

Diseño de Tareas en DGPad – Colombia para Promover la Construcción y el Uso de los Hechos  
Geométricos

Sergio Andrés Caicedo Araque

Trabajo de Grado para Optar por el Título de Licenciado en Matemáticas

Director

Luis Ángel Pérez Fernández

Magister en Educación Matemática

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2023

### **Dedicatoria**

A mi mamá: Luz Helena;

Este trabajo se lo dedico en agradecimiento a tan altos sacrificios que ha hecho por mí y mis hermanos, por nunca rendirse y darnos todo lo indispensable para nuestra formación.

En esta dedicatoria pongo de manifiesta mi gratitud por tanto apoyo, comprensión y amor  
brindado.

Le debo todo lo que soy y seré.

### **Agradecimientos**

A mi mamá, Luz Helena, por enseñarme los valores y principios que me hacen hoy como persona. Por ser la primera que vio en mí mis cualidades y las potenció, permitiéndome llegar a estas instancias de mi vida.

A Jorge, por brindarnos su apoyo y estar siempre dispuesto a ayudarnos. Gracias por ser la persona que es.

A mi director, el profesor Luis Ángel, quien fue, es y será siempre mi maestro y referencia. Gracias por formarme académicamente durante estos años y por enseñarme más que matemáticas; para usted mi más sincera admiración y agradecimiento.

A mis evaluadores, por dedicar su tiempo a leer, valorar y aportar a este trabajo de investigación.

A mis amigos, por acompañarme y darme ánimos durante este largo y complejo camino; gracias por todo su apoyo y deseos de verme triunfar. Junto a ustedes la vida se siente diferente.

**Tabla de Contenido**

Introducción .....	11
1. Antecedentes de Investigación .....	13
2. Geometría Dinámica Experimental.....	18
2.1 Validación e Invalidación de Conjeturas .....	20
2.2 Tareas, Técnicas, Tecnologías y Teorías de la Geometría Dinámica Experimental.....	20
3. Problema de Investigación .....	23
4. Metodología de Investigación .....	26
4.1 Ingeniería Didáctica .....	26
4.2 Población de Estudio.....	29
5. Análisis Preliminar.....	29
5.1 Análisis Epistemológico .....	29
5.2 Análisis Cognitivo.....	35
5.3 Análisis Didáctico .....	38
6. Análisis a priori.....	41
6.1 Primera Actividad .....	43
6.1.1 Constatación del HG1 y HG2 .....	44
6.1.2 Uso del HG1 y HG2.....	57
6.2 Segunda Actividad .....	68
6.2.1 Constatación del HG3 y HG4 .....	68

6.2.2 Uso del HG3 y HG4.....	79
7. Análisis a posteriori .....	96
7.1 Primera actividad: .....	96
7.2 Segunda actividad: .....	129
8. Conclusiones .....	204
Referencias Bibliográficas .....	210
Apéndices.....	213

### Lista de Figuras

<b>Figura 1</b> Construcción de Euclides .....	31
<b>Figura 2</b> Hecho geométrico 1.....	44
<b>Figura 3</b> Hecho geométrico 2.....	44
<b>Figura 4</b> Producto realizado tomando la distancia entre los puntos .....	46
<b>Figura 5</b> Producto realizado tomando las magnitudes de los segmentos.....	46
<b>Figura 6</b> Cambio de posición del punto P.....	47
<b>Figura 7</b> Verificación experimental de la igualdad $PC \cdot PD = PA \cdot PB$ .....	49
<b>Figura 8</b> Posible par de triángulos: PAD y PCB.....	50
<b>Figura 9</b> Posible par de triángulos: PAC y PDB.....	50
<b>Figura 10</b> Exploración para verificar la congruencia de los ángulos PBC y PDA .....	52
<b>Figura 11</b> Medición de los ángulos PAC, PDB, PCA y PBD.....	52
<b>Figura 12</b> Construcción de las cuerdas BC y AD .....	53
<b>Figura 13</b> Verificación en el SGD de la congruencia de ángulos .....	54
<b>Figura 14</b> Verificación experimental de la congruencia de los ángulos .....	54
<b>Figura 15</b> Situación de la tarea de exploración y análisis 1.1 .....	56
<b>Figura 16</b> Ajuste de la recta PA para que sea tangente a c .....	57
<b>Figura 17</b> Situación de la tarea de anticipación 1.1 .....	59
<b>Figura 18</b> Técnica del análisis en la tarea de construcción 1.1 .....	61
<b>Figura 19</b> Construcción de la recta AB.....	61
<b>Figura 20</b> Obtención del punto T' a partir del HG2 .....	62
<b>Figura 21</b> Círculo tangente a l y que pasa por A y B. Primer método.....	63
<b>Figura 22</b> Media geométrica entre PA y PB .....	64

<b>Figura 23</b> Círculo tangente a $l$ y que pasa por A y B. Segundo método.....	64
<b>Figura 24</b> Segundo círculo solución. Primer método .....	66
<b>Figura 25</b> Segundo círculo solución. Segundo método .....	66
<b>Figura 26</b> Caso en donde los puntos A y B están a lados distintos a la recta $l$ .....	67
<b>Figura 27</b> Tangencia perceptiva de los círculos $c_1$ y $c_2$ .....	69
<b>Figura 28</b> Construcción que resiste la prueba del arrastre .....	70
<b>Figura 29</b> Realización del protocolo de construcción.....	72
<b>Figura 30</b> Otra configuración de los objetos al realizar el proceso de construcción .....	73
<b>Figura 31</b> Construcción de la recta $O_1O_2$ .....	75
<b>Figura 32</b> Construcción de los radios de los círculos .....	76
<b>Figura 33</b> Medición de los ángulos $SO_2T$ y $RO_1Q$ .....	76
<b>Figura 34</b> Medición de los ángulos $TSO_2$ y $RQO_1$ .....	77
<b>Figura 35</b> Medición de los ángulos $O_2PT$ y $O_1PQ$ .....	78
<b>Figura 36</b> Traza del círculo que pasa por los puntos B, H y J .....	80
<b>Figura 37</b> Intersección entre la recta AB y el círculo $g$ : punto Q .....	81
<b>Figura 38</b> Punto Q como intersección de dos círculos.....	82
<b>Figura 39</b> Traza no favorecedora del círculo que pasa por los puntos B, H y J .....	83
<b>Figura 40</b> Tangencia perceptiva entre los círculos .....	85
<b>Figura 41</b> Semejanza de los triángulos $AJB$ y $AQH$ .....	86
<b>Figura 42</b> Medición de los ángulos $ABJ$ , $AHQ$ y $HKJ$ .....	87
<b>Figura 43</b> Ajuste de la medición de los ángulos $ABJ$ , $AHQ$ y $HKJ$ .....	88
<b>Figura 44</b> H como punto de tangencia de la recta HQ con $c$ .....	89
<b>Figura 45</b> Construcción del punto Q.....	90

<b>Figura 46</b> Construcción del punto H.....	90
<b>Figura 47</b> Construcción del primer círculo solución .....	91
<b>Figura 48</b> Construcción del punto F .....	92
<b>Figura 49</b> Construcción del segundo círculo solución.....	93
<b>Figura 50</b> Triángulos AQF y ALB.....	94

### Lista de Apéndices

<b>Apéndice A. Primera sesión actividad 1 .....</b>	<b>214</b>
<b>Apéndice B. Segunda sesión actividad 2 .....</b>	<b>233</b>
<b>Apéndice C. Tercera sesión actividad 2 .....</b>	<b>259</b>

## Resumen

**Título:** Diseño de tareas en DGPad-Colombia para promover la construcción y el uso de los hechos geométricos\*

**Autor:** Sergio Andrés Caicedo Araque\*\*

**Palabras clave:** Hechos geométricos, Geometría Dinámica Experimental, Tangencia.

### Descripción:

El software de geometría dinámica (SGD) posee características propias de su entorno que favorecen el aprendizaje de la geometría euclidiana (Laborde et al., 2006), convirtiéndose en un aliado cognitivo que guía al estudiante en sus procesos de exploración, conjeturación y verificación de propiedades geométricas de los objetos proyectados en la pantalla (MEN, 2004); permitiéndole identificar, en particular, implicaciones lógicas entre dichas propiedades. Estas implicaciones lógicas, que se denominan hechos geométricos (Acosta y Cardozo, 2021), aportan a la actividad de resolución de problemas de geometría plana (demostraciones y construcciones).

En este sentido, el presente trabajo busca aportar un diseño de tareas, en el entorno del software DGPad-Colombia, con el propósito de promover la construcción y el uso de hechos geométricos que versan sobre el concepto de tangencia. Para ello, con la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación, se plantearon los siguientes objetivos: (i) Realizar un diseño de tareas con la intención de promover la construcción de hechos geométricos y su uso en problemas de construcción; (ii) Elaborar un análisis a priori del diseño de tareas propuesto, a la luz de la Geometría Dinámica Experimental; (iii) Elaborar un análisis a posteriori con base en el diseño de tareas implementado.

Los resultados obtenidos evidencian que los estudiantes, mediante la experimentación en el software, reconocieron y constataron los hechos geométricos escribiéndolos en un enunciado que da cuenta de las condiciones necesarias y suficientes para que estos se cumplan (Acosta y Cardozo, 2021). Además, en las tareas propuestas, estos fueron usados como: herramientas de construcción y verificación, como estrategia de solución de problemas y como herramienta de validación en razonamientos deductivos; lo que nos permitió concluir que las tareas propuestas, fundamentadas en la experimentación con el software, favoreció la construcción y el uso de los hechos geométricos estudiados y otros ya constatados por los estudiantes.

---

\* Trabajo de Grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director: Luis Ángel Pérez Fernández. Magister en Educación Matemática.

### Abstract

**Title:** Task Design in DGPad-Colombia to Promote the Construction and Use of Geometric Facts\*

**Author:** Sergio Andrés Caicedo Araque\*\*

**Keywords:** Geometric Facts, Experimental Dynamic Geometry, Tangency.

#### Description:

Dynamic Geometry Software (DGS) possesses inherent features in its environment that enhance the learning of Euclidean geometry (Laborde et al., 2006). It becomes a cognitive ally guiding students through processes of exploration, conjecture, and verification of geometric properties of objects projected on the screen (MEN, 2004). This enables them to identify logical implications among these properties, referred to as geometric facts (Acosta and Cardozo, 2021), contributing to problem-solving activities in plane geometry (proofs and constructions).

Based on this context, this project aims to provide a task design within the DGPad-Colombia software environment to promote the construction and use of geometric facts related to the concept of tangency. To achieve this, using Didactic Engineering as a research methodology, the following objectives were formulated: (i) Develop a task design with the intention of promoting the construction of geometric facts and their use in construction problems; (ii) Conduct a prior analysis of the proposed task design, based on Experimental Dynamic Geometry; (iii) Perform a posterior analysis based on the implemented task design.

The obtained results reveal that students, through experimentation using the software, they recognized and verified geometric facts by articulating them in statements that account for the necessary and sufficient conditions for their fulfillment (Acosta and Cardozo, 2021). Additionally, in the proposed tasks, these facts were used as tools for construction and verification, as a strategy for problem-solving, and as a validation tool in deductive reasoning. This led us to conclude that the proposed tasks, grounded in software experimentation, facilitated the construction and use of the studied geometric facts and others already confirmed by the students.

---

\* Degree Project

\*\* Faculty of Sciences. School of Mathematics. Bachelor's Degree in Mathematics. Supervisor: Luis Ángel Pérez Fernández. Master's in Mathematics Education.

## Introducción

El software de geometría dinámica (SGD) posee características propias de su entorno que favorecen el aprendizaje de la geometría euclidiana (Laborde et al., 2006), convirtiéndose en un aliado cognitivo que guía al estudiante en sus procesos de exploración, conjeturación y verificación de propiedades geométricas de los objetos proyectados en la pantalla (MEN, 2004), permitiéndole identificar, en particular, implicaciones lógicas entre dichas propiedades. Estas implicaciones lógicas, las cuales se denominan hechos geométricos, aportan a la actividad de resolución de problemas de geometría plana (demostraciones y construcciones) y, además, su carácter apodíctico es la base del razonamiento deductivo que permite predecir con certeza si una propiedad se cumple en una determinada construcción (Acosta y Cardozo, 2021).

En este sentido, el presente trabajo tuvo como propósito aportar un diseño de tareas fundamentado en el software DGPad-Colombia y centrado en algunos hechos geométricos que versan sobre el concepto de tangencia, en el contexto de la geometría euclidiana, con el fin de dar respuesta a la pregunta: ¿qué tareas en el entorno del SGD promueven la construcción y el uso de los hechos geométricos y cómo estos son usados en tareas de verificación, anticipación y justificación que involucran construcciones geométricas? Para esto, se realizó un pilotaje con dos estudiantes trabajando en pareja, quienes estaban finalizando el primer semestre del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander y, por lo tanto, estaban finalizando el curso de geometría euclidiana.

Usamos como fundamento teórico la praxeología de la Geometría Dinámica Experimental que introduce la experimentación dentro de la actividad de problemas de geometría para reconocer e identificar invariantes y relaciones de dependencia entre propiedades, favoreciendo la formulación de conjeturas sobre dichas propiedades e invariantes; además que, la comunidad de

profesores necesita de herramientas teóricas para sustentar el trabajo matemático realizado en los SGD (Acosta, 2005) y en esta praxeología son pocas las investigaciones que han aportado en lo referente a esta problemática.

En consecuencia, mediante la Geometría Dinámica Experimental estudiamos las tareas que permitieron constatar y promover los hechos geométricos de interés, y su uso en las tareas de anticipación, verificación, justificación y construcción.

El trabajo de investigación está estructurado de la siguiente manera: en el primer capítulo se exponen los antecedentes de investigación que son parte fundamental del trabajo. El segundo capítulo explicita algunos elementos de la Geometría Dinámica Experimental, la cual usamos como Marco teórico. En el tercer capítulo concretamos el problema de investigación, en el que se plantea una pregunta y tres objetivos con los que se pretende dar respuesta a la pregunta de investigación. Posteriormente, en el cuarto capítulo planteamos la Ingeniería didáctica como metodología de investigación y en los siguientes capítulos presentamos el análisis preliminar, a priori y a posteriori para finalizar con los resultados y las conclusiones de la investigación.

## 1. Antecedentes de Investigación

En esta sección se presentan algunos antecedentes que son parte fundamental de la presente investigación. Versan de manera general sobre el uso del software de geometría dinámica (SGD) para la enseñanza de la geometría y, particularmente sobre los hechos geométricos y la solución a problemas de construcción a partir de técnicas propias del entorno del SGD.

Acosta (2005) en su artículo define una nueva práctica geométrica que denomina Geometría Dinámica Experimental. Esta nueva práctica favorece la observación y manipulación de objetos geométricos en el software de geometría dinámica (SGD), con el fin de emitir conjeturas sobre propiedades geométricas que puedan tener tales objetos. Estas conjeturas se ponen a prueba y para mostrar la falsedad o veracidad de estas, el autor propone unas condiciones que estas deben cumplir, en las que se privilegia las construcciones en el SGD. Entendiendo que las construcciones no corresponden a una demostración de la conjetura en el caso donde esta sea cierta, pero sí aportan ideas para la demostración formal.

Para poner a prueba sus afirmaciones, el autor se propone resolver un problema no rutinario de geometría euclidiana: dado un triángulo cualquiera  $ABC$  y un punto cualquiera  $P$ , ¿cuál es el lugar geométrico de puntos  $P$  tales que su triángulo simétrico – lateral y su triángulo antipedal sean perspectivas?

Para resolver este problema, Acosta (2005) establece técnicas que son propias de la geometría dinámica. Estas técnicas le permitieron hallar relaciones entre los objetos para emitir conjeturas y posteriormente verificarlas o refutarlas para, finalmente, realizar la demostración formal. Estas técnicas son: Técnica de detección de puntos que satisfacen una cierta condición, Técnica del análisis, Técnica del ajuste por desplazamiento y Técnica de la validación

experimental. Estas se definen más adelante en el marco teórico, pues son esenciales en este trabajo que se fundamenta en esta nueva práctica geométrica.

En la misma línea de la Geometría Dinámica Experimental, Acosta y Cardozo (2021) afirman que la experimentación con el SGD promueve la construcción de Hechos Geométricos (HG), entendiéndose como HG a “una afirmación ‘necesariamente verdadera’ que se refiere a la implicación lógica entre propiedades; así, un HG puede constatarse, verificarse y experimentarse, puede convertirse en un teorema, si se hace una demostración que lo vincula a un sistema teórico” (p. 257).

En consecuencia, los investigadores aplicaron un diseño de situaciones de clase a dos estudiantes de séptimo y octavo grado en donde se utiliza el SGD para resolver problemas de construcción relacionados con la perpendicularidad y la equidistancia. Esto con el fin de promover la construcción de HG y los utilicen para producir una construcción exacta y razonar deductivamente de manera implícita; en donde una construcción exacta es aquella que cumple ciertas propiedades y se mantienen aun cuando se arrastran los objetos que la componen. Así, los estudiantes por medio de la experimentación con el software y el uso de la técnica del hilvanado, que se entiende como arrastrar los objetos geométricos por la pantalla hasta que satisfagan la propiedad buscada, logran interiorizar los HG como un criterio de validez y son capaces de utilizarlos en situaciones de verificación, anticipación y justificación.

Por otra parte, haciendo énfasis en las construcciones geométricas con el uso del SGD, Cruz y Mantica (2017) en su artículo se proponen analizar el lugar que ocupa el SGD como herramienta para la formulación y validación de conjeturas, usando como población dos estudiantes de la Universidad Nacional del Litoral, para resolver un problema geométrico que se centra en construir un poliedro semirregular con determinadas condiciones. Para resolver este

problema de construcción los estudiantes hicieron especial uso de la visualización y de herramientas del SGD como *recta paralela* y *medir*. En lo que respecta a la formulación y validación de conjeturas, los autores mencionan que el arrastre favoreció esta actividad al momento de desarrollar la construcción, aunque pudieron haber usado más herramientas que provee el software. Y, en sus reflexiones finales, afirman que la utilización del SGD les permite a los estudiantes realizar distintas comprobaciones empíricas con la construcción para enjuiciar la veracidad o falsedad de una conjetura, antes de realizar una justificación deductiva. Además, mencionan que “el SGD es un medio para estimular las actividades matemáticas de formular y validar conjeturas” (p. 80); ya que si la conjetura es verdadera pueden validarla utilizando la potencialidad del software.

En otras investigaciones que versan sobre cómo el arrastre favorece la aparición de conjeturas, encontramos a Sandoval (2009) quien en sus antecedentes afirma que “el arrastre permite la exploración y validación de una construcción para producir y validar conjeturas y, a la vez, ayuda a su formulación de manera condicional (los estudiantes construyen enunciados del tipo *Si... entonces...*)” (p. 8). Tomando como base esta afirmación, entre otras, la autora informa en su investigación sobre el rol de la geometría dinámica como una herramienta mediadora entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. Por lo que les propone a 15 estudiantes, entre los 15 y 18 años, una situación de construcción en la que deben formular conjeturas y escribir un enunciado que las caracterice. Así, los estudiantes utilizan el arrastre y la herramienta *medida* como medio de exploración para formular y enjuiciar sus conjeturas, permitiéndoles redactar enunciados en donde se evidencia el uso de elementos geométricos para caracterizarlas. Por tanto, Sandoval afirma que las herramientas de arrastre, medida y construcción coadyuvan a los alumnos en el paso de lo perceptivo a lo teórico.

Complementando la idea del uso del arrastre para validar conjeturas, están Rubio-Pizzorno y Montiel (2017) quienes presentan reflexiones sobre la evolución conceptual de la geometría y el impacto que esta ha tenido en la Didáctica de la geometría, especialmente en los ambientes de geometría dinámica. Por este motivo, realizan un estudio de la naturaleza de la geometría desde las siguientes perspectivas: epistémica, epistemológica, filosófica y digital.

Así, luego de analizar la relación del arrastre en el ambiente de la geometría dinámica con aspectos epistémicos, epistemológicos y filosóficos de la geometría, los autores afirman que el uso del arrastre en el SGD puede constituir lo que se conoce como “prueba de arrastre”. Es decir, si se mueve la construcción realizada y esta mantiene sus propiedades geométricas iniciales intactas, la construcción pasa la prueba, pues la construcción mantiene invariante dichas propiedades atribuidas. Caso contrario, la construcción no fue realizada con las propiedades geométricas que se esperaba que tuviera.

Respecto al uso del SGD en la enseñanza de la geometría, Laborde et al. (2006) realizan una revisión de investigaciones desarrolladas en el International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) que se publicaron en revistas internacionales sobre computadoras en la Educación Matemática. En ese sentido, los autores, recapitulando información de las distintas investigaciones, mencionan que los Entornos de Geometría Dinámica (EGD) favorecen el aprendizaje, ya que requieren acciones de los estudiantes para lograr un objetivo y, en el proceso, los estudiantes aprenden coordinando y reflexionando sobre la forma de sus interacciones. Así, el explorar las construcciones les permite acceder a las propiedades geométricas, convirtiendo al software en una extensión del propio pensamiento de los estudiantes.

Luego, detallan particularidades respecto a los diseños de tareas en los SGD, mencionando que se distinguen diferentes tipos de tareas que puede proponer el docente: Tareas en las que el

entorno facilita las acciones materiales, pero no cambia la tarea para los estudiantes; tareas en las que el entorno facilita la exploración y el análisis de los estudiantes; y tareas que no se pueden plantear sin la mediación del entorno, como reconstruir una construcción a través de la experimentación para identificar sus propiedades. Y, estas tareas, son complementadas con la retroalimentación que ofrece el SGD, pues cuando los estudiantes usan el modo arrastre o la herramienta medir para verificar sus conjeturas, se puede fomentar la necesidad de buscar otras alternativas de solución cuando la retroalimentación recibida evidencia la insuficiencia de la solución propuesta.

Como complemento de los antecedentes anteriormente mencionados, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) publicó en el año 2004 un artículo titulado *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*, el cual se enmarca en el proyecto *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia*. Este artículo versa sobre los aportes de las tecnologías computacionales para potenciar el desarrollo del pensamiento geométrico, por lo que, para fines de la presente investigación, se centrará la atención en el capítulo cuatro, que trata sobre el potencial didáctico de la geometría dinámica en el aprendizaje de la geometría.

Por tanto, el MEN (2004) afirma que las características fundamentales del SGD como el arrastre, el uso del lugar geométrico, el rastro y la animación de figuras permiten identificar invariantes en las construcciones, además de visualizar, describir y construir hechos geométricos. Así mismo, se menciona que el arrastre conlleva a problematizar la visualización; es decir, promover la exploración, las conjeturas, las predicciones y la verificación, de modo que se construyan enunciados que se evidencien de manera visual en la pantalla.

Respecto a las construcciones, el MEN (2004) expresa que estas son fundamentales en este contexto, pues “[...] se convierten en los objetos de ‘experimentación’ sobre la teoría, sin utilizar de manera directa el discurso” (p. 29). Lo que conlleva a que en las clases se deban proponer problemas de construcción en los que el estudiante tenga que poner en evidencia sus conocimientos previos y las capacidades del software. Esto hará que se produzca la oportunidad de establecer conexiones entre los procesos discursivos (la teoría matemática) y los procesos visuales, haciendo de las construcciones herramientas de solución a los problemas.

A su vez, el software se convierte en un aliado cognitivo que guía al estudiante en sus conjeturas y pruebas sobre los objetos matemáticos y, por ende, se da pie a la construcción de hechos geométricos que se usarán al momento de resolver un problema (MEN, 2004).

## **2. Geometría Dinámica Experimental**

La Geometría Dinámica Experimental es una praxeología matemática que surge del menester de una nueva práctica matemática y didáctica que involucre el uso de la geometría dinámica, puesto que entre los usuarios de esta existe un desequilibrio entre el punto de vista matemático y el punto de vista didáctico; lo que desencadena en que a los profesores de Matemáticas les resulte problemático y complejo usarla (Acosta, 2005).

Por lo tanto, en Acosta (2005), desde el punto de vista de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se examina el problema de la integración en la enseñanza del software de geometría dinámica. Esta teoría establece que las matemáticas solo pueden describirse y entenderse como una práctica humana, una “praxeología” (Acosta, 2008). Así, los componentes de una praxeología son: tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías. De modo que, según Acosta

(2008) y Acosta et al. (2013), en una institución dada, las tareas son los trabajos que deben realizar los sujetos y las técnicas corresponden a los procesos que se ponen en práctica para llevar a cabo las tareas. Las tecnologías son los discursos que describen y justifican a las técnicas empleadas para resolver las tareas, y, del mismo modo, las teorías son las que explican, justifican y sustentan las tecnologías.

Sumado a lo ya descrito, según Acosta (2005) y Acosta (2008), la TAD establece que estas tareas, técnicas y tecnologías se basan en los objetos que son perceptibles por los sentidos y, por tanto, manipulables (que se les conoce como objetos ostensivos). Y como la geometría dinámica da pie a nuevos objetos ostensivos como lo son los dibujos computarizados, esto produce que se dé una reestructuración global de la praxeología matemática, por lo que la geometría dinámica incluye nuevas tareas, técnicas y tecnologías basadas en estos nuevos objetos ostensivos.

Así pues, con base en lo anterior, resaltando la necesidad inicialmente mencionada, y en busca de respuestas a interrogantes como: ¿Cuáles son las consecuencias de utilizar las nuevas representaciones de los objetos ostensivos que ofrecen los SGD? Y ¿Qué técnicas y tecnologías se pueden emplear en estos nuevos objetos geométricos para justificar el uso de los SGD para enseñar y hacer matemáticas? Acosta (2005) propone y define la Geometría Dinámica Experimental como:

[...] Una práctica geométrica que privilegia la observación y manipulación de los objetos geométricos en la pantalla de la computadora, con la intención de emitir conjeturas sobre las propiedades geométricas de dichos objetos, conjeturas que se ponen a prueba mediante el arrastre, la medición y la construcción de objetos auxiliares. (p. 124)

La Geometría Dinámica Experimental valida el uso del SGD en tanto que, a partir de la percepción visual que se adquiere al manipular los objetos, se elaboren procesos de experimentación que permitan realizar conjeturas sobre sus propiedades geométricas y se desarrollen estrategias para formalizar y argumentar la veracidad o falsedad de las relaciones establecidas previamente (Pérez et al., 2021). En ese sentido, a continuación, se expone cómo se realiza la validación e invalidación de conjeturas en esta nueva práctica geométrica.

### **2.1 Validación e Invalidación de Conjeturas**

Sobre la invalidación Acosta (2005) dice que: “La invalidación de una conjetura en geometría experimental puede considerarse equivalente a una demostración de su falsedad por medio de un contraejemplo” (p. 124). Por tanto, para mostrar la falsedad de una afirmación es suficiente con encontrar un caso particular en el que las propiedades geométricas conjeturadas no se satisfagan.

Sobre la validación Acosta (2005) dice que: “Las conjeturas que no sean invalidadas por la experiencia se consideran verdaderas, en espera de una demostración formal” (p. 124). Es decir, para verificar la veracidad de una afirmación se realiza una construcción que resista la prueba del arrastre. No obstante, se tomará válida tal construcción hasta que se realice una demostración formal; ya que, aunque una construcción no es suficiente para validar una conjetura, sí puede contribuir a encontrar relaciones lógicas que permitan realizar una demostración.

### **2.2 Tareas, Técnicas, Tecnologías y Teorías de la Geometría Dinámica Experimental**

Como se mencionó anteriormente, el uso de los SGD supone la introducción de nuevos objetos ostensivos y en consecuencia supone nuevas tareas, técnicas y tecnologías. Por ende, Acosta (2008), en complemento a lo expuesto por Acosta (2005), afirma que ha elegido los

problemas de construcción como el tipo de problemas en torno a los cuales construir la praxeología geométrica denominada Geometría Dinámica Experimental. Estos problemas de construcción deben tener en el enunciado tres piezas de información:

- *Datos*: son los objetos y relaciones a partir de los cuales construir.
- *Metas*: son los objetos y relaciones que van a ser producidos por el proceso de construcción.
- *Instrumentos que pueden o deben ser utilizados*: los instrumentos de construcción son todos los disponibles en los menús de los SGD.

Para resolver estos problemas, los sujetos deben realizar las siguientes tareas:

- Identificar claramente los datos y propósitos.
- Encontrar relaciones entre datos y objetos, elegir aquellos que le permitan construir objetos a partir de los datos.
- Implementar procedimientos de construcción que aseguren estas relaciones.

Así, Acosta (2008) considera que la resolución de problemas de construcción consiste en un solo tipo de tarea: la construcción de una figura con propiedades dadas. Tarea que se puede dividir en subtareas para lograr la construcción de la figura dada, como se explicitó en el párrafo anterior.

Referente a las técnicas de la geometría experimental, Acosta (2005, pp. 137-139) expone las siguientes:

- *Técnica de detección de puntos que satisfacen una cierta condición*: esta técnica responde a la tarea de construir un cierto número de puntos que permitan describir la forma del lugar geométrico buscado.

- *Técnica del análisis*: para resolver un problema de construcción, se estudia una figura que representa el problema resuelto (ya sea un dibujo estático o dinámico), para encontrar allí las relaciones entre datos y objetivos, hasta encontrar las relaciones que se pueden construir.
- *Técnica del ajuste por desplazamiento*: esta técnica modifica los dibujos de manera continua mediante el arrastre de los objetos que los componen, manteniendo las propiedades que se les fueron asignadas por construcción.
- *Técnica de validación experimental*: si se tiene la conjetura de que  $P1$  implica  $P2$ , se construye  $P1$  y se aplica el arrastre para buscar posibles casos donde no se cumpla  $P2$ ; si no se encuentran contraejemplos, se considera validada la conjetura provisionalmente hasta que se encuentre un contraejemplo o hasta que se construya una demostración formal.

Y como técnicas adicionales, complementando las ideas de Acosta (2005), Acosta (2008) expone las siguientes:

- *Técnica de lugares geométricos*: un lugar geométrico es la trayectoria de un punto  $A$  que depende de un punto  $B$  que viaja a través de un objeto (segmento, línea, rayo, círculo, arco o polígono). Entonces, se dibuja, usando la herramienta “traza,” la trayectoria del punto  $A$  cuando  $B$  se mueve por el objeto en el que está.
- *Técnica de división*: esta técnica responde a la tarea de determinar la posición de un punto en un segmento dado. La técnica consiste en medir las distancias desde el punto hasta los extremos del segmento, y calcular el cociente de estas distancias, para intentar identificar un determinado número racional o irracional (comparando su expansión decimal con números ya conocidos) y así construir este punto usando la razón encontrada.

En lo que respecta a las tecnologías y teorías de la Geometría Dinámica Experimental, Acosta (2008) afirma que a nivel tecnológico-teórico no hay necesidad de introducir nuevos elementos; porque las diferentes relaciones de dependencia pueden explicarse como consecuencia de relaciones geométricas comunes: un punto libre es cualquier punto, un punto sobre un objeto es un punto que pertenece a un objeto, un punto que no se puede mover directamente es un punto de intersección, etc.

### **3. Problema de Investigación**

Según el MEN (2004) la enseñanza y el aprendizaje de la geometría se basa en procesos cognitivos de visualización y procesos de razonamiento discursivo en el lenguaje natural tipo verbal (asociados al pensamiento espacial y deductivo, respectivamente). Por ello, el MEN en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas hace énfasis, por una parte, en el menester de llevar la enseñanza de la geometría hacia el estudio de los invariantes de las figuras y el desarrollo de la percepción espacial, entre otros. Por otra parte, propone llevar al estudiante a realizar conjeturas y generalizaciones para que emerjan distintas formas de argumentación, que se irán sofisticando hasta producir deducciones basadas en teorías axiomáticas.

De igual forma, Camargo y Samper (2013) sostienen que, a nivel escolar, el aprendizaje de la geometría se debe basar en el desarrollo de procesos cognitivos que están relacionados con el sentido espacial y el razonamiento, en el contexto del espacio bi y tridimensional. Algunos de estos procesos cognitivos son: la visualización, la conjeturación de propiedades y relaciones de los objetos, y la justificación de estas conjeturas. Así, el desarrollo de estos procesos implica una

evolución en las formas de pensar, que van desde intuitivas o informales (usadas para acceder a información visual) hasta sofisticadas y formales en un contexto matemático.

Siguiendo a Acosta y Cardozo (2021), el SGD permite que el estudiante distinga, de manera experimental, entre una construcción exacta y una aproximada posibilitando la identificación de hechos geométricos (implicaciones lógicas) y la convicción de su naturaleza apodíctica. Lo que genera que interioricen estos hechos geométricos como un criterio de validez y los utilicen para verificar, anticipar y justificar las propiedades geométricas de las construcciones que realizan en el SGD; razonando así de manera deductiva implícitamente.

Por ende, Camargo y Samper (2013) sustentan que el razonamiento geométrico se ve favorecido si se propone una secuencia de problemas de construcción que estén relacionados entre sí, de modo que se permita el descubrimiento empírico de hechos geométricos y de conjeturas que puedan ser validadas usando argumentos deductivos. Asimismo, el uso del SGD para la resolución de problemas geométricos permite que los estudiantes reconozcan propiedades geométricas, ya sea directamente o con el arrastre, lo que les permite identificar invariantes y establecer relaciones de dependencia que promueven la construcción de enunciados condicionales.

Así pues, vemos que el uso del SGD introduce la experimentación dentro de la actividad de resolución de problemas de geometría (problemas de construcción y problemas de demostración) y para resolver este tipo de problemas, se debe encontrar propiedades geométricas que obedecen a conjeturas realizadas en dicha experimentación.

Por este motivo, la actividad experimental con construcciones aproximadas y/o exactas permite identificar hechos geométricos como aparición simultánea de propiedades en una construcción. Y, como se había mencionado en los antecedentes, los hechos geométricos ayudan

a producir construcciones exactas y razonar deductivamente de manera implícita, por lo que aportan a la actividad de resolución de problemas de geometría. Así, esa aparición simultánea de propiedades puede interpretarse como una ley causal, o implicación lógica. Y la convicción que se construye gracias a la actividad experimental, de que esas leyes son apodícticas es la base del razonamiento deductivo que permite predecir con certeza si una propiedad se cumple en una determinada construcción.

No obstante, estas ideas han sido poco investigadas en el contexto propiamente dicho de la Geometría Dinámica Experimental; pues la revisión efectuada de la literatura referente a estas problemáticas así lo confirma. Por tal motivo, queremos seguir aportando a esta praxeología ya que, como menciona Acosta (2005), la comunidad de profesores necesita de herramientas teóricas para sustentar el trabajo matemático con estos nuevos objetos ostensivos. Por lo que, hipotetizamos que la praxeología de la Geometría Dinámica Experimental ofrece elementos teóricos útiles para promover la construcción de hechos geométricos a partir de tareas en el entorno del SGD, pues esta práctica promueve el uso de la experimentación para encontrar argumentos deductivos que permitan justificar las conjeturas realizadas, conjeturas que obedecen a un enunciado de carácter general en términos matemáticos fundamentadas en la experimentación, cuyo valor de verdad no lo tiene definido el estudiante, pero tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad.

Por lo anterior, este trabajo de investigación busca responder a la siguiente pregunta: **¿Qué tareas en el entorno del SGD promueven la construcción de hechos geométricos y cómo estos son usados en tareas de verificación, anticipación y justificación que involucran construcciones geométricas?**

Con el propósito de responder a esta pregunta, se proponen los siguientes objetivos:

- Realizar un diseño de tareas en el contexto del software de geometría dinámica DGPad-Colombia con la intención de promover la construcción de hechos geométricos y su uso en problemas de construcción.
- Elaborar un análisis a priori del diseño de tareas propuesto, a la luz de la Geometría Dinámica Experimental.
- Elaborar un análisis a posteriori con base en el diseño de tareas implementado.

#### 4. Metodología de Investigación

Con el propósito de llevar a cabo los objetivos planteados y con ello dar respuesta a la pregunta de investigación, se utiliza la metodología de la Ingeniería didáctica expuesta en Artigue et al. (1995). A continuación, se presentan los elementos de esta metodología, especificando sus cuatro fases y cómo estas se aplican en este trabajo, para, finalmente, proponer el cronograma de trabajo con fechas tentativas para realizar esta investigación.

##### 4.1 Ingeniería Didáctica

Según Artigue et al. (1995), como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza por dos cosas: Por un esquema experimental en el aula, el cual se basa en la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza; y, por el registro de los estudios de caso, cuya validación está basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. Esta metodología delimita su proceso experimental en cuatro fases: Análisis preliminar, Análisis a priori, Experimentación y Análisis a posteriori.

**Análisis preliminar.** De acuerdo con Artigue et al. (1995) este análisis preliminar se debe realizar desde tres dimensiones: epistemológica, didáctica y cognitiva. En las que,

respectivamente, deben estar asociadas a las características del saber en juego, las características del sistema de funcionamiento de enseñanza y las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza. Además, como este análisis se realiza teniendo en cuenta los objetivos del trabajo, permite determinar las variables que se pondrán en juego, así como sus posibilidades y sus restricciones.

Por ende, en la dimensión epistemológica se realiza un análisis de la epistemología de los conceptos sobre los cuales se elaborará el diseño de tareas. En la dimensión didáctica se analizará las tareas que se van a proponer, las relaciones que existen entre ellas y el rol que desempeñará el profesor en las diferentes situaciones que se puedan presentar en la clase. Y, en la dimensión cognitiva el análisis estará enfocado en los conocimientos que tienen los estudiantes, las posibles dificultades que puedan presentar y las posibles acciones que puedan realizar ante las tareas propuestas.

**Análisis a priori.** En esta segunda fase el investigador interviene sobre algunas variables en juego identificadas en el análisis preliminar y se organiza una secuencia didáctica que incluye tareas en el contexto de la Geometría Dinámica Experimental. Por lo tanto, el objetivo de esta etapa, según Artigue et al. (1995) es “determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis (p. 45).” En donde estas hipótesis se validan en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori, llevado a cabo en la cuarta fase.

Además, este análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva, centradas en las características de las tareas que se han querido diseñar para llevar a los alumnos. Por ende, en esta fase “se analiza qué podría ser lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las

que él dispone” (Artigue et al., 1995, p. 45). Por lo tanto, se realizarán hipótesis de lo que podría ocurrir a la luz de la Geometría Dinámica Experimental: posibles conjeturas que se formulen a partir de la experimentación con el software, la selección y uso de técnicas para solucionar las tareas, y cómo se pueden llevar a cabo los procesos de validación o invalidación de las conjeturas realizadas para solucionar la tarea.

**Experimentación.** En esta tercera fase se lleva a cabo la puesta en escena de las tareas diseñadas y la observación de las producciones de los alumnos durante el desarrollo de estas. Estos datos de la observación serán recolectados a partir de grabaciones de pantalla y de audios de los estudiantes.

Además, el SGD en el que se realizará esta experimentación debe cumplir con las siguientes características fundamentales dadas por el MEN (2004, pp. 19-22): a) El arrastre de figuras favorece la búsqueda de invariantes durante la deformación; b) El uso del lugar geométrico y la traza permite visualizar y descubrir hechos geométricos; y c) La animación de figuras permite presenciar el proceso constructivo de un hecho geométrico. Por ello, se ha escogido el software DGPad-Colombia para realizar todo este proceso de experimentación.

**Análisis a posteriori.** En esta última fase se realiza la confrontación entre el conjunto de datos obtenidos en toda la experimentación (observaciones realizadas y producciones de los estudiantes) y el análisis a priori. Así, según Artigue et al. (1995), la validación o refutación de las hipótesis de investigación se fundamenta en esta confrontación de los dos análisis (a priori y a posteriori), determinando así los resultados de la investigación.

#### 4.2 Población de Estudio

La experimentación se llevará a cabo con dos estudiantes que están en la etapa final del curso de Geometría Euclidiana del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Durante la experimentación los estudiantes trabajarán en equipo e intentarán resolver las tareas interactuando con el software DGPad-Colombia.

### 5. Análisis Preliminar

A continuación, de acuerdo con la metodología usada, se presenta un análisis preliminar desde las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica de los conceptos de tangencia, proporcionalidad y semejanza de triángulos; que son los conceptos que se pondrán en juego en las situaciones planteadas del diseño de tareas.

#### 5.1 Análisis Epistemológico

**Tangencia.** Los matemáticos griegos de la antigüedad desarrollaron un gran interés por los problemas que consistían en determinar la tangente a una curva en un punto de esta. En esta época, los aportes de Euclides y Apolonio llevan a concebir la recta tangente como una recta que toca a la curva sin cortarla, concepto que fue inspirado en las observaciones sobre el círculo que realizaron los matemáticos griegos (Alarcón y Suescún, 2005). Sin embargo, los aportes de Arquímedes marcarían una radical diferencia sobre este concepto de tangencia, ya que él pensaba en la recta tangente como la dirección instantánea del movimiento; vertiente que desembocaría posteriormente en el cálculo, por lo que no ahondaremos sobre estas ideas.

Hacia finales del siglo IV a.C., Euclides de Alejandría (325 – 265 a.C.) publicó su libro los *Elementos de Geometría*, en el que definiría de la siguiente manera el concepto de recta tangente a un círculo.

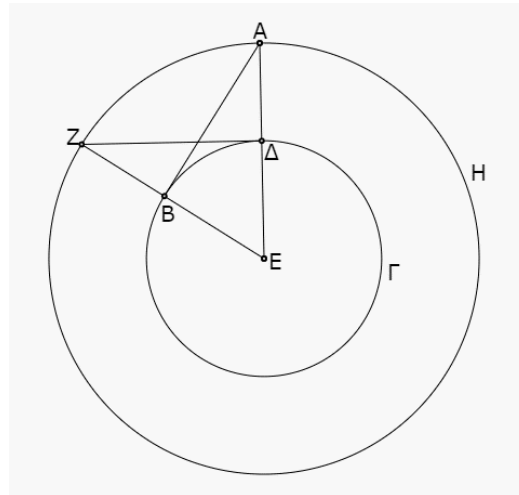
“Definición III – 2: Se dice que una recta es tangente al círculo cuando lo toca y prolongada no lo corta.” (Vera, 1970, p. 750)

Posteriormente en su libro, Euclides da la siguiente proposición haciendo referencia a la relación entre la recta tangente a un círculo y su diámetro.

Proposición III – 16: La recta perpendicular en el extremo de un diámetro cae fuera del círculo; entre esta recta y la periferia no se interpondrá ninguna otra y el ángulo del semicírculo es mayor que cualquier ángulo rectilíneo agudo y lo restante menor (Vera, 1970, p. 760).

Ya en la proposición 17, Euclides explica el método de construcción de la tangente dados un punto y un círculo. El proceso de construcción que propone es el siguiente:

Sea el punto  $A$  y el círculo  $B\Gamma\Delta$ . Así pues, hay que trazar desde el punto  $A$  una línea recta tangente al círculo  $B\Gamma\Delta$ . Tómese, pues, el centro del círculo,  $E$ , y trácese  $AE$  y con el centro  $E$  y la distancia  $EA$  descríbese el círculo  $AZH$  y a partir del (punto)  $\Delta$  trácese  $\Delta Z$  formando ángulos rectos con  $EA$  y trácese  $EZ, AB$ . Digo que ha sido trazada  $AB$  desde el punto  $A$  tangente al círculo  $B\Gamma\Delta$ .

**Figura 1***Construcción de Euclides*

Y siguiendo con las tangentes, en la proposición 36 del tercer libro, Euclides hace referencia a lo que conocemos como el Teorema de la potencia de un punto respecto a un círculo.

Si se toma un punto fuera de un círculo y de él al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta al círculo y la otra lo toca, el rectángulo comprendido por la secante entera y la parte exterior formada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente (Heath, 1956, pp. 73 – 74).

Retrocedemos ahora hacia el siglo III a.C., en el que Apolonio de Perga (262 – 190 a.C.), bajo la misma línea de Euclides, propone el siguiente concepto de recta tangente: “recta que toca a una cónica en un único punto  $P$  tal que no es posible trazar otra recta pasando por  $P$  e incluida entre ambas (recta tangente y cónica), es decir, la línea recta de contacto más cercano” (Orts, 2019, p. 7).

Según Vera (1970), Apolonio en su obra titulada *Cónicas* (la cual consta de ocho libros, pero del octavo no se tiene registro) establece la siguiente proposición que da cuenta de la extensión del concepto de tangente a las cónicas.

“Proposición I – 17: La paralela por el vértice de una sección cónica a una recta trazada ordenadamente cae fuera de la sección” (Vera, 1970, p. 336).

De modo que, a lo largo de esta obra desarrolla y demuestra proposiciones referentes a las tangentes en secciones cónicas. Además, Apolonio desarrollaría otro trabajo titulado *Tratado de los contactos* el cual, pese a haber desaparecido, de la mano de Papo de Alejandría tenemos algunos registros. En este tratado se describe uno de los grandes problemas de la historia de la geometría que hoy conocemos como el Problema de Apolonio y versa de la siguiente manera:

“Dados tres elementos cualesquiera: puntos, rectas, círculos, describir un círculo que, pasando por cada uno de los puntos dados (en el caso de puntos dados), sea tangente a cada una de las líneas dadas.” (Rabu-Boyé, 2009, p. 25)

Dando lugar a diez casos posibles que, según Papo, Apolonio logró resolver. Luego, estos problemas fueron retomados por Vieta en su libro *El Apollonius Gallus* y los presenta en el siguiente orden, según nos cuenta Rabu-Boyé (2009, p. 36):

- **Problema uno:** describir un círculo que pase por tres puntos dados; es necesario que esos tres puntos no estén sobre una misma recta.
- **Problema dos:** dados dos puntos y una línea recta, describir por esos dos puntos un círculo al cual sea tangente la recta dada.
- **Problema tres:** dadas tres rectas, describir un círculo al cual cada una sea tangente. Es necesario que las rectas dadas no sean paralelas.

- **Problema cuatro:** dadas dos rectas y un punto, hacer pasar por el punto dado un círculo al que sean tangentes las dos rectas dadas.
- **Problema cinco:** dado un círculo y dos rectas, describir un círculo al que sean tangentes las dos rectas y el círculo.
- **Problema seis:** dado un punto, una recta y un círculo, hacer pasar por ese punto un círculo al que sean tangentes esa recta y ese círculo.
- **Problema siete:** dados dos círculos y una recta, describir un tercer círculo al que sean tangentes los dos círculos dados y la recta dada.
- **Problema ocho:** dados dos puntos y un círculo, hacer pasar por los dos puntos dados un círculo al que sea tangente el círculo dado.
- **Problema nueve:** dados dos círculos y un punto, hacer pasar por el punto dado un círculo al que sean tangentes los dos círculos dados.
- **Problema diez:** dados tres círculos describir un cuarto círculo al que sean tangentes los tres.

De estos diez problemas presentados, para nuestra investigación y diseño de tareas nos interesan el problema dos y el problema ocho. En ese sentido, en estos dos problemas nos basamos en el concepto de tangente desde la perspectiva euclídea para que la solución sea un círculo que pase por los puntos dados y toque en un punto a la recta y el círculo dado, correspondiente al segundo y octavo problema respectivamente. Es decir, los círculos solución de estos dos problemas no deben tocar en más de un punto a los objetos dados, condición que se podrá verificar con el arrastre y garantizar con teoremas de tangencia como la perpendicularidad entre el radio y la recta tangente.

**Proporcionalidad.** Hacia finales del siglo V a.C., en la escuela pitagórica el número correspondía al estudio de lo discreto y la magnitud al estudio de lo continuo. Así, la medición se describe como la comparación entre magnitudes mediante razones, en donde “una magnitud es parte de otra mayor cuando la mide” y “razón es una relación cualquiera entre dos magnitudes homogéneas respecto de las cantidades” (García y Serrano, 1999, pp. 13-14).

De manera que, las magnitudes que tienen la misma razón se llaman proporcionales. No obstante, con el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables esta noción se vio afectada y ahora bajo la mirada de la matemática actual puede expresarse de la siguiente manera: “un par de magnitudes relacionadas que tengan la misma razón entre las cantidades de la primera magnitud y sus correspondientes de la segunda magnitud se dicen proporcionales” (García y Serrano, 1999, pp. 15).

Por lo tanto, esta noción de proporcionalidad puede generar un esfuerzo cognitivo a los estudiantes, ya que como mencionan Quintero, Molavoque y Guacaneme (2012), en lo que a la proporcionalidad se refiere, se acostumbra a pensar numéricamente y no geoméricamente, cuando en realidad la mirada euclidiana implica el empleo de un pensamiento cuantitativo no numérico referido a las cantidades de magnitud. De manera que, en las tareas propuestas los estudiantes deben prescindir de este pensamiento numérico para usar reglas teóricas que refieren a la proporcionalidad, como el teorema de Tales y la semejanza de triángulos, para realizar razonamientos deductivos que les permitan hallar y justificar propiedades geométricas.

**Semejanza de triángulos.** Desde los orígenes de la geometría la noción de semejanza ha estado presente. Este concepto involucra otros como la razón y la proporcionalidad, en donde los aportes de Tales de Mileto, de los Pitagóricos y de Euclides juegan un papel importante: el desarrollo de la teoría de las proporciones y teoremas referentes a la proporcionalidad y semejanza.

Así, el concepto de semejanza según Tudela y Saavedra (2016), de manera informal, hace referencia a que, si dos figuras tienen exactamente la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, son semejantes. Lo que lleva a destacar que para la semejanza entre dos figuras los ángulos correspondientes deben ser congruentes y sus lados correspondientes deben ser proporcionales.

Para el caso de los triángulos, se tienen tres teoremas que garantizan cuándo dos triángulos son semejantes:

- Criterio AA: si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes iguales, entonces sus lados correspondientes son proporcionales y los triángulos son semejantes.
- Criterio LAL: si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual, entonces los triángulos son semejantes.
- Criterio LLL: Si dos triángulos tienen sus lados correspondientes proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

Este concepto de semejanza de triángulos involucra también conceptos de razón y proporción entre lados y congruencia entre ángulos, por lo que teoremas relacionados a ángulos comprendidos entre rectas paralelas y transversales son necesarios para establecer e identificar relaciones geométricas que lleven a la solución de las tareas en las que se requiera mostrar la semejanza de un par de triángulos.

## **5.2 Análisis Cognitivo**

Franchi y Hernández (2004) describen una tipología de errores para el área de geometría euclidiana. De entre esos errores, resaltamos los siguientes:

**Errores propios del lenguaje geométrico.** Este error está asociado con el uso e interpretación incorrecta del lenguaje geométrico, ocasionado por las dificultades de los estudiantes en el uso de símbolos y notaciones geométricas. Según Franchi y Hernández (2004, p. 198) estos errores de los estudiantes se hacen evidentes cuando:

- Utilizan inadecuadamente las notaciones de las figuras y elementos geométricos.
- Demuestran o intentan demostrar una proposición geométrica que no se le pide.
- Dan una respuesta distinta o adicional a la que se le pide en un problema geométrico.
- Cuando plantean una proposición en discordancia con el enunciado de un problema geométrico dado.
- Cuando utilizan inadecuadamente la terminología geométrica o describen defectuosamente una construcción.

**Errores gráficos.** Este tipo de errores están relacionados con el dibujo incorrecto de figuras geométricas a partir de un enunciado dado, ocasionado por una carente habilidad para imaginar e interpretar figuras geométricas. Según Franchi y Hernández (2004, p. 198) un estudiante incurre en este tipo de errores cuando:

- Dibuja una figura geométrica que no corresponde con el enunciado de un problema geométrico propuesto.
- No dibuja una figura geométrica a propósito de un problema geométrico propuesto.
- Cuando toma mal un dato de una figura geométrica o lo ignora en la solución o demostración de un problema.

**Errores de razonamiento.** Estos errores son causados por un mal uso de las implicaciones y equivalencias lógicas, que desencadena en un mal manejo de las proposiciones, teoremas y definiciones. Según Franchi y Hernández (2004, p. 199) estos errores los estudiantes los manifiestan cuando:

- Añade hipótesis que no están dadas en la solución o en la demostración de un problema geométrico.
- Intenta demostrar o resolver un problema geométrico sin utilizar algún dato dado.
- Usa proposiciones o teoremas sin que se tengan las hipótesis requeridas para su aplicación o lo usa en un contexto que no le corresponde.
- Interpreta y usa inadecuadamente una definición.
- Usa el recíproco de una implicación como verdadera y usa una implicación que no es verdadera.

Así, según lo expuesto por Franchi y Hernández, los estudiantes pueden tener dificultades, y por lo tanto errores, de lenguaje geométrico y razonamiento al momento de dar respuesta a las preguntas planteadas tanto en el diseño de tareas como las hechas por el profesor durante las sesiones. Además, pueden presentar errores gráficos dado que en las tareas de construcción se les pedirá realizar un dibujo que represente el problema resuelto para explorar y reconocer propiedades geométricas que aporten a la solución del problema; lo que resulta en la técnica del análisis descrita en la Geometría Dinámica Experimental.

Más específicamente y referente al concepto de tangente, Ortega y Pecharromán (2015) expresan que la falta de conocimiento e interpretación del concepto de recta tangente se puede deber a un escaso conocimiento previo de los elementos básicos que permiten justamente el

desarrollo del concepto, como la perpendicularidad entre la recta tangente y el radio de la circunferencia o la unicidad del punto de tangencia y de la propia tangente, que son consecuencias de la unicidad de la perpendicular a una recta o segmento por un punto. De modo que estas circunstancias desencadenarían en la imposibilidad de aplicar el concepto de recta tangente en problemas que la involucren.

Así, el estudio realizado por Ortega y Pechorromán concierne a una falta de comprensión referente al concepto de recta tangente; no obstante, se espera que los estudiantes tengan un dominio básico de la noción de tangencia para el caso particular de las rectas y los círculos. Además, que conozcan algunos teoremas relativos a este concepto como la relación de perpendicularidad entre la tangente y el radio, la unicidad de la tangente, la medida de ángulos formados por tangentes y cuerdas en un círculo, entre otros. Inclusive que tengan presente resultados geométricos que son fundamentales para demostrar teoremas relativos a la tangencia, como el teorema del ángulo inscrito.

### **5.3 Análisis Didáctico**

Los hechos geométricos básicos del diseño de tareas, que se detallan en el análisis a priori, están basados en los teoremas de la potencia de un punto respecto a un círculo, en la tangencia de los circuncírculos de un par de triángulos en posición de similitud y en la tangencia de un par de círculos que pasan por un mismo punto y cuyos centros están alineados con él.

Queremos que los estudiantes logren construir estos hechos geométricos y los utilicen en tareas de verificación, anticipación y justificación que involucren construcciones geométricas. Para ello, tenemos en cuenta que de acuerdo con Acosta y Cardozo (2021), un hecho geométrico

es una afirmación verdadera que relaciona un conjunto de propiedades geométricas y otras que resultan de ellas.

En ese sentido, para promover la construcción de estos hechos geométricos se diseñan tareas de exploración, análisis y reconocimiento bajo las ideas de Laborde (2001) quien distingue cuatro tipos de tareas que pueden proponer los profesores haciendo uso de los SGD. De entre estas cuatro clases de tareas, rescatamos tres de ellas para esta parte del diseño: (i) Tareas en las que el entorno facilita las acciones materiales, pero no cambia la tarea para los estudiantes; por ejemplo, producir figuras y medir sus elementos. (ii) Tareas en las que el SGD favorece la exploración y el análisis por parte de los estudiantes; por ejemplo, identificar relaciones dentro de una figura mediante el arrastre. (iii) Tareas que no se pueden plantear sin la mediación del entorno; por ejemplo, reconstruir una figura dinámica a través de la experimentación para identificar sus propiedades.

Así, las tareas de exploración y análisis consisten en que, a partir de una situación en el SGD o un enunciado con objetos geométricos dados, el estudiante, haciendo uso del arrastre y las herramientas brindadas por el SGD, evidencie y constata las propiedades geométricas que cumplen tales objetos y emita conjeturas sobre otras propiedades que resultan de las iniciales. Y las tareas de reconocimiento consisten en responder a preguntas que se refieren a la relación causal entre las propiedades iniciales y las obtenidas, con el fin de que el estudiante escriba o emita un enunciado en donde constata esta relación de causalidad; lo que los llevaría a constatar el hecho geométrico.

Después de que los estudiantes constaten o reconozcan el hecho geométrico, se les proponen tareas de verificación, anticipación, justificación y construcción; esto con el fin de promover el uso de los hechos geométricos estudiados o los ya interiorizados por los estudiantes.

Para diseñar las tareas de verificación, anticipación y justificación nos basamos en las ideas de Acosta y Cardozo (2021) y para el diseño de las tareas de construcción nos basamos en las ideas de Acosta (2008). En donde las tareas de verificación consisten en entregar al estudiante la imagen de una construcción y se le pide que verifique si se cumple una propiedad geométrica asociada al hecho geométrico estudiado; de modo que se impide una verificación experimental directa de dicha propiedad y, en consecuencia, el estudiante tendrá que utilizar el hecho geométrico para inferir una estrategia indirecta de verificación.

Las tareas de anticipación consisten en darle al estudiante la imagen de una figura geométrica con determinadas propiedades y se le pide que prediga qué otras propiedades se cumplirán. De igual manera, las tareas de anticipación abarcan situaciones en las que se le pide al estudiante que prediga qué propiedades se cumplirán a partir de determinadas propiedades geométricas que se presentan en un enunciado o en un protocolo de construcción.

Las tareas de justificación consisten en proponerle a los estudiantes que demuestren algunas de las conjeturas realizadas a lo largo de la secuencia o que respondan a preguntas en las que deban usar los hechos geométricos estudiados. De modo que, deberán utilizar los hechos geométricos estudiados u otros hechos geométricos ya fundamentados y las herramientas del software para elaborar un discurso o escrito lógico que verifique tales conjeturas o dé respuesta a las preguntas.

Y las tareas de construcción, según lo expuesto por Acosta (2008), son enunciados con datos sobre los objetos geométricos dados y metas de los objetos que van a ser producidos por el proceso de construcción; de modo que, para realizar la construcción, el estudiante debe hacer uso de los hechos geométricos estudiados u otros ya constatados. Por lo tanto, las tareas de

construcción serán las últimas que se proponen a los estudiantes, ya que para realizar las construcciones necesitarán hacer uso de los hechos geométricos estudiados.

Estas dos tareas de construcción son el segundo y octavo problema de Apolonio, expresados de la siguiente manera, respectivamente:

- Dada una recta  $l$  y dos puntos  $A$  y  $B$  al mismo lado de  $l$ , construir un círculo  $c$  que sea tangente a la recta  $l$  y pase por los puntos  $A$  y  $B$ .
- Dado un círculo  $c$  y dos puntos  $P$  y  $Q$ , construir un círculo que sea tangente a  $c$  y pase por los puntos dados  $P$  y  $Q$ .

A modo de aclaración referente a las construcciones geométricas que se pueden realizar en el software, distinguimos dos: las construcciones exactas y las blandas. En donde una construcción exacta, según Acosta y Cardozo (2021), es aquella que cumple con determinadas propiedades que se mantienen cuando se arrastran los objetos que la componen; y una construcción blanda es aquella que al arrastrar los objetos que la componen, no mantiene sus propiedades geométricas.

## 6. Análisis a priori

De acuerdo con el análisis preliminar, la intención del diseño de tareas es que a través de los experimentos propuestos los estudiantes construyan y usen los siguientes hechos geométricos: (i) si desde un punto  $P$  exterior a un círculo se traza una secante  $PQ$ , que corta al círculo nuevamente en  $Q'$ , entonces el producto de las magnitudes  $PQ$  y  $PQ'$  es constante (HG1). (ii) si desde un punto  $P$  exterior a un círculo se traza una tangente  $PT$  que toca al círculo en  $T$  y una secante  $PQ$  que corta al círculo nuevamente en  $Q'$ , entonces el cuadrado de la magnitud  $PT$  es igual al producto de  $PQ$  y  $PQ'$  (HG2). (iii) si dos círculos pasan por un punto alineado con sus

centros, entonces los círculos son tangentes en dicho punto (HG3). (iv) si dos triángulos son semejantes, comparten un vértice, los lados opuestos a este son paralelos y los lados correspondientes que comprenden el vértice común están alineados (triángulos en posición de similitud), entonces sus circuncírculos son tangentes en el vértice común (HG4).

Así, como el foco de atención está en la construcción y el uso de los hechos geométricos, para su proceso de construcción, que va desde emitir conjeturas hasta verificarlas, nos basamos en lo expuesto por la Geometría Dinámica Experimental: las conjeturas realizadas sobre las propiedades geométricas de los objetos se pondrán a prueba mediante la medición, la construcción de objetos auxiliares y el arrastre. Es decir, la verificación de los hechos geométricos se realizará en primer lugar de manera experimental (Acosta y Cardozo, 2021).

No obstante, la Geometría Dinámica Experimental permite mediante la experimentación con el software el desarrollo de estrategias para formalizar y argumentar la veracidad de los hechos geométricos estudiados. Por lo que, no nos limitaremos a la verificación experimental como única fuente de justificación, sino que, dependiendo de la complejidad de la demostración de estos, se optará por una verificación formal.

En ese sentido, hemos realizado un diseño de tareas que hemos dividido en dos actividades. La primera actividad pretender contribuir a la construcción y el uso de los hechos geométricos (i) y (ii), y la segunda actividad pretende contribuir a la construcción de los hechos geométricos (iii) y (iv) y el uso de los hechos geométricos (i), (ii), (iii) y (iv), pues las actividades no están desligadas una de la otra, sino que están pensadas con la intención de que se complementen.

En cada una de estas dos actividades se proponen tareas de exploración, análisis y reconocimiento, que pretenden llevar a la construcción de los hechos geométricos y, posteriormente, a su uso mediante tareas de verificación, anticipación, justificación y construcción.

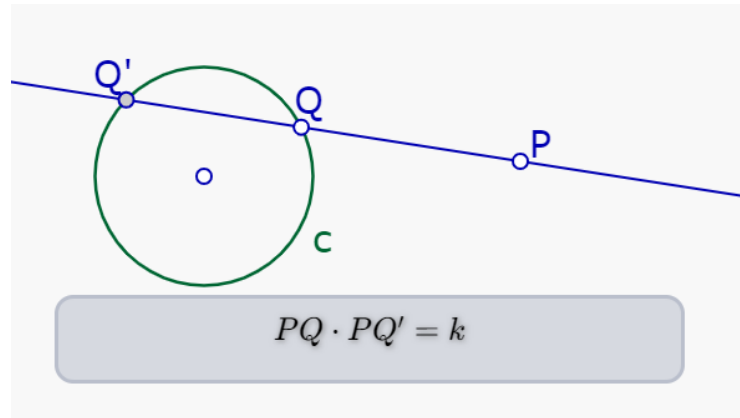
Las tareas, y el diseño en general, están previstos para ser trabajados por parejas con el fin de promover el diálogo, la formulación verbal de estrategias y de los hechos geométricos. De modo que es importante la presencia del profesor para guiar las tareas, para garantizar que los estudiantes tomen un rol activo, discutan ideas y realicen conjeturas, para que estas evolucionen hacia los hechos geométricos que se quiere que los estudiantes construyan.

A continuación, se realiza un análisis detallado de las dos actividades del diseño, describiendo las posibles acciones que puedan realizar los estudiantes, las posibles conjeturas que se puedan formular a partir de la experimentación con el software, la selección y uso de técnicas para realizar las tareas, y cómo se pueden llevar a cabo los procesos de validación o invalidación de las conjeturas realizadas para resolver las tareas.

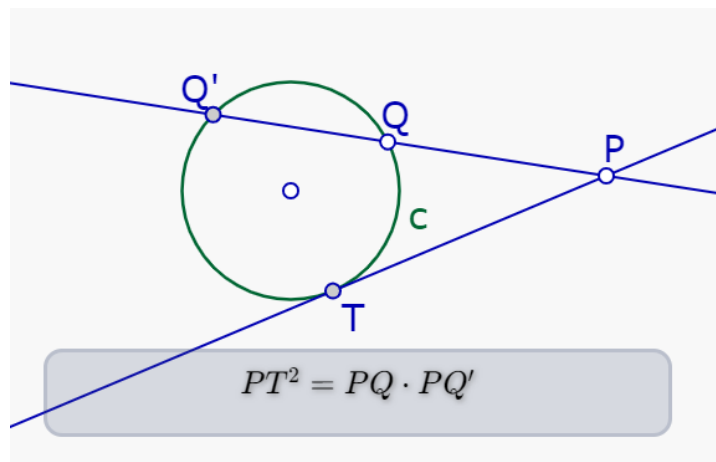
### **6.1 Primera Actividad**

Esta primera parte tiene la intención de contribuir a la construcción y el uso de los siguientes hechos geométricos: (HG1) si desde un punto  $P$  exterior a un círculo se traza una secante  $PQ$ , que corta al círculo nuevamente en  $Q'$ , entonces el producto de las magnitudes  $PQ$  y  $PQ'$  es constante. (HG2) si desde un punto  $P$  exterior a un círculo se traza una tangente  $PT$  que toca al círculo en  $T$  y una secante  $PQ$  que corta al círculo nuevamente en  $Q'$ , entonces el cuadrado de la magnitud  $PT$  es igual al producto de  $PQ$  y  $PQ'$ .

**Figura 2**  
*Hecho geométrico 1*



**Figura 3**  
*Hecho geométrico 2*



### 6.1.1 Constatación del HG1 y HG2

#### Análisis de las tareas.

A continuación, describimos detalladamente las tareas propuestas con la intención de llevar a la constatación del HG1 y HG2.

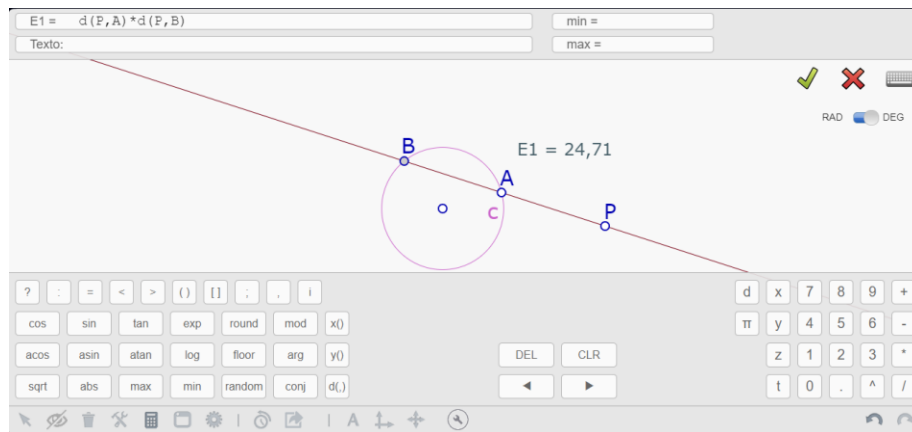
#### Tareas asociadas a la constatación del HG1:

- ❖ **Tarea de exploración y análisis 1.1:** Dados un círculo  $c$  y un punto  $P$  exterior a  $c$ , construir un punto  $A$  sobre  $c$ , la recta  $PA$  y  $B$  el punto de intersección de  $PA$  y  $c$ . ¿Dónde debe ubicarse  $A$  sobre  $c$  para que el producto  $PA \cdot PB$  sea el mayor posible?
- ❖ **Tarea de reconocimiento 1.1:** ¿Qué ocurre con el producto  $PA \cdot PB$  cuando se arrastra  $A$ ? ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir los puntos  $A$  y  $B$  con respecto a  $c$  para que se dé ese resultado? Escriba un enunciado que relacione esas condiciones con el resultado observado.

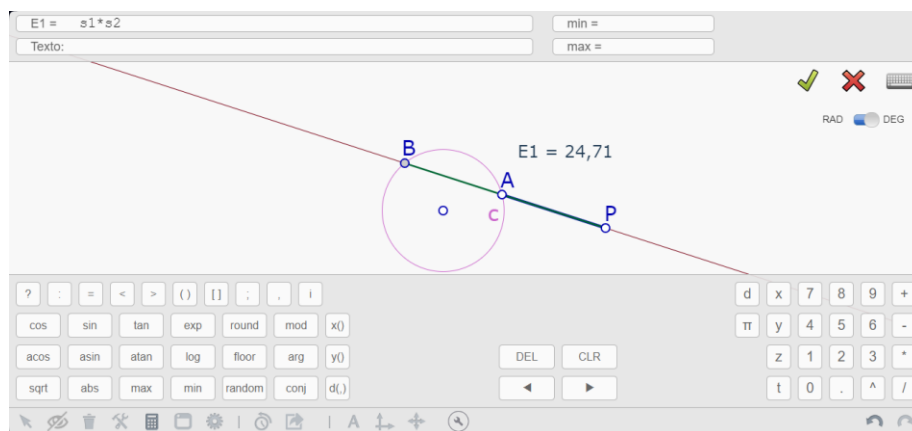
Referente a la Tarea de exploración y análisis 1.1, se espera que los estudiantes después de haber construido los objetos iniciales en el software utilicen la herramienta *Calculadora* para realizar el producto  $PA \cdot PB$ . Esto lo pueden hacer de dos maneras: utilizando el valor de las distancias entre  $P$  a los puntos  $A$  y  $B$ , de modo que podrían escribir en la calculadora  $d(P, A) \cdot d(P, B)$ ; o bien utilizando los segmentos  $PA$  y  $PB$ , multiplicando sus magnitudes.

**Figura 4**

*Producto realizado tomando la distancia entre los puntos*

**Figura 5**

*Producto realizado tomando las magnitudes de los segmentos*



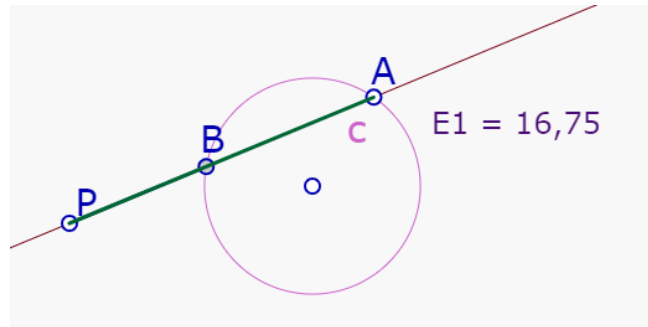
Una vez obtenido el resultado del producto  $PA \cdot PB$  en la pantalla, se espera que los estudiantes arrastren el punto  $A$  y evidencien que el resultado de  $PA \cdot PB$  no varía, se mantiene siempre constante. De modo que la respuesta que pueden dar ante la pregunta propuesta, gracias al dinamismo de la calculadora del software, es que no importa dónde ubique el punto  $A$  sobre  $c$ , ya que el producto es siempre el mismo.

Ahora bien, los estudiantes pueden tener curiosidad sobre el porqué de este resultado, de modo que podrían arrastrar el punto  $P$  sobre la pantalla, produciendo así que el producto  $PA \cdot PB$

cambie. Ante esta situación, prevemos que los estudiantes concluirán que el resultado del producto  $PA \cdot PB$  depende de dónde se encuentre el punto  $P$ , de modo que, si se deja  $P$  fijo, el producto  $PA \cdot PB$  no va a cambiar si se arrastra el punto  $A$  sobre  $c$ .

### Figura 6

*Cambio de posición del punto  $P$*



Al momento de pasar a la Tarea de reconocimiento 1.1, ante la primera pregunta, luego de haber realizado la exploración anterior arrastrando el punto  $A$ , prevemos que los estudiantes responderán lo hipotetizado anteriormente. En lo que respecta a la segunda pregunta, pueden realizar una breve exploración en el software arrastrando el punto  $A$  sobre  $c$ , permitiéndoles afirmar que las condiciones que deben cumplir los puntos  $A$  y  $B$  es que deben ser los puntos de corte de la recta y deben ser colineales, más específicamente, deben estar sobre la misma recta que pasa por  $P$ . De modo que, al momento de escribir el enunciado, relacionen las propiedades de que  $P$  es un punto exterior,  $A$  y  $B$  son colineales y son los cortes con  $c$  de la recta que pasa por  $P$ , con el hecho de que el producto  $PA \cdot PB$  es constante. De este modo, la verificación del HG1 se realiza de manera experimental.

Una vez finalizadas estas dos tareas, se le dará paso a las siguientes, que corresponden a consecuencias que se pueden deducir del HG1 y llevan al HG2.

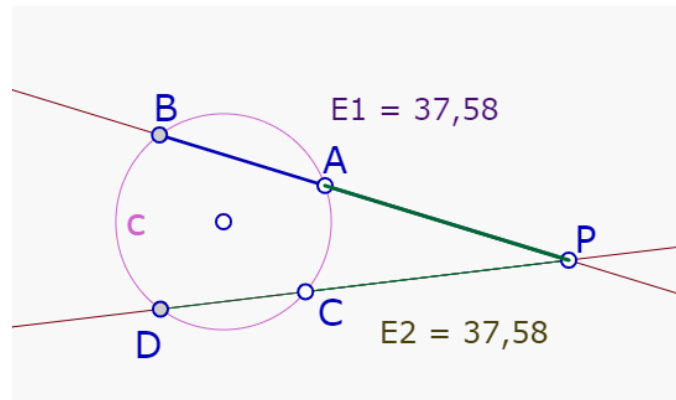
Las tareas están bajo las mismas condiciones de la Tarea de exploración y análisis 1.1: Un círculo  $c$ , un punto  $P$  exterior a  $c$  y una recta  $PA$  que corta a  $c$  nuevamente en  $B$ .

- ❖ **Tarea de exploración y análisis 1.2:** Trace la recta  $PC$  que corta al círculo en  $C$  y en  $D$ .  
¿Qué podría concluir del producto de las magnitudes  $PC$  y  $DC$ ? ¿Qué podría concluir de los productos  $PC \cdot PD$  y  $PA \cdot PB$ ?
- ❖ **Tarea de reconocimiento 1.2:** ¿Cuáles serían ahora las condiciones y la conclusión del enunciado escrito anteriormente, teniendo en cuenta este nuevo resultado?
- ❖ **Tarea de justificación 1.2:** ¿Podrían demostrar que  $PC \cdot PD = PA \cdot PB$ ?

Referente a la Tarea de exploración y análisis 1.2, en la primera pregunta se espera que los estudiantes, sin realizar la construcción de la recta  $PC$ , respondan que el producto  $PC \cdot PD$  no varía. Ante esta situación el profesor les podría preguntar o que argumenten por qué realizan tal afirmación, de modo que podrían responder que se están cumpliendo las mismas condiciones de la situación anterior y, por lo tanto, se obtendría el mismo resultado: la invarianza del producto  $PC \cdot PD$ , movilizandando así el HG1; luego pueden proceder con la construcción de los objetos y verificar lo que argumentaron mediante el arrastre de estos. De igual forma, se puede dar el caso en el que los estudiantes realicen primero la construcción de los objetos, lo cual no impediría que tuvieran el mismo razonamiento descrito anteriormente. Ahora, referente a la segunda pregunta, los estudiantes se podrían basar en el razonamiento realizado en la anterior pregunta y concluir que  $PC \cdot PD = PA \cdot PB$ . Esto lo pueden verificar usando la calculadora del software y arrastrando los puntos  $A$  y  $C$ , como se hizo en la Tarea de exploración y análisis 1.1. Así, se verificaría de manera experimental este resultado derivado del HG1.

**Figura 7**

*Verificación experimental de la igualdad  $PC \cdot PD = PA \cdot PB$*



Pasando a la Tarea de reconocimiento 1.2, los estudiantes habrían de reconocer que ahora los objetos iniciales son el círculo  $c$ , el punto exterior  $P$ , las secantes  $PA$  y  $PC$  que cortan a  $c$  nuevamente en  $B$  y  $D$  respectivamente. Y que el resultado obtenido a partir de estas propiedades es que se cumple que  $PC \cdot PD = PA \cdot PB$ , movilizand así el HG1 para deducir una propiedad.

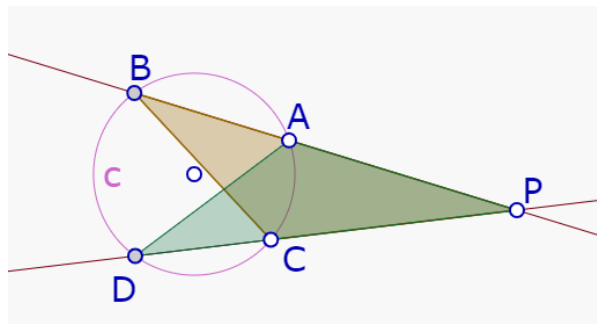
En lo que respecta a la Tarea de justificación 1.2, esta está en forma de pregunta ya que para su demostración los estudiantes necesitan tener conocimientos previos como los criterios de semejanza de triángulos, el teorema del ángulo inscrito y otros teoremas como el teorema del ángulo exterior. En ese sentido, aprovechamos el potencial del SGD para que, mediante la exploración, los estudiantes puedan construir encadenamientos lógicos que les permita realizar la demostración, característica de la Geometría Dinámica Experimental (Acosta, 2005).

Así, para esta pregunta puede haber dos respuestas: sí o no. Si los estudiantes responden que “no”, el profesor les puede invitar a que realicen exploraciones en el software como construir objetos geométricos para empezar a hallar propiedades, más específicamente, que construyan segmentos entre los puntos, de modo que se formen triángulos que involucren a los puntos  $P, C, D, A$  y  $B$  y con la herramienta *Polígono* resaltar dichos triángulos. De manera que, los

estudiantes podrían reconocer que hay que garantizar la semejanza de un par de triángulos que involucren las magnitudes  $PA, PB, PC$  y  $PD$  para posteriormente establecer una proporción entre sus lados y concluir que  $PC \cdot PD = PA \cdot PB$ ; lo cual obedece al uso de los hechos geométricos de la semejanza de triángulos. Por tal motivo, los estudiantes pueden optar por dos posibles pares de triángulos: los triángulos  $PAD$  y  $PCB$  o los triángulos  $PAC$  y  $PDB$ .

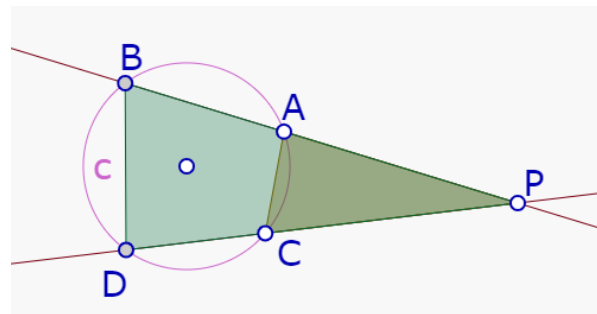
**Figura 8**

*Posible par de triángulos:  $PAD$  y  $PCB$*



**Figura 9**

*Posible par de triángulos:  $PAC$  y  $PDB$*



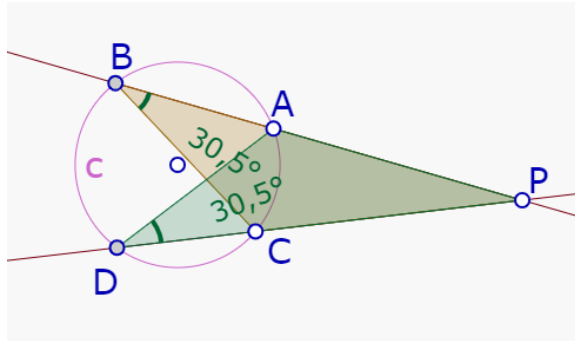
Para el caso en el que los estudiantes respondan que “sí”, se espera que el proceso de exploración en el software surja de manera natural y por iniciativa propia, de modo que la exploración los lleve a pensar en la semejanza de triángulos para garantizar una proporción que les permita concluir que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .

Así, para demostrar la semejanza del primer par de triángulos,  $PAD$  y  $PCB$ , pueden explorar en el software midiendo los pares de los ángulos correspondientes. Entre estos pares de ángulos, se encuentran los ángulos  $PBC$  y  $PDA$ , que al hacerse uso del arrastre los estudiantes pueden dar cuenta que son ángulos inscritos comprendidos por el mismo arco, de modo que son congruentes y usando el criterio de semejanza AA, se concluye que los triángulos  $PAD$  y  $PCB$  son semejantes, ya que comparten también un mismo ángulo. Del mismo modo, luego de haber garantizado esta semejanza y realizando la proporción  $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ , se obtiene la igualdad a la que se quería llegar:  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ . Movilizando así hechos geométricos como el teorema del ángulo inscrito y los criterios de semejanza de triángulos que llevan a la proporción dicha anteriormente para demostrar esta propiedad derivada del HG1.

Vemos que el proceso de exploración para que emerjan relaciones geométricas entre los objetos para realizar la demostración es un proceso que puede tornarse tedioso y denso si los estudiantes no enuncian o traen a colación hechos geométricos ya constatados. De modo que, si este es el caso, podríamos prescindir de realizar una demostración formal y validar dicha propiedad de manera experimental.

**Figura 10**

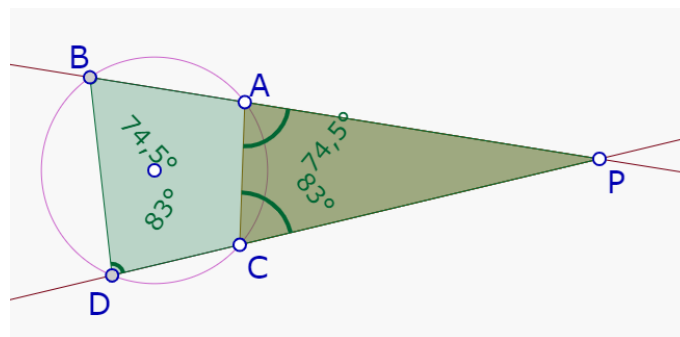
*Exploración para verificar la congruencia de los ángulos  $PBC$  y  $PDA$*



Para demostrar la semejanza del segundo par de triángulos,  $PAC$  y  $PDB$ , los estudiantes pueden realizar las medidas de los ángulos para saber cuáles son los ángulos congruentes que se deben garantizar. Esto los llevaría a ver que deben garantizar la congruencia de los ángulos  $PAC$  y  $PDB$ , o la congruencia de los ángulos  $PCA$  y  $PBD$ .

**Figura 11**

*Medición de los ángulos  $PAC$ ,  $PDB$ ,  $PCA$  y  $PBD$*

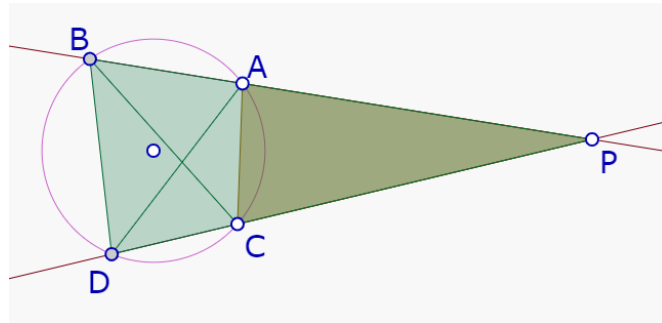


Una vez que los estudiantes se decidan por un par de ángulos, en este caso suponemos que van a elegir los ángulos  $PAC$  y  $PDB$  (para el otro par se sigue el mismo razonamiento), pueden realizar exploraciones con el software para ver cómo garantizar la congruencia de los ángulos elegidos. Estas exploraciones los pueden llevar a trazar cuerdas en el círculo, pensando en que pueden garantizar la congruencia o semejanza de otros triángulos que se forman para dar el paso

a los ángulos  $PAC$  y  $PDB$ ; construyendo las cuerdas  $BC$  y  $AD$  o el profesor les puede sugerir que las construyan.

**Figura 12**

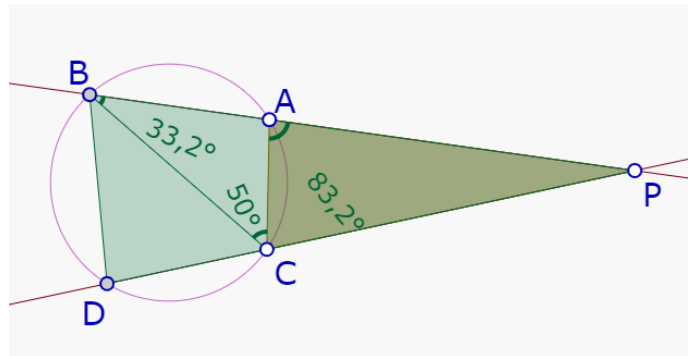
*Construcción de las cuerdas  $BC$  y  $AD$*



En este punto, los estudiantes pueden identificar varios triángulos que se pueden formar con las cuerdas trazadas, lo que puede que los lleve a pensar en que para demostrar la congruencia de los ángulos  $PAC$  y  $PDB$ , deben usar ángulos exteriores a los triángulos dentro del círculo. Así, se espera que los estudiantes usen al ángulo  $PAC$  como ángulo exterior del triángulo  $BAC$ , de modo que  $\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$ . Luego, pueden verificar que bastaría ver que  $\angle PDB = \angle ABC + \angle ACB$ , igualdad que pueden verificar midiendo los ángulos.

**Figura 13**

*Verificación en el SGD de la congruencia de ángulos*

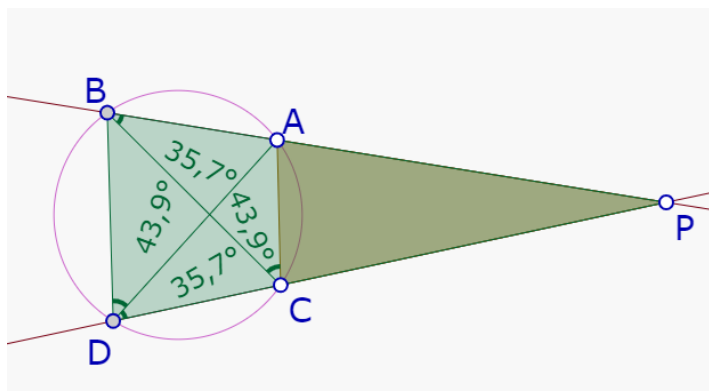


Pero gracias a la imagen que reciben del software pueden hipotetizar que como el ángulo  $PAC$  está siendo dividido en dos por la cuerda  $AD$ , estos dos nuevos ángulos ( $ADB$  y  $ADC$ ) sean congruentes a los ángulos  $ABC$  y  $ACB$ . Hipótesis que puede ser verificada midiendo los ángulos.

No obstante, en el caso en el que los estudiantes no tengan la intención de realizar las mediciones para ver cuáles ángulos son congruentes a otros, el profesor les puede sugerir que midan los ángulos de la figura para hallar relaciones entre ellos. De modo que, lleve a los estudiantes a establecer las relaciones descritas anteriormente entre los ángulos.

**Figura 14**

*Verificación experimental de la congruencia de los ángulos*



Una vez verificado, usando el software, que  $\angle ADB = \angle ACB$  y que  $\angle ADC = \angle ABC$ , bastaría demostrar que  $\angle ADC + \angle ADB = \angle ABC + \angle ACB$ . De modo que es natural que surja la pregunta de cómo demostrarlo. Ante ello, el profesor puede decirles que arrastren los puntos que están en el círculo o ellos por iniciativa propia pueden seguir esta exploración; esto con el propósito de identificar que los ángulos involucrados son ángulos inscritos.

Así, esta exploración los puede llevar a identificar que los ángulos  $ADB$  y  $ACB$  son iguales, ya que son ángulos inscritos comprendidos por la misma cuerda, al igual que los ángulos  $ADC$  y  $ABC$ ; movilizándolo así el hecho geométrico del teorema de los ángulos inscritos y concluyendo que como se cumple que  $\angle ADC + \angle ADB = \angle ABC + \angle ACB$ , entonces  $\angle PAC = \angle PDB$  y por lo tanto los triángulos  $PCA$  y  $PBD$  son semejantes, usando el criterio de semejanza AA. Finalmente, a partir de dicha semejanza, plantearían la siguiente proporción entre sus lados  $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$ , de la cual concluirían que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .

Esta secuencia descrita puede ser una de las varias que se pueden dar en el momento en el que los estudiantes elijan con cuáles triángulos y ángulos dentro del círculo trabajar. Por lo que, independientemente del par de triángulos o ángulos que escojan, la idea general es hacer uso de los teoremas del ángulo exterior y del ángulo inscrito para garantizar igualdades entre ángulos y llegar a que  $\angle PAC = \angle PDB$  o que  $\angle PCA = \angle PBD$ , para llegar a la semejanza de los triángulos  $PAC$  y  $PDB$  y luego la igualdad del producto  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .

Así, vemos que cualesquiera que sean los pares de triángulos escogidos para demostrar que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ , la exploración con el software y las acciones que se realicen en él, como el arrastre, la construcción de segmentos y la medición de ángulos, puede permitir que emerjan

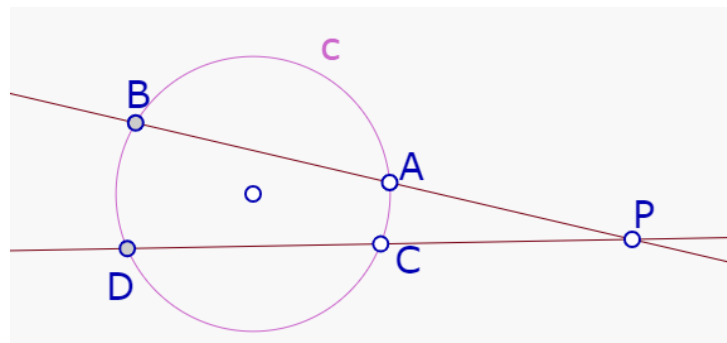
hechos geométricos ya constatados por los estudiantes, como los teoremas mencionados en esta descripción de la tarea, para realizar la demostración.

### Tareas asociadas a la constatación del HG2:

Luego de finalizar con estas tareas, se les propondrá las siguientes con el fin de relacionar el HG1 con el HG2. De modo que utilizamos como base la Tarea de exploración y análisis 1.1, es decir, la siguiente situación: un círculo  $c$ , una secante  $PA$  que corta a  $c$  nuevamente en  $B$  y otra secante  $PC$  que corta a  $c$  nuevamente en  $D$ .

#### Figura 15

*Situación de la tarea de exploración y análisis 1.1*



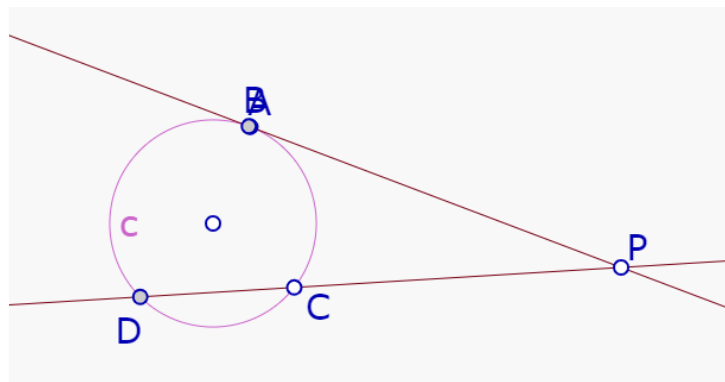
- ❖ **Tarea de exploración y análisis 1.3:** ¿Qué relación geométrica existe entre la recta  $PA$  y  $c$  cuando los puntos  $A$  y  $B$  coinciden? ¿El enunciado escrito anteriormente sería válido bajo estas nuevas condiciones de los puntos  $A$  y  $B$ ?
- ❖ **Tarea de reconocimiento 1.3:** ¿Debería ser reformulado el enunciado escrito en la tarea anterior? ¿Cuál sería ese nuevo enunciado?

Referente a la Tarea de exploración y análisis 1.3, para la primera pregunta se espera que los estudiantes realicen en el software una exploración arrastrando el punto  $A$ , de modo que

coincida con  $B$ , verificando y respondiendo que el resultado es una recta tangente al círculo. Y con respecto a la segunda pregunta, que reconozcan y respondan que ahora una condición es que la recta  $PA$  ya no es secante a  $c$ , sino que es tangente; lo que conlleva a reformular el enunciado que se había escrito en la Tarea de reconocimiento 1.2 y por tanto no sería válido, ya que se modificó una de sus condiciones.

### Figura 16

*Ajuste de la recta  $PA$  para que sea tangente a  $c$*



Así, pasando a la Tarea de reconocimiento 1.3, podrían responder que el enunciado debe ser reformulado y ahora los objetos iniciales son: el círculo  $c$ , el punto exterior  $P$ , la tangente  $PA$ , la secante  $PC$  que corta a  $c$  nuevamente en  $B$  y  $D$  respectivamente. Y que el resultado obtenido a partir de estas propiedades es que se cumple que  $PC \cdot PD = PA \cdot PA$ , o lo que es igual,  $PC \cdot PD = PA^2$ , igualdad que pueden verificar usando la calculadora y arrastrando el punto  $A$ , de modo que se verificaría de manera experimental el HG2.

#### 6.1.2 Uso del HG1 y HG2

El objetivo de esta parte de la actividad es que los estudiantes hagan uso de los hechos geométricos estudiados (HG1 y HG2) y de otros ya interiorizados con el fin de mostrar la riqueza

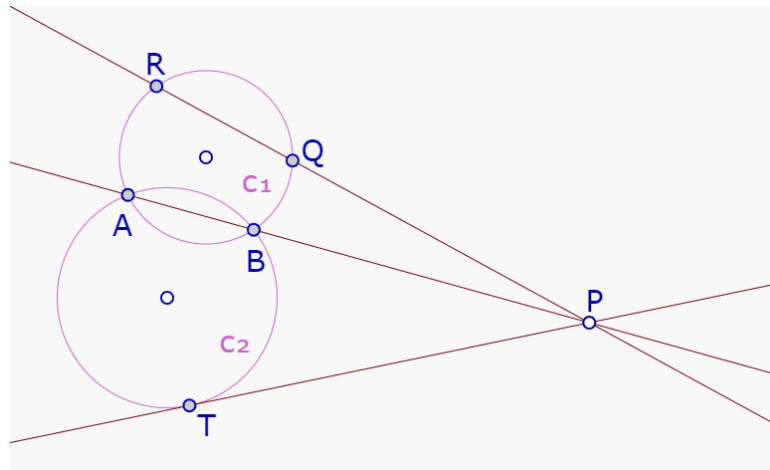
de las tareas diseñadas que, junto con la experimentación en el software, les permita hacer uso de distintas técnicas propias de la geometría dinámica para hallar relaciones entre los objetos geométricos de la pantalla, promoviendo así el uso de los distintos hechos geométricos.

Por tanto, una vez realizada la constatación del HG1 y HG2, se les propone a los estudiantes tareas de anticipación, verificación, justificación y construcción. En las tareas de anticipación y verificación se espera que se haga uso de los dos hechos geométricos estudiados hasta el momento, sin recurrir a una validación experimental con el software. En las tareas de justificación, que emerjan hechos geométricos ya interiorizados por los estudiantes que les permitan llevar a cabo una demostración de los hechos geométricos estudiados. Y en la tarea de construcción, que movilicen el HG1 y HG2, de modo que les permita realizar la construcción pedida.

#### **Análisis de las tareas.**

A continuación, describimos detalladamente las siguientes tareas con el fin de promover el uso de los hechos geométricos.

- ❖ **Tarea de anticipación 1.1:** Sin recurrir al software DGPad – Colombia, analice detalladamente la siguiente imagen para dar respuesta a las preguntas propuestas.

**Figura 17***Situación de la tarea de anticipación 1.1*

En la figura mostrada  $c_1$  y  $c_2$  son círculos que se cortan en  $A$  y  $B$ .  $PT$  es tangente a  $c_2$ .

Escriba una ecuación que relacione las magnitudes  $PQ$ ,  $PR$  y  $PT$ .

- ❖ **Tarea de verificación 1.1:** ¿Es posible construir un punto  $T'$  en  $c_1$  de tal manera que  $PT = PT'$ ? ¿Qué relación hay entre  $PT'$  y  $c_1$ ?

Respecto a la Tarea de anticipación 1.1, los estudiantes pueden reconocer en la imagen el HG1 y el HG2 en los círculos  $c_1$  y  $c_2$  respectivamente. De modo que, sin importar el orden en el que se haga, expresarían que se cumple que  $PA \cdot PB = PR \cdot PQ$  y luego que se cumple que  $PA \cdot PB = PT^2$ , para, finalmente, concluir por medio de la relación transitiva de la igualdad que  $PR \cdot PQ = PT^2$ ; movilizandando ambos hechos geométricos sin recurrir a una verificación experimental.

Y referente a la Tarea de verificación 1.1, luego de analizar la imagen, los estudiantes responderían afirmativamente a la primera pregunta, de modo que, el profesor les puede preguntar por qué sí se puede construir ese punto  $T'$  en  $c_1$ , para dar paso a la segunda pregunta. Ante este cuestionamiento, los estudiantes pueden recurrir al HG2, argumentando que si se construye una tangente a  $c_1$  de modo que  $T'$  sea el punto de tangencia y que la recta pase por  $P$ , se obtiene que

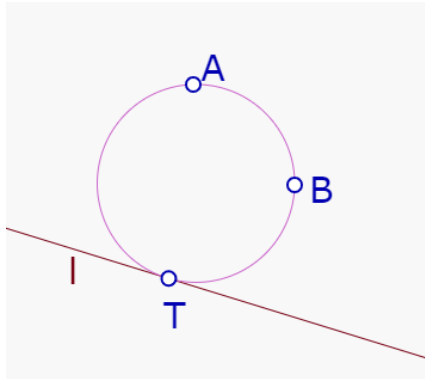
$PR \cdot PQ = PT'^2$  y como ya se había concluido que  $PR \cdot PQ = PT^2$ , entonces queda que  $PT'^2 = PT^2$ , lo que desencadena en que  $PT' = PT$ .

Y para finalizar con esta primera actividad del diseño, se les propone a los estudiantes una tarea de construcción que refiere al segundo problema de Apolonio y una tarea de justificación, en las que tendrán que hacer uso del HG1 y HG2 para resolverlas.

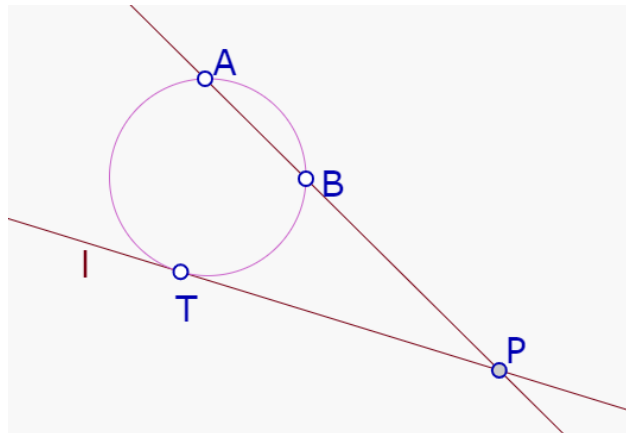
- ❖ **Tarea de construcción 1.1:** Dada una recta  $l$  y dos puntos  $A$  y  $B$  al mismo lado de  $l$ , construir un círculo  $c$  que sea tangente a la recta  $l$  y pase por los puntos  $A$  y  $B$ .
- ❖ **Tarea de justificación 1.3:** ¿Cuántas soluciones existen a este problema? Es decir, ¿cuántos círculos son tangentes a la recta dada y pasan por los dos puntos dados? ¿Cuál sería la respuesta a esta pregunta si los puntos no estuvieran al mismo lado de  $l$ ?

En lo que concierne a la Tarea de construcción 1.1, podrían realizar en el software una construcción blanda con el problema resuelto o que el profesor les sugiera hacerla, es decir, dibujar un círculo tangente a la recta  $l$  que pasa por  $A$  y  $B$ , donde  $T$  es el punto de tangencia de  $l$  con  $c$ .

Esto daría cuenta del uso de la Técnica de análisis, que hipotetizamos que, con la guía del profesor, les permitirá a los estudiantes hallar relaciones entre los objetos dados que pueden ser construidas y llevan a la solución de la tarea.

**Figura 18***Técnica del análisis en la tarea de construcción 1.1*

De entre estas relaciones existentes entre los objetos, los estudiantes, explorando en el software, pueden trazar la recta  $AB$  o el profesor les puede sugerir que lo hagan. Luego, por propia experiencia y familiarización con el software, los estudiantes marcarían el punto de intersección con la recta  $l$  o si no, que el profesor se los sugerirá. Este punto lo llamaremos  $P$ .

**Figura 19***Construcción de la recta  $AB$* 

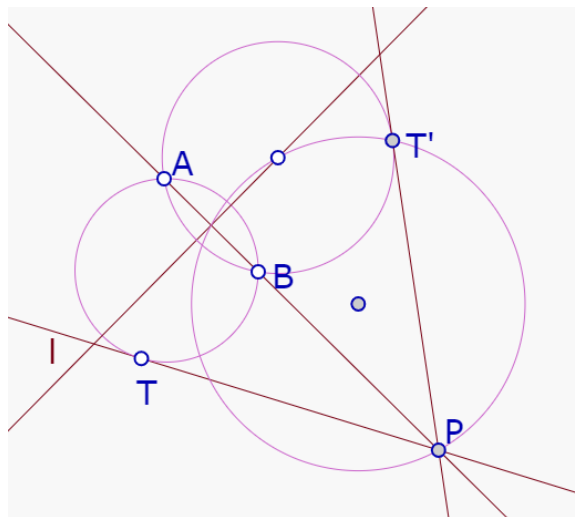
En este momento, se espera que los estudiantes puedan relacionar la imagen que les muestra el software con el HG2, de modo que se concluya, haciendo uso del HG2, que  $PA \cdot PB = PT^2$ . Así, el problema se reduce a hallar el punto  $T$  usando la relación obtenida; para esto, existen

dos caminos posibles que pueden tomar los estudiantes: hacer uso del HG2 o hacer uso del teorema de la media geométrica.

En el caso en el que decidan optar por la primera opción, construirían un círculo cualquiera que pase por los puntos  $A$  y  $B$ , y posteriormente una recta tangente al círculo en  $T'$  que pase por  $P$ , concluyendo que  $PA \cdot PB = PT'^2$ . Promoviendo así el uso de otros hechos geométricos ya interiorizados por los estudiantes como el de la mediatriz entre dos puntos y el Teorema de Tales.

### Figura 20

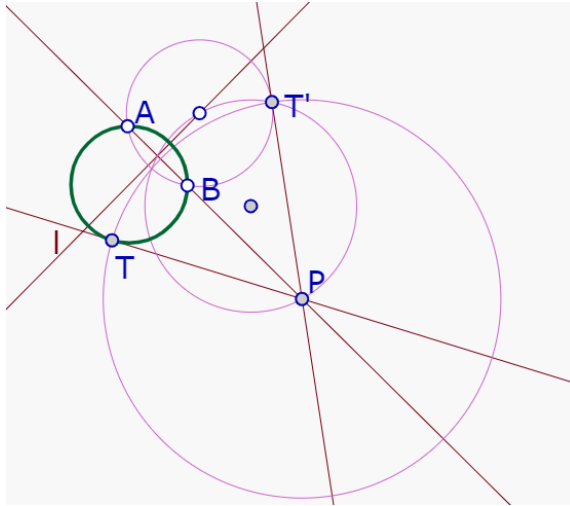
*Obtención del punto  $T'$  a partir del HG2*



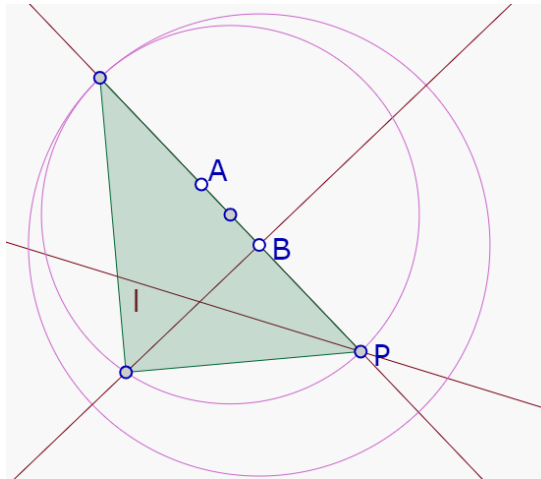
Así, llegarían a la relación de que  $PT^2 = PT'^2$ , de modo que  $PT = PT'$ ; concluyendo que el punto  $T$  se encuentra a la misma distancia, desde  $P$ , que  $T'$ , por lo que haciendo uso de la herramienta *Círculo* hallarían la posición de  $T$  sobre la recta  $l$ . Realizando finalmente la construcción pedida haciendo uso de la herramienta *Círculo por tres puntos*.

**Figura 21**

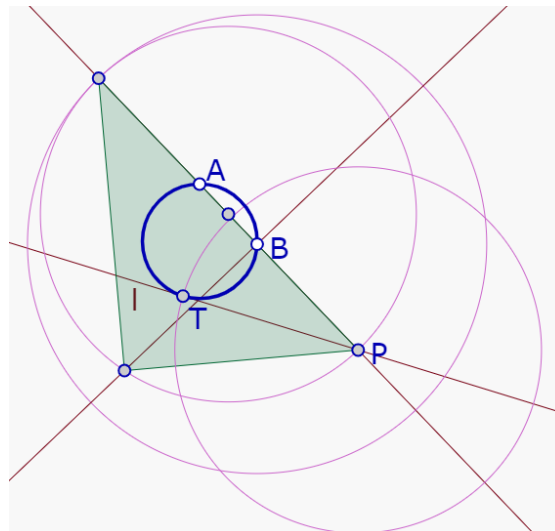
*Círculo tangente a  $l$  y que pasa por  $A$  y  $B$ . Primer método*



Ahora, si los estudiantes optan por hallar el punto  $T$  por medio del Teorema de la media geométrica, podrían construir un triángulo rectángulo en el que su altura sea media geométrica entre  $PA$  y  $PB$ . Promoviendo también el uso del Teorema de Tales como un hecho geométrico ya interiorizado, pues este teorema es necesario para garantizar el triángulo rectángulo del teorema de la media geométrica.

**Figura 22***Media geométrica entre  $PA$  y  $PB$* 

Una vez determinada la media geométrica entre  $PA$  y  $PB$ , harían uso de la herramienta *Compás* para trasladar la medida de la altura del triángulo construido hasta  $P$ , obteniendo así el punto  $T$  y, por lo tanto, el círculo que se estaba pidiendo construir.

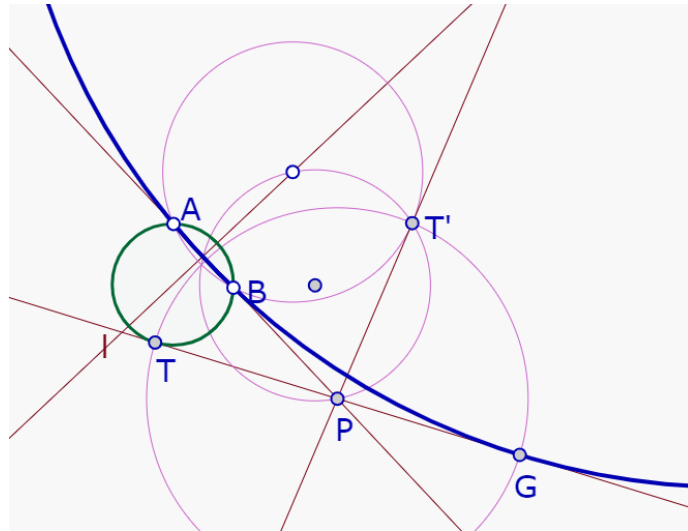
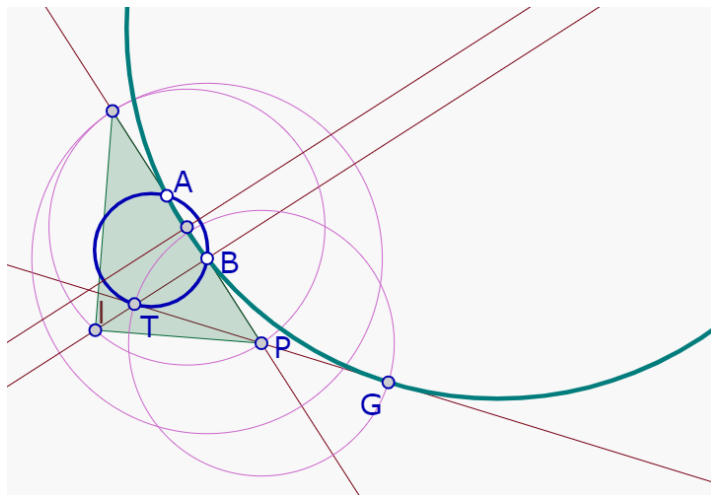
**Figura 23***Círculo tangente a  $l$  y que pasa por  $A$  y  $B$ . Segundo método*

Nótese que, independientemente del método escogido para realizar la construcción, se hace uso de hechos geométricos como el de la mediatriz entre dos puntos, el teorema de Tales y la

equidistancia entre cualquier punto del círculo a su centro. De modo que es una tarea en la que puede que emerjan estos y, en lo posible, más hechos geométricos.

En lo que respecta a la Tarea de justificación 1.3, podrían explorar brevemente en el software si es posible construir otro círculo que cumpla con las condiciones dadas, de modo que pueden construir la mediatriz entre los puntos  $A$  y  $B$  y construir un círculo sobre la mediatriz que pase por  $A$  para que al arrastrarlo cumpla con la tangencia sobre la recta  $l$  de manera perceptiva. Y efectivamente terminarán encontrando que existe otro círculo que es solución al problema.

Ante esto, pueden dar cuenta de que este segundo círculo solución pasa por el otro punto de corte del círculo de radio  $PT$  con la recta  $l$ , de modo que, teniendo estos tres puntos, construirán el segundo círculo que es solución al problema. Ante esta situación el profesor les puede preguntar por qué ese segundo círculo también es solución, por lo que se espera que respondan que ese otro punto de corte (el cual llamaremos  $G$ ) satisface la relación  $PA \cdot PB = PG^2$ , ya que está a la misma de distancia, desde  $P$ , que  $T$ .

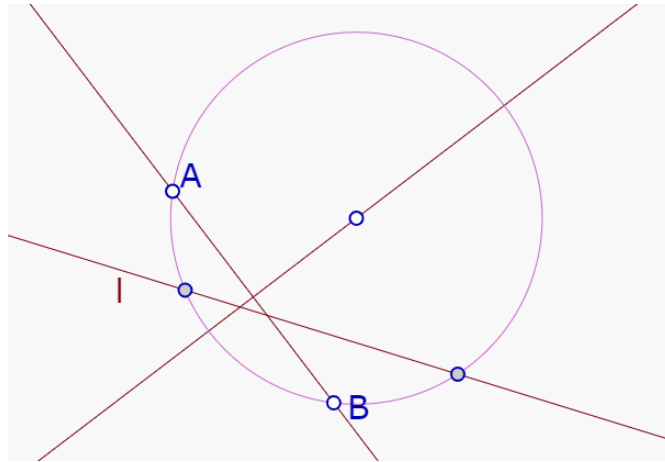
**Figura 24***Segundo círculo solución. Primer método***Figura 25***Segundo círculo solución. Segundo método*

Y ante la última pregunta de esta tarea, es posible que negativamente, ante lo cual, el profesor puede pedirles que justifiquen por qué no; que realicen una construcción en donde los puntos  $A$  y  $B$  estén en lados distintos de  $l$  y construyan un círculo que pase por  $A$  y  $B$ , en donde se evidencie los dos cortes que tiene con la recta  $l$  y argumenten que esta siempre va a cortar al círculo, ya que también corta a la cuerda  $AB$ . Obteniendo así un caso en donde no se cumple la

propiedad buscada y por ende quedaría invalidada la afirmación de que si los puntos  $A$  y  $B$  están en distintos lados de  $l$ , entonces existe un círculo que pasa por  $A$  y  $B$  y es tangente a  $l$ .

**Figura 26**

*Caso en donde los puntos  $A$  y  $B$  están a lados distintos a la recta  $l$*



En esta primera actividad la secuencia propuesta empieza con tareas de exploración, análisis y reconocimiento que pretenden promover el proceso de conjeturación y, en algunos casos, articularlo con el proceso de justificación con la intención de que se verifique lo que se conjetura.

Así, en términos de Camargo y Samper (2013), la conjeturación tiene como fin la formulación de conjeturas mediante términos matemáticos de enunciados condicionales; de modo que, el antecedente dé cuenta de las condiciones necesarias y suficientes para obtener como consecuencia las propiedades que se mencionan en el consecuente y que este incluya todas las conclusiones posibles. En ese sentido, fundamentados sobre esta idea, las tareas de exploración y análisis propuestas buscan promover la conjeturación por medio de la exploración y el arrastre en software para formular enunciados condicionales que den cuenta del HG1 y HG2. Además, este proceso también está guiado por preguntas que buscan centrar la atención en las propiedades geométricas que cumplen los objetos iniciales y las propiedades geométricas que se cumplen bajo dichas condiciones iniciales.

Posteriormente, se proponen tareas en las que se busca promover el uso de los hechos geométricos estudiados mediante situaciones en las que tengan que acudir a ellos como una garantía de las afirmaciones que se pueden concluir. Por lo anterior, las tareas de anticipación, verificación, justificación y construcción tienen la intención de que los estudiantes acudan a los hechos geométricos con el propósito de que anticipen, verifiquen y justifiquen otras propiedades geométricas y así analizar las formas en las que estos se usan en dichas tareas.

## **6.2 Segunda Actividad**

Esta segunda actividad contribuye a la construcción y el uso de los siguientes hechos geométricos: (HG3) si dos círculos pasan por un punto y sus centros junto con el punto están alineados, entonces los círculos son tangentes en dicho punto. (HG4) si dos triángulos son semejantes, comparten un vértice, los lados opuestos a este son paralelos y los lados correspondientes que comprenden el vértice común están alineados (triángulos en posición de similitud), entonces sus circuncírculos son tangentes en el vértice común.

### ***6.2.1 Constatación del HG3 y HG4***

#### **Análisis de las tareas.**

A continuación, describimos detalladamente las tareas propuestas para constatar el HG3 y HG4.

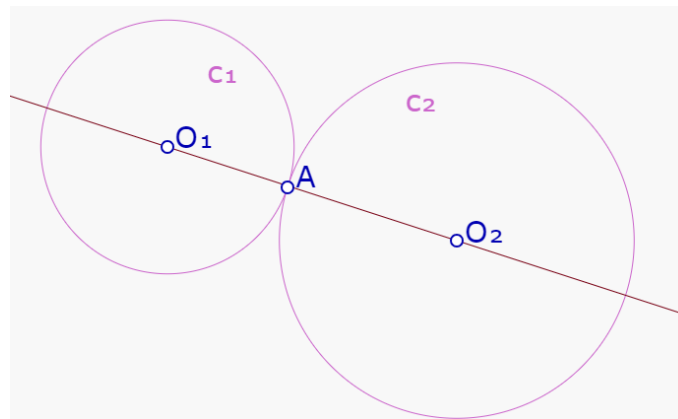
#### **Tareas asociadas a la constatación del HG3:**

- ❖ **Tarea de exploración y análisis 2.1:** Sean  $A$  un punto libre y  $c_1$  y  $c_2$  dos círculos que pasan por  $A$  y tienen centros  $O_1$  y  $O_2$  respectivamente. ¿Bajo qué condiciones los dos círculos son tangentes?
- ❖ **Tarea de reconocimiento 2.1:** Escriba un enunciado que dé cuenta de esa relación.

Referente a la Tarea de exploración y análisis 2.1, se espera que los estudiantes construyan en el software los objetos iniciales y mediante el uso del arrastre, empiecen a explorar cuáles podrían ser las condiciones para que se dé la tangencia entre los dos círculos. Eventualmente, lograrán obtener perceptivamente esta tangencia, por lo que enunciarán que la condición que se debe dar es que los centros de los círculos deben estar alineados con  $A$ . Y para comprobarlo, pueden construir la recta  $O_1O_2$  para obtener, perceptivamente, la pertenencia de  $A$  a esa recta.

**Figura 27**

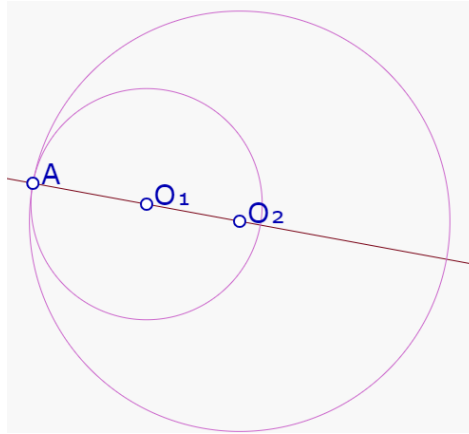
*Tangencia perceptiva de los círculos  $c_1$  y  $c_2$*



También puede darse el caso de que quieran verificar este hecho geométrico por medio de la prueba de arrastre en el software, lo que los llevaría a construir la recta y en ella poner los puntos  $O_1$ ,  $O_2$  y  $A$ , para construir los círculos  $c_1$  y  $c_2$  con sus respectivos centros, pasando por el punto  $A$ , validando así su conjetura de forma experimental.

**Figura 28**

*Construcción que resiste la prueba del arrastre*



En lo que respecta a la Tarea de reconocimiento 2.1, luego de realizar la exploración dicha en el párrafo anterior, podrían relacionar el hecho de que los círculos  $c_1$  y  $c_2$  pasan por un punto  $A$  y sus centros están alineados con dicho punto, de modo que el resultado obtenido es que los círculos son tangentes en el punto  $A$ , validando de manera experimental el HG3.

En este caso, para el HG3 solo se solicitará su verificación de manera experimental, ya que realizar la verificación por medio de una demostración formal resultará alejándose de nuestros objetivos, dado que queremos principalmente que usen este hecho geométrico como una herramienta para poder avanzar en las siguientes tareas.

**Tareas asociadas a la constatación del HG4:**

- ❖ **Tarea de exploración y análisis 2.2:** Lea el siguiente protocolo de construcción y realícelo en papel y lápiz.

$P$ : Punto cualquiera.

$Q$ : Punto cualquiera.

$R$ : Punto cualquiera.

$r_1$ : Recta  $QP$ .

$r_2$ : Recta  $PR$ .

$r_3$ : Recta  $RQ$ .

$T$ : Punto sobre  $r_1$ .

$r_4$ : Recta paralela a  $r_3$  por  $T$ .

$S$ : Punto de intersección de  $r_2$  y  $r_4$ .

$c_1$ : Círculo por  $P, Q$  y  $R$ .

$c_2$ : Círculo por  $P, S$  y  $T$ .

- ❖ **Tarea de anticipación 2.1:** ¿Podría determinar, antes de hacer la construcción en el software, qué relación existe entre los triángulos  $PQR$  y  $PTS$  y, qué relación existe entre los círculos  $c_1$  y  $c_2$ ? Escriba un enunciado al respecto.
- ❖ **Tarea de exploración y análisis 2.3:** Desarrolle en DGPad la construcción propuesta anteriormente. Arrastre todos los objetos y verifique si se cumplen las conjeturas propuestas en la tarea anterior.
- ❖ **Tarea de reconocimiento 2.2:** Escriba una proposición de la forma si-entonces cuyo consecuente dé cuenta de la relación entre los círculos  $c_1$  y  $c_2$ .
- ❖ **Tarea de justificación 2.1:** ¿Podría demostrar la proposición que acaba de formular?

Para la Tarea de exploración y análisis 2.2, a medida que van leyendo los pasos de construcción, van realizando el dibujo en lápiz y papel. Esto les permitirá identificar algunos objetos geométricos como los triángulos  $TPS$  y  $QPR$  e identificar propiedades geométricas como el paralelismo entre las rectas  $r_4$  y  $r_3$ , y los circuncírculos de los triángulos  $TPS$  y  $QPR$ . Por lo que explicitarían algunos de estos objetos y sus propiedades geométricas ya mencionadas.

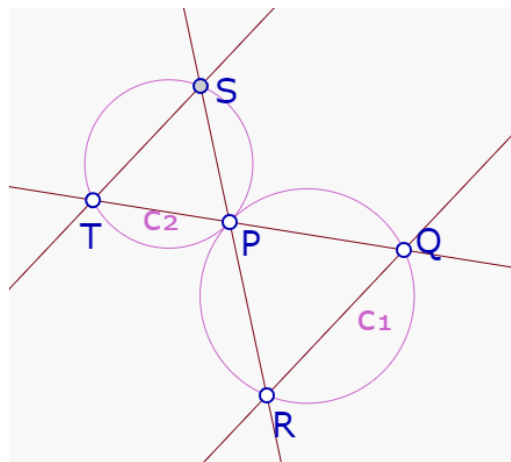
Pasando a la Tarea de anticipación 2.1, para la primera pregunta, puede que hagan uso de los hechos geométricos del teorema de los ángulos alternos internos y del teorema de los ángulos

opuestos por el vértice para argumentar y escribir que los triángulos  $PQR$  y  $PTS$  son semejantes. Para la segunda pregunta hay que tener en cuenta que lo más probable que pase es que al momento de dibujar los círculos, estos se corten o no sean especialmente redondos, de modo que de manera perspectiva no se puede apreciar la tangencia de ellos en el punto  $A$ . No obstante, la pregunta puede llevar a los estudiantes a pensar en que se tiene que cumplir alguna relación geométrica entre los círculos, pero debido al dibujo, esta no está visible; por lo que, dado el contexto de las tareas, pueden expresar y escribir que los dos círculos son tangentes en el punto  $P$ , a pesar de no verlo en el dibujo.

Así, al momento de pasar a la Tarea de exploración y análisis 2.2, seguirían el protocolo de construcción para realizar dicha construcción en el software y al aplicar la prueba del arrastre, verificarían que efectivamente se cumple la semejanza de los triángulos  $PQR$  y  $PTS$  y la tangencia de los círculos  $c_1$  y  $c_2$ .

### Figura 29

*Realización del protocolo de construcción*

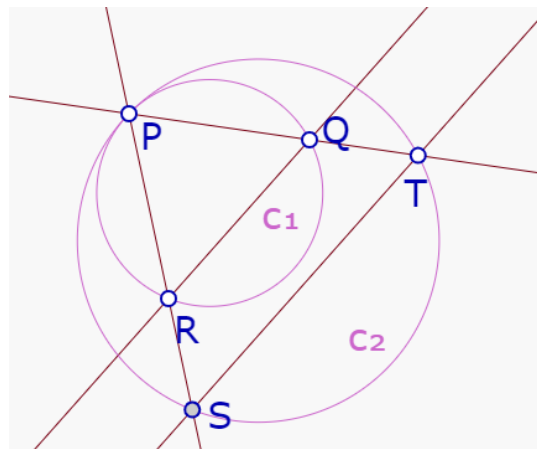


Ahora bien, dado que los estudiantes van a arrastrar los objetos, se prevé que también arrastrarán el punto  $T$  sobre la recta  $PQ$ , y cuando este punto esté a la derecha del punto  $P$ , los

círculos cambiarán de posición manteniendo su tangencia en  $P$ , de modo que se espera que, a pesar de haber una nueva configuración de los objetos, los estudiantes sigan convencidos de las propiedades identificadas. En ese sentido, se realizaría la validación del HG4 de forma experimental, a esperas de una demostración formal que se propone en la siguiente tarea de justificación.

**Figura 30**

*Otra configuración de los objetos al realizar el proceso de construcción*



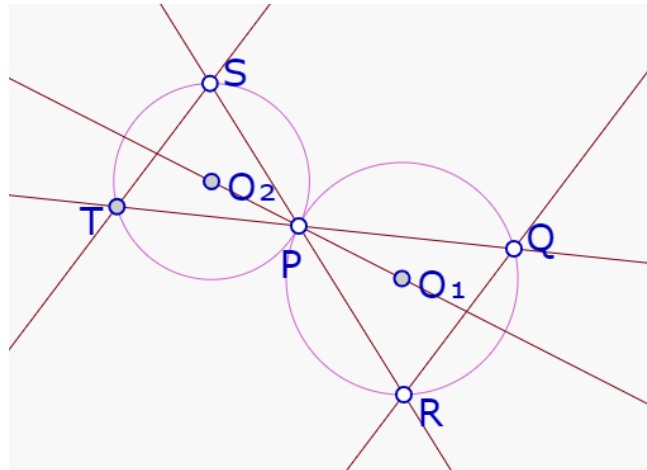
En lo que respecta a la Tarea de reconocimiento 2.2, habrían de identificar que el consecuente de la proposición es que los círculos  $c_1$  y  $c_2$  son tangentes, más específicamente en el punto  $P$ . Luego, que centren la atención en identificar el antecedente de la proposición, de modo que recurrirán a la relación entre los triángulos, pues habrán identificado que los círculos son precisamente los circuncírculos de esos triángulos. De manera que empiecen a explorar en el software para identificar relaciones geométricas entre los triángulos, más allá de su semejanza.

Así, conjeturamos que los estudiantes darán cuenta que los triángulos comparten un vértice y, además, los lados correspondientes opuestos a él son paralelos; por lo que podrían poner estas condiciones en el antecedente de la proposición. Sin embargo, puede darse el caso en el que los estudiantes no identifiquen fácilmente estas propiedades, por lo que el profesor les puede realizar

preguntas como ¿qué relación hay entre los triángulos? Y ¿qué relación geométrica hay entre sus lados opuestos al vértice en común? Guiando así la exploración y centrando la atención en esas propiedades geométricas que hacen parte del antecedente de la proposición.

Por ende, cuando los estudiantes enuncien y escriban la proposición, el profesor les puede decir que los triángulos que cumplen con ser semejantes, compartir un vértice, tener los lados opuestos a éste paralelos y que los lados que comprenden el vértice común estén alineados, se les conoce como triángulos en posición de similitud. Esto con el fin de que cuando los estudiantes se quieran referir a estas propiedades que tienen los triángulos, no las mencionen todas, sino que se refieran a ellas con este nombre.

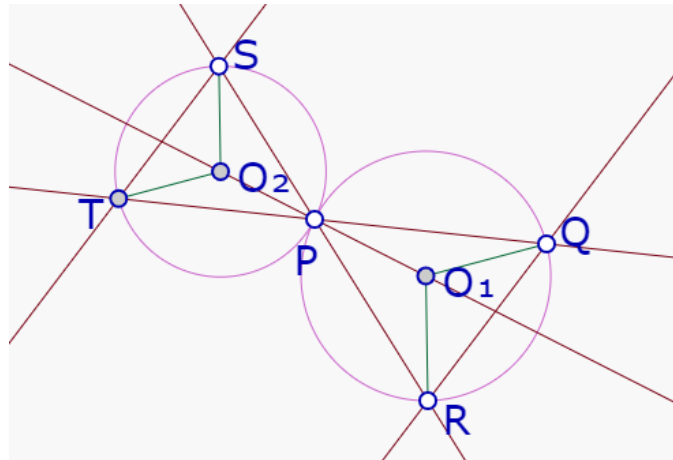
Y en lo referente a la Tarea de justificación 2.1, pensarían en el HG3, de modo que deberán demostrar que los puntos  $O_1$ ,  $O_2$  y  $P$  están alineados. Así, este razonamiento los llevaría a trazar la recta  $O_1O_2$  para evidenciar que  $P$  pertenece a la recta y, además, los llevaría a preguntarse cómo demuestran que tres puntos están alineados o están en la misma recta.

**Figura 31***Construcción de la recta  $O_1O_2$* 

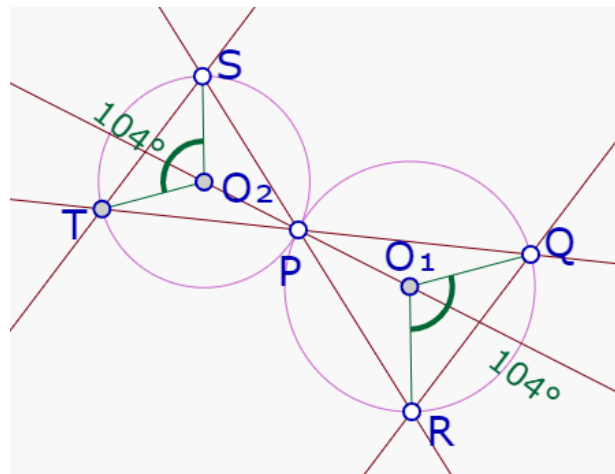
Ante esta pregunta, el profesor les puede preguntar ¿qué significa que tres puntos estén alineados? ¿Qué propiedad deben cumplir esos tres puntos? Con el fin de llevar a los estudiantes a pensar en que el ángulo comprendido por los tres debe ser de  $180^\circ$ ; es decir, llevarlos a que deben probar que el ángulo  $O_1PO_2$  mide  $180^\circ$ .

Para favorecer la aparición de estrategias que les permitan demostrar esto, el profesor puede sugerirle a los estudiantes que usen las condiciones que ya se tienen: dos triángulos en posición de similitud y sus circuncírculos. Esto con el fin de que exploren midiendo los ángulos correspondientes que son semejantes y que construyan segmentos en los círculos de modo que empiecen a identificar ángulos inscritos y ángulos centrales.

Una exploración que pueden hacer es trazar los radios de los círculos a los vértices de los triángulos y si no surge de manera espontánea, el profesor les puede sugerir que lo hagan.

**Figura 32***Construcción de los radios de los círculos*

Esto los puede llevar a medir algunos ángulos para hallar relaciones entre los ángulos inscritos y centrales. Por ejemplo, la media de los ángulos  $SO_2T$  y  $RO_1Q$  son iguales y se puede verificar usando el software.

**Figura 33***Medición de los ángulos  $SO_2T$  y  $RO_1Q$* 

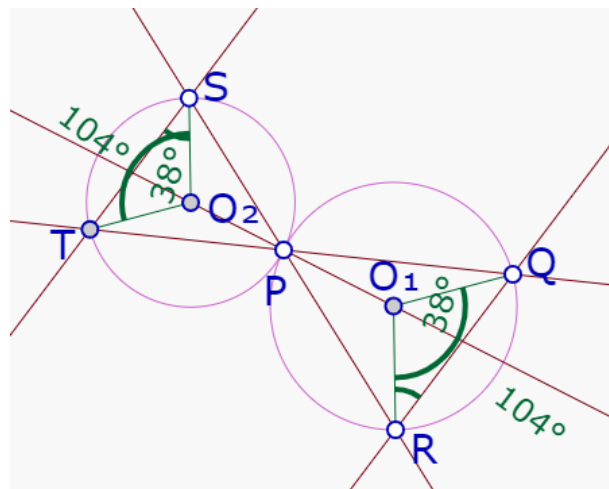
Esta igualdad los estudiantes la pueden demostrar usando la congruencia de los ángulos  $RPQ$  y  $SPT$  junto con el teorema de la medida de los ángulos inscritos y centrales (hechos geométricos interiorizados por los estudiantes). Obteniendo así que  $\angle SO_2T = \angle RO_1Q$ .

Luego, se espera que los estudiantes sigan explorando, el profesor puede guiar esta exploración haciendo preguntas como ¿qué propiedad cumplen los triángulos  $RO_1Q$  y  $SO_2T$ ? Con el fin de dar cuenta de que son triángulos isósceles y tienen un ángulo en común, de modo que, usando reglas algebraicas, concluyan que los ángulos de ambos triángulos son congruentes. En este caso,  $\angle STO_2 = \angle TSO_2 = \angle RQO_1 = \angle QRO_1$ .

Inclusive, los estudiantes pueden medir estos ángulos o el profesor les puede sugerir que midan algunos, de modo que los lleve al razonamiento y conclusión descrita.

### Figura 34

*Medición de los ángulos  $TSO_2$  y  $RQO_1$*



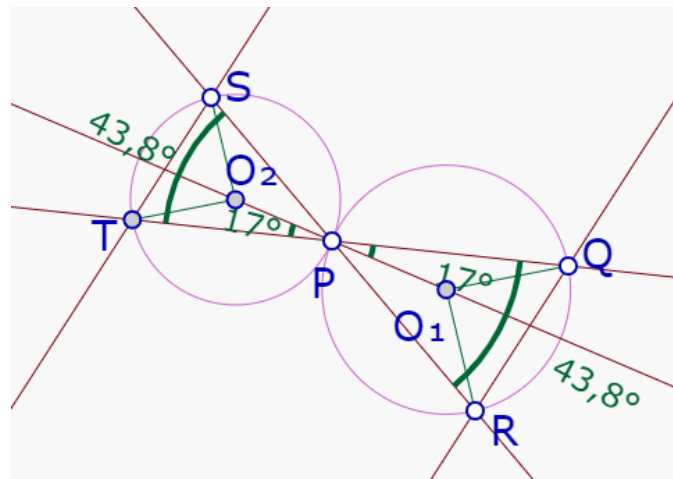
En este punto, vale la pena que el profesor les recuerde a los estudiantes qué es lo que se quiere demostrar, ya que puede pasar que, al identificar tantas relaciones entre ángulos y triángulos, se pierda el por qué se están haciendo las cosas y por qué es necesario.

Siguiendo con la tarea, se espera que los estudiantes identifiquen otro par de triángulos isósceles que pueden ser semejantes, como es el caso de los triángulos  $QO_1P$  y  $TO_2P$ . Los estudiantes pueden medir los ángulos para identificar relaciones existentes entre ellos y usando que son triángulos que comparten un ángulo (pues  $\angle STP = \angle RQP$  y  $\angle STO_2 = \angle RQO_1$ ) y reglas

algebraicas, se concluye que son congruentes. En ese sentido, se tendría también que  $\angle O_2PT = \angle O_1PQ$ , que junto con las igualdades de  $\angle RPQ = \angle SPT$ , serviría para poder hacer un razonamiento aplicando reglas algebraicas que les permita concluir que el ángulo  $O_1PO_2$  mide  $180^\circ$ .

### Figura 35

*Medición de los ángulos  $O_2PT$  y  $O_1PQ$*



La secuencia descrita es la que hipotetizamos que puede ocurrir, ya que estamos ligados a las variantes que puedan surgir de la exploración hecha por los estudiantes, de modo que puede suceder que intenten otro método de demostración que pueda ser más extenso y elaborado. Ahora bien, si el camino elegido por los estudiantes para realizar la demostración se les dificulta, el profesor puede hacer que los estudiantes tomen este camino descrito pidiéndoles que midan algunos ángulos inscritos en los círculos, hallen cuáles son congruentes y que relacionen los ángulos inscritos con los centrales, de modo que se pueda desarrollar la secuencia que describimos.

En consecuencia, se realizaría la validación del HG4 con una demostración formal en la que emerjan otros hechos geométricos ya constatados gracias a la exploración realizada en el software y la guía del profesor.

### 6.2.2 *Uso del HG3 y HG4*

El objetivo de esta parte de la actividad es que los estudiantes hagan uso de los hechos geométricos estudiados (HG1, HG2, HG3 y HG4), de otros ya interiorizados y junto con la experimentación en el software, dar solución al octavo problema de Apolonio.

Una vez realizada la constatación del HG3 y HG4, se les propone a los estudiantes resolver el octavo problema de Apolonio: Dado un círculo  $c$  y dos puntos  $P$  y  $Q$ , construir un círculo que sea tangente a  $c$  y pase por los puntos dados  $P$  y  $Q$ .

Sin embargo, dada la alta complejidad de este problema, se les propone una secuencia de tareas de exploración, justificación y construcción para ir estableciendo relaciones geométricas entre los objetos, de modo que, avanzando en dichas tareas, podrán seguir una secuencia que les permitirá resolver el problema original.

#### **Análisis de las tareas.**

A continuación, describimos detalladamente las tareas propuestas para poder resolver el octavo problema de Apolonio.

- ❖ **Tarea de exploración 3.1:** Dado un círculo  $c$  y dos puntos  $A$  y  $B$ , construya un punto  $J$  sobre  $c$ , la recta  $AJ$  y  $H$  intersección de  $AJ$  y  $c$ , distinto de  $J$ . A continuación, construya el círculo que pasa por los puntos  $B, J$  y  $H$ .

Active la traza del círculo construido y arrastre el punto  $J$ . ¿Qué relación hay entre todos los círculos que se forman?

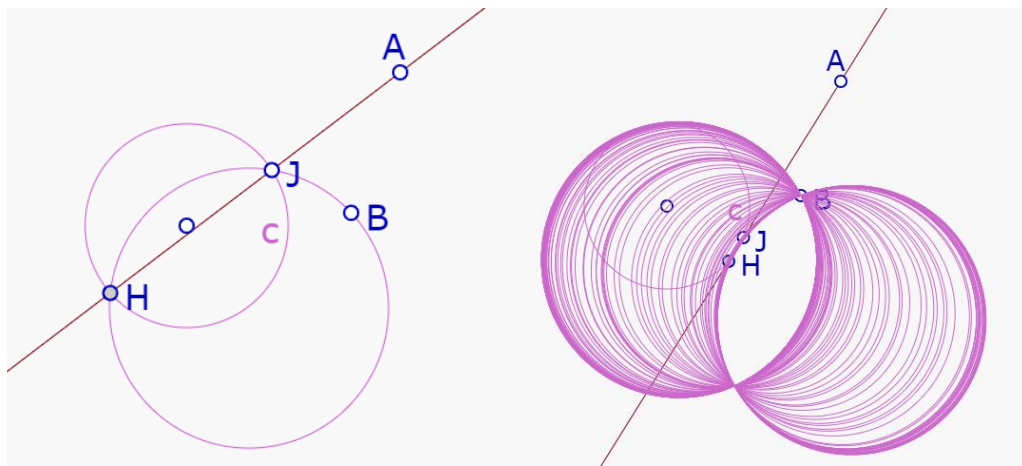
- ❖ **Tarea de exploración 3.2:** Sea  $Q$  el punto invariante por el que pasan todos los círculos, constrúyalo.

❖ **Tarea de justificación 3.1:** Justifique por qué el punto  $Q$  es invariante.

Con relación a la Tarea de exploración 3.1, se hace uso de la Técnica de lugares geométricos de la Geometría Dinámica Experimental, de modo que se espera que los estudiantes construyan los objetos dados, activen la traza del círculo que se les pide (el cual llamaremos  $g$ ), arrastren el punto  $J$  y observen la traza que se obtiene en el software para identificar un punto que permanece invariante.

**Figura 36**

*Traza del círculo que pasa por los puntos  $B$ ,  $H$  y  $J$*



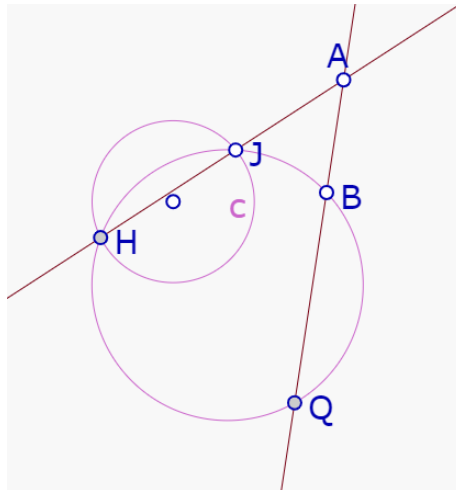
Cuando los estudiantes arrastren el punto  $J$ , la traza que deje el círculo  $g$  puede que sea parecida a la mostrada en la imagen, pues dependiendo de la posición de los puntos  $A$  y  $B$  el rastro del círculo va a variar. Así, bajo el supuesto de que se dé esta situación, los estudiantes cuando respondan a la pregunta dirán que una característica de todos los círculos dejados por la traza es que pasan por  $B$  y por otro punto que no se mueve. Es decir, identificarían, a partir de la traza de  $g$ , que existe un punto  $Q$  que permanece invariante ante el movimiento del punto  $J$ .

Luego de identificar este punto  $Q$ , se les pide en la Tarea de exploración 3.2 que lo construyan. Por tanto, puedan realizar alguno de los siguientes dos razonamientos para hallarlo:

en el primero, que es más visual e intuitivo, pueden percibir que el punto  $Q$  está alineado con  $A$  y  $B$ , por lo que pueden trazar la recta  $AB$  y verificar de manera experimental esta conjetura, de modo que  $Q$  será la intersección entre la recta  $AB$  y el círculo  $g$ .

**Figura 37**

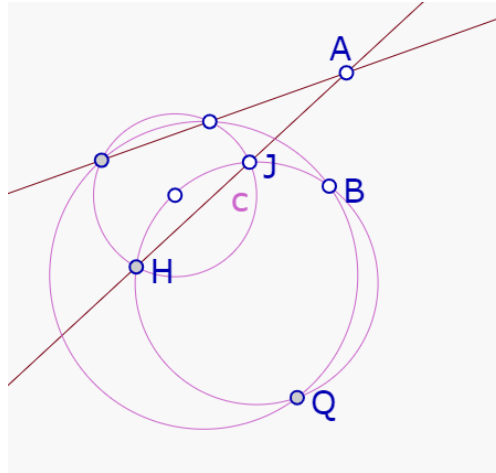
*Intersección entre la recta  $AB$  y el círculo  $g$ : punto  $Q$*



El segundo razonamiento que pueden hacer es que como el punto  $Q$  está en todos los círculos que se forman cuando se arrastra  $J$ , bastaría construir otro círculo que pase por  $B$  y por los cortes de una recta secante a  $c$  desde  $A$ . Obteniendo así al punto  $Q$  como la intersección de dos círculos.

**Figura 38**

*Punto  $Q$  como intersección de dos círculos*

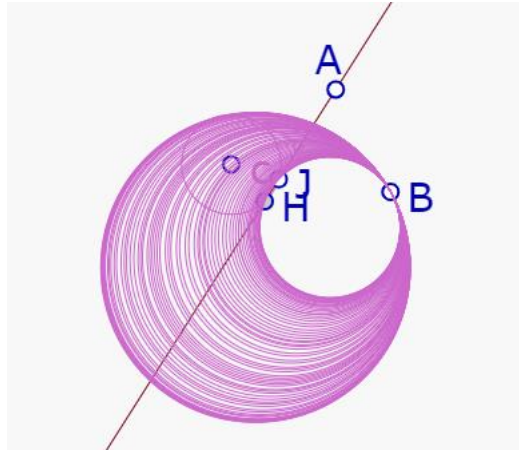


De esta manera los estudiantes verificarían de manera experimental sus conjeturas realizadas sobre la invarianza del punto  $Q$  y cómo hallarlo.

Ahora bien, como se mencionó anteriormente, la traza dejada por el círculo  $g$  depende de la posición de los puntos  $A$  y  $B$ , de modo que si el punto  $B$  está en una posición en la que la recta  $AB$  no es secante a  $g$ , sino que perceptivamente es tangente, el dibujo del rastro queda de la siguiente manera:

**Figura 39**

*Traza no favorecedora del círculo que pasa por los puntos B, H y J*



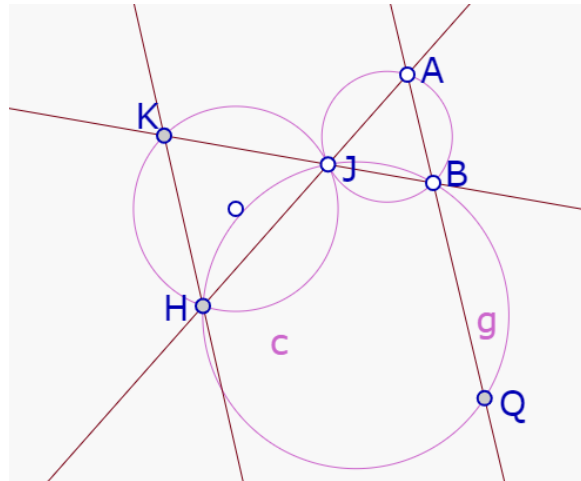
Así, se puede observar que en este caso el dibujo obtenido no favorecería la identificación del punto  $Q$ , de modo que, si se da esta situación, el profesor les puede pedir a los estudiantes que muevan de posición el punto  $B$  y así lograr otro dibujo que ponga de manifiesto el punto invariante  $Q$ .

En lo que respecta a la Tarea de justificación 3.1, pueden justificarla mediante el teorema de la potencia (HG1 y HG2), pues como los círculos  $c$  y  $g$  comparten los puntos  $J$  y  $H$ , entonces se tiene que  $AJ \cdot AH = AB \cdot AQ$ , por lo tanto, si  $B$  permanece fijo, entonces  $Q$  también debe de permanecer fijo para que  $AB \cdot AQ$  sea constante. De este modo se verificaría formalmente la invarianza del punto  $Q$ .

Avanzando con la solución del problema inicial, las tareas propuestas a continuación ponen en juego el HG4, con el fin de que los estudiantes identifiquen dos triángulos en posición de similitud y con ello dar solución al problema, pues sus circuncírculos serían tangente en el vértice en común.

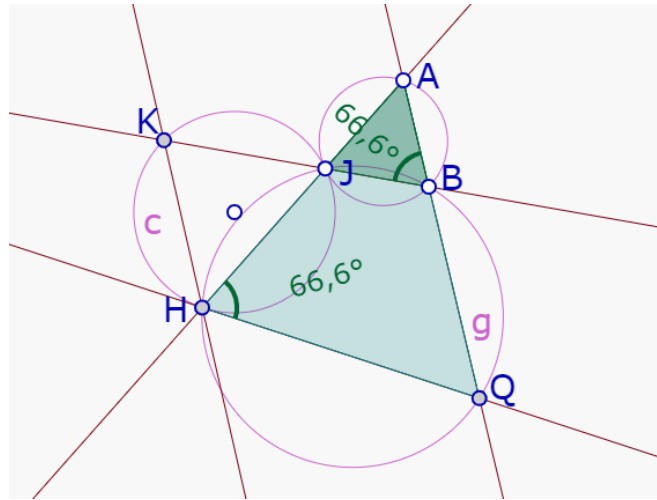
- ❖ **Tarea de exploración 3.3:** Construya la secante  $BJ$  y  $K$  intersección de  $BJ$  con  $c$ , distinta de  $J$ . A continuación, construya la recta  $KH$  y el círculo que pasa por los puntos  $A, B$  y  $J$ .  
¿Qué relación debe haber entre los triángulos  $ABJ$  y  $HJK$  para que los círculos sean tangentes?
- ❖ **Tarea de exploración 3.4:** Construya la recta  $QH$ . ¿Qué relación geométrica hay entre los triángulos  $AJB$  y  $AQH$ ?
- ❖ **Tarea de justificación 3.2:** Demuestre que los triángulos  $AJB$  y  $AQH$  son semejantes.  
¿Qué puede concluir de los ángulos  $ABJ, AHQ$  y  $HKJ$ ?

En la Tarea de exploración 3.3, se espera que en el momento en el que los estudiantes construyan los objetos pedidos, usen el HG4 para concluir que los triángulos  $ABJ$  y  $HJK$  deben estar en posición de similitud para que sus circuncírculos sean tangentes en el punto  $J$ . Además, que arrastren este punto para obtener perceptivamente la tangencia entre los círculos.

**Figura 40***Tangencia perceptiva entre los círculos*

De este modo, se les da a entender a los estudiantes que el problema se reduce a construir los triángulos  $ABJ$  y  $HJK$  en posición de similitud. Construcción que será guiada por las siguientes tareas.

Así, en lo que respecta a la tarea de exploración 3.4, cuando los estudiantes construyan la recta  $QH$  e identifiquen los triángulos  $AJB$  y  $AQH$ , responderían a la pregunta diciendo que son semejantes. Esta conjetura está fuertemente influenciada por el hecho de que es evidente en el software que los triángulos comparten un vértice, de modo que se espera que los estudiantes midan alguno de los otros dos pares de ángulos para verificar experimentalmente que efectivamente son semejantes.

**Figura 41***Semejanza de los triángulos  $AJB$  y  $AQH$* 

Así, siguiendo con la tarea de justificación 3.2, se les lleva a los estudiantes demostrar la semejanza entre los triángulos  $AJB$  y  $AQH$ . En esta tarea primero pueden realicen exploraciones en el software para intentar encontrar relaciones entre los ángulos  $ABJ$  y  $AHQ$  o entre los ángulos  $AJB$  y  $AQH$ . En este momento, el profesor podría realizar las siguientes preguntas para guiar la exploración: ¿qué reglas teóricas me permiten demostrar la semejanza entre dos triángulos? O ¿Qué otra estrategia puedo emplear para demostrar la semejanza entre un par de triángulos? Esto con el fin de llevar a los estudiantes a pensar en otros criterios de semejanza, en particular, el de LAL.

Los estudiantes pueden asegurar la proporcionalidad entre los lados con el HG2, pues dadas las secantes  $AJ$  y  $AB$  en el círculo  $g$ , se tiene que  $AJ \cdot AH = AB \cdot AQ$ , de modo que se tiene que  $\frac{AJ}{AB} = \frac{AQ}{AH}$  y por el criterio de semejanza LAL, los triángulos  $AJB$  y  $AQH$  son semejantes.

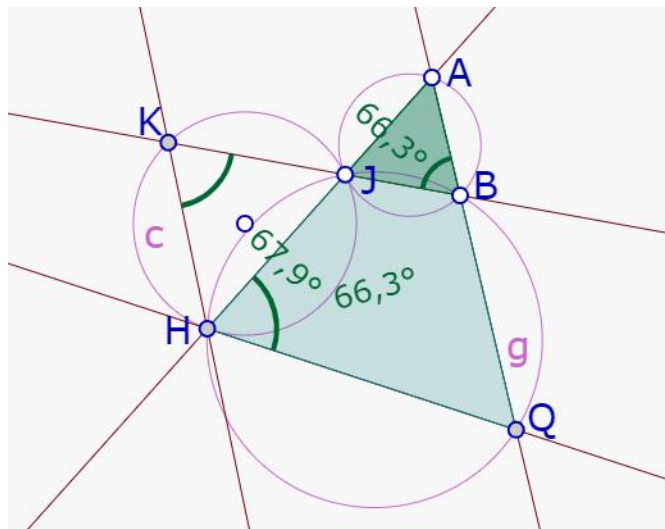
En este momento es importante que el profesor les recuerde a los estudiantes que el problema se ha reducido a construir un par de triángulos en posición de similitud, este par de triángulos son  $ABJ$  y  $HJK$ . Y como ya se tienen los puntos  $A$  y  $B$ , entonces el problema ahora

resulta en construir alguno de los puntos  $J, K$  o  $H$ . Con eso en mente, les puede decir que sigan avanzando en las tareas, en particular con la pregunta de ¿Qué puede concluir de los ángulos  $ABJ, AHQ$  y  $HKJ$ ?

De modo que, al saber de antemano que los ángulos  $ABJ$  y  $AHQ$  son congruentes, dirán que los tres ángulos son congruentes y lo intenten verificar midiéndolos en el software.

### Figura 42

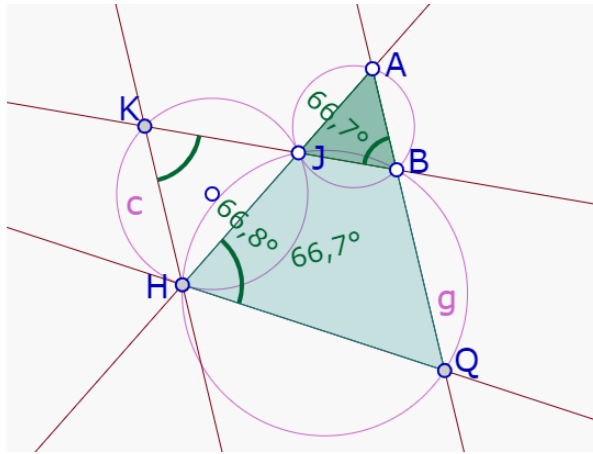
Medición de los ángulos  $ABJ, AHQ$  y  $HKJ$



No obstante, en el software lo más probable que pase es que la medida del ángulo  $HKJ$  sea ligeramente diferente de la medida de los otros dos ángulos, por lo que se espera que los estudiantes entiendan que esto ocurre porque la construcción está ajustada perceptivamente de modo que los triángulos  $AJB$  y  $HJK$  estén en posición de similitud. Inclusive el profesor les puede sugerir que ajusten más el punto  $J$  de modo que las rectas  $AB$  y  $KH$  queden lo más paralelas posibles, evidenciando experimentalmente que la medida del ángulo  $HKJ$  tiende a ser igual a la de los ángulos  $ABJ$  y  $AHQ$ .

**Figura 43**

*Ajuste de la medición de los ángulos  $ABJ$ ,  $AHQ$  y  $HKJ$*



Luego, el profesor les puede preguntar a los estudiantes cuál es la relación geométrica entre la recta  $HQ$  y el círculo  $c$ , con el fin de que den cuenta de que la recta, perceptivamente, es tangente. Así, el profesor les puede decir a los estudiantes que supongan que la recta  $HQ$  es tangente a  $c$  y demuestren por qué son congruentes los ángulos  $HKJ$ ,  $ABJ$  y  $AHQ$ .

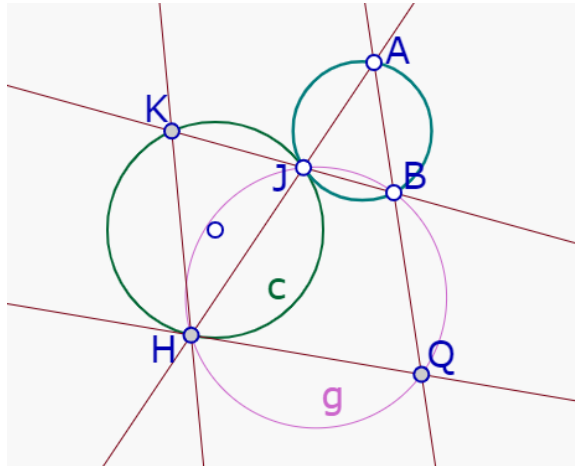
En ese sentido, argumentarían que la igualdad entre los ángulos  $ABJ$  y  $AHQ$  se obtiene de la semejanza de los triángulos  $ABJ$  y  $AHQ$ . Y para la igualdad entre el ángulo  $HKJ$  con el ángulo  $AHQ$  los estudiantes pueden dar cuenta en el software de la relación entre la tangente  $QH$  y la cuerda  $HJ$ , de modo que, por el teorema del ángulo comprendido entre una tangente y una cuerda, los ángulos  $HKJ$  y  $AHQ$  son congruentes y por tanto los ángulos  $HKJ$  y  $ABJ$  también lo son.

Así, con la congruencia de estos ángulos quedaría demostrado el paralelismo entre las rectas  $HK$  y  $AB$ , y trazando la recta  $HA$ , con  $J$  intersección de esta con  $c$ , quedarían construidos los triángulos  $AJB$  y  $HJK$  en posición de similitud; todo partiendo del hecho de que la recta  $HQ$  fuese tangente a  $c$ . En consecuencia, el problema se reduce a encontrar el punto  $H$  como punto de

tangencia de la recta  $HQ$  con  $c$ . Por lo que se espera que, mediante exploraciones en el software, puedan realizar este razonamiento.

**Figura 44**

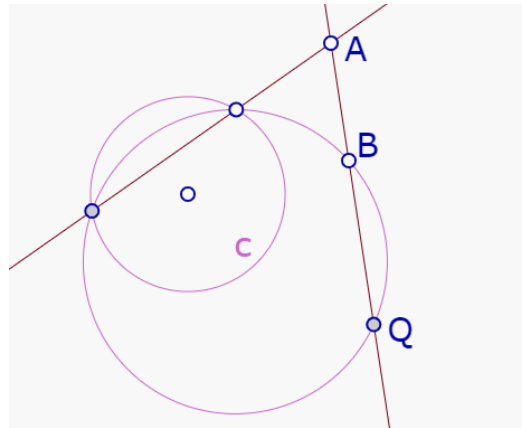
*H como punto de tangencia de la recta  $HQ$  con  $c$*



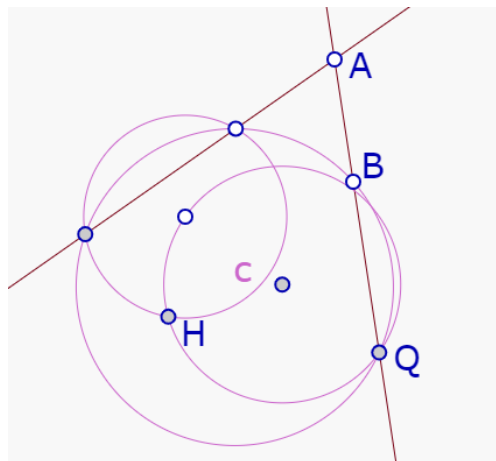
Y como últimas tareas de esta segunda actividad, se propone resolver el octavo problema de Apolonio.

- ❖ **Tarea de construcción 3.1:** Construir un círculo tangente a  $c$  que pase por  $A$  y  $B$ .
- ❖ **Tarea de exploración 3.5:** ¿Existe otra solución al problema? Es decir, ¿existe otro círculo que sea tangente a  $c$  que pase por  $A$  y  $B$ ?

Para la tarea de construcción 3.1, habrían de reconocer que las tareas que se han realizado hasta el momento les permite y les da las herramientas suficientes para poder realizar esta construcción. De manera que, pueden seguir los pasos hechos en cada una de las tareas, por lo que, luego de construir los objetos iniciales, pueden construir el punto  $Q$  usando el HG2 trazando una secante cualquiera desde  $A$  al círculo  $c$  y un círculo que pase por  $B$  y las intersecciones de la secante con  $c$ .

**Figura 45***Construcción del punto  $Q$* 

Posteriormente, a partir de la relación existente entre los puntos  $Q$  y  $H$  ( $H$  es punto de tangencia en  $c$  de una recta que pasa por  $Q$ ) pueden hacer uso del teorema de Tales para hallar el punto  $H$ .

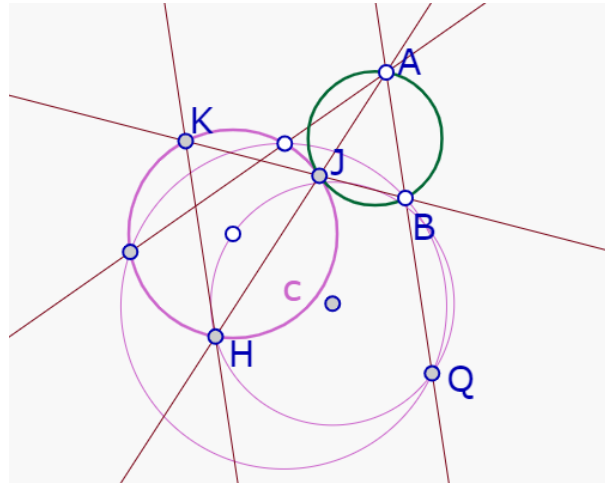
**Figura 46***Construcción del punto  $H$* 

En este momento, una vez construido el punto  $H$ , construyen la recta  $HA$  y marcan como  $J$  la intersección de  $HA$  con  $c$ . Luego, pueden construir la recta  $BJ$  y marcar como  $K$  la intersección de  $BJ$  con  $c$ ; construyendo así los triángulos  $AJB$  y  $HJK$  en posición de similitud. Finalmente,

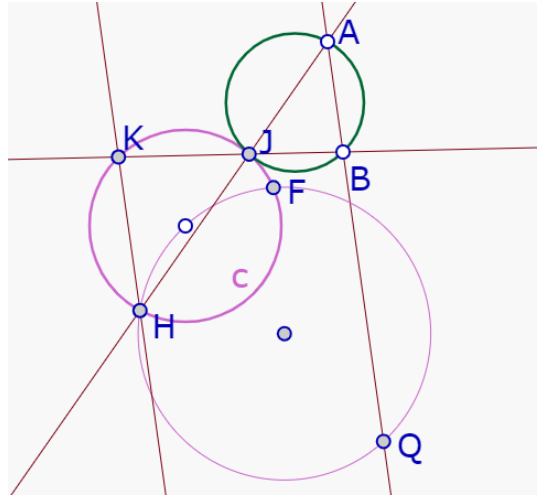
pueden construir el circuncírculo del triángulo  $HJK$  y por el  $HG4$ , el círculo será tangente con  $c$ , resolviendo así la tarea.

**Figura 47**

*Construcción del primer círculo solución*

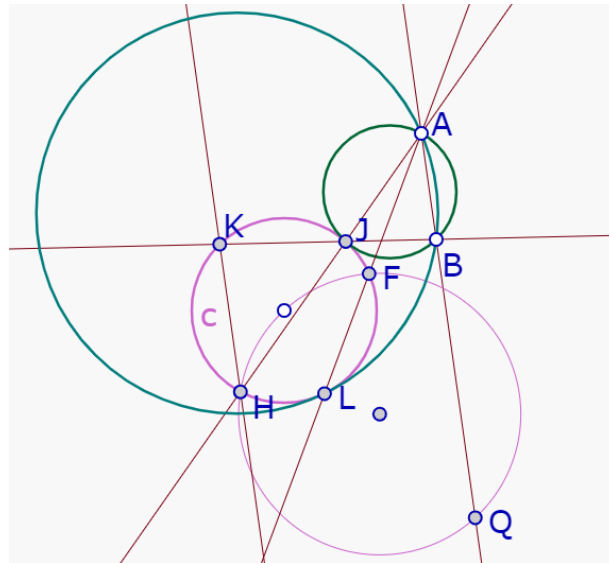


Y en lo que respecta a la tarea de exploración 3.5, se espera que interactúen con el software para explorar si existe la posibilidad de que exista otro círculo que sea tangente a  $c$  y pase por los puntos  $A$  y  $B$ . En ese sentido, pueden fijar la atención en el otro punto de tangencia que se obtenía cuando se construyó  $H$ , este punto lo llamaremos  $F$ .

**Figura 48***Construcción del punto  $F$* 

En este momento puede darse el caso en que piensen que el punto  $F$  es el otro punto de tangencia entre  $c$  y el círculo que pasa por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $F$ . Posibilidad que puede ser descartada fácilmente construyendo tales círculos.

De modo que, relacionando el punto  $F$  con  $H$ , dado que se trazó la recta  $AH$  para encontrar  $J$  como punto de tangencia, los estudiantes pueden trazar la recta  $AF$  y marcar la otra intersección con el círculo  $c$ , obteniendo así el punto  $L$  que da la otra solución al problema.

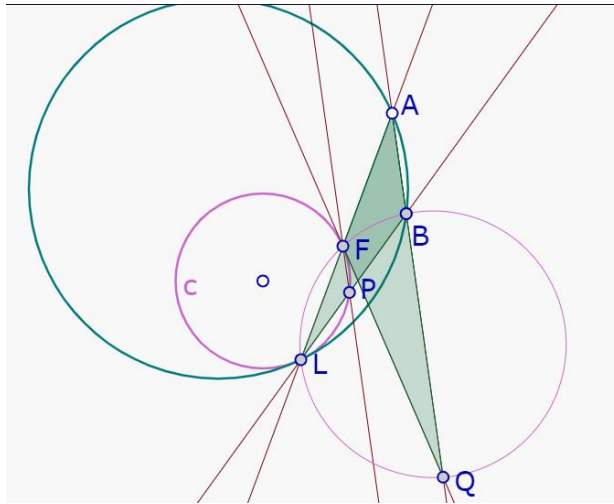
**Figura 49***Construcción del segundo círculo solución*

Una vez realizada la construcción de la segunda solución al problema, el profesor les puede pedir a los estudiantes que intenten justificar por qué este otro círculo también es tangente a  $c$ .

De tal forma que, se espera que los estudiantes repliquen los objetos que se realizaron en las tareas de esta parte de la actividad y llevaron a solucionar el problema: el par de triángulos  $AJB$  y  $AQH$  semejantes, junto con los triángulos  $AJB$  y  $HJK$  que se quería probar que estaban en posición de similitud.

Por lo tanto, pueden ocultar los objetos involucrados en la primera solución y centrarse en los de la segunda solución: los puntos  $A, B, Q, F$  y  $L$ . Construyendo así los triángulos  $AQF$  y  $ALB$  junto con los triángulos  $ALB$  y  $FLP$ , en donde se debe mostrar que el primer par de triángulos son semejantes para, posteriormente, mostrar que el segundo par están en posición de similitud y por tanto sus circuncírculos son tangentes en el vértice en común.

**Figura 50**  
Triángulos  $AQF$  y  $ALB$



Para mostrar la semejanza de los triángulos  $AQF$  y  $ALB$  pueden seguir el proceso que se describió para mostrar la semejanza de los triángulos  $AJB$  y  $AQH$ : tienen un ángulo en común y por el teorema de la potencia de un punto respecto a un círculo (HG2), sus lados son proporcionales, concluyendo así por el teorema de semejanza LAL que los triángulos  $AQF$  y  $ALB$  son semejantes.

Y en lo que respecta a mostrar que los triángulos  $ALB$  y  $FLP$  están en posición de similitud, pueden hacer uso del teorema del ángulo comprendido entre una recta y una cuerda para probar que el ángulo  $QFL$  es congruente al ángulo  $LPF$  y por la semejanza de los triángulos  $AQF$  y  $ALB$ , el ángulo  $FPL$  es congruente al ángulo  $ABL$ . Por lo que, haciendo uso del teorema de ángulos correspondientes del mismo lado, las rectas  $AB$  y  $FP$  son paralelas y por el teorema de semejanza AA, los triángulos  $ALB$  y  $FLP$  son semejantes y están en posición de similitud. Por tanto, por el HG4, sus circuncírculos son tangentes en  $L$  que es el vértice en común.

Esta parte de la justificación de la segunda solución puede resultar retadora para los estudiantes, principalmente por las conexiones que deben hacer con los objetos que dieron lugar a

la primera solución, de modo que, se espera que con la interacción y exploración que realicen en el software identifiquen algunos de los objetos geométricos descritos y emerjan algunas de las propiedades descritas entre estos objetos para llegar a la demostración.

Sin embargo, dado el caso en el que los estudiantes no puedan realizar una demostración formal, concluiremos con la validación experimental.

En esta segunda actividad la secuencia propuesta empieza con tareas de exploración y análisis que pretenden promover el reconocimiento del HG3 y HG4 mediante situaciones en el SGD y preguntas que buscan guiar las exploraciones en el software con el fin de centrar la atención en la formulación de conjeturas que den cuenta de dichos hechos geométricos. Conjeturas en las que se evidencie en el antecedente las condiciones necesarias y suficientes para obtener como consecuencia las propiedades que se mencionan en el consecuente.

En especial se resalta la pertinencia de las tareas en las que se busca promover el uso del arrastre con el fin de llevar a los estudiantes a identificar relaciones de dependencia entre los objetos geométricos; lo cual resulta esencial para promover la formulación de conjeturas que den cuenta de los hechos geométricos estudiados.

Posteriormente, se proponen tareas que al ser resueltas de manera secuencial llevan a la solución del octavo problema de Apolonio. En estas tareas se busca promover el uso de los hechos geométricos estudiados por medio de la exploración en el software (uso del arrastre, medición de magnitudes y construcción de objetos auxiliares) con el fin de que los estudiantes identifiquen invariantes y relaciones de dependencia entre propiedades geométricas para dar solución al octavo problema de Apolonio.

## 7. Análisis a posteriori

En esta sección constatamos las hipótesis realizadas en el análisis a priori con los resultados obtenidos en la fase de la experimentación del diseño de tareas con dos estudiantes de primer semestre que estaban finalizando el curso de Geometría Euclidiana del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Para el desarrollo de las tareas los estudiantes trabajaron en equipo en un computador y para la recolección de datos se grabó la pantalla del computador y el audio. Además, el investigador hizo las veces de profesor.

Para llevar a cabo el análisis a posteriori exponemos mediante tablas de tres columnas algunos fragmentos de las transcripciones de los videos realizados. La primera columna indica la numeración, la segunda indica el sujeto que ejecuta la acción (E1, E2 y P para indicar a los dos estudiantes y al profesor respectivamente), la tercera indica lo que el sujeto dice y el mensaje que transmite o las acciones que realiza con su respectiva evidencia (estas acciones serán escritas entre paréntesis rectos “[ ]”) y algunas aclaraciones que puedan surgir serán escritas entre paréntesis redondos “( )”.

### 7.1 Primera actividad:

Las tareas que se presentan en esta primera actividad pretenden contribuir a la construcción y el uso del HG1: si desde un punto  $P$  exterior a un círculo se traza una secante  $PQ$ , que corta al círculo nuevamente en  $Q'$ , entonces el producto de las magnitudes  $PQ$  y  $PQ'$  es constante; y del HG2: si desde un punto  $P$  exterior a un círculo se traza una tangente  $PT$  que toca al círculo en  $T$  y una secante  $PQ$  que corta al círculo nuevamente en  $Q'$ , entonces el producto de la magnitud  $PT$  consigo misma es igual al producto de  $PQ$  con  $PQ'$ .

En ese sentido, para el desarrollo de las tareas propuestas fue necesario que los estudiantes interactuaran constantemente con el software, que arrastraran los objetos construidos, construyeran objetos auxiliares y realizaran mediciones para promover la verbalización de conjeturas, el uso de técnicas propias de la geometría dinámica y el uso de los hechos geométricos estudiados u otros ya constatados por los estudiantes. Además, a modo de aclaración, como en el curso de Geometría Euclidiana se hace uso del software DGPad-Colombia, los estudiantes conocían el funcionamiento básico del software: construcción y dependencia de objetos, arrastre como estrategia de verificación, entre otros.

En esta primera actividad se realizaron tareas de exploración, análisis y reconocimiento buscando promover la construcción del HG1 y HG2. Posteriormente, luego de la constatación de estos hechos geométricos, se presentaron tareas de anticipación, verificación, justificación y construcción, en las que se buscaba promover el uso de los hechos geométricos estudiados y los ya conocidos por los estudiantes.

A continuación, presentamos el análisis y el soporte de las tareas de esta primera actividad en el orden en el que se realizó el análisis a priori.

- *Conjeturan y validan experimentalmente que el producto  $PA \cdot PB$  es constante*
- ❖ **Tarea de exploración y análisis 1.1:** Dados un círculo  $c$  y un punto  $P$  exterior a  $c$ , construir un punto  $A$  sobre  $c$ , la recta  $PA$  y  $B$  el punto de intersección de  $PA$  y  $c$ . ¿Dónde debe ubicarse  $A$  sobre  $c$  para que el producto  $PA \cdot PB$  sea el mayor posible?

Los estudiantes iniciaron realizando un dibujo de la situación en el papel. Esta acción no estaba prevista en el análisis a priori, se esperaba que usaran DGPad desde un inicio para explorar y conjeturar sobre la posición que debería tener el punto  $A$ , para que  $PA \cdot PB$  fuera máximo. Sin

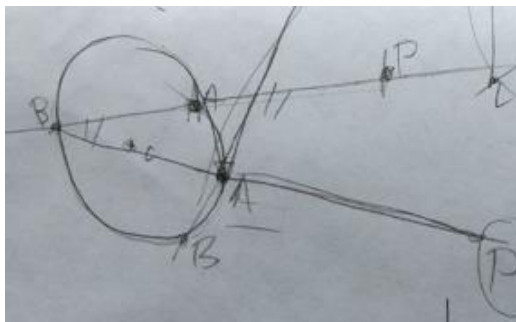
embargo, los estudiantes desviaron la atención hacia el punto  $P$ , como se observa en las líneas 1 – 14, posiblemente porque en el dibujo estático no es evidente la dependencia entre los objetos. Ante esta situación, el profesor les pidió a los estudiantes realizar la construcción en el software. No obstante, luego de construir los objetos dados, arrastraron el punto  $P$  buscando alguna relación entre  $PA$  y  $PB$  para que su producto sea el mayor posible, seguidamente el profesor pregunta *¿Por qué arrastran el punto  $P$ ?*, E2 exclama *¡Ah! Es que es dónde debe estar ubicado  $A$* , E1 asiente y lee nuevamente la tarea, centrando su atención ahora en el punto  $A$ .

Luego, en la línea 24 se evidencia que E2 conjeturó que el producto  $PA \cdot PB$  sería máximo cuando  $A$  y  $B$  coincidieran y para validar lo que había dicho, propuso medir los segmentos  $PA$  y  $PB$ ; además, en la línea 25 E1 conjeturó que debe haber una razón entre el aumento de tamaño del segmento  $PB$  con la disminución del segmento  $PA$ . Estas conjeturas llevaron a los estudiantes a verificarlas experimentalmente haciendo uso de la calculadora del software, multiplicando las magnitudes  $PA$  y  $PB$ . Antes de arrastrar el punto  $A$ , E1 conjeturó: *creo que se mantiene, ¿No?* Como se evidencia en la línea 30. Inmediatamente constataron, mediante el arrastre, que  $PA \cdot PB$  era constante.

1	E1	[Lee el enunciado de la Tarea de exploración 1.1]
<p><b>Secuencia 1. Primera parte</b></p> <p>Lea detenidamente los enunciados y responda detalladamente a las preguntas propuestas.</p> <p><b>Tarea de exploración 1:</b> Dados un círculo <math>c</math> y un punto <math>P</math> exterior a <math>c</math>, construir un punto <math>A</math> sobre <math>c</math>, la recta <math>PA</math> y <math>B</math> el punto de intersección de <math>PA</math> y <math>c</math>. ¿Dónde debe ubicarse <math>A</math> sobre <math>c</math> para que el producto <math>PA \cdot PB</math> sea el mayor posible?</p>		
2	E2	[Realiza un dibujo en lápiz y papel de la situación] Esto sería como un rectángulo, con magnitudes $PA$ y $PB$ . Obviamente es cuando quede un cuadrado, cuando ambas distancias sean iguales... que es cuando va a ser más grande.
3	E1	¿Será?
4	E2	¿Dónde se debe ubicar $A$ sobre $c$ ? $A$ , estamos hablando es de $A$ . O sea, todo depende es de $A$ . $P$ y $B$ no se pueden mover, solo $A$ .

---

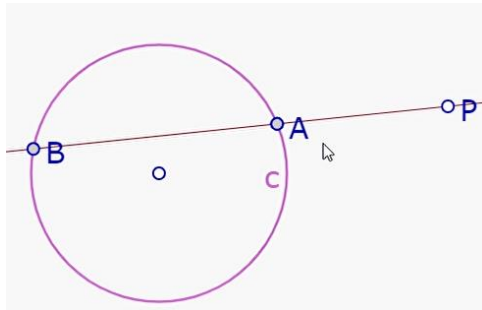
5	E1	Sí, $P$ no se mueve.
6	E2	Si no estoy mal, creo que sería cuando $A$ esté en el diámetro, se supone, ¿no? [Sobre papel dibuja otra recta $PA$ que pasa por el centro del círculo].



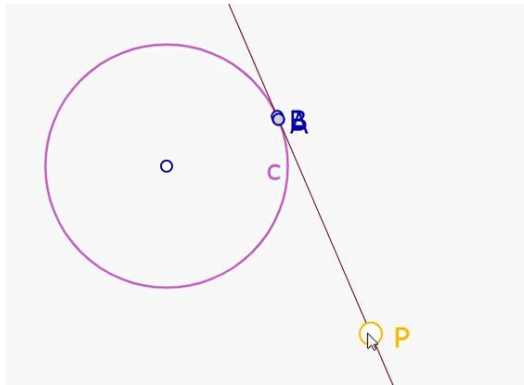

---

7	E1	Pero $P$ no se mueve.
8	E2	Si se desplaza $A$ toda la recta se va a desplazar.
9	E1	Pero estás moviendo también $P$ .
10	E2	$P$ depende de $A$ .
11	E1	No, $P$ es un punto libre.
12	E2	Pues sí, pero la recta está dada por $A$ y $P$ .
13	E1	Primero tienes $P$ y luego $A$ . Si tienes $A$ más lejos, $B$ queda más cerca de $P$ .
14	E2	Sí, la posición de $B$ depende de dónde esté $A$ .
15	P	Haga ese dibujo en DGPad.
16	E1	[Construye un círculo $c$ con radio constante, un punto $P$ exterior a $c$ , un punto $A$ sobre $c$ , la recta $PA$ y marca la intersección de esta con $c$ , usando la herramienta <i>intersección</i> y la llama $B$ ].  (El punto $A$ debe tener la misma apariencia que $P$ , relleno blanco y no gris. El relleno blanco indica que el punto se deja arrastrar directamente, mientras que el relleno gris indica que no. Sin embargo, cuando los alumnos seleccionaron intersección de $AP$ y $c$ , DGPad mostró dos puntos, uno sería $B$ y el otro queda superpuesto en $A$ , por lo que pareciera que ha cambiado la apariencia de $A$ ).

---

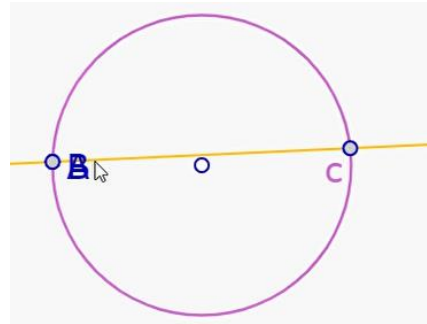


17	E2	Entonces sí, todo depende de $P$ . Mueva $P$ .
18	E1	[Arrastra el punto $P$ ] Pero se mueve $B$ .
19	E2	Sí, sí, pero ¿cuándo se igualan?
20	E1	Cuando sea tangente sería lo mismo. [Arrastra $P$ hasta obtener perceptivamente la tangencia entre la recta $PA$ y $c$ ].

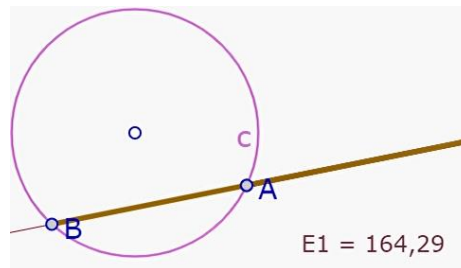


21	P	¿Por qué está moviendo $P$ ?
22	E2	¡Ah! Es que es dónde debe estar ubicado $A$ .
23	E1	Claro. [Vuelve a leer la pregunta].
24	E2	Yo creo que cuando se encuentran, porque sería que los dos tienen la misma distancia. Cuando es tangente. Si quiere mídalos y miramos cómo sale.
25	E1	Sí, ahora miramos eso. [Arrastra el punto $A$ sobre el círculo] Pero mira que, si $PA$ disminuye, $PB$ aumenta. O sea, siempre como que mantienen una misma razón.
26	E2	Curioso... qué curioso.
27	E1	[Arrastra $A$ sobre $c$ ] Ahí se sobreponen, no sé exactamente porqué. Vamos a hacer la prueba midiendo.  (Para para algunas posiciones de $A$ sobre $c$ , DGPad intercambia las intersecciones que se construyeron en la línea 16, de modo que $B$ queda

coincidiendo con  $A$  y los alumnos interpretan que es el nombre del punto  $B$  el que ha cambiado de posición).

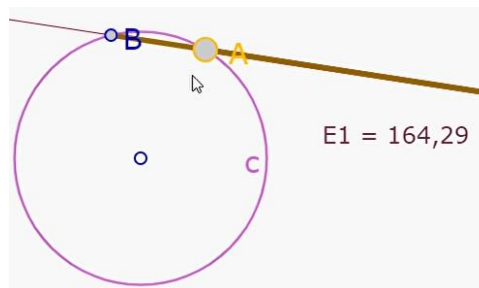


- 28 E1 [Vuelve a cambiar de posición  $A$  para que  $A$  y  $B$  no coincidan y traza los segmentos  $PA$ ,  $PB$  y haciendo uso de la calculadora de DGPad multiplica ambos segmentos].



- 29 E2 Ahora mueva  $A$ .

- 30 E1 Creo que se mantiene, ¿no? [Arrastra el punto  $A$  sobre  $c$ ]. Sí, efectivamente se mantiene.



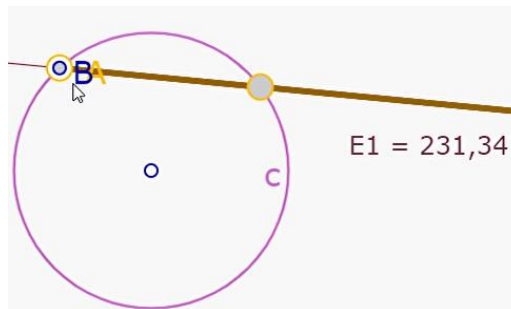
- 31 E2 ¡Es igual! No me la creo...

Ahora, como la recta  $PA$  corta a  $c$  en dos puntos, al cambiar la posición de  $A$  en el círculo, la intersección  $B$  escogida coincide con  $A$ , para algunas posiciones de  $A$ ; ocasionando que al arrastrar la calculadora tomara dos veces la longitud del segmento  $PB$  y en consecuencia el

producto  $PA \cdot PB$  no fuera constante. Así, vemos que los estudiantes en las líneas 33 – 36 notaron este error en el software y justificaron por qué debería ser un error, basándose en la validación experimental que habían hecho anteriormente. Además, en las líneas 44 – 62 solucionaron este problema y reiteraron que el producto  $PA \cdot PB$  debe mantenerse constante. Lo que evidencia una alta convicción de los estudiantes con lo observado y validado experimentalmente en el software sobre la invarianza del producto de las magnitudes  $PA$  y  $PB$ .

---

33 E1 [Arrastra el punto  $A$  hacia el lado izquierdo de  $c$  y el producto cambia] (el producto cambió porque se intercambiaron las intersecciones de  $AP$  y  $c$  construidas en la línea 16).




---

34 E1 Cuando paso  $A$  para el otro lado me pone a  $A$  sobre  $B$ , debe ser un error. El segmento lo toma mal.

---

35 E2 Debe ser constante porque cuando uno aumenta el otro disminuye.

---

36 E1 Tiene que cumplir una razón. [Sigue arrastrando  $A$  por el círculo].

---



---

44 E2 Ahora, ¿cuáles deben ser las condiciones que deben cumplir  $A$  y  $B$  con respecto a  $c$ ?

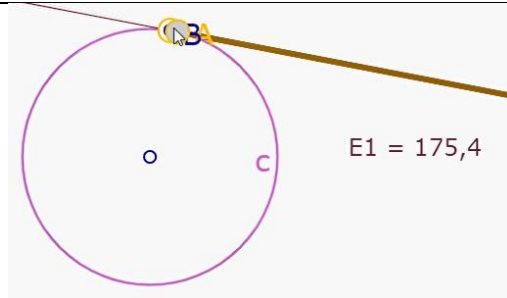
---

45 E1 Pues según la construcción,  $A$  y  $B$  deben estar sobre la misma recta, la recta debe ser secante. Si fuera tangente estarían en el mismo punto y cambiarían... no sé.

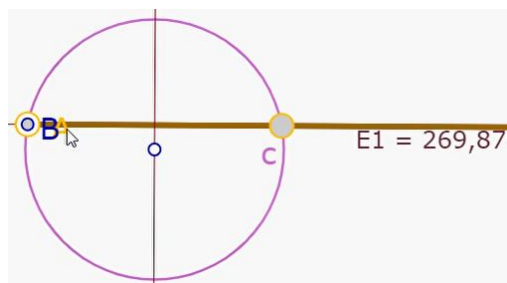
---

46 E2 [Arrastra el punto  $A$  hasta obtener perceptivamente la tangencia de la recta  $PA$  con  $c$ ].

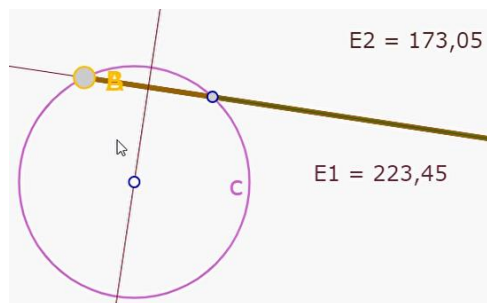
---



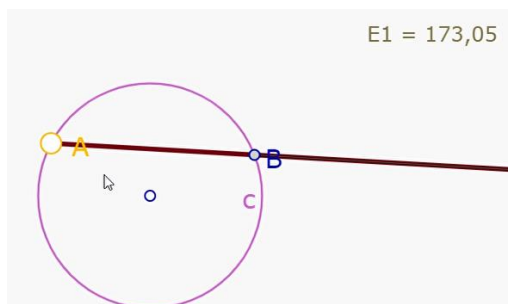
47	E1	Pero ahí cambia el valor porque se están sobreponiendo las etiquetas y toma mal los segmentos...
48	E2	Trace una perpendicular a la recta $PA$ que pase por el centro del círculo.
49	E1	[Realiza lo sugerido por E2].
50	E2	Arrastre $A$ hacia el lado izquierdo de la perpendicular.
51	E1	[Realiza lo pedido por E2].



52	E2	Vea, si $A$ está de ese lado, el producto aumenta.
53	E1	Ya, pero eso debe ser un error de construcción. Si quiere lo volvemos a hacer.
54	E2	Sí, sí. Debe mantenerse.
55	E1	¿Volvemos a construirlo, pero sin la herramienta <i>intersección</i> ?
56	E2	Pero dará lo mismo.
57	E1	No, yo creo que no dará lo mismo. [Construye otro segmento con el punto $P$ y el punto que queda sin etiqueta y usa la calculadora para multiplicar sus longitudes].



58	E2	Sí, no cambia ahora cuando $A$ está del lado izquierdo y lo arrastra.
59	E1	Sí, es que debe ser un error de construcción. Pero, en conclusión, el producto no cambia.
60	P	Si quiere borre la recta $PA$ , trázela nuevamente y dele doble clic en la intersección de $PA$ con $c$ .
61	E1	[Realiza lo pedido y construye los segmentos $PA$ , $PB$ y multiplica sus magnitudes usando la calculadora de DGPad].



62	E2	Ahora sí, ya no cambia el resultado de la multiplicación.
----	----	---

- *Reconocimiento del HG1*

❖ **Tarea de reconocimiento 1.1:** ¿Qué ocurre con el producto  $PA \cdot PB$  cuando se arrastra  $A$ ?

¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir los puntos  $A$  y  $B$  con respecto a  $c$  para que se dé ese resultado? Escriba un enunciado que relacione esas condiciones con el resultado observado.

En las líneas 63 – 74 se evidencia que los estudiantes, gracias a la exploración que realizaron en el SGD en las anteriores tareas, reconocieron las condiciones iniciales que tenían los objetos involucrados en la tarea:  $P$  debe ser un punto exterior a  $c$ , los puntos  $A, B$  deben estar en  $c$  y deben ser colineales con  $P$ . Y también reconocieron que, al cumplirse estas propiedades, entonces se cumpliría otra propiedad; es decir, relacionaron las condiciones iniciales con otra que se deduce de ellas: el producto  $PA \cdot PB$  es constante. Así, vemos que los estudiantes en la línea 74

escribieron un enunciado que se refiere a la implicación lógica entre estas propiedades; lo que corresponde al HG1.

63	E1	Ahora, respecto a qué condiciones deben cumplir $A$ y $B$ con respecto a $c$ ... deben ser una cuerda, ¿no? Pero deben estar en la misma recta de $P$ .
64	P	Escriban una proposición de la forma “ <i>Si- entonces</i> ”
65	E2	Sería... [Escribe en una hoja de papel] Si $A, B$ y $P$ son colineales... $A$ y $B$ ...
66	E1	$A$ y $B$ en $c$ .
67	E2	Entonces $PA \cdot PB$
68	E1	Hace falta agregar que $P$ sea un punto exterior.
69	E2	Listo...
70	E1	Entonces $PA \cdot PB$ es siempre igual, se mantiene constante.
71	E2	¿Se mantiene constante?
72	E1	Sí, es que no sé cómo más decirlo.
73	E2	El producto $PA \cdot PB$ siempre va a ser el mismo sin importar la ubicación.
74	E1	Sí, con que $A, B$ y $P$ sean colineales, $A$ y $B$ en la circunferencia y $P$ exterior, ya con eso cumple que el producto sea constante. [Escribe el enunciado en la hoja de Word].  <b>Tarea de reconocimiento:</b> ¿Qué ocurre con el producto $PA \cdot PB$ cuando se arrastra $A$ ? ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir los puntos $A$ y $B$ con respecto a $c$ para que se dé ese resultado? Escriba un enunciado que <u>relacione</u> esas condiciones con el resultado observado.  Si $A, B$ y $P$ son colineales, $A$ y $B$ en $c$ y $P$ exterior a $c$ , entonces $AP \cdot BP$ es constante

- *Movilización del HG1 para anticipar y verificar propiedades geométricas*

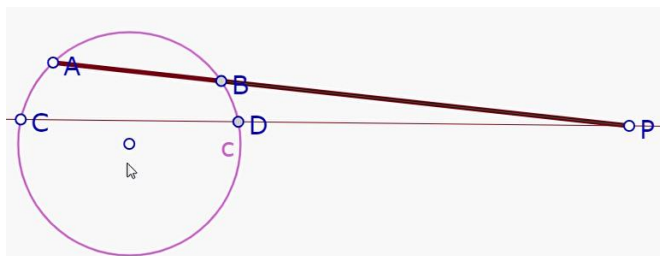
❖ **Tarea de exploración y análisis 1.2:** Trace la recta  $PC$  que corta al círculo en  $C$  y en  $D$ .

¿Qué podría concluir del producto de las magnitudes  $PC$  y  $DC$ ? ¿Qué podría concluir de los productos  $PC \cdot PD$  y  $PA \cdot PB$ ?

- ❖ **Tarea de reconocimiento 1.2:** ¿Cuáles serían ahora las condiciones y la conclusión del enunciado escrito anteriormente, teniendo en cuenta este nuevo resultado?

Una vez constatado el HG1, el profesor les propuso a los estudiantes trazar otra secante a  $c$  que pase por  $P$  y considerar sus intersecciones  $C$  y  $D$ , como vemos en las líneas 75 – 76. Luego, el profesor les preguntó qué podrían concluir del dibujo y su respuesta, en las líneas 76 – 81, da evidencia de que movilizan el HG1 para anticipar que se cumple que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ , sin recurrir a una validación experimental en el software.

75	P	Vengan, les tengo una propuesta. Vayan a DGPad, tracen otra secante al círculo y póngales nombre a las intersecciones.
76	E1	[Realiza lo propuesto por el profesor].



77	P	¿Qué podrían concluir de ese dibujo?
78	E2	Es lo mismo.
79	E1	Que $PA \cdot PB$ va a ser igual a $CP \cdot DP$ .
80	E2	Sí, da lo mismo siempre.
81	E1	Sin importar dónde los ponga va a dar lo mismo. Pero es curioso, ¿no?

Además, ante la tarea de reconocimiento 1.2, en las líneas 82 – 89 y 109 – 114 los estudiantes reconocieron que ahora los puntos  $C, D$  y  $P$  deben cumplir las mismas condiciones puestas en los puntos  $A, B$  y  $P$  en el enunciado del HG1, y si esto se cumple, entonces el resultado obtenido será la igualdad entre estos dos productos. Esto da cuenta de que usaron el HG1 para

verificar una nueva propiedad, la cual escribieron en forma de proposición con las condiciones necesarias y suficientes para que se cumpla.

82	P	¿Podrían demostrarlo?
83	E2	Pues ya estoy viendo cómo demostrarlo...
84	P	¿Cuáles serían ahora las condiciones y cuál la conclusión? Incluyendo ahora los puntos $C$ y $D$ .
85	E1	Hay que colocar otros dos puntos y que también sean colineales con $P$ .
86	E2	¿Entonces cómo quedaría?
87	E1	[Escribe en el documento Word] $C, D$ y $P$ colineales, con $C$ y $D$ en $c$ y $P$ exterior a $c$ , entonces $CP \cdot DP$ es igual a $PA \cdot BP$ .  <b>Tarea de reconocimiento:</b> ¿Qué ocurre con el producto $PA \cdot PB$ cuando se arrastra $A$ ? ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir los puntos $A$ y $B$ con respecto a $c$ para que se dé ese resultado? Escriba un enunciado que <u>relacione</u> esas condiciones con el resultado observado.  Si $A, B$ y $P$ son colineales, $A$ y $B$ en $c$ y $P$ exterior a $c$ , entonces $AP \cdot BP$ es constante. Dados $C, D$ y $P$ colineales, $C$ y $D$ en $c$ y $P$ exterior a $c$ , entonces $CP \cdot DP = AP \cdot BP$
88	P	Pero yo veo ahí dos proposiciones, ¿podrían hacer una sola?
89	E1	Necesito que $A, B$ y $P$ sean colineales y también que $C, D$ y $P$ sean colineales.
109	E1	Pero empecemos primero por escribir el enunciado.
110	E2	Sí, es verdad.
111	E1	A ver, debo tener que $A, B$ y $P$ son colineales y que $C, D$ y $P$ también son colineales... Entonces puedo colocarlos así [Reescribe la proposición en el Word]. Además, $A, B, C$ y $D$ están en $c$ y $P$ es exterior... y la conclusión ya no es que $PA \cdot PB$ es constante, sino que $PA \cdot PB = CP \cdot DP$ .  <b>Tarea de reconocimiento:</b> ¿Qué ocurre con el producto $PA \cdot PB$ cuando se arrastra $A$ ? ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir los puntos $A$ y $B$ con respecto a $c$ para que se dé ese resultado? Escriba un enunciado que <u>relacione</u> esas condiciones con el resultado observado.  Si $A, B$ y $P$ son colineales, $C, D$ y $P$ colineales, $A$ y $B$ en $c$ ; $C$ y $D$ en $c$ y $P$ exterior a $c$ , entonces $CP \cdot DP = AP \cdot BP$ .
112	E2	Se puede hacer más corta, sin poner dos veces que los puntos son exteriores a $c$ .

---

113 E1 Pues sí, los cuatro están en  $c$ , lo puedo poner en uno solo. [Edita esta idea en el Word].

**Tarea de reconocimiento:** ¿Qué ocurre con el producto  $PA \cdot PB$  cuando se arrastra  $A$ ? ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir los puntos  $A$  y  $B$  con respecto a  $c$  para que se dé ese resultado? Escriba un enunciado que relacione esas condiciones con el resultado observado.

Si  $A, B$  y  $P$  son colineales:  $C, D$  y  $P$  colineales,  $A, B, C$  y  $D$  en  $c$  y  $P$  exterior a  $c$ , entonces  $CP \cdot DP = AP \cdot BP$ .

---

114 E2 Listo, ahora sí.

---

- *Emergen hechos geométricos en la experimentación con el SGD para demostrar la igualdad del producto  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$*

❖ **Tarea de justificación 1.2:** ¿Podrían demostrar que  $PC \cdot PD = PA \cdot PB$ ?

En este momento los estudiantes estaban realizando la tarea de reconocimiento 1.2, pero se desviaron a la tarea de justificación 1.2 y por ello empezaron a pensar cómo demostrar la igualdad  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ , como vemos en la línea 90. Ahora bien, gracias a la exploración con el software, vemos que en las líneas 90 – 108, E1 consideró que podrían usar un par de triángulos semejantes, porque les permitiría establecer una proporción entre sus lados y así probar dicha igualdad entre los productos de las magnitudes; ideas que explicitaron ellos en dichas líneas.

---

90 E2 Estoy viendo que para demostrarlo hay que ver que dos triángulos sean semejantes.

---

91 E1 ¿Cuáles triángulos?

---

92 E2 Podrían ser los triángulos  $BDP$  y  $CAP$ .

---

93 E1 ¿Será que sí son semejantes?

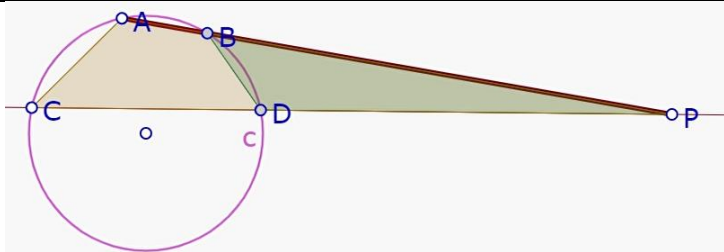
---

94 E2 Construya los triángulos a ver.

---

95 E1 [Realiza lo pedido].

---



96	E2	Arrastre a ver... ¿será que sí?
97	E1	[Arrastra el punto A] Yo estoy viendo que sí pueden ser semejantes...
98	P	¿Por qué pensaron en esos dos triángulos?
99	E2	Pues yo estaba pensando en lo de las razones y eso me llevó al fundamental (refiriéndose al Teorema Fundamental de la Proporcionalidad).
100	E1	Comparten un ángulo.
101	P	La pregunta ahorita era, ¿por qué pensaron en esos triángulos? Y se me ocurre otra, ¿por qué pensaron en triángulos?
102	E1	Pues porque si los triángulos son semejantes entonces los lados correspondientes son proporcionales.
103	E2	Y las proporciones las puedo pasar a un producto.
104	P	Y ¿por qué esos dos triángulos?
105	E1	Porque comparten un ángulo.
106	P	¿Y eso qué tiene que ver con la proporción? Por ejemplo, ¿ahí en esos triángulos aparecen las medidas del producto?
107	E1	Claro, las tenemos de una vez.
108	E2	Sí, ahí están $PA$ , $PB$ , $DP$ y $CP$ . Pero hay es que demostrar que son semejantes.

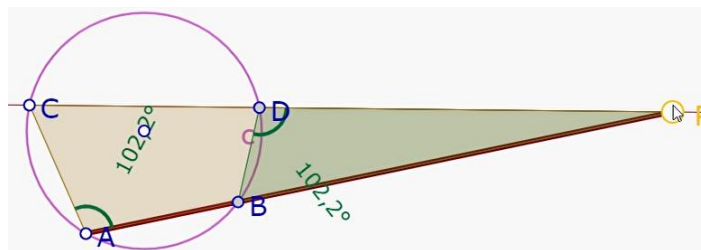
Ya en las líneas 116 – 120 se evidencia que emergieron hechos geométricos como los criterios de semejanza de triángulos, pero inicialmente dudaban sobre cuál de los tres usar para mostrar la semejanza del par de triángulos. Esto los llevó a medir los ángulos  $CAP$  y  $BDP$  para

verificar que eran congruentes y así tomar un camino: usar el criterio de semejanza AA; usando así este hecho geométrico para desarrollar una estrategia producto de la exploración con el software.

116	E2	Podemos usar el criterio AA.
117	E1	Debemos demostrar que el producto (refiriéndose a $PA \cdot PB = CP \cdot DP$ ) se cumple.
118	E2	Sí, y para eso debemos usar la semejanza. Podemos usar el AA o el ALA.
119	E1	¿Cuáles son todos?
120	E2	Son AA, ALA y LLL.

En las líneas 125 – 165 que refiere a la conversación entre los estudiantes, se destaca que a medida que iban explorando en el software, iban emergiendo otros hechos geométricos que ayudaron a la demostración. En particular el teorema del ángulo exterior (líneas 128 y 137), el teorema del ángulo inscrito (líneas 141 y 151) y ángulos opuestos por el vértice (líneas 150 y 155). Además, destacamos en las líneas 149 – 160 el uso de estos hechos geométricos de manera conjunta que les permitió realizar la demostración de la semejanza de los triángulos  $ACP$  y  $DBP$ , para así garantizar la relación  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$  como consecuencia de la proporcionalidad de los lados de los triángulos semejantes.

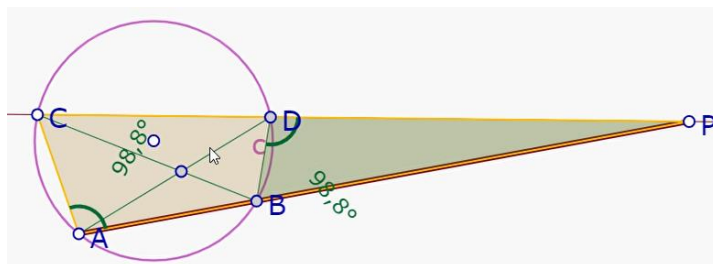
125	E1	[Mide los ángulos $CAP$ y $BDP$ ] Estos dos deben ser iguales...se ve ahí más o menos.
-----	----	--



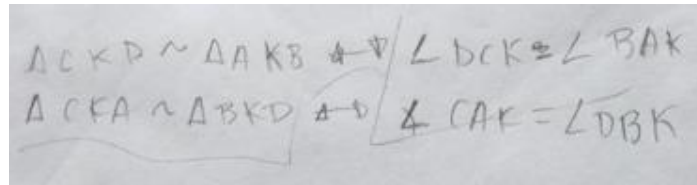
126	E2	¡Sí son iguales!
-----	----	------------------

127	E1	¿Pero por qué?
-----	----	----------------

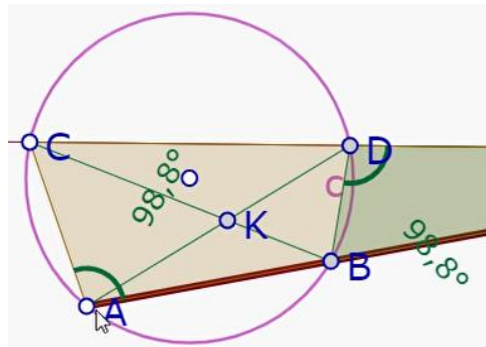
128	E2	Eso estoy pensando, porque ni $CA$ ni $BD$ son paralelos. ¿Cómo puedo hacer eso? ¿Será suma de ángulos o algo así?
129	E1	No, creo que tiene que ver con lo del ángulo interno...
130	P	Ahora les hago otra pregunta, ¿es la única semejanza posible?
131	E2	Muestre, tracemos algunas líneas a ver.
132	E1	El cuadrilátero que se forma en el círculo parece ser curioso. Puede partirlo en dos lados, trace sus diagonales.
133	P	Parece que están olvidando para dónde van.
134	E2	Es que estamos buscando más triángulos.
135	P	¿Y qué triángulos están buscando? ¿Qué es lo que quieren demostrar?
136	E2	Queremos demostrar que los ángulos $CAP$ y $BDP$ son iguales.
137	E1	Espere... ¿ $BDP$ no es igual a la suma de los ángulos exteriores?
138	E2	Estoy mirando...
139	P	¿Qué podemos decir de los ángulos $BAD$ y $BCD$ ?
140	E1	Son iguales, tienen la misma cuerda. ¿Cómo se llamaba el teorema?
141	E2	Ángulos inscritos en una circunferencia.
142	E1	¡Sí! Por el teorema de los ángulos inscritos en una circunferencia.
143	E2	Bueno, estos dos son iguales, ¿y qué?
144	P	Yo creo que se están olvidando de para dónde van.
145	E2	Pues a demostrar que los ángulos $BAC$ y $BDP$ son iguales.
146	P	¿Y por qué esos dos?
147	E2	Pues también sirve con $ACP$ y $DBP$ .
148	P	O sea, insisten en usar los triángulos $ACP$ y $DBP$ .
149	E2	Uy, pero póngale cuidado. Estos dos triángulos son semejantes. [Construye los segmentos $AD$ , $CB$ y su intersección].



150	E1	Sí, son opuestos por el vértice y tienen el ángulo inscrito.
151	E2	Entonces póngale cuidado de que este ángulo es exterior, entonces es igual a la suma de estos dos.
152	P	Escriba mejor cuáles son los ángulos que va a usar.
153	E2	[Nombra al punto de intersección de los segmentos $AD$ y $CB$ como $K$ ]. Entonces, $CKD$ es semejante al triángulo $AKB$ .
154	P	¿Por qué?
155	E1	Porque son opuestos por el vértice y porque tienen un ángulo inscrito igual.
156	E2	Sí, pueden ser $BCD$ y $BAD$ o $ADC$ y $ABC$ . Espere lo escribo en una hoja. [Escribe lo siguiente en una hoja] El ángulo $DCK$ es igual al ángulo $BAK$ . El triángulo $CKA$ es semejante al triángulo $BKD$ . Y eso implica que los ángulos...



157	P	¿Utiliza la semejanza para probar que los ángulos son congruentes o usa que los ángulos son congruentes para probar la semejanza?
158	E2	Bueno, sí. Primero los ángulos. Pero ya tengo en mi mente que son semejantes.
159	P	Listo, solo quería saber.
160	E1	Entonces $CAK$ es semejante a $DBK$ . Entonces yo digo que el ángulo $PDB$ es un ángulo exterior, entonces implica que la suma de los ángulos $BCD$ y $DBC$ es igual a ese ángulo. Y ahí lo curioso, porque ahora digo que el ángulo $CAK$ más el ángulo $BAK$ es igual al ángulo $CAB$ .



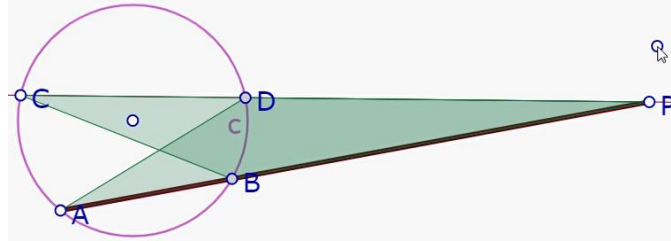
161	E1	¿Por qué no puede con $P$ de una vez? El ángulo $CAP$ .
-----	----	---

162	E2	Igual. El ángulo $BDC$ más $CBD$ es igual al ángulo $BDP$ , y con la congruencia de los ángulos dentro del círculo, $CAB$ es igual a $BDP$ .
163	E1	Y ya.
164	E2	Sí, es que para copiarlo todo...
165	E1	Y así los ángulos son semejantes, los triángulos son semejantes y los lados proporcionales.

En estas líneas vemos cómo los estudiantes reconocieron en la construcción propiedades geométricas directamente y con ayuda del arrastre, lo que los llevó a pensar en los hechos geométricos mencionados, de los que se evidencia que conocen las condiciones de sus antecedentes que permiten que el consecuente sea verdadero y la relación misma que existe entre ellos, para ir construyendo un argumento deductivo que los llevó a concluir que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .

Luego de que los estudiantes demostraran la semejanza de los triángulos  $ACP$  y  $DBP$ , el profesor les propuso considerar los triángulos  $PBC$  y  $PDA$  con el fin de mostrarles otro camino a la demostración que acababan de realizar. Ante esto, vemos que en la línea 167 E2 no tuvo duda de que dichos triángulos también son semejantes y para probarlo, en las líneas 169 – 173 partió del hecho de que ya tenía un ángulo en común y usó el teorema del ángulo inscrito para garantizar otro par de ángulos congruentes, y haciendo uso del teorema de semejanza AA concluyó que los triángulos  $ACP$  y  $DBP$  eran semejantes. Finalmente, esta semejanza les sirvió para plantear una proporción entre sus lados y así llegar nuevamente a que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .

166	P	Listo, pero ahora tengo la pregunta de por qué insistieron tanto en esos dos ángulos. Ya lo demostraron, por supuesto, pero si quiere borre los dos triángulos y considere los triángulos $PBC$ y $PDA$ .
-----	---	---



167	E2	Ah, obvio, profe. Esos también son semejantes.
168	P	¿Por qué?
169	E1	A ver, ¿por qué sería? Mismo ángulo...
170	E2	Es lo mismo, comparten un ángulo y el otro par es igual por ser ángulos inscritos.
171	P	Yo quisiera que escribieran la semejanza completa para ver cómo de esa semejanza obtienen la proporción.
172	E2	[Escribe en la hoja la semejanza de los triángulos $CPB$ y $APD$ y la proporción que se obtiene].
173	E1	Listo.

Vemos cómo la exploración con el software les permite a los estudiantes poner en juego sus conocimientos para recurrir a teoremas que les permiten garantizar propiedades geométricas que requieren para realizar la demostración pedida en la tarea de justificación.

- *Constatación del HG2*

Luego de que los estudiantes constataron y usaron el HG1, se dio paso a las tareas para constatar el HG2.

- ❖ **Tarea de exploración y análisis 1.3:** ¿Qué relación geométrica existe entre la recta  $PA$  y  $c$  cuando los puntos  $A$  y  $B$  coinciden? ¿El enunciado escrito anteriormente sería válido bajo estas nuevas condiciones de los puntos  $A$  y  $B$ ?
- ❖ **Tarea de reconocimiento 1.3:** ¿Debería ser reformulado el enunciado escrito en la tarea anterior? ¿Cuál sería ese nuevo enunciado?

Así, en el contexto de la tarea de exploración y análisis 1.3, vemos que en la línea 175 E2 anticipó que la recta  $PA$  será tangente a  $c$  si los puntos  $A$  y  $B$  coinciden, y posteriormente verificó su afirmación arrastrando el punto  $A$  sobre  $c$  hasta coincidir con  $B$ . Luego, vemos que en la línea 177 usaron el resultado anteriormente probado ( $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ) para concluir que ahora que la recta  $PA$  era tangente a  $c$ , se cumple que  $PA \cdot PA = PC \cdot PD$ , movilizandó así el HG1 y un resultado derivado de este para deducir otra propiedad; razonamiento que fue mediado por la interacción que tuvieron con el software.

Ya en las líneas 178 – 192 vemos que los estudiantes reconocen que hay una nueva relación lógica entre las propiedades de los objetos que, si se cumplen, se obtendrá como consecuencia que  $PA^2 = PC \cdot PD$ ; y esto lo evidenciamos cuando en la línea 192 escriben las condiciones necesarias y suficientes que dan cuenta del HG2.

---

174 P Yo creo que podemos pasar ahora a la siguiente situación.

**Tarea de exploración 2:** ¿Qué relación geométrica existe entre la recta  $PA$  y  $c$  cuando los puntos  $A$  y  $B$  coinciden? ¿El enunciado escrito anteriormente sería válido bajo estas nuevas condiciones de los puntos  $A$  y  $B$ ? ¿Debería ser reformulado el enunciado? ¿Cuál sería ese nuevo enunciado?

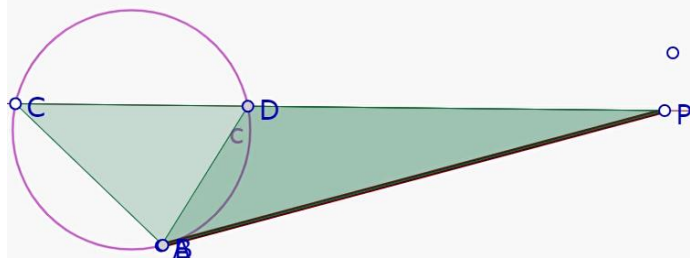
---

175 E2 [Lee la primera pregunta] ¡Ah! Pues es tangente, serían el mismo punto.

---

176 E1 [Arrastra el punto  $A$  de modo que perceptivamente coincida con  $B$ ].

---



177	E2	[Lee la segunda pregunta] Pues si $A$ coincide con $B$ , quedaría $CP \cdot DP = PA \cdot PA$ .
178	P	Escríballo. Si quiere copie y pegue el enunciado y modifíquelo.
179	E2	¿Pero qué cambiaría? Yo creo que queda igual.
180	E1	No porque ahora $A$ y $B$ son el mismo punto. Llamemos $Q$ al punto donde coinciden $A$ y $B$ .
181	P	Vayan al DGPad. ¿ $Q$ lo van a llamar el punto donde coinciden $A$ y $B$ ?
182	E1	Sí, ¿por qué no?
183	P	¿De qué otra manera podrían llamarlo?
184	E1	Punto de tangencia...
185	P	Entonces de qué otra manera podría escribir la proposición.
186	E1	Entonces pongo $Q$ punto de tangencia.
187	P	¿Qué puedo decir de $PQ$ ?
188	E2	Es tangente a $c$ en $Q$ .
189	P	Excelente. ¿Cómo quedaría la proposición?
190	E1	Si $QP$ tangente a $c$ en $Q$ ...
191	E2	Y $C, D$ y $P$ colineales... Entonces $QP^2$ es igual a $CP \cdot DP$ . ¡Uy, una media geométrica!
192	E1	¡Sí! Entonces quedaría... [Escribe la proposición en el documento Word].

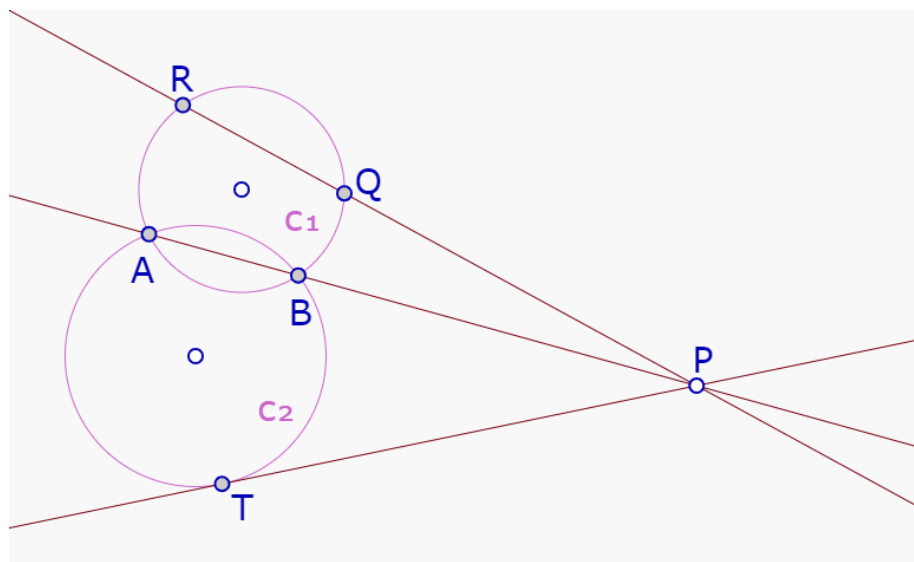
Q punto donde coinciden A y B  
 Si QP tangente a c en Q; C, D y P colineales, C y D en c y P exterior a c, entonces  $CP \cdot DP = QP^2$

193	P	Listo, pasemos a la siguiente situación.
-----	---	--

- *Movilización del HG1 y HG2 en tareas de anticipación y verificación*

Una vez constatados el HG1 y el HG2, se les propuso a los estudiantes tareas de anticipación, verificación, justificación y construcción en las que debían hacer uso de estos hechos geométricos.

- ❖ **Tarea de anticipación 1.1:** Sin recurrir al software DGPad – Colombia, analice detalladamente la siguiente imagen para dar respuesta a las preguntas propuestas.



En la figura  $c_1$  y  $c_2$  son círculos que se cortan en  $A$  y  $B$ .  $PT$  es tangente a  $c_2$ . Escriba una ecuación que relacione las magnitudes  $PQ$ ,  $PR$  y  $PT$ .

- ❖ **Tarea de verificación 1.1:** ¿Es posible construir un punto  $T'$  en  $c_1$  de tal manera que  $PT = PT'$ ? ¿Qué relación hay entre  $PT'$  y  $c_1$ ?

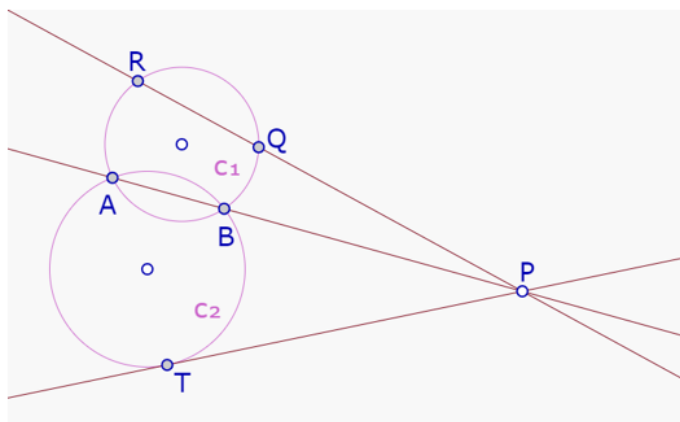
Así, en la tarea de anticipación 1.1 situada en las líneas 194 – 199, vemos que los estudiantes movilizaron el HG1 para garantizar que  $RP \cdot QP = PA \cdot BP$  y el HG2 para concluir que  $TP^2 = PA \cdot BP$ , obteniendo que  $TP^2 = QP \cdot RP$ . Sin embargo, a pesar de haber llegado a la conclusión esperada, en la línea 204 vemos que se vieron en la necesidad de partir de las

condiciones dadas y realizar pequeñas implicaciones lógicas en las que se usaron el HG1 y HG2 para volver a concluir que  $TP^2 = QP \cdot RP$ ; movilizandando así conjuntamente los dos hechos geométricos estudiados para anticipar propiedades geométricas, sin recurrir a una validación experimental. Esto pudo deberse a que querían realizar un escrito que diera cuenta del razonamiento deductivo que les permitió llegar a la conclusión y no dejar tal razonamiento solo de manera verbal y guiado por lo que veían en la imagen.

194 E1 [Lee el enunciado]. Bien, primero miremos la imagen y ya luego vamos a las preguntas.

Segunda parte

Sin recurrir al software DGPad – Colombia, analice detalladamente la siguiente imagen para dar respuesta a las preguntas propuestas.



En la figura  $c_1$  y  $c_2$  son círculos que se cortan en  $A$  y  $B$ .  $PT$  es tangente a  $c_2$ . Escriba una ecuación que relacione las magnitudes  $PQ, PR$  y  $PT$ .

195 E2 Ahora hay dos círculos... ¡Ay! Pero estos dos círculos comparten dos puntos, entonces imagino que tendrán semejanza entre las magnitudes.

196 E1 Y hay tres rectas.

197 E2 ¡Ah, claro! Póngale cuidado, profe.  $TP^2 = PA \cdot BP$  y  $RP \cdot QP = PA \cdot BP$ .

198 E1 Sí, exacto.

199 E2 Y la conclusión final es que  $TP^2 = QP \cdot RP$ . Eso es lo que concluimos.

200 E1 ¿Por qué? Pues porque lo estamos viendo ahí. Listo, vamos a las preguntas.

201 P Me parece curioso que hayan respondido a las preguntas sin saberlas.

202 E1 ¡Es que ahí se ve!

203	E2	¡La ecuación ya la dijimos!
204	E1	Sí, pero debemos tener en cuenta las proposiciones. Tengo que $PA \cdot PB = QP \cdot RP$ y que $TP^2 = PA \cdot PB$ y por transitividad tengo que $TP^2 = QP \cdot RP$ .
205	E2	[Escribe la ecuación en el Word].  En la figura $c_1$ y $c_2$ son círculos que se cortan en $A$ y $B$ . $PT$ es tangente a $c_2$ . Escribe una ecuación que relacione las magnitudes $PQ$ , $PR$ y $PT$ .  $PQ \cdot PR = AP \cdot BP$ $TP^2 = AP \cdot BP$ Reglas algebraicas: I $TP^2 = PQ \cdot PR$
206	P	Bien, siguiente pregunta.
<p>Y para dar respuesta a la tarea de verificación, vemos que en las líneas 213 – 215 los estudiantes aplicaron la idea del enunciado de la tarea de exploración y análisis 1.3 para hacer coincidir los puntos <math>R</math> y <math>Q</math> en el punto de tangencia <math>T'</math> en <math>c_1</math>, para, posteriormente en las líneas 231 – 234 hacer uso del HG2 y concluir que se cumple <math>T'P = TP</math>.</p>		
207	E2	[Lee la siguiente pregunta].  ¿Es posible construir un punto $T'$ en $c_1$ de tal manera que $PT = PT'$ ? ¿Qué relación hay entre $PT'$ y $c_1$ ?
208	E1	Sí... es posible. Si son iguales tienen la misma distancia.
209	E2	Pues fácil, con un círculo.
210	P	¿Y cómo garantiza que los círculos se corten?
211	E1	Eso es a lo que voy, ¿qué pasa si no corta? Ahí porque es tangente estoy pensando que puede haber algo.
212	E2	Pues de ser posible, sí es posible construirlo.
213	E1	Puede ser que $Q$ y $R$ coincidan en un punto y si lo llamamos $T'$ , entonces sí es.
214	E2	Sí, entonces aplicamos la transitividad y lo tenemos.
215	E1	Sí, decimos que $T'$ es donde coinciden $R$ y $Q$ .
216	P	¿En qué punto coinciden $R$ y $Q$ ?

217	E1	En el punto de tangencia.
218	P	¿Y cómo construye ese punto?
219	E2	Con una tangente a $c_1$ .
220	P	¿Cualquier tangente a $c_1$ ?
221	E1	Sí, no importa.
222	P	¿Cuántas tangentes a $c_1$ existen?
223	E2	Dos.
224	P	¿Dos?
225	E1	Pues por P existen dos tangentes.
226	P	¿Entonces cualquier tangente a $c_1$ ?
227	E1	No, la tangente a $c_1$ que pasa por P.
228	P	Entonces necesitan la tangente $PT'$ .
229	E1	Sí, tangente en $T'$
230	P	Entonces si $PAT'$ es tangente a $c_1$ en $T'$ ...
231	E1	$TP = T'P$ .
232	P	¿Por qué?
233	E2	Por todo lo que acabamos de hacer.
234	E1	Sí, porque si R y Q coinciden en $T'$ , entonces $T'P^2 = TP^2$ . Y ahí sale que $T'P = TP$ .
235	P	Ok. Podemos pasar a la siguiente situación.

- *Uso de la técnica de análisis para resolver el segundo problema de Apolonio*

Como tarea final de esta primera actividad, se les propuso a los estudiantes resolver el segundo problema de Apolonio.

- ❖ **Tarea de construcción 1.1:** Dada una recta  $l$  y dos puntos  $A$  y  $B$  al mismo lado de  $l$ , construir un círculo  $c$  que sea tangente a la recta  $l$  y pase por los puntos  $A$  y  $B$ .

- ❖ **Tarea de justificación 1.3:** ¿Cuántas soluciones existen a este problema? Es decir, ¿cuántos círculos son tangentes a la recta dada y pasan por los dos puntos dados? ¿Cuál sería la respuesta a esta pregunta si los puntos no estuvieran al mismo lado de  $l$ ?

En ese sentido, vemos que en las líneas 237 y 238 los estudiantes hicieron uso de la técnica de análisis y realizaron un dibujo en el papel y en el software con el problema resuelto. Esto les permitió empezar a reconocer y utilizar propiedades geométricas como el uso de la mediatriz entre  $A$  y  $B$  para estimar la posición del centro del círculo, como lo vemos en la línea 248. Aunque esta idea no sería de utilidad para resolver el problema. Sin embargo, evidenciamos que en las líneas 253 – 257 los estudiantes, guiados por algunas preguntas del profesor, vieron en el dibujo que los puntos  $A, B, T, K$  y  $W$  cumplían con las condiciones del HG1 y en consecuencia se obtenía que  $TW \cdot KW = AW \cdot BW$ , y considerando  $R$  como el punto de tangencia de  $l$  con  $c$ , concluyeron que  $RW^2 = AW \cdot BW$ , movilizándolo el HG2 para garantizar esta propiedad. Y este último resultado lo relacionaron con el teorema de la media geométrica para tomar un camino a la solución del problema: construir un triángulo rectángulo cuya altura sea media geométrica entre  $WA$  y  $WB$ . Así, nuevamente, gracias a la exploración realizada con el software pudieron traer a colación el teorema de la media geométrica para desarrollar una estrategia hacia la solución del problema.

De modo que las líneas 258 – 280 dan cuenta del procedimiento de construcción de dicho triángulo, en el que podemos evidenciar que se presentó la dificultad de garantizar el ángulo recto; pero fue resuelta usando el teorema de Tales y así construir el triángulo buscado, como vemos en la línea 281. En consecuencia, en las líneas 282 – 285, los estudiantes usan la altura del triángulo construido para hallar el punto de tangencia con la recta  $l$  y usando la herramienta del software de *círculo por tres puntos* construyen un círculo que es solución al problema y lo verifican usando la prueba del arrastre.

En las líneas 286 – 290 vemos que los estudiantes utilizan nuevamente el teorema de la media geométrica para hallar el otro punto de tangencia con la recta  $l$  y así construir el otro círculo que es solución al problema, pues tal como se realizó la construcción, hay dos segmentos desde  $W$  que son media geométrica entre  $WA$  y  $WB$  y esto lo notaron los estudiantes gracias a la imagen proyectada por el software, tal cual lo dice E1 en la línea 289.

---

236 E2 [Lee el enunciado].

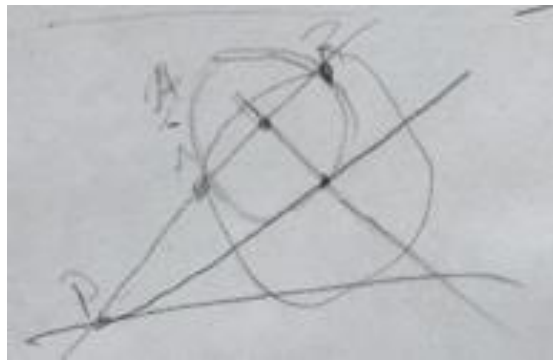
**Tercera parte**

Resuelva el siguiente problema propuesto. I

**Problema:** Dada una recta  $l$  y dos puntos  $A$  y  $B$  al mismo lado de  $l$ , construir un círculo  $c$  que sea tangente a la recta  $l$  y pase por los puntos  $A$  y  $B$ .

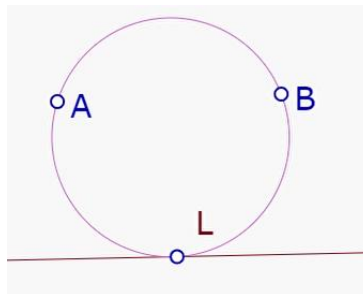
---

237 E2 [Realiza un dibujo en el papel con el problema resuelto, dibujando otro la mediatriz entre  $A$  y  $B$ , un círculo con centro en la mediatriz y que pasa por  $A$  y  $B$ ].




---

238 E1 [En el software construye la recta, los puntos dados y un círculo que perceptivamente da solución al problema].



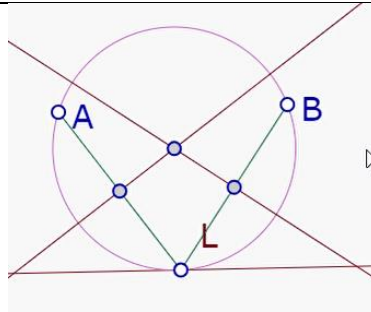

---

239 E2 Y queremos buscar el centro del círculo.

---

240 E1 Eso es fácil [traza las mediatrices de dos pares de puntos y su intersección]. Listo, ese punto es el centro.

---

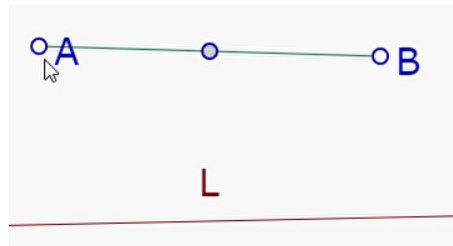


241 E2 Primero habría que hallar ese triángulo.

242 E1 Sí, podríamos construir el incírculo y ese sería tangente a los tres lados. Pero es mucha vuelta. [Borra las mediatrices].

243 E2 ¿Cómo hallamos el centro?

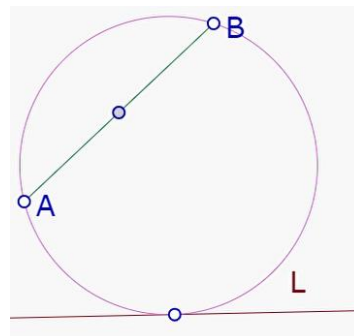
244 P ¿Por qué pone los puntos  $A$  y  $B$  como si fueran paralelos  $AB$  y  $L$ ?



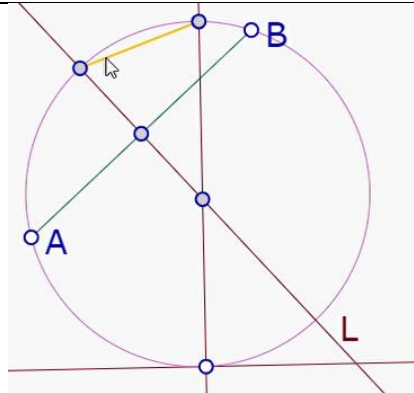
245 E2 Mueva  $A$ .

246 P Vuelva a dibujar el círculo.

247 E1 [Realiza lo pedido].

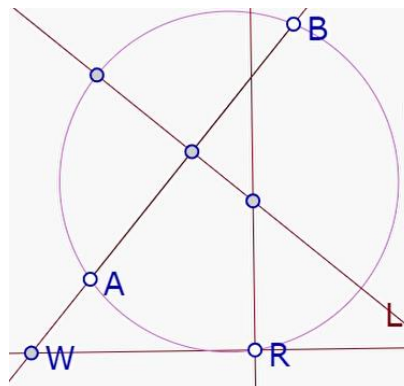


248 E2 y E1 [Realizan exploraciones con el software buscando relaciones entre triángulos y mediatrices para hallar el centro del círculo].



249 P Venga, trace la recta  $AB$ .

250 E1 [Realiza lo pedido y nombra  $W$  a la intersección de esta recta con  $l$  y  $R$  al punto de tangencia].

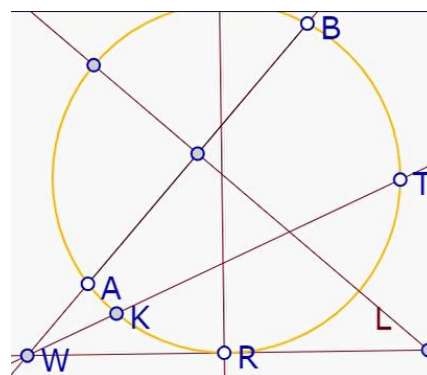


251 E2 No tenemos  $R$ , ¿cómo hallamos  $R$  con esas dos rectas?

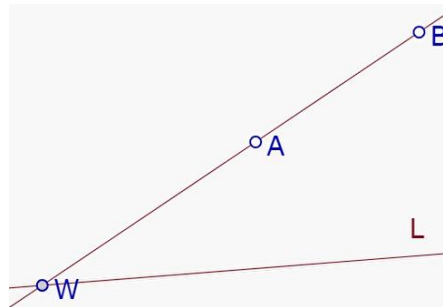
252 E1 Pues el centro del círculo es la intersección de las dos rectas cuando  $R$  es tangente.

253 P Construya un punto sobre el círculo y trace la recta que va de  $W$  a ese punto y póngales nombre a sus intersecciones.

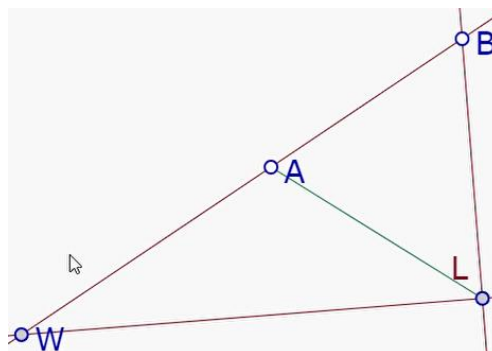
254 E1 [Realiza lo pedido].



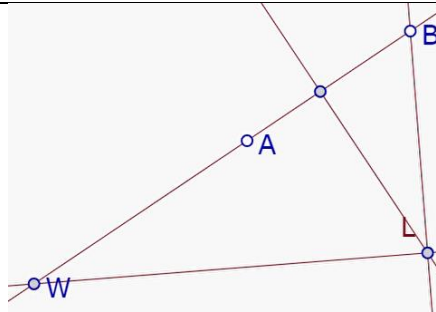
255	E1	Este es el ejercicio de antes.
256	P	¿Cómo así que ese es el ejercicio de antes?
257	E1	Sí, es lo mismo, porque yo puedo decir que $TW \cdot KW = AW \cdot BW$ . Y sería lo mismo con $R$ ... Yo puedo decir que $AW \cdot BW$ es lo mismo que $RW^2$ . Y como ya tengo estas dos... Haga un rectángulo y saque la cuadratura, porque esa es la distancia que necesito.
258	E2	Ah, listo. Entonces borremos todo y hagamos la construcción. [Borra algunos objetos geométricos].



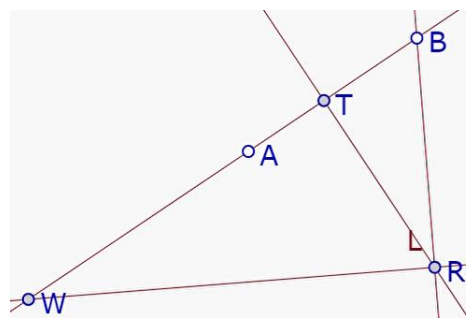
259	P	¿Necesita hacer un rectángulo?
260	E1	No, podríamos sacar de una vez la cuadratura, ¿no? Pero yo siempre hago primero el paso del rectángulo, me parece más cómodo.
261	E2	Listo, necesitaríamos la media geométrica.
262	E1	[Traza una perpendicular a $l$ y traza el segmento que va desde A hasta el punto de intersección de la perpendicular] Listo, ahí está, ¿no?  (Es posible que estén intentando usar el teorema de la media geométrica: en un triángulo rectángulo la longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa es media geométrica de la medida de los dos segmentos en que esta divide a la hipotenusa)



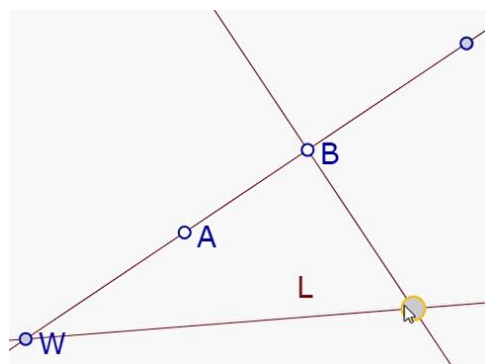
263	E2	Ese ángulo no es de $90^\circ$ . El del segmento.
264	E1	Buen punto. [Borra el segmento y traza una perpendicular a $AB$ ]. Ahora sí.



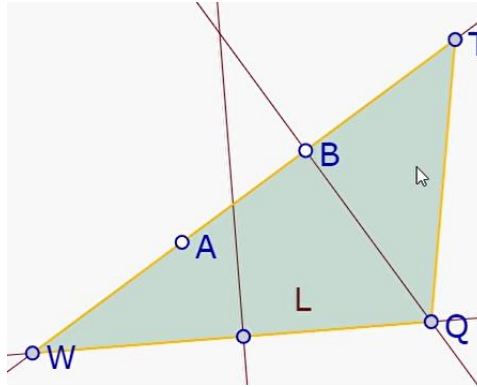
265	E2	Listo, esa es la media geométrica.
266	P	¿Media geométrica de quiénes?
267	E2	De $W$ al punto y $B$ al punto. Póngales nombre a esos puntos.



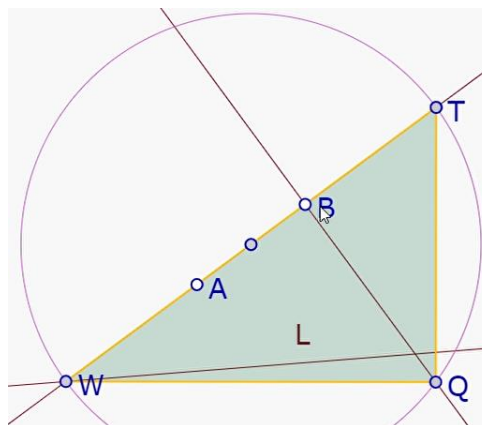
268	E2	$BT$ es a $RT$ como $RT$ es a $WT$ .
269	P	¿Y esa es la media geométrica que quieren? La de $BT$ y $WT$ .
270	E1	No, yo necesito es la de $WA$ y $BA$ .
271	P	¿Y esa es la que construyó?
272	E1	No... [Borra las perpendiculares, copia la distancia $AW$ con la herramienta <i>compás</i> y la lleva a partir de $B$ , para obtener un nuevo punto. Luego traza una perpendicular a $AB$ ]. (Está buscando que los segmentos con longitudes $AW$ y $BW$ no queden solapados, sino seguidos uno del otro, para poder usar el teorema de la media geométrica).



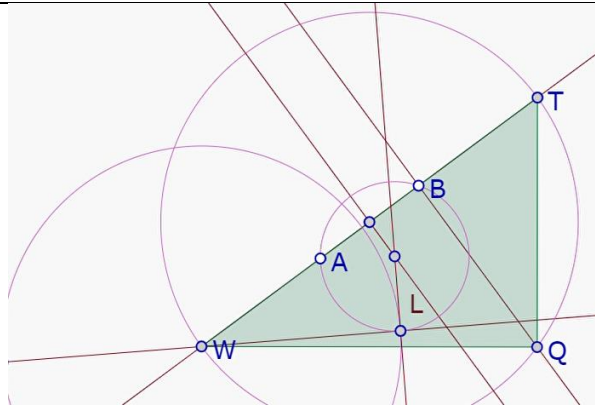
273	E2	Listo, esa es la media geométrica.
274	P	¿Esa es media geométrica de quiénes? Póngales nombre a los puntos y construya el triángulo.
275	E1	[Realiza lo pedido]. No, pero el triángulo $WTQ$ no es rectángulo...



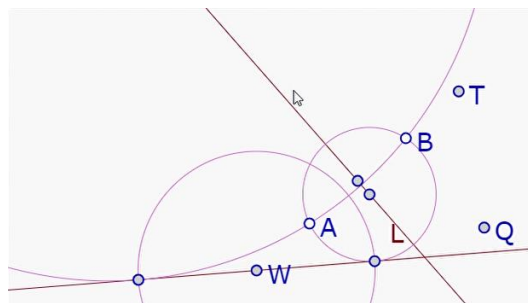
276	P	¿Y entonces?
277	E1	Necesito que ese triángulo sea rectángulo. Que $TQW$ sea recto.
278	P	¿Cuáles son las condiciones del teorema de la media geométrica?
279	E1	Que ambos triángulos sean rectángulos. El triángulo $WTQ$ y $QBT$ .
280	P	¿Entonces que van a hacer para resolver ese problema? $Q$ no es el punto que están buscando.
281	E1	No... necesito que sea de $90^\circ$ ... entonces necesito que esté en un semicírculo. [Construye un círculo con diámetro $WT$ y nombra $Q$ a la intersección del círculo con la perpendicular de $AB$ ]. Listo, este sí sería el triángulo rectángulo.



282	E2	Ahora sí, esa es la distancia que queremos.
283	E1	[Copia la distancia $BQ$ a partir del punto $W$ , marca la intersección del círculo con la recta $l$ y construye el círculo que pasa por $A$ , $B$ y la intersección].



284	E2	Ahora arrastre para ver que se mantenga.
285	E1	[Arrastra el punto $A$ y la construcción resiste el arrastre].
286	P	Tengo una pregunta, ¿cuántas soluciones hay a ese problema? Es la pregunta de la siguiente situación.  ¿Cuántas soluciones existen a este problema? Es decir, ¿cuántos círculos son tangentes a la recta dada y pasan por los dos puntos dados? ¿Cuál sería la respuesta a esta pregunta si los puntos no estuvieran al mismo lado de $l$ ?
287	E1	Si los puntos están al mismo lado, hay solo una solución.
288	P	¿Seguro?
289	E1	¡Ah, no! Hay dos porque la otra intersección también es media geométrica.
290	E2	[Construye el círculo faltante que es solución al problema].



291	E1	Y listo, ya no puede haber más. Y si los puntos están a lados distintos de $l$ , entonces no existe solución, porque la cuerda corta a $l$ .
292	P	¿Y eso qué tiene que ver con que el círculo sea tangente a la recta?
293	E1	Porque el círculo pasaría por $A$ y $B$ y la recta cortaría al círculo.
294	P	Ok. Entonces, ¿no existe un círculo tangente a la recta que pase por esos puntos en ese caso?

---

295	E1	No, nada, no existe.
296	E1	Tienen que estar siempre al mismo lado.

---

Lo ocurrido en estas líneas da cuenta de que el uso de la técnica de análisis potenciada con el arrastre y la construcción de objetos auxiliares les permitió a los estudiantes encontrar y construir relaciones entre los objetos dados y los auxiliares que los llevaron a establecer relaciones con el objetivo de la tarea de construcción. Además, en este proceso emergieron hechos geométricos como el HG1, HG2, teorema de Tales y teorema de la media geométrica que fueron clave para establecer dichas relaciones y solucionar el problema.

### **7.2 Segunda actividad:**

Las tareas que se presentan en esta segunda actividad pretenden contribuir a la construcción y el uso del HG3: si dos círculos pasan por un punto y sus centros junto con el punto están alineados, entonces los círculos son tangentes en dicho punto; y del HG4: si dos triángulos están en posición de similitud, entonces sus circuncírculos son tangentes en el vértice común.

En esta segunda actividad se realizaron tareas de exploración, análisis y reconocimiento con la intención de promover la construcción del HG3 y HG4. Posteriormente, luego de la constatación de estos hechos geométricos, se presentaron tareas de anticipación, verificación, justificación y construcción, en las que se buscaba promover el uso de los hechos geométricos estudiados y algunos ya interiorizado por los estudiantes para resolver determinadas situaciones.

A continuación, presentamos el análisis y el soporte de las tareas de esta segunda actividad en el orden en el que se realizó el análisis a priori.

- *Reconocimiento del HG3*

- ❖ **Tarea de exploración y análisis 2.1:** Sean  $A$  un punto libre y  $c_1$  y  $c_2$  dos círculos que pasan por  $A$  y tienen centros  $O_1$  y  $O_2$  respectivamente. ¿Bajo qué condiciones los dos círculos son tangentes?
- ❖ **Tarea de reconocimiento 2.1:** Escriba un enunciado que dé cuenta de esa relación.

Los estudiantes, luego de leer la tarea de exploración y análisis 2.1, construyeron en el software un punto libre  $A$ , un círculo  $c_1$  con centro en  $O_1$  y radio  $O_1A$ , y un círculo  $c_2$  con centro en  $O_2$  y radio  $O_2A$ ; y arrastraron los objetos para buscar alguna relación entre ellos que les permitiera emitir una conjetura sobre la tangencia de los círculos, como se ve en las líneas 1 – 4.

Así, vemos que en las líneas 4 – 15, los estudiantes conjeturaron que los círculos serían tangentes cuando sus centros y el punto  $A$  estuvieran alineados, conjetura que escribieron en forma de proposición nombrando los objetos de la construcción, como vemos en la línea 15. Luego, el profesor les pidió que escribieran la proposición de forma general, sin nombrar los objetos de la construcción, y así lo hicieron, como se evidencia en la línea 20. Sin embargo, la proposición no contaba todavía con las condiciones necesarias y suficientes que dan cuenta del HG3, por lo que el profesor en otra ventana del software les mostró un ejemplo en el que se cumplían las condiciones dadas por ellos en su proposición, pero los círculos no eran tangentes. Ante esta situación los estudiantes se dieron cuenta que faltaba una condición, que como vemos en la línea 28, E1 acierta diciendo *¡Dos círculos que pasan por A! Tienen que pasar por A. Falta decir que tienen que pasar por A.*

---

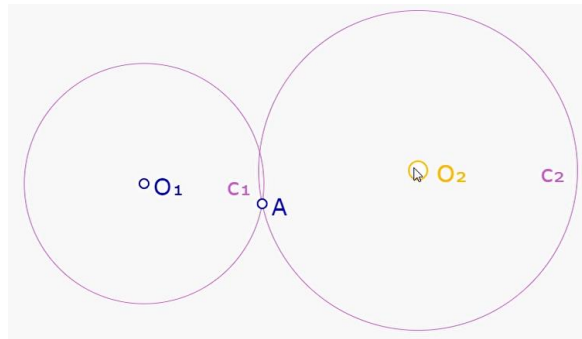
1 E1 y E2 [Leen la primera tarea de la segunda actividad].

---

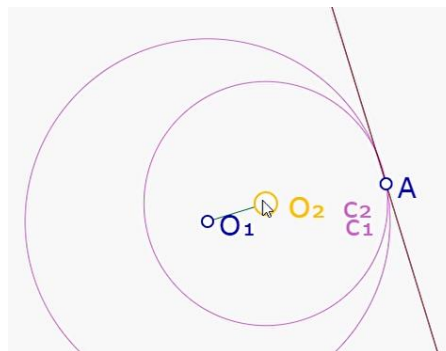
Lea detenidamente los enunciados y responda detalladamente a las preguntas propuestas

**Tarea 1:** sean  $A$  un punto libre y  $c_1$  y  $c_2$  dos círculos que pasan por  $A$  y tienen centros  $O_1$  y  $O_2$  respectivamente. ¿Bajo qué condiciones los dos círculos son tangentes? Escriba una proposición de la forma si-entonces que dé cuenta de esa relación.

- 2 E1 [Construye un círculo  $c_1$  con centro en  $O_1$  y radio  $O_1A$ , un círculo  $c_2$  con centro en  $O_2$  y radio  $O_2A$ ].

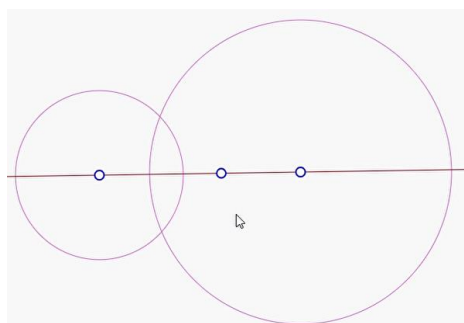


- 3 E2 ¿Cuándo son tangentes?
- 4 E1 Cuando los tres están alineados. Cuando los centros y el punto  $A$  están alineados. [Arrastra el punto  $O_2$  para ajustar los puntos y queden colineales].
- 5 E2 Sí, la condición es que los tres estén alineados.
- 6 P ¿Deben estar alineados en ese orden?
- 7 E2 Pues sí...
- 8 E1 Claro, porque cómo voy a poner los dos centros de un solo lado... ¡Ah, no! Sí se puede.
- 9 E2 [Mueve el punto  $O_2$  a la izquierda de  $A$  y ajusta el dibujo para ver la tangencia de los círculos].



- 10 E1 La única condición es que estén alineados.
- 11 E2 Ahora la proposición.

12	E1	Los centros de las circunferencias con el punto deben estar alineados.
13	E2	Deben de ser colineales. Entonces, si los centros...
14	E1	Pues ya tienen nombre arriba, pongamos esos, $O_1$ y $O_2$ . De una, si $O_1$ , $O_2$ y A son colineales...
15	E2	Entonces los dos círculos son tangentes en A. [Escribe esta proposición en el Word].
<p>Lea detenidamente los enunciados y responda detalladamente a las preguntas propuestas</p> <p><b>Tarea 1:</b> sean A un punto libre y <math>c_1</math> y <math>c_2</math> dos círculos que pasan por A y tienen centros <math>O_1</math> y <math>O_2</math> respectivamente. ¿Bajo qué condiciones los dos círculos son tangentes? Escriba una proposición de la forma si-entonces que dé cuenta de esa relación.</p> <p>Si <math>O_1</math>, <math>O_2</math> y A son colineales entonces, <math>c_1</math> y <math>c_2</math> son tangentes en A</p>		
16	P	Bien, ahora tengo una pregunta. Imagínense que ustedes le van a comentar a alguien el resultado que acaban de encontrar, pero sin nombrar ningún objeto. ¿Cómo escribirían la proposición?
17	E1	Ah, sin nombrar objetos. Entonces, si dos centros de dos círculos...
18	E2	Si los centros de los círculos y un punto libre son colineales, entonces los círculos son tangentes en el punto libre.
19	E1	Sí...
20	E2	[Escribe esta proposición en el Word].
<p>Si <math>O_1</math>, <math>O_2</math> y A son colineales entonces, <math>c_1</math> y <math>c_2</math> son tangentes en A</p> <p>Si dos centros de dos círculos y un punto libre son colineales entonces, los círculos son tangentes en el punto libre</p>		
21	E1	Sí, yo creo que sí.
22	P	[En otra ventana del software DGPad construye dos círculos $c_1$ y $c_2$ con centro en $O_1$ y $O_2$ respectivamente, la recta $O_1O_2$ y un punto $P_1$ en $O_1O_2$ ]. ¿Los círculos son tangentes en ese punto?



23	E2	¡No!
24	E1	Buena pregunta, ahí ya se cortan los dos círculos.
25	P	Lean la proposición que escribieron otra vez.
26	E2	Ahí tocaría decir que los radios...No sé.
27	P	¿Qué hace falta?
28	E1	¡Dos círculos que pasan por $A$ ! Tienen que pasar por $A$ . Falta decir que tienen que pasar por $A$ .
29	E2	¿El círculo pasa por el punto o el punto pasa por el círculo?
30	E1	No, los círculos pasan por el punto. Queda: si dos círculos pasan por un punto libre, sus centros y el punto son colineales...
31	E2	Entonces son tangentes.
32	E1	Ajá. [Escribe esta proposición en el Word].  <p style="margin-left: 40px;"><u>Si <math>O_1</math>, <math>O_2</math> y <math>A</math> son colineales entonces, <math>c_1</math> y <math>c_2</math> son tangentes en <math>A</math></u></p> <p style="margin-left: 40px;">Si dos centros de dos círculos y un punto libre son colineales entonces. los círculos son tangentes en el punto libre</p> <p style="margin-left: 40px;">Si dos círculos pasan por un punto libre y son colineales los centros de los círculos y el punto entonces, los círculos son tangentes en el punto libre</p>
33	E2	Ya, listo.

Esto les permitió a los estudiantes robustecer la proposición que habían escrito y proponer una nueva que sí da cuenta de las condiciones necesarias y suficientes del HG3, como se evidencia en la línea 32. Además, vemos que esta proposición fue validada de forma experimental, ya que no se realizó una demostración formal dada la complejidad que tendría para los estudiantes; de modo que se hizo uso de la técnica de verificación experimental por parte del profesor y los estudiantes para este hecho geométrico.

- *Emergen hechos geométricos que ayudan al reconocimiento del HG4*

Luego de realizar las tareas referentes a la constatación del HG3, se dio paso a las tareas para constatar el HG4.

- ❖ **Tarea de exploración y análisis 2.2:** Lea el siguiente protocolo de construcción y realícelo en papel y lápiz.

$P$ : Punto cualquiera.

$Q$ : Punto cualquiera.

$R$ : Punto cualquiera.

$r_1$ : Recta  $QP$ .

$r_2$ : Recta  $PR$ .

$r_3$ : Recta  $RQ$ .

$T$ : Punto sobre  $r_1$ .

$r_4$ : Recta paralela a  $r_3$  por  $T$ .

$S$ : Punto de intersección de  $r_2$  y  $r_4$ .

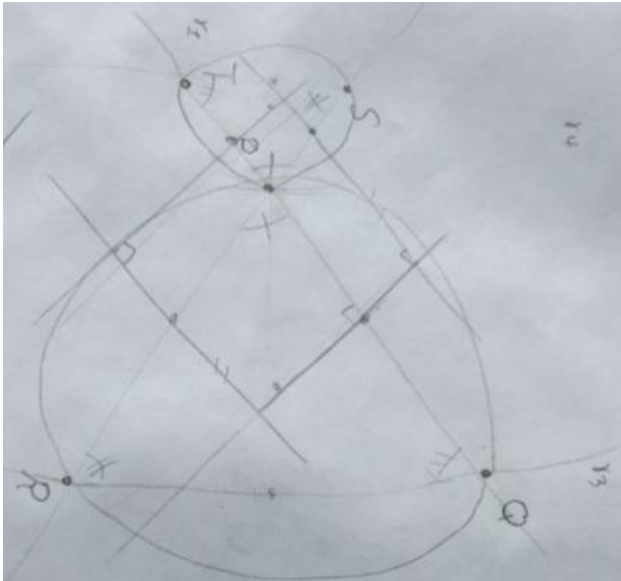
$c_1$ : Círculo por  $P, Q$  y  $R$ .

$c_2$ : Círculo por  $P, S$  y  $T$ .

- ❖ **Tarea de anticipación 2.1:** ¿Podría determinar, antes de hacer la construcción en el software, qué relación existe entre los triángulos  $PQR$  y  $PTS$  y, qué relación existe entre los círculos  $c_1$  y  $c_2$ ? Escriba un enunciado al respecto.
- ❖ **Tarea de exploración y análisis 2.3:** Desarrolle en DGPAD la construcción propuesta anteriormente. Arrastre todos los objetos y verifique si se cumplen las conjeturas propuestas en la tarea anterior.
- ❖ **Tarea de reconocimiento 2.2:** Escriba una proposición de la forma si-entonces cuyo consecuente dé cuenta de la relación entre los círculos  $c_1$  y  $c_2$ .

En la tarea de exploración y análisis 2.2, como vemos en las líneas 37 – 45, los estudiantes no siguieron adecuadamente el protocolo de construcción ya que confundieron las rectas  $r_2$  y  $r_3$ ; ocasionando que en el dibujo los círculos fueran tangentes en  $Q$  y no en  $P$ , lo que no corresponde con el protocolo presentado. Ante esto, el profesor les pidió verificar el dibujo realizado para que lo volvieran a dibujar correctamente, como vemos en la línea 51.

35	E1	[Lee el enunciado de la segunda tarea].  <b>Tarea de exploración y análisis 2:</b> Lea el siguiente protocolo de construcción y realícelo en papel y lápiz. P: Punto cualquiera. Q: Punto cualquiera. R: Punto cualquiera. r1: Recta QP. r2: Recta PR. r3: Recta RQ. T: Punto sobre r1. r4: Recta paralela a r3 por T. S: Punto de intersección de r2 y r4. c1: Círculo por P, Q y R. c2: Círculo por P, S y T.  <b>Tarea de anticipación 2:</b> ¿Podría determinar, antes de hacer la construcción en el software, qué relación existe entre los triángulos PQR y PTS y, qué relación existe entre los círculos $c_1$ y $c_2$ ? Escriba un enunciado al respecto.
36	E1 y E2	[Intentan recrear en su mente la construcción, pero abandonan la idea y realizan el dibujo en lápiz y papel].
37	E1	[Confunde las rectas $r_2$ y $r_3$ en el dibujo, de modo que el dibujo no representa correctamente la construcción]. (Debido a que los estudiantes borraron el dibujo, no se tiene evidencia de esto).
38	E2	Listo.
39	P	¿Ese dibujo sí corresponde con lo que está ahí descrito?
40	E1	Sí, ¿no?
41	P	Lea otra vez para ver si corresponde.
42	E1 y E2	[Leen nuevamente el protocolo de construcción y lo verifican con el dibujo realizado].
43	E2	Sí, ya. Está bien. Es que parece un óvalo, pero es un círculo.
44	P	Pero yo veo que $Q$ debe estar en $r_3$ y en $r_1$ .

45	E2	Mejor volvámoslo a hacer.
46	E1	Sí, voy a poner por acá a $P$ , $Q$ y $R$ acá bien raro.
47	P	Cuando dice $R$ acá bien raro, ¿a qué se refiere?
48	E1	Para que el triángulo que se forma no parezca ni equilátero, ni nada, que no parezca nada.
49	P	Ah, para que $PQR$ represente cualquier triángulo.
50	E2	Sí, sí, eso.
51	E1 y E2	[Leen nuevamente el protocolo y realizan correctamente el dibujo en lápiz y papel]. (El dibujo tiene más elementos, esto porque posteriormente fueron trabajando sobre él).
		
52	E2	Ya, listo. Ahora sí nos quedó bien.

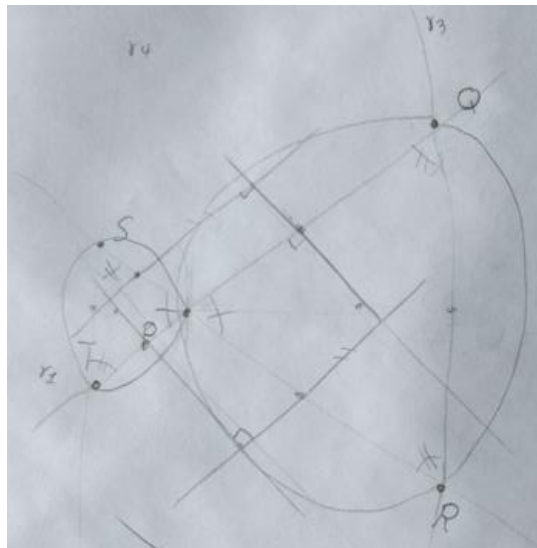
El seguir este protocolo les sirvió a los estudiantes a identificar las propiedades puestas en los objetos, pues como se puede evidenciar en las líneas 53 – 58, los estudiantes anticiparon que los triángulos  $PQR$  y  $PTS$  son semejantes, justificando tal conjetura con hechos geométricos como el teorema del ángulo opuesto y el teorema de los ángulos alternos internos como consecuencia del paralelismo entre las rectas  $r_4$  y  $r_3$ . Adicionalmente, el dibujo ayudó a conjeturar que los

círculos, los cuales identificaron como los circuncírculos de los triángulos  $PQR$  y  $PTS$ , serían tangentes en el vértice común  $P$ , como lo vemos en las líneas 59 – 61.

Lo anterior les permitió escribir en la tarea de anticipación 2.1 dos conjeturas por separado, como vemos en la línea 66, pero el profesor les mencionó que la finalidad de la tarea es escribir una sola conjetura, a lo que entendieron que deben relacionar la semejanza de los triángulos  $PQR$  y  $PTS$  con la tangencia de sus circuncírculos. Esta tarea no es sencilla y vemos en las líneas 73 – 91 buenos intentos por llegar a una proposición bien fundamentada; inclusive usaron el HG3 como vemos en las líneas 85 – 87 para realizar una primera proposición en la línea 95 que, aunque falló en las condiciones necesarias y suficientes, fue un buen acercamiento puesto que hizo falta la condición de que los lados de los triángulos que comprenden el vértice común deben estar alineados.

53	E1	¿Qué relación hay entre los triángulos $PQR$ y $PTS$ ?
54	E2	Pues son semejantes.
55	E1	¿Seguro?
56	E2	Claro. Tenemos rectas paralelas y un ángulo opuesto.
57	P	¿Cuáles ángulos son congruentes?
58	E1	Por las rectas paralelas tenemos ángulos alternos internos y aparte un ángulo opuesto por el vértice. Entonces son semejantes.
59	E1	Yo sospecho que los círculos van a ser tangentes en ese punto (refiriéndose a $P$ ). No sé por qué.
60	E2	¿Cierto?
61	E1	Sí... Ah, ya sé por qué. Estos círculos son los circuncírculos de los triángulos, ¿no?
62	P	Vamos a hacer una cosa. Escriban la conjetura en el Word.
63	E2	A ver, creemos que los triángulos son semejantes.
64	E1	Ese ya es teorema, pero bueno.

65	E2	Y los círculos que son tangentes, creemos que son tangentes. Yo diría, no sé.
66	E1	[Escribe estas dos conjeturas en el documento de Word].  ¿Podría determinar, antes de hacer la construcción, qué relación existe entre los triángulos PQR y PTS y, qué relación existe entre los círculos $c_1$ y $c_2$ ? Escriba una conjetura al respecto.  triángulo PQR semejante al triángulo PTS Conjetura: Los círculos son tangentes
67	E2	¿El circuncírculo es el que se construye con las mediatrices o bisectrices?
68	E1	El de las mediatrices es el incentro y el de las bisectrices el circuncentro. Este debe ser con las bisectrices.
69	P	Ahora, tengo una observación. Dice que escriba una conjetura, una.
70	E1	Ah, de ambos. De qué relación existe entre los círculos y los triángulos.
71	E1 y E2	[Caen en un intercambio de ideas en donde dibujan objetos sobre el dibujo para probar la tangencia de los círculos].



72	E2	Venga, ¿qué estamos haciendo?
73	P	Buena pregunta, porque acá se le pide es que escriba una conjetura.
74	E1	Qué relación hay entre los triángulos y los círculos... Sabemos ya que los triángulos son semejantes y lo que creemos es que los círculos van a ser tangentes.
75	P	¿Bajo qué condiciones van a ser tangentes los dos círculos?

76	E1	Es que ahí es donde está lo curioso, porque ambos círculos son circuncírculos y ambos pasan por $P$ , entonces se pueden cortar.
77	P	Pero su conjetura es que serán tangentes.
78	E1	Claro, esa es la conjetura. Pero pues también se pueden cortar.
79	P	Y ¿cuáles son las condiciones que le producen esa tangencia?
80	E1	Ah, porque los dos triángulos comparten el punto $P$ , son semejantes, son circuncírculos ambos círculos...
81	P	Escríballo.
82	E1	A ver, qué creo yo. Es que el problema es que creo que me va a faltar algo en la condición.
83	E1 y E2	[Vuelven a caer en la discusión sobre cómo demostrar la tangencia de los círculos].
84	P	Pero la pregunta ahora no es por qué, sino qué cree usted.
85	E1	Sí, pero es que ya sé por qué. Escúcheme porque se me pierde. Tengo los centros de ambos círculos que los puedo hallar fácilmente y tengo este punto (refiriéndose a $P$ ) que ya lo comparten los dos triángulos y la pregunta es si están alineados o no.
86	E2	Eso fue lo que hicimos ahorita, sí.
87	E1	Sí, la duda es si están alineados o no.
88	P	Bien, por ahora vamos a hacer la conjetura.
89	E1	Si dos triángulos son... ¿qué? ¿semejantes?
90	E2	No, pues si $PQR$ y $PTS$ comparten un vértice y... es que está complicado.
91	E1	Sí, es que sacarla así es complicado (refiriéndose a las condiciones que deben cumplir los triángulos).
92	E2	Si $PQR$ y $PTS$ son semejantes, comparten un vértice, los círculos que pasan por...
93	E1	Los circuncírculos.
94	E2	Los circuncírculos que pasan por los triángulos van a ser tangentes en ese punto.
95	E1	Eso, copiemos eso. [Copian la conjetura en el documento de Word].

---

triángulo PQR semejante al triángulo PTS

Conjetura: Si dos triángulos son semejantes y tienen un vértice en común entonces los circuncírculos de los triángulos son tangentes en el vértice en común

I

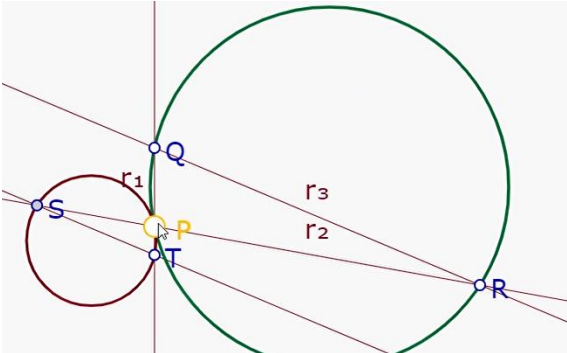
---

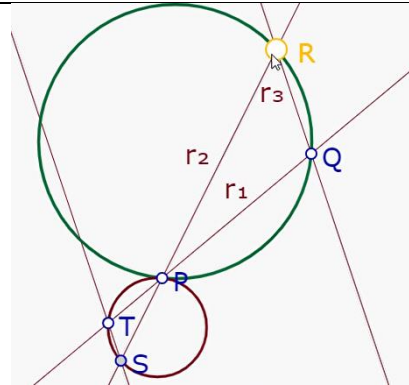
Al pasar ahora a la tarea de exploración y análisis 2.3, los estudiantes realizaron el proceso de construcción en el software y mediante la prueba de arrastre se convencieron de la tangencia de los círculos, como se evidencia en las líneas 100 – 106. No obstante, el profesor les hizo saber que la proposición aún no estaba del todo bien, sino que hacían falta algunas condiciones y esto lo podemos analizar en las líneas 108 – 116 cuando el profesor les mostró el ejemplo de una construcción en la que se cumplían las condiciones puestas por ellos, pero sus circuncírculos no eran tangentes.

Vemos en las líneas 117 – 136 cómo esta construcción presentada por el profesor y la exploración que hicieron los estudiantes con ella les permitió tener una conversación en la que empezaron a identificar otras propiedades que posiblemente debían cumplir los triángulos  $PQR$  y  $PTS$  para que sus circuncírculos fueran tangentes: como vemos en la línea 129 cuando E1 dice *Tienen que estar alineados los vértices, mínimo tres alineados. O sea, T y Q deben estar alineados con P, y S y R también.* O cuando en la línea 135 E2 dice *Es que necesito que los vértices estén alineados con P.*

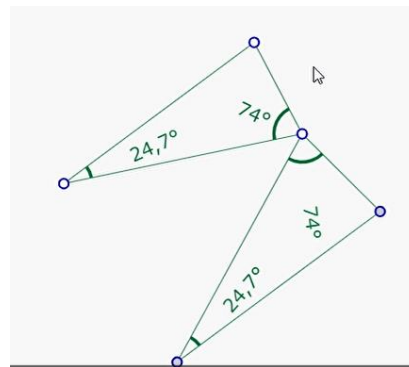
En consecuencia, resaltamos que en la línea 138 E2 dio cuenta de la propiedad de la alineación de los lados de los triángulos que comprenden el vértice común y en las líneas 141 – 153 dieron cuenta de que los lados paralelos no deben ser cualesquiera, sino los lados opuestos al vértice común. Esto les favoreció realizar, como se evidencia en las líneas 156 – 158, una proposición que ahora sí contaba con las condiciones necesarias y suficientes que dan cuenta del

HG4. Y, posteriormente, una vez indicado por el profesor que los triángulos que cumplen con las condiciones puestas en el antecedente de la proposición que escribieron se conocen como triángulos en posición de similitud, procedieron a reescribir la proposición como la vemos en las líneas 166 – 167; condensando todas las propiedades dichas de los triángulos en el concepto de triángulos en posición de similitud.

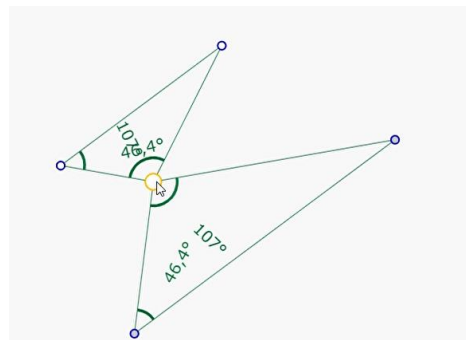
99	P	Listo, pasemos a la siguiente situación.
100	E1 y E2	[Leen la tercera tarea].  <b>Tarea de exploración y análisis 2.1:</b> desarrolle en DGPad la construcción propuesta anteriormente. Arrastre todos los objetos y verifique si se cumplen las conjeturas propuestas en la tarea anterior.
101	E1	[Realiza el protocolo de construcción en el software].  
102	E2	¡Sí, vea que sí!
103	E1	¡Sí dio! Jajaja.
104	E2	¡Son tangentes!
105	P	¿Ya se convencieron de que son tangentes?
106	E2	Sí, mueva y verá.
107	E1	[Arrastra los puntos de la construcción y esta permanece con las propiedades asignadas]. Pero no me convencio hasta que no me lo demuestren.



108	E2	Listo, la conjetura está bien. Ahora el problema es demostrarla.
109	P	¿La conjetura está bien?
110	E2	Sí...
111	P	Yo tengo un archivo que les voy a mostrar. [Abre una construcción donde dos triángulos son semejantes, con un par de lados paralelos y un vértice común].



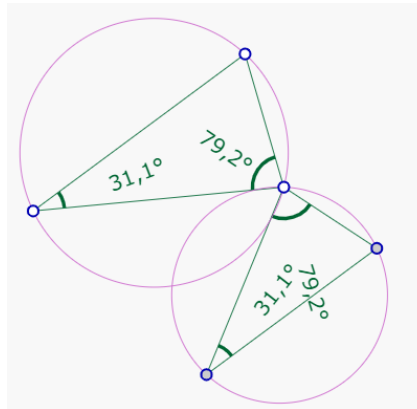
112	E1	[Arrastra los puntos de los triángulos para identificar propiedades de paralelismo y semejanza que fueron conjeturadas anteriormente]. Pues son semejantes y tienen un lado paralelo.
-----	----	---



112	E2	¿Y para qué nos mostraron eso?
113	P	¿Esos triángulos cumplen con las condiciones que ustedes propusieron?

114 E2 Sí, ¿no? Haga los circuncírculos a ver si son tangentes.

115 E1 [Construye los circuncírculos de los dos triángulos]. ¡No!



116 E2 ¡Pero qué pasó!

117 E1 ¡Ah! Es que el vértice que comparten debe estar alineado. Debe estar en una misma recta.

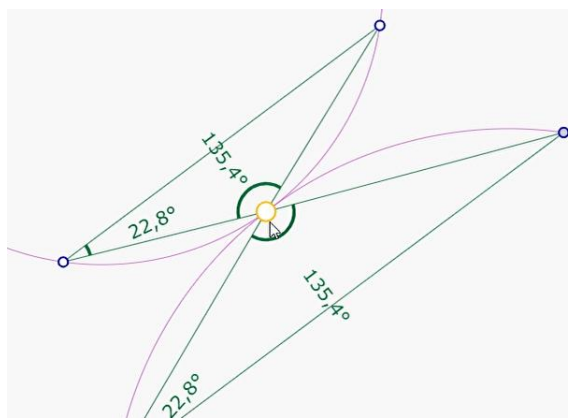
118 E2 Faltan cosas...

119 E1 A ver, son semejantes. ¿Qué más? Debe tener un lado paralelo.

120 E2 Tres vértices tienen que ser colineales. O sea, dos de un triángulo y uno del otro, por lo menos.

121 E1 ¿Cómo así?

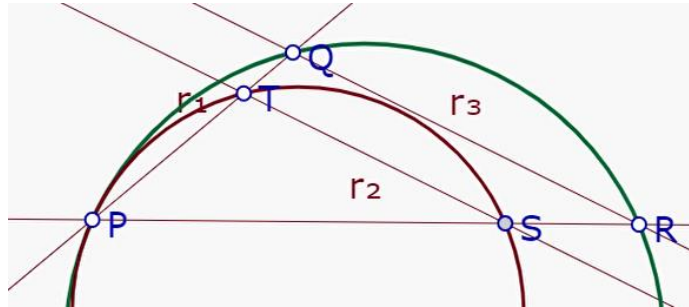
122 E2 Sí, es que los tres puntos deben ser colineales, dos de un triángulo y uno del otro. [Arrastra la construcción de modo que los triángulos quedan perceptivamente con un ángulo compartido].



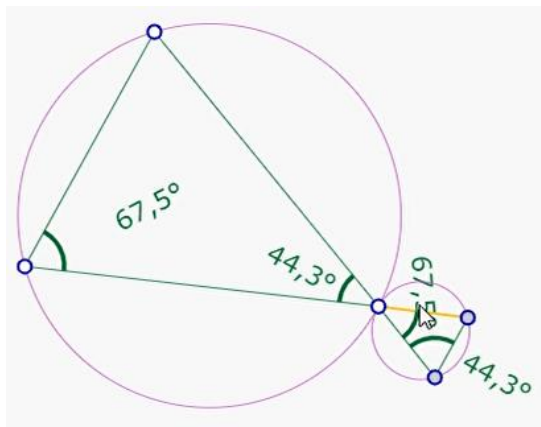
123 E1 Listo. Entonces, deben ser semejantes, tener un lado paralelo y tienen un vértice en común.

124 P ¿Dos triángulos que tienen un lado paralelo? Un lado paralelo.

125	E1	Todavía no he escrito nada, no se preocupe.
126	E2	Sería que un lado es correspondiente a su paralelo, ¿o cómo?
127	E1	Un par de lados correspondientes paralelos.
128	E2	Sí, eso.
129	E1	Sí, es que yo le entiendo. [Cambia a la construcción realizada por ellos] Tienen que estar alineados los vértices, mínimo tres alineados. O sea, $T$ y $Q$ deben estar alineados con $P$ , y $S$ y $R$ también.



130	E2	Deben ser colineales.
131	E1	¿Y si digo que están en la misma recta?
132	E2	Sí, eso es lo que quiero decir.
133	E1	¿Los lados correspondientes están en la misma recta?
134	E2	Sí, queda mejor así. [Arrastra la construcción dada por el profesor, de manera que los dos triángulos queden perceptivamente en posición de similitud].



135	E1	[Volviendo a la construcción hecha por ellos] Es que necesito que los vértices estén alineados con $P$ .
136	E2	¡Eso! Pero es que no sé cómo escribirlo bien.

137	E1	¿Lados correspondientes sobre la misma recta?
138	E2	Un par de lados correspondientes paralelos y el otro par en la misma recta, porque si estos dos cumplen eso, el otro par estarán sobre la misma recta.
139	E1	Bueno. Entonces escribir otro par de lados correspondientes sobre la misma recta.
140	P	Entonces si un par de lados están alineados, ¿el otro par también?
141	E1	Claro. Porque si ambos comparten el mismo punto... ¡Ah! Pero hay otro problema, porque yo digo que un par de lados paralelos, pero no puede ser cualquier par. Cambia totalmente.
142	E2	No le comprendo su idea...
143	E1	Es que la paralela no es una paralela cualquiera.
144	E2	Pero si es un par de lados correspondientes paralelos. $TS$ y $QR$ son correspondientes y paralelos.
145	E1	¿Cuántos lados correspondientes tienen dos triángulos?
146	E2	Pues varios.
147	E1	Por eso, ¿cuál va a escoger?
148	E2	Pues el que quiera.
149	E1	No, no puede elegir cualquiera.
150	E2	Pero ¿por qué?
151	E1	Porque debe ser el lado opuesto a $P$ el que necesito que sea paralelo. No puede ser cualquiera.
152	P	¿Cuál tiene que ser?
153	E1	El opuesto a $P$ , el lado opuesto a $P$ .
154	P	El opuesto al vértice común.

156	E1	Sí, eso. Ahora cómo cuadramos lo de los lados, porque cuadrando un par, ya se cuadrarían los demás. (Haciendo referencia a que los vértices de los triángulos deben estar sobre la misma transversal que corta a las paralelas y por tanto comprenden el ángulo común).
157	E2	Pues que un par de lados estén sobre la misma recta.
158	E1	Sí, y si un par de lados está sobre la misma recta, eso obligaría al par de lados que queda a que también estén sobre la misma recta. Toca poner eso. [Escribe todas estas ideas en el documento de Word].  Conjetura: Si dos triángulos son semejantes, tienen un vértice en común, el par de lados correspondientes opuestos a el vértice en común son paralelos y otro par de lados correspondientes están sobre la misma recta entonces, los <u>circuncírculos</u> de los triángulos son tangentes en el vértice en común
159	E2	Listo.
160	P	¿No les gustaría ponerle un nombre a esa relación entre los triángulos? Para no estar diciendo todo ese poco de cosas.
161	E1	Claro. Como que son triángulos que comparten una misma recta, no sé.
162	P	Esas relaciones que acabaron de escribir, se llama triángulos en posición de similitud. Entonces cuando se refieran a todas las propiedades que acabaron de mencionar, lo pueden llamar como triángulos en posición de similitud.
163	E1	Mejor. La voy a anotar.
164	P	Si dos triángulos son semejantes, tienen un vértice en común, el par de lados correspondientes al vértice en común son paralelos y otro par están sobre la misma recta. Eso es que dos triángulos están en posición de similitud.
165	E1	Entonces podemos mejorar la conjetura.
166	E2	Si dos triángulos están en posición de similitud, entonces sus circuncírculos son tangentes en el vértice en común. ¡Qué bendición!
167	E1	[Reescribe la conjetura de la manera en cómo se dijo].  <b>Tarea 3:</b> desarrolle en DGPad la construcción propuesta anteriormente. Arrastre todos los objetos y verifique si se cumplen las conjeturas propuestas en la tarea anterior. Escriba una proposición de la forma si-entonces cuyo consecuente dé cuenta de la relación entre los círculos $c_1$ y $c_2$ . $\frac{c_1}{c_2}$  Si dos triángulos están en posición de similitud entonces, los <u>circuncírculos</u> de los triángulos son tangentes en el vértice en común.

- *Emergen hechos geométricos en la experimentación con el SGD para demostrar el HG4*

Una vez constatado el HG4, la siguiente tarea propuesta era demostrarlo.

❖ **Tarea de justificación 2.1:** ¿Podría demostrar la proposición que acaba de formular?

Así, vemos que en las líneas 169 – 180 los estudiantes utilizaron el HG3 como herramienta teórica que les permitiría demostrar el HG4, por lo que se propusieron demostrar que los puntos  $O_1, O_2$  y  $P$  deben estar alineados y, en consecuencia, por el HG3, los circuncírculos de los triángulos  $PQR$  y  $PTS$  serían tangentes en  $P$ .

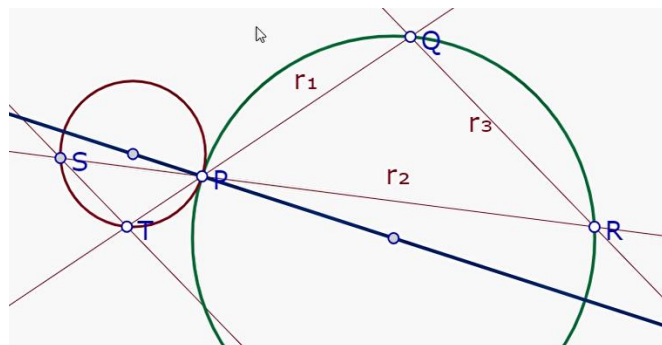
Ante esta situación, los estudiantes se preguntaron cómo demostrar que tres puntos están alineados, lo que los llevó a un intercambio de ideas en el que, gracias a la intervención del profesor mediada por el software, los estudiantes dieron cuenta de que, si tres puntos están alineados el ángulo comprendido entre ellos es de  $180^\circ$ , como se muestra en las líneas 183 – 203. Por lo que, ahora lo que debían demostrar era que el ángulo  $O_1PO_2$  mide  $180^\circ$ .

Esto los llevó a realizar exploraciones en el software como medir algunos ángulos en particular para empezar a deducir propiedades, como vemos en la línea 204 en la que E2 intentó usar el teorema del ángulo externo, o en la línea 206 en la que el E1 intentó usar los ángulos opuestos por el vértice; sin embargo, ambas ideas no resultaron ya que estaban suponiendo que  $O_1, O_2$  y  $P$  estaban alineados, como se aprecia en las líneas 206 – 213.

En las líneas 215 – 233 vemos que los estudiantes establecieron otras relaciones entre los ángulos de la figura usando el teorema del ángulo exterior, pero no lograron concretar la solución porque los ángulos sobre los que establecieron las propiedades no estaban relacionados con el hecho de que el ángulo  $O_1PO_2$  midiera  $180^\circ$ .

En este momento vemos que los intentos realizados por los estudiantes han fallado y esto se debe a que la imagen proyectada por el software da cuenta que efectivamente el punto  $P$  está sobre la recta  $O_1O_2$  y lleva a los estudiantes a usar inconscientemente este hecho, cuando justamente eso es lo que se quiere demostrar; como mencionan ellos mismos en la línea 234. Por este motivo, las exploraciones que estaban realizando en el software estaban apoyadas más en la percepción visual, lo que los llevó a cometer este tipo de errores: utilizar la propiedad que se quiere demostrar para demostrarla.

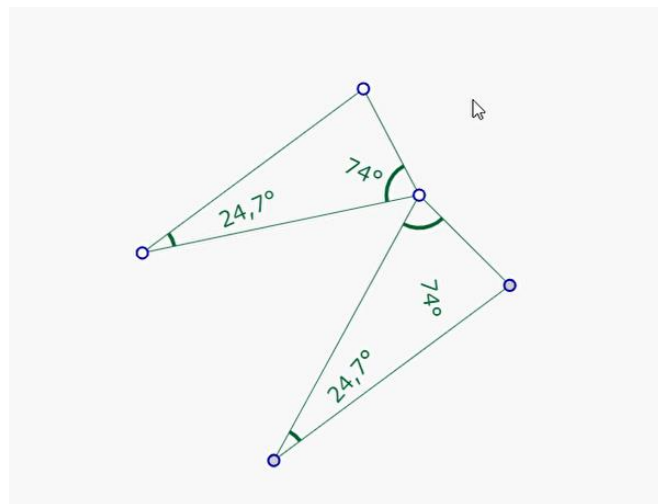
169	P	Demuestren.
170	E1	Ah, profe.
171	E2	Bueno, entonces tendríamos que demostrar que... los centros están...
172	E1	Están alineados con ese punto (refiriéndose al punto de tangencia $P$ ).
173	E2	Exactamente.
174	P	¿Por qué?
175	E1	Porque eso es como lo anterior.
176	P	¿Qué era lo anterior?
177	E1	Que, si dos círculos pasan por un mismo punto y sus centros están alineados con ese punto, entonces los círculos son tangentes.
178	E1	Listo, pero ¿Cómo lo demostramos? [construye la recta que pasa por $P$ y los centros de los círculos].



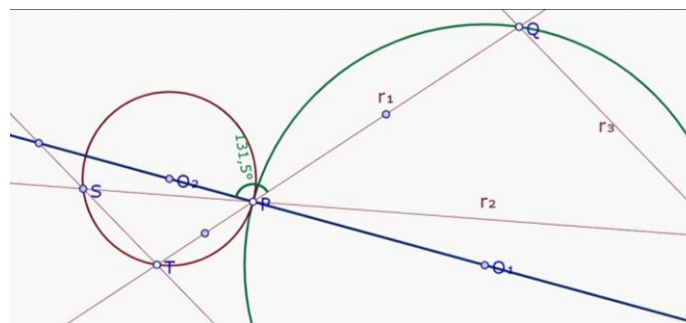
179	P	¿Cuáles son las cosas que necesitan garantizar para demostrar que son tangentes los círculos?
-----	---	---

180	E2	Que están alineados los centros con el punto.
181	P	Póngales nombre a los centros de los círculos.
182	E1	[Nombra los centros de los círculos como $O_1$ y $O_2$ ].
183	E2	¿Qué teoremas tenemos para garantizar que tres puntos están en la misma recta?
184	P	¿De qué manera podrían demostrar que tres puntos están en una misma recta?
185	E2	Estoy pensando en algún teorema, pero no se me ocurre ninguno.
186	E1	Las mediatrices del triángulo concurren en un solo punto...
187	P	Pero cómo va a demostrar que tres puntos están en una recta.
188	E1	Porque yo puedo mostrar que un punto está en varias rectas.
189	E2	Sería como una transitiva. Si un par están en una recta y otro par están en otra, el par restante están en la misma.
190	P	Tengo tres puntos en el plano. Puntos $A$ , $B$ y $C$ , ¿qué deben cumplir $A$ , $B$ y $C$ para que estén alineados? En ese orden.
191	E2	Que $A$ esté alineado con $C$ , $B$ esté alineado con $C$ y ya. Por transitividad $A$ está alineado con $B$ .
192	P	¿Qué propiedad hace que los tres puntos $A$ , $B$ y $C$ estén alineados?
192	E2	Pues lo que yo digo, $A$ con $C$ , $B$ con $C$ y luego $A$ está alineado con $B$ .
193	P	Dos puntos siempre están alineados.
194	E1	Sí, eso es cierto.
195	E2	Bueno, pero y ahora con tres puntos...
196	E1	Sería mostrar que $P$ esté sobre la recta $O_1O_2$ . Eso sería otra manera de mostrar que los tres están alineados. Porque ya sé que dos están alineados, solo hace falta ver que el tercero esté sobre esa recta.

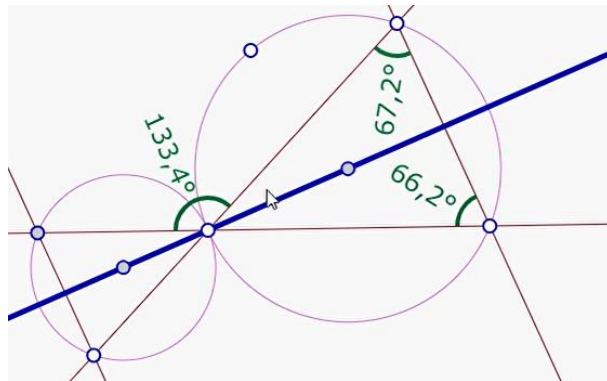
197	P	¿Y cómo garantiza que $P$ está en la recta? Que eso es justo lo mismo.
198	E2	Ese es el dilema.
199	E1	Sí, me quedo en lo mismo.
200	P	$A, B$ y $C$ ¿Qué necesito para que los tres estén alineados?
201	E1	Debe existir una recta entre dos y que el tercero esté ahí...
202	P	A ver, por ejemplo. Así a simple vista [escribe sobre una hoja] por aquí tengo $A$ , por aquí... No, mejor en el software. [Abre la construcción que había propuesto como contraejemplo anteriormente] Aquí estos tres no están alineados (refiriéndose al punto donde concurren ambos vértices y otro par de puntos correspondientes) ¿por qué no están alineados?



203	E1	¡Ah! Porque el ángulo debe ser de $180^\circ$ . Sí, ¿no? Claro, yo puedo formar un ángulo con tres puntos y si da $180^\circ$ es un ángulo llano. Pero ¿cuál ángulo? [Vuelve a la construcción realizada por ellos].
204	E2	Uy, ahí estoy viendo ángulos externos... el ángulo $O_2PQ$ es la suma de los ángulos $O_2PT$ y $STP$ . [Explora en el software midiendo ángulos para determinar qué relaciones entre ángulos puede hallar a partir de la semejanza de los triángulos $PTS$ y $PQR$ ].

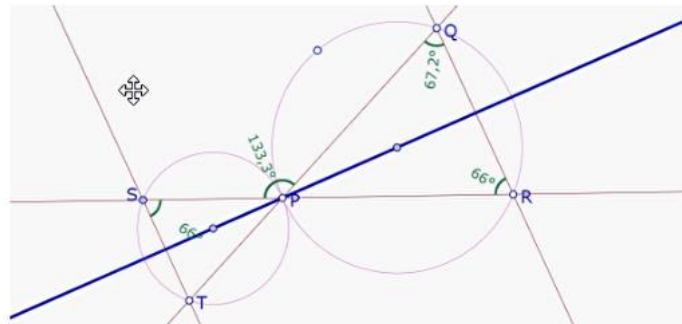


- 205 E1 (Debido a fallos técnicos, se tuvo que volver a realizar la construcción en el software). Mira, este ángulo opuesto, es igual a la suma de estos dos. (Refiriéndose a los ángulos medidos en la imagen).

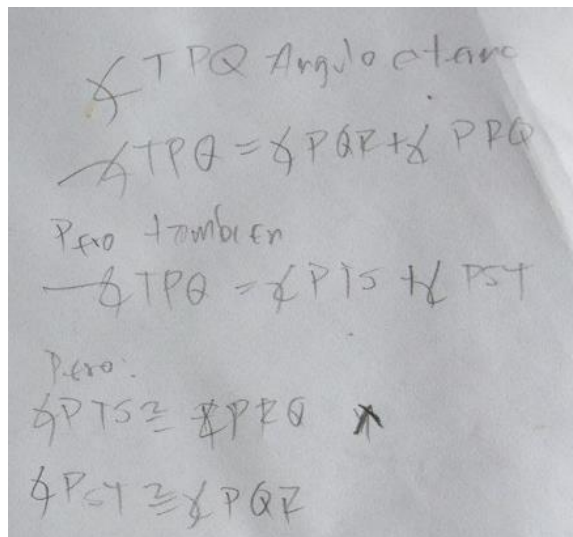


- 206 E1 Y ahora lo que pasa es lo siguiente, estos ángulos chiquitos de acá (refiriéndose a los comprendido por la recta  $O_1O_2$  y el vértice en común) son opuestos por el vértice.
- 207 E1 Eso no lo sabemos.
- 208 E2 Sí, esos son opuestos por el vértice. Además, sabemos que la recta para por  $O_2$  y  $P$ .
- 209 P ¿Ya sabemos?
- 210 E1 Sí, ¿no? Por la construcción.
- 211 E2 Es que eso es justo lo que queremos demostrar. Que los tres puntos están alineados. Entonces no puede decir que esos ángulos son opuestos por el vértice porque no sabemos si  $O_1O_2$  pasa por  $P$ .
- 212 E1 Sí, buen punto.
- 213 E2 Sí, no sabemos eso.
- 214 E1 y E2 [Exploran en la construcción relaciones entre el ángulo  $SPQ$  y los triángulos  $STP$  y  $RPQ$ , concluyendo que es exterior a ambos triángulos].
- 215 E1 Ay, vea. Ya tenemos la demostración. [Les pone los mismos nombres a los vértices de los triángulos y toma un pantallazo para ponerlo en el documento Word].

Si dos triángulos están en posición de similitud entonces, los circuncírculos de los triángulos son tangentes en el vértice en común.



216 E2 [Escribe en una hoja la relación entre algunos ángulos externos e internos de la figura].



217 E1 Es que necesitamos demostrar que el ángulo  $O_1PO_2$  sea de  $180^\circ$ .

218 E2 Espere que creo que faltó algo.

219 E1 Claro, es que no estamos garantizando que ese ángulo sea de  $180^\circ$ .

220 P ¿Hay algo que les detiene ahora?

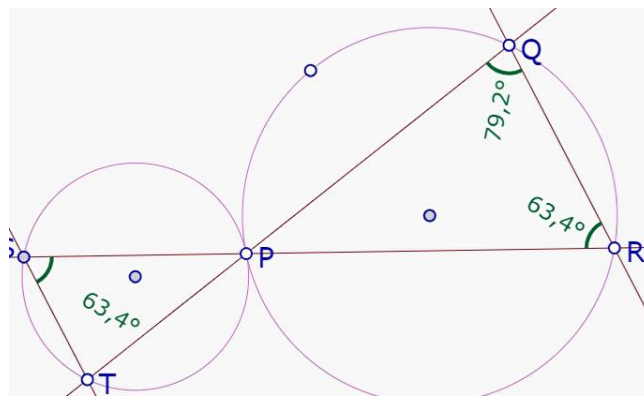
221 E2 La misma recta (refiriéndose a la recta  $O_1O_2$ ), necesito decir que esa recta... ¿sabemos ya que esa recta es mediatriz o no?

222 P A mí me causa curiosidad por qué escogieron ese ángulo (refiriéndose al ángulo  $SPQ$ ).

223 E1 Porque es el más evidente.

224 P ¿Cuáles son los que quieren probar que miden  $180^\circ$ ?

225	E1	El de la recta $O_1PO_2$ , pero puedo hacerlo sumando varios ángulos.
226	P	O sea, van a sumar tres ángulos.
227	E2	Es que para sumar dos...
228	P	¿No pueden completar los $180^\circ$ con solo dos ángulos? ¿Por qué tres?
229	E2	Es que...
230	P	¿Cuál es el que quieren que sea de $180^\circ$ ?
231	E2	El $O_1PO_2$ .
232	P	Eso. ¿Y qué tiene que ver ese ángulo con el ángulo $SPQ$ ?
233	E2	Nada... no tienen relación.
234	E1	Voy a borrar la recta $O_1O_2$ porque me está molestando. Me molesta porque está con $P$ ahí de una vez y yo no sé si $P$ está alineado o no. [Borra la recta $O_1O_2$ ].



En consecuencia, dadas las confusiones de los estudiantes y sus intentos fallidos, el profesor les empezó a realizar preguntas para encaminar a los estudiantes a que fijaran la atención en el ángulo  $O_1PT$  como ángulo exterior al triángulo que se forma con los puntos  $P, Q$  y la intersección de la recta  $PO_1$  con  $QR$ ; con el fin de ayudar al razonamiento de los estudiantes y su intención de usar el teorema del ángulo externo. Así, vemos que en las líneas 236 – 266 los estudiantes trataron de establecer de qué triángulo era ángulo externo  $O_1PT$  hasta concretar que era ángulo externo del triángulo  $PQW$ .

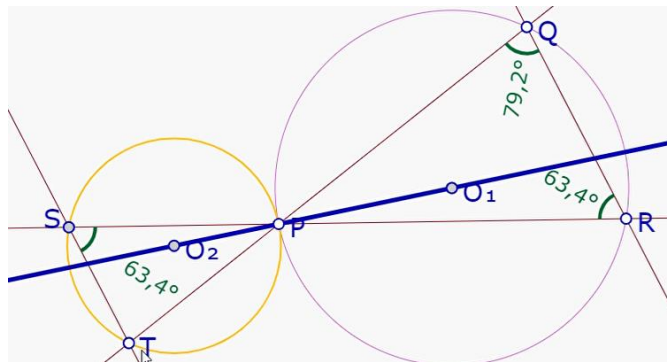
Sin embargo, podemos observar que en las líneas 241 – 244 todavía persistía el error de seguir considerando al punto  $P$  en la recta  $O_1O_2$ . Esto ocasionó que empezaran a dudar sobre la pertenencia de cualquier punto sobre la recta  $O_1O_2$  y no realizaran razonamientos correctos con el teorema del ángulo externo, como lo vemos en las líneas 245 – 266. Además, en las líneas 271 – 274 vemos que volvieron a caer en este error y realizaron un razonamiento errado.

Ahora en las líneas 289 – 307 los estudiantes incurrieron en un error parecido al anterior, pues luego de trazar las rectas  $TK$  y  $QL$  se convencieron de que eran paralelas y las usaron en sus razonamientos sin probar este paralelismo.

Esta incurrencia de errores debido al énfasis que hacían en la percepción visual fue un obstáculo en la búsqueda de propiedades geométricas, invariantes y relaciones de dependencia como lo evidenciamos en las líneas anteriores.

---

235 E1 y E2 [Vuelven a construir la recta  $O_1O_2$  y siguen midiendo ángulos para encontrar relaciones entre los ángulos para mostrar que el ángulo  $O_1PO_2$  es de  $180^\circ$ ].




---

236 P Ahora les hago una pregunta, ¿el ángulo  $O_1PT$ ...?

---

237 E2 Es el ángulo externo del triángulo  $PST$ .

---

238 P ¿De  $PST$ ?

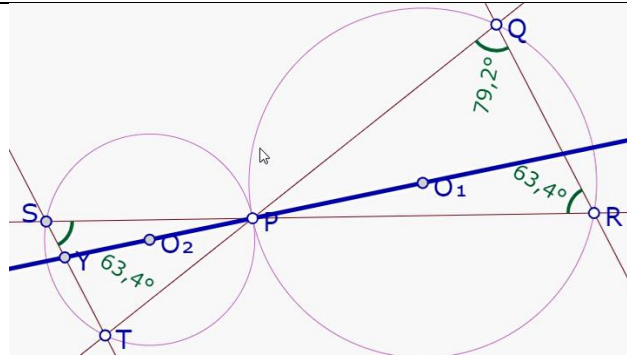
---

239 E2 Ah, no. Parece.

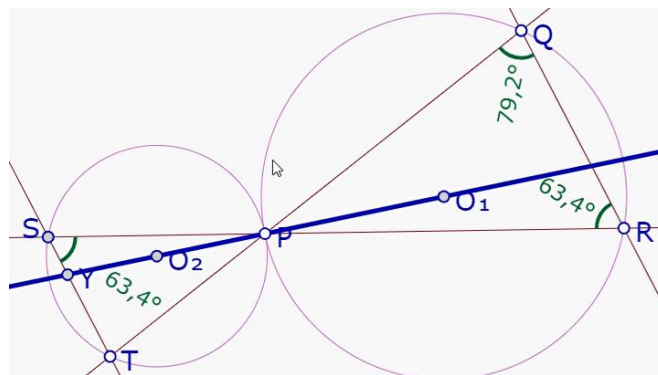
---

240 E1 [Marca la intersección de  $PO_1$  con  $ST$  y la nombra  $Y$ ].

---



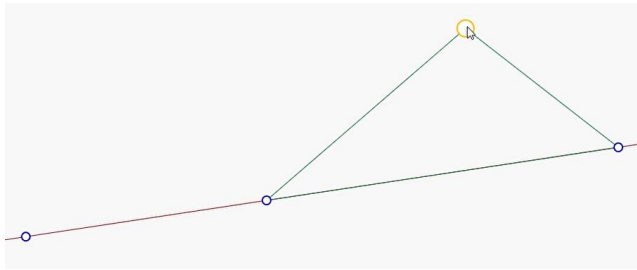
241	P	¿Es $O_1PT$ un ángulo exterior al triángulo $PTY$ ?
242	E2	Sí.
243	P	¿Seguros?
244	E2	Ah,no. No sabemos porque no sabemos si $P$ está en esa recta (refiriéndose a $O_1O_2$ ).
245	P	¿Pero podríamos encontrar un triángulo al que sepamos que ese sí es un ángulo exterior?
246	E2	[Mira la construcción intentando encontrar dicho triángulo] Pues de varios... podría ser del triángulo $PQ$ y el punto de intersección de $PO_2$ con la recta $QR$ .



247	E2	Pero lo mismo, no sé si es una recta.
248	P	¿Cómo así que no sabemos si es recta?
249	E1	Es que no sabemos si los punto están alineados.
250	P	¿Cuáles puntos?
251	E1	Los centros de los círculos con $P$ . Ah, pero no. Ahí es diferente.
252	P	¿Qué es lo diferente?
253	E1	Porque cogió un punto que es centro del círculo.

254 P Hagan un dibujo del teorema del ángulo externo.

255 E1 [Realiza lo pedido].



256 P ¿Cuál es el ángulo exterior?

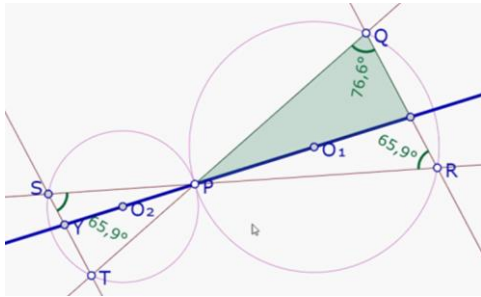
257 E1 El que está sobre la recta.

258 P ¿Y cuáles son los puntos que están alineados?

259 E1 Los que están sobre esa recta.

260 P Para que  $TPO_1$  sea ángulo exterior, ¿cuál debe ser el triángulo?

261 E1 [Usa la herramienta *polígono* y construye el triángulo mostrado en la imagen].



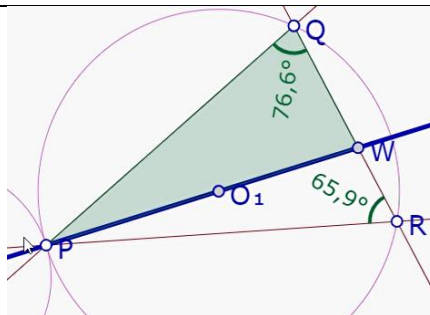
262 P ¿Cuáles son los puntos que deben estar alineados?

263 E2  $T, P$  y  $Q$ .

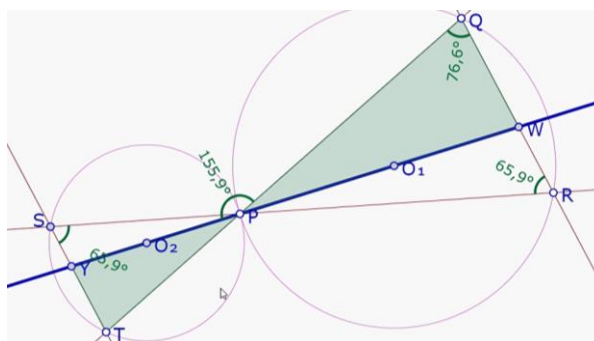
264 P ¿Y esos están alineados?

265 E1 Sí, ese lo sabemos.

266 E2 [Nombra la intersección de la recta  $PO_1$  con  $QR$  como  $W$ , obteniendo el triángulo  $PQW$ ].

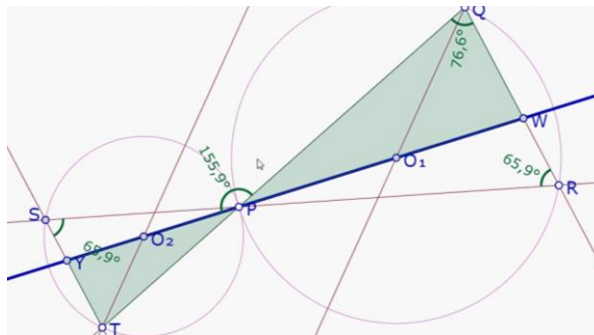


267	E2	El ángulo $QPY$ es el ángulo externo del triángulo $PTY$ .
268	P	¿Para qué otro ángulo exterior?
269	E2	No sé, estoy observado cosas.
270	E1	[Construye con la herramienta <i>polígono</i> el triángulo $PTY$ ].

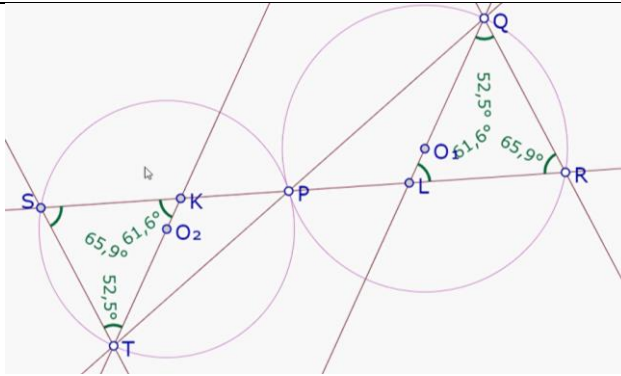


271	E2	Listo, ya la tengo. El ángulo $QPY$ es la suma de los ángulos $PYT$ y $YTP$ . Y como el ángulo $PTY$ es congruente con el ángulo $WQP$ , y como $QPY$ también es exterior al triángulo $PWQ$ , entonces el ángulo $QPY$ también va a ser la suma de los ángulos $PWQ$ y $WQP$ .
272	E1	Yo aún no me convenzo. Porque es que uno dice de una vez que $P$ es como si estuviera ya alineado con $O_1$ y $O_2$ y ¿qué me garantiza eso? Y vuelvo a lo mismo, vuelvo a cero. Porque como usted lo dijo, entonces uso que la recta ya pasa por $P$ y ese es el problema.
273	P	Exactamente.
274	E1	Es que me provoca quitar la recta (refiriéndose a $O_1O_2$ ) para no verla, porque ahí lo veo, pero cómo lo demuestro.
275	P	Pero ¿qué podrían concluir de que el ángulo $TPW$ es un ángulo exterior del triángulo $PWQ$ ?
276	E1	¿Qué puedo concluir de que sea un ángulo exterior?
277	P	Sí.

278	E1	Pues que es la suma del ángulo exterior más este (refiriéndose al ángulo $QPW$ ) es de $180^\circ$ , que es lo que quiero demostrar.
279	P	Es que a mí me causa curiosidad que ustedes hayan propuesto el ángulo exterior para establecer una relación con otros ángulos, pero no han escrito en ningún momento esa relación.
280	E1	Buen punto...
281	P	Escríbanla. ¿Cuál es la relación que se deduce de que el ángulo $TPW$ sea exterior?
282	E1	Pues como es exterior, es la suma de los otros dos ángulos...
283	P	Usted lo que quiere es que $W$ , $P$ y otro punto estén alineados.
284	E1	Es que hay mucha construcción ya...
285	P	Oculte algunos objetos si quiere. Lo curioso es que tomaron el punto $W$ y no el punto $O_1$ , porque son el mismo. De modo que el ángulo $TPO_1$ sería también exterior al triángulo...
286	E1	$PWQ$ o...
287	P	$PO_1Q$ .
288	E1	Sí, $PO_1Q$ . Pero ahora no conoceríamos el ángulo $WQP$ .
289	P	¿Qué relación hay entre las rectas $TO_2$ y $O_1Q$ ? Dibújelas.
290	E1	¿Son paralelas? [Construye las rectas $TO_2$ y $O_1Q$ ].



291	P	¿Por qué?
292	E1 y E2	[Ocultan, construyen objetos y miden ángulos para encontrar un par de ángulos alternos internos congruentes, de modo que dé cuenta del paralelismo de las rectas].

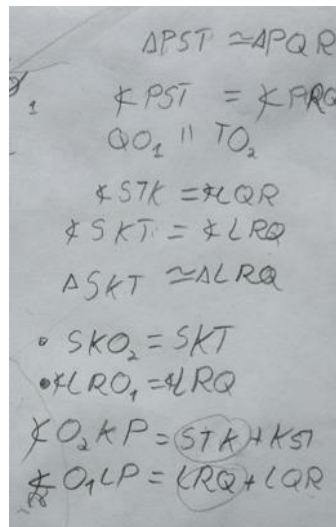


293 E1 Creo que empiezo a notar relaciones entre los ángulos... las voy a anotar en el papel porque son muchas y me confundo.

294 P De acuerdo, tómese su tiempo.

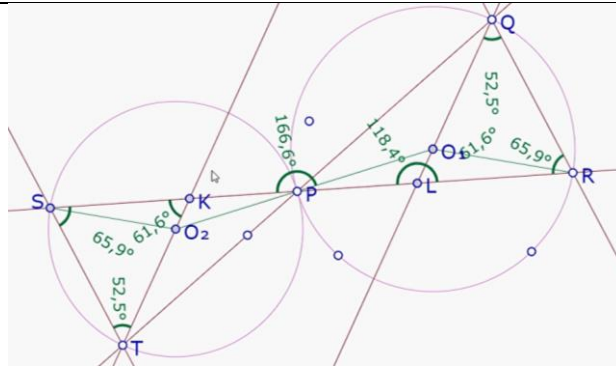
295 E1 y E2 [En una hoja escriben relaciones entre triángulos y ángulos].

(Nota: las relaciones halladas por los estudiantes están bajo el supuesto de que las rectas  $O_1Q$  y  $O_2T$  son paralelas, hecho del cual no se tiene evidencia).



296 E1 A ver,  $O_1Q$  es paralela a  $O_2T$  y de ahí salen  $K$  y  $L$  que son las intersecciones con la recta. Yo puedo decir alternos externos que serían el ángulo  $SKT$  y  $LQR$ , son congruentes.

297 E1 y E2 [Siguen explorando en el software para hallar relaciones entre los ángulos. Construyen objetos y miden ángulos].

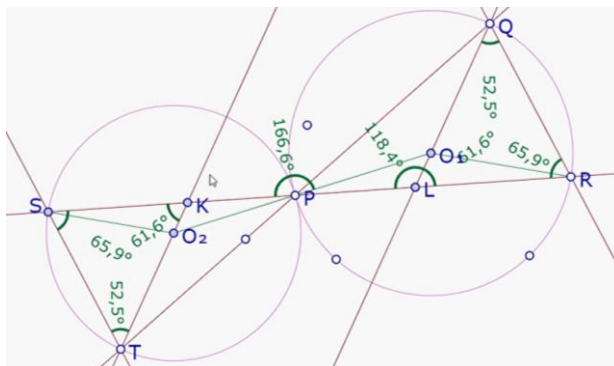


298	E1	Profe, la idea va así... el triángulo $STK$ es semejante al triángulo $LQR$ .
299	P	¿Ya lo demostró?
300	E1	Sí, claro. Más que todo fue porque se usó que $O_2T$ y $O_1Q$ son paralelas.
301	P	¿Y cómo probó que son paralelas?
302	E1	Pues porque así fueron construidas.
303	P	$ST$ y $QR$ son paralelas porque así las construimos, pero $TK$ y $QL$ no se sabe.
304	E1	Primero construí la recta $O_1Q$ y luego una paralela que pasara por $T$ y $O_2$ .
305	P	No porque los puntos $T$ y $O_2$ ya estaban. Más bien se construyó la recta $O_1Q$ y la recta $O_2T$ .
306	E2	Y ahora hay que demostrar que son paralelas.
307	P	Exactamente.

No obstante, en las líneas 311 – 319 E1 realizó un razonamiento con el que pudo demostrar que el ángulo  $O_1PO_2$  mide  $180^\circ$ , bajo el supuesto de que las rectas  $TK$  y  $QL$  eran paralelas. En este razonamiento evidenciamos el uso de los hechos geométricos como ángulos alternos internos, ángulos externos, el teorema de semejanza AA y algunas reglas algebraicas que les permitieron llegar a la demostración. Por tanto, ahora bastaba probar que las rectas  $TK$  y  $QL$  fueran paralelas para finalizar la demostración.

311	E1	Sé que $ST$ y $QR$ son paralelas y quiero ver que $O_1Q$ y $O_2T$ son paralelas. Y ya sé también que el ángulo $STP$ es igual al ángulo $RQP$ y como este es
-----	----	--

igual a este (refiriéndose a los ángulos  $STK$  y  $RQL$ ), entonces este es igual a este (refiriéndose a los ángulos  $PTK$  y  $PQL$ ).



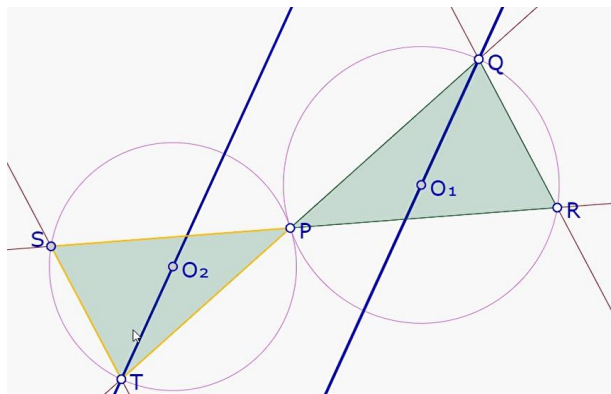
312	P	A ver si entendí. $STP$ es congruente al ángulo $PQR$ . Y a la vez...
313	E1	Faltan los pedacitos (refiriéndose a los dos ángulos comprendidos entre los ángulos $STP$ y $RQP$ ). No sé cómo concluí que eran iguales... No recuerdo cómo lo hice...
314	P	Bueno, partamos del hecho de que son paralelas las rectas $TK$ y $QL$ . ¿Qué concluiría con eso?
315	E1	Puedo concluir que el triángulo $STK$ es semejante con el triángulo $RQL$ . También puedo concluir que el ángulo $PKO_2$ es congruente con el ángulo $PLO_1$ . Ahora cojo los triángulos $O_2KP$ y $O_1LP$ , quiero ver que sean semejantes. Para eso, uso el ángulo $KPO_1$ , que es igual a la suma de los ángulos $PLO_1$ y $LO_1P$ . Uso también el ángulo $LPO_2$ , que es igual a la suma de los ángulos $PKO_2$ y $KO_2P$ . Y como $PKO_2$ y $PLO_1$ son iguales, entonces $KO_2P$ y $LO_1P$ tienen que ser iguales y por tanto $KPO_1$ es igual a $LPO_2$ .
316	P	Entonces ya tiene que los triángulos $PKO_2$ y $PLO_1$ son semejantes.
317	E1	Exacto. Ahora uso que el ángulo $KPO_1$ más $LPO_1$ es $180^\circ$ y que $LPO_2$ más $O_2PK$ también es $180^\circ$ para concluir que $O_1PO_2$ es $180^\circ$ .
318	P	Claro, yo uso es que sí suma 180 que es $KPL$ . Y como $KPL$ es $KPO_1$ más $LPO_1$ y este es igual a $PKO_2$ , entonces los reemplazo y ya está.
319	E1	Ahora toca demostrar que las rectas son paralelas (refiriéndose a las rectas $QL$ y $TK$ ) porque nos saltamos esa parte.

Para esta demostración, evidenciamos que en las líneas 321 – 386 mediante la exploración que hicieron en el software de medir ángulos y la guía del profesor con sus preguntas, los estudiantes lograron identificar y usar el teorema del ángulo inscrito, los ángulos externos y reglas algebraicas para poder realizar la demostración del paralelismo entre  $TK$  y  $QL$ . Concluyendo así la demostración del HG4.

Ahora bien, dado que ahora los estudiantes habían usado el teorema del ángulo inscrito y de acuerdo con el análisis a priori hecho de esta tarea: el uso de este teorema permite demostrar que los puntos  $O_1$ ,  $O_2$  y  $P$  están alineados. Luego, vemos que en la línea 387 el profesor les propuso realizar esta demostración haciendo uso de este teorema y en las líneas 394 – 398 vemos cómo los estudiantes hicieron uso del teorema del ángulo inscrito y algunas reglas algebraicas para demostrar directamente que el ángulo  $O_1PO_2$  mide  $180^\circ$ .

---

321 E1 Pero ya está demostrado que  $O_1$ ,  $P$  y  $O_2$  están alineados. Faltan las paralelas y listo. [Borra algunos objetos y construye otros, quedando como se muestra en la imagen].




---

322 P A ver, ¿qué necesita para probar que dos rectas son paralelas?

---

323 E2 Ángulos alternos internos.

---

324 P Podrían ser. ¿Cuáles serían ese par de ángulos alternos internos?

---

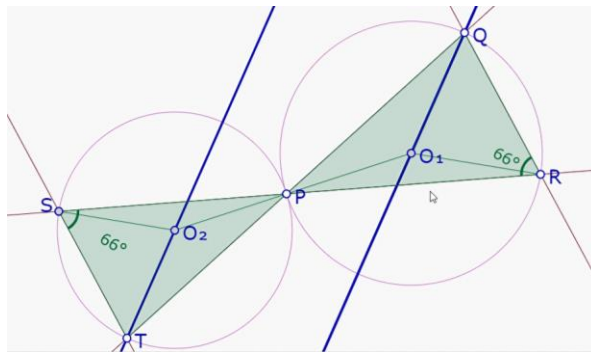
325 E2 Necesitamos una transversal.

---

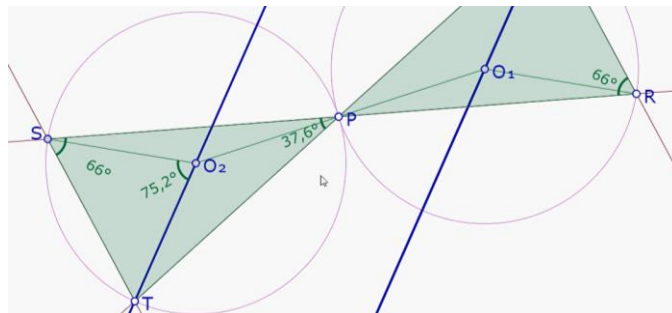
326 E1  $SR$  sirve y también  $TQ$ .

---

327	P	¿Cuál les gusta más según ese dibujo?
328	E1	$TQ$ .
329	P	Entonces ¿qué ángulos deberían ser congruentes?
330	E1	Podemos usar ángulos externos a triángulos.
331	P	Creo que no han usado para nada que $O_1$ y $O_2$ son centros de un círculo.
332	E1	Pues $P$ y $S$ están a la misma distancia de $O_2$ . [Construye los segmentos $PO_2$ , $SO_2$ , $PO_1$ y $RO_1$ ].

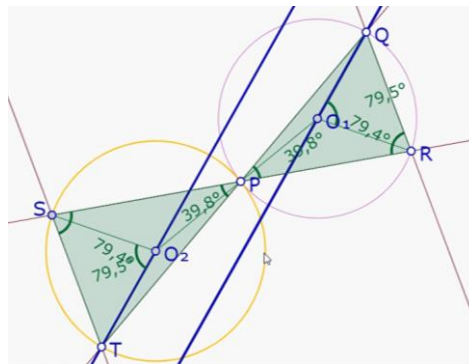


333	E1 y E2	[Exploran en el software para encontrar una relación entre ángulos que les permita mostrar que las rectas $TO_2$ y $QO_1$ son paralelas].
334	P	A parte de usar de que $O_2$ es centro de un círculo para concluir que $P$ y $S$ están a la misma distancia, ¿para qué otra cosa puede usar $O_2$ u $O_1$ ?
335	E1	Que un punto cualquiera en el círculo está a la misma distancia...
336	P	Y además...
337	E2	El ángulo...
338	E1	¡Uy! El ángulo inscrito.
339	E2	Sí... el ángulo central y el inscrito, que el inscrito mide la mitad del central.
340	E1	[Mide los ángulos $SO_2T$ y $SPT$ ].



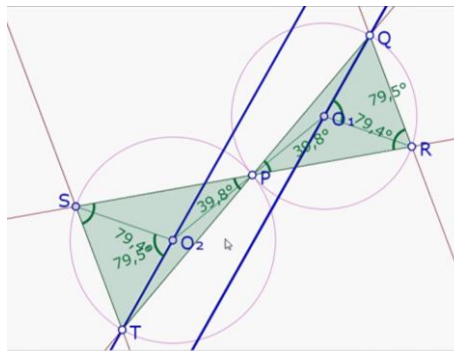
341	E2	$SPT$ es la mitad de $SO_2T$ .
-----	----	--------------------------------

342	P	¿Por qué se fijaron en esos dos ángulos?
343	E1	Porque se supone que este es igual a este (refiriéndose a la congruencia entre los ángulos $SPT$ y $QPR$ ).
344	E2	Mida el ángulo $QO_1R$ , que es igual a $SO_2T$ , por lo de que $SPT$ y $QPR$ son congruentes.
345	E1	[Realiza lo pedido].
346	P	Pero qué es lo que quiere hacer ahora, no entiendo.
347	E1	Para sumar $180^\circ$ .
348	P	Ah, de otra manera, sin las paralelas.
349	E1	Sí, más rápido, ¿no?
350	P	¿Cómo lo van a hacer?
351	E1 y E2	[Realizan medias de ángulos y arrastras los objetos para encontrar propiedades geométricas que les permitan demostrar que el ángulo $O_1PO_2$ mide $180^\circ$ ].

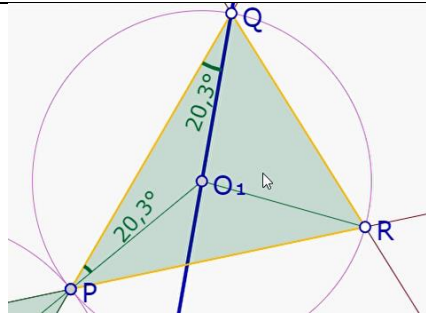


352	P	Yo creo que están preocupados por garantizar congruencias de ángulos y ahí hay muchos ángulos congruentes, por lo que se están olvidando para dónde van.
353	E2	Pues para ver un par de ángulos alternos iguales y probar que las rectas ( $TK$ y $QL$ ) son paralelas.
354	P	Pero ¿cuáles son los ángulos que necesito que sean congruentes? No será que pensando en esos ángulos yo podría hacer el tránsito hacia otros. Por ejemplo, si la transversal fuera $QT$ , ¿cuál sería el ángulo inscrito que necesita?
355	E1	Cuál sería...
356	P	El ángulo $QRP$ , por ejemplo, es congruente...
357	E2	Con $TSP$ .

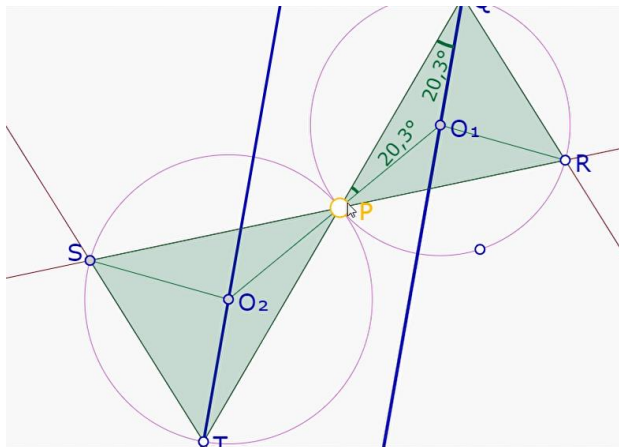
358	P	Pero $QRP$ es inscrito. Mide la mitad...
359	E2	Mide la mitad del ángulo $PO_1Q$ . Y de igual forma el otro (refiriéndose a $PO_2T$ ). Entonces los ángulos $PO_2T$ es congruente con $PO_1Q$ . Pero como no sé si $O_2, P$ y $O_1$ están en la misma recta, entonces no sé...
360	P	¿No será que ese ángulo $QO_1P$ me sirve para luego pasar a $PQO_1$ ? ¿No es ese el formado por la transversal y la recta?
361	E2	Sí... O sea, ¿de ese ángulo paso al otro?
362	P	¿Qué relación hay entre el ángulo $O_1PQ$ y $O_1QP$ ?
363	E2	Son congruentes.
364	P	Son congruentes.
365	E2	Sí, por eso.
366	P	¿Y qué pasa en el triángulo $TO_2P$ ?
367	E2	De igual manera.
368	P	¿Y entonces qué puedo concluir de los triángulos $PQO_1$ y $PTO_2$ ? Los deajo que piensen la idea.
369	E1 y E2	[Exploran en el software para hallar relaciones geométricas para probar la semejanza de los triángulos $PQO_1$ y $PTO_2$ ].



370	E2	Creo que lo tenemos...
371	E1	Sí, el ángulo $PQO_1$ es igual a $O_1PQ$ . Y lo mismo me pasa con que el ángulo $O_2PT$ es igual al ángulo $O_2TP$ .



372	P	¿Y por qué?
373	E2	Porque los triángulos son isósceles.
374	P	Listo, ya tienen esa relación entre cada par de ángulo, pero todavía no saben si son iguales los cuatro.
375	E2	Pero quedaría fácil probarlo por el ángulo inscrito, ¿no?
376	P	Desarrolle más la idea.
377	E2	El ángulo $PO_1Q$ es el ángulo central y es el doble del ángulo $PRQ$ , pero $PRQ$ es congruente con el ángulo $PST$ que es la mitad del ángulo central $PO_2T$ , entonces $PO_2T$ es igual al ángulo $PO_1Q$ . Y como ambos son isósceles, entonces por lo del radio, son congruentes los ángulos.



378	P	Espere, ¿cómo pruebo que este pequeño es igual a este otro pequeño? (refiriéndose a los ángulos $PTO_2$ y $PQO_1$ ).
379	E2	Espere, es que no sé...
380	P	Anoten las ideas.
381	E1 y E2	[Anotan en una hoja el razonamiento dicho anteriormente].

$$\begin{aligned} \angle ORP &= \frac{1}{2} \angle QOP \\ \angle PST &= \frac{1}{2} \angle POT \\ \angle ORP &= \angle PST \\ \angle QOP &= \angle POT \end{aligned}$$

382 P La pregunta es cómo voy de la congruencia de los ángulos  $PO_2T$  y  $PO_1Q$  a la congruencia de los ángulos que quiero probar que son alternos internos.

383 E1 Dos veces el ángulo  $PTO_2$  más  $PO_2T$  es igual a...

384 P ¿Qué están haciendo?

385 E1 Estoy sumando todos los ángulos, la suma de ambos triángulos ( $PTO_2$  y  $PQO_1$ ) es la misma. Conoce un ángulo y sabe que dos veces el otro le va a dar 180, y en ambos se cumple lo mismo, entonces se concluye que son congruentes (refiriéndose a los triángulos  $PTO_2$  y  $PQO_1$ ).

386 E2 [Escribe esta idea en una hoja y concluye que los ángulos  $PTO_2$  y  $PQO_1$  son iguales].

$$\begin{aligned} 2x + y &= 180 \\ 2y + x &= 180 \\ 2\angle PTO_2 + \angle PO_2T & \\ 2x + 2y & \end{aligned}$$

387 E2 Llamando Alpha a los ángulos centrales que son iguales y X e Y a los ángulos  $PTO_2$  y  $PQO_1$  e igualando, me queda que  $PTO_2$  es igual al ángulo  $PQO_1$ .

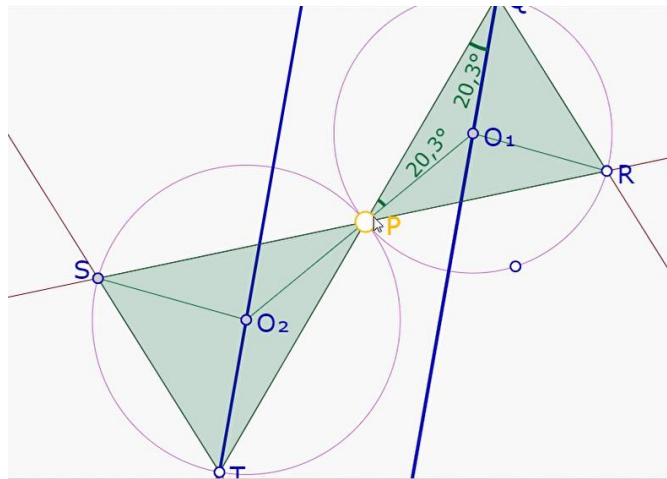
388 P ¿Y no será que yo puedo usar ese razonamiento para probar directamente que  $O_1, P$  y  $O_2$  están alineados, sin necesidad de transitar por el paralelismo de las rectas  $TO_2$  y  $QO_1$ ?

389 E1 Sí.

390 P ¿De qué manera?

391 E1 Usando los ángulos  $SO_2P$  y  $PO_1R$ .

392	P	¿Y por qué no los mismos que ya tengo?
393	E1	¿Cuáles?
394	P	$PO_2T$ y $PO_1Q$ .
395	E1	Listo, además sabemos que $PTO_2$ y $TPO_2$ son iguales. Y $PQO_1$ y $QPO_1$ también son iguales.
396	P	Y hay otro par congruentes.
397	E1	¿Otros más?
398	P	Sí, unos que me sirvan para probar que están alineados (refiriéndose a los puntos $O_1$ , $O_2$ y $P$ ).
399	E2	Pues es como la demostración que hicimos ahorita del ángulo. Este ángulo grande ( $SPQ$ ) más este ( $SPT$ ) es de $180^\circ$ , y si le quito este ( $O_2PT$ ) y le sumo este ( $O_1PQ$ ) me queda igual de $180^\circ$ porque son iguales ( $O_2PT$ y $O_1PQ$ ).



400	P	Exactamente. Yo creo que podemos dejar acá por hoy.
-----	---	---

- *Uso de la técnica de lugares geométricos para obtener el punto invariante Q.*

Terminadas las tareas de constatación del HG3 y HG4, se les presentó a los estudiantes el octavo problema de Apolonio dividido en distintas tareas dada la dificultad de este clásico problema de la geometría euclidiana.

- ❖ **Tarea de exploración 3.1:** Dado un círculo  $c$  y dos puntos  $A$  y  $B$ , construya un punto  $J$  sobre  $c$ , la recta  $AJ$  y  $H$  intersección de  $AJ$  y  $c$ , distinto de  $J$ . A continuación, construya el círculo que pasa por los puntos  $B, J$  y  $H$ .

Active la traza del círculo construido y arrastre el punto  $J$ . ¿Qué relación hay entre todos los círculos que se forman?

- ❖ **Tarea de exploración 3.2:** Sea  $Q$  el punto invariante por el que pasan todos los círculos, constrúyalo.

Se presentaron ahora las tareas de exploración 3.1, de exploración 3.2, y de justificación 3.1 para hallar en primer lugar, y en aras de guiar la solución de este problema, el punto invariante  $Q$ , según lo descrito en el análisis a priori.

Así, vemos que en las líneas 4 – 5 los estudiantes construyeron los objetos dados y al momento de arrastrar el punto  $J$  para dejar el rastro de los círculos que pasan por  $B, J$  y  $H$ , la imagen obtenida no daba cuenta de la invarianza de otro punto más que el propio  $B$ . Ante esta situación el profesor les pidió que cambiaran la posición del punto  $B$  y ahora analizaran el nuevo rastro dejado por el círculo. Por tal motivo, evidenciamos que en las líneas 8 – 10 los estudiantes notaron que ahora el rastro era diferente y mediante la exploración en el software guiada por el arrastre y el rastro del círculo, en las líneas 17 – 18 notaron la presencia de un punto invariante en todos los círculos, conjeturando en la línea 19 que es un punto que estaba alineado con  $A$ .

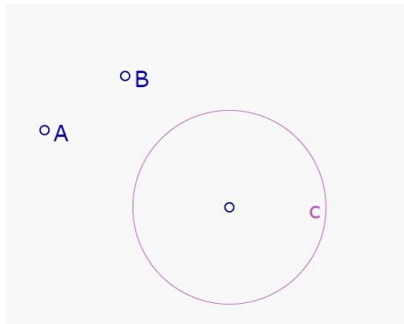
Esta conjetura la verificaron mediante una validación experimental y trazaron la recta  $AB$  para constatar que el punto invariante  $Q$  estaba en la intersección de esta recta con el círculo que pasa por  $B, J$  y  $H$ , como se evidencia en las líneas 26 – 28.

---

1 P Vayan al DGPad y construyan un círculo  $c$  y dos puntos  $A$  y  $B$  exteriores a  $c$ .

---

2 E1 y E2 [Realizan lo pedido].



3 P El problema consiste en construir un círculo que pase por  $A$  y  $B$  y sea tangente a  $c$ . Para solucionarlo, hemos diseñado una secuencia de tareas que siendo resueltas darán una guía para resolver el problema inicial. Entonces vayan al documento de Word y lean la primera tarea.

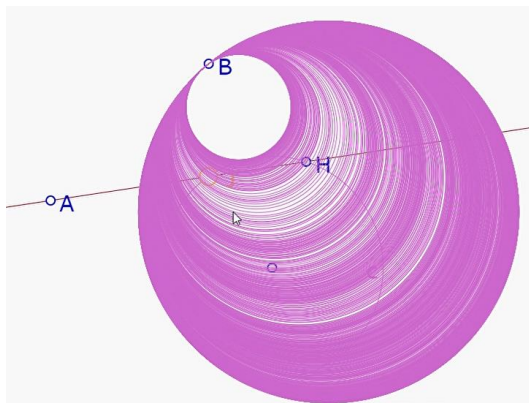
---

4 E2 [Lee el enunciado de la tarea].

**Tarea de exploración 1:** Dado un círculo  $c$  y dos puntos  $A$  y  $B$ , construya un punto  $J$  sobre  $c$ , la recta  $AJ$  y  $H$  intersección de  $AJ$  y  $c$ , distinto de  $J$ . A continuación, construya el círculo que pasa por los puntos  $B$ ,  $J$  y  $H$ .

Active la traza del círculo construido y arrastre el punto  $J$ . ¿Qué relación hay entre todos los círculos que se forman?

5 E1 y E2 [Construyen los objetos pedidos de la tarea, activan la traza del círculo que pasa por  $B, J$  y  $H$  y arrastran el punto  $J$ ].

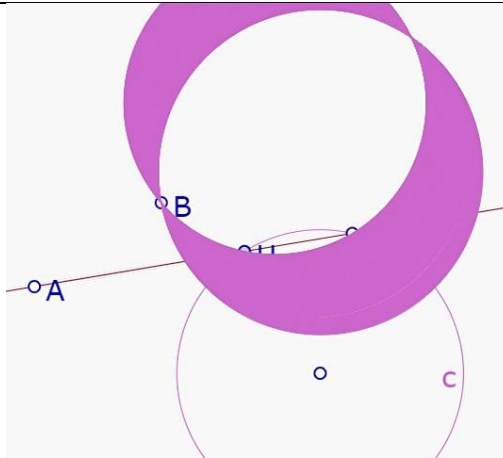


6 P (Se percata que en la imagen que muestra el software,  $B$  parece ser el único punto en común de todos los círculos que se forman, cuando lo esperado es que se vean dos puntos en común a todos los círculos). Arrastre el punto  $B$  a otra posición, que esté más cerca de  $A$ .

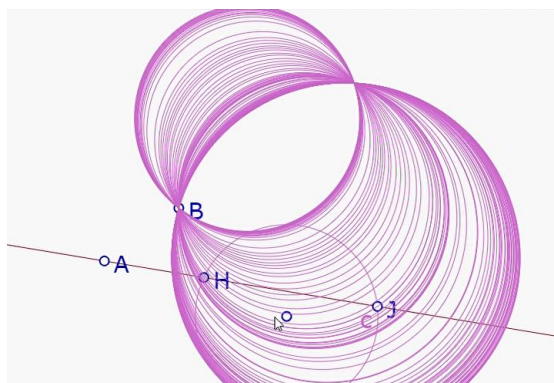
---

7 E1 [Realiza lo pedido y arrastra el punto  $J$  nuevamente].

---

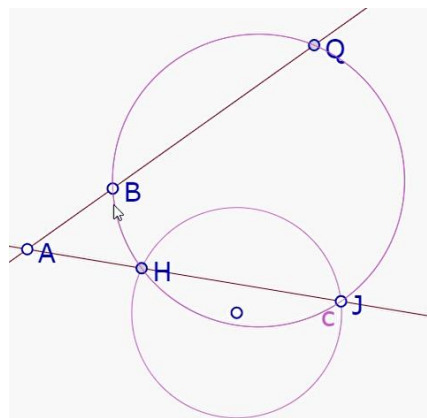


8	E2	Como que hizo la misma figura...
9	E1	No, es diferente.
10	E2	Sí, sí. Ahora es diferente.
11	P	Lean la pregunta de la tarea.
12	E1	¿Qué relación hay entre todos los círculos que se forman? [Arrastra nuevamente el punto $J$ para visualizar el rastro dejado por el círculo].
13	E2	Ya sé, que todos pasan por $B$ . Todos contienen a $B$ .
14	P	¿Qué más podrían decir?
15	E1	Que también pasan por $H$ .
16	E2	Es que es curiosa la forma que deja.
17	E1	[Mueve de posición el punto $B$ , arrastra nuevamente el punto $J$ y visualiza el rastro dejado por el círculo]. ¡Uy, hay otro punto acá! No puede ser.

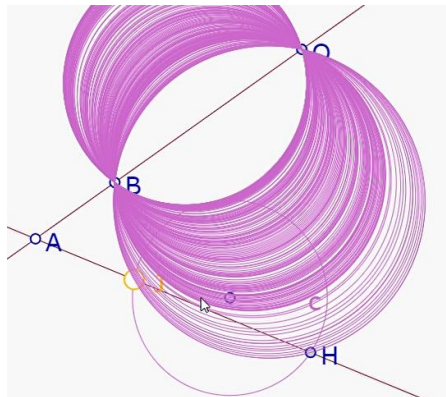


18	E2	Allá arriba hay otro punto.
19	E1	Y tiene cara de que está alineado con $A$ , ¿no?
20	P	¿Eso parece?

21	E2	Sí, está alineado con $A$ .
22	E1	Eso parece...
23	P	¿Podemos construir ese punto?
24	E1	Claro, porque conozco $A$ y $B$ .
25	E2	Sí, porque ese es el producto... [Intenta recordar el teorema de la potencia de un punto respecto a un círculo] sí porque $AH \cdot AJ$ es igual a $AB$ por $A$ y ese punto.
26	E1	Claro. Y entonces yo puedo hacer así [construye la recta $AB$ y el círculo que pasa por los puntos $B, H, J$ . A continuación, nombra $Q$ a la intersección de ambos].



27	E2	Mueva ahora el punto $J$ para ver si es verdad.
28	E1	[Arrastra $J$ ]. Sí, ese es el otro punto, ahí se ve.



29	P	¿Qué pueden decir de ese otro punto? (Refiriéndose al punto $Q$ ).
30	E2	Que el círculo que se forma de esos dos puntos es tangente al otro... ah, no, mentira. Eso no.
31	P	O sea, ¿por qué ese punto no se movía?

---

32	E1	Porque es una constante, ¿no?
33	E2	Sí, porque el producto siempre tiene que ser constante.

---

En estas líneas evidenciamos cómo el uso de la técnica de lugares geométricos les permitió a los estudiantes identificar y conjeturar la invarianza del punto  $Q$  y, posteriormente, las exploraciones en el software favorecieron que conjeturaran su posición. Esta técnica resulta muy útil en situaciones o tareas en las que se quiere que el estudiante identifique no solo invariantes, sino relaciones de dependencia entre objetos, pues como detallaremos más adelante, los estudiantes también identificaron relaciones de dependencia del punto  $Q$  con los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $H$  y  $J$  y el círculo  $c$ .

- *Movilización del HG1 para justificar la invarianza del punto  $Q$ .*

Una vez identificado y construido el punto  $Q$ , se les propuso a los estudiantes justificar por qué este punto es invariante.

- ❖ **Tarea de justificación 3.1:** Justifique por qué el punto  $Q$  es invariante.

Así, las líneas 31 – 53 dan cuenta de los argumentos usados por los estudiantes, en los que usaron el HG1 para decir que la potencia de  $A$  respecto de los dos círculos es la misma y en consecuencia el punto  $Q$  no debe cambiar para que se cumpla que  $AH \cdot AJ = AB \cdot AQ$ . Movilizando así el HG1 en una tarea de justificación.

Además, resaltamos el uso del lenguaje matemático usado, pues intentan referirse al HG1 como el teorema de la potencia de un punto respecto a un círculo, reconociendo las condiciones de su antecedente y teniendo en cuenta las propiedades obtenidas de su consecuente, como lo vemos en las líneas 39, 40, 52 y 53.

31	P	O sea, ¿por qué ese punto no se movía?
32	E1	Porque es una constante, ¿no?
33	E2	Sí, porque el producto siempre tiene que ser constante.
34	P	Pasen a la siguiente tarea.

**Tarea de exploración 2:** Sea  $Q$  el punto invariante respecto a  $J$  por el que pasan todos los círculos, constrúyalo.

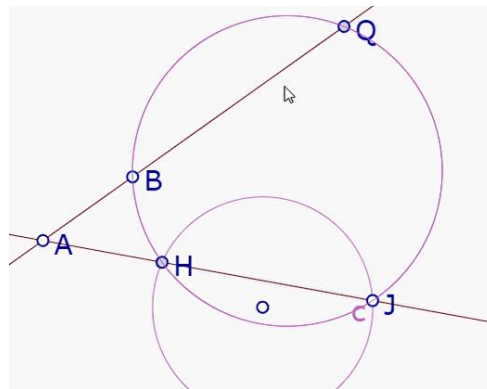
I

35	E1	Esa ya.
36	P	Siguiente tarea.

**Tarea de justificación 1:** Justifique por qué el punto  $Q$  es invariante.

I

37	E2	Pues $Q$ es invariante por lo que ya dijimos del teorema de la potencia.
38	P	¿Podrían argumentarlo mejor?
39	E1	A ver, el que está variando es el punto $H$ y $J$ , pero la potencia de $A$ respecto a ese círculo (refiriéndose a $c$ ) es igual a la potencia de acá (refiriéndose al producto $AB \cdot AQ$ ).



40	E1	Es que $B, H$ y $J$ son puntos que ya están en la construcción, están en el círculo $c_2$ . Y como $H$ y $J$ también están en $c$ , entonces la potencia de $A$ respecto a $c$ sería igual a la potencia de cualquier otro círculo...
41	E2	Es que la potencia de los dos es la misma. (refiriéndose a los dos círculos).
42	E1	No, no necesariamente.
43	E2	Es que los dos círculos comparten dos puntos (refiriéndose a los puntos $H$ y $J$ ).

44	E1	Ajá, o sea, la multiplicación de $AH$ por $AJ$ es la misma que $AB$ por $BQ$ , pero no va a ser lo mismo si estuviera otro punto por acá en esta circunferencia (refiriéndose a $c_2$ ).
45	E2	¿Seguro?
46	E1	No, mentiras. Sí es la misma. Entonces la razón por la que $Q$ no se mueve de lugar precisamente por eso.
47	E2	Porque los dos círculos comparten dos puntos, ¿no?
48	E1	No, no es porque compartan dos puntos.
49	E2	Bueno, se podría decir que es porque los dos círculos se cortan.
50	E1	Pero por qué $Q$ no varía, esa es la pregunta.
51	E2	Pues por eso que dije, ¿por qué más no va a variar?
52	E1	Teorema de la potencia. $Q$ no varía por el teorema de la potencia, lo que dijimos antes de que ambos productos son iguales.
53	E2	Claro, es que los dos círculos tienen esos puntos en común (refiriéndose a $H$ y $J$ ), entonces la potencia del punto exterior $A$ a esas dos circunferencias va a ser la misma.

- *Movilización del HG4 y otros hechos geométricos en tareas de exploración y justificación.*

- ❖ **Tarea de exploración 3.3:** Construya la secante  $BJ$  y  $K$  intersección de  $BJ$  con  $c$ , distinta de  $J$ . A continuación, construya la recta  $KH$  y el círculo que pasa por los puntos  $A, B$  y  $J$ . ¿Qué relación debe haber entre los triángulos  $ABJ$  y  $HJK$  para que los círculos sean tangentes?
- ❖ **Tarea de exploración 3.4:** Construya la recta  $QH$ . ¿Qué relación geométrica hay entre los triángulos  $AJB$  y  $AQH$ ?
- ❖ **Tarea de justificación 3.2:** Demuestre que los triángulos  $AJB$  y  $AQH$  son semejantes.  
¿Qué puede concluir de los ángulos  $ABJ, AHQ$  y  $HKJ$ ?

En este momento se pasa a la tarea de exploración 3.3 y como vemos en las líneas 56 – 758, los estudiantes una vez construyeron los objetos y los triángulos con la herramienta *polígono*, conjeturaron que los triángulos  $ABJ$  y  $HJK$  eran semejantes. Posteriormente, para dar respuesta a qué condición deben cumplir dichos triángulos para que los círculos de la construcción fueran tangentes, los estudiantes movilizaron el HG4 para argumentar que los triángulos  $ABJ$  y  $HJK$  debían estar en posición de similitud para que esto ocurriera, como lo evidenciamos en la línea 62. Además, en la línea 74 damos cuenta que los estudiantes reconocieron las condiciones que deben cumplir los triángulos para estar en posición de similitud.

Esta relación entre los triángulos es justamente la que se debe garantizar para poder dar solución al problema, luego, se avanzó a las tareas de exploración 3.4 y justificación 3.2.

Continuando, vemos que en las líneas 75 – 77 los estudiantes conjeturaron rápidamente que los triángulos  $AJB$  y  $AQH$  son semejantes; los cuales serían fundamentales para posteriormente demostrar que los triángulos  $ABJ$  y  $HJK$  están en posición de similitud. En consecuencia, se les pidió a los estudiantes que demostraran la semejanza de los triángulos  $AJB$  y  $AQH$ .

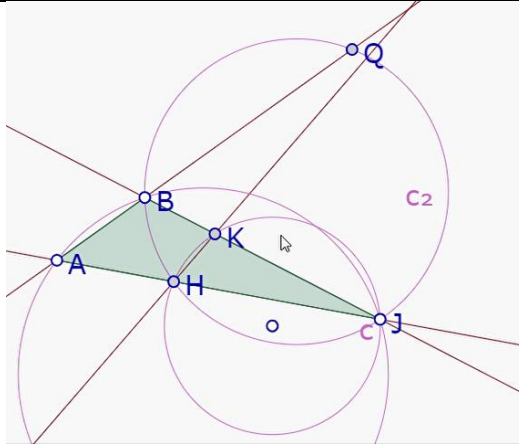
---

55	E1 y E2	[Leen el enunciado de la tarea].
		<b>Tarea de exploración 3:</b> Construya la secante $BJ$ y $K$ intersección de $BJ$ con $c$ , distinta de $J$ . A continuación, construya la recta $KH$ y el círculo que pasa por los puntos $A$ , $B$ y $J$ . ¿Qué relación debe haber entre los triángulos $ABJ$ y $HJK$ para que los círculos sean tangentes?

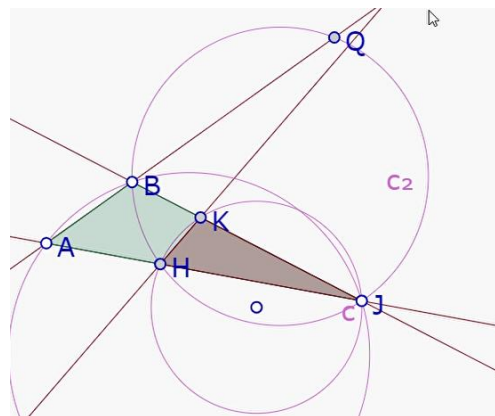
---

56	E1 y E2	[Construyen los objetos pedidos en la tarea y con la herramienta <i>Polígono</i> construyen los triángulos $ABJ$ y $HJK$ ].
----	------------	---

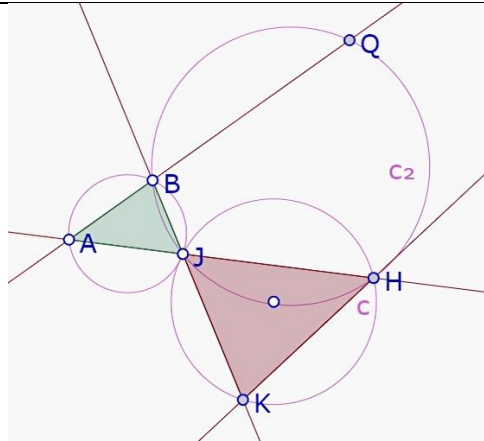
---



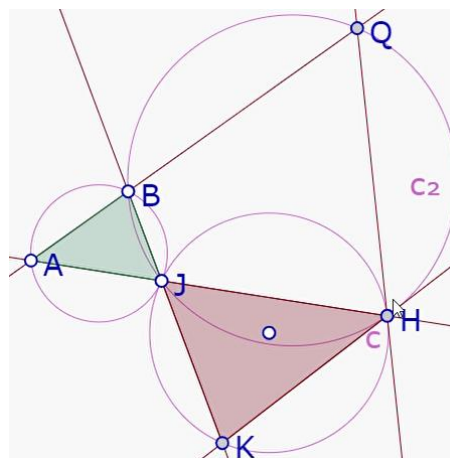
57	E2	¡Uy, los triángulos son semejantes! (refiriéndose a $ABJ$ y $HJK$ ). Yo los vi y de una vez pensé en que eran semejantes. Ahora, ¿por qué son semejantes?
58	E1	Sí, es que se ve que son semejantes.
59	P	Miren la pregunta que se les hace en la tarea.
60	E1	Ah, qué relación hay entre los triángulos para que los círculos sean tangentes.
61	E2	¿Cuáles círculos? Ah, $c$ y el que pasa por $A, B$ y $J$ .
62	E1	¡Yo sé! Deben estar en posición de similitud. Pero no estoy seguro...
63	E2	Pues ahí se ve que comparten un vértice.
64	E1	¿Pueden estar uno adentro del otro? Claro, sí pueden.
65	E2	Sí, y los círculos son tangentes por dentro.



66	E1	Sí, ahí ya más o menos se ve que son tangentes.
67	P	Miremos primero cuando los dos triángulos no están uno dentro del otro.
68	E1	[Arrastra el punto $J$ para que los triángulos no queden superpuestos].



69	P	¿Qué relación debe haber entre los dos triángulos para que los círculos sean tangentes?
70	E2	Que sean semejantes.
71	E1	Sí, que sean triángulos en posición de similitud.
72	P	¿Y qué condiciones deben cumplir los triángulos para que estén en posición de similitud?
73	E2	Las paralelas.
74	E1	Que compartan un vértice, que los lados opuestos a este sean paralelos y sean semejantes.
75	P	Ajuste un poco más el punto $J$ para que perceptivamente se vean los triángulos en posición de similitud y pasen a la siguiente tarea.  <b>Tarea de exploración 4:</b> Construya la recta $QH$ . ¿Qué relación geométrica hay entre los triángulos $AJB$ y $AQH$ ?
76	E1 y E2	[Construyen la recta $QH$ ].



---

77	E2	[Lee la pregunta de la tarea] ¿Qué relación hay entre los triángulos $AJB$ y $AQH$ ? ¿Son semejantes también!
----	----	---

---

Para realizar esta demostración, vemos que en las líneas 95 – 108 mientras los estudiantes exploraban en el software iban surgiendo ideas como usar ángulos correspondientes del mismo lado, el teorema del ángulo inscrito y el teorema del ángulo comprendido entre una cuerda y una tangente. No obstante, en la línea 109 los estudiantes movilizaron el HG1 para argumentar que el producto de  $AB$  por  $AQ$  es igual a  $AJ$  por  $AH$  y, en consecuencia, se tiene que  $\frac{AB}{AJ} = \frac{AQ}{AH}$  que es la proporcionalidad entre los lados de los triángulos involucrados y por el teorema de semejanza LAL concluyeron que los triángulos  $AJB$  y  $AQH$  eran semejantes; como se evidencia en las líneas 112 – 121.

---

95	E1	Pues comparten el mismo ángulo...
96	E2	El producto, ¿no? Vea... ay no, pero $A$ no es punto exterior...
97	E1	Vea que este ángulo es inscrito (refiriéndose al ángulo $BQH$ ), podemos trazar la cuerda $BH$ . Y este de acá también es inscrito (refiriéndose al ángulo $JBA$ )... Se me ocurrió usar el teorema del ángulo entre la tangente y la cuerda, pero acá no hay tangente.
98	E2	Se supone que las que deben ser paralelas son $BJ$ y $QH$ para que sean semejantes, ¿no? Se supone.
99	E1	Pues no necesariamente.
100	E2	No, sí. Para que sean semejantes los dos triángulos sí.
101	E1	[Mide el ángulo $BAJ$ ]. Este es el ángulo que comparten ambos.
102	E2	Necesitamos otro ángulo para que sean semejantes...
103	E1	Sí, si fueran paralelas de una vez serían semejantes (refiriéndose a las rectas $BJ$ y $QH$ ). Pero es que no hay paralelas.
104	E2	Está complicada hacer esta semejanza.
105	E1	$BJ$ y $QH$ son cuerdas del mismo círculo. Pero creería que daría muchas vueltas si uso algo así.

---

106	E2	Qué se me ocurre...
107	E1	Yo lo estoy mirando así: son las mismas cuerdas, puedo obtener ángulos inscritos...
108	E2	Es que la que lo embarra son las paralelas, porque si lo fueran sería más fácil.
109	E1	Pero no busque esas paralelas, toca buscar otra cosa... Tiene algo que ver con los lados, la potencia de los lados. La multiplicación de los lados es una constante.
110	E2	Pero es que no hay ningún punto externo.
111	E1	Yo puedo decir que si $AJ$ por $AH$ es una constante y $AB$ por $AQ$ es igual a otra constante... no, ambos son iguales a lo mismo.
112	E2	Pero yo puedo decir que $A$ es un punto externo del círculo $c_2$ y el producto de $AB$ por $AQ$ es igual a $AJ$ por $AH$ , entonces ya. No sé si se podría decir que son semejantes ya...
113	P	¿Qué se logra con esa relación?
114	E1	Que sus lados son proporcionales.
115	P	¿Quiénes son proporcionales?
116	E1	$AB$ con $AJ$ y $AQ$ con $AH$ .
117	E2	¡Uy, lado-ángulo-lado! (refiriéndose al criterio de semejanza LAL).
118	E1	Sí, ese es.
119	E2	Claro, porque $A$ es exterior a $c_2$ , el producto de acá es igual al producto de acá, ósea que $AB \cdot AQ = AJ \cdot AH$ , y tienen el mismo ángulo, entonces por el LAL, son semejantes. Listo, tenemos la proporción por el teorema de la potencia y comparten un lado. ¿Lo escribimos en el Word?
120	P	Por favor.
121	E1 y E2	[Escriben en el documento de Word la demostración ya descrita verbalmente].

**Tarea de exploración 4:** Construya la recta  $QH$ . ¿Qué relación geométrica hay entre los triángulos  $AJB$  y  $AQH$ ?

Como  $A$  es punto exterior a  $c_2$  según el teorema de la potencia  $AB \cdot AQ = AJ \cdot AH$  por lo que  $AB/AJ = AH/AQ$ .

Los triángulos comparten un ángulo correspondiente,  $QAH$  y  $BAJ$ .

Los triángulos son semejantes por teorema de semejanza LAL.

Luego, en las líneas 126 – 141 los estudiantes exploraron en el software midiendo algunos ángulos y discutiendo sobre la relación existente entre los ángulos  $ABJ$ ,  $AHQ$  y  $HKJ$ , conjeturando que estos deben ser congruentes. Para demostrar esta conjetura exploraron en el software, como vemos en la línea 155, en donde lograron identificar las condiciones del teorema del ángulo comprendido entre una tangente y una cuerda y lo usaron para demostrar que el ángulo  $HKJ$  es congruente con al ángulo  $AHQ$  y por transitividad (pues ya tenían que  $ABJ$  era congruente con  $AHQ$  por la semejanza de los triángulos  $AJB$  y  $AQH$ ), también era congruente con el ángulo  $ABJ$ , como se evidencia en las líneas 156 – 160.

---

122 P Listo, siguiente tarea.

**Tarea de justificación 2:** Demuestre que los triángulos  $AJB$  y  $AQH$  son semejantes.

---

123 E1 Listo, ya lo demostramos.

---

124 P Claro, vieron de una vez que eran semejantes.

---

125 E1 Entonces sigamos.

---

126 E2 [Lee la pregunta].

¿Qué relación existe entre los ángulos  $ABJ$ ,  $AHQ$  y  $HKJ$ ? Demuestre su conjetura.

---

127 E1 Qué relación hay... pues los semejantes son esos, los ángulos  $ABJ$  y  $AHQ$ .

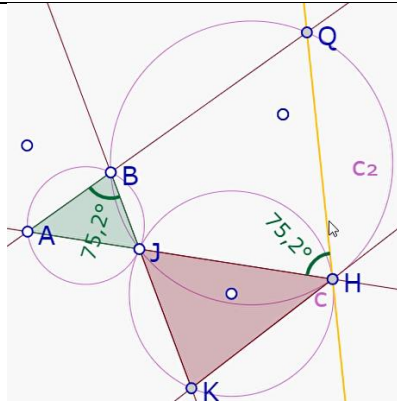
---

128 E2 Mida.

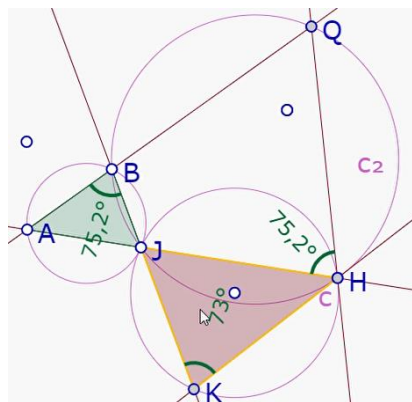
---

129 E1 [Mide los ángulos  $ABJ$  y  $AHQ$ ].

---

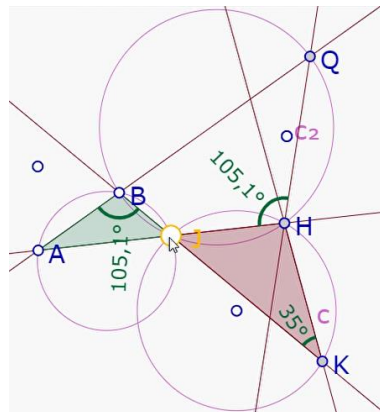


130	E1	Claro, son iguales porque son semejantes.
131	P	Les recuerdo nuevamente para dónde vamos. Queremos construir el círculo que es tangente a $c$ y pasa por $A$ y $B$ . Para garantizar esa tangencia, ¿qué tiene que suceder?
132	E2	Paralelas, opuesto, vértice...
133	P	Ajá, los triángulos...
134	E1	Tienen que estar en posición de similitud y para eso necesito una paralela, pero no en cualquier lugar.
135	P	Entonces necesitamos construir esos dos triángulos, para que así los círculos...
136	E2	Sean tangentes...
137	P	Sigan con la tarea.
138	E1	[Mide al ángulo $HKJ$ ]. Da diferente.

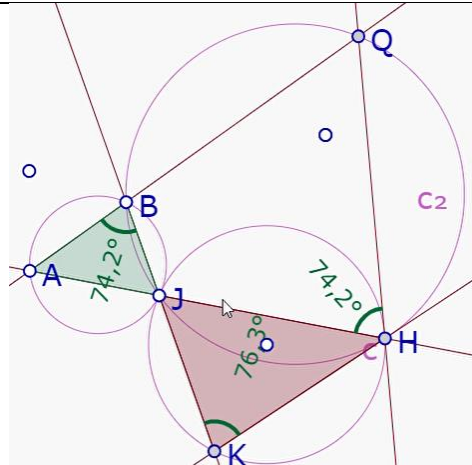


139	E2	Claro, es que es una aproximación. Deben ser congruentes.
140	E1	No, pero esto no es una aproximación.
141	E2	Claro, porque es que no se ha trazado una paralela ni nada, está ajustado todo.
142	P	¿Qué relación geométrica hay entre la recta $QH$ y el círculo $c$ ?

143	E2	Es tangente.
144	P	¿Siempre es tangente?
145	E1	[Arrastra el punto $J$ y la recta $QH$ ya no se percibe tangente a $c$ ]. No.



146	P	En la posición en la que estaba $J$ , la recta $QH$ es...
147	E2	Tangente.
148	P	Ustedes dijeron que los ángulos, los tres ( $ABJ$ , $AHQ$ y $HKJ$ ) son...
149	E2	Congruentes.
150	P	¿Cómo pasaron de que el ángulo $JHQ$ es congruente al ángulo $HKJ$ ?
151	E1	Pues como el triángulo $ABJ$ es semejante a $AHQ$ y como $ABJ$ está en posición de similitud con $HKJ$ , entonces lo tengo.
152	P	Pero justamente los triángulos en posición de similitud es lo que quiero construir.
153	E1	Es verdad.
154	P	Bajo el supuesto de que $QH$ es tangente a $c$ , ¿qué puedo decir de los ángulos $QHJ$ y $HKJ$ ?
155	E2	Ponga la construcción como si $QH$ fuera tangente a ver qué podemos observar. [Ajusta la figura de modo que $QH$ se vea perceptivamente tangente a $c$ ]. Yo creo que tiene que ver con ángulos inscritos.



156	E1	Esta es una tangente... (refiriéndose a $QH$ ).
157	E2	De pronto toca utilizar el teorema entre la tangente y una cuerda... pues claro, $QH$ es tangente a $c$ y el otro ( $HKJ$ ) es inscrito por la cuerda ( $JH$ ).
158	E1	Sí, correcto.
159	P	Pero eso es bajo el supuesto de que...
160	E2	De que $QH$ es tangente a $c$ .

- *Uso de distintos hechos geométricos para resolver el octavo problema de Apolonio.*

En este momento, una vez realizadas las tareas anteriores, se les propuso ahora a los estudiantes construir un círculo tangente a  $c$  que pase por  $A$  y  $B$ ; es decir, que resolvieran el octavo problema de Apolonio.

❖ **Tarea de construcción 3.1:** Construir un círculo tangente a  $c$  que pase por  $A$  y  $B$ .

Para resolver este problema, vemos que en la línea 164 E1 dijo que para realizar la construcción solo basta construir una recta desde  $Q$  que sea tangente a  $c$  y pase por el punto  $H$ , pero a pesar de haber dicho esto, no realizó la construcción. Esto pudo deberse al hecho de que en el proceso de construcción llevado hasta el momento se habían hecho varias suposiciones, como

ajustar perceptivamente la construcción blanda para que los triángulos  $ABJ$  y  $HKJ$  estuvieran en posición de similitud o el ajuste perceptivo de que el punto  $H$  fuera el punto de tangencia en  $c$  de la recta  $QH$ ; lo que lo llevó a dudar si ese punto  $H$  puede ser construido o no, y qué condiciones se necesitan garantizar para que sea el punto que se está buscando.

En consecuencia, vemos que la línea 171 da cuenta de lo descrito anteriormente: E1 afirmó que el punto  $H$  no puede ser cualquiera, pero dedujo incorrectamente que se podía obtener de cualquier recta tangente y en las líneas 172 – 175 realizó una construcción que consideró como solución del problema; sin embargo, al arrastrarla esta no mantuvo sus propiedades y constató que los círculos no eran tangentes. Así, es evidente que algo falló, en particular, la ubicación del punto  $H$  pues no reconocieron que está directamente relacionado con el punto  $Q$  y para obtener  $H$ , primero hay que obtener el punto  $Q$ .

Con esto en mente, en la línea 183, el profesor les dijo a los estudiantes *Para garantizar  $H$ , ¿qué debemos garantizar antes?* A lo que respondieron que se garantizó la semejanza de los triángulos  $ABJ$  y  $AHQ$ . Así, el profesor les preguntó qué se hizo ahora para garantizar dicha semejanza, a lo que E2 en la línea 187 respondió que se garantizó que se cumpliera  $AB \cdot AQ = AJ \cdot AH$  y E1 en la línea 190 respondió que entonces lo que hay que garantizar primero es el punto  $Q$ .

En ese sentido, en las líneas 201 – 202 vemos que los estudiantes hicieron uso del HG1 para enunciar que el punto  $Q$  debía cumplir con  $AB \cdot AQ = AJ \cdot AH$ , y así en la línea 205 construyeron el punto  $Q$ , pero dudaban que realmente este fuera el punto buscado. En esta situación, lo que pudo haber pasado es que al ponerle etiquetas a los puntos en las anteriores tareas y luego usar esos mismos puntos para realizar la solución, estaba haciendo que los estudiantes

confundieran los puntos de la construcción blanda, realizada en las anteriores tareas, con los puntos que debían construir para realizar la construcción exacta.

Por lo que en la línea 208 el profesor les pidió a los estudiantes borrar la etiqueta del punto  $H$ , para que no confundieran el punto de la construcción blanda con el que debían construir. Sin embargo, en las líneas 214 – 237 vemos que los estudiantes tuvieron este mismo problema, pero ahora con el punto  $J$ , a lo que el profesor les pidió ocultar la etiqueta de este punto y les realizó preguntas con el fin de notar las propiedades de los puntos que fueron llamados  $J$  y  $H$  para que los construyeran.

Así, vemos que en la línea 243 E1 logró realizar esta diferenciación de los puntos  $J$  y  $H$  usados en la construcción blanda de los verdaderos puntos  $J$  y  $H$  que debía construir con ciertas propiedades, lo que le permitió construir el punto  $Q$  haciendo uso del HG1 como se evidencia en la línea 244. Posteriormente, mediante el teorema de Tales construyó el punto  $H$ , como vemos en las líneas 246 – 247. Y una vez obtenido el punto  $H$ , trazó la recta  $AH$  para obtener el punto  $J$  y así construir los triángulos en posición de similitud para garantizar que sus circuncírculos fueran tangentes en  $J$ , tal y como lo comenta E1 en la línea 247.

---

161 P Pasemos a la siguiente tarea.

**Tarea de construcción I:** Construir un círculo tangente a  $c$  que pase por  $A$  y  $B$ .

---

162 E1 Ahora toca construir el círculo.

---

163 P ¿Podemos ahora sí resolver el problema?

---

164 E1 Claro, necesitamos una tangente que pase por ese punto (refiriéndose al punto  $H$ ). Trazando  $AJ$  encontramos  $H$ , pero es que  $H$  debe ser tangente.

---

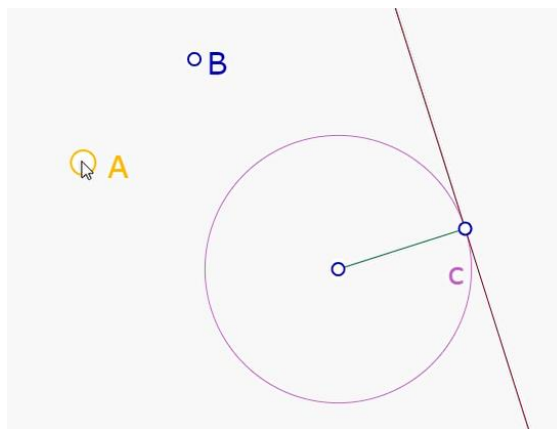
165 P Construya a  $H$  como el punto de tangencia.

---

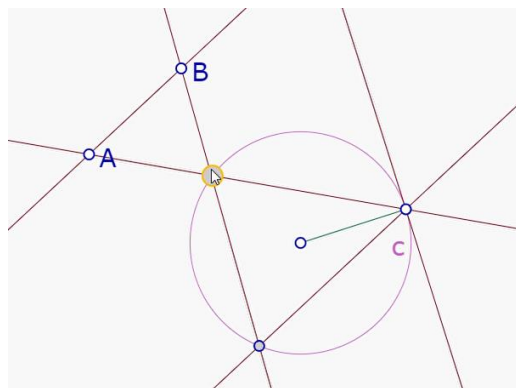
166 E1 Pero ahí es tangente.

---

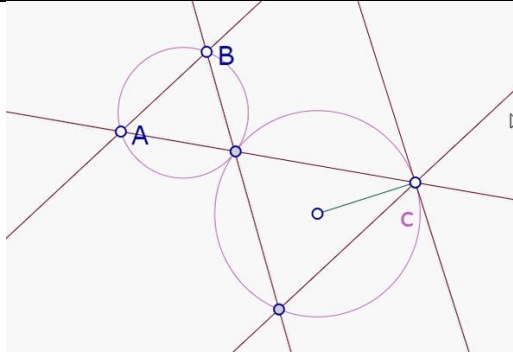
167	P	Arrastre $J$ y deja de ser tangente. ¿Cómo construyo la recta $QH$ de modo que sea tangente a $c$ ?
168	E2	¿A $J$ lo podemos construir o ya lo tenemos?
169	E1	Ese se puede construir, yo creo que $J$ es el último que se obtiene. Es que si usted tiene $H$ ya puede trazar la paralela ( $KH$ ).
170	E2	Pero $J$ puede ser cualquiera, porque usted arrastra $J$ y se mueve $H$ .
171	E1	No, $J$ tiene que ser uno en específico y $H$ igual, debe ser el punto de tangencia de $QH$ ... ¿Se puede con cualquier tangente? Sí, cualquier tangente funcionaría. [Abre una nueva ventana de del software, construye los puntos $A, B$ y el círculo $c$ . Traza un radio de $c$ y una perpendicular al radio].



172	E2	Si marca la intersección entre la tangente y $AB$ , ese es un vértice que compartían los triángulos semejantes.
173	E1	[Traza una recta secante a $c$ , marca sus intersecciones y construye otra recta secante y una paralela para obtener un par de triángulos en posición de similitud].



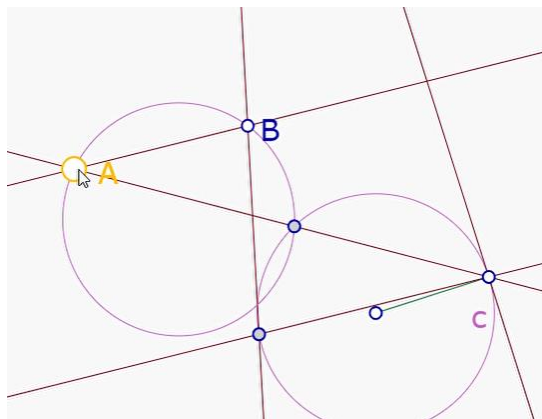
174	E2	Listo, ya esos triángulos son semejantes y sus circuncírculos son tangentes.
175	E1	[Construye el circuncírculo faltante y por la posición de los objetos los círculos se ven tangentes].



176 E2 Listo, ya.

177 P Arrastre.

178 E1 [Arrastra el punto A y se evidencia que los dos circuncírculos no son tangentes].



179 E1 Falta algo.

180 E2 ¿Qué faltó? Ah pues la semejanza de los triángulos de arriba.

181 P Vayan a la otra página del software, donde está lo habíamos hechos hasta ahora.

182 E1 y E2 [Realizan lo pedido].

183 P Para garantizar  $H$ , ¿qué debimos garantizar antes?

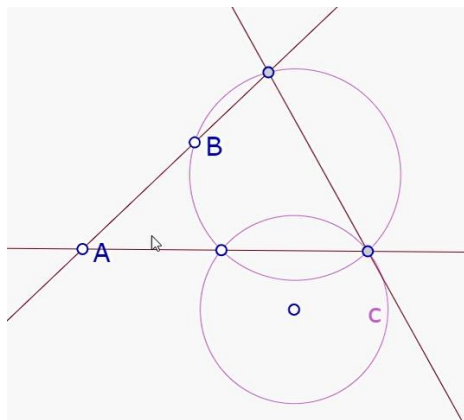
184 E2 Que estos dos fueran semejantes (los triángulos  $ABJ$  y  $AHQ$ ).

185 P ¿Y qué hicimos para que fueran semejantes?

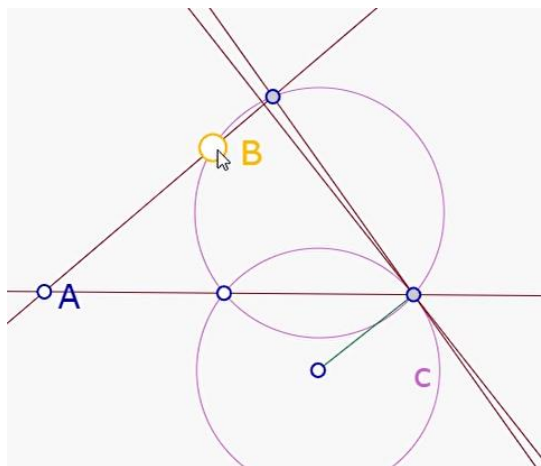
186 E1 El círculo, se hizo el círculo ( $c_2$ ).

187 E2 Pero también hicimos que el producto fuera igual ( $AB \cdot AQ = AJ \cdot AH$ ). Creo que debemos trazar cualquier secante a  $c$  y encontrar un producto que sea igual y ahí es donde sale el círculo.

188	E1	Pero eso no garantiza $H$ punto de tangencia.
189	E2	No, todavía no. Pero puedo trazar cualquier secante porque el círculo ( $c_2$ ) pasa siempre por esos dos puntos.
190	E1	¡Ah, está sencillo! Usted puede hacer el producto a un punto $Q$ y el punto $H$ ya estaría, necesita es hallar $Q$ primero. $AB$ se puede trazar y estos triángulos deben ser semejantes ( $ABJ$ y $AHQ$ ).
191	E2	Y la semejanza la hallamos por el teorema de la potencia. Debemos trazar un círculo que contenga a $B$ , $J$ y $H$ , y esos puntos los tenemos.
192	E1	Pero es que $J$ no se puede poner de una vez.
193	E2	Pues yo creo que sí, puede ser cualquiera.
194	E1	No porque $J$ es un punto específico.
195	E1 y E2	(Debido a problemas técnicos con el software, se tuvo que volver a hacer la construcción).

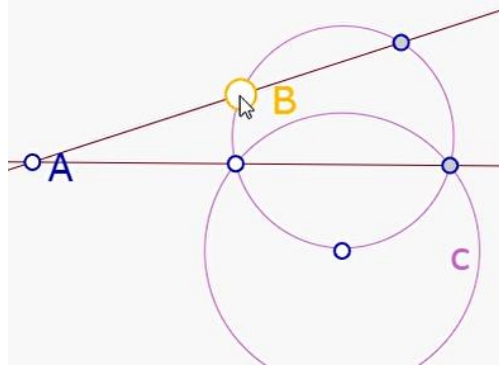


196 E1 [Traza un radio del círculo  $c$  y una perpendicular a este].

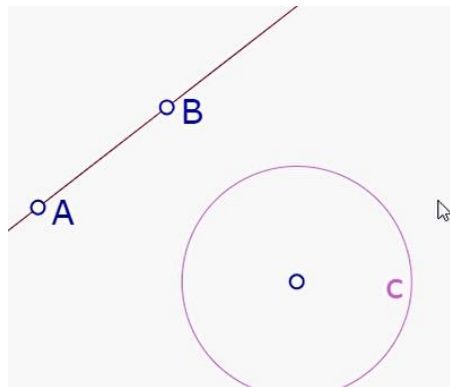


197 P ¿Teniendo  $Q$  puedo encontrar a  $H$ ?

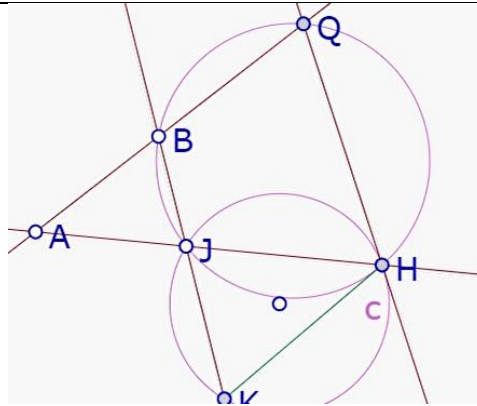
198	E2	Claro
199	E1	Sí, hay que tener es a $Q$ primero.
200	P	Entonces si quiero construir a $H$ , ¿qué es lo que debo hacer?
201	E1	Construir a $Q$ . Sería un punto que tenga la misma potencia que esto, ¿no? (refiriéndose al punto $A$ exterior a $c$ y sus cortes) porque es una constante. Pero no puede ser cualquier punto, porque si muevo por ejemplo a $B$ , se mueve, vea. [Arrastra el punto $B$ y el punto $Q$ cambia de posición].



202	E1	[Borra los objetos, dejando solo los puntos $A$ , $B$ , el círculo $c$ y la recta $AB$ ]. Necesito a $Q$ para encontrar a $H$ .
-----	----	---



203	P	¿Cómo construimos $Q$ ?
204	E2	$Q$ era el punto de intersección entre la recta $AB$ y otra, ¿no?
205	E1	Sí, pero $Q$ no puede ser cualquiera. Voy a volver a hacer la construcción de antes. [Realiza la construcción].  Listo, ahí están nombrados otra vez. Ahora, ¿cómo hallo $Q$ ?

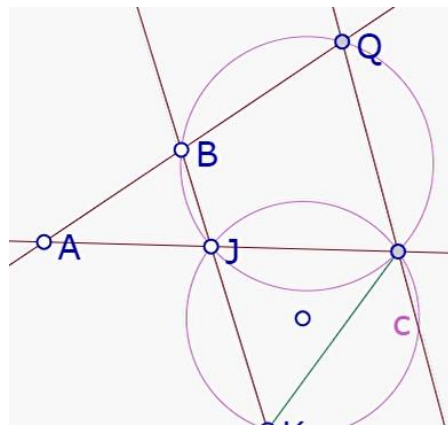


206 P ¿Ese que está ahí no es  $Q$ ?

207 E1 ¿Cómo hallo  $Q$  para construir  $H$ ? Porque es que necesito que sea tangente ( $QH$ ). Tengo  $A, B$ , la circunferencia y necesito una tangente que pase por  $Q$ , entonces sería suficiente...

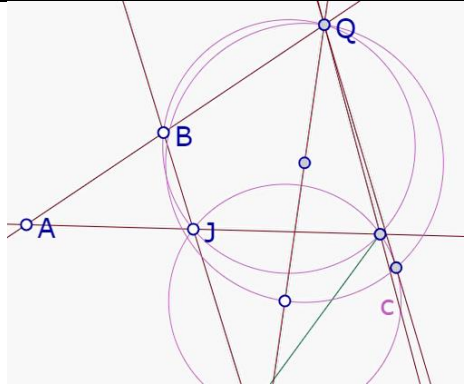
208 P Si quiere borre la etiqueta del punto  $H$ .

209 E1 [Borra la etiqueta del punto  $H$ ].

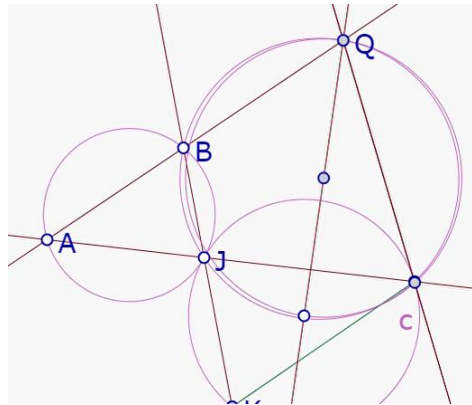


210 P Construya una tangente a  $c$  que pase por  $Q$ .

211 E1 [Usa el teorema de Tales para construir una recta tangente a  $c$  que pase por  $Q$ ]. Ahí la construí, pero no pasó por  $H$ .

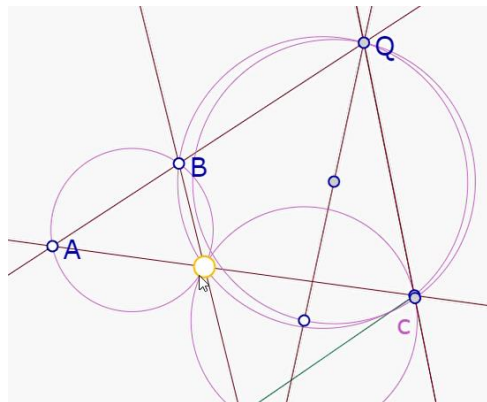


- 212 P Trace el círculo que pasa por  $A$ ,  $B$  y  $J$ .
- 213 E1 [Realiza lo pedido].
- 214 P Y arrastre  $J$  de modo que se observe la tangencia con el círculo  $c$ .
- 215 E1 [Realiza lo pedido].



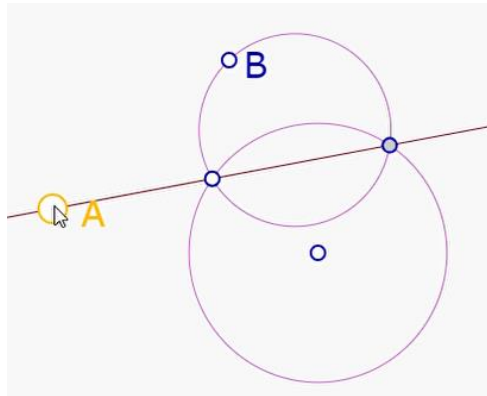
- 216 P ¿Qué logra observar?
- 217 E1 Que los círculos se sobreponen. Ah, listo, le entiendo. Entonces el problema está en construir  $Q$ . Y  $Q$  se puede construir.  $Q$  es un vértice del triángulo que es semejante a  $ABJ$ , pero necesito la semejanza.
- 218 P Cuando arrastra  $J$  para que los círculos sean tangentes, ¿qué pasa con el punto  $H$ ?
- 219 E1  $H$  queda en el punto de tangencia.
- 220 P ¿Podemos construir un punto  $H$  que resista la prueba del arrastre?
- 221 E1 Pues hay que tener esa tangente ( $QH$ ).
- 222 P ¿Y cómo construyo esa tangente?
- 223 E1 Teniendo a  $Q$ .
- 224 P ¿Entonces ya pueden construir la solución del problema?

225	E2	Pues sí, ¿no?
226	E1	$H$ tiene que estar en una tangente, pero no es una cualquiera.
227	E2	Depende de algo.
228	P	¿De qué?
229	E1	De $Q$ , la tangente depende de $Q$ .
230	P	Cuando arrastra $J$ , ¿se mueve $Q$ ?
231	E1	No.
232	P	¿Se mueve $H$ ?
233	E1	No. Pero la pregunta es dónde está $Q$ . [Arrastra el punto $J$ ]. Ah, $Q$ está a una misma potencia que esta de acá (secante $AJ$ ). Pero igual esa potencia no la puedo sacar... ah, no. Sí puedo sacar cualquier otra potencia. Tengo $A$ , $B$ y $J$ , ay, pero $J$ no lo tengo porque es el punto que necesito.
234	P	$J$ es un punto que nos permitió...
235	E1	Construir $Q$ . Entonces $J$ lo puedo poner en cualquier lado.
236	P	Borre el nombre de $J$ .
237	E1	[Realiza lo pedido].

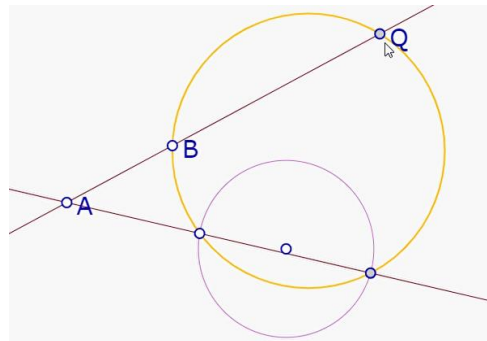


238	P	Ese punto que antes era $J$ me permitió encontrar $Q$ . Y con $Q$ puede encontrar...
239	E1	$H$ . O sea que hay que encontrar $J$ primero.
240	P	Teniendo ya el punto $H$ , ¿qué propiedades tiene el punto $J$ ?
241	E1	Pues está en el círculo $c$ y está en la misma recta $AH$ .
242	E2	¿Este es $J$ y este $H$ ?
243	E1	Se puede trazar cualquiera, no lo llame $J$ . Ya le capté lo que me quiere decir. [Abre una nueva ventana del software en el navegador, construye los puntos $A$ , $B$ y el círculo $c$ ]. O sea, si yo hago esto [Traza una secante a $c$ que pasa por $A$ y

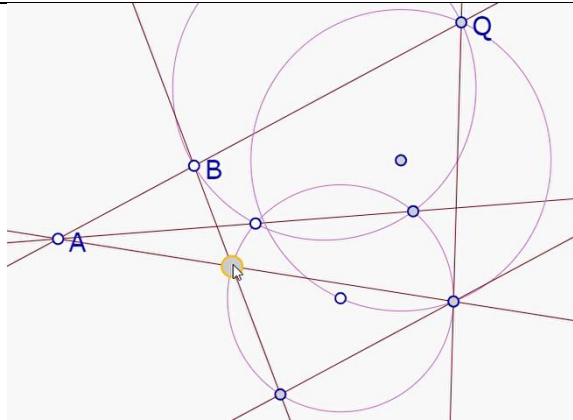
marca sus intersecciones]. Esta no es mi  $J$  ni mi  $H$ , son puntos cualesquiera.  
[Construye el círculo que pasa por  $B$  y las dos intersecciones en  $c$ ].



- 244 E1 [Traza la recta  $AB$  y marca su intersección con el círculo recién construido]. Este sería mi  $Q$ , porque no varía y tiene la misma potencia.

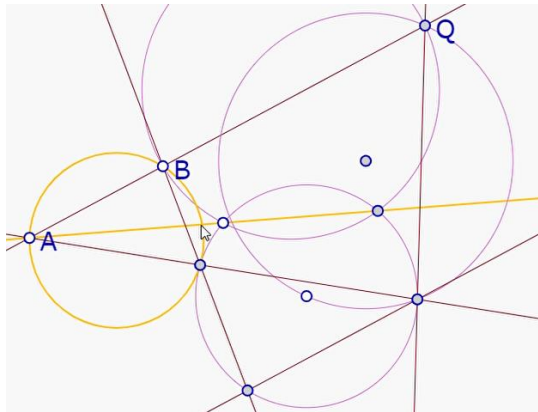


- 245 E1 Ahora necesito una recta tangente a  $c$  que pase por  $Q$  y construir a la  $H$  que tanto hablábamos. Y es que este punto no es  $J$ , es un punto cualquiera que me facilita encontrar a  $Q$ . Ese era el problema con el nombre, nosotros pensábamos que era el  $J$ , pero nada que ver.
- 246 E2 Ahora falta la tangente, que se hace con punto medio y el círculo. (refiriéndose al teorema de Tales).
- 247 E1 Ajá. [Usa el teorema de Tales para construir el punto  $H$ ]. Ahora, este es  $H$ . Y si tengo  $H$ , tengo  $J$ . [Traza la recta  $AH$  y marca como  $J$  su intersección con  $c$ ]. Y si tengo  $J$  ahora puedo tener al par de triángulos en posición de similitud [Construye los triángulos en posición de similitud].



248 E2 Y ahora traza los circuncírculos y son tangentes.

249 E1 Tienen que ser tangentes. [Construye el circuncírculo faltante].



250 E2 [Arrastra la construcción y esta resiste el arrastre]. Sí, ahora ya está.

251 E1 El problema era con esa  $J$ , porque yo pensaba que construía a  $J$  de una vez, pero no, era un punto cualquiera, cualquiera de todas las jotas posibles. Entonces era construir una cualquiera, para luego obtener la única y la que hacía la tangencia.

- *Uso de la técnica de validación experimental para verificar la segunda solución al octavo problema de Apolonio.*

❖ **Tarea de exploración 3.5:** ¿Existe otra solución al problema? Es decir, ¿existe otro círculo que sea tangente a  $c$  que pase por  $A$  y  $B$ ?

Una vez construida una solución del problema de construcción, se les preguntó a los estudiantes sobre la posibilidad de otra solución. Ante este cuestionamiento, vemos que en las líneas 254 – 257 los estudiantes conjeturaron que existe otra solución, basándose en los dos puntos de tangencia desde  $Q$  al círculo  $c$ .

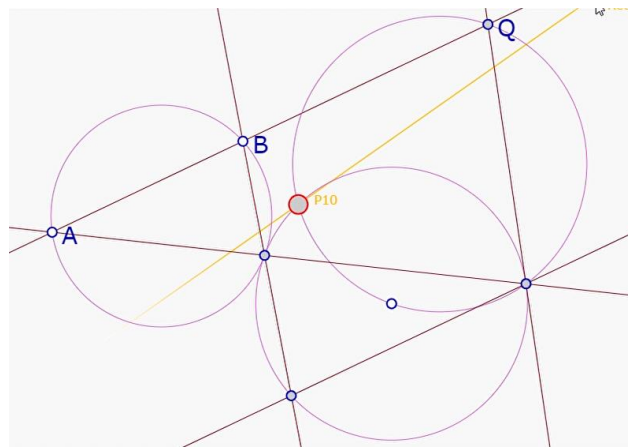
Para comprobar esta conjetura, E1 en la línea 258 realizó la construcción de un segundo círculo que es tangente a  $c$  y pasa por los puntos  $A$  y  $B$ , utilizando un razonamiento análogo usado en la solución anterior.

De modo que, al realizar esta segunda solución se les pidió que argumentaran por qué ese segundo círculo construido también era solución del problema. Así, vemos que en las líneas 264 – 270 los estudiantes conjeturaron que debe ser porque hay un par de triángulos que están en posición de similitud y se pusieron a la tarea de explorar en el software para encontrarlos, teniendo presente las características que deben cumplir dichos triángulos.

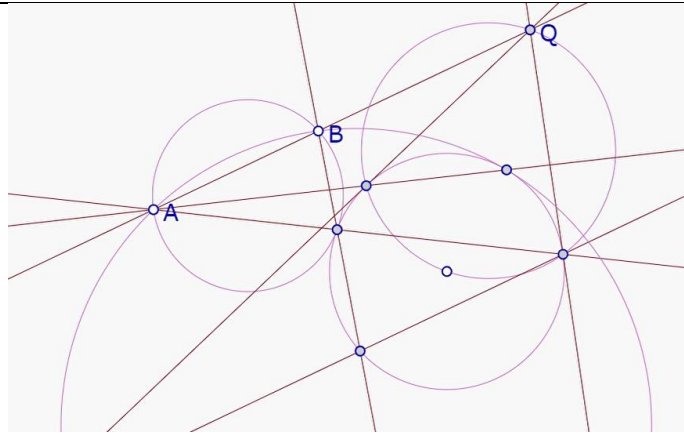
En las líneas 271 – 275 los estudiantes lograron encontrar el par de triángulos que debían estar en posición de similitud para garantizar la tangencia de los círculos y en las líneas 277 – 282 argumentaron que por el paralelismo de las rectas que comprenden los lados opuestos al vértice común de ambos triángulos se tiene que los ángulos correspondientes de los triángulos son congruentes y por el teorema de semejanza AA los triángulos son semejantes. No obstante, este razonamiento está errado por las razones que se describen en la línea 283 y en consecuencia los estudiantes siguieron explorando en el software para hallar propiedades geométricas que les permitieran demostrar el paralelismo de los lados opuestos al vértice común de los triángulos. En las líneas 287 – 304 se puede observar los intentos en usar algunos hechos geométricos por hallar estas propiedades, pero que concluyeron en nada: teorema del ángulo inscrito, el HG1 y el teorema del ángulo comprendido entre una tangente y una cuerda.

Por lo anterior, el profesor tomó la decisión de validar la segunda solución mediante la técnica de la validación experimental, ya que los estudiantes no lograron llegar a una demostración formal, pero la construcción resistió la prueba del arrastre.

252	P	¿Existen más soluciones? Es decir, ¿existe otro círculo tangente a $c$ que pase por $A$ y $B$ ?
253	E2	Emm... uno más grande.
254	E1	Claro, uno más grande. Yo me lo imagino por fuera, pero ¿dónde? Tal vez en este punto de intersección.
255	P	¿Cuál punto de intersección?
256	E1	Ya tenemos la intersección del lado derecho de la tangente a $c$ que pasa por $Q$ , pero hay otra intersección a la izquierda por la que puedo trazar otra tangente a $c$ que pase por $Q$ . [Marca el otro punto de tangencia a $c$ ].

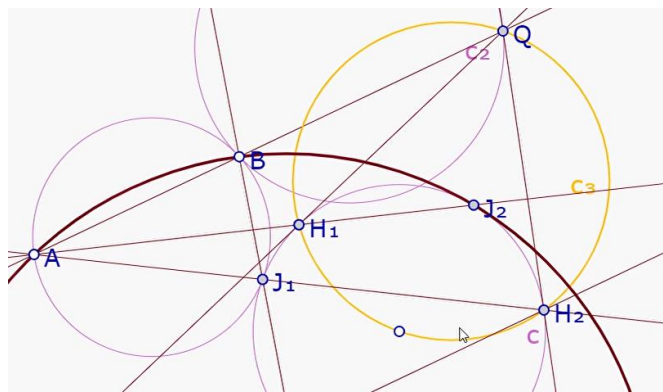


257	E2	Claro, ahí están las dos soluciones posibles.
258	E1	Ahora, como este nuevo punto es mi $H$ ... [Traza la recta que pasa por $A$ y el punto] ¿ahora me estás diciendo que esta intersección de la recta con el círculo es mi $J$ ? [Construye la segunda solución al problema]. Y efectivamente, este círculo ahora queda por fuera.



259 P Nombren los puntos.

260 E1 y E2 [Realizan lo pedido]



261 P ¿Por qué razón el nuevo círculo construido es tangente a  $c$ ? y ¿Por qué el anterior también lo fue?

262 E1 El anterior fue tangente a  $c$  porque garantizamos que el triángulo  $ABJ_1$  es un triángulo en posición de similitud con el triángulo  $KH_2J_1$ .

263 P ¿Por qué el otro círculo también es tangente?

264 E2 Entiendo que es porque también debe haber triángulos adentro... ¿cuáles serían los triángulos semejantes? Podría ser  $ABJ_2$ ... Se supone que deben compartir un vértice.

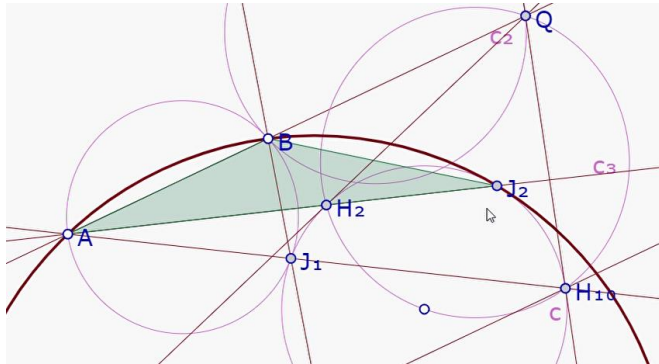
265 E1 ¿Si serán triángulos en posición de similitud?

266 E2 Pues como el círculo solución está por dentro, entonces los triángulos también deben estar por dentro.

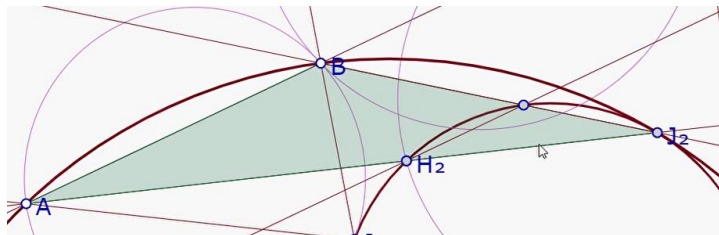
267 E1 Claro, debe haber una paralela a  $AB$  que pase por algún lado. Para la primera solución estaban  $J_1$  y  $H_1$ , entonces para esta segunda deben estar  $J_2$  y  $H_2$ .

268 E2 ¿Cuáles serían los triángulos? Yo sé que uno debe estar dentro del otro.

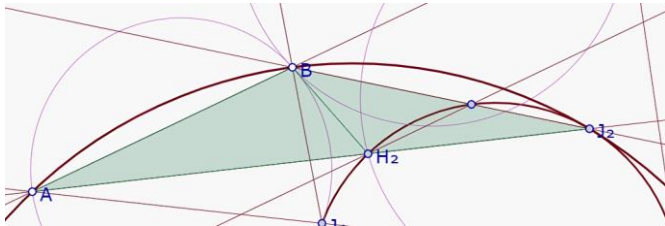
269	E1	Debe haber una recta que pase por $B$ y $J_2$ [Construye la recta $BJ_2$ ].
270	E2	$J_2$ es el punto donde el círculo es tangente y también debe ser el vértice que comparten los dos triángulos.
271	E1	[Con la herramienta <i>Polígono</i> construye el triángulo $ABJ_2$ ]. Entonces, si quiero que sean tangentes en $J_2$ , debe haber una paralela a $AB$ .



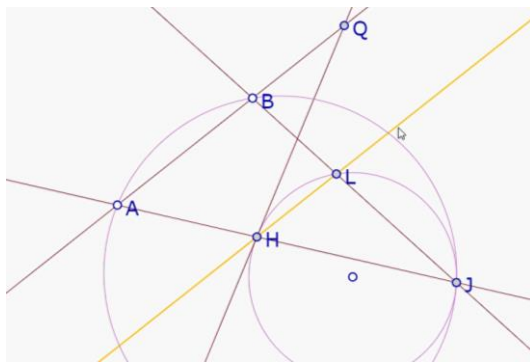
272	E1 y E2	[Exploran en el software construyendo rectas para encontrar el triángulo que debe estar en posición de similitud con $ABJ_2$ ].
273	P	¿Qué debería tener el otro triángulo?
274	E2	Que comparta el vértice $J_2$ y que tenga una paralela a $AB$ ... ¡Ah! Una paralela a $AB$ .
275	E1	Que pase por $H_2$ , ¿no? [Construye una recta paralela a $AB$ que pasa por $H_2$ y marca su intersección].



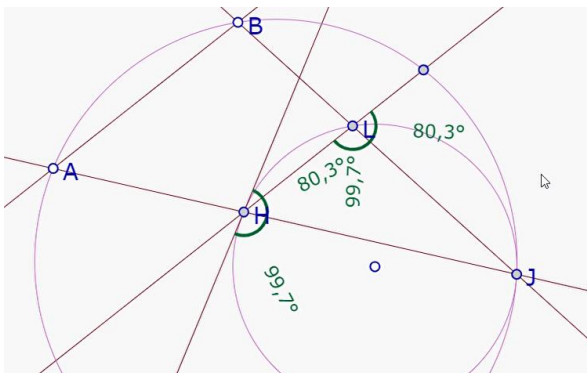
276	P	¿Pueden demostrar que esos triángulos están en posición de similitud?
277	E1	El ángulo lo tenemos.
278	E2	Pero no podemos usar la potencia porque ahora los puntos no son exteriores. Tenemos el de AA, el de LAL...
279	E1	¡Ah, pero hay una paralela! Como $AB$ es paralela a la recta que trazamos, entonces ya lo tenemos.
280	E2	Entonces como son paralelas, sus ángulos correspondientes por el mismo lado son congruentes y ya.

281	E1	Exacto, ya entonces los tres pares de ángulos serían congruentes y por tanto son semejantes los triángulos.
282	E2	El teorema de semejanza es el AA, tienen uno que comparten y el otro puede ser cualquiera de los que se forman entre las paralelas.
283	P	Hay algo que no me cuadra. (Aclaración: los estudiantes construyeron la recta de modo que pase por $H_2$ y que sea paralela a $AB$ , pero no se puede garantizar que esa recta también pase por la intersección del círculo $c$ con la recta $BJ_2$ . De modo que se debe demostrar lo anteriormente descrito, demostrar que las rectas sean paralelas o usar otro criterio para probar la semejanza de los triángulos).
284	E1	Sí, es por la paralela a $AB$ que se construyó por $H_2$ . Así estarían en posición de similitud y los círculos son tangentes.
285	P	Les propongo que lo demuestren sin las paralelas, es decir, trazaron las rectas, pero no saben si son paralelas.
286	E2	Entonces toca demostrar que son paralelas. Podemos usar ángulos alternos internos, ángulos complementarios, alternos externos...
287	E1	Para que sean paralelas habría que hallar la semejanza.
288	E2	Veamos... trace el segmento $BH_2$ .
	E1	[Traza el segmento $BH_2$ ].
		
289	E1 y E2	[Miran detenidamente la construcción].
290	E1	Ya sé por qué. Mira que la cuerda de $H_2$ con el punto de intersección de la recta con el círculo me hacen un ángulo inscrito en $J_2$ . Y $J_2$ también es ángulo inscrito de la cuerda $AB$ ...
291	E2	Ya, pero y con eso qué.
292	E1	Nada, es curioso jajaja.
293	E1 y E2	[Exploran en el software arrastrando algunos puntos y viendo la construcción].
294		[La pantalla del software se congeló y los estudiantes decidieron razonar sobre la imagen proyectada en la pantalla para no volver a hacer toda la construcción].

296	E2	Ya dejemos así, no movamos el mouse.
297	E1	Demuestre mirando la pantalla.
298	E1 y E2	[Intentan usar el teorema de la potencia con el punto $B$ y las secantes $BJ_2$ y $BH_2$ , pero abandonan la idea].
299	E2	No podemos usar lo de la potencia con $B$ , nos desviamos mucho.
300	E1 y E2	[Siguen mirando la imagen proyectada en la pantalla buscando relaciones entre los ángulos de los triángulos a probar que son semejantes].
301	E2	Es que con ángulos externos estoy viendo que tampoco...
302	E1	[Abre una nueva ventana del software en el navegador y realiza la construcción nuevamente].



303	E1	[Mide el ángulo $QHJ$ ]. Debería ser igual a $HLJ$ , porque $QH$ es la tangente y $HJ$ la cuerda.
304	E1 y E2	[Miden algunos ángulos para hallar relaciones de congruencia y demostrar la semejanza entre los triángulos $AJB$ y $HJL$ ].



305	P	Bueno, podemos dejar hasta ahí.
-----	---	---------------------------------

El análisis a priori permitió prever distintos escenarios y anticiparnos a diversas acciones que podían realizar los estudiantes en la experimentación con el software, permitiendo así que en la fase de experimentación se cumplieran varias de las hipótesis que se realizaron. Sin embargo, también hubo situaciones en las que lo que se esperaba que sucediera, no terminó ocurriendo de la manera en la que se había descrito; por ejemplo, lo sucedido en la tarea de justificación 2.1.

En esta tarea los estudiantes debían demostrar el HG4 y en su intento, presentaron muchas dificultades en el proceso de exploración con el software para identificar propiedades y relaciones entre los objetos que les permitiera realizar la demostración. Esto se pudo deber a que se dejó más libertad a los estudiantes para explorar las ideas que iban teniendo, lo que resultó en que realizaran varios intentos fallidos y como consecuencia del cansancio generado por esto, no estuvieran concentrados. Ante esta situación, consideramos que una solución puede ser dividir esta tarea en otras menos laboriosas y en las que se tenga más control sobre las exploraciones que puedan realizar los estudiantes; como se hizo con la tarea de construcción 3.1 que correspondía al octavo problema de Apolonio.

En lo que respecta a la construcción de los hechos geométricos, vemos que este proceso fue favorecido por la experimentación realizada en el software y las tareas propuestas que guiaban estas exploraciones; ya que si bien en algunos momentos se dejaba que los estudiantes indagaran en las ideas que les iban surgiendo, las preguntas, las indicaciones de las tareas y las intervenciones del profesor centraban la atención cuando era necesario. Esto permitió que para cada uno de los hechos geométricos que nos interesaba constatar, se escribieran enunciados con las condiciones necesarias y suficientes para que estos se cumplieran.

Y en lo que refiere al uso de los hechos geométricos estudiados, evidenciamos que los estudiantes los reconocieron como leyes apodícticas y recurrieron a ellos para usarlos en

razonamientos deductivos y en construcciones geométricas. Además, la exploración en el software también favoreció la aparición de otros hechos geométricos ya constatados por los estudiantes.

## 8. Conclusiones

La Geometría Dinámica Experimental como práctica geométrica que introduce la experimentación dentro de la actividad de problemas de geometría (problemas de construcción y de demostración) permite al estudiante; a partir de la percepción visual y procesos de experimentación como el arrastre de objetos, la medición de magnitudes y la construcción de objetos auxiliares, entre otros; reconocer e identificar invariantes y relaciones de dependencia entre propiedades geométricas que aportan a la resolución de problemas geométricos y a la formulación de conjeturas sobre las propiedades geométricas de los objetos involucrados en la construcción. Esta actividad experimental en el SGD permite al estudiante identificar hechos geométricos como aparición simultánea de propiedades en una construcción, identificando las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los objetos para obtener otras propiedades que resultan de las iniciales.

Por lo tanto, con el propósito de promover la construcción de los hechos geométricos seleccionados en esta investigación, se realizó detalladamente en una parte del diseño, tareas de exploración, análisis y reconocimiento que trataran de cumplir y fueran lo más fiel a las siguientes características: tareas en las que el SGD facilite las acciones materiales (producir figuras y medir sus elementos) y tareas en las que el SGD favorezca la exploración y el análisis para identificar relaciones geométricas mediante el arrastre (Laborde, 2001). De modo que el proceso de construcción de los hechos geométricos empezara con la identificación de la dependencia entre propiedades y concluyera con una conjetura escrita o verbalizada en forma de enunciado condicional.

Asimismo, la Geometría Dinámica Experimental no se limita únicamente a utilizar el software para “encontrar propiedades” que permitan realizar construcciones exactas, sino que pone

como condición el justificar deductivamente esas conjeturas experimentales; es decir, promueve el uso de la experimentación para encontrar argumentos deductivos que permitan justificar los hechos geométricos. Promoviendo así una exploración doble: exploración de una construcción (blanda o exacta) para encontrar hechos geométricos que permitan justificar deductivamente las conjeturas experimentales, y la exploración de conocimientos teóricos (definiciones, teoremas, postulados, axiomas) para encontrar argumentos que permitan justificar deductivamente los hechos geométricos encontrados durante la experimentación.

Por ende, en el análisis a priori la Geometría Dinámica Experimental permitió realizar conjeturas sobre las posibles exploraciones que podrían realizar los estudiantes tanto en las tareas enfocadas a promover la construcción de los hechos geométricos como en las tareas enfocadas a su uso, lo que nos ayudó a prever diferentes situaciones que se podrían dar y así proponer preguntas que guiaran y centraran la exploración en el software llegado el caso en el que la situación requiriera la intervención del profesor para cumplir con el propósito de la tarea.

Así, con respecto a las tareas que buscaban promover la construcción del HG1 concluimos que: en la tarea de exploración y análisis 1.1 gracias a la exploración realizada en el SGD arrastrando los objetos de la construcción, los estudiantes lograron anticipar que el producto  $PA \cdot PB$  era constante y lo verificaron usando la calculadora del software; luego, en la tarea de reconocimiento 1.1 lograron identificar mediante el arrastre relaciones geométricas entre los objetos que les permitieron realizar en enunciado condicional que daba cuenta de las condiciones necesarias y suficientes del HG1. Pasando ahora a la tarea de justificación 1.2, la exploración en el SGD favoreció la exploración de conocimientos teóricos por parte de los estudiantes, de tal manera que emergieron hechos geométricos como: los teoremas de semejanza de triángulos, el teorema del ángulo exterior, el teorema del ángulo inscrito y el teorema de ángulos opuestos por

el vértice; que permitieron justificar que  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ . En lo que respecta al HG2, en la tarea de exploración y análisis 1.3 los estudiantes movilizaron el HG1 para deducir y anticipar, sin recurrir a la construcción en el SGD, que se cumple que  $PA^2 = PC \cdot PD$ . En la tarea de reconocimiento 1.3 lograron discernir la diferencia entre la tarea que daba paso al HG1 y la que daba paso al HG2, de modo que identificaron las relaciones geométricas existentes entre los nuevos objetos de la construcción y lograron realizar un nuevo enunciado con las condiciones necesarias y suficientes que daban cuenta del HG2.

En la segunda actividad, en la tarea de exploración y análisis 2.1, gracias a un contraejemplo mostrado por el profesor y el arrastre en el software, los estudiantes establecieron relaciones geométricas entre el punto  $A$  y los círculos  $c_1$  y  $c_2$  y conjeturaron correctamente las condiciones necesarias y suficientes que debían cumplir tales objetos para que los círculos fueran tangentes. Así, al pasar a la tarea de reconocimiento 2.1, lograron escribir un enunciado condicional en el que expresaron las relaciones geométricas encontradas entre los objetos y la propiedad geométrica obtenida; lo que dio cuenta del HG3.

En las tareas de la segunda actividad referentes a la constatación del HG4 se favoreció la exploración de conocimientos teóricos, pues emergieron hechos geométricos como el teorema de ángulos opuestos por el vértice y el teorema de los ángulos alternos internos que, junto con la exploración en el software basada en el arrastre, permitieron a los estudiantes identificar relaciones geométricas entre los triángulos que daban como resultado la tangencia entre sus circuncírculos; explicitando así un enunciado condicional que refiere a las condiciones necesarias y suficientes que dan cuenta del HG4. Asimismo, en la tarea de justificación 2.1 la exploración con el software favoreció la exploración de la red de saberes por parte de los estudiantes, ya que emergieron hechos geométricos como el teorema de los ángulos alternos internos, ángulos externos, el teorema de

semejanza AA, teorema del ángulo inscrito y algunas reglas algebraicas que les permitieron demostrar teóricamente el HG4.

Ahora bien, una vez se constataron los hechos geométricos, se propusieron tareas en las que los estudiantes tuvieran que recurrir a ellos para resolver la situación presentada; de modo que, a continuación, concluimos sobre las tareas que promovieron el uso de los hechos geométricos y cómo estos fueron usados.

En la tarea de anticipación 1.1 los estudiantes movilizaron el HG1 y el HG2 para llegar a la conclusión de que  $TP^2 = QP \cdot RP$  únicamente viendo la imagen y sin leer las preguntas. Lograron identificar sin dificultades las condiciones iniciales de cada uno de los hechos geométricos, lo que los llevó directamente a usarlos en un razonamiento deductivo para justificar otras propiedades que llevaban a la relación de igualdad entre el producto de magnitudes mencionada anteriormente.

En las tareas que se refieren a la construcción del segundo problema de Apolonio, tarea de construcción 1.1 y tarea de justificación 1.3, el uso de la técnica de análisis y el arrastre les permitió a los estudiantes identificar propiedades geométricas que podían garantizar para realizar la construcción; entre ellas, el HG1 y HG2. De modo que, al identificar el HG2 y representarlo en la construcción los llevó a establecer una relación con el teorema de la media geométrica para así desarrollar una estrategia para garantizar los puntos de tangencia por los que pasaban los dos círculos solución de este problema de construcción, dando por terminada la tarea realizando una construcción exacta cuyos pasos fueron justificados teóricamente haciendo uso de hechos geométricos. En consecuencia, la experimentación con el software les permitió identificar hechos geométricos que fueron usados para desarrollar una estrategia para resolver el problema.

En la tarea de exploración 3.1 el uso de la técnica de lugares geométricos les permitió a los estudiantes identificar dos puntos invariantes: el punto  $P$ , que ya se tenía, y el punto  $Q$  que se debía construir. Además de conjeturar otras propiedades de este punto, como que estaba alineado con los puntos  $A$  y  $B$ , y era intersección de la recta  $AB$  con un círculo que pasaba por los puntos  $B, H$  y  $J$ ; conjeturas que validaron con el software. Ya en la tarea de justificación 3.1 hicieron uso del HG1 reconociendo que la potencia de  $A$  respecto de los dos círculos es la misma y en consecuencia el punto  $Q$  debe ser invariante para que se mantenga la relación  $AH \cdot AJ = AB \cdot AQ$ .

En las tareas de exploración 3.3, 3.4 y en la tarea de justificación 3.2, se vio favorecida la exploración de conocimientos de los estudiantes, ya que emergieron distintos hechos geométricos en las exploraciones realizadas en el software que permitieron resolver las tareas. En particular resaltamos: el uso del HG4 para argumentar las propiedades geométricas que debían tener los triángulos  $ABJ$  y  $HJK$  para que sus circuncírculos fueran tangentes; el uso del HG1 para demostrar la semejanza de los triángulos  $AJB$  y  $AQH$ ; y el uso del teorema del ángulo comprendido entre una tangente y una cuerda para demostrar la congruencia de los ángulos  $HKJ$  y  $AHQ$ .

En la tarea de construcción 3.1, que refiere al octavo problema de Apolonio, las exploraciones en el software favorecieron la identificación de hechos geométricos para resolver el problema. Destacamos las siguientes situaciones: el uso del HG1 para construir el punto invariante  $Q$ ; y el uso del teorema de Tales para construir el punto  $H$  y con ello el punto de tangencia por el que debía pasar el primer círculo solución de este problema. En la tarea de exploración 3.5 los estudiantes lograron realizar la construcción exacta del segundo círculo solución del problema usando un razonamiento análogo al de la primera solución, sin embargo, no justificaron porque efectivamente esa era una segunda solución al problema; por lo que se hizo uso de la técnica de la validación experimental para validar tal respuesta a esperas de una demostración formal.

Con base en lo anterior y como respuesta a la pregunta de investigación, evidenciamos que las tareas que favorecieron la construcción de hechos geométricos tienen las siguientes características: presentar una situación geométrica en forma de enunciado o protocolo de construcción en el SGD junto con preguntas que guíen la exploración y el análisis de esta situación arrastrando los objetos, midiendo magnitudes y produciendo otras figuras para identificar relaciones geométricas y dependencia entre propiedades; de modo que una vez identificadas estas relaciones y propiedades, se centre la atención con preguntas enfocadas a la verbalización o escritura de un enunciado que las caracterice.

Evidenciamos que las tareas que buscan favorecer el uso de los hechos geométricos presentan las siguientes características: tareas articuladas de tal forma que los hechos geométricos que se descubrieron a partir de la exploración dinámica se puedan construir, identificar o reconocer mediante una exploración y análisis de la situación presentada, que requerirá o no el uso del SGD, para justificar, anticipar y verificar propiedades geométricas.

Constatamos que los estudiantes con los que realizamos el pilotaje del diseño de tareas usaron los hechos geométricos como herramientas de construcción y verificación para descubrir, verificar y justificar propiedades geométricas que se ponen de manifiesto o se descubren en las situaciones presentadas en las tareas. Además, usaron los hechos geométricos para desarrollar estrategias que los llevaron a solucionar las tareas presentadas y los usaron en razonamientos deductivos para validar o invalidar determinadas propiedades geométricas de los objetos.

**Referencias Bibliográficas**

- Acosta Gempeler, M. E. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*, 17(3), 121-140.
- Acosta Gempeler, M. E. (2008). *Démarche expérimentale, validation, et ostensifs informatisés. Implications dans la formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri en classe de géométrie*. [Tesis de doctorado, Université Joseph Fourier – Grenoble I].  
[https://die.udistrital.edu.co/comunidad/martin\\_eduardo\\_acosta\\_gempeler](https://die.udistrital.edu.co/comunidad/martin_eduardo_acosta_gempeler)
- Acosta, M. y Cardozo, S. (2021). Una estrategia de enseñanza de la demostración utilizando *software* de geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis: ted*, (49), 255-276.  
<https://doi.org/10.17227/ted.num49-9884>
- Acosta, M. E., Mejía, C., y Rodríguez, C. W. (2013). Lugares geométricos en la solución de un problema de construcción: presentación de una posible técnica de una praxeología de geometría dinámica. *Educación Matemática*, 25(2), 141-160.
- Alarcón, S. y Suescún, C. (2005). *El obstáculo euclídeo en la construcción del concepto de tangente*. [Tesis de Maestría no publicada] Universidad de Antioquia.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. una empresa docente.
- Camargo, L. y Samper, C. (2013). *Aproximación temprana al razonamiento geométrico en Educación Básica*. VIII Simposio Nororiental de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

- Cruz, M. y Mantica, A. (2017). El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas. *Revista iberoamericana de Educación Matemática*, (51), 69-82.
- Franchi, L. y Hernández, A. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. Parte II. *Educere*, 8(25), 196 – 204.
- García, G y Serrano, C. (1999). *La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural*. Grupo editorial Gaia.
- Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements*. (2ª ed., Vol. 2). Dover Publications, Inc.
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry task with Cabri-geometry. *Internacional Journal of computers for mathematical learning*, (6), 283 – 317.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 275-304.
- Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*.
- Ortega, T. y Pecharromán, C. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (7), 95 – 117.
- Orts, A. (2019). *Características del aprendizaje de la recta tangente. Identificación de trayectorias de aprendizaje en un experimento de enseñanza*. [Tesis de doctorado, Universidad de Alicante]. Repositorio institucional de la Universidad de Alicante.

- Pérez, L., Galeano, A. y Chacón, M. (2021). El problema de los círculos tangentes como ilustración del potencial del SGD para la enseñanza de la geometría. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*, 34(1), 133-141.
- Rabu-Boyé, A. (2009). *El Apollonius Gallus y el problema de los tres círculos como defensa e ilustración de la geometría sintética*. Ediciones Universidad Industrial de Santander.
- Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017). Geometría dinámica como actualización didáctica de la evolución conceptual de la geometría. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de geometría y sus Aplicaciones*, (23), 143-148.
- Quintero, A., Molavoque, M. y Guacaneme, E. (2012). Diferencia entre semejanza y proporcionalidad geométrica desde una perspectiva histórica. *Revista de ciencias*, 16, 75 – 85.
- Sandoval Cáceres, I. T. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, 21(1), 5-27.
- Tudela, M. y Saavedra, A. (2016). *Propuesta para la enseñanza aprendizaje de la semejanza de triángulos*. [Tesis de pregrado]. Universidad Alberto Hurtado, Chile.
- Vera, F. (1970). *Científicos griegos*. Aguilar, Madrid, Vol. 1.

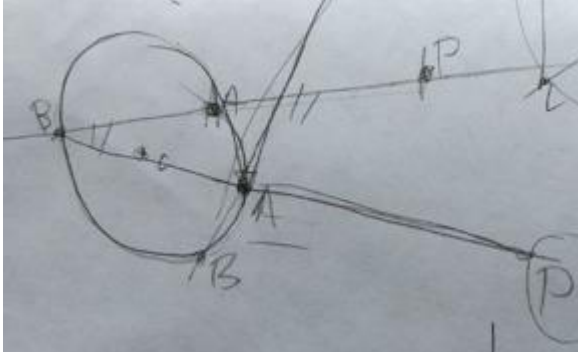
### Apéndices

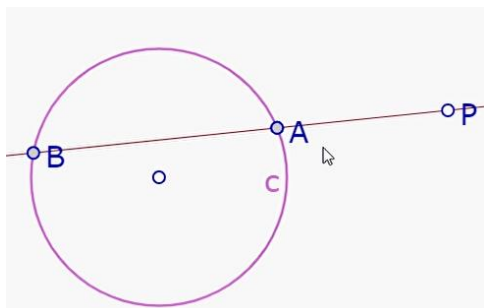
En esta sección presentamos las transcripciones completas de las sesiones que comprenden la experimentación de las actividades con una pareja de estudiantes de primer semestre que estaban finalizando el curso de Geometría Euclidiana del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Estos estudiantes, en el curso referido, hacían uso del software DGPad-Colombia, de modo que conocen las herramientas básicas de construcción.

Para el desarrollo de las tareas los estudiantes trabajaron en equipo en un computador y para la recolección de datos se grabó la pantalla del computador y el audio. Además, el investigador hizo las veces de profesor.

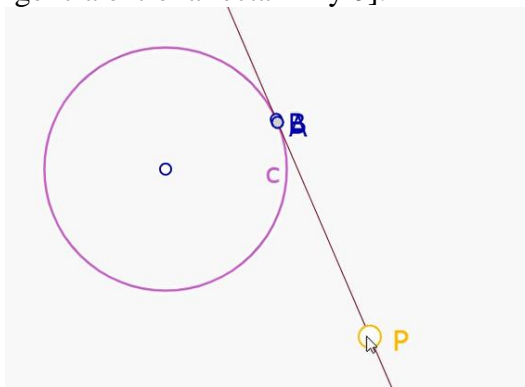
Los resultados de la experimentación se exponen mediante tablas de tres columnas. La primera columna indica la numeración, la segunda indica el sujeto que ejecuta la acción (E1, E2 y P para indicar a los dos estudiantes y al profesor respectivamente), la tercera indica lo que el sujeto dice y el mensaje que transmite o las acciones que realiza con su respectiva evidencia (estas acciones serán escritas entre paréntesis rectos “[ ]”) y algunas aclaraciones que puedan surgir serán escritas entre paréntesis redondos “( )”.

## Apéndice A. Primera sesión actividad 1

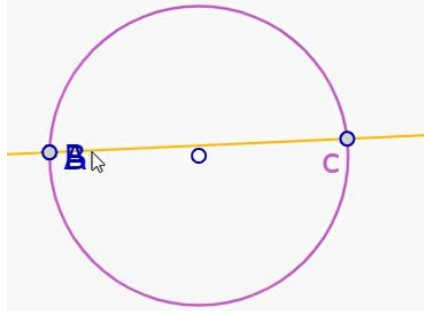
No.	Sujeto	Descripción – Evidencia
1	E1	[Lee el enunciado de la Tarea de exploración 1.1] <b>Secuencia 1. Primera parte</b>  Lea detenidamente los enunciados y responda detalladamente a las preguntas propuestas. <b>Tarea de exploración 1:</b> Dados un círculo $c$ y un punto $P$ exterior a $c$ , construir un punto $A$ sobre $c$ , la recta $PA$ y $B$ el punto de intersección de $PA$ y $c$ . ¿Dónde debe ubicarse $A$ sobre $c$ para que el producto $PA \cdot PB$ sea el mayor posible?
2	E2	[Realiza un dibujo en lápiz y papel de la situación] Esto sería como un rectángulo, con magnitudes $PA$ y $PB$ . Obviamente es cuando quede un cuadrado, cuando ambas distancias sean iguales... que es cuando va a ser más grande.
3	E1	¿Será?
4	E2	¿Dónde se debe ubicar $A$ sobre $c$ ? $A$ , estamos hablando es de $A$ . O sea, todo depende es de $A$ . $P$ y $B$ no se pueden mover, solo $A$ .
5	E1	Sí, $P$ no se mueve.
6	E2	Si no estoy mal, creo que sería cuando $A$ esté en el diámetro, se supone, ¿no? [Sobre papel dibuja otra recta $PA$ que pasa por el centro del círculo].
		
7	E1	Pero $P$ no se mueve.
8	E2	Si se desplaza $A$ toda la recta se va a desplazar.
9	E1	Pero estás moviendo también $P$ .
10	E2	$P$ depende de $A$ .
11	E1	No, $P$ es un punto libre.
12	E2	Pues sí, pero la recta está dada por $A$ y $P$ .
13	E1	Primero tienes $P$ y luego $A$ . Si tienes $A$ más lejos, $B$ queda más cerca de $P$ .
14	E2	Sí, la posición de $B$ depende de dónde esté $A$ .
15	P	Haga ese dibujo en DGPad.
16	E1	[Construye un círculo $c$ con radio constante, un punto $P$ exterior a $c$ , un punto $A$ sobre $c$ , la recta $PA$ y marca la intersección de esta con $c$ , usando la herramienta <i>intersección</i> y la llama $B$ ]. (El punto $A$ debe tener la misma apariencia que $P$ , relleno blanco y no gris. El relleno blanco indica que el punto se deja arrastrar directamente, mientras que el relleno gris indica que no. Sin embargo, cuando los alumnos seleccionaron intersección de $AP$ y $c$ , DGPad mostró dos puntos, uno sería $B$ y el otro queda superpuesto en $A$ , por lo que pareciera que ha cambiado la apariencia de $A$ ).



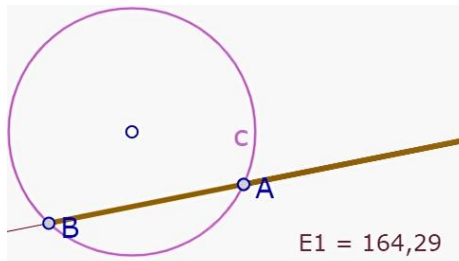
17	E2	Entonces sí, todo depende de $P$ . Mueva $P$ .
18	E1	[Arrastra el punto $P$ ] Pero se mueve $B$ .
19	E2	Sí, sí, pero ¿cuándo se igualan?
20	E1	Cuando sea tangente sería lo mismo. [Arrastra $P$ hasta obtener perceptivamente la tangencia entre la recta $PA$ y $c$ ].



21	P	¿Por qué está moviendo $P$ ?
22	E2	¡Ah! Es que es dónde debe estar ubicado $A$ .
23	E1	Claro. [Vuelve a leer la pregunta].
24	E2	Yo creo que cuando se encuentran, porque sería que los dos tienen la misma distancia. Cuando es tangente. Si quiere mídalos y miremos cómo sale.
25	E1	Sí, ahora miremos eso. [Arrastra el punto $A$ sobre el círculo] Pero mira que, si $PA$ disminuye, $PB$ aumenta. O sea, siempre como que mantienen una misma razón.
26	E2	Curioso... qué curioso.
27	E1	[Arrastra $A$ sobre $c$ ] Ahí se sobrepone, no sé exactamente porqué. Vamos a hacer la prueba midiendo. (Para para algunas posiciones de $A$ sobre $c$ , DGPad intercambia las intersecciones que se construyeron en la línea 16, de modo que $B$ queda coincidiendo con $A$ y los alumnos interpretan que es el nombre del punto $B$ el que ha cambiado de posición).

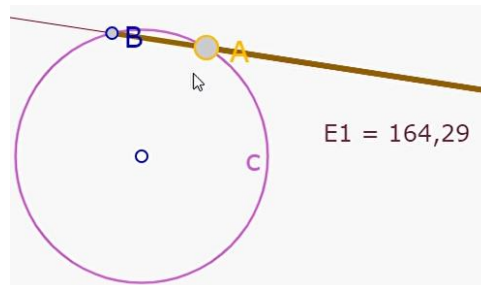


28 E1 [Vuelve a cambiar de posición A para que A y B no coincidan y traza los segmentos  $PA$ ,  $PB$  y haciendo uso de la calculadora de DGPad multiplica ambos segmentos].



29 E2 Ahora mueva A.

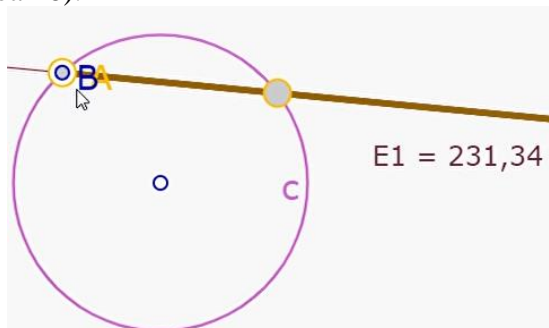
30 E1 Creo que se mantiene, ¿no? [Arrastra el punto A sobre c]. Sí, efectivamente se mantiene.



31 E2 ¡Es igual! No me la creo...

32 E1 ¿Por qué es igual? ¿Por qué  $PA$  por  $PB$  siempre me dan lo mismo?

33 E1 [Arrastra el punto A hacia el lado izquierdo de c y el producto cambia] (el producto cambió porque se intercambiaron las intersecciones de AP y c construidas en la línea 16).

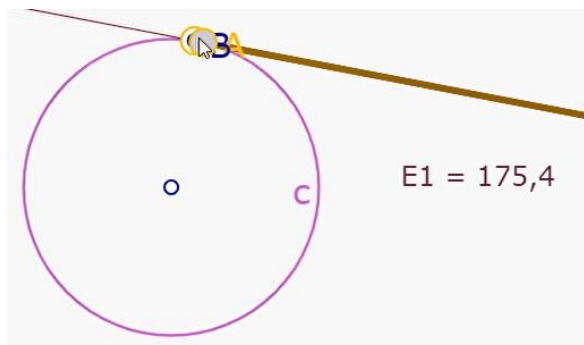


34 E1 Cuando paso A para el otro lado me pone a A sobre B, debe ser un error. El segmento lo toma mal.

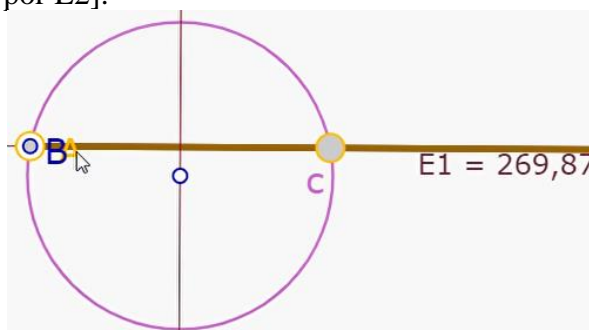
35	E2	Debe ser constante porque cuando uno aumenta el otro disminuye.
36	E1	Tiene que cumplir una razón. [Sigue arrastrando $A$ por el círculo].
37	E2	Bueno, pero la pregunta ya está respondida, jajaja. En cualquier punto se puede poner $A$ .
38	E1	¿Dónde debe ubicarse $A$ para que el producto sea el mayor posible?
39	E2	En cualquier lado, en cualquiera.
40	E1	Pues el mayor, mayor no es posible porque siempre es el mismo.
41	P	Entonces pasemos a la siguiente situación.
42	E2	[Lee el enunciado de la siguiente tarea].

**Tarea de reconocimiento:** ¿Qué ocurre con el producto  $PA \cdot PB$  cuando se arrastra  $A$ ?  
 ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir los puntos  $A$  y  $B$  con respecto a  $c$  para que se dé ese resultado? Escriba un enunciado que relacione esas condiciones con el resultado observado.

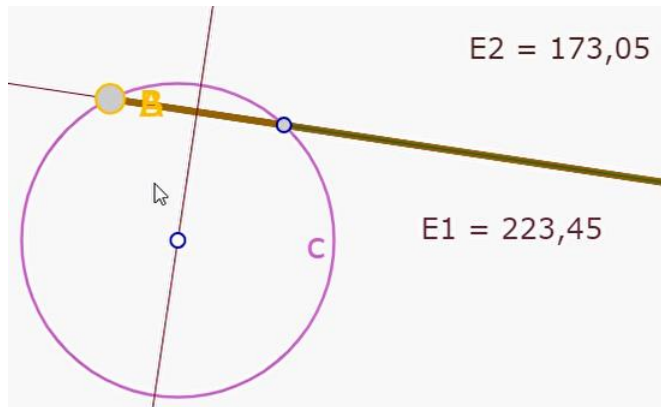
43	E1	Cuando se arrastra $A$ el producto entre $PA$ y $PB$ se mantiene, no cambia, no varía.
44	E2	Ahora, ¿cuáles deben ser las condiciones que deben cumplir $A$ y $B$ con respecto a $c$ ?
45	E1	Pues según la construcción, $A$ y $B$ deben estar sobre la misma recta, la recta debe ser secante. Si fuera tangente estarían en el mismo punto y cambiarían... no sé.
46	E2	[Arrastra el punto $A$ hasta obtener perceptivamente la tangencia de la recta $PA$ con $c$ ].



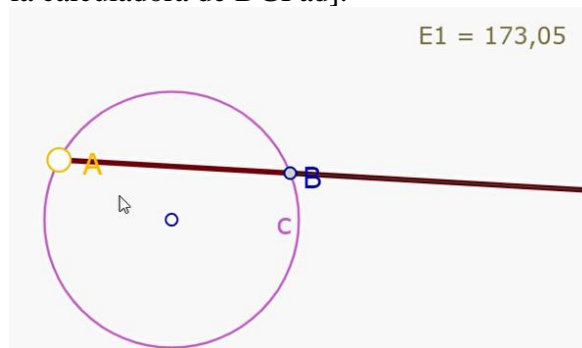
47	E1	Pero ahí cambia el valor porque se están sobreponiendo las etiquetas y toma mal los segmentos...
48	E2	Trace una perpendicular a la recta $PA$ que pase por el centro del círculo.
49	E1	[Realiza lo sugerido por E2].
50	E2	Arrastre $A$ hacia el lado izquierdo de la perpendicular.
51	E1	[Realiza lo pedido por E2].



52	E2	Vea, si $A$ está de ese lado, el producto aumenta.
53	E1	Ya, pero eso debe ser un error de construcción. Si quiere lo volvemos a hacer.
54	E2	Sí, sí. Debe mantenerse.
55	E1	¿Volvemos a construirlo, pero sin la herramienta <i>intersección</i> ?
56	E2	Pero dará lo mismo.
57	E1	No, yo creo que no dará lo mismo. [Construye otro segmento con el punto $P$ y el punto que queda sin etiqueta y usa la calculadora para multiplicar sus longitudes].



58	E2	Sí, no cambia ahora cuando $A$ está del lado izquierdo y lo arrastra.
59	E1	Sí, es que debe ser un error de construcción. Pero, en conclusión, el producto no cambia.
60	P	Si quiere borre la recta $PA$ , trázela nuevamente y dele doble clic en la intersección de $PA$ con $c$ .
61	E1	[Realiza lo pedido y construye los segmentos $PA$ , $PB$ y multiplica sus magnitudes usando la calculadora de DGPad].

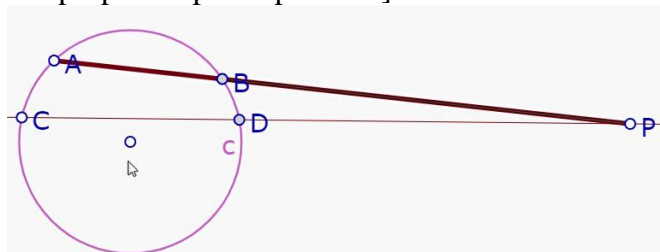


62	E2	Ahora sí, ya no cambia el resultado de la multiplicación.
63	E1	Ahora, respecto a qué condiciones deben cumplir $A$ y $B$ con respecto a $c$ ... deben ser una cuerda, ¿no? Pero deben estar en la misma recta de $P$ .
64	P	Escriban una proposición de la forma “Si- entonces”
65	E2	Sería... [Escribe en una hoja de papel] Si $A, B$ y $P$ son colineales... $A$ y $B$ ...
66	E1	$A$ y $B$ en $c$ .
67	E2	Entonces $PA \cdot PB$
68	E1	Hace falta agregar que $P$ sea un punto exterior.
69	E2	Listo...
70	E1	Entonces $PA \cdot PB$ es siempre igual, se mantiene constante.

71	E2	¿Se mantiene constante?
72	E1	Sí, es que no sé cómo más decirlo.
73	E2	El producto $PA \cdot PB$ siempre va a ser el mismo sin importar la ubicación.
74	E1	Sí, con que $A, B$ y $P$ sean colineales, $A$ y $B$ en la circunferencia y $P$ exterior, ya con eso cumple que el producto sea constante. [Escribe el enunciado en la hoja de Word]. <b>Tarea de reconocimiento:</b> ¿Qué ocurre con el producto $PA \cdot PB$ cuando se arrastra $A$ ? ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir los puntos $A$ y $B$ con respecto a $c$ para que se dé ese resultado? Escriba un enunciado que <u>relacione</u> esas condiciones con el resultado observado.

I  
Si  $A, B$  y  $P$  son colineales,  $A$  y  $B$  en  $c$  y  $P$  exterior a  $c$ , entonces  $AP \cdot BP$  es constante

75	P	Vengan, les tengo una propuesta. Vayan a DGPad, tracen otra secante al círculo y póngales nombre a las intersecciones.
76	E1	[Realiza lo propuesto por el profesor].



77	P	¿Qué podrían concluir de ese dibujo?
78	E2	Es lo mismo.
79	E1	Que $PA \cdot PB$ va a ser igual a $CP \cdot DP$ .
80	E2	Sí, da lo mismo siempre.
81	E1	Sin importar dónde los ponga va a dar lo mismo. Pero es curioso, ¿no?
82	P	¿Podrían demostrarlo?
83	E2	Pues ya estoy viendo cómo demostrarlo...
84	P	¿Cuáles serían ahora las condiciones y cuál la conclusión? Incluyendo ahora los puntos $C$ y $D$ .
85	E1	Hay que colocar otros dos puntos y que también sean colineales con $P$ .
86	E2	¿Entonces cómo quedaría?
87	E1	[Escribe en el documento Word] $C, D$ y $P$ colineales, con $C$ y $D$ en $c$ y $P$ exterior a $c$ , entonces $CP \cdot DP$ es igual a $PA \cdot BP$ .

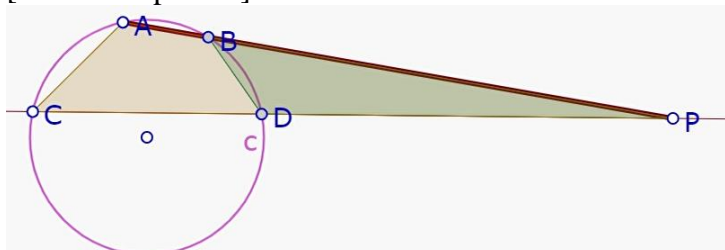
**Tarea de reconocimiento:** ¿Qué ocurre con el producto  $PA \cdot PB$  cuando se arrastra  $A$ ? ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir los puntos  $A$  y  $B$  con respecto a  $c$  para que se dé ese resultado? Escriba un enunciado que relacione esas condiciones con el resultado observado.

Si  $A, B$  y  $P$  son colineales,  $A$  y  $B$  en  $c$  y  $P$  exterior a  $c$ , entonces  $AP \cdot BP$  es constante.

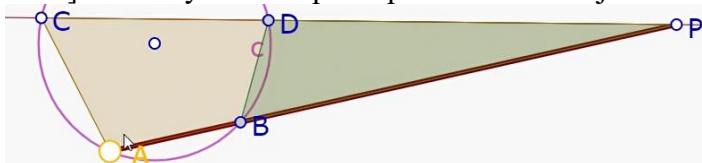
Dados  $C, D$  y  $P$  colineales,  $C$  y  $D$  en  $c$  y  $P$  exterior a  $c$ , entonces  $CP \cdot DP = AP \cdot BP$

88	P	Pero yo veo ahí dos proposiciones, ¿podrían hacer una sola?
89	E1	Necesito que $A, B$ y $P$ sean colineales y también que $C, D$ y $P$ sean colineales.

90	E2	Estoy viendo que para demostrarlo hay que ver que dos triángulos sean semejantes.
91	E1	¿Cuáles triángulos?
92	E2	Podrían ser los triángulos $BDP$ y $CAP$ .
93	E1	¿Será que sí son semejantes?
94	E2	Construya los triángulos a ver.
95	E1	[Realiza lo pedido].



96	E2	Arrastre a ver... ¿será que sí?
97	E1	[Arrastra el punto A] Yo estoy viendo que sí pueden ser semejantes...



98	P	¿Por qué pensaron en esos dos triángulos?
99	E2	Pues yo estaba pensando en lo de las razones y eso me llevó al fundamental (refiriéndose al Teorema Fundamental de la Proporcionalidad).
100	E1	Comparten un ángulo.
101	P	La pregunta ahorita era, ¿por qué pensaron en esos triángulos? Y se me ocurre otra, ¿por qué pensaron en triángulos?
102	E1	Pues porque si los triángulos son semejantes entonces los lados correspondientes son proporcionales.
103	E2	Y las proporciones las puedo pasar a un producto.
104	P	Y ¿por qué esos dos triángulos?
105	E1	Porque comparten un ángulo.
106	P	¿Y eso qué tiene que ver con la proporción? Por ejemplo, ¿ahí en esos triángulos aparecen las medidas del producto?
107	E1	Claro, las tenemos de una vez.
108	E2	Sí, ahí están $PA$ , $PB$ , $DP$ y $CP$ . Pero hay es que demostrar que son semejantes.
109	E1	Pero empecemos primero por escribir el enunciado.
110	E2	Sí, es verdad.
111	E1	A ver, debo tener que $A, B$ y $P$ son colineales y que $C, D$ y $P$ también son colineales... Entonces puedo colocarlos así [Reescribe la proposición en el Word]. Además, $A, B, C$ y $D$ están en $c$ y $P$ es exterior... y la conclusión ya no es que $PA \cdot PB$ es constante, sino que $PA \cdot PB = CP \cdot DP$ .

**Tarea de reconocimiento:** ¿Qué ocurre con el producto  $PA \cdot PB$  cuando se arrastra  $A$ ?  
 ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir los puntos  $A$  y  $B$  con respecto a  $c$  para que se dé ese resultado? Escriba un enunciado que relacione esas condiciones con el resultado observado.

Si  $A, B$  y  $P$  son colineales;  $C, D$  y  $P$  colineales,  $A$  y  $B$  en  $c$ ;  $C$  y  $D$  en  $c$  y  $P$  exterior a  $c$ , entonces  $CP \cdot DP = AP \cdot BP$ .

112 E2 Se puede hacer más corta, sin poner dos veces que los puntos son exteriores a  $c$ .

113 E1 Pues sí, los cuatro están en  $c$ , lo puedo poner en uno solo. [Edita esta idea en el Word].

**Tarea de reconocimiento:** ¿Qué ocurre con el producto  $PA \cdot PB$  cuando se arrastra  $A$ ?  
 ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir los puntos  $A$  y  $B$  con respecto a  $c$  para que se dé ese resultado? Escriba un enunciado que relacione esas condiciones con el resultado observado.

Si  $A, B$  y  $P$  son colineales:  $C, D$  y  $P$  colineales,  $A, B, C$  y  $D$  en  $c$  y  $P$  exterior a  $c$ , entonces  $CP \cdot DP = AP \cdot BP$ .

114 E2 Listo, ahora sí.

115 E1 ¡Ahora demuéstrelo!

116 E2 Podemos usar el criterio AA.

117 E1 Debemos demostrar que el producto (refiriéndose a  $PA \cdot PB = CP \cdot DP$ ) se cumple.

118 E2 Sí, y para eso debemos usar la semejanza. Podemos usar el AA o el ALA.

119 E1 ¿Cuáles son todos?

120 E2 Son AA, ALA y LLL.

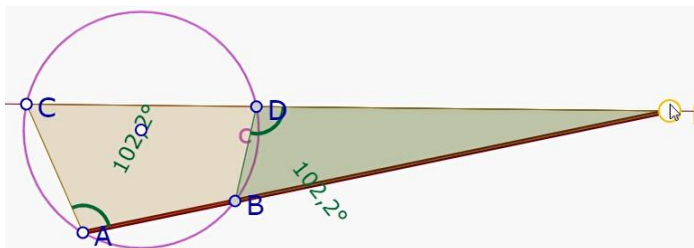
121 E1 ¿De semejanza?

122 E2 Sí, son parecidos a los de congruencia.

123 E1 Bueno, entonces tenemos que comparten un ángulo.

124 E2 Sí, entonces nos faltan dos lados o un ángulo.

125 E1 [Mide los ángulos  $CAP$  y  $BDP$ ] Estos dos deben ser iguales...se ve ahí más o menos.



126 E2 ¡Sí son iguales!

127 E1 ¿Pero por qué?

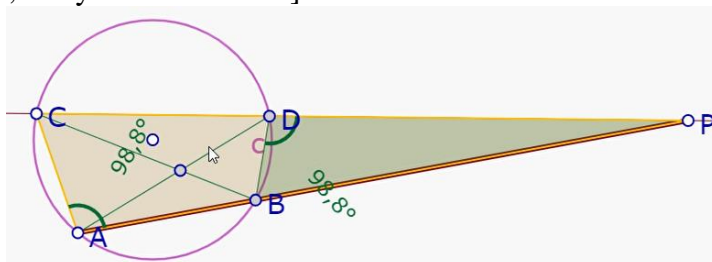
128 E2 Eso estoy pensando, porque ni  $CA$  ni  $BD$  son paralelos. ¿Cómo puedo hacer eso? ¿Será suma de ángulos o algo así?

129 E1 No, creo que tiene que ver con lo del ángulo interno...

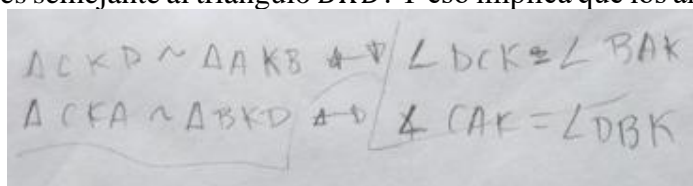
130 P Ahora les hago otra pregunta, ¿es la única semejanza posible?

131 E2 Muestre, tracemos algunas líneas a ver.

132	E1	El cuadrilátero que se forma en el círculo parece ser curioso. Puede partirlo en dos lados, trace sus diagonales.
133	P	Parece que están olvidando para dónde van.
134	E2	Es que estamos buscando más triángulos.
135	P	¿Y qué triángulos están buscando? ¿Qué es lo que quieren demostrar?
136	E2	Queremos demostrar que los ángulos $CAP$ y $BDP$ son iguales.
137	E1	Espere... ¿ $BDP$ no es igual a la suma de los ángulos exteriores?
138	E2	Estoy mirando...
139	P	¿Qué podemos decir de los ángulos $BAD$ y $BCD$ ?
140	E1	Son iguales, tienen la misma cuerda. ¿Cómo se llamaba el teorema?
141	E2	Ángulos inscritos en una circunferencia.
142	E1	¡Sí! Por el teorema de los ángulos inscritos en una circunferencia.
143	E2	Bueno, estos dos son iguales, ¿y qué?
144	P	Yo creo que se están olvidando de para dónde van.
145	E2	Pues a demostrar que los ángulos $BAC$ y $BDP$ son iguales.
146	P	¿Y por qué esos dos?
147	E2	Pues también sirve con $ACP$ y $DBP$ .
148	P	O sea, insisten en usar los triángulos $ACP$ y $DBP$ .
149	E2	Uy, pero póngale cuidado. Estos dos triángulos son semejantes. [Construye los segmentos $AD$ , $CB$ y su intersección].

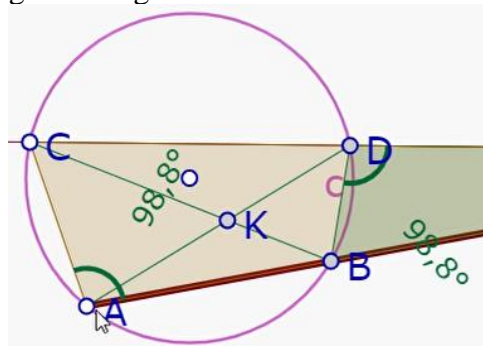


150	E1	Sí, son opuestos por el vértice y tienen el ángulo inscrito.
151	E2	Entonces póngale cuidado de que este ángulo es exterior, entonces es igual a la suma de estos dos.
152	P	Escriba mejor cuáles son los ángulos que va a usar.
153	E2	[Nombra al punto de intersección de los segmentos $AD$ y $CB$ como $K$ ]. Entonces, $CKD$ es semejante al triángulo $AKB$ .
154	P	¿Por qué?
155	E1	Porque son opuestos por el vértice y porque tienen un ángulo inscrito igual.
156	E2	Sí, pueden ser $BCD$ y $BAD$ o $ADC$ y $ABC$ . Espere lo escribo en una hoja. [Escribe lo siguiente en una hoja] El ángulo $DCK$ es igual al ángulo $BAK$ . El triángulo $CKA$ es semejante al triángulo $BKD$ . Y eso implica que los ángulos...

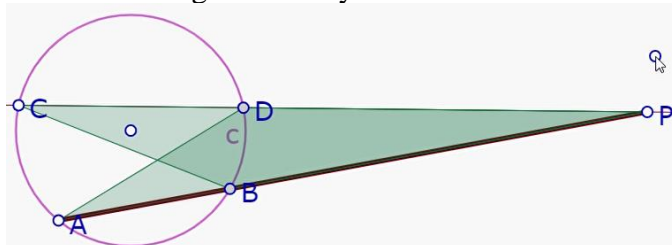


157	P	¿Utiliza la semejanza para probar que los ángulos son congruentes o usa que los ángulos son congruentes para probar la semejanza?
-----	---	---

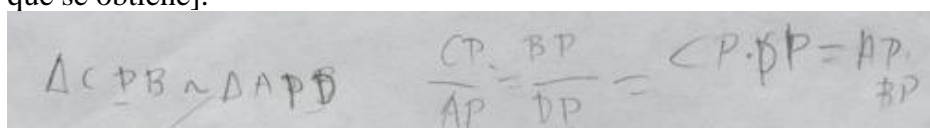
158	E2	Bueno, sí. Primero los ángulos. Pero ya tengo en mi mente que son semejantes.
159	P	Listo, solo quería saber.
160	E1	Entonces $CAK$ es semejante a $DBK$ . Entonces yo digo que el ángulo $PDB$ es un ángulo exterior, entonces implica que la suma de los ángulos $BCD$ y $DBC$ es igual a ese ángulo. Y ahí lo curioso, porque ahora digo que el ángulo $CAK$ más el ángulo $BAK$ es igual al ángulo $CAB$ .



161	E1	¿Por qué no puede con P de una vez? El ángulo $CAP$ .
162	E2	Igual. El ángulo $BDC$ más $CBD$ es igual al ángulo $BDP$ , y con la congruencia de los ángulos dentro del círculo, $CAB$ es igual a $BDP$ .
163	E1	Y ya.
164	E2	Sí, es que para copiarlo todo...
165	E1	Y así los ángulos son semejantes, los triángulos son semejantes y los lados proporcionales.
166	P	Listo, pero ahora tengo la pregunta de por qué insistieron tanto en esos dos ángulos. Ya lo demostraron, por supuesto, pero si quiere borre los dos triángulos y considere los triángulos $PBC$ y $PDA$ .



167	E2	Ah, obvio, profe. Esos también son semejantes.
168	P	¿Por qué?
169	E1	A ver, ¿por qué sería? Mismo ángulo...
170	E2	Es lo mismo, comparten un ángulo y el otro par es igual por ser ángulos inscritos.
171	P	Yo quisiera que escribieran la semejanza completa para ver cómo de esa semejanza obtienen la proporción.
172	E2	[Escribe en la hoja la semejanza de los triángulos $CPB$ y $APD$ y la proporción que se obtiene].

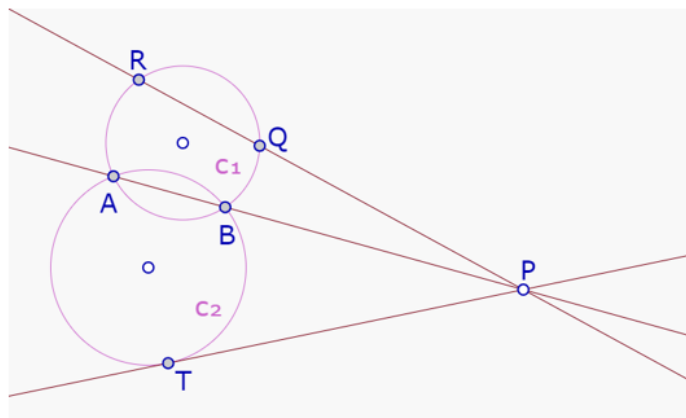


173	E1	Listo.
-----	----	--------

174	P	Yo creo que podemos pasar ahora a la siguiente situación.
		<b>Tarea de exploración 2:</b> ¿Qué relación geométrica existe entre la recta $PA$ y $c$ cuando los puntos $A$ y $B$ coinciden? ¿El enunciado escrito anteriormente sería válido bajo estas nuevas condiciones de los puntos $A$ y $B$ ? ¿Debería ser reformulado el enunciado? ¿Cuál sería ese nuevo enunciado?
175	E2	[Lee la primera pregunta] ¡Ah! Pues es tangente, serían el mismo punto.
176	E1	[Arrastra el punto $A$ de modo que perceptivamente coincida con $B$ ].
177	E2	[Lee la segunda pregunta] Pues si $A$ coincide con $B$ , quedaría $CP \cdot DP = PA \cdot PA$ .
178	P	Escríbalo. Si quiere copie y pegue el enunciado y modifíquelo.
179	E2	¿Pero qué cambiaría? Yo creo que queda igual.
180	E1	No porque ahora $A$ y $B$ son el mismo punto. Llamemos $Q$ al punto donde coincidan $A$ y $B$ .
181	P	Vayan al DGPad. ¿ $Q$ lo van a llamar el punto donde coincidan $A$ y $B$ ?
182	E1	Sí, ¿por qué no?
183	P	¿De qué otra manera podrían llamarlo?
184	E1	Punto de tangencia...
185	P	Entonces de qué otra manera podría escribir la proposición.
186	E1	Entonces pongo $Q$ punto de tangencia.
187	P	¿Qué puedo decir de $PQ$ ?
188	E2	Es tangente a $c$ en $Q$ .
189	P	Excelente. ¿Cómo quedaría la proposición?
190	E1	Si $QP$ tangente a $c$ en $Q$ ...
191	E2	Y $C, D$ y $P$ colineales... Entonces $QP^2$ es igual a $CP \cdot DP$ . ¡Uy, una media geométrica!
192	E1	¡Sí! Entonces quedaría... [Escribe la proposición en el documento Word]. <p style="margin-left: 40px;">Q punto donde coinciden <math>A</math> y <math>B</math>                  Si <math>QP</math> tangente a <math>c</math> en <math>Q</math>; <math>C, D</math> y <math>P</math> colineales, <math>C</math> y <math>D</math> en <math>c</math> y <math>P</math> exterior a <math>c</math>, entonces <math>CP \cdot DP = QP^2</math></p>
193	P	Listo, pasemos a la siguiente situación.
194	E1	[Lee el enunciado]. Bien, primero miremos la imagen y ya luego vamos a las preguntas.

Segunda parte

Sin recurrir al software DGPAd – Colombia, analice detalladamente la siguiente imagen para dar respuesta a las preguntas propuestas.



En la figura  $c_1$  y  $c_2$  son círculos que se cortan en  $A$  y  $B$ .  $PT$  es tangente a  $c_2$ . Escriba una ecuación que relacione las magnitudes  $PQ$ ,  $PR$  y  $PT$ .

195	E2	Ahora hay dos círculos... ¡Ay! Pero estos dos círculos comparten dos puntos, entonces imagino que tendrán semejanza entre las magnitudes.
196	E1	Y hay tres rectas.
197	E2	¡Ah, claro! Póngale cuidado, profe. $TP^2 = PA \cdot BP$ y $RP \cdot QP = PA \cdot BP$ .
198	E1	Sí, exacto.
199	E2	Y la conclusión final es que $TP^2 = QP \cdot RP$ . Eso es lo que concluimos.
200	E1	¿Por qué? Pues porque lo estamos viendo ahí. Listo, vamos a las preguntas.
201	P	Me parece curioso que hayan respondido a las preguntas sin saberlas.
202	E1	¡Es que ahí se ve!
203	E2	¡La ecuación ya la dijimos!
204	E1	Sí, pero debemos tener en cuenta las proposiciones. Tengo que $PA \cdot PB = QP \cdot RP$ y que $TP^2 = PA \cdot PB$ y por transitividad tengo que $TP^2 = QP \cdot RP$ .
205	E2	[Escribe la ecuación en el Word]. En la figura $c_1$ y $c_2$ son círculos que se cortan en $A$ y $B$ . $PT$ es tangente a $c_2$ . Escriba una ecuación que relacione las magnitudes $PQ$ , $PR$ y $PT$ . $PQ \cdot PR = AP \cdot BP$ $TP^2 = AP \cdot BP$ Reglas algebraicas: I $TP^2 = PQ \cdot PR$
206	P	Bien, siguiente pregunta.
207	E2	[Lee la siguiente pregunta]. ¿Es posible construir un punto $T'$ en $c_1$ de tal manera que $PT = PT'$ ? ¿Qué relación hay entre $PT'$ y $c_1$ ?
208	E1	Sí... es posible. Si son iguales tienen la misma distancia.
209	E2	Pues fácil, con un círculo.
210	P	¿Y cómo garantiza que los círculos se corten?
211	E1	Eso es a lo que voy, ¿qué pasa si no corta? Ahí porque es tangente estoy pensando que puede haber algo.
212	E2	Pues de ser posible, sí es posible construirlo.

213	E1	Puede ser que Q y R coincidan en un punto y si lo llamamos $T'$ , entonces sí es.
214	E2	Sí, entonces aplicamos la transitividad y lo tenemos.
215	E1	Sí, decimos que $T'$ es donde coinciden R y Q.
216	P	¿En qué punto coinciden R y Q?
217	E1	En el punto de tangencia.
218	P	¿Y cómo construye ese punto?
219	E2	Con una tangente a $c_1$ .
220	P	¿Cualquier tangente a $c_1$ ?
221	E1	Sí, no importa.
222	P	¿Cuántas tangentes a $c_1$ existen?
223	E2	Dos.
224	P	¿Dos?
225	E1	Pues por P existen dos tangentes.
226	P	¿Entonces cualquier tangente a $c_1$ ?
227	E1	No, la tangente a $c_1$ que pasa por P.
228	P	Entonces necesitan la tangente $PT'$ .
229	E1	Sí, tangente en $T'$
230	P	Entonces si $PAT'$ es tangente a $c_1$ en $T'$ ...
231	E1	$TP = T'P$ .
232	P	¿Por qué?
233	E2	Por todo lo que acabamos de hacer.
234	E1	Sí, porque si R y Q coinciden en $T'$ , entonces $T'P^2 = TP^2$ . Y ahí sale que $T'P = TP$ .
235	P	Ok. Podemos pasar a la siguiente situación.
236	E2	[Lee el enunciado].

## Tercera parte

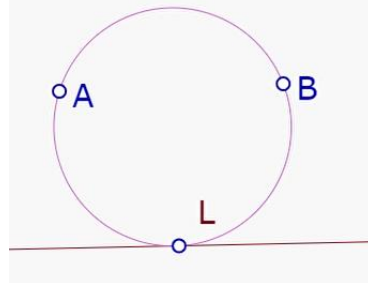
Resuelva el siguiente problema propuesto. I

**Problema:** Dada una recta  $l$  y dos puntos  $A$  y  $B$  al mismo lado de  $l$ , construir un círculo  $c$  que sea tangente a la recta  $l$  y pase por los puntos  $A$  y  $B$ .

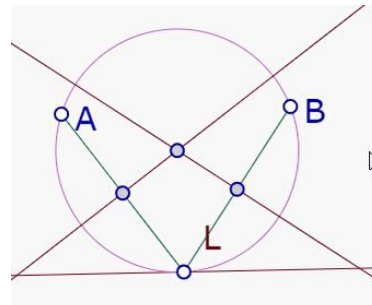
- 237 E2 [Realiza un dibujo en el papel con el problema resuelto, dibujando otro la mediatriz entre  $A$  y  $B$ , un círculo con centro en la mediatriz y que pasa por  $A$  y  $B$ ].



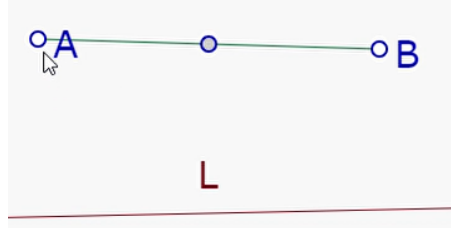
- 238 E1 [En el software construye la recta, los puntos dados y un círculo que perceptivamente da solución al problema].



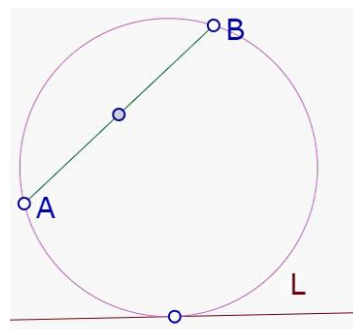
239	E2	Y queremos buscar el centro del círculo.
240	E1	Eso es fácil [traza las mediatrices de dos pares de puntos y su intersección]. Listo, ese punto es el centro.



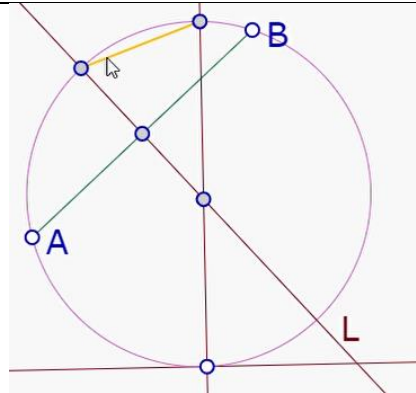
241	E2	Primero habría que hallar ese triángulo.
242	E1	Sí, podríamos construir el incírculo y ese sería tangente a los tres lados. Pero es mucha vuelta. [Borra las mediatrices].
243	E2	¿Cómo hallamos el centro?
244	P	¿Por qué pone los puntos A y B como si fueran paralelos AB y L?



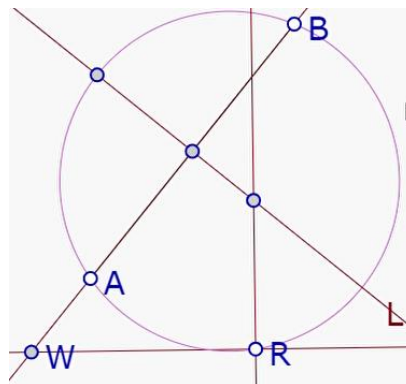
245	E2	Mueva A.
246	P	Vuelva a dibujar el círculo.
247	E1	[Realiza lo pedido].



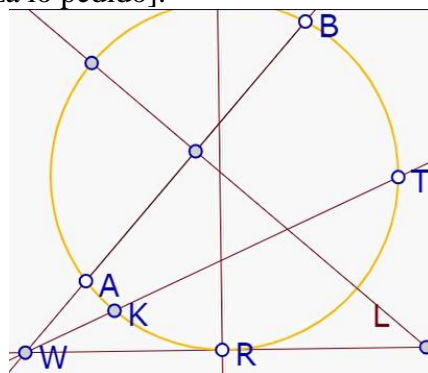
248	E2 y E1	[Realizan exploraciones con el software buscando relaciones entre triángulos y mediatrices para hallar el centro del círculo].
-----	---------	--



249	P	Venga, trace la recta AB.
250	E1	[Realiza lo pedido y nombra W a la intersección de esta recta con l y R al punto de tangencia].

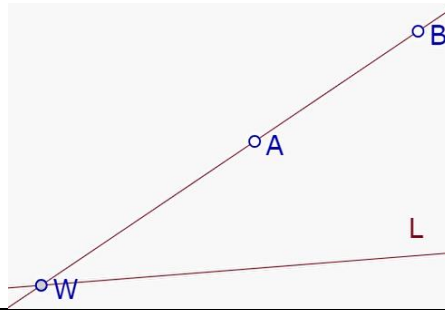


251	E2	No tenemos R, ¿cómo hallamos R con esas dos rectas?
252	E1	Pues el centro del círculo es la intersección de las dos rectas cuando R es tangente.
253	P	Construya un punto sobre el círculo y trace la recta que va de W a ese punto y póngales nombre a sus intersecciones.
254	E1	[Realiza lo pedido].



255	E1	Este es el ejercicio de antes.
256	P	¿Cómo así que ese es el ejercicio de antes?
257	E1	Sí, es lo mismo, porque yo puedo decir que $TW \cdot KW = AW \cdot BW$ . Y sería lo mismo con R... Yo puedo decir que $AW \cdot BW$ es lo mismo que $RW^2$ . Y como ya tengo estas dos... Haga un rectángulo y saque la cuadratura, porque esa es la distancia que necesito.

258 E2 Ah, listo. Entonces borremos todo y hagamos la construcción. [Borra algunos objetos geométricos].



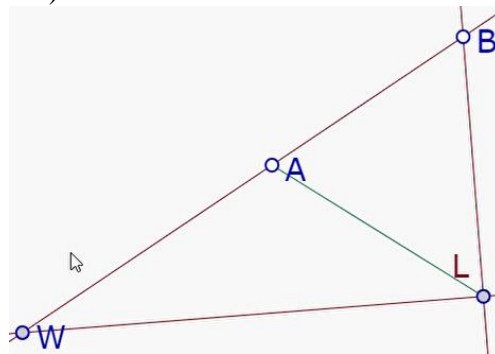
259 P ¿Necesita hacer un rectángulo?

260 E1 No, podríamos sacar de una vez la cuadratura, ¿no? Pero yo siempre hago primero el paso del rectángulo, me parece más cómodo.

261 E2 Listo, necesitaríamos la media geométrica.

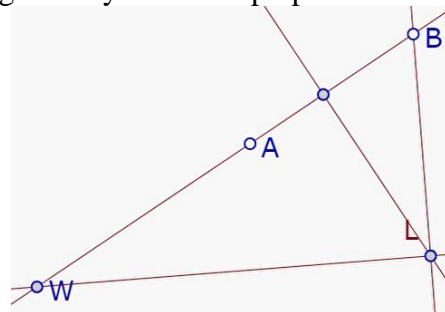
262 E1 [Traza una perpendicular a l y traza el segmento que va desde A hasta el punto de intersección de la perpendicular] Listo, ahí está, ¿no?

(Es posible que estén intentando usar el teorema de la media geométrica: en un triángulo rectángulo la longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa es media geométrica de la medida de los dos segmentos en que esta divide a la hipotenusa)



263 E2 Ese ángulo no es de  $90^\circ$ . El del segmento.

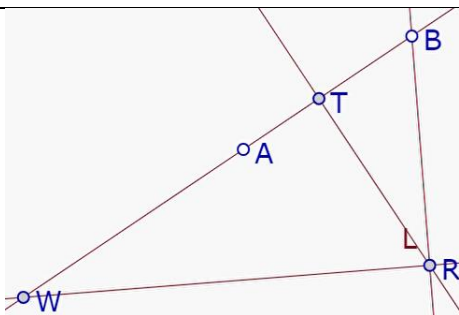
264 E1 Buen punto. [Borra el segmento y traza una perpendicular a AB]. Ahora sí.



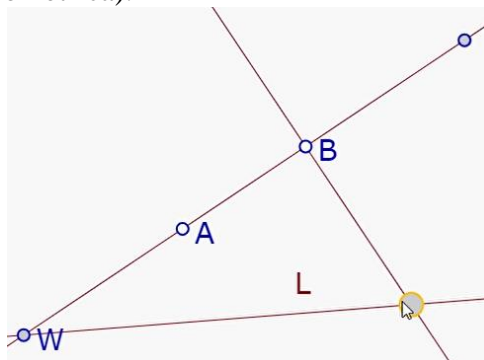
265 E2 Listo, esa es la media geométrica.

266 P ¿Media geométrica de quiénes?

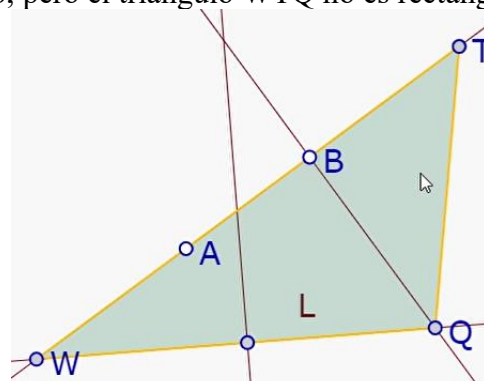
267 E2 De W al punto y B al punto. Póngales nombre a esos puntos.



268	E2	BT es a RT como RT es a WT.
269	P	¿Y esa es la media geométrica que quieren? La de BT y WT.
270	E1	No, yo necesito es la de WA y BA.
271	P	¿Y esa es la que construyó?
272	E1	No... [Borra las perpendiculares, copia la distancia AW con la herramienta <i>compás</i> y la lleva a partir de B, para obtener un nuevo punto. Luego traza una perpendicular a AB]. (Está buscando que los segmentos con longitudes AW y BW no queden solapados, sino seguidos uno del otro, para poder usar el teorema de la media geométrica).



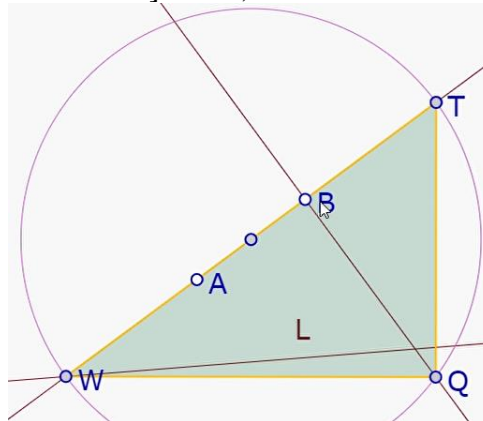
273	E2	Listo, esa es la media geométrica.
274	P	¿Esa es media geométrica de quiénes? Póngales nombre a los puntos y construya el triángulo.
275	E1	[Realiza lo pedido]. No, pero el triángulo WTQ no es rectángulo...



276	P	¿Y entonces?
277	E1	Necesito que ese triángulo sea rectángulo. Que TQW sea recto.
278	P	¿Cuáles son las condiciones del teorema de la media geométrica?
279	E1	Que ambos triángulos sean rectángulos. El triángulo WTQ y QBT.

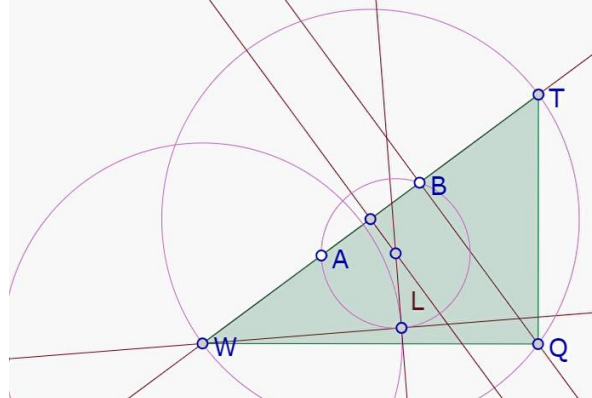
280 P ¿Entonces que van a hacer para resolver ese problema? Q no es el punto que están buscando.

281 E1 No... necesito que sea de  $90^\circ$ ... entonces necesito que esté en un semicírculo. [Construye un círculo con diámetro WT y nombra Q a la intersección del círculo con la perpendicular de AB]. Listo, este sí sería el triángulo rectángulo.



282 E2 Ahora sí, esa es la distancia que queremos.

283 E1 [Copia la distancia BQ a partir del punto W, marca la intersección del círculo con la recta l y construye el círculo que pasa por A, B y la intersección].



284 E2 Ahora arrastre para ver que se mantenga.

285 E1 [Arrastra el punto A y la construcción resiste el arrastre].

286 P Tengo una pregunta, ¿cuántas soluciones hay a ese problema? Es la pregunta de la siguiente situación.

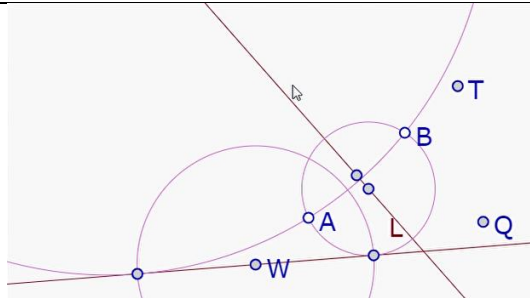
¿Cuántas soluciones existen a este problema? Es decir, ¿cuántos círculos son tangentes a la recta dada y pasan por los dos puntos dados? ¿Cuál sería la respuesta a esta pregunta si los puntos no estuvieran al mismo lado de l?

287 E1 Si los puntos están al mismo lado, hay solo una solución.

288 P ¿Seguro?

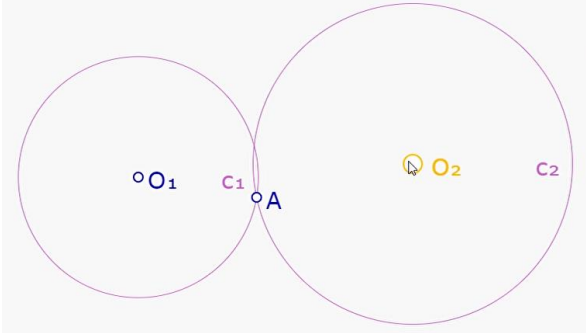
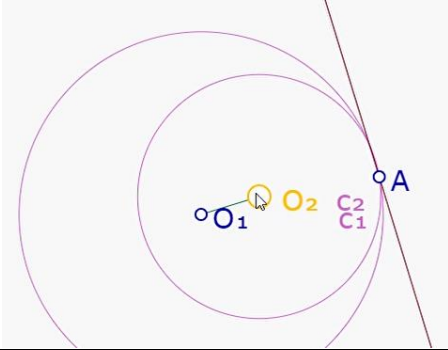
289 E1 ¡Ah, no! Hay dos porque la otra intersección también es media geométrica.

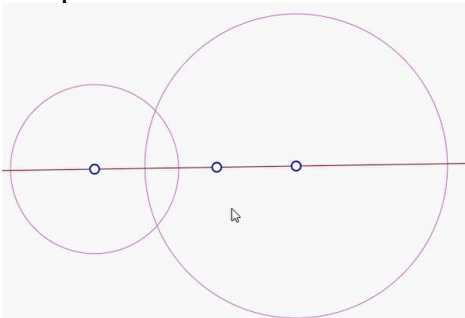
290 E2 [Construye el círculo faltante que es solución al problema].



291	E1	Y listo, ya no puede haber más. Y si los puntos están a lados distintos de $l$ , entonces no existe solución, porque la cuerda corta a $l$ .
292	P	¿Y eso qué tiene que ver con que el círculo sea tangente a la recta?
293	E1	Porque el círculo pasaría por A y B y la recta cortarían al círculo.
294	P	Ok. Entonces, ¿no existe un círculo tangente a la recta que pase por esos puntos en ese caso?
295	E1	No, nada, no existe.
296	E1	Tienen que estar siempre al mismo lado.
297	P	Bien, creo que podemos dejar por acá la grabación.

## Apéndice B. Segunda sesión actividad 2

No.	Sujeto	Descripción – Evidencia
1	E1 y E2	[Leen la primera tarea de la segunda secuencia].  Lea detenidamente los enunciados y responda detalladamente a las preguntas propuestas <b>Tarea 1:</b> sean $A$ un punto libre y $c_1$ y $c_2$ dos círculos que pasan por $A$ y tienen centros $O_1$ y $O_2$ respectivamente. ¿Bajo qué condiciones los dos círculos son tangentes? Escriba una proposición de la forma si-entonces que dé cuenta de esa relación.
2	E1	[Construye un círculo $c_1$ con centro en $O_1$ y radio $O_1A$ , un círculo $c_2$ con centro en $O_2$ y radio $O_2A$ ]. 
3	E2	¿Cuándo son tangentes?
4	E1	Cuando los tres están alineados. Cuando los centros y el punto $A$ están alineados. [Arrastra el punto $O_2$ para ajustar los puntos y queden colineales].
5	E2	Sí, la condición es que los tres estén alineados.
6	P	¿Deben estar alineados en ese orden?
7	E2	Pues sí...
8	E1	Claro, porque cómo voy a poner los dos centros de un solo lado... ¡Ah, no! Sí se puede.
9	E2	[Mueve el punto $O_2$ a la izquierda de $A$ y ajusta el dibujo para ver la tangencia de los círculos]. 
10	E1	La única condición es que estén alineados.
11	E2	Ahora la proposición.
12	E1	Los centros de las circunferencias con el punto deben estar alineados.
13	E2	Deben de ser colineales. Entonces, si los centros...
14	E1	Pues ya tienen nombre arriba, pongamos esos, $O_1$ y $O_2$ . De una, si $O_1$ , $O_2$ y $A$ son colineales...

15	E2	Entonces los dos círculos son tangentes en A. [Escribe esta proposición en el Word].
		<p>Lea detenidamente los enunciados y responda detalladamente a las preguntas propuestas</p> <p><b>Tarea 1:</b> sean A un punto libre y <math>c_1</math> y <math>c_2</math> dos círculos que pasan por A y tienen centros <math>O_1</math> y <math>O_2</math> respectivamente. ¿Bajo qué condiciones los dos círculos son tangentes? Escriba una proposición de la forma si-entonces que dé cuenta de esa relación.</p> <p>Si <math>O_1, O_2</math> y A son colineales entonces, <math>c_1</math> y <math>c_2</math> son tangentes en A</p>
16	P	Bien, ahora tengo una pregunta. Imagínense que ustedes le van a comentar a alguien el resultado que acaban de encontrar, pero sin nombrar ningún objeto. ¿Cómo escribirían la proposición?
17	E1	Ah, sin nombrar objetos. Entonces, si dos centros de dos círculos...
18	E2	Si los centros de los círculos y un punto libre son colineales, entonces los círculos son tangentes en el punto libre.
19	E1	Sí...
20	E2	[Escribe esta proposición en el Word].
		<p>Si <math>O_1, O_2</math> y A son colineales entonces, <math>c_1</math> y <math>c_2</math> son tangentes en A</p> <p>Si dos centros de dos círculos y un punto libre son colineales entonces. los círculos son tangentes en el punto libre</p>
21	E1	Sí, yo creo que sí.
22	P	[En otra ventana del software DGPad construye dos círculos $c_1$ y $c_2$ con centro en $O_1$ y $O_2$ respectivamente, la recta $O_1O_2$ y un punto P1 en $O_1O_2$ ]. ¿Los círculos son tangentes en ese punto?
		
23	E2	¡No!
24	E1	Buena pregunta, ahí ya se cortan los dos círculos.
25	P	Lean la proposición que escribieron otra vez.
26	E2	Ahí tocaría decir que los radios...No sé.
27	P	¿Qué hace falta?
28	E1	¡Dos círculos que pasan por A! Tienen que pasar por A. Falta decir que tienen que pasar por A.
29	E2	¿El círculo pasa por el punto o el punto pasa por el círculo?
30	E1	No, los círculos pasan por el punto. Queda: si dos círculos pasan por un punto libre, sus centros y el punto son colineales...
31	E2	Entonces son tangentes.
32	E1	Ajá. [Escribe esta proposición en el Word].

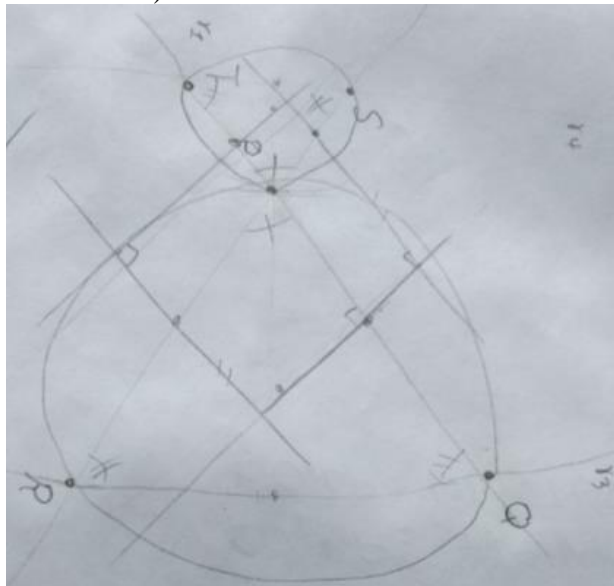
Si  $O_1$ ,  $O_2$  y  $A$  son colineales entonces,  $c_1$  y  $c_2$  son tangentes en  $A$

Si dos centros de dos círculos y un punto libre son colineales entonces, los círculos son tangentes en el punto libre

Si dos círculos pasan por un punto libre y son colineales los centros de los círculos y el punto entonces, los círculos son tangentes en el punto libre

33	E2	Ya, listo.
34	P	Bien, pasemos a la siguiente situación. La demostración la vamos a dejar en remojó. La hacen después con más calma.
35	E1	[Lee el enunciado de la segunda tarea].  <b>Tarea de exploración y análisis 2:</b> Lea el siguiente protocolo de construcción y realícelo en papel y lápiz. P: Punto cualquiera. Q: Punto cualquiera. R: Punto cualquiera. r1: Recta QP. r2: Recta PR. r3: Recta RQ. T: Punto sobre r1. r4: Recta paralela a r3 por T. S: Punto de intersección de r2 y r4. c1: Círculo por P, Q y R. c2: Círculo por P, S y T.  <b>Tarea de anticipación 2:</b> ¿Podría determinar, antes de hacer la construcción en el software, qué relación existe entre los triángulos PQR y PTS y, qué relación existe entre los círculos $c_1$ y $c_2$ ? Escriba un enunciado al respecto.
36	E1 y E2	[Intentan recrear en su mente la construcción, pero abandonan la idea y realizan el dibujo en lápiz y papel].
37	E1	[Confunde las rectas r2 y r3 en el dibujo, de modo que el dibujo no representa correctamente la construcción]. (Debido a que los estudiantes borraron el dibujo, no se tiene evidencia de esto).
38	E2	Listo.
39	P	¿Ese dibujo sí corresponde con lo que está ahí descrito?
40	E1	Sí, ¿no?
41	P	Lea otra vez para ver si corresponde.
42	E1 y E2	[Leen nuevamente el protocolo de construcción y lo verifican con el dibujo realizado].
43	E2	Sí, ya. Está bien. Es que parece un óvalo, pero es un círculo.
44	P	Pero yo veo que Q debe estar en r3 y en r1.
45	E2	Mejor volvámoslo a hacer.
46	E1	Sí, voy a poner por acá a P, Q y R acá bien raro.
47	P	Cuando dice R acá bien raro, ¿a qué se refiere?
48	E1	Para que el triángulo que se forma no parezca ni equilátero, ni nada, que no parezca nada.
49	P	Ah, para que PQR represente cualquier triángulo.
50	E2	Sí, sí, eso.

- 51 E1 y E2 [Leen nuevamente el protocolo y realizan correctamente el dibujo en lápiz y papel]. (El dibujo tiene más elementos, esto porque posteriormente fueron trabajando sobre él).



52	E2	Ya, listo. Ahora sí nos quedó bien.
53	E1	¿Qué relación hay entre los triángulos PQR y PTS?
54	E2	Pues son semejantes.
55	E1	¿Seguro?
56	E2	Claro. Tenemos rectas paralelas y un ángulo opuesto.
57	P	¿Cuáles ángulos son congruentes?
58	E1	Por las rectas paralelas tenemos ángulos alternos internos y aparte un ángulo opuesto por el vértice. Entonces son semejantes.
59	E1	Yo sospecho que los círculos van a ser tangentes en ese punto (refiriéndose a P). No sé por qué.
60	E2	¿Cierto?
61	E1	Sí... Ah, ya sé por qué. Estos círculos son los circuncírculos de los triángulos, ¿no?
62	P	Vamos a hacer una cosa. Escriban la conjetura en el Word.
63	E2	A ver, creemos que los triángulos son semejantes.
64	E1	Ese ya es teorema, pero bueno.
65	E2	Y los círculos que son tangentes, creemos que son tangentes. Yo diría, no sé.
66	E1	[Escribe estas dos conjeturas en el documento de Word].

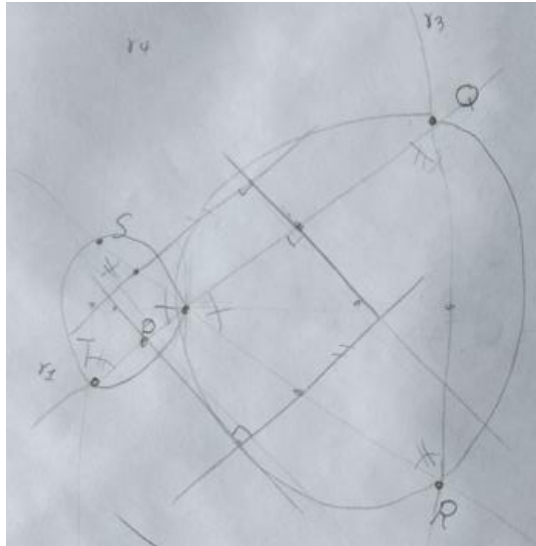
¿Podría determinar, antes de hacer la construcción, qué relación existe entre los triángulos PQR y PTS y, qué relación existe entre los círculos  $c_1$  y  $c_2$ ? Escriba una conjetura al respecto.

triángulo PQR semejante al triángulo PTS

Conjetura: Los círculos son tangentes

67	E2	¿El circuncírculo es el que se construye con las mediatrices o bisectrices?
----	----	---

68	E1	El de las mediatrices es el incentro y el de las bisectrices el circuncentro. Este debe ser con las bisectrices.
69	P	Ahora, tengo una observación. Dice que escriba una conjetura, una.
70	E1	Ah, de ambos. De qué relación existe entre los círculos y los triángulos.
71	E1 y E2	[Caen en un intercambio de ideas en donde dibujan objetos sobre el dibujo para probar la tangencia de los círculos].



72	E2	Venga, ¿qué estamos haciendo?
73	P	Buena pregunta, porque acá se le pide es que escriba una conjetura.
74	E1	Qué relación hay entre los triángulos y los círculos... Sabemos ya que los triángulos son semejantes y lo que creemos es que los círculos van a ser tangentes.
75	P	¿Bajo qué condiciones van a ser tangentes los dos círculos?
76	E1	Es que ahí es donde está lo curioso, porque ambos círculos son circuncírculos y ambos pasan por P, entonces se pueden cortar.
77	P	Pero su conjetura es que serán tangentes.
78	E1	Claro, esa es la conjetura. Pero pues también se pueden cortar.
79	P	Y ¿cuáles son las condiciones que le producen esa tangencia?
80	E1	Ah, porque los dos triángulos comparten el punto P, son semejantes, son circuncírculos ambos círculos...
81	P	Escríballo.
82	E1	A ver, qué creo yo. Es que el problema es que creo que me va a faltar algo en la condición.
83	E1 y E2	[Vuelven a caer en la discusión sobre cómo demostrar la tangencia de los círculos].
84	P	Pero la pregunta ahora no es por qué, sino qué cree usted.
85	E1	Sí, pero es que ya sé por qué. Escúcheme porque se me pierde. Tengo los centros de ambos círculos que los puedo hallar fácilmente y tengo este punto (refiriéndose a P) que ya lo comparten los dos triángulos y la pregunta es si están alineados o no.
86	E2	Eso fue lo que hicimos ahorita, sí.
87	E1	Sí, la duda es si están alineados o no.

88	P	Bien, por ahora vamos a hacer la conjetura.
89	E1	Si dos triángulos son... ¿qué? ¿semejantes?
90	E2	No, pues si PQR y PTS comparten un vértice y... es que está complicado.
91	E1	Sí, es que sacarla así es complicado (refiriéndose a las condiciones que deben cumplir los triángulos).
92	E2	Si PQR y PTS son semejantes, comparten un vértice, los círculos que pasan por...
93	E1	Los circuncírculos.
94	E2	Los circuncírculos que pasan por los triángulos van a ser tangentes en ese punto.
95	E1	Eso, copiemos eso. [Copian la conjetura en el documento de Word].

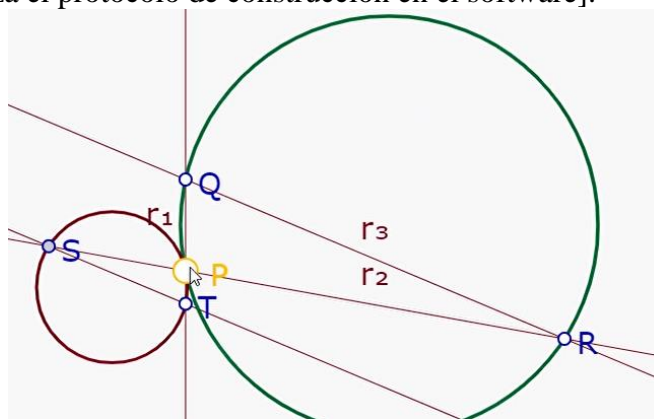
triángulo PQR semejante al triángulo PTS

Conjetura: Si dos triángulos son semejantes y tienen un vértice en comun entonces los circuncírculos de los triángulos son tangentes en el vértice en comun

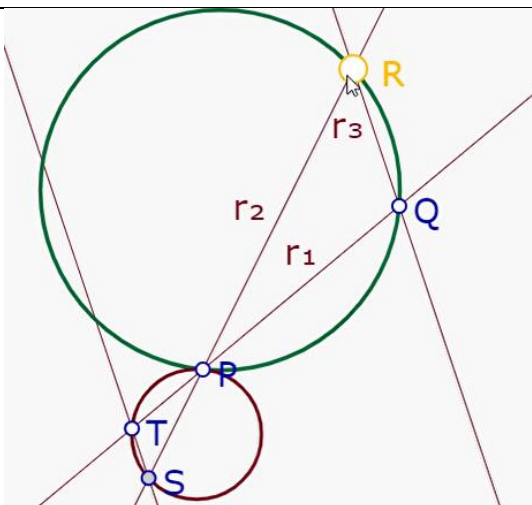
I

96	E2	Yo creo que quedó buena la conjetura.
97	E1	La pregunta es si eso es cierto.
98	E2	Es que la demostración es lo bonito.
99	P	Listo, pasemos a la siguiente situación.
100	E1 y E2	[Leen la tercera tarea]. <b>Tarea de exploración y análisis 2.1:</b> desarrolle en DGPad la construcción propuesta anteriormente. Arrastre todos los objetos y verifique si se cumplen las conjeturas propuestas en la tarea anterior.

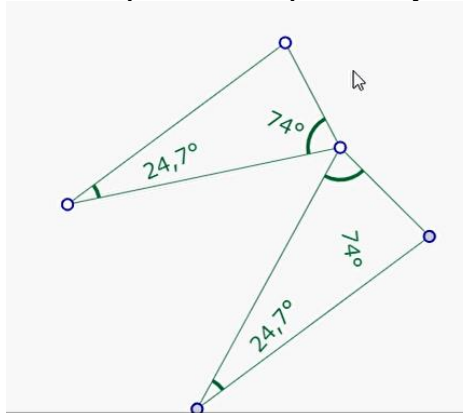
101 E1 [Realiza el protocolo de construcción en el software].



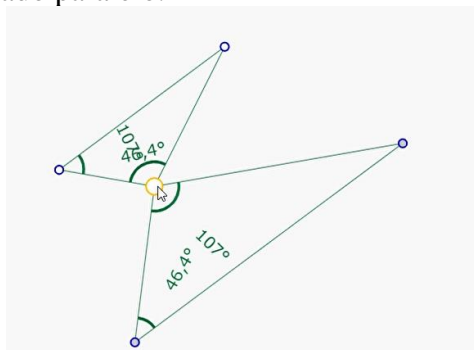
102	E2	¡Sí, vea que sí!
103	E1	¡Sí dio! Jajaja.
104	E2	¡Son tangentes!
105	P	¿Ya se convencieron de que son tangentes?
106	E2	Sí, mueva y verá.
107	E1	[Arrastra los puntos de la construcción y esta permanece con las propiedades asignadas]. Pero no me convenzo hasta que no me lo demuestren.



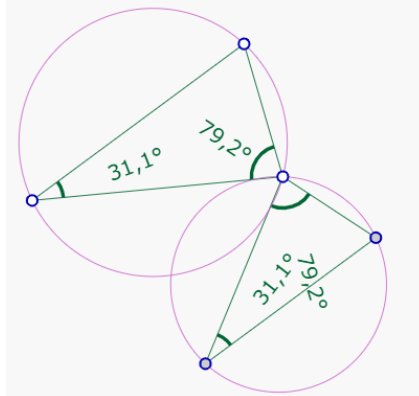
108	E2	Listo, ya conjetura está bien. Ahora el problema es demostrarla.
109	P	¿La conjetura está bien?
110	E2	Sí...
111	P	Yo tengo un archivo que les voy a mostrar. [Abre una construcción donde dos triángulos son semejantes, con un par de lados paralelos y un vértice común].



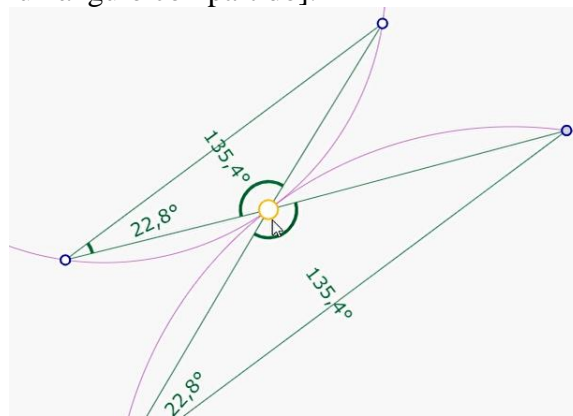
112	E1	[Arrastra los puntos de los triángulos para identificar propiedades de paralelismo y semejanza que fueron conjeturadas anteriormente]. Pues son semejantes y tienen un lado paralelo.
-----	----	---



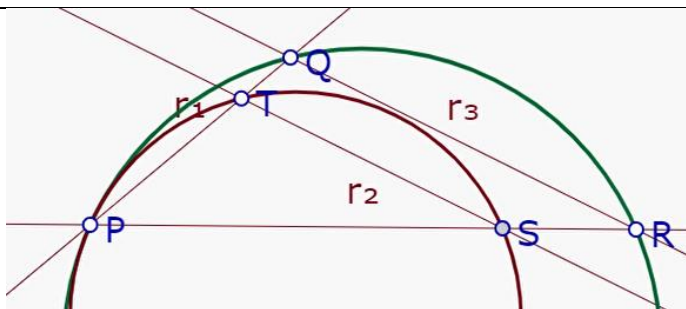
112	E2	¿Y para qué nos mostraron eso?
113	P	¿Esos triángulos cumplen con las condiciones que ustedes propusieron?
114	E2	Sí, ¿no? Haga los circuncírculos a ver si son tangentes.
115	E1	[Construye los circuncírculos de los dos triángulos]. ¡No!



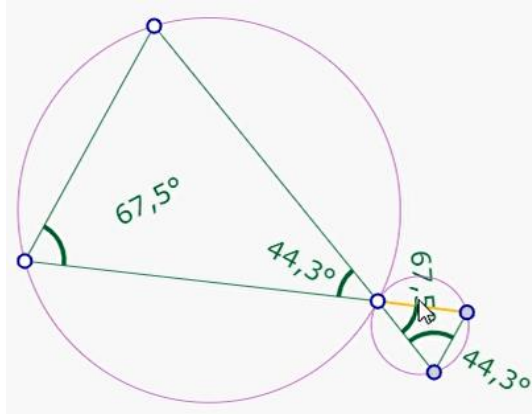
116	E2	¡Pero qué pasó!
117	E1	¡Ah! Es que el vértice que comparten debe estar alineado. Debe estar en una misma recta.
118	E2	Faltan cosas...
119	E1	A ver, son semejantes. ¿Qué más? Debe tener un lado paralelo.
120	E2	Tres vértices tienen que ser colineales. O sea, dos de un triángulo y uno del otro, por lo menos.
121	E1	¿Cómo así?
122	E2	Sí, es que los tres puntos deben ser colineales, dos de un triángulo y uno del otro. [Arrastra la construcción de modo que los triángulos quedan perceptivamente con un ángulo compartido].



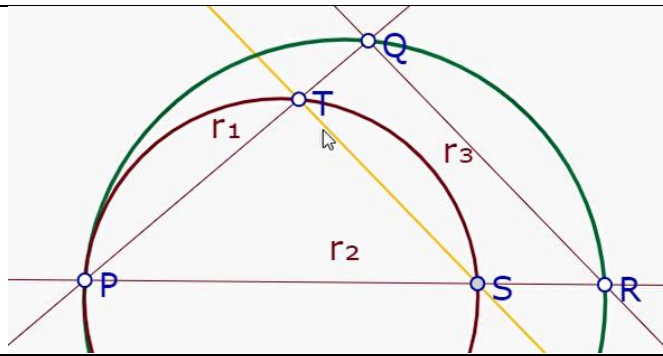
123	E1	Listo. Entonces, deben ser semejantes, tener un lado paralelo y tienen un vértice en común.
124	P	¿Dos triángulos que tienen un lado paralelo? Un lado paralelo.
125	E1	Todavía no he escrito nada, no se preocupe.
126	E2	Sería que un lado es correspondiente a su paralelo, ¿o cómo?
127	E1	Un par de lados correspondientes paralelos.
128	E2	Sí, eso.
129	E1	Sí, es que yo le entiendo. [Cambia a la construcción realizada por ellos] Tienen que estar alineados los vértices, mínimo tres alineados. O sea, T y Q deben estar alineados con P, y S y R también.



130	E2	Deben ser colineales.
131	E1	¿Y si digo que están en la misma recta?
132	E2	Sí, eso es lo que quiero decir.
133	E1	¿Los lados correspondientes están en la misma recta?
134	E2	Sí, queda mejor así. [Arrastra la construcción dada por el profesor, de manera que los dos triángulos queden perceptivamente en posición de similitud].

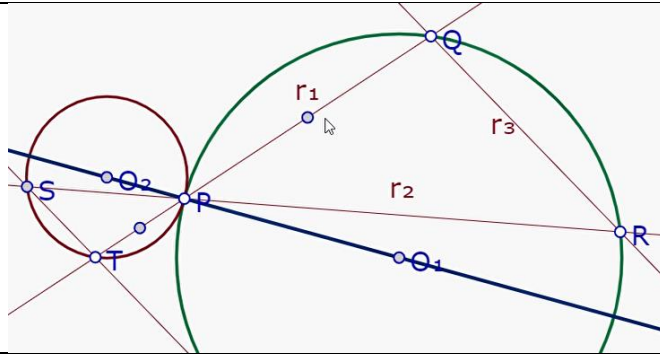


135	E1	[Volviendo a la construcción hecha por ellos] Es que necesito que los vértices estén alineados con P.
136	E2	¡Eso! Pero es que no sé cómo escribirlo bien.
137	E1	¿Lados correspondientes sobre la misma recta?
138	E2	Un par de lados correspondientes paralelos y el otro par en la misma recta, porque si estos dos cumplen eso, el otro par estarán sobre la misma recta.
139	E1	Bueno. Entonces escribir otro par de lados correspondientes sobre la misma recta.
140	P	Entonces si un par de lados están alineados, ¿el otro par también?
141	E1	Claro. Porque si ambos comparten el mismo punto... ¡Ah! Pero hay otro problema, porque yo digo que un par de lados paralelos, pero no puede ser cualquier par. Cambia totalmente.
142	E2	No le comprendo su idea...
143	E1	Es que la paralela no es una paralela cualquiera.
144	E2	Pero si es un par de lados correspondientes paralelos. TS y QR son correspondientes y paralelos.

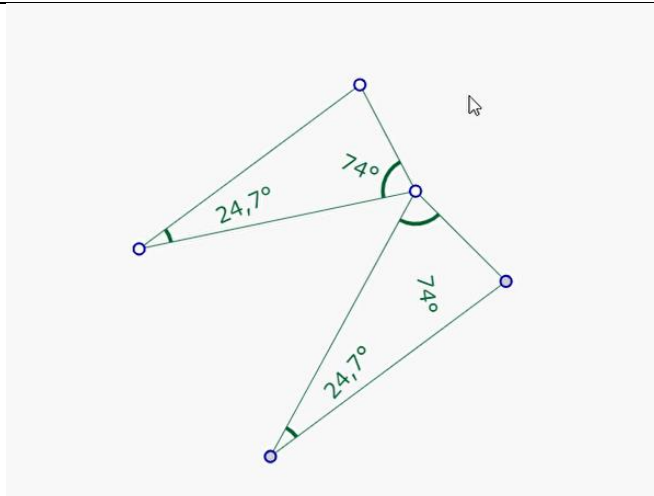


145	E1	¿Cuántos lados correspondientes tienen dos triángulos?
146	E2	Pues varios.
147	E1	Por eso, ¿cuál va a escoger?
148	E2	Pues el que quiera.
149	E1	No, no puede elegir cualquiera.
150	E2	Pero ¿por qué?
151	E1	Porque debe ser el lado opuesto a P el que necesito que sea paralelo. No puede ser cualquiera.
152	P	¿Cuál tiene que ser?
153	E1	El opuesto a P, el lado opuesto a P.
154	P	El opuesto al vértice común.
156	E1	Sí, eso. Ahora cómo cuadrarnos lo de los lados, porque cuadrando un par, ya se cuadrarían los demás. (Haciendo referencia a que los vértices de los triángulos deben estar sobre la misma transversal que corta a las paralelas y por tanto comprenden el ángulo común).
157	E2	Pues que un par de lados estén sobre la misma recta.
158	E1	Sí, y si un par de lados está sobre la misma recta, eso obligaría al par de lados que queda a que también estén sobre la misma recta. Toca poner eso. [Escribe todas estas ideas en el documento de Word].
		Conjetura: Si dos triángulos son semejantes, tienen un vértice en común, el par de lados correspondientes opuestos a el vértice en común son paralelos y otro par de lados correspondientes están sobre la misma recta entonces, los <u>circuncírculos</u> de los triángulos son tangentes en el vértice en común
159	E2	Listo.
160	P	¿No les gustaría ponerle un nombre a esa relación entre los triángulos? Para no estar diciendo todo ese poco de cosas.
161	E1	Claro. Como que son triángulos que comparten una misma recta, no sé.
162	P	Esas relaciones que acabaron de escribir, se llama triángulos en posición de similitud. Entonces cuando se refieran a todas las propiedades que acabaron de mencionar, lo pueden llamar como triángulos en posición de similitud.
163	E1	Mejor. La voy a anotar.
164	P	Si dos triángulos son semejantes, tienen un vértice en común, el par de lados correspondientes al vértice en común son paralelos y otro par están sobre la misma recta. Eso es que dos triángulos están en posición de similitud.
165	E1	Entonces podemos mejorar la conjetura.

166	E2	Si dos triángulos están en posición de similitud, entonces sus circuncírculos son tangentes en el vértice en común. ¡Qué bendición!
167	E1	[Reescribe la conjetura de la manera en cómo se dijo].  <p><b>Tarea 3:</b> desarrolle en DGPad la construcción propuesta anteriormente. Arrastre todos los objetos y verifique si se cumplen las conjeturas propuestas en la tarea anterior. Escriba una proposición de la forma si-entonces cuyo consecuente dé cuenta de la relación entre los círculos <math>c_1</math> y <math>c_2</math>.</p> <p>Si dos triángulos están en posición de similitud entonces, los <u>circuncírculos</u> de los triángulos son tangentes en el vértice en común.</p>
168	E2	Bueno, ¿ahora?
169	P	Demuestren.
170	E1	Ah, profe.
171	E2	Bueno, entonces tendríamos que demostrar que... los centros están...
172	E1	Están alineados con ese punto (refiriéndose al punto de tangencia P).
173	E2	Exactamente.
174	P	¿Por qué?
175	E1	Porque eso es como lo anterior.
176	P	¿Qué era lo anterior?
177	E1	Que, si dos círculos pasan por un mismo punto y sus centros están alineados con ese punto, entonces los círculos son tangentes.
178	E1	Listo, pero ¿Cómo lo demostramos? [construye la recta que pasa por P y los centros de los círculos].
179	P	¿Cuáles son las cosas que necesitan garantizar para demostrar que son tangentes los círculos?
180	E2	Que están alineados los centros con el punto.
181	P	Póngales nombre a los centros de los círculos.
182	E1	[Nombra los centros de los círculos como $O_1$ y $O_2$ ].

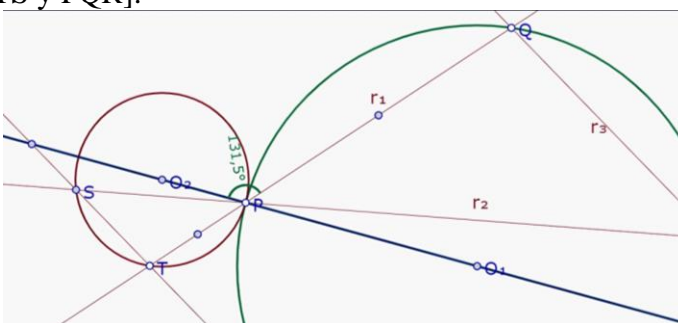


183	E2	¿Qué teoremas tenemos para garantizar que tres puntos están en la misma recta?
184	P	¿De qué manera podrían demostrar que tres puntos están en una misma recta?
185	E2	Estoy pensando en algún teorema, pero no se me ocurre ninguno.
186	E1	Las mediatrices del triángulo concurren en un solo punto...
187	P	Pero cómo va a demostrar que tres puntos están en una recta.
188	E1	Porque yo puedo mostrar que un punto está en varias rectas.
189	E2	Sería como una transitiva. Si un par están en una recta y otro par están en otra, el par restante están en la misma.
190	P	Tengo tres puntos en el plano. Puntos A, B y C, ¿qué deben cumplir A, B y C para que estén alineados? En ese orden.
191	E2	Que A esté alineado con C, B esté alineado con C y ya. Por transitividad A está alineado con B.
192	P	¿Qué propiedad hace que los tres puntos A, B y C estén alineados?
192	E2	Pues lo que yo digo, A con C, B con C y luego A está alineado con B.
193	P	Dos puntos siempre están alineados.
194	E1	Sí, eso es cierto.
195	E2	Bueno, pero y ahora con tres puntos...
196	E1	Sería mostrar que P esté sobre la recta $O_1O_2$ . Eso sería otra manera de mostrar que los tres están alineados. Porque ya sé que dos están alineados, solo hace falta ver que el tercero esté sobre esa recta.
197	P	¿Y cómo garantiza que P está en la recta? Que eso es justo lo mismo.
198	E2	Ese es el dilema.
199	E1	Sí, me quedo en lo mismo.
200	P	A, B y C ¿Qué necesito para que los tres estén alineados?
201	E1	Debe existir una recta entre dos y que el tercero esté ahí...
202	P	A ver, por ejemplo. Así a simple vista [escribe sobre una hoja] por aquí tengo A, por aquí... No, mejor en el software. [Abre la construcción que había propuesto como contraejemplo anteriormente] Aquí estos tres no están alineados (refiriéndose al punto donde concurren ambos vértices y otro par de puntos correspondientes) ¿por qué no están alineados?

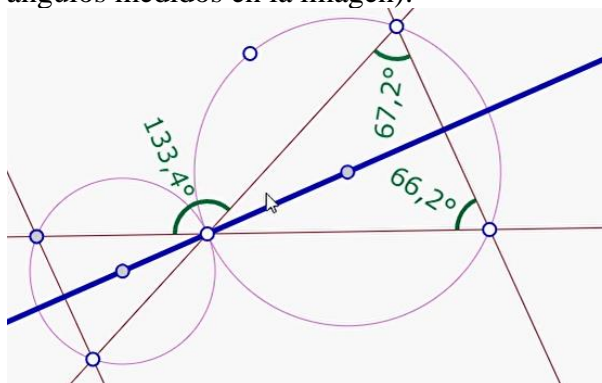


203 E1 ¡Ah! Porque el ángulo debe ser de  $180^\circ$ . Sí, ¿no? Claro, yo puedo formar un ángulo con tres puntos y si da  $180^\circ$  es un ángulo llano. Pero ¿cuál ángulo? [Vuelve a la construcción realizada por ellos].

204 E2 Uy, ahí estoy viendo ángulos externos... el ángulo  $O_2PQ$  es la suma de los ángulos  $O_2PT$  y  $STP$ . [Explora en el software midiendo ángulos para determinar qué relaciones entre ángulos puede hallar a partir de la semejanza de los triángulos  $PTS$  y  $PQR$ ].



205 E1 (Debido a fallos técnicos, se tuvo que volver a realizar la construcción en el software). Mira, este ángulo opuesto, es igual a la suma de estos dos. (Refiriéndose a los ángulos medidos en la imagen).

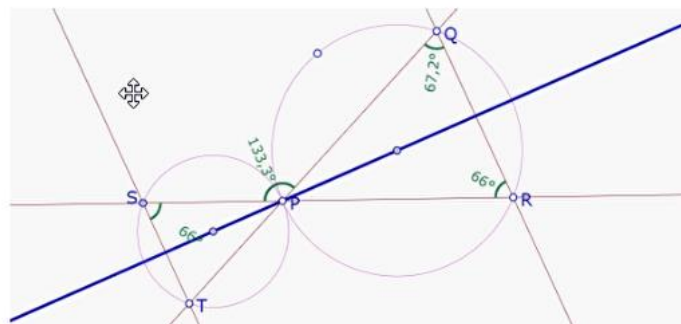


206 E1 Y ahora lo que pasa es lo siguiente, estos ángulos chiquitos de acá (refiriéndose a los comprendido por la recta  $O_1O_2$  y el vértice en común) son opuestos por el vértice.

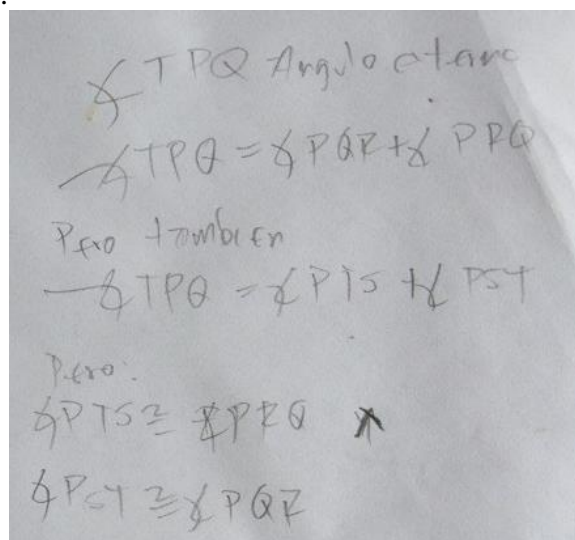
207 E1 Eso no lo sabemos.

208	E2	Sí, esos son opuestos por el vértice. Además, sabemos que la recta para por $O_2$ y P.
209	P	¿Ya sabemos?
210	E1	Sí, ¿no? Por la construcción.
211	E2	Es que eso es justo lo que queremos demostrar. Que los tres puntos están alineados. Entonces no puede decir que esos ángulos son opuestos por el vértice porque no sabemos si $O_1O_2$ pasa por P.
212	E1	Sí, buen punto.
213	E2	Sí, no sabemos eso.
214	E1 y E2	[Exploran en la construcción relaciones entre el ángulo SPQ y los triángulos STP y RPQ, concluyendo que es exterior a ambos triángulos].
215	E1	Ay, vea. Ya tenemos la demostración. [Les pone los mismos nombres a los vértices de los triángulos y toma un pantallazo para ponerlo en el documento Word].

Si dos triángulos están en posición de similitud entonces, los circuncírculos de los triángulos son tangentes en el vértice en común.

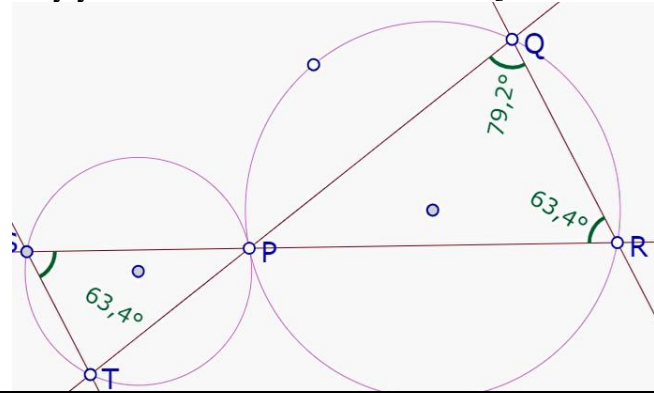


216	E2	[Escribe en una hoja la relación entre algunos ángulos externos e internos de la figura].
-----	----	---

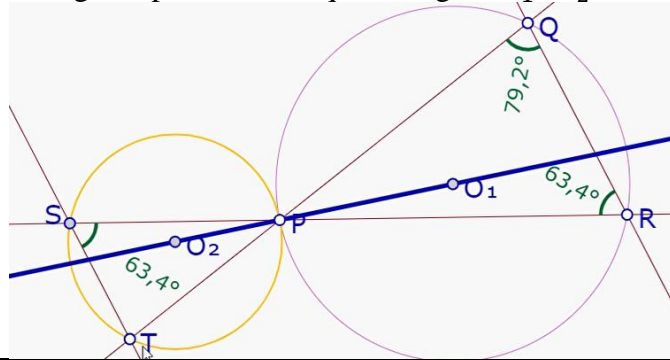


217	E1	Es que necesitamos demostrar que el ángulo $O_1PO_2$ sea de $180^\circ$ .
218	E2	Espere que creo que faltó algo.
219	E1	Claro, es que no estamos garantizando que ese ángulo sea de $180^\circ$ .

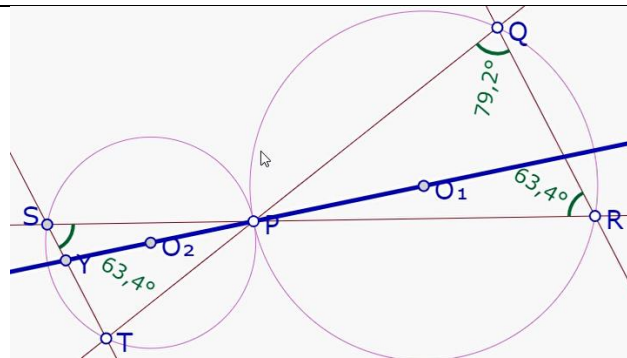
220	P	¿Hay algo que les detiene ahora?
221	E2	La misma recta (refiriéndose a la recta $O_1O_2$ ), necesito decir que esa recta... ¿sabemos ya que esa recta es mediatriz o no?
222	P	A mí me causa curiosidad por qué escogieron ese ángulo (refiriéndose al ángulo SPQ).
223	E1	Porque es el más evidente.
224	P	¿Cuáles son los que quieren probar que miden $180^\circ$ ?
225	E1	El de la recta $O_1PO_2$ , pero puedo hacerlo sumando varios ángulos.
226	P	O sea, van a sumar tres ángulos.
227	E2	Es que para sumar dos...
228	P	¿No pueden completar los $180^\circ$ con solo dos ángulos? ¿Por qué tres?
229	E2	Es que...
230	P	¿Cuál es el que quieren que sea de $180^\circ$ ?
231	E2	El $O_1PO_2$ .
232	P	Eso. ¿Y qué tiene que ver ese ángulo con el ángulo SPQ?
233	E2	Nada... no tienen relación.
234	E1	Voy a borrar la recta $O_1O_2$ porque me está molestando. Me molesta porque está con P ahí de una vez y yo no sé si P está alineado o no. [Borra la recta $O_1O_2$ ].



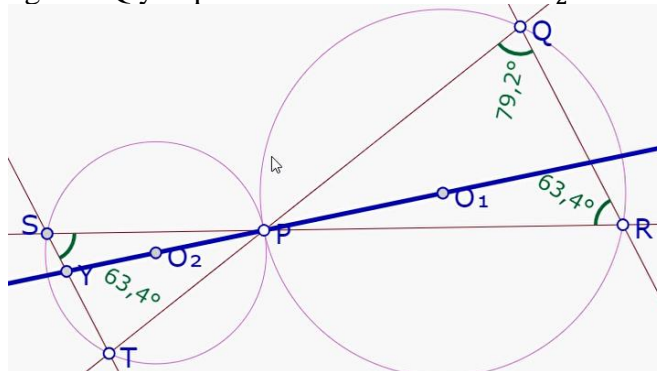
235	E1 y E2	[Vuelven a construir la recta $O_1O_2$ y siguen midiendo ángulos para encontrar relaciones entre los ángulos para mostrar que el ángulo $O_1PO_2$ es de $180^\circ$ ].
-----	---------	--



236	P	Ahora les hago una pregunta, ¿el ángulo $O_1PT$ ...?
237	E2	Es el ángulo externo del triángulo PST.
238	P	¿De PST?
239	E2	Ah, no. Parece.
240	E1	[Marca la intersección de $PO_1$ con $ST$ y la nombra Y].



241	P	¿Es $O_1PT$ un ángulo exterior al triángulo $PTY$ ?
242	E2	Sí.
243	P	¿Seguros?
244	E2	Ah,no. No sabemos porque no sabemos si P está en esa recta (refiriéndose a $O_1O_2$ ).
245	P	¿Pero podríamos encontrar un triángulo al que sepamos que ese sí es un ángulo exterior?
246	E2	[Mira la construcción intentando encontrar dicho triángulo] Pues de varios... podría ser del triángulo $PQ$ y el punto de intersección de $PO_2$ con la recta $QR$ .

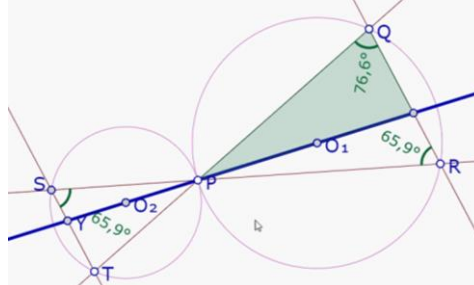


247	E2	Pero lo mismo, no sé si es una recta.
248	P	¿Cómo así que no sabemos si es recta?
249	E1	Es que no sabemos si los punto están alineados.
250	P	¿Cuáles puntos?
251	E1	Los centros de los círculos con P. Ah, pero no. Ahí es diferente.
252	P	¿Qué es lo diferente?
253	E1	Porque cogió un punto que es centro del círculo.
254	P	Hagan un dibujo del teorema del ángulo externo.
255	E1	[Realiza lo pedido].

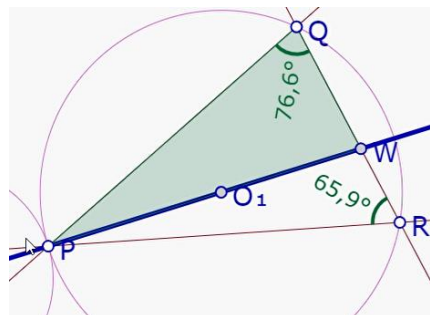


256	P	¿Cuál es el ángulo exterior?
-----	---	------------------------------

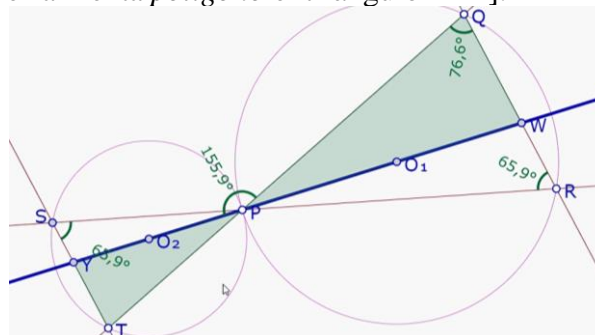
257	E1	El que está sobre la recta.
258	P	¿Y cuáles son los puntos que están alineados?
259	E1	Los que están sobre esa recta.
260	P	Para que $TPO_1$ sea ángulo exterior, ¿cuál debe ser el triángulo?
261	E1	[Usa la herramienta <i>polígono</i> y construye el triángulo mostrado en la imagen].



262	P	¿Cuáles son los puntos que deben estar alineados?
263	E2	T, P y Q.
264	P	¿Y esos están alineados?
265	E1	Sí, ese lo sabemos.
266	E2	[Nombra la intersección de la recta $PO_1$ con $QR$ como $W$ , obteniendo el triángulo $PQW$ ].

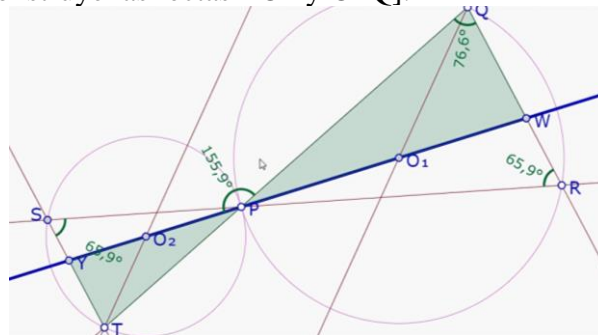


267	E2	El ángulo $QPY$ es el ángulo externo del triángulo $PTY$ .
268	P	¿Para qué otro ángulo exterior?
269	E2	No sé, estoy observado cosas.
270	E1	[Construye con la herramienta <i>polígono</i> el triángulo $PTY$ ].

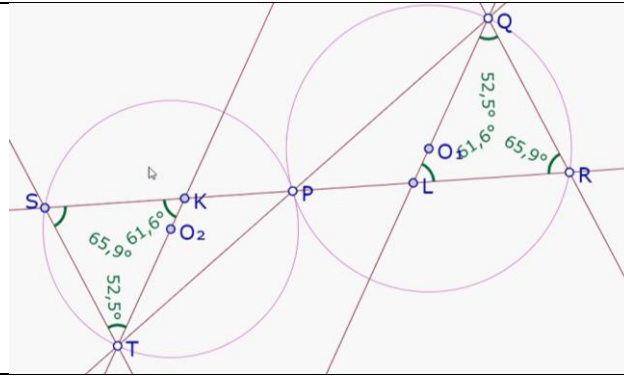


271	E2	Listo, ya la tengo. El ángulo $QPY$ es la suma de los ángulos $PYT$ y $YTP$ . Y como el ángulo $PTY$ es congruente con el ángulo $WQP$ , y como $QPY$ también es exterior al triángulo $PWQ$ , entonces el ángulo $QPY$ también va a ser la suma de los ángulos $PWQ$ y $WQP$ .
-----	----	---

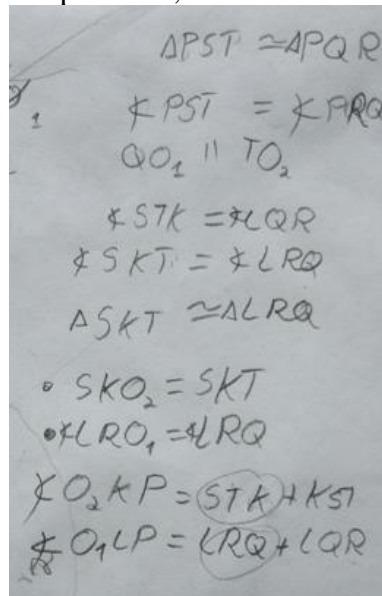
272	E1	Yo aún no me convenzo. Porque es que uno dice de una vez que P es como si estuviera ya alineado con $O_1$ y $O_2$ y ¿qué me garantiza eso? Y vuelvo a lo mismo, vuelvo a cero. Porque como usted lo dijo, entonces uso que la recta ya pasa por P y ese es el problema.
273	P	Exactamente.
274	E1	Es que me provoca quitar la recta (refiriéndose a $O_1O_2$ ) para no verla, porque ahí lo veo, pero cómo lo demuestro.
275	P	Pero ¿qué podrían concluir de que el ángulo TPW es un ángulo exterior del triángulo PWQ?
276	E1	¿Qué puedo concluir de que sea un ángulo exterior?
277	P	Sí.
278	E1	Pues que es la suma del ángulo exterior más este (refiriéndose al ángulo QPW) es de $180^\circ$ , que es lo que quiero demostrar.
279	P	Es que a mí me causa curiosidad que ustedes hayan propuesto el ángulo exterior para establecer una relación con otros ángulos, pero no han escrito en ningún momento esa relación.
280	E1	Buen punto...
281	P	Escríbanla. ¿Cuál es la relación que se deduce de que el ángulo TPW sea exterior?
282	E1	Pues como es exterior, es la suma de los otros dos ángulos...
283	P	Usted lo que quiere es que W, P y otro punto estén alineados.
284	E1	Es que hay mucha construcción ya...
285	P	Oculte algunos objetos si quiere. Lo curioso es que tomaron el punto W y no el punto $O_1$ , porque son el mismo. De modo que el ángulo $TPO_1$ sería también exterior al triángulo...
286	E1	PWQ o...
287	P	$PO_1Q$ .
288	E1	Sí, $PO_1Q$ . Pero ahora no conoceríamos el ángulo WQP.
289	P	¿Qué relación hay entre las rectas $TO_2$ y $O_1Q$ ? Dibújelas.
290	E1	¿Son paralelas? [Construye las rectas $TO_2$ y $O_1Q$ ].



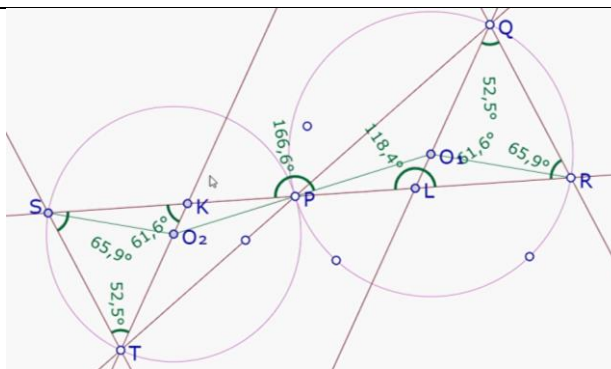
291	P	¿Por qué?
292	E1 y E2	[Ocultan, construyen objetos y miden ángulos para encontrar un par de ángulos alternos internos congruentes, de modo que dé cuenta del paralelismo de las rectas].



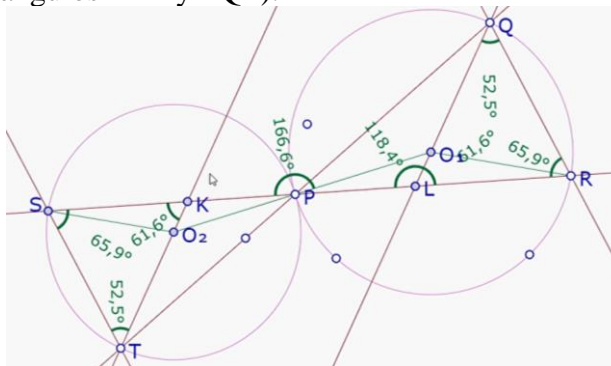
293	E1	Creo que empiezo a notar relaciones entre los ángulos... las voy a anotar en el papel porque son muchas y me confundo.
294	P	De acuerdo, tómese su tiempo.
295	E1 y E2	[En una hoja escriben relaciones entre triángulos y ángulos]. (Nota: las relaciones halladas por los estudiantes están bajo el supuesto de que las rectas $O_1Q$ y $O_2T$ son paralelas, hecho del cual no se tiene evidencia).



296	E1	A ver, $O_1Q$ es paralela a $O_2T$ y de ahí salen K y L que son las intersecciones con la recta. Yo puedo decir alternos externos que serían el ángulo $SKT$ y $LQR$ , son congruentes.
297	E1 y E2	[Siguen explorando en el software para hallar relaciones entre los ángulos. Construyen objetos y miden ángulos].

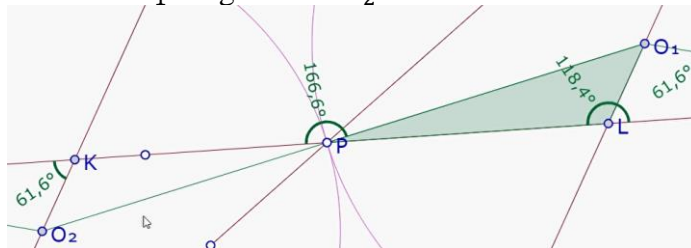


298	E1	Profe, la idea va así... el triángulo STK es semejante al triángulo LQR.
299	P	¿Ya lo demostró?
300	E1	Sí, claro. Más que todo fue porque se usó que $O_2T$ y $O_1Q$ son paralelas.
301	P	¿Y cómo probó que son paralelas?
302	E1	Pues porque así fueron construidas.
303	P	ST y QR son paralelas porque así las construimos, pero TK y QL no se sabe.
304	E1	Primero construí la recta $O_1Q$ y luego una paralela que pasara por T y $O_2$ .
305	P	No porque los puntos T y $O_2$ ya estaban. Más bien se construyó la recta $O_1Q$ y la recta $O_2T$ .
306	E2	Y ahora hay que demostrar que son paralelas.
307	P	Exactamente.
308	E1	El ángulo TSK es igual al ángulo PRQ. Ahora falta...
309	P	Tiene los tres ángulos de los dos lados congruentes cada par correspondiente.
310	E1 y E2	Sí... [Siguen explorando en el software para hallar relaciones entre ángulos].
311	E1	Sé que ST y QR son paralelas y quiero ver que $O_1Q$ y $O_2T$ son paralelas. Y ya sé también que el ángulo STP es igual al ángulo RQP y como este es igual a este (refiriéndose a los ángulos STK y RQL), entonces este es igual a este (refiriéndose a los ángulos PTK y PQL).

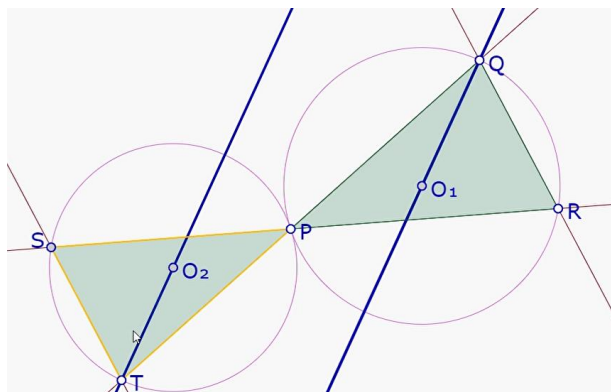


312	P	A ver si entendí. STP es congruente al ángulo PQR. Y a la vez...
313	E1	Faltan los pedacitos (refiriéndose a los dos ángulos comprendidos entre los ángulos STP y RQP). No sé cómo concluí que eran iguales... No recuerdo cómo lo hice...
314	P	Bueno, partamos del hecho de que son paralelas las rectas TK y QL. ¿Qué concluiría con eso?
315	E1	Puedo concluir que el triángulo STK es semejante con el triángulo RQL. También puedo concluir que el ángulo $PKO_2$ es congruente con el ángulo $PLO_1$ .

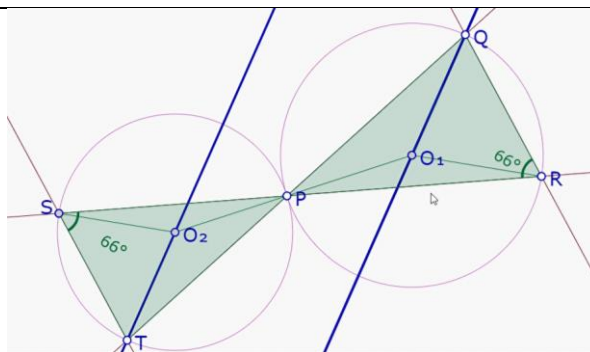
Ahora cojo los triángulos  $O_2KP$  y  $O_1LP$ , quiero ver que sean semejantes. Para eso, uso el ángulo  $KPO_1$ , que es igual a la suma de los ángulos  $PLO_1$  y  $LO_1P$ . Uso también el ángulo  $LPO_2$ , que es igual a la suma de los ángulos  $PKO_2$  y  $KO_2P$ . Y como  $PKO_2$  y  $PLO_1$  son iguales, entonces  $KO_2P$  y  $LO_1P$  tienen que ser iguales y por tanto  $KPO_1$  es igual a  $LPO_2$ .



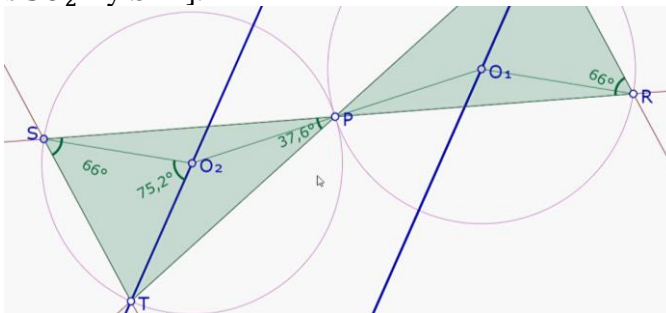
- 316 P Entonces ya tiene que los triángulos  $PKO_2$  y  $PLO_1$  son semejantes.
- 317 E1 Exacto. Ahora uso que el ángulo  $KPO_1$  más  $LPO_1$  es  $180^\circ$  y que  $LPO_2$  más  $O_2PK$  también es  $180^\circ$  para concluir que  $O_1PO_2$  es  $180^\circ$ .
- 318 P Claro, yo uso es que sí suma 180 que es  $KPL$ . Y como  $KPL$  es  $KPO_1$  más  $LPO_1$  y este es igual a  $PKO_2$ , entonces los reemplazo y ya está.
- 319 E1 Ahora toca demostrar que las rectas son paralelas (refiriéndose a las rectas  $QL$  y  $TK$ ) porque nos saltamos esa parte.
- 320 P Borre algunos objetos de la pantalla, está muy saturada.
- 321 E1 Pero ya está demostrado que  $O_1, P$  y  $O_2$  están alineados. Faltan las paralelas y listo. [Borra algunos objetos y construye otros, quedando como se muestra en la imagen].



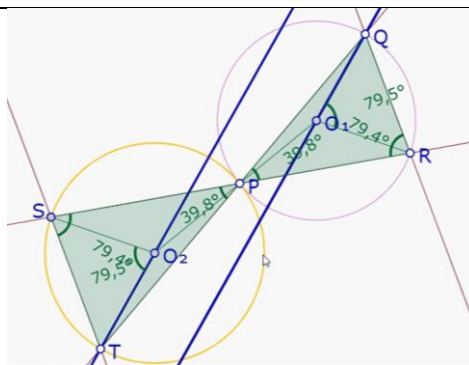
- 322 P A ver, ¿qué necesita para probar que dos rectas son paralelas?
- 323 E2 Ángulos alternos internos.
- 324 P Podrían ser. ¿Cuáles serían ese par de ángulos alternos internos?
- 325 E2 Necesitamos una transversal.
- 326 E1  $SR$  sirve y también  $TQ$ .
- 327 P ¿Cuál les gusta más según ese dibujo?
- 328 E1  $TQ$ .
- 329 P Entonces ¿qué ángulos deberían ser congruentes?
- 330 E1 Podemos usar ángulos externos a triángulos.
- 331 P Creo que no han usado para nada que  $O_1$  y  $O_2$  son centros de un círculo.
- 332 E1 Pues  $P$  y  $S$  están a la misma distancia de  $O_2$ . [Construye los segmentos  $PO_2, SO_2, PO_1$  y  $RO_1$ ].



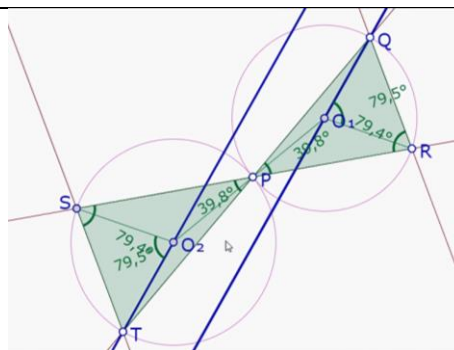
333	E1 y E2	[Exploran en el software para encontrar una relación entre ángulos que les permita mostrar que las rectas $TO_2$ y $QO_1$ son paralelas].
334	P	A parte de usar de que $O_2$ es centro de un círculo para concluir que P y S están a la misma distancia, ¿para qué otra cosa puede usar $O_2$ u $O_1$ ?
335	E1	Que un punto cualquiera en el círculo está a la misma distancia...
336	P	Y además...
337	E2	El ángulo...
338	E1	¡Uy! El ángulo inscrito.
339	E2	Sí... el ángulo central y el inscrito, que el inscrito mide la mitad del central.
340	E1	[Mide los ángulos $SO_2T$ y $SPT$ ].



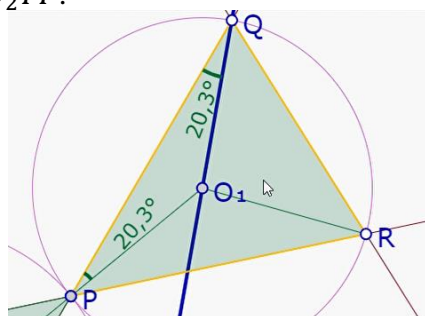
341	E2	$SPT$ es la mitad de $SO_2T$ .
342	P	¿Por qué se fijaron en esos dos ángulos?
343	E1	Porque se supone que este es igual a este (refiriéndose a la congruencia entre los ángulos $SPT$ y $QPR$ ).
344	E2	Mida el ángulo $QO_1R$ , que es igual a $SO_2T$ , por lo de que $SPT$ y $QPR$ son congruentes.
345	E1	[Realiza lo pedido].
346	P	Pero qué es lo que quiere hacer ahora, no entiendo.
347	E1	Para sumar $180^\circ$ .
348	P	Ah, de otra manera, sin las paralelas.
349	E1	Sí, más rápido, ¿no?
350	P	¿Cómo lo van a hacer?
351	E1 y E2	[Realizan medias de ángulos y arrastras los objetos para encontrar propiedades geométricas que les permitan demostrar que el ángulo $O_1PO_2$ mide $180^\circ$ ].



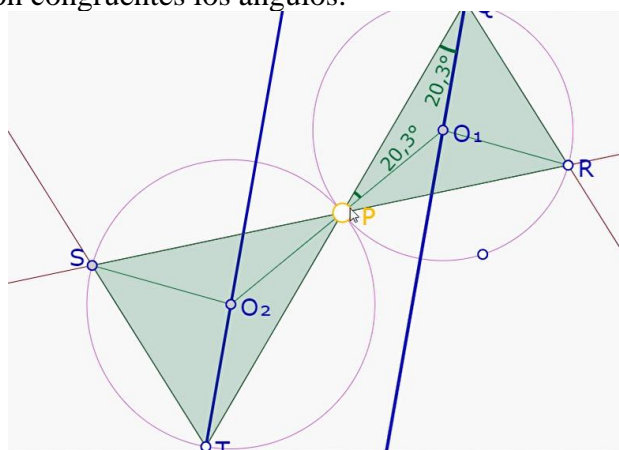
352	P	Yo creo que están preocupados por garantizar congruencias de ángulos y ahí hay muchos ángulos congruentes, por lo que se están olvidando para dónde van.
353	E2	Pues para ver un par de ángulos alternos iguales y probar que las rectas (TK y QL) son paralelas.
354	P	Pero ¿cuáles son los ángulos que necesito que sean congruentes? No será que pensando en esos ángulos yo podría hacer el tránsito hacia otros. Por ejemplo, si la transversal fuera QT, ¿cuál sería el ángulo inscrito que necesita?
355	E1	Cuál sería...
356	P	El ángulo QRP, por ejemplo, es congruente...
357	E2	Con TSP.
358	P	Pero QRP es inscrito. Mide la mitad...
359	E2	Mide la mitad del ángulo $PO_1Q$ . Y de igual forma el otro (refiriéndose a $PO_2T$ ). Entonces los ángulos $PO_2T$ es congruente con $PO_1Q$ . Pero como no sé si $O_2$ , P y $O_1$ están en la misma recta, entonces no sé...
360	P	¿No será que ese ángulo $QO_1P$ me sirve para luego pasar a $PQO_1$ ? ¿No es ese el formado por la transversal y la recta?
361	E2	Sí... O sea, ¿de ese ángulo paso al otro?
362	P	¿Qué relación hay entre el ángulo $O_1PQ$ y $O_1QP$ ?
363	E2	Son congruentes.
364	P	Son congruentes.
365	E2	Sí, por eso.
366	P	¿Y qué pasa en el triángulo $TO_2P$ ?
367	E2	De igual manera.
368	P	¿Y entonces qué puedo concluir de los triángulos $PQO_1$ y $PTO_2$ ? Los dejo que piensen la idea.
369	E1 y E2	[Exploran en el software para hallar relaciones geométricas para probar la semejanza de los triángulos $PQO_1$ y $PTO_2$ ].



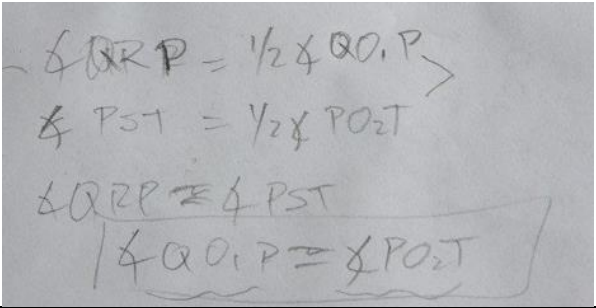
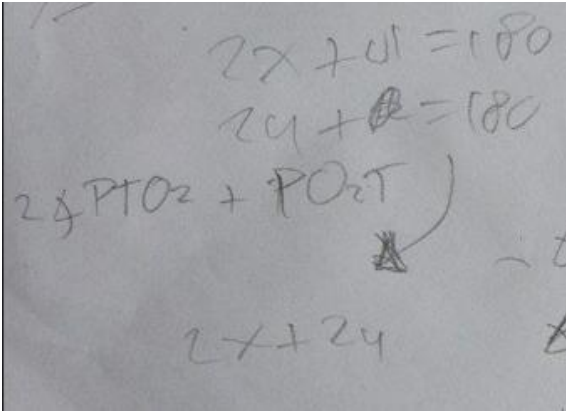
370	E2	Creo que lo tenemos...
371	E1	Sí, el ángulo $PQO_1$ es igual a $O_1PQ$ . Y lo mismo me pasa con que el ángulo $O_2PT$ es igual al ángulo $O_2TP$ .



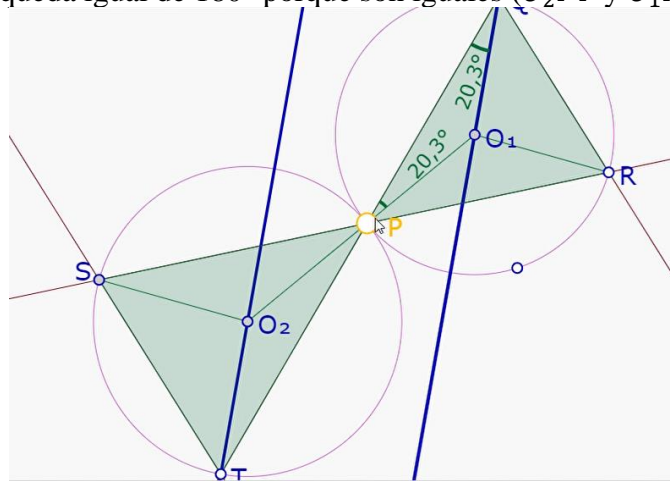
372	P	¿Y por qué?
373	E2	Porque los triángulos son isósceles.
374	P	Listo, ya tienen esa relación entre cada par de ángulo, pero todavía no saben si son iguales los cuatro.
375	E2	Pero quedaría fácil probarlo por el ángulo inscrito, ¿no?
376	P	Desarrolle más la idea.
377	E2	El ángulo $PO_1Q$ es el ángulo central y es el doble del ángulo $PRQ$ , pero $PRQ$ es congruente con el ángulo $PST$ que es la mitad del ángulo central $PO_2T$ , entonces $PO_2T$ es igual al ángulo $PO_1Q$ . Y como ambos son isósceles, entonces por lo del radio, son congruentes los ángulos.



378	P	Espere, ¿cómo pruebo que este pequeño es igual a este otro pequeño? (refiriéndose a los ángulos $PTO_2$ y $PQO_1$ ).
379	E2	Espere, es que no sé...

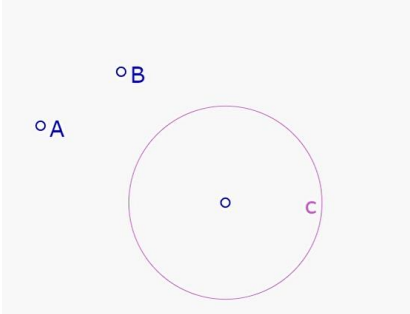
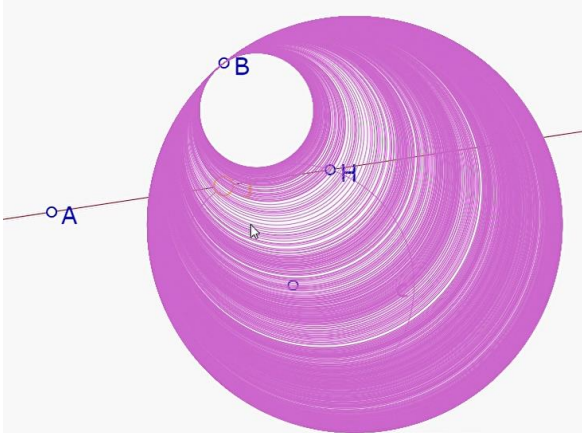
380	P	Anoten las ideas.
381	E1 y E2	[Anotan en una hoja el razonamiento dicho anteriormente].
		
382	P	La pregunta es cómo voy de la congruencia de los ángulos $PO_2T$ y $PO_1Q$ a la congruencia de los ángulos que quiero probar que son alternos internos.
383	E1	Dos veces el ángulo $PTO_2$ más $PO_2T$ es igual a...
384	P	¿Qué están haciendo?
385	E1	Estoy sumando todos los ángulos, la suma de ambos triángulos ( $PTO_2$ y $PQO_1$ ) es la misma. Conoce un ángulo y sabe que dos veces el otro le va a dar 180, y en ambos se cumple lo mismo, entonces se concluye que son congruentes (refiriéndose a los triángulos $PTO_2$ y $PQO_1$ ).
386	E2	[Escribe esta idea en una hoja y concluye que los ángulos $PTO_2$ y $PQO_1$ son iguales].
		
387	E2	Llamando Alpha a los ángulos centrales que son iguales y X e Y a los ángulos $PTO_2$ y $PQO_1$ e igualando, me queda que $PTO_2$ es igual al ángulo $PQO_1$ .
388	P	¿Y no será que yo puedo usar ese razonamiento para probar directamente que $O_1, P$ y $O_2$ están alineados, sin necesidad de transitar por el paralelismo de las rectas $TO_2$ y $QO_1$ ?
389	E1	Sí.
390	P	¿De qué manera?
391	E1	Usando los ángulos $SO_2P$ y $PO_1R$ .
392	P	¿Y por qué no los mismos que ya tengo?
393	E1	¿Cuáles?
394	P	$PO_2T$ y $PO_1Q$ .
395	E1	Listo, además sabemos que $PTO_2$ y $TPO_2$ son iguales. Y $PQO_1$ y $QPO_1$ también son iguales.
396	P	Y hay otro par congruentes.

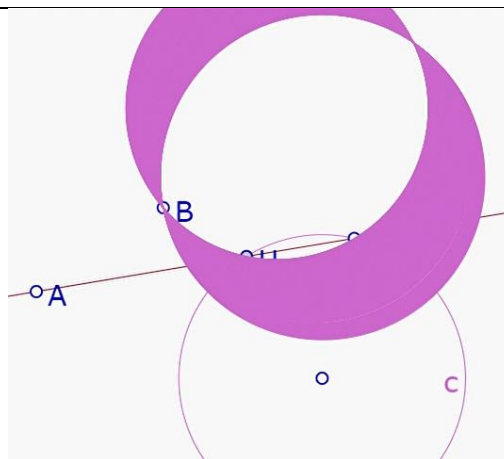
397	E1	¿Otros más?
398	P	Sí, unos que me sirvan para probar que están alineados (refiriéndose a los puntos $O_1$ , $O_2$ y P).
399	E2	Pues es como la demostración que hicimos ahorita del ángulo. Este ángulo grande (SPQ) más este (SPT) es de $180^\circ$ , y si le quito este ( $O_2PT$ ) y le sumo este ( $O_1PQ$ ) me queda igual de $180^\circ$ porque son iguales ( $O_2PT$ y $O_1PQ$ ).



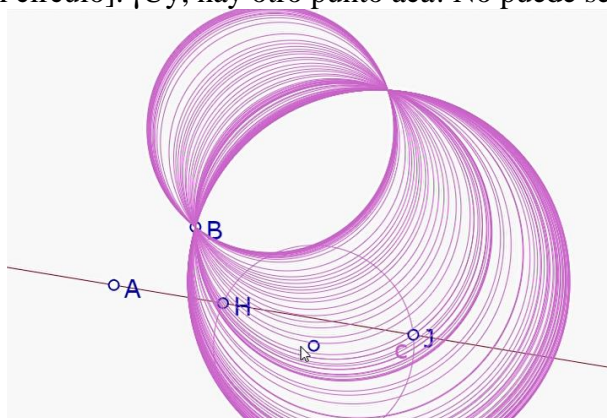
400	P	Exactamente. Yo creo que podemos dejar acá por hoy.
-----	---	---

**Apéndice C. Tercera sesión actividad 2**

No.	Sujeto	Descripción – Evidencia
1	P	Vayan al DGPad y construyan un círculo $c$ y dos puntos $A$ y $B$ exteriores a $c$ .
2	E1 y E2	[Realizan lo pedido].
		
3	P	El problema consiste en construir un círculo que pase por $A$ y $B$ y sea tangente a $c$ . Para solucionarlo, hemos diseñado una secuencia de tareas que siendo resueltas darán una guía para resolver el problema inicial. Entonces vayan al documento de Word y lean la primera tarea.
4	E2	[Lee el enunciado de la tarea].  <p><b>Tarea de exploración 1:</b> Dado un círculo <math>c</math> y dos puntos <math>A</math> y <math>B</math>, construya un punto <math>J</math> sobre <math>c</math>, la recta <math>AJ</math> y <math>H</math> intersección de <math>AJ</math> y <math>c</math>, distinto de <math>J</math>. A continuación, construya el círculo que pasa por los puntos <math>B</math>, <math>J</math> y <math>H</math>.</p> <p>Active la traza del círculo construido y arrastre el punto <math>J</math>. ¿Qué relación hay entre todos los círculos que se forman?</p>
5	E1 y E2	[Construyen los objetos pedidos de la tarea, activan la traza del círculo que pasa por $B, J$ y $H$ y arrastran el punto $J$ ].
		
6	P	(Se percata que en la imagen que muestra el software, $B$ parece ser el único punto en común de todos los círculos que se forman, cuando lo esperado es que se vean dos puntos en común a todos los círculos). Arrastre el punto $B$ a otra posición, que esté más cerca de $A$ .
7	E1	[Realiza lo pedido y arrastra el punto $J$ nuevamente].

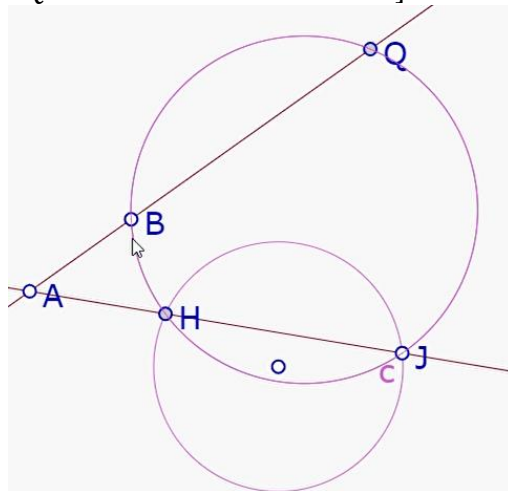


8	E2	Como que hizo la misma figura...
9	E1	No, es diferente.
10	E2	Sí, sí. Ahora es diferente.
11	P	Lean la pregunta de la tarea.
12	E1	¿Qué relación hay entre todos los círculos que se forman? [Arrastra nuevamente el punto $J$ para visualizar el rastro dejado por el círculo].
13	E2	Ya sé, que todos pasan por $B$ . Todos contienen a $B$ .
14	P	¿Qué más podrían decir?
15	E1	Que también pasan por $H$ .
16	E2	Es que es curiosa la forma que deja.
17	E1	[Mueve de posición el punto $B$ , arrastra nuevamente el punto $J$ y visualiza el rastro dejado por el círculo]. ¡Uy, hay otro punto acá! No puede ser.



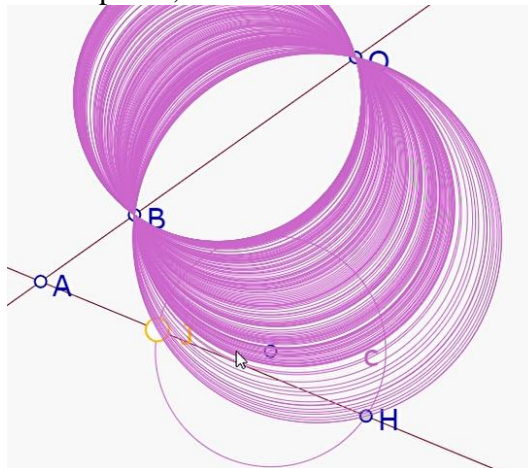
18	E2	Allá arriba hay otro punto.
19	E1	Y tiene cara de que está alineado con $A$ , ¿no?
20	P	¿Eso parece?
21	E2	Sí, está alineado con $A$ .
22	E1	Eso parece...
23	P	¿Podemos construir ese punto?
24	E1	Claro, porque conozco $A$ y $B$ .
25	E2	Sí, porque ese es el producto... [Intenta recordar el teorema de la potencia de un punto respecto a un círculo] sí porque $AH \cdot AJ$ es igual a $AB$ por $A$ y ese punto.

26 E1 Claro. Y entonces yo puedo hacer así [construye la recta  $AB$  y el círculo  $BHJ$ . A continuación, nombra  $Q$  a la intersección de ambos].



27 E2 Mueva ahora el punto  $J$  para ver si es verdad.

28 E1 [Arrastra  $J$ ]. Sí, ese es el otro punto, ahí se ve.



29 P ¿Qué pueden decir de ese otro punto? (Refiriéndose al punto  $Q$ ).

30 E2 Que el círculo que se forma de esos dos puntos es tangente al otro... ah, no, mentira. Eso no.

31 P O sea, ¿por qué ese punto no se movía?

32 E1 Porque es una constante, ¿no?

33 E2 Sí, porque el producto siempre tiene que ser constante.

34 P Pasen a la siguiente tarea.

**Tarea de exploración 2:** Sea  $Q$  el punto invariante respecto a  $J$  por el que pasan todos los círculos, constrúyalo.

I

35 E1 Esa ya.

36 P Siguiete tarea.

**Tarea de justificación 1:** Justifique por qué el punto  $Q$  es invariante.

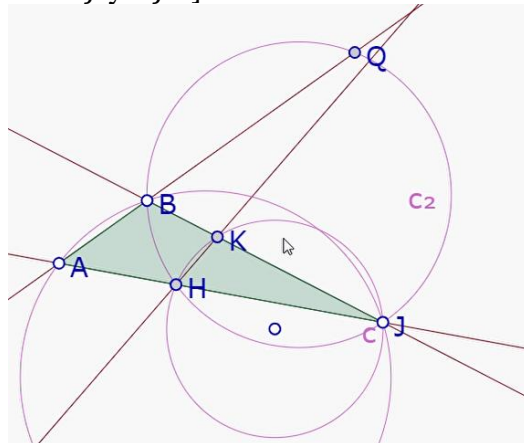
I

37 E2 Pues  $Q$  es invariante por lo que ya dijimos del teorema de la potencia.

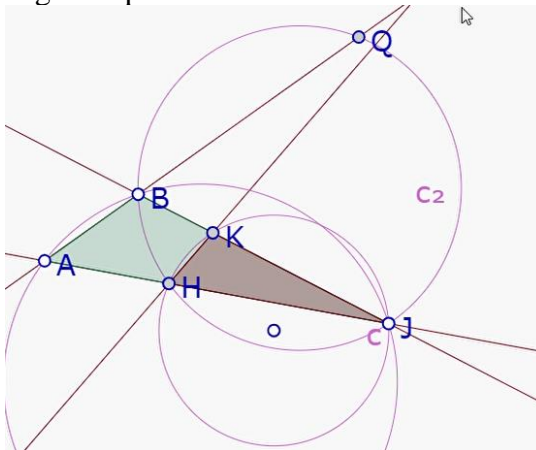
38	P	¿Podrían argumentarlo mejor?
39	E1	A ver, el que está variando es el punto $H$ y $J$ , pero la potencia de $A$ respecto a ese círculo (refiriéndose a $c$ ) es igual a la potencia de acá (refiriéndose al producto $AB \cdot AQ$ ).
40	E1	Es que $B, H$ y $J$ son puntos que ya están en la construcción, están en el círculo $c_2$ . Y como $H$ y $J$ también están en $c$ , entonces la potencia de $A$ respecto a $c$ sería igual a la potencia de cualquier otro círculo...
41	E2	Es que la potencia de los dos es la misma. (refiriéndose a los dos círculos).
42	E1	No, no necesariamente.
43	E2	Es que los dos círculos comparten dos puntos (refiriéndose a los puntos $H$ y $J$ ).
44	E1	Ajá, o sea, la multiplicación de $AH$ por $AJ$ es la misma que $AB$ por $BQ$ , pero no va a ser lo mismo si estuviera otro punto por acá en esta circunferencia (refiriéndose a $c_2$ ).
45	E2	¿Seguro?
46	E1	No, mentiras. Sí es la misma. Entonces la razón por la que $Q$ no se mueve de lugar precisamente por eso.
47	E2	Porque los dos círculos comparten dos puntos, ¿no?
48	E1	No, no es porque compartan dos puntos.
49	E2	Bueno, se podría decir que es porque los dos círculos se cortan.
50	E1	Pero por qué $Q$ no varía, esa es la pregunta.
51	E2	Pues por eso que dije, ¿por qué más no va a variar?
52	E1	Teorema de la potencia. $Q$ no varía por el teorema de la potencia, lo que dijimos antes de que ambos productos son iguales.
53	E2	Claro, es que los dos círculos tienen esos puntos en común (refiriéndose a $H$ y $J$ ), entonces la potencia del punto exterior $A$ a esas dos circunferencias va a ser la misma.
54	P	Pasemos a la siguiente tarea.
55	E1 y E2	[Leen el enunciado de la tarea].

**Tarea de exploración 3:** Construya la secante  $BK$  y  $K$  intersección de  $BK$  con  $c$ , distinta de  $J$ . A continuación, construya la recta  $KH$  y el círculo que pasa por los puntos  $A, B$  y  $J$ . ¿Qué relación debe haber entre los triángulos  $ABJ$  y  $HJK$  para que los círculos sean tangentes?

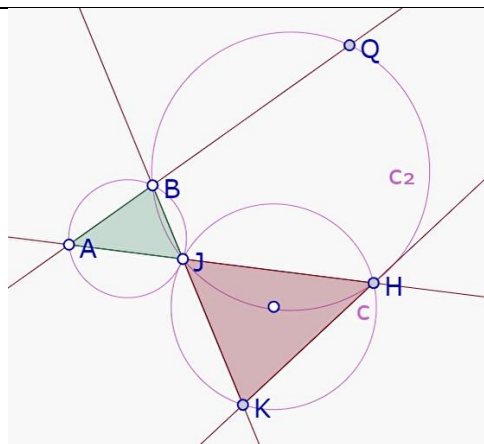
- 56 E1 y E2 [Construyen los objetos pedidos en la tarea y con la herramienta *Polígono* construyen los triángulos  $ABJ$  y  $HJK$ ].



- 57 E2 ¡Uy, los triángulos son semejantes! (refiriéndose a  $ABJ$  y  $HJK$ ). Yo los vi y de una vez pensé en que eran semejantes. Ahora, ¿por qué son semejantes?
- 58 E1 Sí, es que se ve que son semejantes.
- 59 P Miren la pregunta que se les hace en la tarea.
- 60 E1 Ah, qué relación hay entre los triángulos para que los círculos sean tangentes.
- 61 E2 ¿Cuáles círculos? Ah,  $c$  y el que pasa por  $A, B$  y  $J$ .
- 62 E1 ¡Yo sé! Deben estar en posición de similitud. Pero no estoy seguro...
- 63 E2 Pues ahí se ve que comparten un vértice.
- 64 E1 ¿Pueden estar uno adentro del otro? Claro, sí pueden.
- 65 E2 Sí, y los círculos son tangentes por dentro.



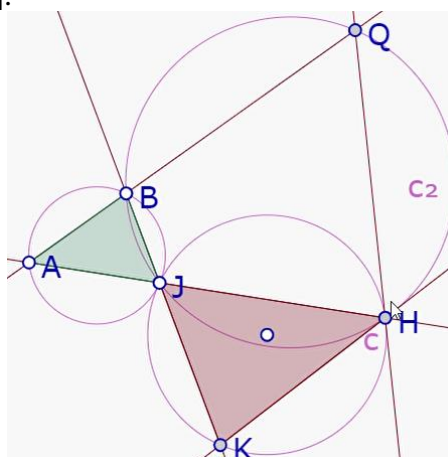
- 66 E1 Sí, ahí ya más o menos se ve que son tangentes.
- 67 P Miremos primero cuando los dos triángulos no están uno dentro del otro.
- 68 E1 [Arrastra el punto  $J$  para que los triángulos no queden superpuestos].



69	P	¿Qué relación debe haber entre los dos triángulos para que los círculos sean tangentes?
70	E2	Que sean semejantes.
71	E1	Sí, que sean triángulos en posición de similitud.
72	P	¿Y qué condiciones deben cumplir los triángulos para que estén en posición de similitud?
73	E2	Las paralelas.
74	E1	Que compartan un vértice, que los lados opuestos a este sean paralelos y sean semejantes.
75	P	Ajuste un poco más el punto $J$ para que perceptivamente se vean los triángulos en posición de similitud y pasen a la siguiente tarea.

**Tarea de exploración 4:** Construya la recta  $QH$ . ¿Qué relación geométrica hay entre los triángulos  $AJB$  y  $AQH$ ?

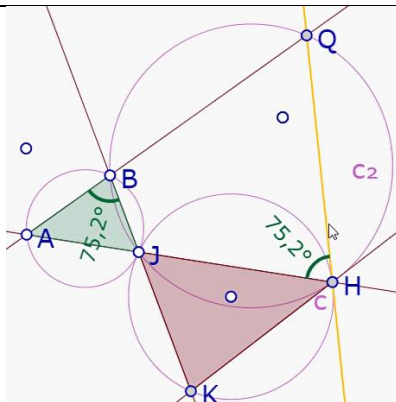
76	E1 y E2	[Construyen la recta $QH$ ].
----	---------	------------------------------



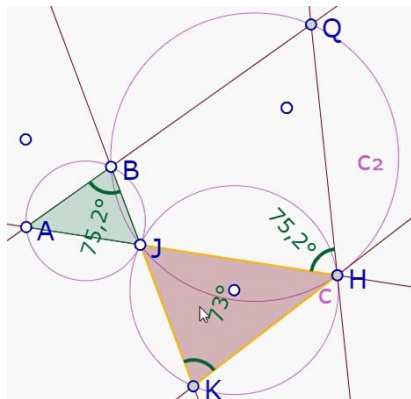
77	E2	[Lee la pregunta de la tarea] ¿Qué relación hay entre los triángulos $AJB$ y $AQH$ ? ¡Son semejantes también!
78	P	Vamos en que necesito comprobar que para que los dos círculos sean tangentes, ¿qué tienen que cumplir los triángulos?
79	E2	Que sean semejantes, tengan un vértice en común y los lados opuestos a este sean paralelos.

80	P	Eso, que estén en posición de similitud. Pero realmente no lo están en el software, sino que están ajustados para que se vean así. ¿Entonces cómo daríamos respuesta al problema?
81	E1	Hay que hacer los triángulos. Pero basta con trazar la recta $AB$ y trazar una paralela que corte a...
82	E2	¿Pero en cualquier punto?
83	E1	Sí, en cualquiera.
84	E2	Mire a ver.
85	E1	No, sí afecta. No sería cualquier punto porque el punto de tangencia no es cualquiera.
86	P	Entonces necesito garantizar esos triángulos en posición de similitud, ¿verdad?
87	E1	Ajá.
88	P	Por eso es que proponemos esa tarea a la que ustedes acaban de pasar.
89	E1	Ok.
90	E2	Entonces la relación geométrica entre los triángulos $AJB$ y $AQH$ es que son semejantes.
91	E1	Pues parecen semejantes.
92	E2	Son semejantes, obviamente.
93	E1	Comparten el mismo ángulo...
94	P	Demuestre que son semejantes.
95	E1	Pues comparten el mismo ángulo...
96	E2	El producto, ¿no? Vea... ay no, pero $A$ no es punto exterior...
97	E1	Vea que este ángulo es inscrito (refiriéndose al ángulo $BQH$ ), podemos trazar la cuerda $BH$ . Y este de acá también es inscrito (refiriéndose al ángulo $JBA$ )... Se me ocurrió usar el teorema del ángulo entre la tangente y la cuerda, pero acá no hay tangente.
98	E2	Se supone que las que deben ser paralelas son $BJ$ y $QH$ para que sean semejantes, ¿no? Se supone.
99	E1	Pues no necesariamente.
100	E2	No, sí. Para que sean semejantes los dos triángulos sí.
101	E1	[Mide el ángulo $BAJ$ ]. Este es el ángulo que comparten ambos.
102	E2	Necesitamos otro ángulo para que sean semejantes...
103	E1	Sí, si fueran paralelas de una vez serían semejantes (refiriéndose a las rectas $BJ$ y $QH$ ). Pero es que no hay paralelas.
104	E2	Está complicada hacer esta semejanza.
105	E1	$BJ$ y $QH$ son cuerdas del mismo círculo. Pero creería que daría muchas vueltas si uso algo así.
106	E2	Qué se me ocurre...
107	E1	Yo lo estoy mirando así: son las mismas cuerdas, puedo obtener ángulos inscritos...
108	E2	Es que la que lo embarra son las paralelas, porque si lo fueran sería más fácil.
109	E1	Pero no busque esas paralelas, toca buscar otra cosa... Tiene algo que ver con los lados, la potencia de los lados. La multiplicación de los lados es una constante.
110	E2	Pero es que no hay ningún punto externo.

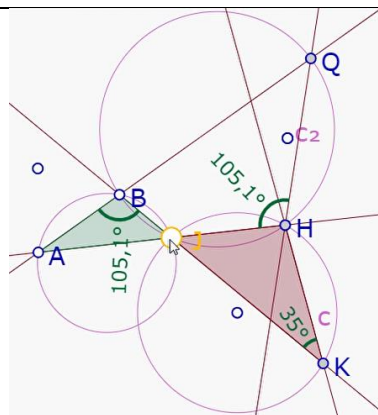
111	E1	Yo puedo decir que si AJ por AH es una constante y AB por AQ es igual a otra constante... no, ambos son iguales a lo mismo.
112	E2	Pero yo puedo decir que A es un punto externo del círculo $c_2$ y el producto de AB por AQ es igual a AJ por AH, entonces ya. No sé si se podría decir que son semejantes ya...
113	P	¿Qué se logra con esa relación?
114	E1	Que sus lados son proporcionales.
115	P	¿Quiénes son proporcionales?
116	E1	AB con AJ y AQ con AH.
117	E2	¡Uy, lado-ángulo-lado! (refiriéndose al criterio de semejanza LAL).
118	E1	Sí, ese es.
119	E2	Claro, porque A es exterior a $c_2$ , el producto de acá es igual al producto de acá, ósea que $AB \cdot AQ = AJ \cdot AH$ , y tienen el mismo ángulo, entonces por el LAL, son semejantes. Listo, tenemos la proporción por el teorema de la potencia y comparten un lado. ¿Lo escribimos en el Word?
120	P	Por favor.
121	E1 y E2	[Escriben en el documento de Word la demostración ya descrita verbalmente].  <p style="text-align: center;"><b>Tarea de exploración 4:</b> Construya la recta <math>QH</math>. ¿Qué relación geométrica hay entre los triángulos <math>AJB</math> y <math>AQH</math>?</p> <p style="text-align: center;">Como A es punto exterior a <math>c_2</math> <u>según</u> el teorema de la potencia <math>AB \cdot AQ = AJ \cdot AH</math> por lo que <math>AB/AJ = AH/AQ</math>.</p> <p style="text-align: center;">Los <u>triángulos</u> comparten un <u>ángulo</u> correspondiente, <math>QAH</math> y <math>BAJ</math>. <span style="float: right;">I</span></p> <p style="text-align: center;"><u>Los triángulos</u> son semejantes por teorema de semejanza LAL.</p>
122	P	Listo, siguiente tarea.  <p style="text-align: center;"><b>Tarea de justificación 2:</b> Demuestre que los triángulos <math>AJB</math> y <math>AQH</math> son semejantes.</p>
123	E1	Listo, ya lo demostramos.
124	P	Claro, vieron de una vez que eran semejantes.
125	E1	Entonces sigamos.
126	E2	[Lee la pregunta].  <p style="text-align: center;">¿Qué relación existe entre los ángulos <math>ABJ</math>, <math>AHQ</math> y <math>HKJ</math>? Demuestre su conjetura.</p>
127	E1	Qué relación hay... pues los semejantes son esos, los ángulos $ABJ$ y $AHQ$ .
128	E2	Mida.
129	E1	[Mide los ángulos $ABJ$ y $AHQ$ ].



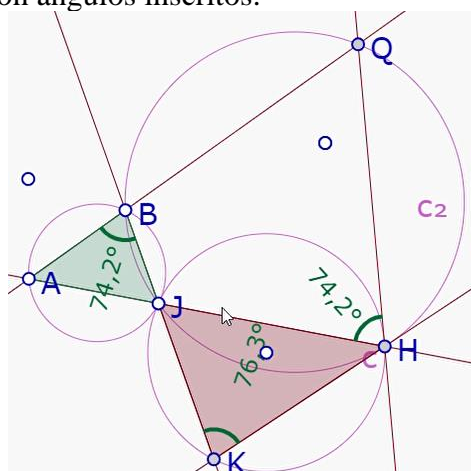
130	E1	Claro, son iguales porque son semejantes.
131	P	Les recuerdo nuevamente para dónde vamos. Queremos construir el círculo que es tangente a c y pasa por A y B. Para garantizar esa tangencia, ¿qué tiene que suceder?
132	E2	Paralelas, opuesto, vértice...
133	P	Ajá, los triángulos...
134	E1	Tienen que estar en posición de similitud y para eso necesito una paralela, pero no en cualquier lugar.
135	P	Entonces necesitamos construir esos dos triángulos, para que así los círculos...
136	E	Sean tangentes...
137	P	Sigan con la tarea.
138	E1	[Mide al ángulo HKJ]. Da diferente.



139	E2	Claro, es que es una aproximación. Deben ser congruentes.
140	E1	No, pero esto no es una aproximación.
141	E2	Claro, porque es que no se ha trazado una paralela ni nada, está ajustado todo.
142	P	¿Qué relación geométrica hay entre la recta QH y el círculo c?
143	E2	Es tangente.
144	P	¿Siempre es tangente?
145	E1	[Arrastra el punto J y la recta QH ya no se percibe tangente a c]. No.



146	P	En la posición en la que estaba J, la recta QH es...
147	E2	Tangente.
148	P	Ustedes dijeron que los ángulos, los tres (ABJ, AHQ y HKJ) son...
149	E2	Congruentes.
150	P	¿Cómo pasaron de que el ángulo JHQ es congruente al ángulo HKJ?
151	E1	Pues como el triángulo ABJ es semejante a AHQ y como ABJ está en posición de similitud con HKJ, entonces lo tengo.
152	P	Pero justamente los triángulos en posición de similitud es lo que quiero construir.
153	E1	Es verdad.
154	P	Bajo el supuesto de que QH es tangente a c, ¿qué puedo decir de los ángulos QHJ y HKJ?
155	E2	Ponga la construcción como si QH fuera tangente a ver qué podemos observar. [Ajusta la figura de modo que QH se vea perceptivamente tangente a c]. Yo creo que tiene que ver con ángulos inscritos.

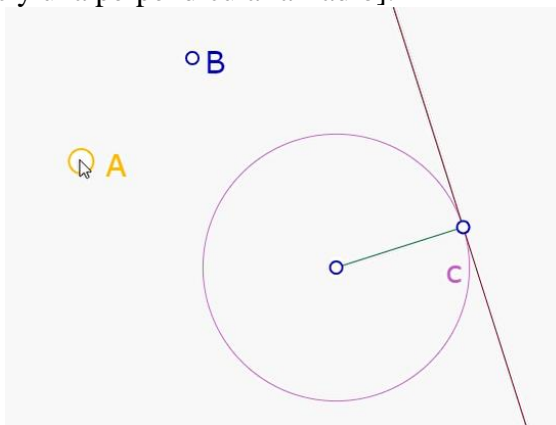


156	E1	Esta es una tangente... (refiriéndose a QH).
157	E2	De pronto toca utilizar el teorema entre la tangente y una cuerda... pues claro, QH es tangente a c y el otro (HKJ) es inscrito por la cuerda (JH).
158	E1	Sí, correcto.
159	P	Pero eso es bajo el supuesto de que...
160	E2	De que QH es tangente a c.
161	P	Pasemos a la siguiente tarea.

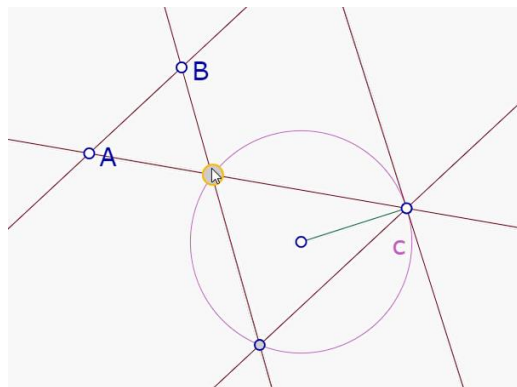
---

**Tarea de construcción 1:** Construir un círculo tangente a  $c$  que pase por  $A$  y  $B$ .

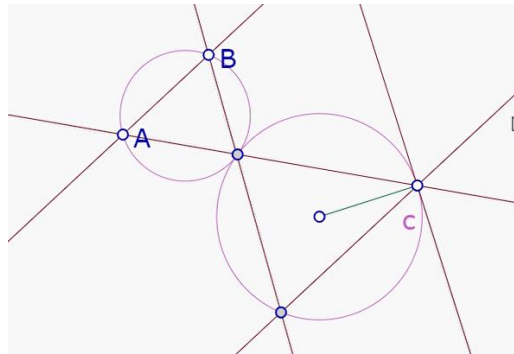
162	E1	Ahora toca construir el círculo.
163	P	¿Podemos ahora sí resolver el problema?
164	E1	Claro, necesitamos una tangente que pase por ese punto (refiriéndose al punto H). Trazando AJ encontramos H, pero es que H debe ser tangente.
165	P	Construya a H como el punto de tangencia.
166	E1	Pero ahí es tangente.
167	P	Arrastre J y deja de ser tangente. ¿Cómo construyo la recta QH de modo que sea tangente a $c$ ?
168	E2	¿A J lo podemos construir o ya lo tenemos?
169	E1	Ese se puede construir, yo creo que J es el último que se obtiene. Es que si usted tiene H ya puede trazar la paralela (KH).
170	E2	Pero J puede ser cualquiera, porque usted arrastra J y se mueve H.
171	E1	No, J tiene que ser uno en específico y H igual, debe ser el punto de tangencia de QH... ¿Se puede con cualquier tangente? Sí, cualquier tangente funcionaría. [Abre una nueva ventana de del software, construye los puntos A, B y el círculo c. Traza un radio de c y una perpendicular al radio].



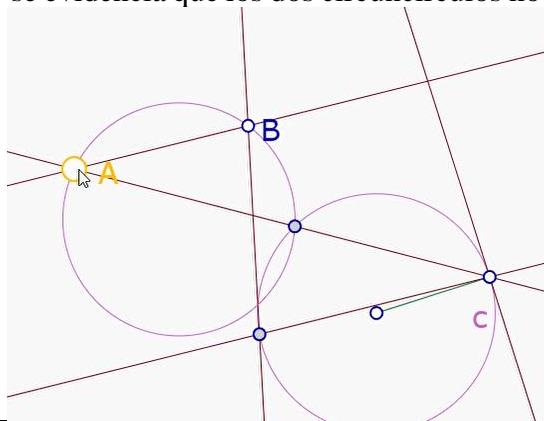
172	E2	Si marca la intersección entre la tangente y AB, ese es un vértice que compartían los triángulos semejantes.
173	E1	[Traza una recta secante a $c$ , marca sus intersecciones y construye otra recta secante y una paralela para obtener un par de triángulos en posición de similitud].



174	E2	Listo, ya esos triángulos son semejantes y sus circuncírculos son tangentes.
175	E1	[Construye el circuncírculo faltante y por la posición de los objetos los círculos se ven tangentes].

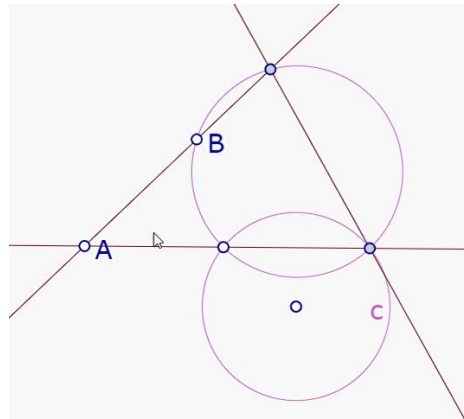


176	E2	Listo, ya.
177	P	Arrastre.
178	E1	[Arrastra el punto A y se evidencia que los dos circuncírculos no son tangentes].

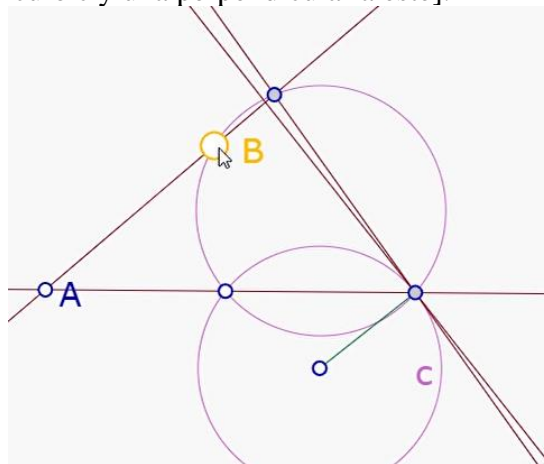


179	E1	Falta algo.
180	E2	¿Qué faltó? Ah pues la semejanza de los triángulos de arriba.
181	P	Vayan a la otra página del software, donde está lo habíamos hechos hasta ahora.
182	E1 y E2	[Realizan lo pedido].
183	P	Para garantizar H, ¿qué debimos garantizar antes?
184	E2	Que estos dos fueran semejantes (los triángulos ABJ y AHQ).
185	P	¿Y qué hicimos para que fueran semejantes?
186	E1	El círculo, se hizo el círculo ( $c_2$ ).
187	E2	Pero también hicimos que el producto fuera igual ( $AB \cdot AQ = AJ \cdot AH$ ). Creo que debemos trazar cualquier secante a c y encontrar un producto que sea igual y ahí es donde sale el círculo.
188	E1	Pero eso no garantiza H punto de tangencia.
189	E2	No, todavía no. Pero puedo trazar cualquier secante porque el círculo ( $c_2$ ) pasa siempre por esos dos puntos.
190	E1	¡Ah, está sencillo! Usted puede hacer el producto a un punto Q y el punto H ya estaría, necesita es hallar Q primero. AB se puede trazar y estos triángulos deben ser semejantes (ABJ y AHQ).
191	E2	Y la semejanza la hallamos por el teorema de la potencia. Debemos trazar un círculo que contenga a B, J y H, y esos puntos los tenemos.

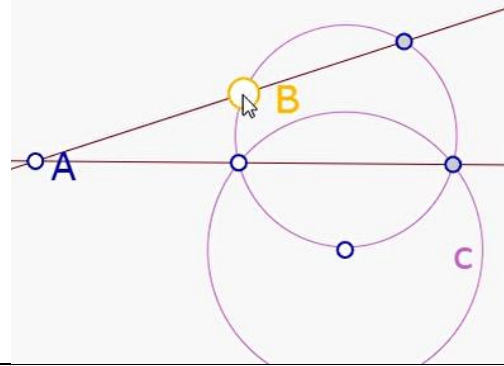
192	E1	Pero es que J no se puede poner de una vez.
193	E2	Pues yo creo que sí, puede ser cualquiera.
194	E1	No porque J es un punto específico.
195	E1 y E2	(Debido a problemas técnicos con el software, se tuvo que volver a hacer la construcción).



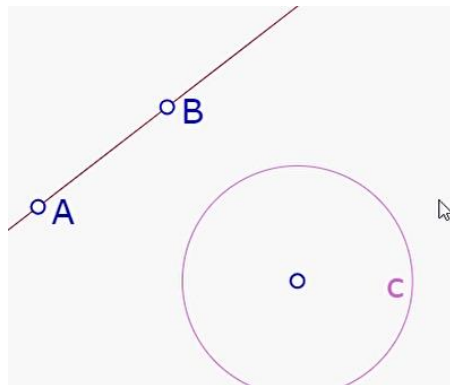
196	E1	[Traza un radio del círculo c y una perpendicular a este].
-----	----	--



197	P	¿Teniendo Q puedo encontrar a H?
198	E2	Claro
199	E1	Sí, hay que tener es a Q primero.
200	P	Entonces si quiero construir a H, ¿qué es lo que debo hacer?
201	E1	Construir a Q. Sería un punto que tenga la misma potencia que esto, ¿no? (refiriéndose al punto A exterior a c y sus cortes) porque es una constante. Pero no puede ser cualquier punto, porque si muevo por ejemplo a B, se mueve, vea. [Arrastra el punto B y el punto Q cambia de posición].



202 E1 [Borra los objetos, dejando solo los puntos A, B, el círculo c y la recta AB]. Necesito a Q para encontrar a H.

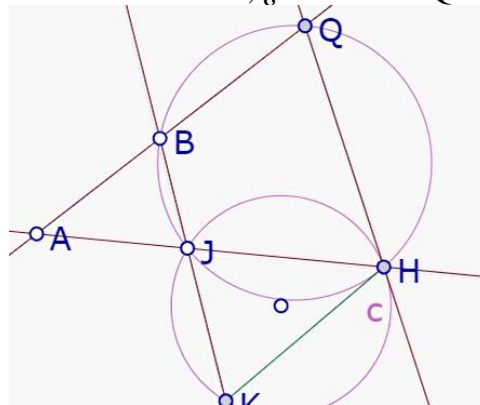


203 P ¿Cómo construimos Q?

204 E2 Q era el punto de intersección entre la recta AB y otra, ¿no?

205 E1 Sí, pero Q no puede ser cualquiera. Voy a volver a hacer la construcción de antes. [Realiza la construcción].

Listo, ahí están nombrados otra vez. Ahora, ¿cómo hallo Q?

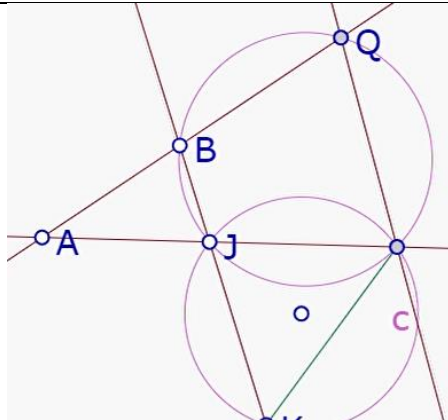


206 P ¿Ese que está ahí no es Q?

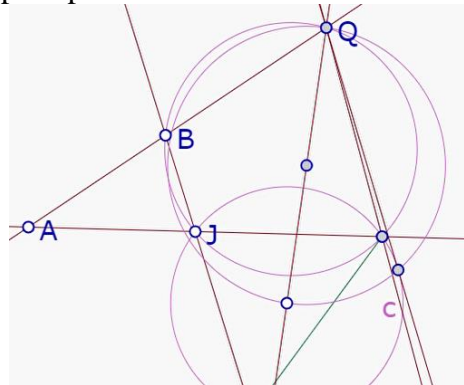
207 E1 ¿Cómo hallo Q para construir H? Porque es que necesito que sea tangente (QH). Tengo A, B, la circunferencia y necesito una tangente que pase por Q, entonces sería suficiente...

208 P Si quiere borre la etiqueta del punto H.

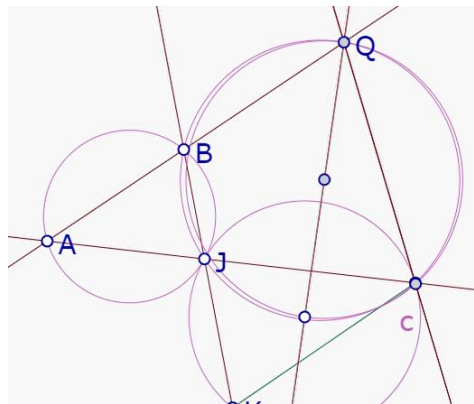
209 E1 [Borra la etiqueta del punto H].



- 210 P Construya una tangente a c que pase por Q.
- 211 E1 [Usa el teorema de Tales para construir una recta tangente a c que pase por Q]. Ahí la construí, pero no pasó por H.

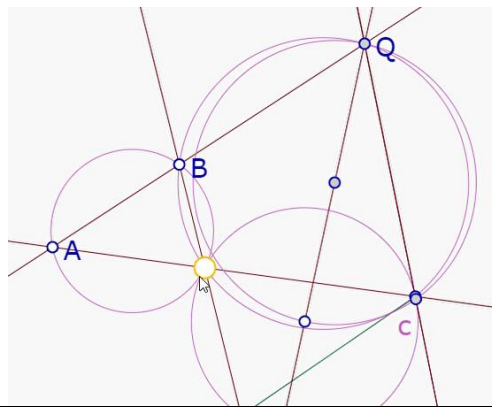


- 212 P Trace el círculo que pasa por A, B y J.
- 213 E1 [Realiza lo pedido].
- 214 P Y arrastre J de modo que se observe la tangencia con el círculo c.
- 215 E1 [Realiza lo pedido].

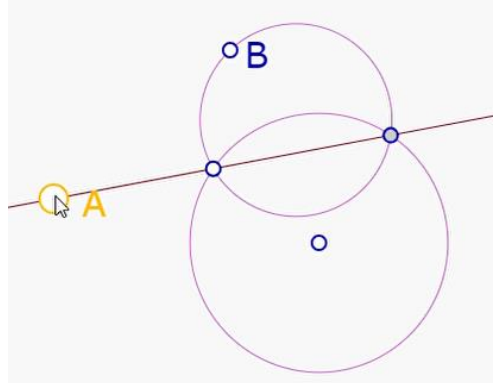


- 216 P ¿Qué logra observar?
- 217 E1 Que los círculos se sobreponen. Ah, listo, le entiendo. Entonces el problema está en construir Q. Y Q se puede construir. Q es un vértice del triángulo que es semejante a ABJ, pero necesito la semejanza.
- 218 P Cuando arrastra J para que los círculos sean tangentes, ¿qué pasa con el punto H?

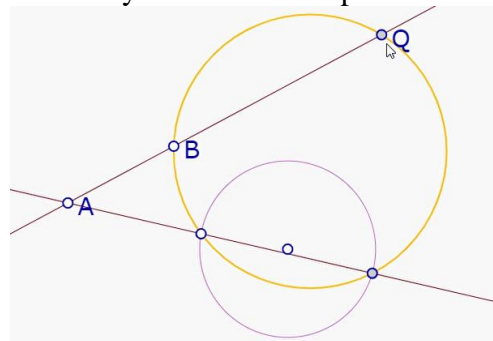
219	E1	H queda en el punto de tangencia.
220	P	¿Podemos construir un punto H que resista la prueba del arrastre?
221	E1	Pues hay que tener esa tangente (QH).
222	P	¿Y cómo construyo esa tangente?
223	E1	Teniendo a Q.
224	P	¿Entonces ya pueden construir la solución del problema?
225	E2	Pues sí, ¿no?
226	E1	H tiene que estar en una tangente, pero no es una cualquiera.
227	E2	Depende de algo.
228	P	¿De qué?
229	E1	De Q, la tangente depende de Q.
230	P	Cuando arrastra J, ¿se mueve Q?
231	E1	No.
232	P	¿Se mueve H?
233	E1	No. Pero la pregunta es dónde está Q. [Arrastra el punto J]. Ah, Q está a una misma potencia que esta de acá (secante AJ). Pero igual esa potencia no la puedo sacar... ah, no. Sí puedo sacar cualquier otra potencia. Tengo A, B y J, ay, pero J no lo tengo porque es el punto que necesito.
234	P	J es un punto que nos permitió...
235	E1	Construir Q. Entonces J lo puedo poner en cualquier lado.
236	P	Borre el nombre de J.
237	E1	[Realiza lo pedido].



238	P	Ese punto que antes era J me permitió encontrar Q. Y con Q puede encontrar...
239	E1	H. O sea que hay que encontrar J primero.
240	P	Teniendo ya el punto H, ¿qué propiedades tiene el punto J?
241	E1	Pues está en el círculo c y está en la misma recta AH.
242	E2	¿Este es J y este H?
243	E1	Se puede trazar cualquiera, no lo llame J. Ya le capté lo que me quiere decir. [Abre una nueva ventana del software en el navegador, construye los puntos A, B y el círculo c]. O sea, si yo hago esto [Traza una secante a c que pasa por A y marca sus intersecciones]. Esta no es mi J ni mi H, son puntos cualesquiera. [Construye el círculo que pasa por B y las dos intersecciones en c].



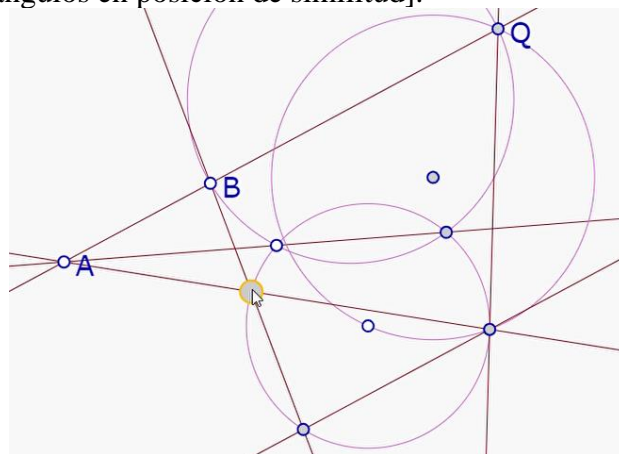
- 244 E1 [Traza la recta AB y marca su intersección con el círculo recién construido]. Este sería mi Q, porque no varía y tiene la misma potencia.



- 245 E1 Ahora necesito una recta tangente a c que pase por Q y construir a la H que tanto hablábamos. Y es que este punto no es J, es un punto cualquiera que me facilita encontrar a Q. Ese era el problema con el nombre, nosotros pensábamos que era el J, pero nada que ver.

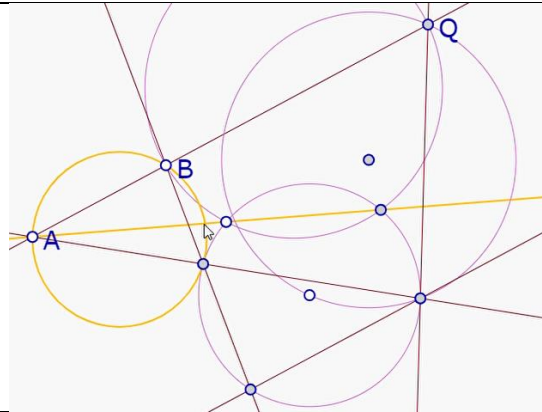
- 246 E2 Ahora falta la tangente, que se hace con punto medio y el círculo. (refiriéndose al teorema de Tales).

- 247 E1 Ajá. [Usa el teorema de Tales para construir el punto H]. Ahora, este es H. Y si tengo H, tengo J. [Traza la recta AH y marca como J su intersección con c]. Y si tengo J ahora puedo tener al par de triángulos en posición de similitud [Construye los triángulos en posición de similitud].

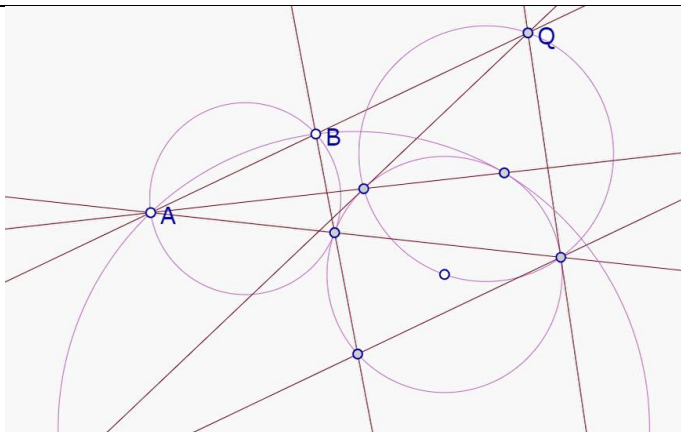


- 248 E2 Y ahora traza los circuncírculos y son tangentes.

- 249 E1 Tienen que ser tangentes. [Construye el circuncírculo faltante].

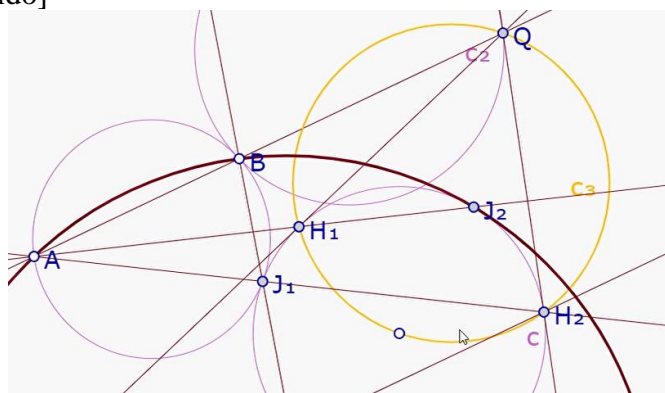


250	E2	[Arrastra la construcción y esta resiste el arrastre]. Sí, ahora ya está.
251	E1	El problema era con esa J, porque yo pensaba que construía a J de una vez, pero no, era un punto cualquiera, cualquiera de todas las jotas posibles. Entonces era construir una cualquiera, para luego obtener la única y la que hacía la tangencia.
252	P	¿Existen más soluciones? Es decir, ¿existe otro círculo tangente a c que pase por A y B?
253	E2	Emm... uno más grande.
254	E1	Claro, uno más grande. Yo me lo imagino por fuera, pero ¿dónde? Tal vez en este punto de intersección.
	P	¿Cuál punto de intersección?
255		
256	E1	Ya tenemos la intersección del lado derecho de la tangente a c que pasa por Q, pero hay otra intersección a la izquierda por la que puedo trazar otra tangente a c que pase por Q. [Marca el otro punto de tangencia a c].
		<p>A geometric construction diagram similar to the one above, but with an additional point P10 marked in red. A yellow line is tangent to a circle passing through P10 and Q. The diagram illustrates the construction of a circle tangent to a line and passing through a point.</p>
257	E2	Claro, ahí están las dos soluciones posibles.
258	E1	Ahora, como este nuevo punto es mi H... [Traza la recta que pasa por A y el punto] ¿ahora me estás diciendo que esta intersección de la recta con el círculo es mi J? [Construye la segunda solución al problema]. Y efectivamente, este círculo ahora queda por fuera.



259 P Nombren los puntos.

260 E1 y E2 [Realizan lo pedido]



261 P ¿Por qué razón el nuevo círculo construido es tangente a  $c$ ? y ¿Por qué el anterior también lo fue?

262 E1 El anterior fue tangente a  $c$  porque garantizamos que el triángulo  $ABJ_1$  es un triángulo en posición de similitud con el triángulo  $KH_2J_1$ .

263 P ¿Por qué el otro círculo también es tangente?

264 E2 Entiendo que es porque también debe haber triángulos adentro... ¿cuáles serían los triángulos semejantes? Podría ser  $ABJ_2$ ... Se supone que deben compartir un vértice.

265 E1 ¿Si serán triángulos en posición de similitud?

266 E2 Pues como el círculo solución está por dentro, entonces los triángulos también deben estar por dentro.

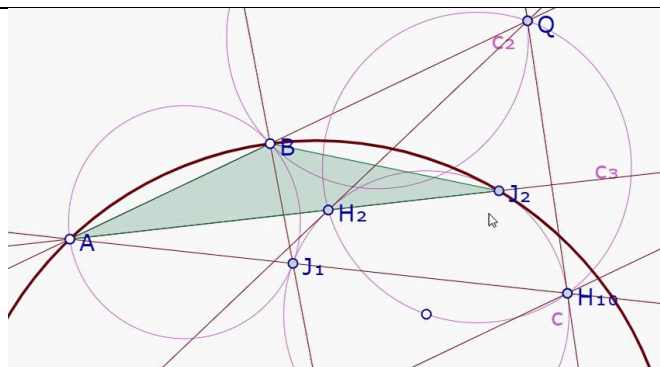
267 E1 Claro, debe haber una paralela a  $AB$  que pase por algún lado. Para la primera solución estaban  $J_1$  y  $H_1$ , entonces para esta segunda deben estar  $J_2$  y  $H_2$ .

268 E2 ¿Cuáles serían los triángulos? Yo sé que uno debe estar dentro del otro.

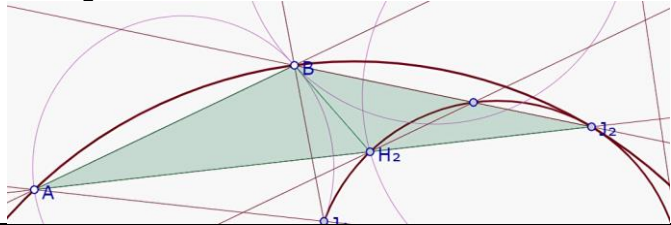
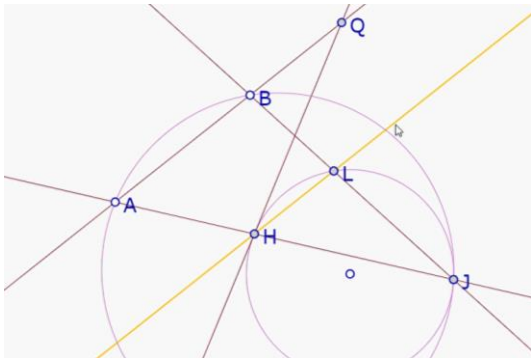
269 E1 Debe haber una recta que pase por  $B$  y  $J_2$  [Construye la recta  $BJ_2$ ].

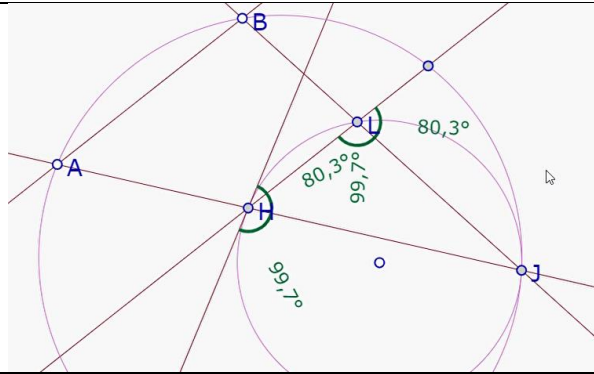
270 E2  $J_2$  es el punto donde el círculo es tangente y también debe ser el vértice que comparten los dos triángulos.

271 E1 [Con la herramienta *Polígono* construye el triángulo  $ABJ_2$ ]. Entonces, si quiero que sean tangentes en  $J_2$ , debe haber una paralela a  $AB$ .



272	E1 y E2	[Exploran en el software construyendo rectas para encontrar el triángulo que debe estar en posición de similitud con $ABJ_2$ ].
273	P	¿Qué debería tener el otro triángulo?
274	E2	Que comparta el vértice $J_2$ y que tenga una paralela a AB... ¡Ah! Una paralela a AB.
275	E1	Que pase por $H_2$ , ¿no? [Construye una recta paralela a AB que pasa por $H_2$ y marca su intersección].
276	P	¿Pueden demostrar que esos triángulos están en posición de similitud?
277	E1	El ángulo lo tenemos.
278	E2	Pero no podemos usar la potencia porque ahora los puntos no son exteriores. Tenemos el de AA, el de LAL...
279	E1	¡Ah, pero hay una paralela! Como AB es paralela a la recta que trazamos, entonces ya lo tenemos.
280	E2	Entonces como son paralelas, sus ángulos correspondientes por el mismo lado son congruentes y ya.
281	E1	Exacto, ya entonces los tres pares de ángulos serían congruentes y por tanto son semejantes los triángulos.
282	E2	El teorema de semejanza es el AA, tienen uno que comparten y el otro puede ser cualquiera de los que se forman entre las paralelas.
283	P	Hay algo que no me cuadra. (Aclaración: los estudiantes construyeron la recta de modo que pase por $H_2$ y que sea paralela a AB, pero no se puede garantizar que esa recta también pase por la intersección del círculo c con la recta $B J_2$ . De modo que se debe demostrar lo anteriormente descrito, demostrar que las rectas sean paralelas o usar otro criterio para probar la semejanza de los triángulos).
284	E1	Sí, es por la paralela a AB que se construyó por $H_2$ . Así estarían en posición de similitud y los círculos son tangentes.
285	P	Les propongo que lo demuestren sin las paralelas, es decir, trazaron las rectas, pero no saben si son paralelas.
286	E2	Entonces toca demostrar que son paralelas. Podemos usar ángulos alternos internos, ángulos complementarios, alternos externos...

287	E1	Para que sean paralelas habría que hallar la semejanza.
288	E2	Veamos... trace el segmento $BH_2$ .
	E1	[Traza el segmento $BH_2$ ].
		
289	E1 y E2	[Miran detenidamente la construcción].
290	E1	Ya sé por qué. Mira que la cuerda de $H_2$ con el punto de intersección de la recta con el círculo me hacen un ángulo inscrito en $J_2$ . Y $J_2$ también es ángulo inscrito de la cuerda AB...
291	E2	Ya, pero y con eso qué.
292	E1	Nada, es curioso jajaja.
293	E1 y E2	[Exploran en el software arrastrando algunos puntos y viendo la construcción].
294		[La pantalla del software se congeló y los estudiantes decidieron razonar sobre la imagen proyectada en la pantalla para no volver a hacer toda la construcción].
296	E2	Ya dejemos así, no movamos el mouse.
297	E1	Demuestre mirando la pantalla.
298	E1 y E2	[Intentan usar el teorema de la potencia con el punto B y las secantes $BJ_2$ y $BH_2$ , pero abandonan la idea].
299	E2	No podemos usar lo de la potencia con B, nos desviamos mucho.
300	E1 y E2	[Siguen mirando la imagen proyectada en la pantalla buscando relaciones entre los ángulos de los triángulos a probar que son semejantes].
301	E2	Es que con ángulos externos estoy viendo que tampoco...
302	E1	[Abre una nueva ventana del software en el navegador y realiza la construcción nuevamente].
		
303	E1	[Mide el ángulo QHJ]. Debería ser igual a HLJ, porque QH es la tangente y HJ la cuerda.
304	E1 y E2	[Miden algunos ángulos para hallar relaciones de congruencia y demostrar la semejanza entre los triángulos AJB y HJL].



305 P Bueno, podemos dejar hasta ahí.