

**EL ÁBACO PROBABILÍSTICO: FUNDAMENTOS,
ALCANCES Y APLICACIONES**

**LADY DIANA CÁRDENAS MARTÍNEZ
RÓNAL DARÍO VILLAMIZAR ÁNGEL**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010**

EL ÁBACO PROBABILÍSTICO: FUNDAMENTOS, ALCANCES Y APLICACIONES

**LADY DIANA CÁRDENAS MARTÍNEZ
RÓNAL DARÍO VILLAMIZAR ÁNGEL**

**Monografía presentada para optar al título de Licenciatura en
Matemáticas.**

**Director
JUAN ANDRÉS MONTOYA
Doctor en Matemáticas**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2010**

Tabla de Contenido

1. Cadenas de Markov	12
1.1. La Distribución inicial	15
1.2. Grafo de transición de una cadena de Markov	17
1.3. Cadenas de Markov Regulares	18
1.3.1. Cadenas Aperiódicas	21
1.3.2. Distribución Estacionaria	22
1.3.3. Aplicaciones	24
1.4. Cadenas de Markov Absorbentes	25
1.4.1. Forma Canónica	27
1.4.2. Probabilidad de absorción	29
1.4.3. Matriz Fundamental	30
1.4.4. Tiempo de Absorción	32
2. El ábaco probabilístico	35
2.1. El ábaco probabilístico: un método de simulación para calcular las pro- babilidades de absorción de manera exacta.	36
2.1.1. Movimientos del ábaco probabilístico	38
2.1.2. El algoritmo de Engel	39
2.1.3. Cantidades que pueden calcularse usando el ábaco probabilístico	40
2.2. Movimientos del ábaco probabilístico: Una formalización	41
3. Alcances didácticos del ábaco probabilístico	51
3.1. Potencial didáctico	52
Conclusiones	59
Bibliografía	60
A. Simulación de la cuenta de cobro con vértice inicial v_1	61

Lista de Figuras

1.1. Pueblo de cuatro esquinas.	12
1.2. Caminante indeciso.	12
1.3. Movimiento del caminante en sentido horario.	13
1.4. Movimiento del caminante en sentido anti-horario.	13
1.5. Grafo de transición del caminante aleatorio.	18
1.6. Grafo de transición de una cadena de Markov irreducible.	20
1.7. Grafo de transición de una cadena de Markov reducible.	20
1.8. Grafo de transición de una cuenta de cobro.	27
2.1. Grafo de transición de una cuenta de cobro.	35
2.2. Grafo de transición de una cuenta de cobro.	37
2.3. Grafo de transición de una cuenta de cobro.	38
2.4. Cajas.	46
2.5. Grafo de transición de la cadena de Markov.	46
2.6. Grafo-ábaco cargado críticamente.	47
2.7. Primer movimiento (Introducir una ficha en el estado inicial “ 0 ”).	47
2.8. Segundo movimiento.	48
2.9. Tercer movimiento.	48
2.10. Cuarto movimiento.	49
2.11. Quinto movimiento.	49
2.12. Sexto movimiento.	49
2.13. Movimiento final (Tras introducir ocho fichas).	50
3.1. Árbol de posibilidades.	53
3.2. Primera regla de la Trayectoria.	53
3.3. Segunda regla de la Trayectoria (una posible trayectoria).	54
3.4. Segunda regla de la Trayectoria (segunda posible trayectoria).	54
3.5. Segunda regla de la Trayectoria (una tercera posible trayectoria).	54
3.6. Árbol de posibilidades - Apuesta Audaz.	56
A.1. Grafo-Ábaco cuenta de cobro.	61
A.2. Primer movimiento (Configuración inicial del grafo-Ábaco e introducir fichas en el estado inicial).	62
A.3. Segundo movimiento (Distribuir fichas uniformemente).	62

A.4. Tercer movimiento (Distribuir fichas uniformemente).	62
A.5. Cuarto movimiento (Distribuir fichas uniformemente).	63
A.6. Quinto movimiento (Distribuir fichas uniformemente).	63
A.7. Sexto movimiento (Introducir fichas en el estado inicial).	63
A.8. Séptimo movimiento (Distribuir fichas uniformemente).	64
A.9. Octavo movimiento (Introducir fichas en el estado inicial).	64
A.10. Noveno movimiento (Distribuir fichas uniformemente).	64
A.11. Décimo movimiento (Distribuir fichas uniformemente).	65
A.12. Decimoprimer movimiento (Introducir fichas en el estado inicial).	65
A.13. Decimosegundo movimiento (Distribuir fichas uniformemente).	65
A.14. Decimotercer movimiento (Introducir fichas en el estado inicial).	66
A.15. Decimocuarto movimiento (Distribuir fichas uniformemente).	66
A.16. Decimoquinto movimiento (Distribuir fichas uniformemente).	66
A.17. Decimosexto movimiento (Distribuir fichas uniformemente).	67
A.18. Decimoséptimo movimiento (Introducir fichas en el estado inicial).	67
A.19. Decimoctavo movimiento (Distribuir fichas uniformemente).	67
A.20. Decimonoveno movimiento (Introducir fichas en el estado inicial).	68
A.21. Vigésimo y Vigésimo primer movimiento (Distribuir fichas uniformemente).	68

RESUMEN

TÍTULO: EL ÁBACO PROBABILÍSTICO: FUNDAMENTOS, ALCANCES Y APLICACIONES. *

AUTORES: LADY DIANA CÁRDENAS MARTÍNEZ.**
RÓNAL DARÍO VILLAMIZAR ÁNGEL.***

PALABRAS CLAVES:

- Cadena de Markov
- Ábaco Probabilístico
- Cadenas Absorbentes

DESCRIPCIÓN

Esta monografía presenta una revisión bibliográfica de la teoría matemática de los procesos de Markov, así como la teoría matemática que es la base de un método de simulación determinista llamado el “ábaco probabilístico”, el cual permite calcular de manera exacta las probabilidades de absorción y demás cantidades descriptivas asociadas a una cadena de Markov absorbente.

El trabajo se organizó en tres capítulos:

- Capítulo uno: Se presenta la teoría de las cadenas de Markov de tiempo discreto con espacio de estados finitos. Es importante anotar que esta teoría es el fundamento teórico del ábaco probabilístico.
- Capítulo dos: Se presenta y analiza el ábaco probabilístico y se muestra que este es un método correcto.
- Capítulo tres: Se discuten las ventajas (potencial didáctico) del algoritmo de Engel frente a otros métodos que pueden ser usados para calcular las probabilidades de absorción y demás cantidades descriptivas asociadas a una cadena de Markov absorbente.

Al final del trabajo se presentan algunas conclusiones, entre otras se concluye que el ábaco probabilístico es una poderosa herramienta didáctica la cual permite introducir una teoría matemática sofisticada y compleja, como lo es la teoría de cadenas de Markov absorbentes, en la educación media, siendo que el ábaco probabilístico permite reducir una serie de cálculos complejos, necesarios en la teoría, a una simulación (juego) determinístico.

* Trabajo de Grado.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Dr. Juan Andrés Montoya.

*** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Dr. Juan Andrés Montoya.

ABSTRACT

TITTLE: THE PROBABILISTIC ABACUS: FOUNDATIONS, SCOPE AND APPLICATIONS *

AUTHOR: LADY DIANA CÁRDENAS MARTÍNEZ. **
RÓNAL DARÍO VILLAMIZAR ÁNGEL. ***

KEY WORDS:

- Markov Chains.
- Probabilistic Abacus.
- Absorbing Markov Chains.

DESCRIPTION

In this work we present the Mathematical theory of Markov process, and we discuss the mathematics underlying a deterministic simulation algorithm, called The Probabilistic Abacus, which can be used to compute the absorption probabilities and some other descriptive quantities associated to a given absorbing Markov chain.

This work is organized into three main chapters, as follows:

- In chapter one we develop the theory of finite Markov Chains. It is important to remark that - this theory is the mathematical basis of The probabilistic Abacus.
- In chapter two we introduce The probabilistic Abacus. Furthermore, we prove that The probabilistic Abacus is a sound algorithm.
- In chapter three we analyze the didactical scope of The Probabilistic Abacus. To this end, we compare Engel's method with some other methods that can be used to compute absorbing probabilities.

At the end of this work we present some conclusions, so for example we conclude that The Probabilistic Abacus is a powerful didactic tool which allows us to introduce a sophisticated mathematical theory, the theory of absorbing Markov chains, in High school education. It is the case, since The Probabilistic Abacus allows us to reduce a series of complex computations, which are necessary to perform in the theory, to a deterministic simulation (game).

* Grade Work.

** Faculty of Science. Licentiate in Mathematics. Dr. Juan Andrés Montoya.

*** Faculty of Science. Licentiate in Mathematics. Dr. Juan Andrés Montoya.

Capítulo 1

Cadenas de Markov

El objetivo del ejemplo a continuación, es introducir la definición de Cadena de Markov así como algunas de sus propiedades más importantes.

Consideremos un “caminante aleatorio” en un pequeño pueblo de cuatro calles y cuatro esquinas, las que llamaremos v_1, v_2, v_3 y v_4 respectivamente (figura 1.1).

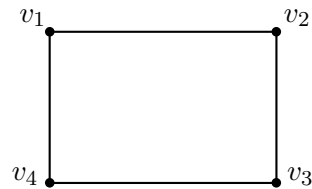


Figura 1.1: Pueblo de cuatro esquinas.

En el instante cero, el caminante está de pie ubicado en la esquina v_1 (Figura 1.2).

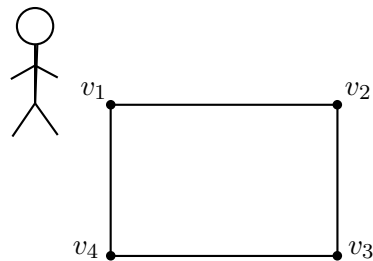


Figura 1.2: Caminante indeciso.

En el instante uno, el caminante se moverá a v_2 o v_4 , dependiendo del resultado obtenido al lanzar una moneda justa. Si en el lanzamiento de la moneda aparece “número” el caminante se moverá un paso en sentido de las manecillas del reloj (Figura 3).

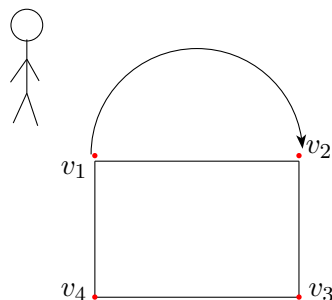


Figura 1.3: Movimiento del caminante en sentido horario.

Por otro lado, si el resultado obtenido es “escudo” el caminante se moverá un paso en el sentido contrario a las manecillas del reloj (Figura 4).

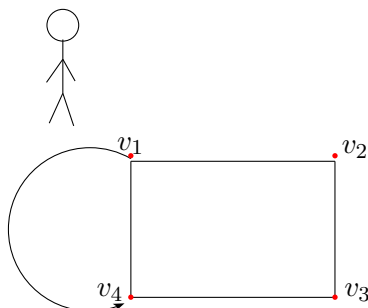


Figura 1.4: Movimiento del caminante en sentido anti-horario.

En el instante 2, el caminante lanza la moneda de nuevo para decidir a cuál de las dos esquinas adyacentes se moverá, este procedimiento se repite en los tiempos 3, 4, . . .

Para cada n , X_n denota el índice de la esquina de la calle en la cual el caminante se detiene en el instante n . Puesto que (X_0, X_1, \dots) es un proceso aleatorio que toma valores $\{1, 2, 3, 4\}$ y el caminante inicia en tiempo cero en v_1 , tenemos que

$$P(X_0 = 1) = 1$$

A continuación el caminante se moverá a v_2 o v_4 con probabilidad de $\frac{1}{2}$ para cada una

de las dos posibilidades

$$P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$$

y

$$P(X_1 = 4) = \frac{1}{2}$$

Supóngase que en el tiempo n , el caminante se detiene en v_2 . Luego obtenemos las probabilidades condicionales

$$P(X_{n+1} = 1 | X_n = 2) = \frac{1}{2}$$

y

$$P(X_{n+1} = 3 | X_n = 2) = \frac{1}{2}$$

Si consideramos probabilidades condicionales sobre toda la historia del proceso en tiempo n , obtenemos el mismo resultado, es decir,

$$P(X_{n+1} = 1 | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = 2) = \frac{1}{2}$$

y

$$P(X_{n+1} = 3 | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = 2) = \frac{1}{2}$$

para cualquier elección de i_0, \dots, i_{n-1} .

Esto sucede porque el lanzamiento de la moneda en tiempo $n + 1$ es independiente de todos los lanzamientos previos de la moneda y por lo tanto independiente de (X_0, X_1, \dots, X_n) . Este fenómeno se conoce como la **propiedad de Markov**: La distribución condicional de X_{n+1} dado (X_0, \dots, X_n) depende solo de X_n . En otras palabras para hacer la mejor predicción posible de lo que sucederá “mañana” (tiempo $n + 1$), solo necesitamos considerar que sucede en el presente “hoy” (tiempo n), ya que el pasado “ayer” (tiempos $0, \dots, n - 1$), no suministra información útil. Otra interesante característica de los procesos aleatorios es llamada **la homogeneidad temporal** según la cual la distribución condicional de X_{n+1} es la misma para todo n , (esto sucede porque el procedimiento que usa el caminante para decidir a donde ir es el mismo en todo instante).

Definición 1.1. Sea $K \times K$ una matriz P con elementos $\{P_{i,j} : i, j = 1, \dots, k\}$, tal que para todo $i, j \leq k$ se tiene $P_{i,j} \geq 0$ y adicionalmente para todo $i \leq k$ se

tiene que $\sum_{j=1}^k P_{i,j} = 1$. Un proceso aleatorio (X_0, X_1, \dots) con espacio de estados $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ se dice ser una cadena de Markov homogénea con matriz de transición P , si para toda n , todo $i, j \in \{1, \dots, k\}$ y todo $i_0, \dots, i_{n-1} \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = s_j | X_0 = s_{i_0}, X_1 = s_{i_1}, \dots, X_{n-1} = s_{i_{n-1}}, X_n = s_i) \\ = P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i) = P_{i,j}. \end{aligned}$$

Los elementos de la matriz de transición P se llaman probabilidades de transición. La probabilidad de transición $P_{i,j}$ es la probabilidad condicional de estar en el estado s_j “mañana” dado que estamos en el estado s_i “hoy”. El término “homogéneo” es con frecuencia abandonado, y tomado implícitamente cuando hablamos de “cadenas de Markov”.

Ejemplo 1.1. “El caminante aleatorio”

El caminante aleatorio es una cadena de Markov con espacio de estados $\{v_1, \dots, v_4\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

donde $P_{11} = 0$ es la probabilidad de estar “mañana” en el estado v_1 dado que “hoy” estamos en el estado v_1 ; $P_{12} = \frac{1}{2}$ es la probabilidad de estar “mañana” en el estado v_2 dado que “hoy” estamos en el estado v_1 , ..., $P_{43} = \frac{1}{2}$ es la probabilidad de estar “mañana” en el estado v_3 dado que hoy estamos en el estado v_4 y finalmente $P_{44} = 0$ es la probabilidad de estar “mañana” en el estado v_4 dado que “hoy” estamos en el estado v_4 .

1.1. La Distribución inicial

La distribución inicial es otro parámetro importante (junto a la matriz de transición) de una cadena de Markov (X_0, X_1, \dots) , la cual nos da información acerca de la manera como la cadena podría iniciar. Sea $\mu^{(0)}$ la distribución inicial de una cadena de Markov con espacios de estados $\{s_1, \dots, s_k\}$.

$$\mu^{(0)} = (\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots, \mu_k^{(0)})$$

donde

$$\mu^{(0)} = (P(X_0 = s_1), P(X_0 = s_2), \dots, P(X_0 = s_k))$$

Dado que $\mu^{(0)}$ representa una distribución de probabilidad, tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \mu_i^{(0)} = 1$$

Similarmente, los vectores fila μ^1, μ^2, \dots denotan las distribuciones de probabilidad de la Cadena de Markov en tiempo $1, 2, \dots$, por lo tanto

$$\mu^{(n)} = (\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \dots, \mu_k^{(n)}) = (P(X_n = s_1), P(X_n = s_2), \dots, P(X_n = s_k))$$

Una vez conocida la distribución $\mu^{(0)}$ y la matriz de transición P , podemos calcular todas las distribuciones $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \dots$ de toda la cadena de Markov.

Ejemplo 1.2. Distribución inicial del caminante aleatorio.

Retomando el ejemplo del caminante aleatorio tenemos la distribución inicial:

$$\begin{aligned} \mu^{(0)} &= (\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \mu_3^{(0)}, \mu_4^{(0)}) = (P(X_0 = v_1), P(X_0 = v_2), P(X_0 = v_3), P(X_0 = v_3)) \\ &= (1, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Esto significa que en el instante cero el caminante ocupa el estado v_1 y no cualquiera de los otros estados v_2, v_3, v_4 .

La distribución en el instante 1 es:

$$\mu^{(1)} = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}).$$

Esto significa que en el instante 1 (un paso después) la probabilidad de ocupar cualquiera de los estados v_2, v_4 es de $\frac{1}{2}$ respectivamente, mientras que ocupar cualquiera de los estados v_1, v_3 es imposible.

Teorema 1.1. *Dada una cadena de markov (X_0, X_1, \dots) con espacio de estados (s_1, s_2, \dots, s_k) , distribución inicial $\mu^{(0)}$ y matriz de transición P , se tiene que*

$$\mu^{(n)} = \mu^{(0)} P^n$$

Demostración. Consideremos el caso $n = 1$. Obtenemos para $j = 1, \dots, k$, que

$$\begin{aligned} \mu_j^{(1)} &= P(X_1 = s_j) = \sum_{i=1}^k P(X_0 = s_i, X_1 = s_j) \\ &= \sum_{i=1}^k P(X_0 = s_i) P(X_1 = s_j | X_0 = s_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \mu_i^{(0)} P_{i,j} = (\mu^{(0)} P)_j \end{aligned}$$

donde $(\mu^{(0)}P)_j$ denota el j -ésimo elemento del vector fila $\mu^{(n)}P$. Por lo tanto $\mu^{(1)} = \mu^{(0)}P$.

Para probar $\mu^n = \mu^{(0)}P^n$ para n arbitrario utilizamos inducción sobre n . Fijemos m , y supongamos que $\mu^n = \mu^{(0)}P^n$ se cumple para $n = m$. Para $n = m + 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}\mu_j^{(m+1)} &= P(X_{m+1} = s_j) = \sum_{i=1}^k P(X_m = s_i, X_{m+1} = s_j) \\ &= \sum_{i=1}^k P(X_m = s_i)P(X_{m+1} = s_j | X_m = s_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \mu_i^{(m)} P_{i,j} = (\mu^{(m)}P)_j\end{aligned}$$

así $\mu^{(m+1)} = \mu^{(m)}P$. Pero $\mu^{(m)} = \mu^{(0)}P^m$ por la hipótesis de inducción, de modo que

$$\mu^{(m+1)} = \mu^{(m)}P = \mu^{(0)}P^m P = \mu^{(0)}P^{m+1} \blacksquare$$

Ejemplo 1.3. Retomando el ejemplo del caminante aleatorio, la distribución en el instante 2 es igual a

$$\mu^{(2)} = (1, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

Esto significa que en el instante 2 (dos pasos después) la probabilidad de ocupar cualquiera de los estados v_1, v_3 es de $\frac{1}{2}$ respectivamente, mientras que ocupar cualquiera de los estados v_2, v_4 es imposible.

1.2. Grafo de transición de una cadena de Markov

Una cadena de Markov se puede representar mediante un grafo dirigido, en el que los estados son los vértices y en las aristas se representan las probabilidades de transición. Un grafo $G = (V, E)$ consta de un conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_k\}$, y un conjunto de aristas $E = \{e_1, \dots, e_l\}$. Cada una de las aristas conecta dos vértices; si una arista conecta los vértices v_i y v_j , se denotará con el símbolo $\langle v_i, v_j \rangle$. Dos vértices se dicen ser vecinos si comparten al menos una arista, es decir, si una arista conecta los dos vértices.

Ejemplo 1.4. *Retomando el ejemplo del caminante aleatorio, ahora sobre grafos.*

El grafo de transición de esta cadena es:

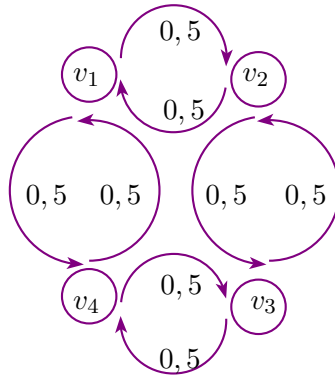


Figura 1.5: Grafo de transición del caminante aleatorio.

Este grafo tiene conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y el conjunto de aristas es:

$$E = \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_1 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \langle v_4, v_3 \rangle, \langle v_1, v_4 \rangle, \langle v_4, v_1 \rangle\}$$

Un camino aleatorio sobre un grafo $G = (V, E)$ es una cadena de Markov con espacio de estados $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ y el siguiente mecanismo de transición: Si el caminante aleatorio se detiene en un vértice v_i en el instante n , se moverá en el instante $n + 1$ a uno de los vecinos de v_i escogido al azar, (con igual probabilidad para cada uno de estos vecinos). Así, si denotamos el número de vecinos de un vértice v_i por d_i , entonces los elementos de la matriz de transición están dados por

$$P_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{d_i} & \text{si } v_i \text{ y } v_j \text{ son vecinos} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

1.3. Cadenas de Markov Regulares

En esta sección se discutirá brevemente dos propiedades de las cadenas de Markov como son irreducibilidad y aperiodicidad, las cuales son de gran importancia en el estudio de las distribuciones estacionarias y de las cadenas de Markov no homogéneas.

La propiedad de irreducibilidad nos dice que “todo estado de la cadena de Markov puede ser alcanzado desde cualquier otro estado de la cadena”, para que esto sea más preciso, considere una cadena de Markov (X_0, X_1, \dots) con espacio de estados $S = (s_1, \dots, s_k)$ y matriz de transición P . Decimos que un estado s_i se comunica con otro estado s_j , y se escribe, $s_i \rightarrow s_j$, si la cadena tiene probabilidad positiva de alcanzar el estado s_j cuando iniciamos en el estado s_i , en otras palabras, s_i se comunica con s_j , si existe un n tal que

$$P(X_{m+n} = s_j | X_m = s_i) > 0.$$

Esta probabilidad es independiente de m (debido a la homogeneidad de la cadena de Markov), e igual a $(P^n)_{i,j}$.

Si $s_i \rightarrow s_j$ y $s_j \rightarrow s_i$, entonces se dice que los estados s_i y s_j , se encuentran intercomunicados, y se escribe $s_i \leftrightarrow s_j$, lo que nos conduce a la definición de irreducibilidad.

Definición 1.2. Una cadena de Markov (X_0, X_1, \dots) , con espacio de estados $S = (s_1, \dots, s_k)$ y matriz de transición P se llama irreducible si para todo $s_i, s_j \in S$ tenemos que $s_i \leftrightarrow s_j$. De otra manera la cadena se dice reducible.

Una forma fácil de verificar si una Cadena de Markov es irreducible es a través de su grafo de transición. Una cadena de Markov es irreducible si y solo si su grafo de transición es fuertemente conexo, es decir, dados v, w dos vértices del grafo de transición, existe un camino dirigido de v a w .

Ejemplo 1.5. Cadena de Markov Irreducible, “El clima de Gothenburg”.

Algunas veces se afirma que la mejor forma de predecir el estado del clima de “mañana” consiste en realizar conjeturas a partir del clima actual “hoy”. Si tal afirmación es correcta, podemos utilizar cadenas de Markov para modelar el problema del clima.

En Gothenburg al 75% de los días lluviosos le siguen días lluviosos, y al 75% de los días soleados le siguen días soleados. Luego el clima de Gothenburg se puede modelar como una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{s_1, s_2\}$ con ($s_1 = \text{“lluvia”}$ y $s_2 = \text{“sol”}$), cuya matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$$

donde $P_{11} = 0,75$ es la probabilidad de que “hoy” siendo lluvioso “mañana” siga siendo lluvioso; $P_{12} = 0,25$ es la probabilidad de que “hoy” siendo lluvioso mañana sea soleado; $P_{21} = 0,25$ es la probabilidad de que “hoy” siendo soleado “mañana” sea lluvioso; $P_{22} = 0,75$ es la probabilidad de que “hoy” siendo soleado “mañana” siga siendo soleado.

En la gráfica a continuación podemos observar el grafo de transición de la cadena de Markov

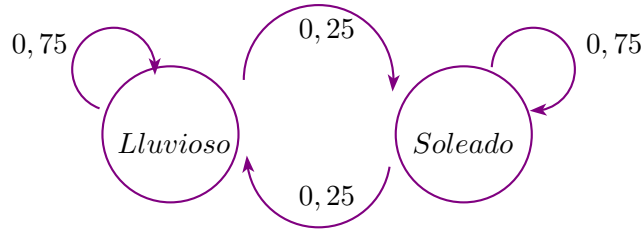


Figura 1.6: Grafo de transición de una cadena de Markov irreducible.

Ejemplo 1.6. Cadena de Markov reducible.

Considere una cadena de Markov (X_0, X_1, \dots) con espacio de estados $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Observe que el grafo de transición de esta cadena es igual a:

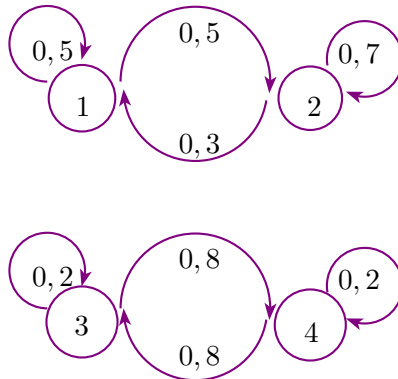


Figura 1.7: Grafo de transición de una cadena de Markov reducible.

Si observamos el grafo de transición, se ve claramente que si la cadena de Markov inicia en el estado v_2 o en el estado v_1 entonces el espacio de estados accesibles se limita a los estados v_1 y v_2 . Por lo tanto la cadena de Markov es reducible, es decir, la cadena al iniciar en v_2 (o en v_1) se comporta exactamente como si fuera una cadena de Markov con espacio de estados $\{v_1, v_2\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Similarmente, si se inicia en los estados v_3 o v_4 , entonces el proceso nunca podrá abandonar el conjunto de estados $\{v_3, v_4\}$. Por lo tanto cuando la cadena inicia en el estado v_3 o en el estado v_4 , la cadena de Markov con espacio de estados $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ funciona como una cadena de Markov con espacio de estados $\{v_3, v_4\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

1.3.1. Cadenas Aperiódicas

Dado un conjunto finito o infinito de números enteros positivos $\{a_1, a_2, \dots\}$ usaremos el símbolo $\text{mcd}\{a_1, a_2, \dots\}$, para denotar al máximo común divisor del conjunto a_1, a_2, \dots . El periodo $d(s_i)$ del estado $s_i \in S$ se define como

$$d(s_i) = \text{mcd}\{n \geq 1 : (P^n)_{i,i} > 0\}$$

En otras palabras, el periodo de s_i es el máximo común divisor del conjunto de tiempos de retorno del estado s_i . Si $d(s_i) = 1$, entonces se dice que el estado s_i es aperiódico.

Definición 1.3. Una cadena de Markov se dice **aperiódica** si y solo si todos sus estados son aperiódicos. De lo contrario se dice Periódica.

Ejemplo 1.7. Retomando nuevamente el ejemplo del clima de Guthenburg, se observa en la Figura 1,6 sin importar si el clima de hoy es de lluvia o sol, tenemos para cualquier n que la probabilidad de tener el mismo clima n días después es estrictamente positivo o expresado más compactamente: $(P^n)_{ii} > 0$ para todo n y para todo estado s_i . Esto implica que la cadena de Markov en el ejemplo 1,4 es aperiódica. Por otro lado, en el ejemplo del caminante aleatorio en la figura 1,2, donde el caminante aleatorio esta en el vértice v_1 en el tiempo cero, el caminante aleatorio debe realizar un número par de transiciones para volver al estado inicial v_1 . Esto significa que $P_{1,1}^n > 0$ solo para $n = 2, 4, 6, \dots$ por lo tanto, la cadena es periódica.

Definición 1.4. Una cadena de Markov se dice **regular** si y solo es irreducible y aperiódica.

1.3.2. Distribución Estacionaria

Esta sección se centra en el estudio del comportamiento a largo plazo de las cadenas de Markov. ¿Qué podemos decir sobre una cadena de Markov que ha estado evolucionando durante mucho tiempo?

Si (X_0, X_1, \dots) es una cadena de Markov regular con al menos dos estados, entonces, con probabilidad uno, la secuencia de los X_n no se estabilizará; ¿Existe alguna cantidad asociada a la cadena que se estabilice?

Ejemplo 1.8. Cadena de Markov Irreducible, “El clima de los Angeles”.

En los Angeles al 50% de los días lluviosos le siguen días lluviosos, y al 90% de los días soleados le siguen días soleados. Se trata de una cadena de Markov con dos estados ($s_1 = \text{“lluvioso”}$, $s_2 = \text{“soleado”}$) donde la matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

donde $P_{11} = 0,5$ es la probabilidad de que “hoy” siendo lluvioso “mañana” siga siendo lluvioso; $P_{12} = 0,5$ es la probabilidad de que “hoy” siendo lluvioso “mañana” sea soleado; $P_{21} = 0,1$ es la probabilidad de que “hoy” siendo soleado “mañana” sea lluvioso y $P_{22} = 0,9$ es la probabilidad de que “hoy” siendo soleado “mañana” sea soleado. Supongamos que la distribución inicial $\mu^{(0)}$ está dada por: $\mu^{(0)} = (\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$, luego

$$\mu^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\mu^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

.

.

.

$$\mu^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

es decir, la distribución $(\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$ se preserva para todos los tiempos, o lo que es lo mismo

$$\mu^{(n)} = \mu^{(0)} \text{ para todo } n \geq 1$$

Definición 1.5. Sea (X_0, X_1, \dots) una cadena de Markov con espacio de estados $\{s_1, \dots, s_k\}$ y matriz de transición P . Un vector fila $\mu_\infty = (\Pi_1, \dots, \Pi_k)$ se dice ser una distribución estacionaria para la cadena de Markov, si satisface:

1. $\Pi_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, k$, y $\sum_{i=1}^k \Pi_i = 1$.
(Significa que μ_∞ describe una distribución de probabilidad sobre s_1, \dots, s_k).
2. $\mu_\infty P = \mu_\infty$. Significa que $\sum_{i=1}^k \Pi_i P_{i,j} = \Pi_j$ para $j = 1, \dots, k$, e implica que si la distribución inicial $\mu^{(0)}$ es igual a μ_∞ , entonces la distribución $\mu^{(1)}$ de la cadena en el instante 1 satisface la ecuación

$$\mu^{(1)} = \mu^{(0)} P = \mu_\infty P = \mu_\infty$$

y esto implica que para todo $n \geq 1$ se satisface $\mu^{(n)} = \mu_\infty$.

Teorema 1.2. “Existencia de distribuciones estacionarias” Para toda cadena de Markov irreducible y aperiódica existe al menos una distribución estacionaria.

Una prueba de este teorema puede ser consultada en Häggstöm (2002).

Definición 1.6. Si $\nu^{(1)} = (\nu_1^1, \dots, \nu_k^1)$ y $\nu^{(2)} = (\nu_1^2, \dots, \nu_k^2)$ son distribuciones de probabilidad sobre $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, entonces definimos la distancia de variación total entre $\nu^{(1)}, \nu^{(2)}$ como:

$$d_{TV}(\nu^1, \nu^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k |\nu_i^{(1)} - \nu_i^{(2)}|$$

Teorema 1.3. “Convergencia de la cadena de Markov” Sea (X_0, X_1, \dots) una cadena de markov irreducible y aperiódica con espacios de estados $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, matriz de transición P , y distribución inicial arbitraria $\mu^{(0)}$. Entonces, se tiene que existe μ_∞ tal que para todo μ^0 se tiene que

$$\mu^{(0)} P^n \xrightarrow{TV} \mu_\infty,$$

donde $\mu^{(0)} P^n \xrightarrow{TV} \Pi$ indica que $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{TV}(\mu^{(0)} P^n, \Pi) = 0$

es decir, si simulamos una cadena de Markov regular un cierto número de iteraciones, digamos n suficientemente grande, entonces independientemente de la distribución inicial con que hallamos empezado, la distribución en el instante n será cercana a la distribución estacionaria μ_∞ . El lector interesado en profundizar en estos temas pueden consultar la excelente referencia Häggstöm (2002).

1.3.3. Aplicaciones

La principal aplicación de las cadenas de Markov es el método de Monte Carlo cuya base teórica es el teorema de convergencia de las cadenas de Markov regulares, que garantiza que la distribución μ^n de una cadena de Markov irreducible y aperiódica que inicia en un estado prefijado cualquiera converge a la distribución estacionaria μ_∞ cuando n tiende a infinito.

El método de Monte Carlo usa el azar para conseguir información muy difícil de obtener mediante otros procedimientos y se aplica en muy diversos problemas, incluido el diseño de nuevos y complejos fármacos. El método de Monte Carlo fue bautizado así por su clara analogía con los juegos de ruleta de los casinos, el más celebre de los cuales es el de Monte Carlo, casino cuya construcción fue propuesta en 1856 por el príncipe Carlos III de Mónaco, siendo inaugurado en 1861.

El precursor de dicho método fue el naturalista francés Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707-1786), quien en 1773, ideó un nuevo método para calcular el número Π , se trataba de una técnica para buscar una solución de un problema numérico utilizando simulaciones en las cuales se realizaban una gran cantidad de experimentos aleatorios.

Supongamos que se tiene una mesa con una serie de líneas paralelas dibujadas en ella, que están igualmente espaciadas (por ejemplo la separación es de 1 pulgada). Supongamos también que se tiene un alfiler o aguja, de una pulgada de largo. Si la aguja cae sobre la mesa, usted encontrará que una de las dos opciones siguientes ocurre:

- La aguja cruza o toca una de las líneas.
- la aguja no atraviesa ninguna línea.

La idea ahora es lanzar la aguja muchas veces sobre la mesa, y registrar los resultados. Es decir, queremos hacer una estimación del número de veces que la aguja cruza una línea cuando esta se lanza al azar N veces sobre la mesa, llamemos C al número de veces que la aguja cruza una línea. Si se sigue lanzando la aguja, con el tiempo usted encontrará que el número $\frac{2N}{C}$ aproxima el valor de π .

La importancia actual del método de Monte Carlo se basa en varios hechos:

- La existencia de problemas numéricos de muy difícil solución por métodos analíticos, que a su vez pueden ser resueltos de manera aproximada usando el método

de Monte Carlo.

- El desarrollo de las aplicaciones de los ordenadores, que permite que los experimentos no se tengan que realizar físicamente sino mediante simulaciones de números aleatorios o números determinísticos pseudoaleatorios.
- Las aplicaciones posibles han trascendido el terreno de las matemáticas puras (ecuaciones diferenciales parciales de Laplace o de Schrödinger, integrales, matrices, distribuciones de t-student, redondeos aleatorios, etc.)

Por ello, sus aplicaciones actuales se extienden a campos científicos y técnicos tan variados como son los de la física estadística, biología molecular, genética, redes de información, telecomunicaciones o finanzas. Algunas de las diversas variantes del método de Montecarlo se han aplicado a numerosos y diferentes problemas relacionados con temas como:

- Magnitud de las emisiones de rayos cósmicos.
- Tamaños críticos de los reactores nucleares.
- Difusión y movimiento browniano.
- Paso de líquidos a través de sólidos.
- Propiedades de retículos poliméricos.
- Características de los recipientes necesarios para el transporte de neutrones.
- Aplicaciones de la teoría de colas a problemas comerciales como almacenamiento, sustitución y mantenimiento de equipos, gestión de seguros, etc.

Este tema (el método de Monte Carlo y demás aplicaciones de las cadenas de Markov regulares) pese a su importancia no será estudiado con mayor detalle en este trabajo, dado que está más allá de los objetivos propuestos previamente a la realización de este escrito. El lector interesado en estos temas puede estudiar el libro de Häggstrom (2002) que es una excelente referencia.

1.4. Cadenas de Markov Absorbentes

En esta sección introduciremos una clase especial de cadenas de Markov llamadas cadenas de Markov absorbentes.

Definición 1.7. *Dada (P, S) una cadena de Markov y dado $v_i \in S$, diremos que $v_i \in S$ es absorbente si y solo si $P_{ii} = 1$, es decir, cuando el sistema cae en el estado v_i , no vuelve a salir de él.*

Definición 1.8. Una cadena de Markov (P, S) es absorbente si y solo si

i) S tiene al menos un estado absorbente.

ii) Para todo $v \in S$, existe un estado absorbente a_j tal que $v \longrightarrow a_j$.

Ejemplo 1.9. Cadena de Markov absorbente, “la cuenta de cobro”. Una empresa considera que una cuenta es incobrable si han pasado más de tres meses desde la fecha de su vencimiento. Entonces al principio de cada mes se puede clasificar cada cuenta en cada uno de los siguientes estados:

- v_1 : cuenta nueva.
- v_2 : los pagos de la cuenta están retrasados un mes.
- v_3 : los pagos de la cuenta están retrasados dos meses.
- v_4 : los pagos de la cuenta están retrasados tres meses.
- v_5 : se ha saldado la cuenta.
- v_6 : se canceló la cuenta por mal pagador.

Supongamos que los últimos datos describen cómo cambia el estado de una cuenta de un mes al siguiente. Además debemos tener en cuenta que si al principio del siguiente mes, una cuenta no se paga, entonces se convertirá en una cuenta con dos meses de retraso y así sucesivamente. Supondremos que las cuentas nuevas tienen una probabilidad 0,5 de ser pagadas al principio del mes siguiente y que las cuentas retrasadas un mes tienen una probabilidad 0,5 de ser pagadas el mes siguiente (y así sucesivamente). Se podría definir una cadena de Markov (P, S) que modele la situación anterior con $S = \{v_1, \dots, v_6\}$ y

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $P_{11} = 0$ es la probabilidad de que una “cuenta nueva” siga siendo una cuenta nueva; $P_{12} = 0,5$ es la probabilidad de que una “cuenta nueva” se retrase un mes;...; $P_{15} = 0,5$ es la probabilidad de que una “cuenta nueva” se salde y así sucesivamente; donde se puede ver que los estados v_1, v_2, v_3, v_4 son transitorios y los estados v_5, v_6 son absorbentes.

El grafo de transición de la cadena es el grafo de la Figura 1.8.

A toda cadena de Markov absorbente podemos asociar unas cantidades descriptivas básicas que son:

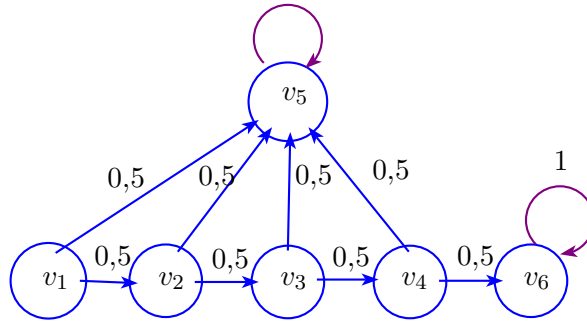


Figura 1.8: Grafo de transición de una cuenta de cobro.

- i) El número esperado de visitas a un estado j , iniciando en algún estado interior (transitorio) i ; es decir, dado $i, j \in S$ (siendo S el conjunto de estados de la cadena absorbente), la cantidad n_{ij} que es el número esperado de visitas a j , cuando el proceso inicia en el estado i .
- ii) El número esperado de pasos hasta la absorción si el proceso inicia en el estado i , a esta cantidad se le denotará con el símbolo m_i .
- iii) La probabilidad de ser absorbida en el estado j , si se inicia en el estado i , que se denotará a_{ij} .

En el estudio de las cadenas de Markov surgen algunas preguntas como:

- ¿Qué probabilidad tiene el proceso de terminar en un estado absorbente?
- ¿En promedio, cuánto tiempo tomará para que el proceso sea absorbido?
- ¿En promedio, cuánto tiempo estará en cada estado transitorio?

La respuesta a estas preguntas dependen del estado en donde se inicie el proceso, así como de las probabilidades de transición.

1.4.1. Forma Canónica

Para estudiar las cadenas de Markov absorbentes es útil reordenar la matriz de transición, este nuevo arreglo matricial se conoce como **matriz de transición de forma canónica**. En la forma canónica los estados transitorios aparecen en primer lugar y los estados absorbentes en segundo lugar. En otras palabras, si la cadena tiene j estados absorbentes e i estados transitorios, la matriz reordenada tendrá la forma:

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

donde

- Q : es la matriz de $j \times j$ que contiene las probabilidades de transición entre los estados transitorios.
- R : es la matriz de $j \times i$ que contiene las probabilidades de transición de los estados transitorios a los estados absorbentes.
- 0 : es la matriz cero o nula de orden $j \times i$.
- I : es la matriz identidad de orden $j \times j$.

Note que

$$P^2 = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^2 & R + QR \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} Q^2 & R + QR \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^3 & R + QR + Q^2R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

y dado $n \geq 1$

$$P^n = \begin{pmatrix} Q^n & (I + Q + Q^2 + \dots + Q^{n-1})R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

La forma de P^n indica que las entradas de Q^n corresponden a las probabilidades de estar en cada uno de los estados transitorios después de n pasos iniciando en cada posible estado transitorio.

Ejemplo 1.10. Forma canónica de la “cuenta de cobro”.

Retomando el ejemplo de la “cuenta de cobro”, la matriz de transición P coincide con

la matriz de forma canónica $P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$

donde las submatrices están dadas por:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}; \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Cada componente q_{ij} de Q representa las probabilidades de transición de estados transitorios a estados transitorios, así por ejemplo: $q_{11} = 0$ es la probabilidad de transición del primer estado transitorio v_1 al primer estado transitorio v_1 (la probabilidad de que una cuenta nueva siga siendo nueva); $q_{12} = 0,5$ es la probabilidad de transición del primer estado transitorio v_1 al segundo estado transitorio v_2 (la probabilidad de que una cuenta nueva se retrase un mes); $q_{13} = 0$ es la probabilidad de transición del primer estado transitorio v_1 al tercer estado transitorio v_3 (la probabilidad de que una cuenta nueva se retrase dos meses) y así sucesivamente.

- Cada componente r_{ij} de R representa las probabilidades de transición de estados transitorios a estados absorbentes, así por ejemplo: $r_{11} = 0,5$ es la probabilidad de transición del primer estado transitorio v_1 al primer estado absorbente v_5 (la probabilidad de que una cuenta nueva se salde); $r_{12} = 0$ es la probabilidad de transición del primer estado transitorio v_1 al segundo estado absorbente v_6 (la probabilidad de que una cuenta nueva sea dada de baja por no ser cancelada); $r_{21} = 0,5$ es la probabilidad de transición del segundo estado transitorio v_2 al primer estado absorbente v_5 (la probabilidad de que una cuenta retrasada un mes se salde) y así sucesivamente.
- Cada componente o_{ij} de O representa las probabilidades de transición de estados absorbentes a estados transitorios, así por ejemplo: $o_{11} = 0$ es la probabilidad de transición del primer estado absorbente v_5 al primer estado transitorio v_1 (la probabilidad de que una cuenta saldada vuelva a ser nueva, lo cual es imposible); $o_{12} = 0$ es la probabilidad de transición del primer estado absorbente v_5 al segundo estado transitorio v_2 (la probabilidad de que una cuenta saldada se retrase un mes, lo cual es imposible).
- Cada componente i_{ij} de I representa las probabilidades de transición de estados absorbentes a estados absorbentes; así por ejemplo: $i_{11} = 1$ es la probabilidad de transición del primer estado absorbente v_5 al primer estado absorbente v_5 (la probabilidad de que una cuenta saldada siga siendo una cuenta saldada, esta probabilidad es igual a uno dado que una cuenta saldada nunca dejará de ser una cuenta saldada); $i_{12} = 0$ es la probabilidad de transición del primer estado absorbente v_5 al segundo estado absorbente v_6 (la probabilidad de que una cuenta saldada sea dada de baja por falta de pago, lo cual es imposible).

Ahora probaremos que la probabilidad de estar en un estado transitorio después de n pasos se aproxima a cero cuando n tiende a infinito. Así, toda entrada de Q^n se aproxima a cero cuando $n \rightarrow \infty$, (es decir $Q^n \rightarrow 0$).

1.4.2. Probabilidad de absorción

Teorema 1.4. *En una cadena de Markov absorbente, la probabilidad de que el proceso sea absorbido es 1, (es decir, $Q^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$).*

Demostración. Desde cada estado no absorbente s_j es posible alcanzar un estado absorbente. Sea m_j el mínimo número de pasos requerido para alcanzar un estado absorbente iniciando en s_j . Sea p_j la probabilidad de que al iniciar en s_j , el proceso no alcance un estado absorbente en m_j pasos. Luego $p_j < 1$. Sea m el mayor de los m_j y sea p el mayor de los p_j . La probabilidad de no ser absorbida en tan solo m pasos es menor o igual a p , en $2m$ pasos menor o igual que p^2 . En general, la probabilidad de no ser absorbido en km pasos es menor o igual que p^k . Ahora dado que $p < 1$ estas probabilidades tienden a cero. Puesto que la probabilidad de no ser absorbida en n pasos es monótona decreciente, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr[\text{el proceso no sea absorbido tras } n\text{-pasos}] = \lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = 0 \blacksquare$$

1.4.3. Matriz Fundamental

Definición 1.9. Dada (P,S) una cadena de Markov absorbente, la matriz $N = (I - Q)^{-1}$ es llamada la matriz fundamental de (P,S) .

Las entradas n_{ij} de N , corresponden al número esperado de veces que el proceso estará en el estado s_j , si este inicia en el estado transitorio s_i .

Teorema 1.5. Dada (P,S) una cadena de Markov absorbente se tiene lo siguiente:

- 1) $(I - Q)$ es invertible y su inversa es igual al $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n Q^i$.
- 2) Dado i, j menores o iguales que el orden de Q y dado n_{ij} la ij -ésima entrada de $(I - Q)^{-1}$ se tiene que n_{ij} es igual al número esperado de visitas al estado s_j antes de la absorción, cuando la cadena empieza en el estado s_i .

Demostración. Suponga $(I - Q)x = 0$, se tiene que $x = Qx$ y esto a su vez implica que para todo $n \geq 1$ se tiene que $Q^n x = x$. Recuerde que $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n = 0$, por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n x = x = 0$; tenemos entonces que el núcleo de $(I - Q)$ es igual a $\{\vec{0}\}$, por lo que $I - Q$ es invertible. Note que

$$(I - Q)(I + Q + Q^2 + \dots + Q^n) = I - Q^{n+1}$$

esto implica que

$$(I + Q + Q^2 + \dots + Q^n) = (I - Q)^{-1}(I - Q^{n+1})$$

pasando al límite obtenemos la ecuación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n Q^i = (I - Q)^{-1}(I - \lim_{n \rightarrow \infty} Q^{n+1}) = (I - Q)^{-1}$$

En lo que sigue usaremos el símbolo N para denotar la matriz $(I - Q)^{-1}$. Fijemos s_i y s_j dos estados transitorios y fijemos $k \geq 1$. Sea $Path_k^{(i)}$ al conjunto de todos los caminos de longitud k cuyo nodo (vértice) inicial es el estado s_i , y sea $X^{(k)} : Path_k^{(i)} \rightarrow \{0, 1\}$

la variable aleatoria definida por

$$X^{(k)}(r) = \begin{cases} 1, & \text{si el camino } r \text{ termina en } s_j \\ 0, & \text{si el camino } r \text{ no termina en } s_j \end{cases}$$

donde r es un elemento de $Path_k^{(i)}$. Note que

$$P(X^{(k)} = 1) = q_{ij}^{(k)}$$

y

$$P(X^{(k)} = 0) = 1 - q_{ij}^{(k)}$$

donde $q_{ij}^{(k)}$ es la ij -ésima entrada Q^k . Tenemos entonces que $E[X^{(k)}]$, el valor esperado de la variable $X^{(k)}$, es igual a $q_{ij}^{(k)}$. Esto implica que el número esperado de instantes para las cuales la cadena, (que inicio en s_i), esta en el estado s_j durante los primeros n pasos es igual a

$$E[X^{(0)} + \dots + X^{(n)}] = \sum_{k=0}^n E[X^{(k)}] = \sum_{k=0}^n q_{ij}^{(k)}$$

si tomamos el limite cuando n tiende a infinito obtenemos

$$E\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n X^{(k)}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q_{ij}^{(k)} = n_{ij} \blacksquare$$

Ejemplo 1.11. *Número esperado de visitas a los estados transitorios de “la cuenta de cobro”.*

Retomando el ejemplo de la cuenta de cobro, para la matriz Q , obtenemos

$$(I - Q) = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego, calculando N , obtenemos

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,25 & 0,125 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $n_{11} = 1$ indica que si iniciamos en v_1 el número esperado de veces que el proceso está en el estado v_1 , antes de la absorción, es igual a 1 (es decir, toda cuenta nueva es una cuenta nueva una única vez); n_{12} indica que si iniciamos en v_1 el número esperado de veces que el proceso está en el estado v_2 es igual 0,5 (es decir, en promedio de cada 100 cuentas nuevas 50 se retrasan un mes); $n_{13} = 0,25$ indica que si iniciamos en v_1 el número esperado de veces que el proceso está en el estado v_3 es igual a 0,25 (es decir, en promedio de cada 100 cuentas nuevas 25 se retrasan dos meses); $n_{14} = 0,125$ indica que si iniciamos en v_1 el número esperado de veces que el proceso está en el estado v_4 es igual a 0,125 (es decir, en promedio de cada 1000 cuentas nuevas 125 se retrasan tres meses) y así sucesivamente.

1.4.4. Tiempo de Absorción

Considere una cadena de Markov absorbente que inicia en el estado s_i , ¿Cuál es el número esperado de pasos antes de llegar a la absorción? La respuesta a esta pregunta es dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.6. Sea m_i el número esperado de pasos antes de que la cadena sea absorbida, siendo que la cadena inicia en el estado s_i . Sea m el vector columna cuya i -ésima entrada es m_i . Se tiene que

$$m = Nc$$

donde c es el vector columna cuyas entradas son iguales a 1.

Demostración. Si sumamos todas las entradas en la i -ésima fila de N , tendremos el número esperado de pasos antes de la absorción, suponiendo que la cadena inicia en s_i . Sea n_i la suma de las entradas en la i -ésima fila de N . Si escribimos la afirmación en forma matricial obtenemos el teorema. ■

Ejemplo 1.12. Número esperado de pasos antes de la absorción “la cuenta de cobro”.

Considerando nuevamente el ejemplo de la cuenta de cobro, el número esperado de pasos antes de la absorción se refiere al tiempo promedio que una cuenta de cobro, considerada a partir de algunos de los estados transitorios (cuenta nueva, retrasada un mes, retrasada dos meses, retrasada tres meses), tarda en ser saldada o dada de baja por falta de pago. Luego,

$$m = Nc = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,25 & 0,125 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} \\ \frac{14}{8} \\ \frac{12}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, iniciando en el estado v_1 el número esperado de pasos hasta la absorción es de $\frac{15}{8}$ (es decir, una nueva cuenta de cobro tarda en promedio aproximadamente 56 días en ser saldada o dada de baja) ; si iniciamos en v_2 el número esperado de pasos hasta

la absorción es de $\frac{14}{8}$ (es decir, una cuenta de cobro con un mes de retraso tarda en promedio 52 días en ser saldada o dada de baja); si iniciamos en v_3 el número esperado de pasos hasta la absorción es de $\frac{12}{8}$ (es decir, una cuenta de cobro con dos meses de retraso tarda en promedio 45 días en ser saldada o dada de baja).

Observe que estos valores coinciden con la suma de las entradas en la i -ésima fila de n . Luego, si sumamos la primer fila de la matriz N , obtenemos $n_{1j} = 1,88$, lo cual indica que si iniciamos en v_1 el tiempo esperado antes de la absorción es de 1,88 (es decir, en promedio una cuenta nueva se tarda 1,88 meses (56 días), en ser saldada o dada de baja).

A continuación se enuncia y se demuestra un importante teorema utilizado en el estudio de las cadenas de Markov absorbentes, conocido como el **Teorema Fundamental de las Cadenas de Markov Absorbentes**.

Teorema 1.7. Sea a_{ij} la probabilidad de que una cadena absorbente sea absorbida en el estado absorbente s_j , si se inicia en el estado transitorio s_i . Sea A la matriz con entradas a_{ij} . Se tiene entonces que

$$A = NR$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición en forma canónica y N es la matriz fundamental.

Demostración. Sea T el número de los estados transitorios, se tiene que

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m \sum_{k=1}^T q_{ik}^{(n)} r_{kj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^T \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m q_{ik}^{(n)} r_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^T r_{kj} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m q_{ik}^{(n)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^T r_{kj} (n_{ik}) \\ &= (NR)_{ij} \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 1.13. Probabilidad de absorción de “la cuenta de cobro”.

Retomando nuevamente el ejemplo de la cuenta de cobro, se tiene que

$$A = NR = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,25 & 0,125 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0,25 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{14}{16} & \frac{2}{16} \\ \frac{12}{16} & \frac{4}{16} \\ \frac{8}{16} & \frac{8}{16} \end{pmatrix}$$

donde $a_{11} = \frac{15}{16}$ indica que si iniciamos en el estado v_1 , hay una probabilidad de 0,94 de que el proceso sea absorbido en el primer estado absorbente v_5 (es decir, una nueva cuenta de cobro, tiene una probabilidad de 0,94 de ser saldada); $a_{12} = \frac{1}{16}$ indica que si iniciamos en el estado v_2 hay una probabilidad de 0,06 de que el proceso sea absorbido en el segundo estado absorbente v_6 (es decir, una nueva cuenta cobro, tiene una probabilidad de 0,06 de ser dada de baja por falta de pago); $a_{21} = \frac{14}{16}$ indica que si iniciamos en el estado v_2 hay una probabilidad de 0,88 de que el proceso sea absorbido en el primer estado absorbente v_5 (es decir, una cuenta de cobro retrasada un mes, tiene una probabilidad de 0,88 de ser saldada) y así sucesivamente.

Capítulo 2

El ábaco probabilístico

Consideremos nuevamente el ejemplo de la cuenta de cobro, cuyo grafo de transición es:

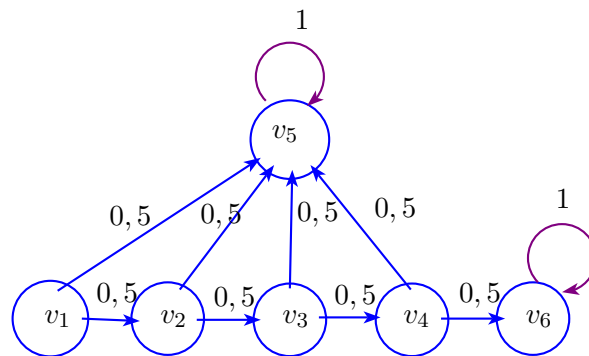


Figura 2.1: Grafo de transición de una cuenta de cobro.

¿Existe algún método diferente al estudiado en el capítulo anterior para responder a las siguientes preguntas?

1. ¿Qué probabilidad tiene una cuenta de cobro de ser saldada o dada de baja por falta de pago?
2. ¿En promedio, cuánto tiempo tomará una cuenta de cobro en ser saldada o en ser dada de baja?
3. ¿En promedio, cuánto tiempo estará retrasada una cuenta de cobro un mes, dos meses y tres meses?

Una interesante posibilidad es simular el proceso, ¿cómo lo harías?

Pensemos en muchas fichas que se ubican en v_1 , cada ficha representa una nueva cuenta de cobro y consideremos una moneda justa con cara “escudo” y sello “número”. Si al lanzar la moneda aparece “escudo”, la primera ficha se moverá a v_2 (cuenta retrasada un mes) de lo contrario moveremos la ficha a v_5 (cuenta saldada), lo cual indica que la caminata de la ficha ha terminado y volvemos a hacer el mismo procedimiento con una nueva ficha. Si la ficha se mueve a v_2 (cuenta retrasada un mes) podemos pensar nuevamente en lanzar la moneda, si en la moneda aparece “número” la ficha se moverá a v_3 (cuenta retrasada dos meses), pero si aparece “escudo” la ficha se moverá a v_5 (cuenta saldada). Si la ficha se mueve a v_3 (cuenta retrasada un mes) nuevamente podemos lanzar la moneda. Si sacamos “número” la ficha se moverá a v_4 (cuenta retrasada tres meses). Finalmente, si la ficha se mueve a v_4 (cuenta retrasada tres meses), repetimos nuevamente el procedimiento; así, si sacamos “número” la ficha se moverá a v_6 (cuenta dada de baja) de lo contrario moveremos la ficha a v_5 , en cualquiera de los dos casos la caminata al azar de nuestra ficha ha terminado.

Este procedimiento se repite para muchas fichas. Intenta hacerlo y cuenta el número de fichas que llegan a v_5 y a v_6 , luego halla el cociente de cada uno de estos valores sobre el total de fichas, así podrás responder a nuestra primer pregunta, también puedes hallar el cociente del número de fichas que llegan a cada estado transitorio sobre el total de fichas para responder a la segunda pregunta, sumando los últimos valores podemos responder a nuestra última pregunta. Por último compara tus valores con los obtenidos en el capítulo 1 para cada una de las preguntas hechas al inicio de este capítulo. ¿Cuánto tardaste en hacerlo?

Muy probablemente los valores obtenidos son buenas aproximaciones a las cantidades descriptivas asociadas a la cadena de Markov, pero muy probablemente no son más que aproximaciones, es decir, difieren de los valores exactos.

En lo que sigue discutiremos un método llamado: *el ábaco probabilístico* descubierto por Arthur Engel (1974) que permite hallar las cantidades básicas que describen una cadena de Markov absorbente en un tiempo corto de simulación.

2.1. El ábaco probabilístico: un método de simulación para calcular las probabilidades de absorción de manera exacta.

Sea (P, S) una cadena de Markov y sea $G = (V, E)$ el grafo de transición de la cadena de Markov. Recuerde que asociado a G tenemos una función $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ la cual determina, dada una arista e , cuál es la probabilidad de tomar la arista e si el “caminante aleatorio” esta ubicado en el extremo inicial de e .

Dado $v \in V$ usaremos el símbolo $I(v)$ para denotar al conjunto de aristas cuyo extremo

inicial es v . Supongamos que $\{e_1, \dots, e_m\}$ es igual a $I(v)$. Sean $p(e_1), \dots, p(e_m)$ los valores (pesos o probabilidades de transición) asociados a los elementos de $I(v)$. Como p solo toma valores racionales existe $q_v \in \mathbb{N}$ tal que:

1. Para todo $i \leq m$ existe $P_i \in \mathbb{N}$ tal que $p(e_i) = \frac{P_i}{q_v}$.
2. q_v es el menor entero positivo que satisface la propiedad 1.

Dado $G = (V, E, w)$ el grafo de transición de una cadena de Markov, podemos asociar a cada $v \in V$ un entero positivo q_v como en el párrafo anterior. Sea \hat{G} el *grafo-ábaco* construido a partir de G de la siguiente manera:

1. El conjunto de vértices de \hat{G} es V .
2. Dado $v \in V$ y dado q_v si $e \in I(v)$ y $p(e) = \frac{p}{q_v}$ entonces reemplazamos a e por p aristas con extremo inicial v y extremo final el extremo final de e .

El grafo \hat{G} será llamado el grafo-ábaco de la cadena de Markov porque, como veremos a continuación, será usado como un ábaco para calcular las probabilidades de absorción y las demás cantidades descriptivas básicas asociadas a la cadena de Markov.

Note que en el caso de la cuenta de cobro el grafo-ábaco es igual a:

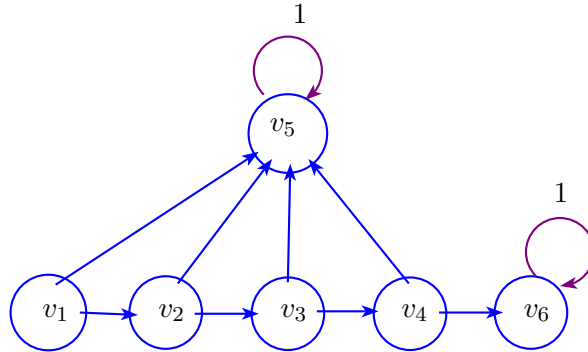


Figura 2.2: Grafo de transición de una cuenta de cobro.

Esto es, el grafo de transición, llamémoslo G , de la cuenta de cobro y el grafo-ábaco son idénticos dado que todos los estados transitorios tienen grado de salida 2 (es decir, exactamente dos aristas salen de cada uno de estos vértices) y las dos aristas que salen de un mismo vértice tienen probabilidad $\frac{1}{2}$. El lector debe notar que en la construcción del grafo-ábaco \hat{G} se utilizan múltiples aristas con el mismo extremo inicial y el mismo extremo final, con el fin de codificar las probabilidades de transición.

Definición 2.1. Dado $\hat{G} = (V, E)$ el grafo-ábaco de una cadena de Markov y dado $v \in V$ usaremos el símbolo $\text{deg}_+(v)$ para denotar el entero positivo $|\{e \in E : e \in I(v)\}|$.

Dado $\hat{G} = (V, E)$ podemos particionar a V en dos subconjuntos disjuntos: Sea $I = \{v \in V : deg_+(v) \neq 0\}$ el conjunto de vértices (estados) transitorios y sea $A = \{v \in V : deg_+(v) = 0\}$ el conjunto de vértices absorbentes.

En adelante pensaremos en un grafo-ábaco como en un ábaco en el cual pueden ser dispuestas fichas sobre cada uno de los vértices, las cuales pueden moverse sobre cada una de las aristas (cables) del ábaco desde el extremo inicial hasta el extremo final.

Definición 2.2. Dado $\hat{G} = (V, E)$ un grafo-ábaco, una configuración sobre \hat{G} es una función $f : V \rightarrow \mathbb{N}$.

Intuitivamente, si f es una configuración sobre \hat{G} y $v \in V$ la cantidad $f(v)$ es igual al número de fichas dispuestas sobre v .

Definición 2.3. La carga crítica del grafo-ábaco \hat{G} es la configuración $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$c(v) = deg_+(v) - 1$$

Si representamos las fichas de la carga crítica como puntos, la carga crítica del grafo-ábaco asociado a la cuenta de cobro puede representarse mediante la siguiente gráfica.

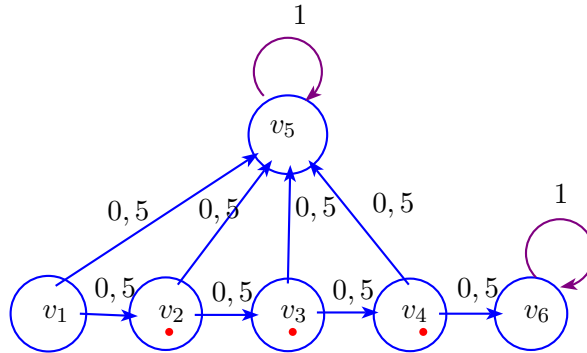


Figura 2.3: Grafo de transición de una cuenta de cobro.

2.1.1. Movimientos del ábaco probabilístico

Sea $\hat{G} = (V, E)$ un grafo-ábaco y sea f una configuración sobre \hat{G} . Dado $v \in V$ si $f(v) \geq deg_+(v)$ diremos que v es f -inestable, y en este caso podemos *disparar* el vértice v , lo cual consiste en mover una ficha desde v a lo largo de cada una de las aristas (cables) que tienen a v por extremo inicial. Esto es, si v posee suficientes fichas para

regalarle una a cada uno de sus vecinos (vértices conectados a v mediante una arista cuyo extremo inicial es v), entonces v lo hace, es decir v le regala una ficha a cada uno de sus vecinos usando cada una de las aristas que salen de v .

Los disparos son los movimientos básicos del ábaco probabilístico. Note que al disparar un vértice inestable estamos repartiendo fichas de manera uniforme a lo largo de las aristas que inician en el vértice, esto es: la regla de los disparos respeta las probabilidades de transición de la cadena de Markov dado que un vértice w vecino de v (v es el vértice en el que se realiza el disparo) recibirá p_w fichas de v si y solo si

$$p((v, w)) = \frac{p_w}{q_v}.^1$$

2.1.2. El algoritmo de Engel

El algoritmo de Engel es un método, que basado en la construcción del ábaco probabilístico, permite calcular las probabilidades de absorción y demás cantidades descriptivas de una cadena de Markov absorbente. Una descripción superficial del método es la siguiente:

Sea (P,S) una cadena de Markov absorbente y sea $\hat{G} = (S, E)$ el grafo-ábaco asociado, para calcular las cantidades descriptivas básicas podemos hacer lo siguiente:

1. Fijamos $i \in I$. (I : *Conjuntodeestadosinteriores*)
2. Cargamos \hat{G} críticamente (note que si c es la carga crítica de \hat{G} todo vértice de $v \in I$ es c -estable por lo que no podemos disparar ningún vértice).
3. Introduzca una ficha en i y dispare el vértice i (que se convirtió en un vértice inestable). A continuación dispare todo vértice que se vuelva inestable. Hágalo hasta que todos los vértice interiores vuelvan a ser vértices estables, (esto sucederá cuando el flujo de fichas halla arrastrado el exceso de fichas hasta los vértices absorbentes que nunca disparan).
4. Repita el paso 3 hasta obtener una configuración h que satisfaga lo siguiente:

$$\forall v \in I (h(v) \leq \text{deg}_+(v) - 1).$$

5. Repita los pasos 3 y 4 hasta obtener nuevamente la carga crítica, esto es, repita los pasos 3 y 4 hasta obtener una configuración g tal que si $v \in I$ entonces $g(v) = \text{deg}_+(v) - 1$.
6. Al obtener un configuración como en el numeral 5 el proceso se detiene y es el momento de hacer cuentas, esto lo discutiremos con mayor detalle en la siguiente subsección.

¹La regla de disparo es una regla que acoge el punto de vista frecuencial de la probabilidad. Por ser la regla de disparo la regla básica del ábaco probabilístico podemos afirmar que este es un método frecuentista (como el método de Monte Carlo), que sorprendentemente permite calcular las probabilidades de absorción de manera exacta.

En el anexo presentamos la dinámica del ábaco probabilístico asociado a la cuenta de cobro.

2.1.3. Cantidades que pueden calcularse usando el ábaco probabilístico

En el capítulo anterior estudiamos las cadenas de Markov absorbentes y se explicó cómo calcular las probabilidades de absorción y el tiempo esperado para llegar a un estado transitorio o a un estado absorbente. El ábaco probabilístico permite, a medida que vamos introduciendo fichas y las vamos moviendo en el grafo, contar las visitas a los estados transitorios y absorbentes, así como el número de pasos que da una ficha para llegar a cualquiera de los estados. Luego, con dichas cantidades podemos hallar los siguientes cocientes:

Sean i y j estados de la cadena

$$\hat{n}_{ij} = \frac{\text{número de fichas que visitaron el estado transitorio } v_j}{\text{número de fichas que se introdujeron en el estado inicial } v_i}$$

El lector debe comprobar que en el ejemplo en el anexo, hemos suministrado un total de 16 fichas en el inicio v_1 de los cuales 15 fichas fueron al estado v_5 y 1 ficha fue al estado v_6 .

Podemos encontrar el número de fichas que visitan cada estado reconstruyendo el proceso. En el grafo de la cuenta de cobro, un total de 16 fichas visitan el estado transitorio v_1 , 8 fichas visitan el estado transitorio v_2 , un total de 4 fichas visitan el estado transitorio v_3 y un total de 2 fichas visitan el estado transitorio v_4 . Luego, obtenemos los siguientes cocientes

$$\hat{n}_{11} = \frac{16}{16}; \quad \hat{n}_{12} = \frac{8}{16}; \quad \hat{n}_{13} = \frac{4}{16}; \quad \hat{n}_{14} = \frac{2}{16}$$

Durante el juego, contamos todos los pasos o el número de visitas de cada una de las fichas a cada uno de los estados transitorios. Dado i un estado interior, podemos escoger a i como estado inicial. En este caso podemos calcular el siguiente cociente

$$\hat{m}_i = \frac{\text{suma de visitas a los estado interiores}}{\text{número de fichas que entraron al estado inicial } v_i}$$

En el ejemplo de la cuenta de cobro podemos estimar el número esperado de pasos antes de la absorción (iniciando en v_1) como

$$\hat{m}_1 = \frac{30}{16} = 1,875$$

Ahora, dado j un estado absorbente e i un estado transitorio definimos

$$\hat{a}_{ij} = \frac{\text{número de fichas absorbidas en } v_j, \text{ cuando } v_i \text{ es el estado inicial}}{\text{número total de fichas introducidas en } v_i}$$

En el ejemplo de la cuenta de cobro podemos estimar el número esperado de pasos antes de la absorción (iniciando en v_1) como

$$\hat{a}_{15} = \frac{15}{16}; \quad \hat{a}_{16} = \frac{1}{16}$$

Observe que para cada estado interior tenemos la ecuación de equilibrio (ley de conservación)

$$\begin{aligned} & \text{número de fichas entrando al estado transitorio } v_i \\ &= \text{número de fichas saliendo del estado transitorio } v_i \end{aligned}$$

Esta ecuación es válida si introducimos fichas hasta que la carga crítica se repita en todos los estados transitorios (interiores).

El lector puede realizar por sí mismo las simulaciones cuando se escogen como estados iniciales los estados v_2 , v_3 y v_4 . Luego puede comparar los resultados obtenidos con los que se obtuvieron en el capítulo 1, es decir, el lector debe verificar que para todo $i, j \in I$ y $v \in S - I$, $\hat{m}_i = m_i$, $\hat{a}_{iv} = a_{iv}$ y $\hat{n}_{ij} = n_{ij}$.

Hemos descrito un método para encontrar los \hat{n}_{ij} . Ahora debemos probar que este método es correcto, es decir, que si iniciamos el juego con la carga crítica y escogemos a v_i como estado inicial obtenemos las filas i -ésimas de las matrices Q y R de forma canónica de la cadena de Markov absorbente. La prueba de este hecho la aplazaremos hasta la siguiente sección.

2.2. Movimientos del ábaco probabilístico: Una formalización

Sea (S, P) una cadena de Markov absorbente y sea I el conjunto de vértices (estados) interiores de (S, P) . Supondremos que para todo $i, j \in S$ el número P_{ij} es un número racional.

Recuerde que dada (S, P) una cadena absorbente, el ábaco probabilístico de (S, P) es el grafo dirigido \hat{G} definido por:

1. El conjunto de vértices es S .
2. Dado $v \in I$ y $w \in S$, existen n_{vw} flechas en \hat{G} cuyo extremo inicial es v y cuyo extremo final es w , donde $P_{vw} = \frac{n_{vw}}{q_v}$.

Dada \hat{G} , una configuración sobre \hat{G} es una función de $f : S \rightarrow \mathbb{N}$.

Dada $f : S \rightarrow \mathbb{N}$ una configuración y dado $v \in I$, si $f(v) \geq q_v$ podremos disparar el vértice v para obtener una configuración $d_v(f)$ definida por

$$d_v(f)(w) \begin{cases} f(v) - q_v + n_{vw} & \text{si } v = w \\ f(w) + n_{vw} & \text{si } v \neq w \end{cases}$$

Note que $d_v(f)$ es obtenida a partir de f moviendo q_v fichas desde v , llevando n_{vw} fichas a cada vértice w (es decir, moviendo una ficha a lo largo de cada una de las flechas con origen en v , o lo que es lo mismo moviendo una ficha a lo largo de cada uno de los cables del ábaco que tienen por origen el estado v .)

Dado $u \in I$ usaremos el símbolo $T_v(f)$ para denotar la configuración obtenida al :

1. Agregar una ficha en v .
2. Relajar (o estabilizar) la función $f + e_v$, donde e_v es la configuración.

$$e_v(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = w \\ 0 & v \neq w \end{cases}$$

relajar $f + e_v$ significa disparar todos los vértices inestables (tanto aquellos que son inestables al comienzo del proceso como aquellas que se vuelven inestables a lo largo del proceso) hasta obtener una configuración $Rel(f + e_v)$ tal que si $w \in I$ se tiene que

$$Rel(f + e_v)(w) < q_w$$

Es decir una configuración estable $Rel(f + e_v)$. Es importante señalar que dada $f : S \rightarrow N$, existe una única función $Rel(f) : S \rightarrow N$ tal que

1. $Rel(f)(w) < q_w$ para todo $w \in I$, ($Rel(f)$ es estable).
2. $Rel(f)$ es obtenida a partir de f mediante el proceso de relajación (es decir, disparando vértices inestables).

El algoritmo de Engel es el algoritmo definido por:

- **Input:** (P,S), una cadena de Markov absorbente con probabilidades de transición racionales.

Procedimiento

1. Construya \hat{G} , el ábaco de (P, S)
2. Para todo $v \in I$ haga lo siguiente:
 - a) Inicialice con f , la configuración definida por

$$f(w) = \begin{cases} q_w - 1 & \text{si } w \in I \\ 0 & w \notin I \end{cases}$$

- b) Mientras exista $w \in I$ tal que $f(w) < q_w - 1$, haga

$$f = \text{Rel}(f + e_w)$$

- c) Calcule

$$\hat{a}_{vw} = \frac{f(w)}{\sum_{w \in S} f(w) - \sum_{w \in I} (q_w - 1)}, \text{ para todo } w \in S - I$$

$$\hat{n}_{vw} = \frac{\text{número de fichas que visitaron } w}{\sum_{w \in S} f(w) - \sum_{w \in I} (q_w - 1)}, \text{ para todo } w \in I$$

$$\hat{m}_v = \sum_{w \in I} \hat{n}_{vw}$$

Ahora, probaremos que el algoritmo es correcto.

Teorema 2.1. Teorema fundamental del ábaco probabilístico *Las cantidades calculadas vía el ábaco probabilístico coinciden con las cantidades descriptivas básicas asociadas a la cadena de Markov, i.e., para todo $i, j \in S$ se cumple*

$$m_i = \hat{m}_i; n_{ij} = \hat{n}_{ij}; a_{ij} = \hat{a}_{ij}$$

Demostración. Primero, elegimos un estado inicial v_i y cargamos el grafo críticamente. Durante el juego cierto número de fichas se introducen en el estado inicial v_i . Al final del juego las fichas han recorrido el grafo hasta alguno de los estados absorbentes y la configuración crítica de los estados transitorios se restaura, (si consideramos solo los estados interiores). Sea \hat{n}_{ij} el número total de fichas que van al estado v_j durante el juego. Puesto que v_j es un estado interior, \hat{n}_{ij} es también el número total de fichas que salen de v_j , dado que el flujo de fichas respetan las probabilidades de transición, es decir:

$$\hat{n}_{ij} = \sum_{k \in I} n_{ik} p_{kj}$$

Sea I el conjunto de todos los estados interiores, suponga que $I = \{v_1, \dots, v_j\}$. En el estado inicial v_i se introduce una ficha adicional desde el exterior del sistema. Por lo tanto

$$\hat{n}_{ij} = 1 + \sum_{k \in I} n_{ik} p_{kj}$$

Lo anterior se puede resumir en un sistema de ecuaciones

$$\hat{n}_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k \in I} n_{ik} p_{kj}, \quad i, j \in I, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

si nosotros hacemos esto para toda elección de v_i obtenemos la ecuación matricial

$$\hat{N} = I + NQ$$

donde

$$\hat{N} = [\hat{n}_{ij}]_{i,j \leq |I|}$$

Ahora, dado que $N = I + NQ$ se tiene que $N = \hat{N}$.

Tenemos entonces que el ábaco probabilístico permite calcular correctamente la matriz fundamental. Entonces, también permite calcular correctamente los tiempos esperados de absorción m_i puesto que estos son las sumas de las filas de la matriz N .

Sea v_i un estado interior y v_j un estado absorbente. Supongamos que una ficha entró en v_i , el resultado es una afluencia de fichas a_{ij} de v_i al estado absorbente v_j , se tiene que

$$\hat{a}_{ij} = \sum_{k \in I} n_{ik} p_{kj}; \quad i, k \in I, \quad j \in B$$

Sea A el conjunto de todos los estados absorbentes, suponga $A = \{v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_{j+n}\}$

haciendo esto para toda v_i , obtenemos la ecuación matricial

$$A = NR \blacksquare$$

Este último resultado muestra que la cantidad \hat{a}_{ij} calculada usando el ábaco probabilístico es la probabilidad de absorción en v_j

Hemos probado que el algoritmo definido anteriormente calcula las cantidades descriptivas básicas de la cadena de Markov (P,S). Ahora debemos probar que el algoritmo para, esto es que, dado $v \in I$ existe un $k_v \in \mathbb{N}$ tal que si $\{f_i^v\}_{i \geq 0}$ es la secuencia definida por:

- f_0^v es la carga crítica.
- $f_{i+1}^v = Rel(f_i^v + e_v)$.

entonces $f_{k_v}(w) = f_0^v(w)$ para todo $w \in I$. Esto es, debemos probar que la carga crítica se restaura.

Teorema 2.2. Dado $v \in I$ existe $k_v \in \mathbb{N}$ tal que $f_{k_v}^v(w) = f_0^v(w)$ para todo $w \in I$

Demostración. Lo primero que debemos notar es que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f_n^v = \text{Rel}(f_0^v + ne_v)$$

Lo segundo es que dado $v \in I$ existe $g : S \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para algún $N_v \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\text{Rel}(g + N_v e_v)(w) = g(w)$$

para todo $w \in I$.

Note que

$$\begin{aligned} \text{Rel}(f_0^v + N_v e_v) &= \text{Rel}(g + (f_0^v - g) + N_v e_v) \\ &= \text{Rel}(\text{Rel}(g + N_v e_v) + (f_0^v - g)) \end{aligned}$$

Sea w un vértice interior, se tiene que

$$\text{Rel}(g + N_v e_v)(w) = g(w)$$

por lo tanto, para todo $w \in I$ se tiene que

$$\text{Rel}(g + N_v e_v)(w) + (f_0^v - g)(w) = f_0^v(w) < q_w$$

por lo que

$$\text{Rel}(f_0^v + N_v e_v) = \text{Rel}(\text{Rel}(g + N_v e_v) + (f_0^v - g))$$

y se satisface que

$$\text{Rel}(f_0^v + N_v e_v)(w) = f_0^v(w)$$

para todo $w \in I$. Esto es, al introducir N_v fichas en el estado inicial v la carga crítica se restaura (recurre). ■

Para terminar quisiéramos mostrar el funcionamiento del ábaco con un ejemplo.

Ejemplo 2.1. Considere dos cajas etiquetadas con 0 y 1. Inicialmente la caja etiquetada con 1 está vacía y la caja etiquetada con 0 contiene cuatro balotas etiquetadas con los números 1,2,3 y 4. Cada uno de los números de 1 al 4 son elegidos al azar y la balota correspondiente a este número se moverá desde la caja en la cual se encuentra a la otra caja.

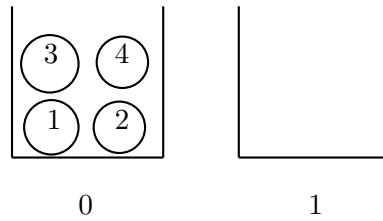


Figura 2.4: Cajas.

El proceso de simulación se detendrá tan pronto como todas las balotas se encuentren en una misma caja.

- ¿Qué crees que puede ser más posible: llenar la caja que inicialmente estaba vacía o volver a llenar la caja que inicialmente estaba llena ?
- ¿En promedio cuantas veces debes realizar el proceso para obtener una de las dos cajas vacías?

Este problema puede ser visto como una cadena de Markov cuyo grafo es:

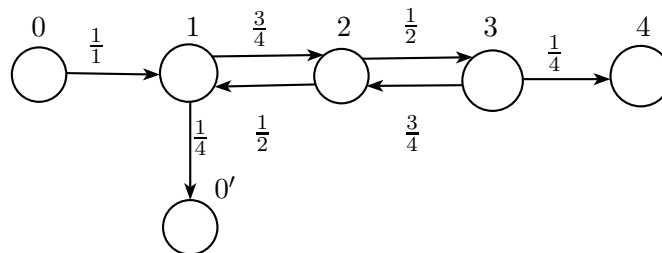


Figura 2.5: Grafo de transición de la cadena de Markov.

Los estados del proceso están dados por el número de balotas que hay en la caja 1. Así comenzamos nuestra simulación en el estado 0, lo cual significa que inicialmente la caja 1 está vacía.

En los grafos que se presentan a continuación las probabilidades de transición están representadas por flechas que salen de cada estado, así por ejemplo en la Figura 2.8 del estado 1 salen cuatro flechas de las cuales tres van al estado 2 y una al estado 0', es decir tres de cuatro flechas van al estado 2 lo cual representa una probabilidad de $\frac{3}{4}$.

Ahora cargaremos críticamente el grafo de la siguiente manera, poniendo 3, 1 y 3 fichas en los estados 1, 2 y 3 respectivamente.

A continuación se ilustrará la secuencia de movimientos al introducir una ficha en el estado inicial 0.

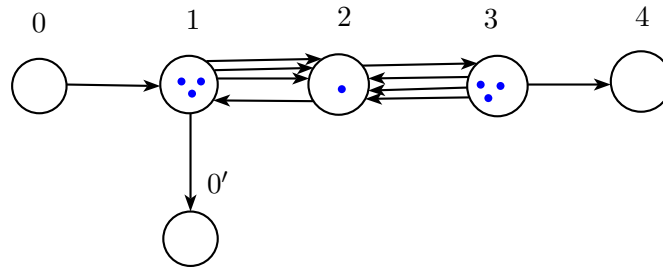


Figura 2.6: Grafo-ábaco cargado críticamente.

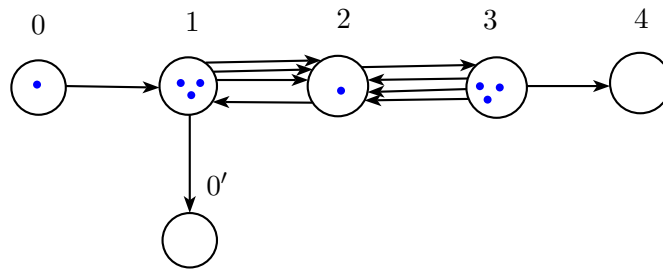


Figura 2.7: Primer movimiento (Introducir una ficha en el estado inicial “0”).

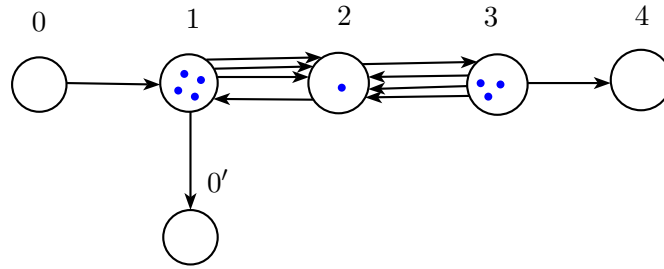


Figura 2.8: Segundo movimiento.

El proceso anterior se repite hasta obtener la carga crítica como se muestra a continuación. La carga crítica se restaura tras introducir en el estado 0 un total de 8 fichas, de estas fichas, 5 van al estado 0' y 3 al estado 4, en el desarrollo del proceso resulta fácil calcular las cantidades que describen una cadena de Markov absorbente, así para nuestro ejemplo estas cantidades son:

$$\hat{n}_{00} = 1, \hat{n}_{01} = \frac{5}{8}, \hat{n}_{02} = 3, \hat{n}_{03} = \frac{3}{2}, \hat{m}_0 = 8$$

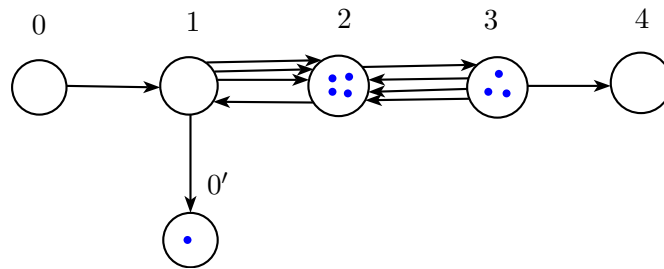


Figura 2.9: Tercer movimiento.

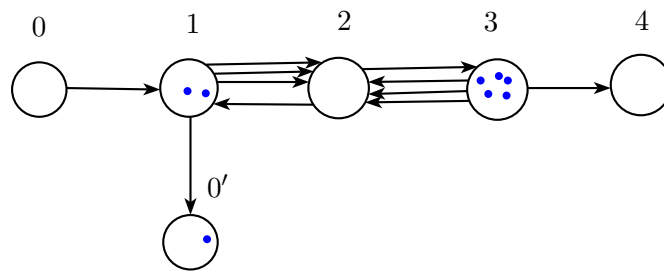


Figura 2.10: Cuarto movimiento.

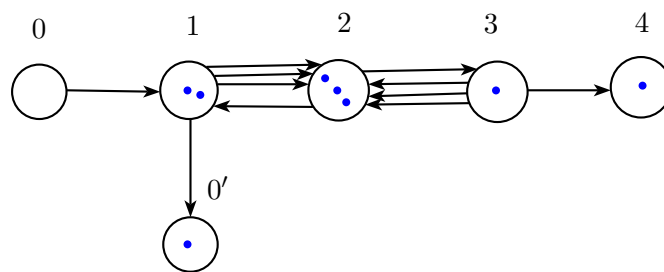


Figura 2.11: Quinto movimiento.

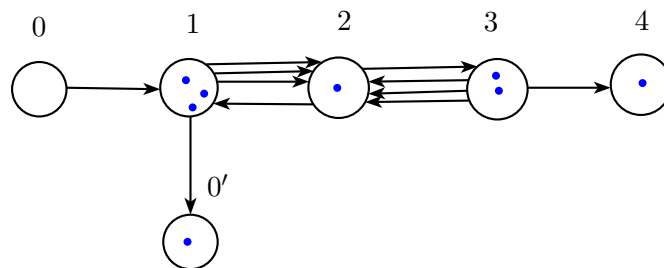


Figura 2.12: Sexto movimiento.

Ahora las probabilidades de absorción para los estados $0'$ y 4 son:

$$\hat{a}_{00'} = \frac{5}{8}, \quad \hat{a}_{04} = \frac{3}{8}$$

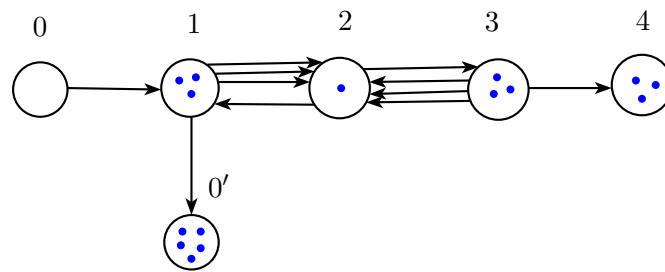


Figura 2.13: Movimiento final (Tras introducir ocho fichas).

Es fácil calcular las cantidades descriptivas básicas asociadas a una cadena de Markov absorbente. En el siguiente capítulo se presentará una reflexión sobre las ventajas y desventajas de algunos métodos para hallar las diferentes cantidades que describen una cadena de Markov absorbente y las potencialidades del ábaco probabilístico.

Capítulo 3

Alcances didácticos del ábaco probabilístico

En el capítulo 2 estudiamos un método de simulación que permite calcular, de manera exacta, las probabilidades de absorción y otras cantidades descriptivas asociadas a las cadenas de Markov absorbentes. El método de simulación antes mencionado es el algoritmo determinista de Arthur Engel, conocido como el ábaco probabilístico. El método consiste en simular de una cierta manera las posibles dinámicas de la cadena de Markov bajo estudio. El método es determinista dado que para simular la aleatoriedad asociada al mecanismo de transición del proceso, (en el que una de un conjunto de posibles transiciones es escogida al azar), se fija una regla determinista que resuelve el dilema de tener que elegir aleatoriamente y de acuerdo a una distribución prefijada.

Cuando tenga suficientes fichas escoja todas las transiciones posibles y simúlelas de manera simultánea

La anterior es precisamente la regla que nos permite circunnavegar el problema de escoger al azar y es una regla que sorprendentemente tiene la siguiente propiedad: El número de veces que una arista es escogida, (esto es: el número de fichas que son transportadas a lo largo de esta arista), tiene una frecuencia relativa respecto a las aristas que tienen el mismo extremo inicial, que es nula o igual a la probabilidad asignada a la arista.

Esta propiedad que llamaremos cuasi-aleatoriedad (Holroyd-Propp)¹ es la responsable de que el método permita calcular de manera exacta las probabilidades de absorción. Esta propiedad convierte al método en un algoritmo infalible para calcular estas probabilidades. Una característica del método es que este solo requiere del usuario la habilidad de contar, lo que lo convierte en una herramienta didáctica que podría ser utilizada para enseñar algunos aspectos de los procesos estocásticos discretos a niños

¹Llamaremos cuasi-aleatoriedad a la propiedad que tienen algunos procesos estocásticos de poder ser simulados de manera determinística. Es interesante notar que en la mayoría de los casos la simulación determinística consiste esencialmente en sujetarse a la concepción frecuentista de la probabilidad.

en cualquier nivel de escolaridad. Este aspecto es el que precisamente pensamos tratar en la siguiente sección.

3.1. Potencial didáctico

Para empezar y basándonos fuertemente en Engel (1974,1975) discutiremos las desventajas de algunos otros métodos que también pueden ser usados para calcular de manera exacta las probabilidades de absorción. El primero de ellos es, por supuesto, el método que resulta del teorema fundamental de las cadenas de Markov absorbentes. Note que el método, que llamaremos canónico, es de difícil uso sin herramientas computacionales dado que requiere calcular la inversa de una matriz lo cual demanda del usuario habilidades numéricas a la altura del álgebra lineal. El crítico del ábaco de Engel podría objetar que al niño también podría enseñarse un algoritmo para invertir matrices. La poca validez de esta posible objeción radica en que todo método para invertir matrices requiere la manipulación aritmética de fracciones posiblemente complejas. Note que el ábaco de Engel solo requiere del usuario la habilidad de contar (manipulación de números naturales), y las fracciones solo aparecen al final del proceso al expresar las probabilidades de absorción y demás cantidades descriptivas como cocientes del producto de dos conteos. Esto es, los racionales solo aparecen como una forma de escritura diseñada para expresar los resultados (proporciones) calculables usando el ábaco probabilístico. Por el contrario, en el método canónico las fracciones son entidades que pueden manipularse (sumarse, multiplicarse) y cuya manipulación es necesaria desde los primeros pasos en la aplicación del método. Es claro que existe un gran trecho entre la habilidad de calcular con fracciones y la habilidad para entender el concepto *p ítems de q ítems posibles* expresado en el signo $\frac{p}{q}$. Es importante anotar que el creador del ábaco, Arthur Engel, ha reportado en Engel(1975) la utilización del ábaco como herramienta didáctica con niños de cuarto grado de primaria.

Un segundo método alternativo se basa en lo que llamaremos las reglas del camino (*path rules*) y que consisten en las siguientes tres reglas

1. La probabilidad de un camino (o trayectoria) es igual al producto de las probabilidades de las aristas que constituyen el camino.
2. La probabilidad de visitar $H \subset V$, cuando se inicia en v es la suma de las probabilidades de los caminos que inician en v y visitan H .
3. El valor esperado de la longitud de los caminos que iniciando en v visitan H es igual al promedio ponderado, donde los pesos son las probabilidades de las longitudes de los caminos que iniciando en v visitan H .

Estas tres reglas pueden ser eficientemente utilizadas para calcular las probabilidades de absorción y demás cantidades descriptivas cuando el grafo de transición es acíclico.

Ejemplo 3.1. Reglas de la trayectoria en el ejemplo de la cuenta de cobro.

Retomando el ejemplo de la cuenta de cobro tenemos el siguiente árbol de posibilidades.

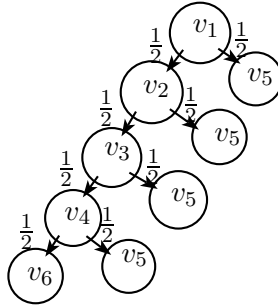


Figura 3.1: Árbol de posibilidades.

- **Regla 1** Existe un único camino para llegar a v_3 . Si sigo este único camino debo pasar primero por v_2 (con probabilidad $\frac{1}{2}$) para después llegar a v_3 (con probabilidad $\frac{1}{2}$). Es decir, la probabilidad de pasar de v_1 a v_3 es de $\frac{1}{4}$

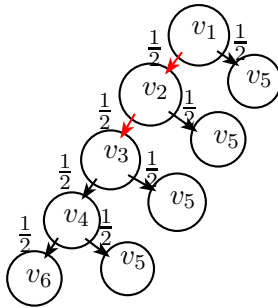


Figura 3.2: Primera regla de la Trayectoria.

- **Regla 2** Para llegar a v_5 puede haber llegado directamente de v_1 con probabilidad $\frac{1}{2}$, o haber pasado primero por v_2 para terminar en v_5 con probabilidad $\frac{1}{4}$, o puede seguir el camino $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5$ que tiene una probabilidad de $\frac{1}{8}$, o finalmente tuve la opción de seguir el camino $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$ cuya probabilidad es $\frac{1}{16}$. Como puede usar cualquiera de los cuatro caminos, sumo las probabilidades,

obteniendo que la probabilidad de llegar a v_5 es igual a $\frac{15}{16}$.

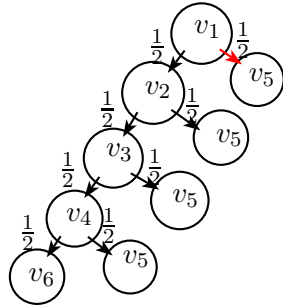


Figura 3.3: Segunda regla de la Trayectoria (una posible trayectoria).

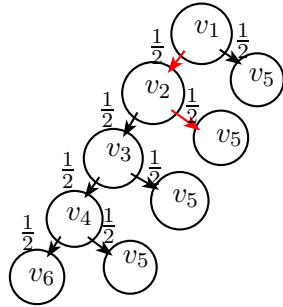


Figura 3.4: Segunda regla de la Trayectoria (segunda posible trayectoria).

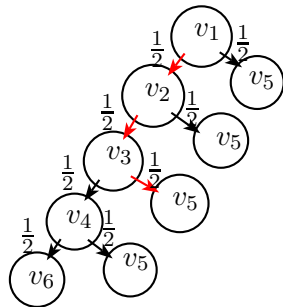


Figura 3.5: Segunda regla de la Trayectoria (una tercera posible trayectoria).

Siguiendo con este procedimiento, en cada camino o trayectoria de la figura ponemos las probabilidades de recorrerla. Observe que la suma de las probabilidades de los arcos en cada nivel debe dar 1. Para calcular las probabilidades de llegar a un vértice en determinado nivel, sumamos las probabilidades de los arcos que llegan al vértice. También la suma de las probabilidades sobre los vértices en cada nivel debe dar 1.

- **Regla 3** *Si iniciamos en v_1 , el número esperado de pasos (aristas por las que paso) para llegar a v_5 es*

$$m = 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{8} + 4\frac{1}{16} = 1,625$$

y el número esperado de pasos para llegar a v_6 iniciando en v_1 es

$$m = \frac{1}{4} = 0,25$$

por lo tanto, el número esperado de pasos para llegar a un estado absorbente v_5 o v_6 iniciando en v_1 es

$$m = 1,625 + 0,25 = 1,875$$

Si el grafo de transición de la cadena de Markov contiene ciclos o bucles, el grafo contiene un número infinito de caminos lo que da lugar, en la aplicación de las reglas 2 y 3 al surgimiento de series infinitas.

Ejemplo 3.2. La audaz apuesta *Usted tiene 1 peso y necesita 5 pesos. Suponga que usted puede participar en un juego en el que cada vez que apuesta usted puede, con igual probabilidad, perder todo el dinero o doblar su capital.*

Usted debe encontrar una estrategia óptima para obtener, lo más pronto posible, los 5 pesos que necesita. De la apuesta de mi patrimonio de 1 peso puedo perderlo todo o ganar el doble, si logro la fortuna de 2 pesos, apuesto todo para ganar el doble, es decir, acumular 4 pesos; ya cuando tengo 4 pesos, apuesto solo 1 para ganar otro peso y acumular 5 pesos, si no gano con esa apuesta me quedaría con 3 pesos. Luego, si tengo 3 pesos, apuesto 2 pesos para ganar otros 2 pesos y acumular 5 pesos, si no gano me quedaría con 1 peso y volvería a la situación inicial.

Debido al ciclo 12431, hay infinitas trayectorias de 1 a 5. (Ver Figura 3.6).

Por la segunda regla de la trayectoria las probabilidades de llegar a 5 desde 1 es

$$P = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{12}} + \dots = \frac{1}{5}$$

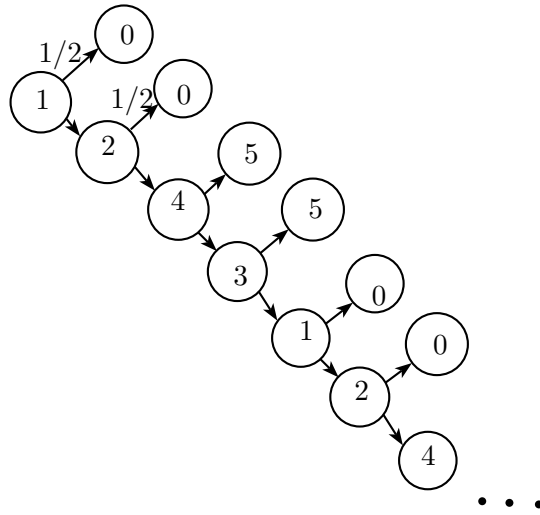


Figura 3.6: Árbol de posibilidades - Apuesta Audaz.

Por la tercera regla de la trayectoria obtenemos la duración o el número esperado de pasos de la caminata (apuesta audaz).

$$m = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} \right) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2^{n-1}} \right) = 2$$

Así pues las reglas del camino permiten calcular las probabilidades de absorción pero exigen del usuario la habilidad para calcular límites de series infinitas. Es claro que esta habilidad está muy lejos de ser elemental dado que requiere del usuario unos conocimientos mínimos de cálculo infinitesimal. Estamos hablando pues de un método que puede ser enseñado a adolescentes que cursan los últimos cursos de la media o a estudiantes universitarios. Un tercer método surge al reemplazar las reglas de caminos por una colección de ecuaciones lineales y condiciones de contorno que definen las probabilidades de absorción de una cadena de Markov absorbente. Sean:

- $P_{ik} :=$ Probabilidad de transición desde i hasta k .
- $m_i :=$ Duración media de los caminos aleatorios que van de i a un estado absorbente.
- $P_i :=$ Probabilidad de absorción cuando el estado inicial es igual a i .

La función de probabilidad $Pr : V \rightarrow R$ definida por

$$Pr(i) = P_i$$

está completamente determinada por el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$P_i = \sum_k P_{ik} P_k; \quad \forall i \in V - A$$

Junto con el siguiente conjunto de condiciones de contorno

$$P_i = 1 \text{ para todo } i \in A$$

Por otro lado la función de duración-media $m : V \rightarrow R$ definida por

$$m(i) = m_i$$

está completamente determinada por el sistema de ecuaciones

$$m_i = 1 + \sum_k P_{ik} m_k; \quad \forall i \in V - A$$

y las condiciones de contorno

$$m_i = 0 \text{ para todo } i \in A$$

Estos sistemas de ecuaciones y condiciones de contorno nos proveen de un método para calcular las cantidades descriptivas básicas, el núcleo matemático del método consiste (como con el primer método) en solucionar un sistema de ecuaciones lineales (es decir, invertir una matriz). ¿Qué hacer si el aprendiz no tiene la habilidad de manipular fracciones, resolver sistemas de ecuaciones lineales y mucho menos evaluar series infinitas? La única alternativa es hacer uso de la simulación. Un método de simulación, como por ejemplo el método de Monte Carlo es un método que permite estimar (no calcular) probabilidades y valores esperados. Estos métodos de aproximación presentan las siguientes dificultades:

1. Solo proveen al usuario de aproximaciones, nunca (o casi nunca) de valores exactos.
2. Buenas aproximaciones requieren un número inmenso de simulaciones.
3. Los mecanismos de transición usados en los algoritmos de simulación no son (¡no pueden ser!) realmente aleatorios.

Por otra parte el **Ábaco Probabilístico** de Engel es un método de simulación **determinístico** que:

1. Requiere un mecanismo de transición puramente determinístico lo que elimina el ruido inherente a la simulación computacional de mecanismos aleatorios.
2. Permite calcular los valores exactos de las probabilidades de absorción y demás cantidades descriptivas.

3. Tiene un tiempo corto de simulación.
4. Es un método infalible.
5. El algoritmo es fácil de entender a cualquier edad.
6. No requiere habilidades computacionales, sólo requiere la habilidad de contar.
7. El método se asemeja a un juego por lo que puede resultar estimulante y divertido para los niños.

Conclusiones

1. Hemos probado que el algoritmo determinista de simulación llamado “ el ábaco probabilístico ” permite calcular de forma exacta las cantidades que describen una cadena de Markov absorbente. Es decir, los cocientes hallados al final del proceso consistente en mover y contar fichas según las reglas preestablecidas por Arthur Engel dan los valores exactos de las probabilidades de absorción, el tiempo esperado de visitas a los estados transitorios y a los estados absorbentes de una cadena de Markov absorbente.
2. El ábaco probabilístico es un algoritmo fácil de usar que según su autor Arthur Engel (1975) fue usado en niños de cuarto grado en Carbondale, Illinois con gran éxito. Sin embargo, consideramos que es necesario realizar una investigación más profunda y detallada que permita observar el impacto que el algoritmo puede tener en la enseñanza de la probabilidad en los diferentes grados de la educación básica en Colombia.
3. La principal aplicación de las cadenas de Markov es el método de Monte Carlo, su utilidad en los diversos campos (estadística, computación científica, economía, medicina, física, . . .) son innumerables , lo cual convierte esta teoría en un tema interesante para un curso de probabilidad. Importancia que hace aún mas atractivo el ábaco probabilístico al tratar con problemas que se pueden modelar mediante cadenas de Markov absorbentes.
4. Es claro que existen diversos métodos para hallar las cantidades que describen una cadena de Markov absorbente, pero el principal problema en su aplicación son las habilidades que presuponen de los usuarios. En algunos casos resolver una cadena de Markov por alguno de los métodos diferentes al ábaco nos puede llevar al cálculo de límites de series infinitas, o a resolver sistemas de ecuaciones lineales o a invertir matrices y manipular fracciones durante el proceso. Sin embargo, el algoritmo de Engel sólo requiere del usuario la capacidad de contar, lo cual la convierte en una herramienta didáctica que podría ser usada para enseñar la teoría de cadenas de Markov en la educación básica y media.

Bibliografía

- [1] Engel, A. (1975). The Probabilistic Abacus, Educational Studies in Mathematics, (pp.1-22).
- [2] Engel, A. (1976). ¿ Why Does the Probabilistic Abacus Work? Educational Studies in Mathematics,(pp.59-69).
- [3] Häggstöm, O. (2002).Finite Markov Chains and Algorithmic Applications, Cambridge University Press, United Kingdom.
- [4] A. Holroyd, J. Propp. Rotar walks and Markov Chains. Sometido, disponible en: <http://faculty.uml.edu/jpropp/articles.html>
- [5] Snell, L. (1979).The Engel Algorithm for absorbing Markov chains, (pp.1-6).
- [6] URL:Mora Manuel. (Mayo 2000), EL ÁBACO PROBABILÍSTICO: Introducción a la probabilidad en Secundaria. Recuperado en agosto 15 del 2009, de <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0224-04/abacos.htm>.

Apéndice A

Simulación de la cuenta de cobro con vértice inicial v_1

A continuación presentaremos la dinámica del ábaco probabilístico asociado a la cuenta de cobro cuando se escoge a v_1 como vértice inicial. Recordemos que del grafo de “la cuenta de cobro” los estados v_5 y v_6 son estados absorbentes y los estados v_1, v_2, v_3, v_4 son estados transitorios o interiores.

Primero seleccionamos uno de los estados interiores para que sea nuestro estado inicial (ejemplo v_1).

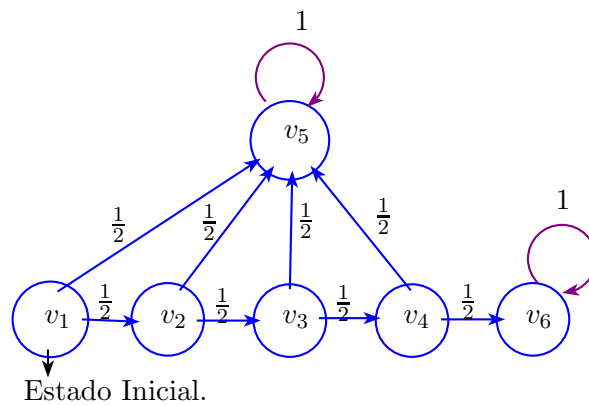
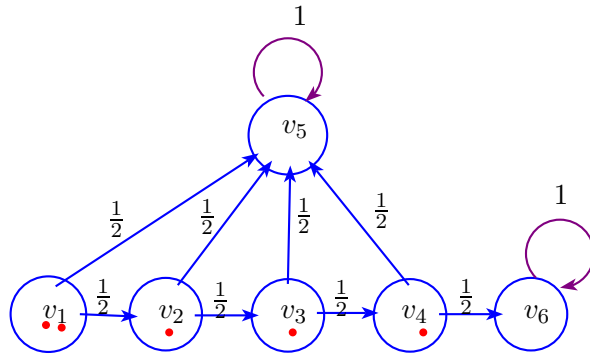
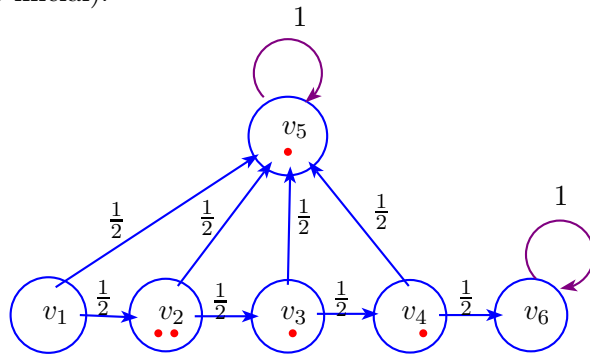


Figura A.1: Grafo-Ábaco cuenta de cobro.



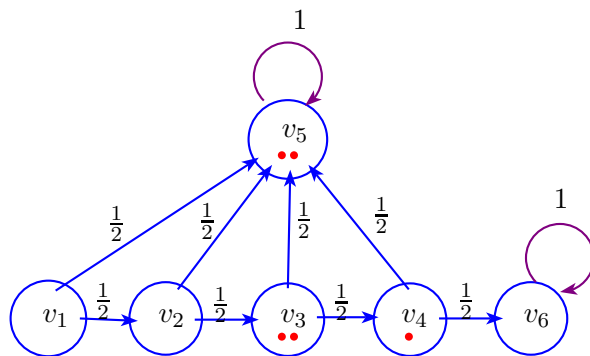
Inicio

Figura A.2: Primer movimiento (Configuración inicial del grafo-Ábaco e introducir fichas en el estado inicial).



Inicio

Figura A.3: Segundo movimiento (Distribuir fichas uniformemente).



Inicio

Figura A.4: Tercer movimiento (Distribuir fichas uniformemente).

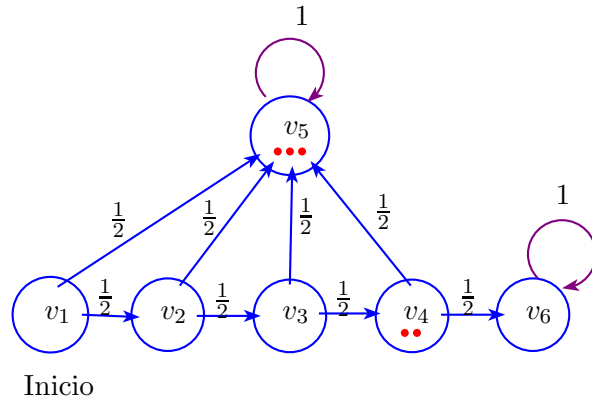


Figura A.5: Cuarto movimiento (Distribuir fichas uniformemente).

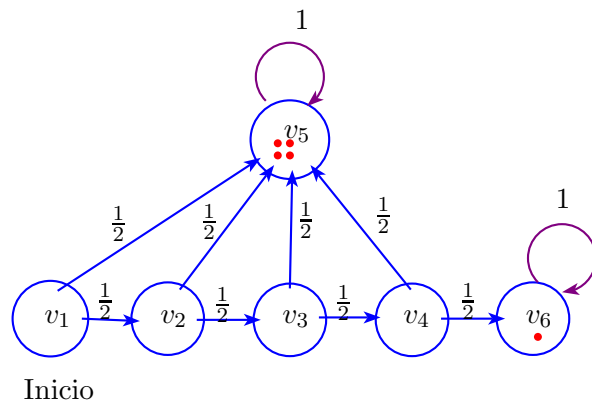


Figura A.6: Quinto movimiento (Distribuir fichas uniformemente).

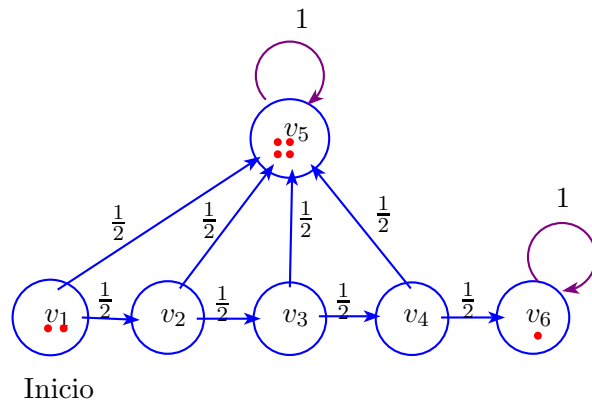
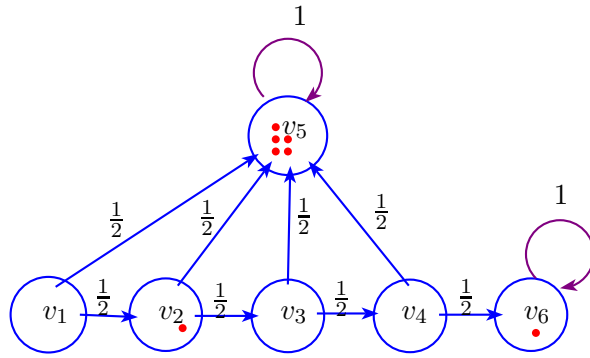
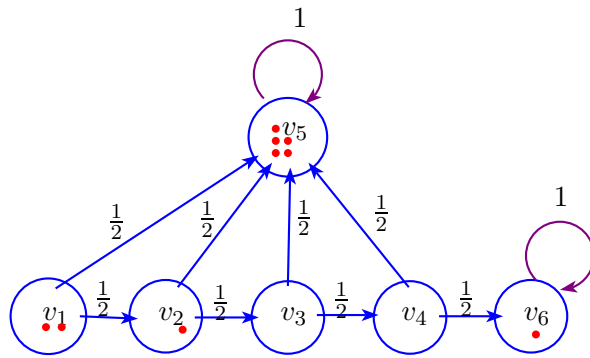


Figura A.7: Sexto movimiento (Introducir fichas en el estado inicial).



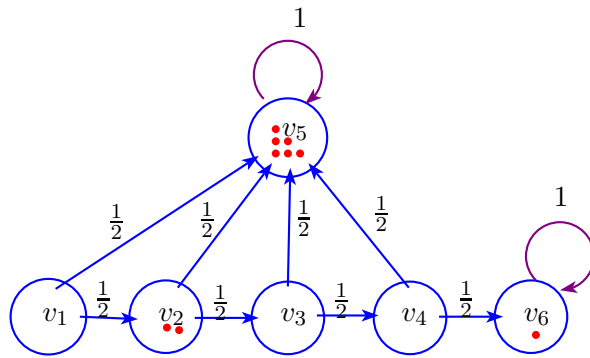
Inicio

Figura A.8: Séptimo movimiento (Distribuir fichas uniformemente).



Inicio

Figura A.9: Octavo movimiento (Introducir fichas en el estado inicial).



Inicio

Figura A.10: Noveno movimiento (Distribuir fichas uniformemente).

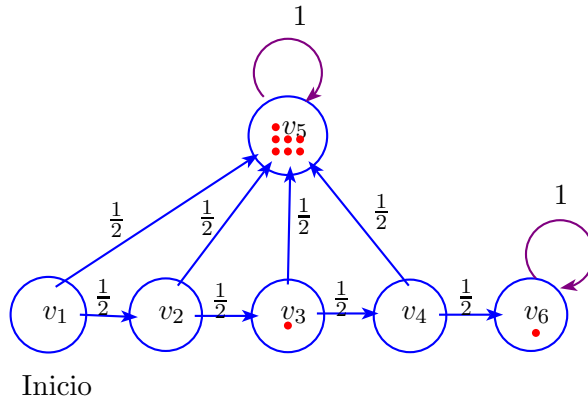


Figura A.11: Décimo movimiento (Distribuir fichas uniformemente).

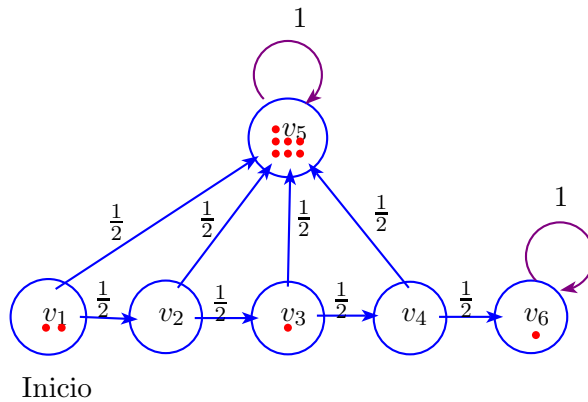


Figura A.12: Decimoprimer movimiento (Introducir fichas en el estado inicial).

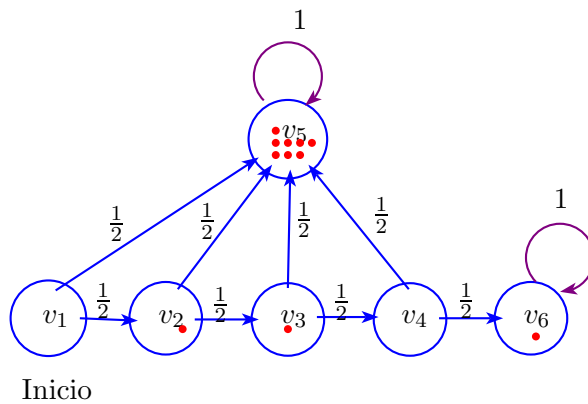
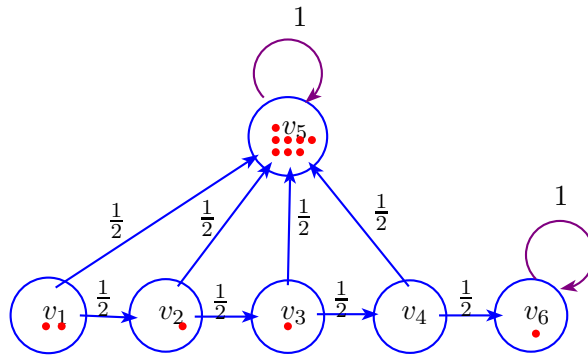
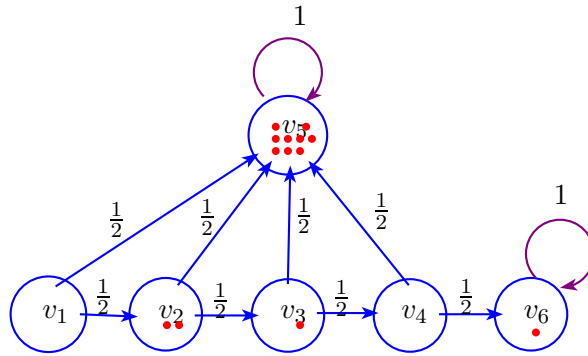


Figura A.13: Decimosegundo movimiento (Distribuir fichas uniformemente).



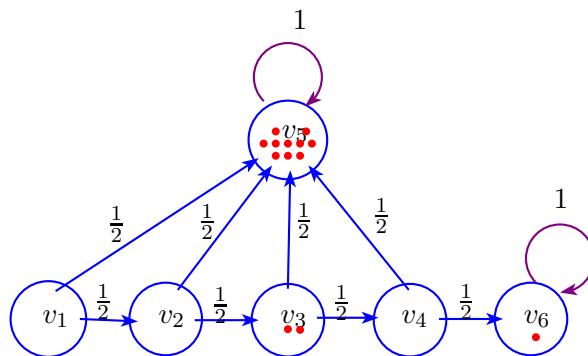
Inicio

Figura A.14: Decimotercer movimiento (Introducir fichas en el estado inicial).



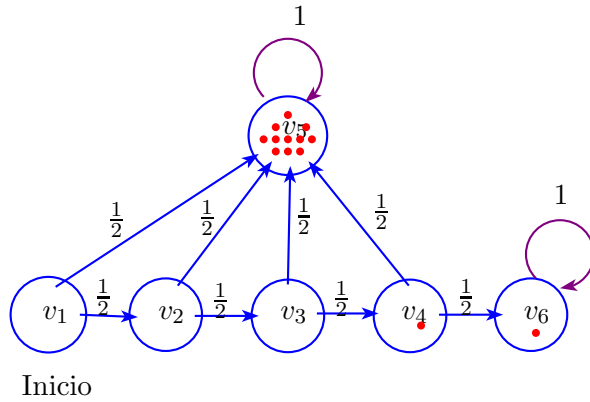
Inicio

Figura A.15: Decimocuarto movimiento (Distribuir fichas uniformemente).



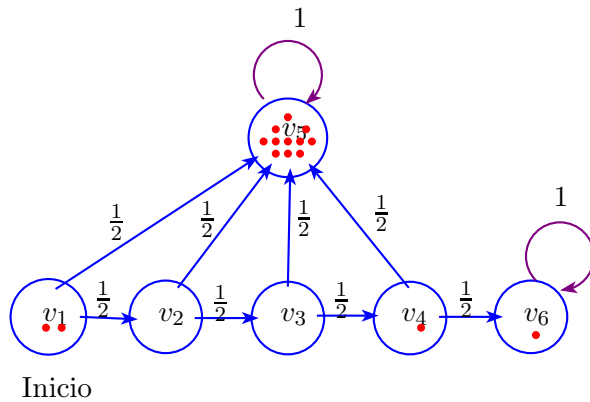
Inicio

Figura A.16: Decimoquinto movimiento (Distribuir fichas uniformemente).



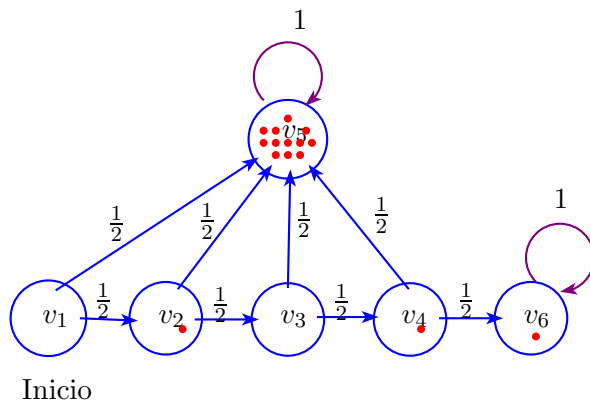
Inicio

Figura A.17: Decimosexto movimiento (Distribuir fichas uniformemente).



Inicio

Figura A.18: Decimoséptimo movimiento (Introducir fichas en el estado inicial).



Inicio

Figura A.19: Decimooctavo movimiento (Distribuir fichas uniformemente).

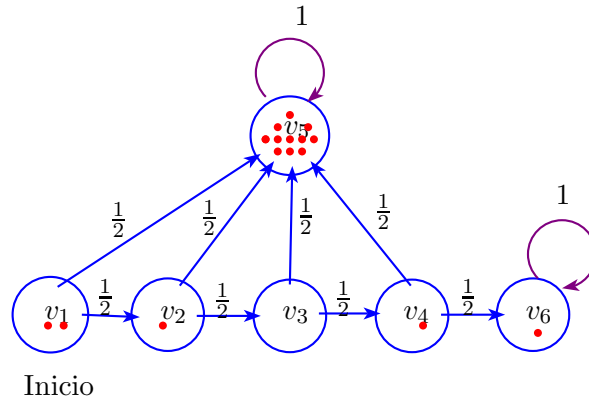


Figura A.20: Decimonoveno movimiento (Introducir fichas en el estado inicial).

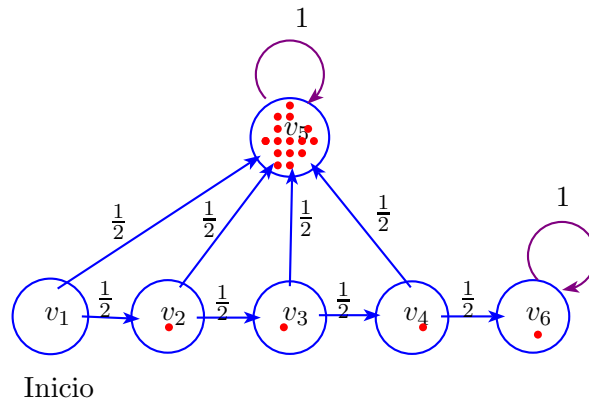


Figura A.21: Vigésimo y Vigésimo primer movimiento (Distribuir fichas uniformemente).