y^*_{\gamma,n-1} \xrightarrow{\omega^*} 0$ y

$$\|L(x^*_{k'_\gamma,1},...,x^*_{k'_\gamma,n-2},y^*_{\gamma,n-1},y^*_{\gamma,n})\| \geqslant \varepsilon_0/2$$

para cada γ. Procediendo inductivamente, construimos n redes acotadas y ω^*-nulas $(y^*_{\gamma,j})_\gamma$ donde $j = 1,...,n$, tales que $\|L(y^*_{\gamma,1},...,y^*_{\gamma,n})\| \geqslant \varepsilon_0/2$ para cada γ. Ya que $(y^*_{\gamma,1},...,y^*_{\gamma,n})_\gamma$ es ω^*-convergente (ver (Megginson, 1998, p. 205)) esto contradice la hipótesis a). El procedimiento realizado cuando se asume que $(x^*_{\alpha,i})_\alpha$ es una red ω^*-nula para algún $2 \leqslant i \leqslant n$ es análogo al anterior. Supongamos ahora que se satisface b) y sea $(x^*_{\alpha,i})_\alpha$ una red acotada en X^* y ω^*-Cauchy para cada $i = 1,...,n$. Si α y β son dados, entonces

$$L(x^*_{\alpha,1},...,x^*_{\alpha,n}) - L(x^*_{\beta,1},...,x^*_{\beta,n}) = L(x^*_{\alpha,1} - x^*_{\beta,1},x^*_{\alpha,2},...,x^*_{\alpha,n})$$

$$
\begin{aligned}
&+L(x^*_{\beta,1},x^*_{\alpha,2},\dots,x^*_{\alpha,n})-L(x^*_{\beta,1},\dots,x^*_{\beta,n})\\
&=L(x^*_{\alpha,1}-x^*_{\beta,1},\dots,x^*_{\alpha,n})+L(x^*_{\beta,1},x^*_{\alpha,2}-x^*_{\beta,2},\dots,x^*_{\alpha,n})\\
&+L(x^*_{\beta,1},x^*_{\beta,2},\dots,x^*_{\alpha,n})-L(x^*_{\beta,1},\dots,x^*_{\beta,n})\\
&\vdots\\
&=L(x^*_{\alpha,1}-x^*_{\beta,1},\dots,x^*_{\alpha,n})+L(x^*_{\beta,1},x^*_{\alpha,2}-x^*_{\beta,2},\dots,x^*_{\alpha,n})\\
&+\cdots+L(x^*_{\beta,1},x^*_{\beta,2},\dots,x^*_{\beta,n-1},x^*_{\alpha,n}-x^*_{\beta,n}).
\end{aligned}
$$

Sea $z^*_{\alpha,\beta,j}:=x^*_{\alpha,j}-x^*_{\beta,j}$ para α,β y $j=1,\dots,n$. Entonces $(z^*_{\alpha,\beta,j})$ es una red ω^*-nula. Renumerando las redes y usando la hipótesis b), concluimos que $(L(x^*_{\alpha,1},\dots,x^*_{\alpha,n}))_\alpha$ es una red de Cauchy en Y. Para probar c) implica d) sea $(x^*_{\alpha,1},\dots,x^*_{\alpha,n})_\alpha$ una red acotada y ω^*-Cauchy en $(X^*)^n$. Entonces cada red $(x^*_{\alpha,i})_\alpha$ con $1\leqslant i\leqslant n$ es acotada y ω^*-Cauchy. Por c) tenemos que $(L(x^*_{\alpha,1},\dots,x^*_{\alpha,n}))_\alpha$ es una red de Cauchy en Y. Por lo tanto, L envía redes ω^*-Cauchy en redes de Cauchy y así L es $\omega^*-\|\cdot\|-$uniformemente continua (ver (Dineen, 1999, Lema 2.3)). Finalmente, d) implica a) se sigue directamente. $\square$

Lema 3.9. *Sea $x^*\in X^*$ y $\|x^*\|\leqslant 1$, entonces*

$$\sup_{\|x_2^*\|\leqslant 1,\dots,\|x_n^*\|\leqslant 1}\|\overset{\vee}{P}(x^*,x_2^*,\dots,x_n^*)\|\leqslant \frac{n^n}{n!}\sup_{\|y^*\|\leqslant 1}\|\overset{\vee}{P}(x^*,y^*,\dots,y^*)\|.$$

Demostración. Supongamos que $x^*\in X^*$ tal que $\|x^*\|\leqslant 1$ y sea $P_{x^*}:X^*\to Y$ tal que $P_{x^*}(y^*):=\overset{\vee}{P}(x^*,(y^*)^{n-1})$ para todo $y^*\in X^*$. Ya que $\overset{\vee}{P}\in\mathscr{L}^s(^nX^*;Y)$ tenemos que la aplicación $\overset{\vee}{P}(x^*,\cdot,\dots,\cdot)\in$

$\mathscr{L}^s({}^{n-1}X^*;Y)$ y por lo tanto $P_{x^*} \in \mathscr{P}({}^{n-1}X^*;Y)$. Sabemos de la Proposición 2.30 que existe una única aplicación $(n-1)-$lineal simétrica continua $\overset{\vee}{P}_{x^*}$ tal que $P_{x^*}(y^*) = \overset{\vee}{P}_{x^*}(y^*,\dots,y^*)$ para todo $y^* \in X^*$. Esto obliga a que $\overset{\vee}{P}(x^*,\cdot,\dots,\cdot) = \overset{\vee}{P}_{x^*}(\cdot)$. Por otro lado, del Corolario 2.27 y de la Proposición 2.30 se sigue que $\|\overset{\vee}{P}_{x^*}\| \leqslant \dfrac{n^n}{n!}\|P_{x^*}\|$, esto es

$$\sup_{\|x_2^*\|\leqslant 1,\dots,\|x_n^*\|\leqslant 1} \|\overset{\vee}{P}_{x^*}(x_2^*,\dots,x_n^*)\| \leqslant \frac{n^n}{n!}\sup_{\|y^*\|\leqslant 1}\|P_{x^*}(y^*,\dots,y^*)\|$$

y como $\overset{\vee}{P}(x^*,\cdot,\dots,\cdot) = \overset{\vee}{P}_{x^*}(\cdot)$ tenemos que

$$\sup_{\|x_2^*\|\leqslant 1,\dots,\|x_n^*\|\leqslant 1} \|\overset{\vee}{P}(x^*,x_2^*,\dots,x_n^*)\| \leqslant \frac{n^n}{n!}\sup_{\|y^*\|\leqslant 1}\|P_{x^*}(y^*,\dots,y^*)\| = \frac{n^n}{n!}\sup_{\|y^*\|\leqslant 1}\|\overset{\vee}{P}(x^*,y^*,\dots,y^*)\|,$$

donde la última igualdad se sigue de la definición de P_{x^*}. □

Teorema 3.10. *Si $P \in \mathscr{P}({}^nX^*;Y)$, X y Y son espacios de Banach, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) $P \in \mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$;

b) para cada k, $0 \leqslant k \leqslant n$, el polinomio $\dfrac{\widehat{d}^kP}{k!}$ es ω^*-continuo sobre conjuntos acotados;

c) para cada k , $0 \leqslant k \leqslant n$, el polinomio $\dfrac{\widehat{d}^kP}{k!}$ es compacto y $\omega^* - \omega-$continuo;

d) $\dfrac{\widehat{d}^{n-1}P}{(n-1)!}$ es un operador compacto y $\omega^* - \omega-$continuo.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). Ya que $\dfrac{\widehat{d}^kP}{k!} = P$ cuando $k=0$, la implicación se sigue directamente para dicho caso. Supongamos ahora que $1 \leqslant k \leqslant n$ y que P es un polinomio ω^*-continuo sobre conjuntos acotados. Por la Proposición 2.35, $\overset{\vee}{P}$ es ω^*-continuo sobre conjuntos acotados y por lo tanto satisface las condiciones del Lema 3.8. Sea $(x^*_\alpha)_\alpha$ una red acotada en X^* tal que $x^*_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x^*$ y suponga que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x^*_\alpha) - \frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x^*) \right\| \geqslant \varepsilon_0 \tag{12}$$

para todo α. Observe que la ecuación (12) obliga a que $k \neq n$ pues $\dfrac{\widehat{d}^n P}{n!}$ es una función constante. En efecto, si $x^*_1, x^*_2 \in X^*$ entonces

$$\frac{\widehat{d}^n P}{n!}(x^*_1)(y^*) = \overset{\vee}{P}((x^*_1)^0, (y^*)^n) = \overset{\vee}{P}(y^*, \ldots, y^*) = \overset{\vee}{P}((x^*_2)^0, (y^*)^n) = \frac{\widehat{d}^n P}{n!}(x^*_2)(y^*)$$

para todo $y^* \in X^*$. Luego $\dfrac{\widehat{d}^n P}{n!}(x^*_1) = \dfrac{\widehat{d}^n P}{n!}(x^*_2)$ y así $\dfrac{\widehat{d}^n P}{n!}$ es constante. Por otro lado, por definición de la norma, para cada α existe un vector unitario u^*_α en X^* tal que

$$\left\| \left(\frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x^*_\alpha) \right)(u^*_\alpha) - \left(\frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x^*) \right)(u^*_\alpha) \right\| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{13}$$

Ya que $(u^*_\alpha)_\alpha$ es una red acotada en X^*, por el Teorema de Banach-Alaoglu podemos suponer que $u^*_\alpha \xrightarrow{\omega^*} u^*$ para algún $u^* \in X^*$. Entonces

$$\left(\frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x^*_\alpha) \right)(u^*_\alpha) - \left(\frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x^*) \right)(u^*_\alpha)$$

$$
\begin{aligned}
&= \overset{\vee}{P}((x_\alpha^*)^{n-k},(u_\alpha^*)^k) - \overset{\vee}{P}((x^*)^{n-k},(u_\alpha^*)^k)\\
&= ([\overset{\vee}{P}(x_\alpha^*,(x^*)^{n-k-1},(u_\alpha^*)^k) - \overset{\vee}{P}((x^*)^{n-k},(u_\alpha^*)^k)]\\
&+ [\overset{\vee}{P}((x_\alpha^*)^2,(x^*)^{n-k-2},(u_\alpha^*)^k) - \overset{\vee}{P}(x_\alpha^*,(x^*)^{n-k-1},(u_\alpha^*)^k)]\\
&+ [\overset{\vee}{P}((x_\alpha^*)^3,(x^*)^{n-k-3},(u_\alpha^*)^k) - \overset{\vee}{P}((x_\alpha^*)^2,(x^*)^{n-k-2},(u_\alpha^*)^k)]+\\
&\vdots\\
&+ [\overset{\vee}{P}((x_\alpha^*)^j,(x^*)^{n-k-j},(u_\alpha^*)^k) - \overset{\vee}{P}((x_\alpha^*)^{j-1},(x^*)^{n-k-1-j},(u_\alpha^*)^k)]+\\
&\vdots\\
&+ [\overset{\vee}{P}((x_\alpha^*)^{n-k},(u_\alpha^*)^k) - \overset{\vee}{P}((x_\alpha^*)^{n-k-1},x^*,(u_\alpha^*)^k)])\\
&= \overset{\vee}{P}(x_\alpha^*-x^*,(x^*)^{n-k-1},(u_\alpha)^k) + \overset{\vee}{P}(x_\alpha^*,x_\alpha^*-x^*,(x^*)^{n-k-2},(u_\alpha)^k)+\\
&\vdots\\
&+ \overset{\vee}{P}((x_\alpha^*)^j,x_\alpha^*-x^*,(x^*)^{n-k-1-j},(u_\alpha)^k)+\\
&\vdots\\
&+ \overset{\vee}{P}((x_\alpha^*)^{n-k-1},x_\alpha^*-x^*,(u_\alpha)^k)\\
&= \sum_{j=0}^{n-k-1} \overset{\vee}{P}((x_\alpha^*)^j,x_\alpha^*-x^*,(x^*)^{n-k-1-j},(u_\alpha^*)^k).
\end{aligned}
$$

Como

$$\left(\frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x_\alpha^*)\right)(u_\alpha^*) - \left(\frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x^*)\right)(u_\alpha^*) \nrightarrow 0$$

(ver Ecuación 13), tenemos que

$$\sum_{j=0}^{n-k-1} \overset{\vee}{P}((x_\alpha^*)^j, x_\alpha^* - x^*, (x^*)^{n-k-1-j}, (u_\alpha^*)^k) \nrightarrow 0.$$

Pero esto implica que existe $0 \leqslant r \leqslant n-k-1$ tal que

$$\overset{\vee}{P}((x_\alpha^*)^r, x_\alpha^* - x^*, (x^*)^{n-k-1-r}, (u_\alpha^*)^k) \nrightarrow 0.$$

Esto contradice el Lema 3.8, literal b). Por lo tanto concluimos que a) implica b) cuando $1 \leqslant k \leqslant n$.

b) $\Rightarrow$ a). Ya que b) se cumple para $0 \leqslant k \leqslant n$, en particular se tiene para $k = 0$. Entonces $\frac{\widehat{d}^0 P}{0!}$, esto es, P satisface a). b) $\Rightarrow$ c). Sea $0 \leqslant k \leqslant n$ y $(x_\alpha^*)_\alpha$ una red acotada en X^*. Por el Teorema de Banach-Alaoglu podemos suponer que $x_\alpha^* \xrightarrow{\omega^*} x^*$. Como estamos suponiendo b), $\frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x_\alpha^*) \rightarrow \frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x^*)$ y por lo tanto, $\frac{\widehat{d}^k P}{k!}$ es compacto. Veamos ahora que $\frac{\widehat{d}^k P}{k!}$ es $\omega^* - \omega-$continuo. En efecto, sea $(x_\alpha^*)_\alpha$ una red en X^* tal que $x_\alpha^* \xrightarrow{\omega^*} x^*$. Entonces $(x_\alpha^*)_\alpha$ es una red acotada y ya que $\frac{\widehat{d}^k P}{k!}$ es ω^*-continuo en conjuntos acotados se tiene que $\frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x_\alpha^*) \rightarrow \frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x^*)$. Se sigue inmediatamente que $\frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x_\alpha^*) \xrightarrow{\omega} \frac{\widehat{d}^k P}{k!}(x^*)$. c) $\Rightarrow$ d). Se sigue directamente. d) $\Rightarrow$ a). Suponga que $\frac{\widehat{d}^{n-1} P}{(n-1)!}$ es un operador compacto y $\omega^* - \omega-$continuo. Por lo tanto $\frac{\widehat{d}^{n-1} P}{(n-1)!}$ es ω^*-continuo sobre conjuntos acotados (ver Proposición 2.10). Si $(x_\alpha^*)_\alpha$ es una red ω^*-convergente a x^* en X^*, entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\widehat{d}^{n-1} P}{(n-1)!}(x_\alpha^*) - \frac{\widehat{d}^{n-1} P}{(n-1)!}(x^*) \right\| &= \sup_{\|y^*\| \leqslant 1} \left\| \left(\frac{\widehat{d}^{n-1} P}{(n-1)!}(x_\alpha^* - x^*) \right)(y^*) \right\| \\
&= \sup_{\|y^*\| \leqslant 1} \| n \overset{\vee}{P}(x_\alpha^* - x^*, (y^*)^{n-1}) \|.
\end{aligned}$$

Ya que

$$\left\| \frac{\widehat{d}^{n-1}P}{(n-1)!}(x^*_\alpha) - \frac{\widehat{d}^{n-1}P}{(n-1)!}(x^*) \right\| \to 0,$$

se sigue que

$$\sup_{\|y^*\|\leqslant 1} \|n\overset{\vee}{P}(x^*_\alpha - x^*, (y^*)^{n-1})\| \to 0. \tag{14}$$

Veamos ahora que $\overset{\vee}{P}$ es ω^*-continuo sobre conjuntos acotados. Suponga que $(x^*_{\alpha,i})_\alpha$ es una red acotada y ω^*-Cauchy en X^* para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ y existe un entero k tal que $1 \leqslant k \leqslant n$ y $(x^*_{\alpha,k})_\alpha$ es ω^*-nula. Podemos asumir sin perdida de generalidad que $k = 1$ pues $\overset{\vee}{P}$ es un operador multilineal simétrico. Como $\|x^*_{\alpha,i}\| \leqslant M_i$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$ y todo α, entonces $\|x^*_{\alpha,i}\| \leqslant M$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n$ y todo α, donde $M := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} M_i$. Por otro lado, de la fórmula (14) se tiene que dado $\varepsilon > 0$, existe $\beta > 0$ tal que $\sup\limits_{\|y^*\|\leqslant 1} \|M^{n-1}n\overset{\vee}{P}(x^*_{\alpha,1}, y^*, \ldots, y^*)\| < \frac{n!}{n^{n-1}}\varepsilon$ para todo $\alpha \geqslant \beta$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\|n\overset{\vee}{P}(x^*_{\alpha,1}, \ldots, x^*_{\alpha,n})\| &= \|M^{n-1}n\overset{\vee}{P}(x^*_{\alpha,1}, \frac{x^*_{\alpha,2}}{M}, \ldots, \frac{x^*_{\alpha,n}}{M})\| \\
&\leqslant \sup_{\|x^*_2\|\leqslant 1,\ldots,\|x^*_n\|\leqslant 1} \|M^{n-1}n\overset{\vee}{P}(x^*_{\alpha,1}, x^*_2, \ldots, x^*_n)\| \\
&\overset{(1)}{\leqslant} \frac{n^n}{n!} \sup_{\|y^*\|\leqslant 1} \|M^{n-1}n\overset{\vee}{P}(x^*_{\alpha,1}, y^*, \ldots, y^*)\| < \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{n!}{n^{n-1}}\varepsilon = n\varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $\alpha \geqslant \beta$. La desigualdad (1) es consecuencia del Lema 3.9. Por lo tanto $\|\overset{\vee}{P}(x^*_{\alpha,1}, \ldots, x^*_{\alpha,n})\| < \varepsilon$ para todo $\alpha \geqslant \beta$ y así $\overset{\vee}{P}(x^*_{\alpha,1}, \ldots, x^*_{\alpha,n}) \to 0$. Por el Lema 3.8, $\overset{\vee}{P}$ es ω^*-continuo sobre conjuntos acotados y por la Proposición 2.35 se tiene que P es ω^*-continuo sobre conjuntos acotados. Por lo tanto d) implica a) y esto completa la prueba. $\square$

Teorema 3.11. *Si X, Y son espacios de Banach, entonces la aplicación*

$$P \in \mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y) \to \frac{\widehat{d}^{n-1}P}{(n-1)!} \in K_{\omega^*}(X^*;\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y))$$

es un isomorfismo sobreyectivo.

Demostración. Sea $T : \mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y) \to K_{\omega^*}(X^*;\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y))$ tal que $T(P) := \dfrac{\widehat{d}^{n-1}P}{(n-1)!}$ para todo $P \in \mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$. Supongamos que P_1, P_2 en $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces

$$\frac{\widehat{d}^{n-1}(P_1+\alpha P_2)}{(n-1)!}(x^*)(y^*) = (P_1 \overset{\vee}{+} \alpha P_2)(x^*,y^*,...,y^*) = (\overset{\vee}{P_1} + \alpha \overset{\vee}{P_2})(x^*,y^*,...,y^*)$$
$$= \overset{\vee}{P_1}(x^*,y^*,...,y^*) + \alpha \overset{\vee}{P_2}(x^*,y^*,...,y^*) = \frac{\widehat{d}^{n-1}P_1}{(n-1)!}(x^*)(y^*) + \alpha \frac{\widehat{d}^{n-1}P_2}{(n-1)!}(x^*)(y^*)$$

para todo x^*, y^* en X^*. Por lo tanto

$$\frac{\widehat{d}^{n-1}(P_1+\alpha P_2)}{(n-1)!} = \frac{\widehat{d}^{n-1}P_1}{(n-1)!} + \alpha \frac{\widehat{d}^{n-1}P_2}{(n-1)!}$$

y así T es lineal. Supongamos ahora que $T(P_1) = \dfrac{\widehat{d}^{n-1}P_1}{(n-1)!} = \dfrac{\widehat{d}^{n-1}P_2}{(n-1)!} = T(P_2)$. Entonces $\overset{\vee}{P_1}(x^*,(y^*)^{n-1}) = \overset{\vee}{P_2}(x^*,(y^*)^{n-1})$ para todo x^*, y^* en X^*. Si fijamos $x^* \in X^*$, tenemos que $\overset{\vee}{P_1}(x^*,\cdot,...,\cdot)$ y $\overset{\vee}{P_2}(x^*,\cdot,...,\cdot)$ son aplicaciones $(n-1)-$lineales simétricas continuas. Sea P_{x^*} el polinomio asociado a $\overset{\vee}{P_1}(x^*,\cdot,...,\cdot)$. Esto es, $P_{x^*}(y^*) = \overset{\vee}{P_1}(x^*,y^*,...,y^*)$ para todo $y^* \in X^*$. Como $\overset{\vee}{P}_{x^*}$ es la única aplicación $(n-1)-$lineal simétrica asociada a P_{x^*} que cumple esta condición, se sigue que $\overset{\vee}{P}_{x^*}(x_2^*,...,x_n^*) = \overset{\vee}{P_1}(x^*,x_2^*,...,x_n^*) = \overset{\vee}{P_2}(x^*,x_2^*,...,x_n^*)$ para todo $x_i^* \in X^*$ con $1 \leqslant i \leqslant n$. Ya que $x^* \in X^*$

se escogió arbitrariamente se sigue que $\overset{\vee}{P_1} = \overset{\vee}{P_2}$ y concluimos que $P_1 = P_2$ ya que $P \to \overset{\vee}{P}$ es inyectiva (ver Proposición 2.30). Veamos ahora que T es sobreyectiva. Dado $G \in K_{\omega^*}(X^*; \mathscr{P}_{\omega^*}(^{n-1}X^*;Y))$ debemos probar que existe $P \in \mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$ tal que $\dfrac{\widehat{d}^{n-1}P}{(n-1)!} = G$. Sea $L : (X^*)^n \to Y$ tal que $L(x_1^*, \dots, x_n^*) := \overset{\vee}{G}(x_1^*)(x_2^*, \dots, x_n^*)$ para todo $x_i^* \in X^*$ con $1 \leqslant i \leqslant n$. Ya que

$$
\begin{aligned}
L((x_1^* + \alpha y_1^*), x_2^*, \dots, x_n^*) = \overset{\vee}{G}(x_1^* + \alpha y_1^*)(x_2^*, \dots, x_n^*) &= (\overset{\vee}{G}(x_1^*) + \alpha \overset{\vee}{G}(y_1^*))(x_2^*, \dots, x_n^*) \\
&= \overset{\vee}{G}(x_1^*)(x_2^*, \dots, x_n^*) + \alpha \overset{\vee}{G}(y_1^*)(x_2^*, \dots, x_n^*) \\
&= L(x_1^*, \dots, x_n^*) + \alpha L(x_1^*, \dots, x_n^*)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
L(x_1^*, \dots, (x_j^* + \alpha y_j^*), \dots, x_n^*) &= \overset{\vee}{G}(x_1^*)(x_2^*, \dots, (x_j^* + \alpha y_j^*), \dots, x_n^*) \\
&= \overset{\vee}{G}(x_1^*)(x_2^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*) + \alpha \overset{\vee}{G}(x_1^*)(x_2^*, \dots, y_j^*, \dots, x_n^*)
\end{aligned}
$$

para todo $x_1^*, y_1^*, \dots, x_j^*, y_j^*, \dots, x_n^*$ en X^* y $1 \leqslant j \leqslant n$ se sigue que L es $n-$lineal. Sea P el polinomio asociado a L, esto es, $P(x^*) = L(x^*, \dots, x^*)$ para todo $x^* \in X^*$. Entonces, dados x^*, y^* en X^* se tiene que

$$
\frac{\widehat{d}^{n-1}P}{(n-1)!}(x^*)(y^*) = \overset{\vee}{P}(x^*, y^*, \dots, y^*) = L(x^*, y^*, \dots, y^*) = \overset{\vee}{G}(x^*)(y^*, \dots, y^*) = G(x^*)(y^*).
$$

Luego $\dfrac{\widehat{d}^{n-1}P}{(n-1)!} = G$ y concluimos que T es sobreyectiva.

Finalmente, si $P \in \mathscr{P}_{\omega^*}(^n X^*;Y)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|T(P)\| = \left\| \frac{\widehat{d}^{n-1}P}{(n-1)!} \right\| = \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \left\| \frac{\widehat{d}^{n-1}P}{(n-1)!}(x^*) \right\| &= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \left(\sup_{\|y^*\|\leqslant 1} \left\| \frac{\widehat{d}^{n-1}P}{(n-1)!}(x^*)(y^*) \right\| \right) \\
&= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \left(\sup_{\|y^*\|\leqslant 1} \|\overset{\vee}{P}(x^*, y^*, \ldots, y^*)\| \right) \\
&\overset{(1)}{\leqslant} \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \left(\sup_{\|x_2^*\|\leqslant 1, \ldots, \|x_n^*\|\leqslant 1} \|\overset{\vee}{P}(x^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)\| \right) \\
&= \sup_{\|x^*\|\leqslant 1, \ldots, \|x_n^*\|\leqslant 1} \|\overset{\vee}{P}(x^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)\| \\
&= \|\overset{\vee}{P}\| \overset{(2)}{\leqslant} \frac{n^n}{n!}\|P\|
\end{aligned}$$

donde la desigualdad (1) se sigue del siguiente argumento: dado $x^* \in B_{X^*}$, como $\{\|\overset{\vee}{P}(x^*, y^*, \ldots, y^*)\| : y^* \in B_{X^*}\} \subseteq \{\|\overset{\vee}{P}(x^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)\| : x_2^*, \ldots, x_n^* \in B_{X^*}\}$, entonces

$$\sup_{\|y^*\|\leqslant 1} \|\overset{\vee}{P}(x^*, y^*, \ldots, y^*)\| \leqslant \sup_{\|x_2^*\|\leqslant 1, \ldots, \|x_n^*\|\leqslant 1} \|\overset{\vee}{P}(x^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)\|.$$

Por lo tanto

$$\sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \left(\sup_{\|y^*\|\leqslant 1} \|\overset{\vee}{P}(x^*, y^*, \ldots, y^*)\| \right) \leqslant \sup_{\|x^*\|\leqslant 1} \left(\sup_{\|x_2^*\|\leqslant 1, \ldots, \|x_n^*\|\leqslant 1} \|\overset{\vee}{P}(x^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)\| \right).$$

Además, la desigualdad (2) se sigue del Teorema 2.27 y así T es continua. Ya que $\|T(P)\| = \left\| \frac{\widehat{d}^{n-1}P}{(n-1)!} \right\| = \|\overset{\vee}{P}\|$ y $\|\overset{\vee}{P}\| \leqslant \|P\|$ para todo $P \in \mathscr{P}_{\omega^*}(^n X^*;Y)$ (ver Teorema 2.27) se sigue que la inversa de T es continua. Así, T es un isomorfismo sobreyectivo. □

El siguiente resultado es una generalización del Teorema de Drewnowski para el espacio $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$ y es consecuencia del Teorema 3.11:

Teorema 3.12. *Sean X,Y espacios de Banach. Entonces $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞ si, y solo si, X o Y contiene una copia de ℓ_∞.*

Demostración. Sea $n\in\mathbb{N}$ y supongamos que X o Y contiene una copia de ℓ_∞. Dado que $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$ es isomorfo a $K_{\omega^*}(X^*;\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y))$ (ver Teorema 3.11) y que $K_{\omega^*}(X^*;\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y))$ contiene una copia de X y $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y)$ (ver Proposición 2.15), tenemos que $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$ contiene una copia de $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y)$, esto es, $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y)\hookrightarrow\mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$). Usando el argumento anterior para cada $1\leqslant k\leqslant n$ se cumple que

$$Y=\mathscr{P}_{\omega^*}({}^0X^*;Y)\hookrightarrow\ldots\hookrightarrow\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{k-1}X^*;Y)\hookrightarrow\mathscr{P}_{\omega^*}({}^kX^*;Y)\hookrightarrow\ldots\hookrightarrow\mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y). \tag{15}$$

Si es X quien contiene una copia de ℓ_∞, como $K_{\omega^*}(X^*;\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y))$ contiene una copia de X, se sigue que $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞. Si es Y quien contiene una copia de ℓ_∞, por la ecuación (15) concluimos también que $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞. Supongamos ahora que $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞. Por el Teorema 3.11 tenemos que $K_{\omega^*}(X^*;\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y))$ es isométricamente isomorfo a $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$, entonces $K_{\omega^*}(X^*;\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y))$ contiene una copia de ℓ_∞. Aplicando el Teorema 3.1 (Teorema de Drewnowski) al espacio $K_{\omega^*}(X^*;\ \mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y))$ obtenemos que X o $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞. Si es X quien contiene una copia de ℓ_∞, la prueba se concluye. Si es $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y)$

quien contiene una copia de ℓ_∞, utilizamos nuevamente el Teorema 3.11 para probar que X o $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-2}X^*;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞. Procediendo de la misma manera se llega en un máximo de $n-3$ pasos adicionales a que X o $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^1X^*;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞. Ya que $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^1X^*;Y) = K_{\omega^*}(X^*;Y)$, aplicando el Teorema de Drewnowski una última vez al espacio $K_{\omega^*}(X^*;Y)$ concluimos que X o Y contiene una copia de ℓ_∞. □

3.2. El Teorema de Drewnowski y el espacio $\mathscr{P}_K({}^nX;Y)$

A pesar de que el Teorema de Drewnowski puede generalizado al espacio $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$ veremos a continuación que el Corolario 3.13 no puede ser generalizado al espacio $\mathscr{P}_K({}^nX;Y)$. Recordemos su enunciado:

Corolario 3.13. ((Drewnowski, 1990, Corolario 1)) *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces $K(X;Y)$ contiene una copia de ℓ_∞ si, y solo si, X^* o Y contiene una copia de ℓ_∞.*

Consideremos el espacio $\mathscr{P}_K({}^nX;Y)$ donde $n=2$, $X=\ell_2$ y $Y=\mathbb{K}$. Esto es, el espacio $\mathscr{P}_K({}^2\ell_2;\mathbb{K})$. Por el Teorema de linealización de Ryan (Proposición 2.45) tenemos que $\mathscr{P}_K({}^2\ell_2;\mathbb{K})$ es isométricamente isomorfo a $K(\hat{\bigotimes}_{2,s,\pi}\ell_2;\mathbb{K})$ y además $\mathscr{L}(\hat{\bigotimes}_{2,s,\pi}\ell_2;\mathbb{K})$ es isométricamente isomorfo a $\mathscr{P}({}^2\ell_2;\mathbb{K})$. Entonces

$$\mathscr{P}_K({}^2\ell_2;\mathbb{K}) \cong K(\hat{\bigotimes}_{2,s,\pi}\ell_2;\mathbb{K}) = (\hat{\bigotimes}_{2,s,\pi}\ell_2)^* = \mathscr{L}(\hat{\bigotimes}_{2,s,\pi}\ell_2;\mathbb{K}) \cong \mathscr{P}({}^2\ell_2;\mathbb{K}). \tag{16}$$

Son conocidos además los siguientes isomorfismos ((Dineen and Mujica, 2015, p. 370))

$$\mathscr{P}({}^2\ell_2;\mathbb{K}) \cong \mathscr{L}^s({}^2\ell_2,\mathbb{K}) \overset{(1)}{\cong} \mathscr{L}({}^2\ell_2,\mathbb{K}) \overset{(2)}{\cong} \mathscr{L}(\ell_2;\mathscr{L}(\ell_2;\mathbb{K})) \cong \mathscr{L}(\ell_2;\ell_2), \tag{17}$$

donde el isomorfismo (2) es consecuencia de la Proposición 2.39. Los espacios como ℓ_2 que cumplen el isomorfismo (1) son llamados *espacios estables*, esto es, X es *estable* si $\mathscr{L}^s(^nX;\mathbb{K}) \cong \mathscr{L}(^nX;\mathbb{K})$ ((Dineen and Mujica, 2015, p. 370)). Por otro lado, observe que $K(\ell_2;\ell_2) \neq \mathscr{L}(\ell_2;\ell_2)$ ya que si $I:\ell_2 \to \ell_2$ es el operador identidad, $I \in \mathscr{L}(\ell_2;\ell_2)$ y sin embargo I no es compacto (B_{ℓ_2} es un conjunto acotado en ℓ_2 pero $I(B_{\ell_2}) = B_{\ell_2}$ no es relativamente compacto). Ya que ℓ_2 tiene una expansión incondicional finito dimensional de la identidad (ver Ejemplo 2.47), por la Proposición 2.48 concluimos que $\mathscr{L}(\ell_2;\ell_2)$ contiene una copia de ℓ_∞. Considerando los isomorfismos dados en la ecuación (16), la ecuación (17) y todo lo anteriormente mencionado, se sigue que $\mathscr{P}_K(^2\ell_2;\mathbb{K}) \cong \mathscr{L}(\ell_2;\ell_2)$ contiene una copia de ℓ_∞. Sin embargo, ni $\ell_2^* = \ell_2$, ni $\mathbb{K}$ contienen una copia de ℓ_∞. Por lo tanto, el Corolario 3.13 no puede ser extendido al espacio $\mathscr{P}_K(^nX;Y)$. Podríamos pensar que el intento de generalizar el Corolario 3.13 falla debido a que el espacio Y que estamos tomando en el ejemplo anterior, esto es, $\mathbb{K}$, es de dimensión finita. Sin embargo, observemos que esto no es así: Consideremos el espacio $\mathscr{P}_K(^nX;Y)$ donde $n=2$ y $X=Y=\ell_2$. Esto es, $\mathscr{P}_K(^2\ell_2;\ell_2)$. Claramente X y Y son espacios de dimensión infinita. Por el Teorema de linealización de Ryan (Proposición 2.45) sabemos que $\mathscr{P}_K(^2\ell_2;\ell_2)$ es isométricamente isomorfo a $K(\hat{\bigotimes}_{2,s,\pi}\ell_2;\ell_2)$, y a partir del Corolario 3.13 tenemos que $\mathscr{P}_K(^2\ell_2;\ell_2) \cong K(\hat{\bigotimes}_{2,s,\pi}\ell_2;\ell_2)$ contiene una copia de $\left(\hat{\bigotimes}_{2,s,\pi}\ell_2\right)^* = \mathscr{L}((\hat{\bigotimes}_{2,s,\pi}\ell_2,\mathbb{K})$. Como se probó al inicio de esta sección, $\mathscr{P}_K(^2\ell_2;\mathbb{K}) \cong \mathscr{L}((\hat{\bigotimes}_{2,s,\pi}\ell_2,\mathbb{K})$ contiene copia de ℓ_∞. Tenemos entonces que

$$\ell_\infty \hookrightarrow \mathscr{L}((\hat{\bigotimes}_{2,s,\pi}\ell_2,\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathscr{P}_K(^2\ell_2;\ell_2).$$

Sin embargo, ni $\ell_2^* = \ell_2$, ni ℓ_2 contienen una copia de ℓ_∞.

3.3. Copias de $c_0(\Gamma)$ y $\ell_\infty(\Gamma)$ en $\mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$

En esta sección abordaremos el problema general de este trabajo: intentaremos encontrar condiciones para que un espacio de funciones, a saber, el espacio $\mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$, contenga una copia de $\ell_\infty(\Gamma)$ o $c_0(\Gamma)$ donde Γ es un conjunto de cardinal arbitrario.

Definición 3.14. *Sea X un espacio de Banach. Denotamos por* $\operatorname{dens}(X)$ *al menor cardinal κ para el cual X tiene un subconjunto denso de cardinalidad κ. Sea τ un cardinal infinito. Entonces la* cofinalidad *de τ que denotamos por* $\operatorname{cf}(\tau)$ *es el menor cardinal α tal que existe una familia de ordinales $\{\beta_i : i \in \alpha\}$ satisfaciendo $\beta_i < \tau$ para todo $i \in \alpha$ y $\sup_{i\in\alpha} \beta_i = \tau$.*

El siguiente resultado será usado en la prueba del próximo teorema:

Proposición 3.15. ((Rosenthal, 1970, Proposición 1.2)) *Sea X un espacio de Banach, Γ un conjunto infinito, y $T : \ell_\infty(\Gamma) \to X$ un operador lineal tal que $\inf_{\gamma\in\Gamma} \|T(e_\gamma)\| > 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$ donde e_γ es tal que $e_\gamma(\beta) = 1$ cuando $\gamma = \beta$ y $e_\gamma(\beta) = 0$ en los demás casos. Entonces existe un conjunto $\Gamma' \subseteq \Gamma$ con $|\Gamma'| = |\Gamma|$ tal que $T|_{\ell_\infty(\Gamma')}$ es un isomorfismo.*

Teorema 3.16. *Sean X y Y espacios de Banach y Γ un conjunto no numerable. Supongamos que* $\operatorname{cf}(|\Gamma|) > \operatorname{dens}(X^*)$. *Entonces $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow K_{\omega^*}(X^*;Y)$ si, y solo si, $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow Y$.*

Demostración. Si $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow Y$, ya que $Y \hookrightarrow K_{\omega^*}(X^*;Y)$ (ver Proposición 2.15) se sigue directamente que $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow K_{\omega^*}(X^*;Y)$. Sean $J : \ell_\infty(\Gamma) \to K_{\omega^*}(X^*;Y)$ un isomorfismo, $\varepsilon_0 > 0$ satisfaciendo $\|J(a)\| \geqslant \varepsilon_0$ para cada $a \in S_{\ell_\infty(\Gamma)}$ y $D \subseteq B_{X^*}$ tal que $\overline{D}^{\|\cdot\|} = B_{X^*}$ y $|D| = \operatorname{dens}(X^*)$. Dado $d^* \in D$, definamos $\Gamma_{d^*} = \{\gamma \in \Gamma : \|J(e_\gamma)(d^*)\| \geqslant \varepsilon_0/2\}$, donde $e_\gamma \in \ell_\infty(\Gamma)$ está definida por

$e_\gamma(\beta) = 1$ si $\beta = \gamma$ y $e_\gamma(\beta) = 0$ en los demás casos. Veamos que $\Gamma = \bigcup_{d^* \in D} \Gamma_{d^*}$. Si existe $\gamma_0 \in \Gamma$ tal que $\gamma_0 \notin \bigcup_{d^* \in D} \Gamma_{d^*}$, entonces $\|J(e_{\gamma_0})(d^*)\| < \varepsilon_0/2$ para todo $d^* \in D$. Sea $a \in B_{X^*}$. Como D es denso en B_{X^*}, existe una sucesión $(d_n^*)_n$ en D tal que $d_n^* \to a$ y como $\|J(e_{\gamma_0})(d_n^*)\| < \varepsilon_0/2$ para todo n concluimos que $\|J(e_{\gamma_0})(a)\| \leqslant \varepsilon_0/2$. Por tanto, $\|J(e_{\gamma_0})\| \leqslant \varepsilon_0/2$ lo cual es absurdo. Por otro lado, como $|\Gamma| \geqslant \mathrm{cf}(|\Gamma|) > \mathrm{dens}(X^*) = |D|$, existe $d_0^* \in D$ tal que $|\Gamma_{d_0^*}| = |\Gamma|$. En efecto, si $|\Gamma_{d^*}| < |\bigcup_{d^* \in D} \Gamma_{d^*}| = |\Gamma|$ para todo d^*, entonces

$$\left| \bigcup_{d^* \in D} \Gamma_{d^*} \right| \leqslant \sum_{d^* \in D} |\Gamma_{d^*}| \leqslant |D| \cdot \sup_{d^* \in D} |\Gamma_{d^*}| < |D| \cdot |\Gamma| = |\Gamma|.$$

Sea $T_0 : \ell_\infty(\Gamma_{d_0^*}) \to Y$ dada por $T_0(a) = J(a)(d_0^*)$. Veamos que T_0 es lineal. Si $a, b \in \ell_\infty(\Gamma_{d_0^*})$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, por la linealidad de J tenemos que $J(a + \alpha b) = J(a) + \alpha J(b)$ y así $J(a + \alpha b)(x^*) = J(a)(x^*) + \alpha J(b)(x^*)$ para todo $x^* \in X^*$. En particular tenemos que

$$T_0(a + \alpha b) = J(a + \alpha b)(d_0^*) = J(a)(d_0^*) + \alpha J(b)(d_0^*) = T_0(a) + \alpha T_0(b).$$

Para probar la continuidad de T_0 sea $(a_n)_n$ una sucesión en $\ell_\infty(\Gamma)$ tal que $a_n \to a$ para algún $a \in \ell_\infty(\Gamma)$. Como J es continua, $J(a_n) \to J(a)$ y

$$\|J(a_n)(x^*) - J(a)(x^*)\| = \|(J(a_n) - J(a))(x^*)\| \leqslant \|J(a_n) - J(a)\| \to 0$$

para todo $x^* \in B_{X^*}$. Luego $J(a_n)(x^*) \to J(a)(x^*)$ para todo $x^* \in B_{X^*}$. En particular

$$T_0(a_n) = J(a_n)(d_0^*) \to J(a)(d_0^*) = T_0(a)$$

y así T_0 es continua. Finalmente, como $\|T_0(e_\gamma)\| \geqslant \varepsilon_0/2$ para cada $\gamma \in \Gamma_{d_0^*}$, se cumple que $\inf\limits_{\gamma\in\Gamma_{d_0^*}} \|T_0(e_\gamma)\| \geqslant \varepsilon_0/2 > 0$. Por la Proposición 3.15 existe $\Gamma' \subseteq \Gamma_{d_0^*}$ con $|\Gamma'| = |\Gamma_{d_0^*}| = |\Gamma|$ tal que $T_0|_{\ell_\infty(\Gamma')}$ es un isomorfismo. Por lo tanto $\ell_\infty(\Gamma') \hookrightarrow Y$ y como $\ell_\infty(\Gamma') \cong \ell_\infty(\Gamma)$ se sigue directamente que $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow Y$. □

Corolario 3.17. *Sean X y Y espacios de Banach y Γ un conjunto no numerable. Supongamos que* $\mathrm{cf}(\Gamma) > \mathrm{dens}(X^*)$. *Entonces $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow \mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$ si, y solo si, $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow Y$.*

Demostración. Supongamos que $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow Y$. Como se argumentó en la prueba del Teorema 3.12, tenemos que $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow Y \hookrightarrow \mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$. Como $\mathscr{P}_{\omega^*}({}^nX^*;Y)$ es isométricamente isomorfo a $K_{\omega^*}(X^*;\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y))$ (ver Teorema 3.11), se sigue que $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow K_{\omega^*}(X^*;\mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y))$. Ya que $\mathrm{cf}(|\Gamma|) > \mathrm{dens}(X^*)$, el Teorema 3.16 implica que $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow \mathscr{P}_{\omega^*}({}^{n-1}X^*;Y)$. Repitiendo el razonamiento anterior $(n-1)-$veces encontramos que $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow \mathscr{P}_{\omega^*}({}^1X^*;Y) = K_{\omega^*}(X^*;Y)$. Nuevamente por el Teorema 3.16 concluimos que $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow Y$. □

El próximo resultado da una condición que garantiza la existencia de una copia isomorfa de $\ell_\infty(\Gamma)$ en $\mathscr{L}({}^nX;Y)$ a partir de una copia de $c_0(\Gamma)$ en Y. La prueba es inspirada por (Pérez and Rincón, 2019, Proposición 1.3).

Definición 3.18. *Sean τ un cardinal infinito, Γ un conjunto tal que $|\Gamma| = \tau$. Decimos que un espacio de Banach X tiene la propiedad de $\tau-$*Josefson-Nissenzweig *(o de forma corta, X tiene la propiedad de JN_τ) si existe una familia de elementos $(x^*_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ en S_{X^*} tal que $(x^*_\gamma(x))_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$ para todo $x \in X$.*

Proposición 3.19. *Sea Γ un conjunto infinito y X un espacio de Banach con la propiedad de $JN_{|\Gamma|}$. Entonces para cualquier espacio de Banach Y tenemos que*

$$c_0(\Gamma) \hookrightarrow Y \Longrightarrow \ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow \mathscr{L}(^nX;Y).$$

Demostración. Supongamos que $c_0(\Gamma) \hookrightarrow Y$ y sea $T : c_0(\Gamma) \to Y$ un isomorfismo. Ya que X tiene la propiedad de $JN_{|\Gamma|}$, existe una familia $(x^*_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ en S_{X^*} tal que $(x^*_\gamma(x))_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$ para todo $x \in X$. Veamos que $\left(a_\gamma \prod_{j=1}^n x^*_\gamma(x_j)\right)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$ para cada $x_1,\dots,x_n \in X$ y $a = (a_\gamma)_\gamma \in \ell_\infty(\Gamma)$. Cuando $a = 0$ o $x_k = 0$ para algún $1 \leqslant k \leqslant n$ tenemos que $\left(a_\gamma \prod_{j=1}^n x^*_\gamma(x_j)\right)_{\gamma\in\Gamma} = \mathbf{0}$ que claramente pertenece a $c_0(\Gamma)$. Supongamos que existen $a = (a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, $x_1,\dots,x_n \in X$ no nulos y $\varepsilon_0 > 0$ tales que el conjunto

$$\Gamma_{\varepsilon_0} = \left\{ \gamma \in \Gamma : \left| a_\gamma \prod_{j=1}^n x^*_\gamma(x_j) \right| \geqslant \varepsilon_0 \right\}$$

es infinito y sea $\gamma' \in \Gamma_{\varepsilon_0}$. Entonces $|x^*_{\gamma'}(x_j)| \neq 0$ para todo $1 \leqslant j \leqslant n$ ya que

$$\left| a_{\gamma'} \prod_{j=1}^n x^*_{\gamma'}(x_j) \right| = |a_{\gamma'}||x^*_{\gamma'}(x_1)| \cdots |x^*_{\gamma'}(x_n)| \overset{(1)}{\geqslant} \varepsilon_0 \neq 0.$$

Si $1 \leqslant k \leqslant n$ y denotando

$$N = \sup_{\gamma\in\Gamma}|a_\gamma|, N_1 = \sup_{\gamma\in\Gamma}|x^*_\gamma(x_1)|, ..., N_n = \sup_{\gamma\in\Gamma}|x^*_\gamma(x_n)|,$$

entonces por la desigualdad (1) tenemos que

$$\begin{aligned} |x^*_{\gamma'}(x_k)| &\geqslant \frac{\varepsilon_0}{|a_{\gamma'}||x^*_{\gamma'}(x_1)|\cdots|x^*_{\gamma'}(x_{k-1})||x^*_{\gamma'}(x_{k+1})|\cdots|x^*_{\gamma'}(x_n)|} \\ &\geqslant \varepsilon_0 N\cdot N_1\cdots N_{k-1}\cdot N_{k+1}\cdots N_n. \end{aligned}$$

De esta manera, para $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon_0}{N\cdot N_1\cdots N_{k-1}\cdot N_{k+1}\cdots N_n}$ se sigue que $\gamma' \in \{\gamma\in\Gamma : |x^*_\gamma(x_k)| \geqslant \varepsilon_1\}$ o equivalentemente $\Gamma_{\varepsilon_0} \subseteq \{\gamma\in\Gamma : |x^*_\gamma(x_k)| \geqslant \varepsilon_1\}$. Esto implica que $\{\gamma\in\Gamma : |x^*_\gamma(x_k)| \geqslant \varepsilon_1\}$ es infinito lo cual es absurdo. Sea $J : \ell_\infty(\Gamma) \to \mathscr{L}_a(^nX;Y)$ dada por

$$J(a)(x_1, ..., x_n) = T(a_\gamma \prod_{j=1}^{n} x^*_\gamma(x_j)),$$

donde $x_1, ..., x_n \in X$. Ya que

$$\begin{aligned} J(a)(x_1, ..., x_k + \alpha y_k, ..., x_n) &= T(a_\gamma x^*_\gamma(x_1)\cdots(x^*_\gamma(x_k) + \alpha x^*_\gamma(y_k))\cdots x^*_\gamma(x_n)) \\ &= T(a_\gamma x^*_\gamma(x_1)\cdots x^*_\gamma(x_k)\cdots x^*_\gamma(x_n)) \\ &+ \alpha T(a_\gamma x^*_\gamma(x_1)\cdots x^*_\gamma(y_k)\cdots x^*_\gamma(x_n)) \\ &= J(a)(x_1, ..., x_k, ..., x_n) + \alpha J(a)(x_1, ..., y_k, ..., x_n), \end{aligned}$$

para todo $x_1,\ldots,x_k,y_k,\ldots,x_n \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$ y $1 \leqslant k \leqslant n$, se cumple que $J(a) \in \mathscr{L}_a({}^nX;Y)$ para todo $a \in \ell_\infty(\Gamma)$. Veamos que J es continua. Si $a = (a_\gamma)_\gamma \in \ell_\infty(\Gamma)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|J(a)\| &= \sup_{\|x_1\|\leqslant 1,\ldots,\|x_n\|\leqslant 1} \|J(a)(x_1,\ldots,x_n)\| \\
&= \sup_{\|x_1\|\leqslant 1,\ldots,\|x_n\|\leqslant 1} \|T((a_\gamma \prod_{j=1}^n x_\gamma^*(x_j))_\gamma)\| \\
&\leqslant \|T\| \cdot \sup_{\|x_1\|\leqslant 1,\ldots,\|x_n\|\leqslant 1} \|(a_\gamma \prod_{j=1}^n x_\gamma^*(x_j))_\gamma\| \\
&\leqslant \|T\| \cdot \sup_{(\gamma,x_1,\ldots,x_n)\in\Gamma\times B_{X^n}} \left| a_\gamma \prod_{j=1}^n x_\gamma^*(x_j) \right| \\
&= \|T\|\|a\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto J es continua. Por otro lado, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| \geqslant \delta\|x\|$ para todo $x = (x_\gamma)_\gamma \in c_0(\Gamma)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|J(a)\| &= \sup_{\|x_1\|\leqslant 1,\ldots,\|x_n\|\leqslant 1} \|J(a)(x_1,\ldots,x_n)\| \\
&= \sup_{\|x_1\|\leqslant 1,\ldots,\|x_n\|\leqslant 1} \|T((a_\gamma \prod_{j=1}^n x_\gamma^*(x_j))_\gamma)\| \\
&\geqslant \delta \cdot \sup_{\|x_1\|\leqslant 1,\ldots,\|x_n\|\leqslant 1} \|(a_\gamma \prod_{j=1}^n x_\gamma^*(x_j))_\gamma\| \\
&= \delta \cdot \sup_{(\gamma,x_1,\ldots,x_n)\in\Gamma\times B_{X^n}} \left| a_\gamma \prod_{j=1}^n x_\gamma^*(x_j) \right| \\
&= \delta\|a\|.
\end{aligned}$$

Luego $\|J(a)\| \geqslant \delta \|a\|$ para $a \in \ell_\infty(\Gamma)$. Así, J es inyectiva y J^{-1} es continua. Por lo tanto, $\ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow \mathscr{L}(^nX;Y)$. $\square$

La proposición anterior nos da pie a conjeturar lo siguiente:

Conjetura 3.20. *Sea Γ un conjunto infinito y X un espacio de Banach tal que X^* tiene la propiedad de $JN_{|\Gamma|}$. Entonces para cualquier espacio de Banach Y tenemos que*

$$c_0(\Gamma) \hookrightarrow \mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y) \Longrightarrow \ell_\infty(\Gamma) \hookrightarrow \mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y).$$

Con el siguiente ejemplo notamos que la conjetura anterior es falsa.

Ejemplo 3.21. *Sea Γ un conjunto infinito y $X = Y = c_0(\Gamma)$. Es fácil ver que $X^* = \ell_1(\Gamma)$ tiene la propiedad de $JN_{|\Gamma|}$. Notemos que $c_0(\Gamma) \hookrightarrow Y$. Sin embargo, $\mathscr{P}_{\omega^*}(^nX^*;Y)$ no contiene una copia de $\ell_\infty(\Gamma)$. En efecto, si esto ocurriera, por el Teorema 3.12 tendríamos que $\ell_\infty \hookrightarrow c_0(\Gamma)$, pero esto no es cierto puesto que $c_0(\Gamma)$ admite una norma LUR mientras que ℓ_∞ no admite una norma LUR (ver (Fabián et al., 2011, p. 409 y Teorema 13.27)).*

Referencias Bibliográficas

Dineen, S. (1999). *Complex Analysis of Infinite Dimensional Spaces*. New York: Springer, 1 edition.

Dineen, S. and Mujica, J. (2015). Banach spaces of homogeneous polynomials without the approximation property. *Czech Math J*, (65):367–374.

Drewnowski, L. (1990). Copies of ℓ_∞ in an operator space. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, (108):523–526.

Fabián, M., Habala, P., Hájek, P., Santalucía, V., and Zizler, V. (2011). *Banach space theory: the basis for linear and nonlinear analysis*. New York, Springer.

Kalton, N. (1974). Spaces of compact operators. *Math. Ann, v*, 208(4):267–278.

Kesavan, S. (2009). *Functional Analysis*. Hindustan Book Agency.

Megginson, R. (1998). *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer, 1 edition.

Mujica, J. (1986). *Complex analysis in Banach spaces: holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions*. North-Holland, 1 edition.

Mujica, J. (2006). *Notas de Espaços de Banach, IMECC-UNICAMP*.

Myung Kim, J. (2013). On spaces of weak* to weak continuous compact operators. *Bull. Korean Math. Soc*, (1):161–173.

Pérez, S. (2017). *Approximation property, reflexivity and complemented subspaces on homogeneous polynomials*. UNICAMP, Tesis Ph.D.

Pérez, S. and Rincón, M. (2019). Copies of $c_0(\gamma)$ in the space of bounded linear operators. *Arch.Math*, (112):623–631.

Rosenthal, H. (1970). On relatively disjoint families of measures, with some applications to banach space theory. *Studia Math.*, 37:13–36.

Ruess, W. (1984). Duality and geometry of spaces of compact operators. *North-Holland Mathematics Studies*, 90:59–78.

Ryan, R. (1980). *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorply*. Trinity College, Tesis Ph.D.