

**ESTUDIO NUMÉRICO DE LA PROPAGACIÓN DE
ONDAS SÍSMICAS $P - SV$ Y SH EN EL MEDIO ELÁSTICO
CONSIDERANDO ANISOTROPIA POLAR**

JAIRO ALBERTO TORRES PEÑA

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
II Semestre del 2007**

**ESTUDIO NUMÉRICO DE LA PROPAGACIÓN DE
ONDAS SÍSMICAS $P - SV$ Y SH EN EL MEDIO ELÁSTICO
CONSIDERANDO ANISOTROPIA POLAR**

Trabajo de Grado como requisito para optar al título de Físico

JAIRO ALBERTO TORRES PEÑA

Director

Dr. CARLOS CESAR PIEDRAHITA ESCOBAR

Codirector

Dr. JOSE DAVID SANABRIA GOMEZ

MSc. HERLING GONZALEZ ALVAREZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

II Semestre del 2007

A quien Daniel nombra el “Anciano de días” en Daniel.7:9

A quienes amo y les tengo un profundo respeto y admiración:

Rosalba, mi madre, la mas valiente y esforzada de las mujeres, quien a sacrificado sus mejores años y su tiempo entregando su amor sin descanso.

Antonio, mi padre, el incansable trabajador, quien por años nos ha dado bienestar y protección,

William, mi hermano, quien siempre a creído en mis capacidades y siempre me enseña madurez.

Adriana, mi hermana, mi parte gemela, a quien desde niños le llamo “la nena”.

Agradecimientos

Agradezco a Herling Gonzalez, por su constante apoyo a lo largo de la investigación, por creer en mis capacidades, por ayudarme a entender geofísica e ir mas allá, además por brindarme su valiosa amistad.

Carlos Piedrahita, por su aporte valioso a mi formación como profesional, por la dirección a lo largo de este trabajo, gracias también por creer en mi. Jose David Sanabria, por darme su apoyo a este trabajo de investigación, además por todo su profesionalismo y lo que aprendí de Relatividad se lo debo a usted. Quiero agradecer a William Agudelo por su liderazgo al frente del grupo de Petrosísmica y a cada uno de los integrantes del Grupo de Geofísica del Instituto Colombiano de Petróleo -Ecopetrol.

A Márcio Martins de la Universidad Federal de Rio de Janeiro, gracias por sus aportes a la culminación de este trabajo (Um grande abraço amigo). También quiero agradecer a cada uno de los profesores de la escuela de Física que aportaron en mi formación profesional, entre ellos: Jose David Sanabria, Arturo Plata, Ilia Mikhailov, Valeri Dougar, David Miranda, Harold Paredes, Maria del Carmen Lasprilla, Jaime Meneses, Carlos Ramirez, Carlos Beltran, Esperanza Aguilar, Yeinzon Rodriguez y Jader Guerrero.

A las secretarias de la escuela de Física: Edilia y Martica no hubiera sido posible matricularme, recoger notas, entregar documentos, etc. A mis amigos de carrera: Francisco Gamboa, Pablo Aguilera, Hamilton Carrillo, Eduardo Galvan, Ricardo Contreras, Andrés Navarro. También quiero mencionar a un gran equipo de muchachos como lo es él ministerio de jóvenes y el de pre juveniles de la Misión Carismática Internacional gracias por su apoyo espiritual, por último mi grandiosa familia y a ti Señor por darme el privilegio de estudiar Física.

Jairo Torres

RESUMEN

TÍTULO : ESTUDIO NUMÉRICO DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS $P - SV$ Y SH EN EL MEDIO ELÁSTICO CONSIDERANDO ANISOTROPÍA POLAR*.

AUTORES : TORRES PEÑA, Jairo Alberto [†]

PALABRAS CLAVES : Diferencias Finitas, Ecuación Elástica, Anisotropía polar.

DESCRIPCIÓN :

Este trabajo presenta un estudio numérico en diferencias finitas para solucionar la ecuación elástica en un espacio plano, haciendo uso de una discretización de las ecuaciones de conservación del momentum junto con las relaciones de esfuerzo para las ondas sísmicas polarizadas horizontalmente SH , las ondas compresionales P y las ondas polarizadas verticalmente SV . Se utilizaron operadores de segundo y cuarto orden para los esquemas en diferencias finitas haciendo uso del concepto de malla intercalada, donde se estudió la consistencia, estabilidad y convergencia del método a través del análisis de Von Neumann. En el modelo computacional se considero fronteras de Dirichlet en los bordes superior e inferior y en los bordes laterales fronteras no reflectivas, mostrando así un medio semi-infinito. El perfil de onda fue simulado por una función de Gauss, definido en un nodo de la región computacional y se le asigno al esfuerzo. Basados en lo anterior se modeló las propagaciones para medios elásticos, isótropos y homogéneos, también para medios semi-homogéneos y finalmente se observó la propagación en un medio con un tipo de anisotropía polar equivalente a un medio vertical transversalmente isótropo. El aporte de esta investigación es el modelamiento del campo de velocidades de Maormousi y la construcción de códigos para el Instituto Colombiano de Petróleo.

*Trabajo de Grado

[†]Instituto Colombiano de Petróleo, Grupo de Geofísica Carlos C. Piedrahita (Director), Herling Gonzalez A (Codirector). Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Jose D. Sanabria (Codirector)

ABSTRACT

TÍTULO : NUMERICAL STUDY OF P-WAVE, SV-WAVE AND SH-WAVE SEISMIC PROPAGATION IN A ELASTIC MEDIUM WITH POLAR ANISOTROPIC *.

AUTHOR : TORRES PEÑA, Jairo Alberto †

KEYS WORDS : Finite-Difference, Elástico Equations, Polar Anisotropic VTI.

DESCRIPTION :

In this work we show a numerical study in finite difference for a solution of the elastic equations in a flat medium, using discretization for the momentum conservation equations and the stress relations for *SH*-wave, *P*-wave and the *SV*-wave. We used operators of second-order in the space and fourth-order in the time for the schemes in finite differences method using the concept of staggered grid propose for Virieux (1986) Furthermore, we studied the consistency, stability and convergence of the method based of the Von Neumann analysis.

In the model computational constructed we consider Dirichlet borders in the edges top and bottom, and borders not reflected in the lateral edges we represent a semi-infinite medium. The source of the wave was simulated by Gauss's function, defined a node of the region computational and assign with him to the stress. Based on the previous we simulate computational the wave propagations in medium elastic, homogeneous, as well for the medium semi-homogeneous and for the medium with polar anisotropic (transversal horizontal isotropic) The significant to contribute of this work is the seismic modeling of the important speed model of Marmousi and the construction of codes for the later implementation in the tools of processing geophysics of Exploration of the Colombian Institute of Petroleum.

*Work of degreed

†Colombian Institute of Petroleum, Group of Geophysics Carlos C. Piedrahita (Director), Herling Gonzalez A (Codirector). Faculty of Science, School of the physics, Jose D. Sanabria (Codirector)

ÍNDICE GENERAL

1. Propagación de Ondas	1
1.1. Introducción a ondas sísmicas	1
1.2. Principios básicos	2
1.3. Notación de Voigt	4
1.4. Medio elástico e isótropo	6
1.5. Propagación de onda SH	10
1.6. Medio elástico con anisotropía polar (VTI)	11
2. Diferencias finitas	16
2.1. Introducción	16
2.1.1. El dominio computacional Ω	17
2.1.2. Aproximación de las derivadas	18
2.1.3. Construcción de un esquema en diferencias finitas	20
2.2. Ecuación de onda $1D$	22
2.2.1. Formulación de malla homogénea	22
2.2.2. Formulación de malla intercalada	29
3. Modelamiento computacional	35
3.1. Condiciones iniciales, de Frontera y fuente sísmica	35
3.2. Modelo para la onda SH	36
3.3. Modelo para la propagación de ondas $P - SV$	39
3.4. Operadores en diferencias finitas	41
3.5. Modelo anisótropo	44

4. Resultados	45
4.1. Propagación de una onda SH	45
4.2. Propagación de ondas $P - SV$	50
4.3. Modelamiento Anisótropo	52
4.4. Modelos de Velocidad Complejos	60
Conclusiones	61
REFERENCIAS	63
Ponencias Realizadas	65

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Frente de ondas en un medio elástico isótropo y anisótropo	2
1.2. Tipos de Ondas P , SH y SV	3
1.3. Ejemplo de un sismograma	3
1.4. Ejemplo de una superficie con alineamiento de fracturas HTI	11
1.5. Medio isótropo transversalmente vertical (VTI) y un medio isótropo transversalmente horizontal (HTI)	12
1.6. Eje de simetría en un medio VTI	12
2.1. Malla computacional	17
2.2. Malla unidimensional homogénea	23
2.3. Diagrama de Dispersión	28
2.4. Onda 1D	29
2.5. Fuente de la perturbación unidimensional	30
2.6. Malla unidimensional intercalada	31
2.7. Fuente sísmica unidimensional	33
2.8. Propagación de una onda unidimensional en diferencias finitas en un tiempo inicial	33
2.9. Propagación de una onda unidimensional en un tiempo donde aparecen errores	34
3.1. Malla intercalada 2D para un medio Isótropo	39
4.1. Fuente sísmica	46
4.2. Propagación de una onda SH para $t = 88 \text{ ms}$	47

4.3. Propagación de una onda SH para $t = 392 \text{ ms}$	47
4.4. Propagación de una onda SH para $t = 600 \text{ ms}$	47
4.5. Propagación de una onda SH para $t = 944 \text{ ms}$	48
4.6. Propagación de una onda SH para $t = 1043 \text{ ms}$	48
4.7. Propagación de una onda SH para $t = 1210 \text{ ms}$	48
4.8. Propagación de una onda SH para $t = 1447 \text{ ms}$	49
4.9. Propagación de una onda SH para $t = 1571 \text{ ms}$	49
4.10. Propagación de ondas $P - SV$ en un medio homogéno	51
4.11. Propagación de ondas $P - SV$ para $v_z(x, t)$ con $t = 175 \text{ ms}$	52
4.12. Propagación de ondas $P - SV$ para $v_z(x, t)$ con $t = 335 \text{ ms}$	53
4.13. Propagación de ondas $P - SV$ para $v_z(x, t)$ con $t = 490 \text{ ms}$	53
4.14. Propagación de ondas $P - SV$ para $v_z(x, t)$ con $t = 618 \text{ ms}$	53
4.15. Propagación de ondas $P - SV$ para $v_z(x, t)$ con $t = 685 \text{ ms}$	54
4.16. Propagación de ondas $P - SV$ para $v_z(x, t)$ con $t = 740 \text{ ms}$	54
4.17. Propagación de ondas $P - SV$ para $v_z(x, t)$ con $t = 798 \text{ ms}$	54
4.18. Propagación de ondas $P - SV$ para $v_z(x, t)$ con $t = 974 \text{ ms}$	55
4.19. Propagación de ondas $P - SV$ para $v_z(x, t)$ con $t = 1038 \text{ ms}$	55
4.20. Propagación de ondas $P - SV$ para $v_z(x, t)$ con $t = 1078 \text{ ms}$	55
4.21. Frentes de Onda en un medio isótropo y un VTI	56
4.22. Comparación de 2-orden y 4-orden.	57
4.23. Propagación en un medio VTI en $t = 51 \text{ ms}$	58
4.24. Propagación en un medio VTI en $t = 134 \text{ ms}$	58
4.25. Propagación en un medio VTI en $t = 194 \text{ ms}$	58
4.26. Propagación en un medio VTI en $t = 334 \text{ ms}$	59
4.27. Propagación en un medio VTI en $t = 419 \text{ ms}$	59
4.28. Modelo de velocidad <i>Marmousi</i>	60
4.29. Imagen sintetica de <i>Marmousi</i>	60

ÍNDICE DE TABLAS

1.1. Notación de Voigt	5
4.1. Datos físicos para el modelo de onda SH	50
4.2. Datos físicos para ondas $P - SV$	51
4.3. Datos físicos para ondas $P - SV$ en un medio VTI	59

INTRODUCCIÓN

En la actualidad el modelamiento numérico de las propagación sísmica a través de medios heterogéneos es muy importante debido a las dificultades que presenta el estudio y conocimiento del subsuelo para la búsqueda de hidrocarburos y minerales. Este modelamiento es usado para simular las diferentes tipos de propagación de las ondas en el subsuelo.

Las técnicas principales para el modelamiento sísmico de la tierra actualmente se pueden clasificar en tres categorías:

Métodos de Rayos:

La Teoría de Rayos original emergió de la Óptica donde se uso para ver como se propaga la luz, el método consiste en substituir las ondas por rayos, que son aproximaciones asintóticas cuya dirección partiendo de la fuente sonora, es perpendicular a los frentes de onda para el caso isótropo. Para el modelamiento sísmico una de sus herramientas matemáticas es la ecuación Eikonal.

Métodos Integrales:

Estos métodos no necesitan discretizar el volumen, son suficientemente precisos para modelos sencillos, mas precisos que los métodos directos. Pero son métodos complicados que requieren mucha capacidad del cálculo. Estos métodos solucionan ecuaciones diferenciales parciales que se han expresado en forma de ecuaciones integrales. La ecuación elástica de forma integral es la utilizada en este método, por que permite usar funciones de Green.

Métodos Directos

Entre los métodos directos se encuentran las *diferencias finitas* (FD), siglas en ingles de finite-difference, el método *pseudospectral* (PS), el método de *elementos finitos* (FE), elementos de frontera y de volumen. Estos métodos requieren discretización de las variables del espacio y el tiempo. Se debe conocer el modelo matemático que gobierna

el proceso; estas son las ecuaciones de movimiento o en nuestro trabajo las ecuaciones elásticas 2D, luego debemos considerar los aspectos principales para el modelamiento: Tiempo de integración, tipos de fuente, aproximación de las derivadas y condiciones de frontera.

La solución numérica de la ecuación de onda requiere que se discretize el tiempo y el espacio cuando se usa diferencias finitas, ahora bien como el interior de la tierra es considerablemente heterogéneo, las interfaces entre capas de material y bloques varían dentro del medio de manera abrupta de tal manera que los parámetros que definen el medio y sobre el cual se propagan la onda sísmica varía fuertemente. Por ello los métodos analíticos no proveen solución a las ecuaciones de movimiento (ecuación elastodinámicas) en modelos complejos ó cercanos a la realidad. La aproximación numérica es lo más indicado para dar solución a dichos modelos. Los métodos numéricos transforman un problema diferenciales dentro de un sistema de ecuaciones algebraicas.

En modelamiento sísmico, ó modelamiento de propagaciones sísmicas, los métodos numéricos permiten incluir heterogeneidades, discontinuidades y gradientes entre capas. Así como también atenuaciones, y topografía (superficie libre) en un rango extenso de frecuencias.

El método de diferencias finitas es también llamado método de nodo-malla. Este método en el domino computacional cubre una malla tanto en el espacio como en el tiempo, donde cada función es representada por su valor en los puntos ó nodos de la malla. La distribución de espacio-tiempo puede ser, en principio, arbitraria no obstante la derivada de una función es aproximada por el esquema de diferencia-finita cual usa valores de la función en un conjunto específico de puntos en la malla. Por lo anterior, los métodos de diferencias-finitas son los más importantes en geofísica y ciertamente los más extendidos. En particular, esto es debido a que formalmente son aplicables a modelos complejos, relativamente precisos y computacionalmente eficientes. Más aun, son relativamente fáciles de codificar porque los operadores de diferencias-finitas son locales, y viables de paralelizar.

Se presenta una formulación del esquema de diferencias finitas del campo velocidad-esfuerzo para una propagación a través de medio semi-homogéneo en 2D . Las ecuaciones de onda son solucionadas por un esquema de diferencias de segundo orden y cuarto orden en una malla intercalada para espacio y tiempo. Esta formulación es llamada también FDTD (Finite Difference Time Domain) muy común en modelamiento de propagaciones

electromagnéticas*.

Cabe mencionar que los trabajos iniciales del estudio de la propagación de onda utilizando esquemas en diferencias finitas fueron en trabajos de Madariaga (1976) el cual utilizó el concepto de malla intercalada basado en la ecuaciones elásticas acopladas de primer orden de la ecuación de movimiento y las leyes de Hooke. En este trabajo aproximó las derivadas a un segundo orden para el tiempo y el espacio.

Luego trabajos de Virieux (1984, 1986) adaptaron este esquema para el modelamiento de la propagación de ondas sísmica SH y $P-SV$ de ondas en medios 2D en coordenadas cartesianas. En 1988 Alan R. Levander realizó el cálculo de cuarto orden para las diferencias finitas de las ecuaciones elásticas 2D en coordenadas cartesianas utilizando lo descrito por Madariaga y Virieux.

En el comienzo de esta investigación se estudió el esquema propuesto por Kelly (1976) donde utilizó un esquema en diferencias finitas de malla homogénea para las ecuaciones en 2D acopladas de segundo orden que estaban expresadas en función de los desplazamientos.

Pero este esquema ocupada gran cantidad de memoria, por lo que calculaba todos los valores en los mismos nodos de la malla; cosa que es evitable si se utiliza el esquema de malla intercalada, este trabajo nos redirigió a los trabajos de Virieux y Levander.

*Dennis M. Sullivan, “*Electromagnetic Simulation Using The FDTD Method*”, IEEE Press Series on RF & Microwave Technology (2000) New York.

PROPAGACIÓN DE ONDAS

Uno de los fenómenos más comunes y fundamentales que se presentan en la naturaleza es el movimiento ondulatorio. Como su nombre lo indica, la ecuación de la onda suministra una descripción de sistemas físicos vibratorios y oscilantes. Cuando se lanza una piedra a un tanque la superficie del agua sufre una perturbación, desplazándose las ondas radialmente hacia afuera, cuando se golpea una campana, las ondas sonoras se propagan desde la fuente de sonido. El estudio de ondas acústicas y elásticas que se propagan en el interior de la tierra (subsuelo) y los múltiples fenómenos que de este tipo de propagación se presentan como la reflexión, transmisión, etc.

Se hace referencia a las leyes y principios que dan origen a la propagación de las ondas sísmicas en el caso elástico homogéneo e isótropo así como el caso de anisotropía simple, la anisotropía polar VTI.

1.1 Introducción a ondas sísmicas

Existen varios tipos de ondas sísmicas que se propagan en el subsuelo estas pueden ser internas y superficiales. Estudiaremos las internas que son :

Las ondas **P** (*primarias*) son ondas longitudinales o compresionales, lo cual significa que el medio es alternadamente comprimido y dilatado en la dirección de la propagación y pueden viajar a través de cualquier tipo de material.

Las ondas **S** son ondas transversales, de corte o de cizalla , el movimiento de las partículas es perpendicular al de la propagación. Las ondas **S** (*secundarias*) pueden viajar únicamente a través de sólidos debido a que los líquidos no sufren esfuerzos de corte; estas ondas **S** se pueden dividir en *SV* (Verticales) y en *SH* (Horizontales). Estas

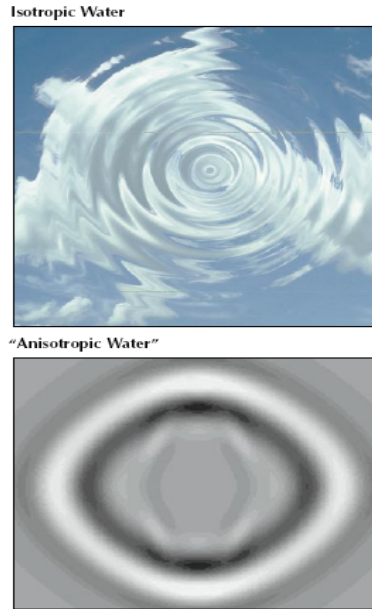


Figura 1.1: Frentes de onda de un medio isótopo y anisótropo

ondas en caso ideales viajan a una velocidad 1,73 veces las ondas \mathbf{S} (*secundarias*)

En las siguientes figuras 1.2 y 1.3 se puede ver un ejemplo los tipos de ondas* y la de un sismograma [†] y como se detectan las ondas internas.

1.2 Principios básicos

La ecuación que representa la *Ley de Newton* para un medio continuo linealmente elástico, tridimensional esta dada por la expresión (1.1)

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad i = \{1, 2, 3\} \quad (1.1)$$

Donde u_i es el desplazamiento de una partícula en un tiempo t y posición x_j , τ_{ij} es

*Imagen tomada de *The promise of elastic anisotropic* Phil Armstrong, Dick Ireson (Gatwick, England), Bill Chele (Houston, Texas), Kevin Dodds (London, England), Cengiz Esmersoy, Douglas Miller (Ridgefield, Connecticut, USA) . Octubre de 1994 Oilfield Review

[†]Imagen tomada de *Introduction to Seismic Waves* B.L.N. Kennett Research School of Earth Sciences The Australian National University Canberra ACT 0200, Australia

- A Las ondas **P** son ondas compresionales que alternan la compresión y la expansión del material que atraviesa
- B Las ondas **S** hacen que el material oscile en ángulo recto con la dirección del movimiento de la onda. Dado que la onda **S** puede desplazarse en cualquier plano, producen una polarización horizontal llamada *SH*.
- C Y la otra componente de la onda **S** produce una polarización vertical *SV*.

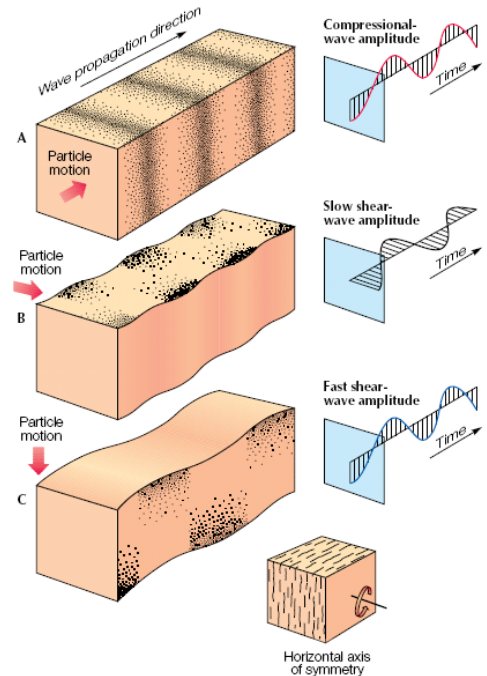


Figura 1.2: Tipos de ondas Sísmicas ^a

^aImagen tomada de *The promise of elastic anisotropic* Phil Armstrong, Dick Ireson (Gatwick, England), Bill Chele (Houston, Texas), Kevin Dodds (London, England), Cengiz Esmersoy, Douglas Miller (Ridgefield, Connecticut, USA) . Octubre de 1994 Oilfield Review

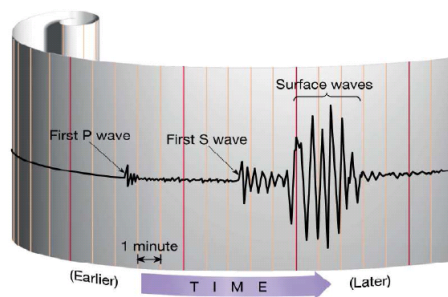


Figura 1.3: Ejemplo de un Sismograma

la componente i, j del esfuerzo y f_i la fuerza volumétrica (en símica es despreciable debido a que no se tiene en cuenta la fuerza de gravitatoria, las grandes capas de la tierra y se puede considerar $f_i = 0$). Se conoce que el desplazamiento $u(x, t)$ y la tensión $\tau(x, t)$ son función de la posición y el tiempo. La expresión del tensor de esfuerzo de deformación ε_{ij} en función de las deformaciones. [12]

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k, l = \{1, 2, 3\} \quad (1.2)$$

A continuación se escribirá la “ecuación constitutiva [‡]”, la cual relaciona el esfuerzo a la tensión para un medio elástico llamada *Ley de Hooke*, donde cada componente de la tensión está representada por un tensor en notación de Einstein.

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j, k, l = \{1, 2, 3\} \quad (1.3)$$

En el tensor C_{ijkl} que describen las propiedades del medio, los dos primeros subíndices están relacionados con la tensión y los dos últimos con la deformación. Ahora si se introduce la expresión (1.3) en (1.1), se encuentra:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} \quad (1.4)$$

Esta expresión es la llamada ecuación de movimiento.

1.3 Notación de Voigt

La conocida ecuación constitutiva (1.3) es proporcional a un tensor de cuarto orden C_{ijkl} y al tensor de esfuerzo de deformación ε_{kl} .

Se conoce que C_{ijkl} describe las propiedades y características del medio al cual se está estudiando, veamos lo siguiente.

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.5)$$

$$\tilde{\tau} = \tilde{C} \tilde{\varepsilon} \quad (1.6)$$

[‡]Slawinski, M.A. *Seismic Waves and Rays in Elastic Media*. Elsevier/Pergamon, Amsterdam(2003)

Tabla 1.1: Notación de Voigt

(i, j)	α
11	1
22	2
33	3
23	4
13	5
12	6

El Tensor de elasticidad de cuarto orden conecta los tensores de segundo orden tanto del esfuerzo y la tensión. También existe un tensor de complacencia elástica S definido por (1.8)

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{S} \tilde{\sigma} \quad (1.7)$$

Se tiene que la tensión y el esfuerzo poseen cierta simetría, entonces C_{ijkl} es de $3 \times 3 \times 3 \times 3$ si se muestra en una matriz de acuerdo al esquema o la llamada *Notación de Voigt* [13]. Cada par de índices independientes al ser mapeado resulta como un solo índice, como esta en el siguiente cuadro.

Entonces el tensor elástico de cuarto orden se puede representar por la llamada matrix de Voigt.

$$\begin{array}{c} \tilde{C} \rightarrow 3 \times 3 \times 3 \times 3 \text{ Tensor } C_{ijkl} \\ \downarrow \\ \tilde{C} \rightarrow 6 \times 6 \text{ Matriz } C_{\alpha\beta} \end{array}$$

Ahora se puede definir la matriz $C_{\alpha\beta}$ del modulo de elasticidad de 6×6 en el papel de 2D. La matriz $C_{\alpha\beta}$ es simétrica, así que la clase mas general de anisotropía (*triclínica*) tiene mas de 21 diferentes elementos, pero en cualquier levantamiento Geofísico de campos no podríamos esperarlos medirlos todos, entonces se pueden discutir aquellas simetrías mas simples, las cuales son isótropas de acuerdo al eje de simetría: la VTI, la HTI; la Ortorrónica, etc.

1.4 Medio elástico e isótropo

Para un sólido elástico homogéneo e isótropo, la relación entre tensión y esfuerzo de deformación.

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (1.8)$$

Donde λ y μ son constantes de *Lame*, ε_{kk} es la deformación en los ejes principales, ε_{ij} es la expresión general para la deformación dada por (1.2)

Se reemplaza la expresión (1.2) en (1.9) y se obtienen las ecuaciones de campo para el medio continuo elástico homogéneo con simetría isótropa.[§]

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (1.9)$$

Utilizando notación de Einstein y utilizando el operador nabla se llega a (1.11) en cada componente i -ésimo, se llega a la expresión de movimiento o *ecuación de movimiento*

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \nabla^2 u_i \quad i = \{1, 2, 3\} \quad (1.10)$$

Ecuación vectorial de movimiento

Si se tiene en cuenta un vector tridimensional \mathbf{u} , la ecuación (1.11) puede escribirse vectorialmente como (1.12)

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.11)$$

Ahora si se utiliza la siguiente identidad vectorial dada en la ecuación (1.13):

$$\nabla^2 \mathbf{a} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (1.12)$$

Y además si se define $\mathbf{a} = \mathbf{u}$ se puede escribir la ecuación (1.12) como (1.14):

[§]Slawinski, M.A. *Seismic Waves and Rays in Elastic Media*. Elsevier/Pergamon, Amsterdam(2003)

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu [\nabla (\nabla \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})] \quad (1.13)$$

Simplificando se llega a la ecuación (1.15)

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})] \quad (1.14)$$

Ahora se puede definir el campo escalar φ y el campo vectorial Ψ de la siguiente manera:

$$\varphi = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \Psi = \nabla \times \mathbf{u}$$

Para obtener la propagación de la deformación en términos de la dilatación y el vector rotación en un medio continuo elástico homogéneo e isótropo.

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla \varphi - \mu [\nabla \times \Psi] \quad (1.15)$$

Velocidad de la onda P

Si se aplica la divergencia a la expresión (??) se obtendrá la ecuación que gobierna únicamente la dilatación.

$$\nabla \cdot \left[\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right] = (\lambda + 2\mu) \nabla \cdot \nabla \varphi - \mu \nabla \cdot [\nabla \times \Psi] \quad (1.16)$$

Debido a que $\nabla \cdot [\nabla \times \Psi] = 0$, la expresión (1.16) queda expresada solo en términos del factor que acompaña a $(\lambda + 2\mu)$, utilizando la definición del operador de Laplace se puede escribir

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \varphi = \nabla^2 \varphi \quad (1.17)$$

Por consiguiente la ecuación (1.16) se convierte en (1.18):

$$\nabla \cdot \left[\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right] = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi \quad (1.18)$$

Para un medio continuo homogéneo la densidad de masa ρ es constante, en vista de la linealidad del operador diferencial, se puede introducir el operador nabla e intercambiarlo para (1.19)

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi \quad (1.19)$$

Despejando el lado izquierdo, resulta:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1.20)$$

Entonces la ecuación (1.19) es la ecuación de onda que gobierna las propagaciones compresionales o longitudinales que en sismica es llamada **Onda P**, donde la función de onda, $\varphi(x, t) = \nabla \cdot \mathbf{u}$ para $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$

$$v \equiv \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1.21)$$

Velocidad de la onda S

Si se aplica el rotacional a la expresión (??)

$$\nabla \times \left[\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right] = (\lambda + \mu) \nabla \times \nabla \varphi - \mu \nabla \times [\nabla \times \Psi] \quad (1.22)$$

Ahora se puede ver que según las identidades de cálculo vectorial, el rotacional del gradiente desaparece y de ahí, el primer término sobre el lado derecho también, se considera de nuevo que la densidad de masa es constante y en vista de la linealidad del operador diferencial, se llega a (1.23)

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\mu \nabla \times [\nabla \times (\Psi)] \quad (1.23)$$

Si se tiene en cuenta la identidad (1.13), y si se define $a = \Psi$ se puede escribir la ecuación (1.23) como (1.24)

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} = -\mu [\nabla(\nabla \cdot \Psi) - \nabla^2(\Psi)] \quad (1.24)$$

Por último si se conoce que el rotacional de la divergencia es igual a cero, se llega a:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (1.25)$$

$$v \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (1.26)$$

Así se puede ver que v . se trata de una onda transversal, que en la sismica esta perturbación es llamada **OndaS**.

En un medio continuo, elástico e isótropo la matriz de Voigt esta expresada como (1.27), donde esta es una representación del tensor de elasticidad y además donde la mayor parte de los coeficientes son nulos debido a la simetría que presenta el medio por lo tanto las ecuaciones en (1.4) se reduce a (1.28) y (1.29), teniendo solo dos constantes independientes λ y μ , que son los parámetros de Lamé o módulos de elasticidad,

$$C_{\text{Iso}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

$$C_{11} = \lambda + 2\mu \quad C_{12} = \lambda \quad C_{44} = \mu$$

Ecuaciones de campo

El conjunto de ecuaciones de conservación del momentum y las de campo de esfuerzo deformación están dadas por (1.28) y (1.29) simplemente se toma los subíndices (i, j) como (x, z)

$$\text{Ecuaciones de Conservación del Momentum} \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{array} \right. \quad (1.28)$$

$$\text{Relaciones de Esfuerzo-Deformación} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Donde (v_x, v_z) son las componentes de la velocidad, $(\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz})$ son los esfuerzos principales y de corte, ρ es la densidad de masa del medio, y los coeficientes elásticos de la representación del tensor de elasticidad C_{ijkl} , ósea la *matriz de Voigt*.

Este conjunto de cinco ecuaciones diferenciales lineales de primer orden acopladas representan la propagación en un espacio plano xz de las ondas elásticas $P - S_v$, en un medio con propiedades dadas por los Coeficientes de Lamé y la densidad de masa. Este será el conjunto a discretizar en diferencias finitas para ser modeladas o simuladas computacionalmente.

1.5 Propagación de onda SH

La propagación de la onda SH bidimensional para un medio heterogéneo, donde la velocidad y la densidad son función de x y z . El desplazamiento u a lo largo del eje y satisface la ecuación de onda escalar.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1.30)$$

Donde ρ es la densidad de masa y μ es el parámetro de corte o de rigidez.

Ecuación de movimiento y la ley de hooke

$$\rho(x, z) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zy}) \quad (1.31)$$

$$\sigma_{xy} = \mu(x, z) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.32a)$$

$$\sigma_{zy} = \mu(x, z) \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.32b)$$

Ecuaciones Elastodinamicas Si derivamos las expresiones (1.32) y con respecto al tiempo, llegamos a este conjunto de tres ecuaciones de primer orden:

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \ell(x, z) \left[\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right] \quad (1.33a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial t} = \mu(x, z) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \quad (1.33b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial t} = \mu(x, z) \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \quad (1.33c)$$

Donde $\ell(x, z)$ es el inverso de la densidad; El sistema (1.33) la velocidad y el esfuerzo son definidos dentro del medio.

1.6 Medio elástico con anisotropía polar (VTI)

La Anisotropía puede ser entendida como la variación de las propiedades físicas respecto de la dirección. Esta se da en todas las escalas desde los núcleos de muestras hasta yacimientos.

Causada por el alineamiento de cristales, planos de sedimentación, o unión de fracturas, ver figura 1.4 a escalas pequeñas respecto de longitudes de onda acústicas (sísmicas ó ultrasónicas) que pasan a través de las rocas ver figura 1.5



Figura 1.4: Ejemplo de una superficie con alineamiento de fracturas

Hay muchos factores que pueden causar anisotropía, como la cantidad de fracturas alineadas (ó inclusiones) por esfuerzos, así como las propiedades mismas del subsuelo [3].

Un material transversalmente “isótropo” esta completamente especificado por cinco “constantes” independientes, donde el tercer-eje (X_3) está dirigido a lo largo del eje de simetría del medio. En exploración sísmica se puede encontrar dos casos típicos de anisotropía polar:

- HTI, Medios Fracturados con orientación vertical.
- VTI, Deposición o sedimentación, el subsuelo esta estratificado.

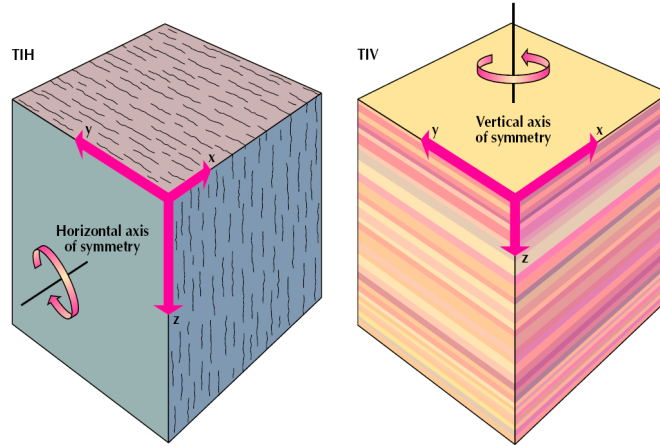


Figura 1.5: Medio Horizontalmente isotrópico o HTI. (izquierda) Medio verticalmente isotrópico VTI (derecha)

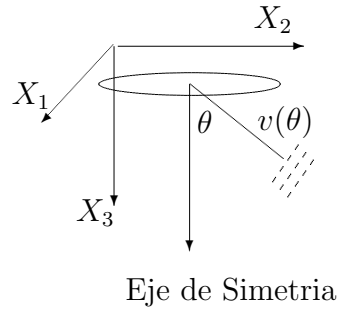


Figura 1.6: Velocidad de Onda plana en función de la dirección, respecto al eje de simetría.

Parámetros de Thomsen

Thomsen [14] define la siguiente convención para este tipo de material, cuando existe anisotropía débil, en términos de velocidades de Ondas-P y Ondas-S, α y β respectivamente que se propagan a lo largo del eje de simetría junto con tres parámetros

adicionales:

$$\alpha = \sqrt{C_{33}/\rho} \quad (1.34)$$

$$\beta = \sqrt{C_{44}/\rho} \quad (1.35)$$

$$\varepsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}} \quad (1.36)$$

$$\gamma = \frac{C_{66} - C_{44}}{2C_{44}} \quad (1.37)$$

$$\delta = \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})} \quad (1.38)$$

Thomsen caracterizo el medio anisótropo de acuerdo a las siguientes propiedades de sus parámetros.

- Sean combinaciones de coeficientes elásticos de la matriz de un medio transversalmente isótropo
- Fueran adimensionales
- Sean cero para el caso isótropo.
- Se hablará de anisotropía débil cuando estos parámetros sean menores que 0,2 y anisotropía fuerte cuando estos parámetros sean valores mayores a 0,2 y menores que 1.

Además la matriz de Voigt para un medio con esta anisotropía queda dado por.

$$C_{\text{Polar}} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

Ecuaciones de campo

Para nuestro medio anisótropo polar resulta el conjunto de ecuaciones de conservación del momentum y las del campo de esfuerzo y deformación respectivamente

$$\text{Ecuaciones de Conservación del Momentum} \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{array} \right. \quad (1.40)$$

$$\text{Relaciones de Esfuerzo-Deformación} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = C_{11} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{13} \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = C_{13} \frac{\partial v_x}{\partial x} + C_{33} \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = C_{44} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (1.41)$$

Este conjunto de cinco ecuaciones diferenciales lineales de primer orden acopladas representan la propagación en un espacio plano xz de las ondas elásticas $P - SV$, en un medio con anisotropía polar VTI y los coeficientes o los valores que acompañan a las derivadas están dadas por las expresiones arriba calculadas. Con estas ecuaciones ya se podrán modelar las ondas para este medio que presenta este tipo de anisotropía.

Para obtener los valores de los coeficientes elásticos se despeja cada uno de ellos en términos de las velocidades del medio, los parámetros de Thomsen dadas por las ecuaciones (1.34) a (1.38). Se debe tener claro que esta propagación es a lo largo del eje de simetría y la velocidad de la onda P es la velocidad a lo largo del eje z , y la velocidad de la onda SH esta en función del coeficiente C_{44}

C_{33} puede se obtenida simplemente al despejarla en la ecuación (1.34) quedando en función de la velocidad de la onda P y la densidad de masa.

$$C_{33} = \alpha^2 \rho \quad (1.42)$$

C_{44} se calcula simplemente al despejarla de la ecuación (1.35) en función de la velocidad de la onda S y la densidad de masa.

$$C_{44} = \beta^2 \rho \quad (1.43)$$

C_{11} puede ser hallada simplemente al despejando la ecuación (1.36) obteniéndose en función de la velocidad de la onda P , la densidad de masa y de ε .

$$C_{11} = \alpha^2 \rho (1 + 2\varepsilon) \quad (1.44)$$

C_{13} puede simplemente despejarla de la ecuación (1.37) en función de las velocidades de la onda P y S , la densidad de masa y de δ .

$$C_{13} = \rho \left\{ \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2) [\alpha^2(2\delta + 1) - \beta^2]} - \beta^2 \right\} \quad (1.45)$$

C_{12} se obtiene a partir de los resultados hallados para C_{11} y C_{66} , recordando que para un medio transversalmente isótropo:

$$C_{12} = C_{11} - 2C_{66} \quad (1.46)$$

Otra forma, es el caso especial donde la anisotropía es causada por una estratificación delgada y referimos al trabajo clásico hecho por Backus (1962) quien mostro una nomenclatura actual a los parámetros de Thomsen.[\[13\]](#).

DIFERENCIAS FINITAS

2.1 Introducción

La elección del método de las diferencias finitas conlleva ventajas e inconvenientes. Una ventaja es debido a su relativa sencillez, su aplicabilidad a medios, computacionalmente eficiente, fácil de implementar y con precisión relativa. Las desventajas están relacionadas con limitaciones implícitas en la aplicación para ciertos medios complejos como medios lateralmente heterogéneos con interfaces irregulares entre capas y bloques; y que la inclusión de las condiciones de contorno de formas complicadas también es un arduo trabajo.

La construcción de un esquema de diferencias finitas para la solución de un problema esta dado por:

- Construir un modelo discreto de diferencias finitas del problema físico.
- Definir las condiciones iniciales y de frontera con un campo de velocidades y una fuente perturbadora.
 - Cubrir la región computacional por medio de una malla.
 - Aproximar las derivadas de la ecuación diferencial a resolver, mediante diferencias finitas
 - Aproximar las condiciones iniciales y de frontera en los puntos de la malla.
 - Construcción de un sistema en diferencias finitas.
- Realizar un análisis del modelo en Diferencias finitas

- El orden de aproximación
- Estudiar la consistencia.
- Estabilidad y convergencia

Es importante ser consciente que los diferentes esquemas de diferencias finitas que se puedan definir difieren entre sí por su precisión, estabilidad y eficiencia computacional. No hay un esquema que sea el mejor, que sea el más preciso, el más estable o el más eficiente para cualquier problema de propagación de ondas sísmicas.

2.1.1. El dominio computacional Ω

Consideremos un dominio Ω . Este dominio computacional que representa la región de mi problema, estará descrito en general por un espacio plano (x, z) y el tiempo. Si Realizamos una cobertura del espacio y el tiempo con una malla de puntos discretos (x_i, z_j) y t^n

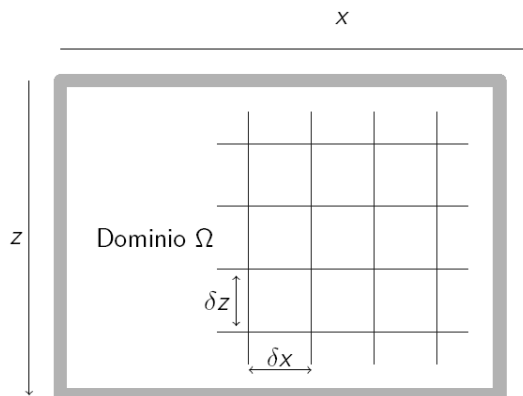


Figura 2.1: Construcción de una región computacional de dominio Ω

La discretización esta dada para el espacio:

$$\left. \begin{array}{l} x_i = i\delta x \\ z_j = j\delta z \end{array} \right\} \text{Donde } \{i, j\} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1)$$

Y para el tiempo como:

$$t^n = n\delta t \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Donde $\delta x, \delta z$ es el espaciado de la malla y δt es el paso del tiempo. El espaciado de la malla se escoge según el más apropiado para la resolución del problema y bajo el criterio de estabilidad. En muchas aplicaciones se escoge $\delta x = \delta z = \delta h$, una celda cuadrada, evitando así una anisotropía artificial numérica inducida por otras formas.

2.1.2. Aproximación de las derivadas

Utilizando diferencias finitas se pueden aproximar las derivadas parciales de primer orden y de segundo orden.

Aproximación de la primera derivada

Dada una función $f(x)$ suficientemente suave, el valor que toma en un punto x_0 se puede conocer el valor que toma en un punto cercano $x_0 + \delta x$ mediante un desarrollo en serie de Taylor:

$$f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + \sum_k \frac{(\delta x)^k}{k!} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x^k} \quad (2.3)$$

Si expandimos la serie de Taylor para $f(x + \delta x)$ y $f(x - \delta x)$ tenemos que

$$f(x + \delta x) = f(x_0) + (\delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{(\delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \dots \quad (2.4)$$

$$f(x - \delta x) = f(x_0) - (\delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{(\delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} - \dots \quad (2.5)$$

Donde todas las derivadas son evaluadas en (x_0) . A partir de la ecuación (2.4) podemos obtener la expresión en diferencias finitas para la primera derivada *hacia adelante*, que resulta de despejar la primera derivada y dejarla a primer orden de precisión $\mathcal{O}(\delta x)$.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - \delta x)}{\delta x} + \mathcal{O}(\delta x) \quad (2.6)$$

De la misma forma obtenemos *backward-difference*, con la ecuación (2.6)

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} + \mathcal{O}(\delta x) \quad (2.7)$$

Ambas expresiones son de primer orden ya que el error de aproximación es proporcional a $\mathcal{O}(\delta x)$.

Si restamos las ecuaciones (2.4) y (2.5), despejando la primera derivada, obtenemos una fórmula de segundo orden para la primera derivada que es conocida como *diferencias centradas*.

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x + \delta x) - f(x - \delta x)}{2\delta x} - \mathcal{O}(\delta x)^2 \quad (2.8)$$

En estas aproximaciones se utiliza valores enteros en la expansión de Taylor para construir una malla simple. Cuando incluimos valores fraccionarios en la serie de Taylor hablaremos de una malla intercalada.

Aproximación de la segunda derivada

La expresión para la segunda derivada en diferencias finitas con un segundo orden de aproximación. resulta de sumar las expresiones (2.4) y (2.5):

$$f(x + \delta x) + f(x - \delta x) = 2f(x) + 2\frac{(\delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{(\delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \dots \quad (2.9)$$

Si tomamos la expresión anterior y dividimos entre $(\delta x)^2$, despejando la segunda derivada llegamos a una aproximación de segundo orden para la derivada.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + \delta x) - 2f(x) + f(x - \delta x)}{(\delta x)^2} - \mathcal{O}(\delta x)^2 \quad (2.10)$$

Ahora si mostramos de la siguiente forma la última expresión de la derecha de la ecuación (2.9)

$$\frac{2(\delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{2(\delta x)^4}{4!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \quad (2.11)$$

Reemplazamos la fórmula (2.10) en la ecuación anterior

$$\frac{(\delta x)^4}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{f(x + 2\delta x) - 4f(x + \delta x) + 6f(x) - 4f(x - \delta x) + f(x - 2\delta x)}{12} \quad (2.12)$$

Reemplazando la expresión obtenida con anterioridad en (2.12) y despejando la segunda derivada obtenemos una aproximación de cuarto orden de diferencias finitas centradas.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-f(x + 2\delta x) + 16f(x + \delta x) - 30f(x) + 16f(x - \delta x) - f(x - 2\delta x)}{12(\delta x)^2} \quad (2.13)$$

2.1.3. Construcción de un esquema en diferencias finitas

Ahora daremos una explicación matemática* del proceso para cualquier sistema de ecuaciones diferenciales. El conjunto de ecuaciones diferenciales se pueden escribir de forma compacta a través de operadores diferenciales \mathcal{L} y \mathcal{D} , para la variable del campo $u(p)$, donde p representa el valor del campo en el espacio discreto a evaluar

Consideraremos en este desarrollo ecuaciones diferenciales no homogéneas con funciones φ y ψ .

Mostraremos el conjunto de ecuaciones diferenciales que se aplican al dominio Ω que representa nuestro problema físico junto con las condiciones iniciales o de frontera.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u(p)\} &= \varphi(p) && \text{siempre que } p \in \Omega \\ \mathcal{D}\{u(p)\} &= \psi(p) && \text{siempre que } p \in \Omega\end{aligned}\tag{2.14}$$

La discretización del dominio implica que el dominio continuo Ω en tiempo y espacio será descrito por una región de puntos los cuales se denotaran por Ω_k^n . Ahora bien, las ecuaciones (2.14) evaluadas en ese conjunto de puntos permiten la aproximación de los operadores lineales de las ecuaciones del sistema \mathcal{L}_k^n y el operador de las condiciones iniciales \mathcal{D}_k^n , esto significa que discretizamos tanto en tiempo como en espacio los operadores diferenciales. La aplicación de estos operadores en un dominio local aproxima la función solución $u(p)$, la cual denotaremos u_k^n en notación discreta.

Una vez realizado estas operaciones nuestras ecuaciones diferenciales quedaran de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k^n\{u_k^n(p)\} &= \varphi(p) && \text{siempre que } p \in \Omega_k^n \\ \mathcal{D}_k^n\{u_k^n(p)\} &= \psi(p) && \text{siempre que } p \in \Omega_k^n\end{aligned}\tag{2.15}$$

Para que este esquema sea valido se necesita que u_k^n sea una aproximación de $u(p)$ en puntos discretizados del dominio Ω_k^n , el cual está unívocamente definida por el esquema de diferencias finitas. Para que esto se cumpla el esquema debe ser *consistente*, *estable* y *convergente*

Propiedades de un esquema en diferencias finitas

* *The Finite-Difference Method for seismologists, An Introduction*. Peter Moczo, Josef Kristiek and Ladsilav Hadala. Comenius University Bratislava 2004 <http://www.spice-rtn.org>

Las propiedades que se van a describir son propiedades rigurosas para cualquier esquema en diferencias finitas.

Consistencia

Un esquema es consistente si la aproximación de las ecuaciones diferenciales esta construida de tal forma que se recuperen las ecuaciones originales, si $\delta t, \delta x, \delta z \rightarrow 0$.

Ahora se define el error local de truncamiento τ y β , para la aproximación de los operadores diferenciales.

$$\begin{aligned}\tau \{f(p)\} &= \mathcal{L} \{f(p)\} - \mathcal{L}_k^n \{f(p)\} && \text{siempre que } p \in \Omega_k^n \\ \beta \{f(p)\} &= \mathcal{D} \{f(p)\} - \mathcal{D}_k^n \{f(p)\} && \text{siempre que } p \in \Omega_k^n\end{aligned}\quad (2.16)$$

Donde $f(p)$ es una función.

Así, la aproximación de las ecuaciones mediante fórmulas de diferencias finitas será consistente si se cumple que:

$$\begin{aligned}\|\tau \{f(p)\}\| &\rightarrow 0, & \|\beta \{f(p)\}\| &\rightarrow 0 \\ \delta x &\rightarrow 0, & \delta t &\rightarrow 0\end{aligned}\quad (2.17)$$

Estabilidad

La estabilidad de un esquema en diferencias finitas habla del crecimiento o no crecimiento de los errores que se propagan en la malla. Si estos convergen a un valor y no crece indefinidamente mientras hay iteraciones.

$$\|u_k^n\| \leq \kappa (\mathcal{L}_k^n \{u_k^n(p)\} + \mathcal{D}_k^n \{u_k^n(p)\}) \quad (2.18)$$

Para cualquier función u_k^n , en el dominio Ω_k^n . Ahora si la ecuación es valida para todo los δx y δt el esquema es incondicionalmente estable. Si solo es valido para cierto valores, es condicionalmente estable. Uno de los análisis de estabilidad muy utilizados es el análisis de Von Neuman, Crank Nicolson para esquemas implícitos, etc.

Teorema 1[†]

Si \mathcal{L}_k^n y \mathcal{D}_k^n son operadores en diferencias finitas para las ecuaciones que gobiernan el proceso físico, las condiciones iniciales y de frontera. Si son estables y consistentes en

[†] *The Finite-Difference Method for seismologists, An Introduccion.* Peter Moczo, Josef Kristiek and Ladsilav Hadala. Comenius University Bratislava 2004 <http://www.spice-rtn.org>

referencia a \mathcal{L} y \mathcal{D} en una familia de $\delta x, \dots, \delta t$. se puede asegurar que u_k^n es una solución que converge a la solución real u .

A continuación se expondrá a modo de ejemplo la construcción del esquema en diferencias finitas con una aproximación de segundo orden en espacio y segundo orden en tiempo de la ecuación de ondas escalar unidimensional haciendo uso primero de una malla homogénea y luego una malla intercalada.

2.2 Ecuación de onda 1D.

La ecuación de onda unidimensional está dada por la ecuación diferencial hiperbólica, donde $u(x, t)$ es el desplazamiento de la partícula en dirección del eje positivo x en un tiempo t y donde c es una constante relacionada con la velocidad de propagación de la onda.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.19)$$

sujeta a las condiciones iniciales y de frontera

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \text{ para } t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \text{ para } 0 \leq x \leq l.$$

2.2.1. Formulación de malla homogénea

Para definir el esquema de diferencias finitas a utilizar, se selecciona una cantidad de intervalos m donde los puntos de la malla $N = m + 1$ estarán dados por $x_i = i\delta x$ donde $\delta x = l/m = l/(N - 1)$, donde L es la longitud del dominio computacional.

Para aproximar las derivadas del espacio y el tiempo utilizamos la aproximación dada por la ecuación (2.10), utilizando una malla homogénea definida en la figura 2.2 .

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \simeq \frac{u(x + \delta x) - 2u(x, t) + u(x - \delta x, t)}{(\delta x)^2} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \simeq \frac{u(x, t + \delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \delta t)}{(\delta t)^2} \quad (2.21)$$

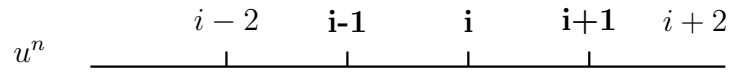


Figura 2.2: Malla unidimensional donde el desplazamiento u se calcula en el espacio y en el tiempo para la formulación homogénea

Si sustituimos las ecuaciones anteriores en la ecuación (2.19) y utilizando esta nueva notación para $u_i^n \simeq u(\delta x_i, \delta t^n)$ obtenemos:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\delta t^2)} = c^2 \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\delta x)^2} \right] \quad (2.22)$$

Si definimos $G = c\delta t/\delta x$, podemos escribir la ecuación en diferencias finitas como:

$$u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} = G^2 u_{i+1}^n - 2G^2 u_i^n + G^2 u_{i-1}^n \quad (2.23)$$

Para el proximo paso de tiempo.

$$u_i^{n+1} = 2(1 - G^2) u_i^n + G^2 (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - u_i^{n-1} \quad (2.24)$$

La ecuación anterior es la ecuación en diferencias finitas explícita para la ecuación de onda diferencial hiperbólica

Análisis de propiedades

Ahora vamos a comprobar la estabilidad y la consistencia del esquema en diferencias finitas. Para la ecuación (2.24) podemos definir nuestro operador \mathcal{L} y el operador aproximado \mathcal{L}_k^n

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.25)$$

$$\mathcal{L}_k^n = \left[\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\delta t^2)} \right] - c^2 \left[\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\delta x)^2} \right] \quad (2.26)$$

La consistencia es calculada si sustituimos u_i^{n+1} , u_{i+1}^n , u_{i-1}^n , u_i^{n-1} , por desarrollos de Taylor para encontrar el error de truncación y así determinar la consistencia, se utiliza u_i^n para realizar el desarrollo.

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u_i^n + (\delta t)(u_t)_i^n + \frac{(\delta t)^2}{2}(u_{tt})_i^n + \frac{(\delta t)^3}{6}(u_{ttt})_i^n + \frac{(\delta t)^4}{24}(u_{tttt})_i^n + \mathcal{O}(\delta t)^5 \\
u_{i+1}^n &= u_i^n + (\delta x)(u_x)_i^n + \frac{(\delta x)^2}{2}(u_{xx})_i^n + \frac{(\delta x)^3}{6}(u_{xxx})_i^n + \frac{(\delta x)^4}{24}(u_{xxxx})_i^n \\
&\quad + \frac{(\delta x)^5}{120}(u_{xxxxx})_i^n + \mathcal{O}((\delta x)^6) \\
u_{i-1}^n &= u_i^n - (\delta x)(u_x)_i^n + \frac{(\delta x)^2}{2}(u_{xx})_i^n - \frac{(\delta x)^3}{6}(u_{xxx})_i^n + \frac{(\delta x)^4}{24}(u_{xxxx})_i^n \\
&\quad - \frac{(\delta x)^5}{120}(u_{xxxxx})_i^n + \mathcal{O}((\delta x)^6) \\
u_i^{n-1} &= u_i^n - (\delta t)(u_t)_i^n + \frac{(\delta t)^2}{2}(u_{tt})_i^n - \frac{(\delta t)^3}{6}(u_{ttt})_i^n + \frac{(\delta t)^4}{24}(u_{tttt})_i^n - \mathcal{O}(\delta t)^5
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Si sustituimos en la ecuación discreta 2.26 se obtiene.

$$\mathcal{L}_k^n = (u_{tt})_i^n + \frac{1}{12}(\delta t)^2(u_{tttt})_i^n - c^2 \left[(u_{xx})_i^n + \frac{1}{12}(\delta x)^2(u_{xxxx})_i^n \right] \tag{2.28}$$

Por lo que el error de truncamiento es

$$\tau_i^n = \mathcal{L} - \mathcal{L}_k^n \approx \frac{1}{12}(\delta x)^2(u_{xxxx})_i^n - \frac{1}{12}(\delta t)^2(u_{tttt})_i^n = \mathcal{O}((\delta x)^2 + (\delta t)^2) \tag{2.29}$$

Evidentemente cuando $\delta x, \delta t \rightarrow 0$ entonces $\tau \rightarrow 0$ por lo tanto podemos asegurar que el esquema es *consistente*.

Estabilidad

La estabilidad para la solución de diferencias finitas de cualquier ecuación de diferencial parcial puede ser estimado haciendo uso de *Análisis espectral de Von Neuman*.

Se define una solución independiente en tiempo y en espacio como: $u_j^n = \xi^n(k)e^{-j(kx_i\delta x)}$

Según este análisis, para el valor $|\xi| \leq 1$ los errores no crecen exponencialmente con el tiempo. Entonces se dice que el esquema es *estable*, pero en cambio si $|\xi| \geq 1$, la función crece exponencialmente y por lo tanto es esquema es *inestable*.

Calculemos el valor de la función u_i^n , para la ecuación discreta de la ecuación de onda unidimensional para cada paso de tiempo $n \pm 1$ y la variación en el espacio de $i \pm 1$.

$$\begin{aligned}
u_i^n &= \xi^n e^{-j(kxi\delta x)} \\
u_i^{n+1} &= \xi^{n+1} e^{-j(kxi\delta x)} \\
u_i^{n-1} &= \xi^{n-1} e^{-j(kxi\delta x)} \\
u_{i+1}^n &= \xi^n e^{-j(kx(i+1)\delta x)} \\
u_{i-1}^n &= \xi^n e^{-j(kx(i-1)\delta x)}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

En las expresiones anteriores $j = \sqrt{-1}$, y k es el numero de onda. Se introducen en (2.22)

$$\begin{aligned}
&\frac{\xi^{n+1}e^{-j(kxi\delta x)} - 2\xi^n e^{-j(kxi\delta x)} + \xi^{n-1}e^{-j(kxi\delta x)}}{(\delta t)^2} \\
&= c^2 \left[\frac{\xi^n e^{-j(kx(i+1)\delta x)} - 2\xi^n e^{-j(kxi\delta x)} + \xi^n e^{-j(kx(i-1)\delta x)}}{(\delta x)^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Se divide entre $\xi^n e^{-j(kxi\delta x)}$ y se obtiene:

$$\xi + \xi^{-1} = \left[\frac{c\delta t}{\delta x} \right]^2 (e^{jk\delta x} + e^{-jk\delta x} - 2) + 2 \tag{2.32}$$

Ahora si utilizamos la definici3n del coseno en t3rminos de funciones exponenciales[‡]

$$\xi + \xi^{-1} = 2 \left(\frac{c\delta t}{\delta x} \right)^2 [\cos(k\delta x) - 1] + 2 \tag{2.33}$$

Reordenando y buscando utilizar la identidad trigonométrica $\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$ llegamos a:

$$\xi + \xi^{-1} = -4 \left(\frac{c\delta t}{\delta x} \right)^2 \left[\frac{1 - \cos(k\delta x)}{2} \right] + 2 \tag{2.34}$$

$$= -4 \left(\frac{c\delta t}{\delta x} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{k\delta x}{2} \right) + 2 \tag{2.35}$$

Ahora se opera la parte izquierda de la ecuaci3n y definimos $G^2 = \left(\frac{c\delta t}{\delta x} \right)^2$ y $q = \sin^2 \left(\frac{k\delta x}{2} \right)$

[‡] $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$

$$\frac{\xi^2 + \xi}{\xi} = -4G^2q + 2 \quad (2.36)$$

Factorizando ξ se llega a

$$\xi (\xi + 4G^2q - 1) = 0 \quad (2.37)$$

$$\xi = 1 - 4G^2q \quad (2.38)$$

Ahora si se tiene que $|\xi| \leq 1$ y que $-1 \leq \xi \leq 1$,

$$1 - 4G^2q \leq 1 - 1 \leq 1 - 4G^2q \quad (2.39)$$

$$1 - 4G^2q - 1 \leq 1 - 1 \quad -1 - 1 \leq 1 - 4G^2q - 1 \quad (2.40)$$

$$-4G^2q \leq 0 \quad -2 \leq -4G^2q \quad (2.41)$$

$$4G^2q \geq 0 \quad 2G^2q \leq 1 \quad (2.42)$$

Obsérvese la ultima expresión de la izquierda, Desde q sea siempre positivo entonces δt , δx y k siempre van a satisfacer la desigualdad. Ahora la expresión mas interesante es la de la derecha, por que encontramos la condición de estabilidad para el esquema descrito, por que vemos que q el máximo valor que puede tomar es 1 ,por lo tanto.

$$G \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.43)$$

$$\frac{c\delta t}{\delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2.44)$$

$$\delta t \leq \frac{\delta x}{c\sqrt{2}} \quad (2.45)$$

La condición de estabilidad significa en este caso, que el paso de tiempo δt , no puede ser mayor que el tiempo necesario por cualquier perturbación al propagarse en una distancia igual a δx . Una vez fijado δx , con la condición de estabilidad se escoge δt para que el esquema sea estable.

Estudio de la dispersión numérica

Cuando utilizamos esquemas que discretiza las ecuaciones es necesario analizar la dispersión. La ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.46)$$

Donde c_0 es la velocidad del sonido, el esquema DF es:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = (c_0)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.47)$$

Si Sustituimos por una forma de onda plana $e^{i(kx+wt)}$ donde $u_i^n \simeq u(x, n\Delta t)$

$$u_i^{n+1} = e^{i(kx+w(n+1)t)} \quad (2.48)$$

$$u_i^n = e^{i(kx+wnt)} \quad (2.49)$$

$$u_i^{n-1} = e^{i(kx+w(n-1)t)} \quad (2.50)$$

dentro de (2.47) tenemos

$$\frac{e^{i(kx+w(n+1)t)} - 2e^{i(kx+wnt)} + e^{i(kx+w(n-1)t)}}{\Delta t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.51)$$

Ahora la parte derecha de la expresión es equivalente a $-c_0^2 k^2 e^{i(kx+wnt)}$ teniendo en cuenta lo anterior;

$$\frac{e^{i(kx+wnt)} e^{iwt} - 2e^{i(kx+wnt)} + e^{i(kx+wnt)} e^{-iwt}}{\Delta t^2} = -c_0^2 k^2 e^{i(kx+wnt)} \quad (2.52)$$

Simplificando:

$$\frac{e^{iwt} + e^{-iwt} - 2}{\Delta t^2} = -c_0^2 k^2 \quad (2.53)$$

Ordenando tendríamos:

$$\frac{2\{\cos(w\Delta t) - 1\}}{\Delta t^2} = -c_0^2 k^2 \quad (2.54)$$

La Relación de dispersión esta dada por

$$w^2 = c^2 k^2 \quad (2.55)$$

La velocidad de fase es $v_{Fase} = \frac{w}{k} = c$ como $k = w/c$ lo introducimos en (9)

$$\frac{2\{\cos(w\Delta t) - 1\}}{\Delta t^2} = -c_0^2 \frac{w^2}{c^2} \quad (2.56)$$

Despejando el cociente c^2/c_0^2

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \frac{-(w\Delta t)^2}{2(\cos w\Delta t - 1)} \quad (2.57)$$

Definiendo $\xi = w\Delta t$, obtenemos

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \frac{-\xi^2}{2(\cos(\xi) - 1)} \quad (2.58)$$

En la siguiente figura (2.3) mostramos un diagrama de dispersión para varios valores de δt .

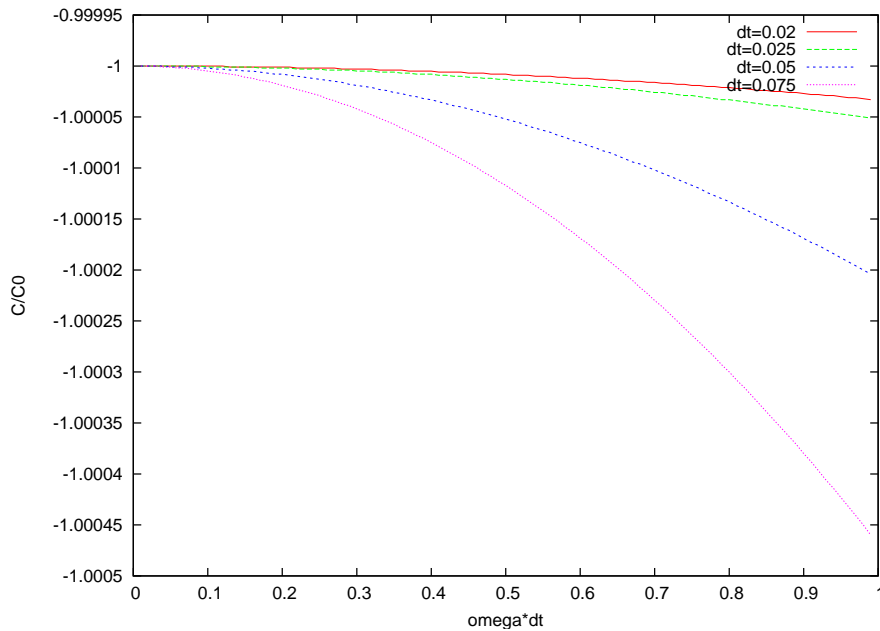


Figura 2.3: Diagrama de dispersión numérica de un esquema de segundo orden para $\delta t_1 = 0,02$, $\delta t_2 = 0,025$, $\delta t_1 = 0,05$ y $\delta t_2 = 0,075$, en nuestro código para la onda unidimensional $\delta t = 0,01$, mostrando así que el esquema es estable al cumplir su condición.

Propagación de una onda unidimensional

Teniendo en cuenta el esquema en diferencias finitas creado en (2.24)

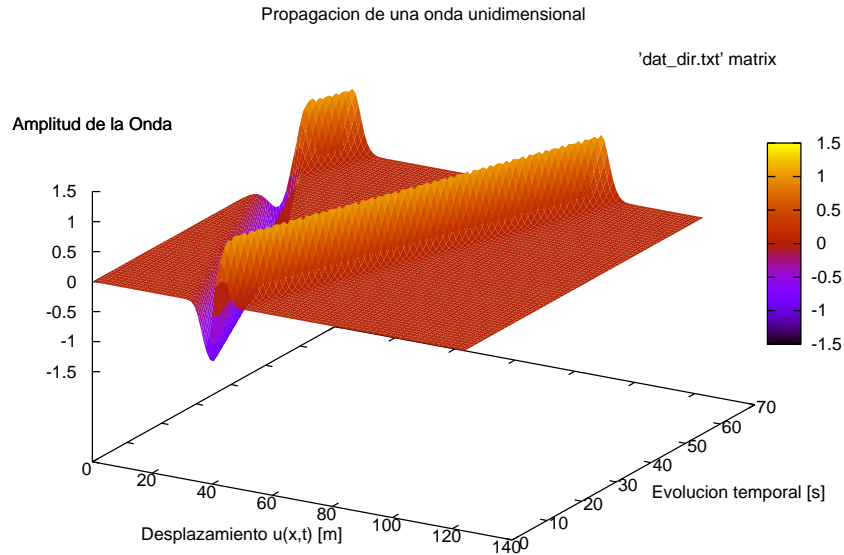


Figura 2.4: Propagación de onda unidimensional utilizando diferencias finitas con condición de dirichlet

La función que simula la perturbación esta dada en la figura 2.4

2.2.2. Formulación de malla intercalada

Haremos uso de la ecuación de onda unidimensional acústica en un medio homogéneo, para ilustrar el esquema numérico de malla Intercalada, también se calcula la condición de estabilidad para este esquema.

Sistema de Primer Orden

La ecuación de onda acústica en 1D para un dominio homogéneo se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= E \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Donde $\tau(x, t)$ es el esfuerzo, $v(x, t)$ es la velocidad, ambos en función de x y del tiempo t ,

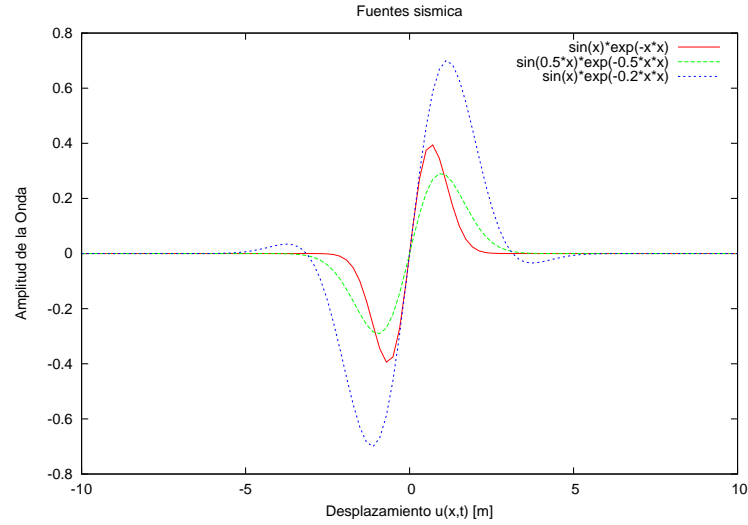


Figura 2.5: Función que inicia la propagación

ρ es la densidad del medio y E es el parámetro que define el tipo de onda ($E = (\lambda + 2\mu)$, para la onda P y $E = \mu$, para la onda S), también llamado *Modulo de Young*

Esquema malla intercalada

Tomando la aproximación de diferencias centradas para tanto derivadas espaciales como temporales tenemos:

$$\frac{v_i^{n+\frac{1}{2}} - v_i^{n-\frac{1}{2}}}{\delta t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\tau_{i+\frac{1}{2}}^n - \tau_{i-\frac{1}{2}}^n}{\delta x} \right) \quad (2.60)$$

$$\frac{\tau_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - \tau_{i+\frac{1}{2}}^n}{\delta t} = E \left(\frac{v_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - v_i^{n+\frac{1}{2}}}{\delta x} \right)$$

Para calcular $\tau_{i+\frac{1}{2}}$, los valores de v en i y en $i+1$ son necesarios. De igual manera para calcular v_{i+1} los valores de τ en $i+\frac{1}{2}$ y $i+\frac{3}{2}$ son necesarios. Podemos re-arreglar el esquema de diferencias finitas de manera iterativa:

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\delta t}{\rho \delta x} \left(\tau_{i+\frac{1}{2}}^n - \tau_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (2.61)$$

$$\tau_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \tau_{i+\frac{1}{2}}^n + \frac{E \delta t}{\delta x} \left(v_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - v_i^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

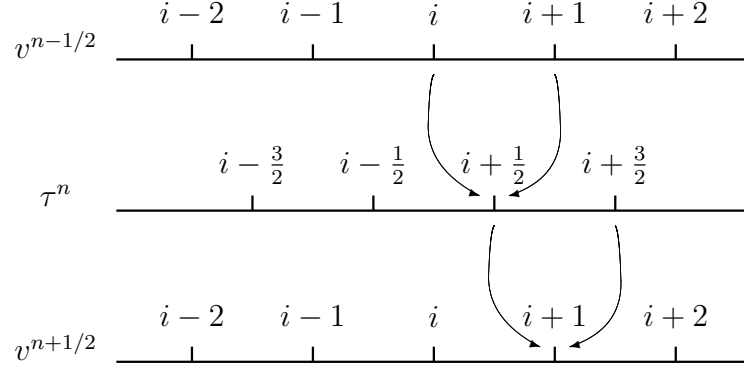


Figura 2.6: Intercalación de los campos v y τ en el espacio y en el tiempo para la formulación de malla intercalada.

Una vez construido el esquema se analizará la estabilidad

Estudio de la estabilidad.

Para el estudio de la estabilidad de este esquema de segundo orden en el tiempo y en el espacio teniendo en cuenta *staggered-grid* asumimos errores de forma armónica para la velocidad y el esfuerzo.

$$\varepsilon(v) = A \exp[I(-wn\delta t + ki\delta h)] \quad (2.62a)$$

$$\varepsilon(\tau) = B \exp[I(-wn\delta t + ki\delta h)] \quad (2.62b)$$

donde $I = \sqrt{-1}$, w es la frecuencia angular y k es el numero de onda k .

Si sustituimos la ecuación (2.62) en el esquema en diferencias finitas de (2.61) tendremos:

$$\sin\left(\frac{w\delta t}{2}\right) A = -\frac{\delta t}{\rho\delta x} \sin\left(\frac{k\delta h}{2}\right) B \quad (2.63a)$$

$$\sin\left(\frac{w\delta t}{2}\right) B = -\frac{E\delta t}{\delta x} \sin\left(\frac{k\delta h}{2}\right) A \quad (2.63b)$$

Resolviendo este sencillo sistema al despejar la constantes B e introduciéndola en la ecuación primera, se obtiene:

$$\sin^2\left(\frac{w\delta t}{2}\right) = \frac{E(\delta t)^2}{\rho(\delta x)^2} \Upsilon \quad (2.64)$$

Donde $\Upsilon = \sin^2 \left(\frac{k\delta h}{2} \right)$ y si se define $c = \sqrt{E/\rho}$.

$$\sin \left(\frac{w\delta t}{2} \right) = c \left(\frac{\delta t}{\delta x} \right) \sqrt{\Upsilon} \quad (2.65)$$

De la ecuación (2.65), se tiene que $\delta t \leq \frac{\delta h \Upsilon^{-1/2}}{c}$, conociendo que Υ puede tomar el máximo valor de 1.

$$\delta t \leq \frac{\delta x}{c} \quad (2.66)$$

Esta es la condición de estabilidad del esquema, si es usada garantiza que los errores no crecen exponencialmente con el tiempo. **Código computacional.**

A continuación se presenta un segmento de código en `C++` del esquema (2.61)

```
for(int i=1; i<Nx; i++){
    V[i] = V[i] + 0.5*( T[i] - T[i-1] )
}
for(int i=0; i<Nx-1; i++){
    T[i] = T[i] + 0.5*( V[i+1] - V[i] )
}
```

La primera ecuación en el código el valor de V en el lado derecho es el valor previo en $n - \frac{1}{2}$, y T del lado izquierdo es el nuevo valor en $n + \frac{1}{2}$. Sin embargo la posición es explícita, la diferencia se deriva en que $i + \frac{1}{2}$ y $i - \frac{1}{2}$ son trasladados a i y $i - 1$ en el orden específico a la posición dentro de un arreglo para un programa. Los valores de v y τ son calculados en ciclos iterativos por separado, esto está relacionado con la intercalación descrita anteriormente. Las variables τ , v tienen el mismo tamaño en memoria, es decir los arreglos tienen mismo tamaño Nx .

Podemos ver los campos $\tau(x, t)$ y $v(x, t)$ en la siguiente figura.

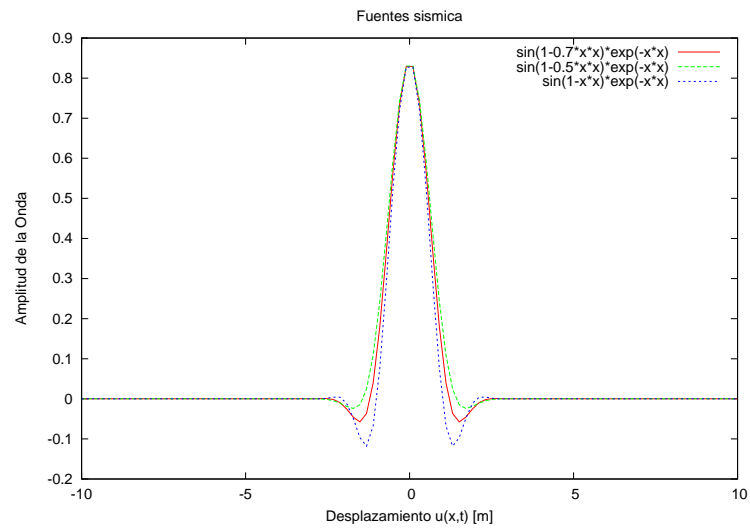
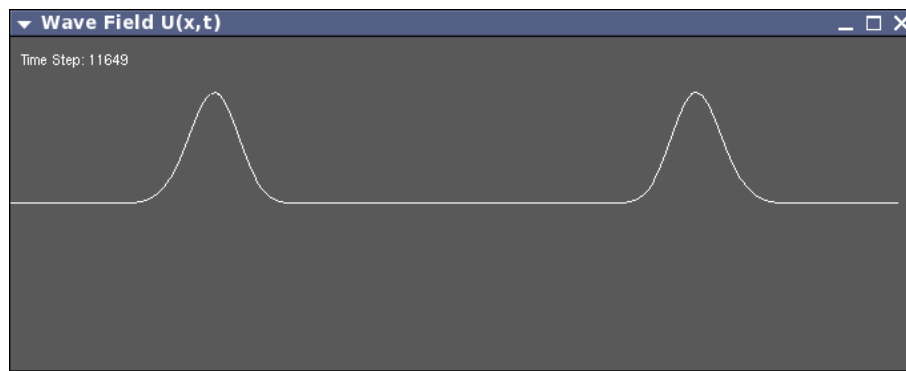


Figura 2.7: Fuente sísmica

Figura 2.8: Perturbación sísmica para la ecuación de onda acoplada 1D, en un medio homogéneo, campo $V(x,t)$

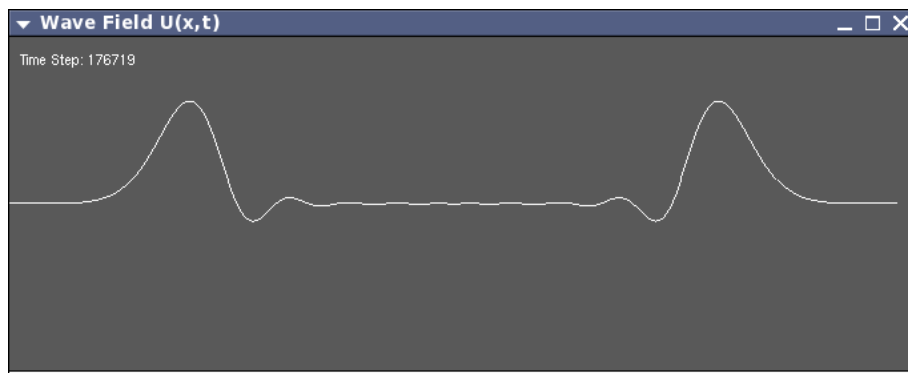


Figura 2.9: Perturbación sísmica para la ecuación de onda acoplada 1D, en un medio homogéneo, campo $V(x, t)$, cuando ya aparecen errores acumulados despues de 17 mil pasos de tiempo

MODELAMIENTO COMPUTACIONAL

La creación de un modelo de propagación necesita lo siguiente, primero un modelo matemático del problema físico, segundo la discretización de ese modelo utilizando un método numérico, tercero, establecer condiciones iniciales y de frontera , luego definir las propiedades físicas , también tener en cuenta un perfil de propagación en el medio.

3.1 Condiciones iniciales, de Frontera y fuente sísmica

Para nuestros modelos de propagación, el medio se supone en equilibrio en el tiempo $t = 0$, los valores iniciales para las velocidades, los esfuerzos principales y de cizalla son nulos.

Condiciones de frontera

Las condiciones de frontera que se pueden utilizar pueden ser, condiciones de superficie libre, fronteras no-reflectivas, absorbentes, etc.

Condiciones de superficie libre

La condición de borde para el esquema explícito de malla intercalada en diferencias finitas de esta aproximación que es estable numéricamente, se puede implementar la condición de *zero-stress* llamada condición de superficie libre (Levander, 1988). dada por:

$$\tau_{zz}(z = 0) = \tau_{xz}(z = 0) = \tau_{zy}(z = 0) = 0 \quad (3.1)$$

Fronteras No-Reflectivas

Estas condiciones en los bordes laterales del modelo de velocidades para simular un

medio *semi-infinito* esta es basado en el trabajo de Cerjan et al (1985).[4] donde las amplitudes para las esfuerzos y las componentes de la velocidad son multiplicadas por un factor G , definido.

$$G = \exp(-(0,02)(25 - i))^2 \quad (3.2)$$

Este factor disipa la onda en los bordes, utilizando para este propósito una región de celdas en la malla computacional.

Fuente sísmica

En este trabajo de investigación tendremos en cuenta la fuente perturbadora.

$$f(r^2) = \sin(1 - \gamma r^2) \exp(-\gamma r^2) \quad (3.3)$$

Definida en un nodo $(i\delta x, j\delta z)$ del dominio computacional, para un $\gamma = 0,07$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

Otro tipo de funciones que simulan la fuente explosiva que se usan:

$$f(r^2) = -\sin(1 - \gamma r^2) \exp(-\gamma r^2) \quad (3.4)$$

$$f(r^2) = \exp(-\gamma r^2) \quad (3.5)$$

3.2 Modelo para la onda SH

Iniciamos para la propagación de la onda S_h , utilizando el esquema de diferencias finitas para el modelo de ecuaciones de velocidad-esfuerzos de la propagación de ondas bidimensionales en un medio isótropo. La ecuación de onda es solucionada con un esquema de segundo orden en el espacio y en el tiempo, con una malla intercalada. La simulación numérica de la propagación elástica da origen a una extensa variedad de técnicas de modelamiento con mayor o menor grado de precisión. Esta técnica, es comúnmente usada en la descripción de propagaciones sísmicas.

Esquema en diferencias finitas

Simplificando el problema, suponemos que el modelo de DFTD es un medio homogéneo y no posee ninguna variación de μ y ρ con la posición en la malla. Entonces la expresión

en diferencias-finitas para las ecuaciones de velocidad-esfuerzo (1.33), considerando celdas cuadradas de tamaño $\delta h = \delta x = \delta z$, denotando a t como $(n\delta t)$, a $(x, z) = (i\delta x, j\delta z)$, se obtiene el siguiente esquema.

$$\frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - v_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\delta t} = \frac{1}{\rho(i, j)} \left[\frac{\tau_{xy}^n(i + \frac{1}{2}, j) - \tau_{xy}^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\delta x} + \frac{\tau_{zy}^n(i, j + \frac{1}{2}) - \tau_{zy}^n(i, j - \frac{1}{2})}{\delta z} \right] \quad (3.6a)$$

$$\frac{\tau_{xy}^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) - \tau_{xy}^n(i + \frac{1}{2}, j)}{\delta t} = \mu(i + \frac{1}{2}, j) \left[\frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}(i + 1, j) - v_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j)}{\delta x} \right] \quad (3.6b)$$

$$\frac{\tau_{zy}^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) - \tau_{zy}^n(i, j + \frac{1}{2})}{\delta t} = \mu(i, j + \frac{1}{2}) \left[\frac{v_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + 1) - v_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j)}{\delta z} \right] \quad (3.6c)$$

Estudio de Estabilidad

Se conoce con anterioridad que el esquema en diferencias finitas centradas utilizando malla intercalada es consistente, procedemos a analizar la condición de estabilidad para el medio homogéneo del esquema, asumiendo errores de forma armónica para la velocidad y los esfuerzos.

$$\varepsilon(v_x) = A \exp[I(-wn\delta t + k_x i \delta h + k_z j \delta h)] \quad (3.7a)$$

$$\varepsilon(\tau_{xy}) = B \exp[I(-wn\delta t + k_x i \delta h + k_z j \delta h)] \quad (3.7b)$$

$$\varepsilon(\tau_{zy}) = C \exp[I(-wn\delta t + k_x i \delta h + k_z j \delta h)] \quad (3.7c)$$

Donde $I = \sqrt{-1}$, w es la frecuencia angular, k_x y k_z son las componentes del número de onda k

Si sustituimos la ecuación (3.7) en el esquema en diferencias finitas de (3.6) tendremos:

$$\sin\left(\frac{w\delta t}{2}\right) A = \frac{\delta t}{\rho\delta x} \left[\sin\left(\frac{k_z\delta h}{2}\right) C - \sin\left(\frac{k_x\delta h}{2}\right) B \right] \quad (3.8a)$$

$$\sin\left(\frac{w\delta t}{2}\right) B = -\frac{\mu\delta t}{\delta x} \sin\left(\frac{k_x\delta h}{2}\right) A \quad (3.8b)$$

$$\sin\left(\frac{w\delta t}{2}\right) C = -\frac{\mu\delta t}{\delta x} \sin\left(\frac{k_z\delta h}{2}\right) A \quad (3.8c)$$

Resolviendo este sencillo sistema al despejar las constantes B y C e introduciéndolas en la primera ecuación, se obtiene:

$$\sin^2\left(\frac{w\delta t}{2}\right) = \frac{\mu(\delta t)^2}{\rho(\delta x)^2}\Upsilon \quad (3.9)$$

Donde $\Upsilon = \sin^2\left(\frac{k_x\delta h}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{k_z\delta h}{2}\right)$ y de acuerdo a (1.26) la definición de la velocidad de la onda S , llamándola β , se encuentra:

$$\sin\left(\frac{w\delta t}{2}\right) = \beta\left(\frac{\delta t}{\delta x}\right)\sqrt{\Upsilon} \quad (3.10)$$

De la ecuación (3.15), se tiene que $\delta t \leq \frac{\delta h\Upsilon^{-1/2}}{\beta}$. Y si Υ puede tomar el máximo valor de 2, la condición de estabilidad para la onda S_h , esta dada por la expresión:

$$\delta t \leq \frac{\delta x}{\sqrt{2}\beta} \quad (3.11)$$

Código computacional

La sección del código que calcula el esquema en diferencias finitas de (3.12) esta dado a continuación:

```

for(int i=1;i<Nz;i++){
    for(int j=1;j<Nx;j++){
        U(i,j) = U(i,j) + r(i,j)*( Txy(i,j) - Txy(i-1,j)
                                   + Tzy(i,j) - Tzy(i,j-1) );
    }
}
for(int i=0;i<Nz-1;i++){
    for(int j=1;j<Nx;j++){
        Txy(i,j) = Txy(i,j) + m(i,j)*( U(i+1,j) - U(i,j) );
    }
}
for(int i=1;i<Nz;i++){
    for(int j=0;j<Nx-1;j++){
        Tzy(i,j) = Tzy(i,j) + m(i,j)*( U(i,j+1) - U(i,j) );
    }
}

```

3.3 Modelo para la propagación de ondas $P - SV$.

La aplicación de la técnica de diferencias finitas para modelar en el dominio temporal la propagación de ondas sísmicas, sigue el mismo esquema de malla intercalada de la ecuación de onda S_h , ahora para las expresiones elásticas (1.28) y (1.29) Utilizando una función suave que representa cada velocidad o esfuerzo se expande en series de Taylor con valores fraccionarios luego se trunca para obtener un segundo o cuarto orden de aproximación.

Esquema en diferencias finitas

Aquí los subíndices i, j van a representar respectivamente los ejes x, z , discretizando nuestra malla en el espacio como $(x, z) = (i\Delta x, j\Delta z,)$ y en el tiempo como $t = n\Delta$. teniendo en cuenta que Δx es el tamaño de la celda y Δt es el paso de tiempo. t .

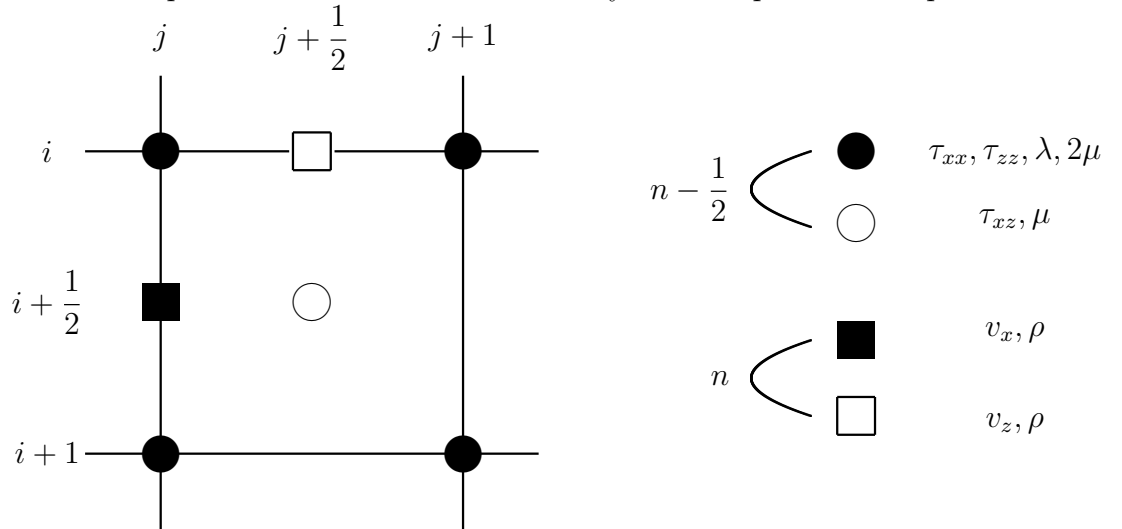


Figura 3.1: Intercalado de campos $v_x, z_z, \tau_{xz}, \tau_{xx}$ y τ_{zz} en el espacio y en el tiempo para la formulación de malla intercalada, en el esquema de diferencias finitas.

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xx}^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - \tau_{xx}^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta t} &= [\lambda(i, j) + 2\mu(i, j)] \left[\frac{v_x^n(i + \frac{1}{2}, j) - v_x^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \right] + \\ &\lambda(i, j) \left[\frac{v_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - v_z^n(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{zz}^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - \tau_{zz}^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta t} &= [\lambda(i, j) + 2\mu(i, j)] \left[\frac{v_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - v_z^n(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right] + \\ &\lambda(i, j) \left[\frac{v_x^n(i + \frac{1}{2}, j) - v_x^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xz}^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - \tau_{xz}^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})}{\Delta t} &= \mu(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \left[\frac{v_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1) - v_x^n(i + \frac{1}{2}, j)}{\Delta z} + \right. \\ &\left. \frac{v_z^n(i + 1, j + \frac{1}{2}) - v_z^n(i, j + \frac{1}{2})}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) - v_x^n(i + \frac{1}{2}, j)}{\Delta t} &= \frac{1}{\rho(i + \frac{1}{2}, j)} \left[\frac{\tau_{xx}^{n+\frac{1}{2}}(i + 1, j) - \tau_{xx}^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta x} + \right. \\ &\left. \frac{\tau_{xz}^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - \tau_{xz}^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_z^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) - v_z^n(i, j + \frac{1}{2})}{\Delta t} &= \frac{1}{\rho(i, j + \frac{1}{2})} \left[\frac{\tau_{xz}^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - \tau_{xz}^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})}{\Delta x} + \right. \\ &\left. \frac{\tau_{zz}^{n+\frac{1}{2}}(i, j + 1) - \tau_{zz}^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta z} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Estudio de Estabilidad

Basado en el mismo análisis de estabilidad para la propagación S_h , tenemos que para un esquema de segundo orden, la condición de estabilidad numérica esta dada por

$$\delta t \leq \frac{\delta x}{\alpha\sqrt{2}}$$

donde α es la velocidad máxima de la onda en el medio.

Código computacional

Las ecuaciones (3.1) hasta (3.4) estan ahora descritas en lenguaje de programación C_{++} . Gracias al esquema de (3.12) hasta (3.16)

```
for(int i=1;i<Nx;i++){
  for(int j=1;j<Nz;j++){
    la = l(i,j);
    l2m = la+2*m(i,j);
    VX = Vx(i,j) - Vx(i-1,j);
    VZ = Vz(i,j) - Vz(i,j-1);
    Txx(i,j) += l2m*VX + la*VZ;
    Tzz(i,j) += l2m*VZ + la*VX;
    Tzx(i-1,j-1)+= m(i-1,j-1)*( Vx(i-1,j)-Vx(i-1,j-1)+Vz(i,j-1)-Vz(i-1,j-1));
  }
} for(int i=1;i<Nx;i++){
  for(int j=1;j<Nz;j++){
    Vx(i-1,j)+= b(i-1,j)*(Txx(i,j)-Txx(i-1,j)+ Tzx(i-1,j)-Tzx(i-1,j-1));
    Vz(i,j-1)+= b(i,j-1)*(Tzx(i,j-1)-Tzx(i-1,j-1)+Tzz(i,j)-Tzz(i,j-1));
  }
}
```

3.4 Operadores en diferencias finitas

Ahora se dará un tratamiento haciendo uso de operadores diferenciales y por lo tanto la implementación en diferencias finitas.

Definición de los operadores

Para las derivadas temporales y espaciales en las ecuaciones de campo usamos las expresiones de la forma

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} \simeq D_t[v_x]_{i,j,k}^n \quad \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \simeq D_x[\tau_{xx}]_{i,j,k}^n$$

Donde D_t representa la discretización para el operador diferencial $\frac{\partial}{\partial t}$, actuando en la variable v_x , D_x representa la discretización para el operador diferencial $\frac{\partial}{\partial x}$, actuando en la variable τ_{xx} y ambas son evaluadas en el punto $x = i\Delta x$, $z = k\Delta z$ con una celda uniforme.

D_t : Derivada parcial de primer orden con respecto del tiempo en diferencias finitas centradas de **segundo orden** $O(\Delta h^2)$ (Virieux, 1986).

Componentes de la velocidad

$$D_t[v_x]_{i,j}^n \simeq \frac{[v_x]_{i+1/2,j}^{n+1} - [v_x]_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} \quad (3.17)$$

$$D_t[v_z]_{i,j}^n \simeq \frac{[v_z]_{i,j+1/2}^{n+1} - [v_z]_{i,j+1/2}^n}{\Delta t}$$

Componentes de las tensiones:

$$D_t[\tau_{xx}]_{i,j}^n \simeq \frac{[\tau_{xx}]_{i,j}^{n+1/2} - [\tau_{xx}]_{i,j}^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (3.18)$$

D_x, D_y, D_z : Derivada parcial de primer orden con respecto de la posición x, y, z en diferencias finitas centradas de **cuarto orden** $O(\Delta h^4)$ (Levander, 1986). Para una de las componentes de los esfuerzos principales y la componente de la velocidad.

$$D_x[\tau_{xx}]_{i,j}^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{9}{8} ([\tau_{xx}]_{i+1/2,j}^n - [\tau_{xx}]_{i-1/2,j}^n) - \frac{1}{24} ([\tau_{xx}]_{i+3/2,j}^n - [\tau_{xx}]_{i-3/2,j}^n) \right] \quad (3.19)$$

$$D_z[v_x]_{i,j}^n \simeq \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{9}{8} ([v_x]_{i,j+1/2}^n - [v_x]_{i,j-1/2}^n) - \frac{1}{24} ([v_x]_{i,j+3/2}^n - [v_x]_{i,j-3/2}^n) \right] \quad (3.20)$$

Esquema de cuarto orden para el medio elástico

Usando los operadores de cuarto orden se puede construir el esquema en diferencias finitas, resultando el siguiente conjunto de ecuaciones discretas:

$$\begin{aligned}
[v_x]_{i+1/2,j}^{n+1} &= [v_x]_{i+1/2,j}^n + b_{i,j} \delta t \left(D_x [\tau_{xx}]_{i+1/2,j}^{n+1/2} + D_z [\tau_{xz}]_{i+1/2,j}^{n+1/2} \right) \\
[v_z]_{i,j+1/2}^{n+1} &= [v_z]_{i,j+1/2}^n + b_{i,j} \delta t \left(D_x [\tau_{xz}]_{i,j+1/2}^{n+1/2} + D_z [\tau_{zz}]_{i,j+1/2}^{n+1/2} \right) \\
[\tau_{xx}]_{i,j}^{n+1/2} &= [\tau_{xx}]_{i,j}^{n-1/2} + \delta t \left((\lambda + 2\mu)_{i,j} D_x [v_x]_{i,j}^n + (\mu)_{i,j} D_z [v_z]_{i,j}^n \right) \\
[\tau_{zz}]_{i,j}^{n+1/2} &= [\tau_{zz}]_{i,j}^{n-1/2} + \delta t \left((\mu)_{i,j} D_x [v_x]_{i,j}^n + (\lambda + 2\mu)_{i,j} D_z [v_z]_{i,j}^n \right) \\
[\tau_{xz}]_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= [\tau_{xz}]_{i+1/2,j+1/2}^{n-1/2} + \delta t (\mu)_{i+1/2,j+1/2} \left(D_z [v_x]_{i,j}^n + D_x [v_z]_{i+1/2,j+1/2}^n \right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

En este esquema $b_{i,j} = 1/\rho_{i,j}$, el inverso de la densidad.

Estabilidad

La estabilidad para las ecuaciones en diferencias finitas de un cuarto orden de aproximación es:

$$\delta t \leq 0,606 \frac{\delta x}{\alpha}$$

Donde α es la velocidad de la onda P , teniendo en cuenta el mismo análisis que se realizó para la onda SH

Código Computacional

Sección del código para el esquema dado 3.12 hasta 3.16 para el medio elástico utilizando un cuarto orden de aproximación

```

for(int i=2;i<Nx-1;i++){
    for(int j=2;j<Nz-1;j++){
        la = l(i,j);
        l2m = la+2*m(i,j);
        VX = 1.125*(Vx(i,j) - Vx(i-1,j)) - (Vx(i+1,j) - Vx(i-2,j))/24. ;
        VZ = 1.125*(Vz(i,j) - Vz(i,j-1)) - (Vz(i,j+1) - Vz(i,j-2))/24. ;
        Txx(i,j) += l2m*VX + la*VZ;
        Tzz(i,j) += la*VX + l2m*VZ ;
        Txz(i-1,j-1) += m(i-1,j-1)*( 1.125*( Vx(i-1,j) - Vx(i-1,j-1) )
            - ( Vx(i-1,j+1) - Vx(i-1,j-2) )/24.
            + 1.125*( Vz(i,j-1) - Vz(i-1,j-1) )
            - ( Vz(i+1,j-1) - Vz(i-2,j-1) )/24. );
    }
}

```

```

}
for(int i=2;i<Nx-1;i++){
    for(int j=2;j<Nz-1;j++){

Vx(i-1,j) += b(i-1,j)*( 1.125*(Txx(i,j) - Txx(i-1,j)) - (Txx(i+1,j)
- Txx(i-2,j))/24.
    + 1.125*(Txx(i-1,j) - Txx(i-1,j-1)) - (Txx(i-1,j-1) - Txx(i-1,j-2))/24.);

Vz(i,j-1) += b(i,j-1)*( 1.125*(Tzz(i,j-1) - Tzz(i-1,j-1)) -
(Tzz(i+1,j-1) - Tzz(i-2,j-1))/24.
    + 1.125*(Tzz(i,j) - Tzz(i,j-1)) - (Tzz(i,j-1) - Tzz(i,j-2))/24.);
    }
}

```

3.5 Modelo anisótropo

Basado en el conjunto de ecuaciones para el medio con anisotropía polar expresadas en (1.45) y (1.46), se utilizó un esquema de cuarto orden teniendo en cuenta los operadores definidos en (3.17) hasta (3.20) y se obtuvo el siguiente esquema.

$$\begin{aligned}
[v_x]_{i+1/2,j}^{n+1} &= [v_x]_{i+1/2,j}^n + b_{i,j} \delta t \left(D_x [\tau_{xx}]_{i+1/2,j}^{n+1/2} + D_z [\tau_{xz}]_{i+1/2,j}^{n+1/2} \right) \\
[v_z]_{i,j+1/2}^{n+1} &= [v_z]_{i,j+1/2}^n + b_{i,j} \delta t \left(D_x [\tau_{xz}]_{i,j+1/2}^{n+1/2} + D_z [\tau_{zz}]_{i,j+1/2}^{n+1/2} \right) \\
[\tau_{xx}]_{i,j}^{n+1/2} &= [\tau_{xx}]_{i,j}^{n-1/2} + \delta t \left((C_{11})_{i,j} D_x [v_x]_{i,j}^n + (C_{13})_{i,j} D_z [v_z]_{i,j}^n \right) \\
[\tau_{zz}]_{i,j}^{n+1/2} &= [\tau_{zz}]_{i,j}^{n-1/2} + \delta t \left((C_{13})_{i,j} D_x [v_x]_{i,j}^n + (C_{33})_{i,j} D_z [v_z]_{i,j}^n \right) \\
[\tau_{xz}]_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} &= [\tau_{xz}]_{i+1/2,j+1/2}^{n-1/2} + \delta t (C_{44})_{i+1/2,j+1/2} \left(D_z [v_x]_{i,j}^n + D_x [v_z]_{i+1/2,j+1/2}^n \right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

En este esquema $b_{i,j} = 1/\rho_{i,j}$, el inverso de la densidad.

RESULTADOS

Se muestra a continuación los resultados que se obtuvieron teniendo en cuenta los códigos computacionales construidos. Se observaran las capturas en tiempo de la velocidad de una onda horizontalmente polarizada para un medio elástico semi-homogéneo utilizando una aproximación de segundo orden en el esquema en diferencias finitas. Luego se observara el caso para la onda compresional y la onda polarizada verticalmente en un modelo elástico e isótropo semi-homogéneo con un esquema de segundo orden y para el tercer caso la anisotropía polar pero utilizando una aproximación de cuarto orden en el esquema numérico.

En estos resultados se mostrará como los parámetros elásticos del medio y la simetría utilizada generan un tipo de propagación y por lo tanto un perfil del frente de onda. También veremos unos casos de anisotropía polar debil y un comparación de los esquemas de diferencias finitas para las ondas del medio elástico e isótropo.

Finalmente se muestra el comportamiento de un perfil de onda para medios complejos como el conocido campo de velocidades de Marmousi.

4.1 Propagación de una onda SH

Teniendo en cuenta la ecuación diferencial de la propagación de una onda horizontalmente polarizada expresada en (1.33), su esquema numérico de segundo orden dado por las expresiones (3.12), mencionando que modelamos un espacio plano xz , el movimiento de las particulas es en la dirección del eje y perpendicular a la dirección de propagación de la onda. El eje de propagación es el eje z y el plano de simetría del medio es el plano xy y considerando lo siguiente:

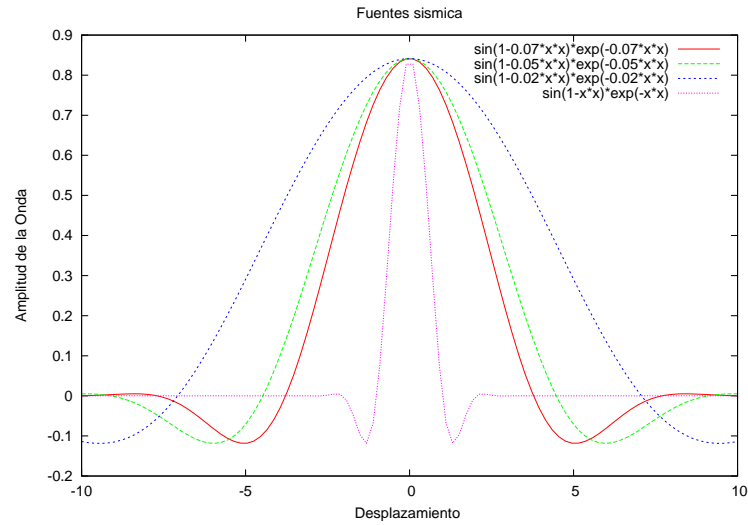


Figura 4.1: Función de gauss que simula una fuente sísmica en el modelo de propagación de la onda S_h .

Condiciones iniciales El medio está en equilibrio en $t = 0$, lo que significa que la velocidad y los esfuerzos son nulos.

Condiciones de Fronteras Las condiciones de fronteras usadas para los bordes superior e inferior son la de Dirichlet o de superficie libre y para los bordes laterales se consideró fronteras no-refelctivas para simular un medio semi-infinito.

Fuente explosiva Una *fente explosiva* como la definida en (3.10)

Valores del medio Los parámetros físicos y numéricos descritos en el cuadro. (4.1) para el modelo.

A continuación el campo de velocidad para distintos tiempos de propagación para la onda S_h considerando un medio elástico e isótropo y semi-homogéneo. En las capturas ShR representa la *onda reflejada*, ShT la *onda transmitida*, Hw *head wave*, y los números representan el orden en que este fenómeno sucede dentro del modelo.

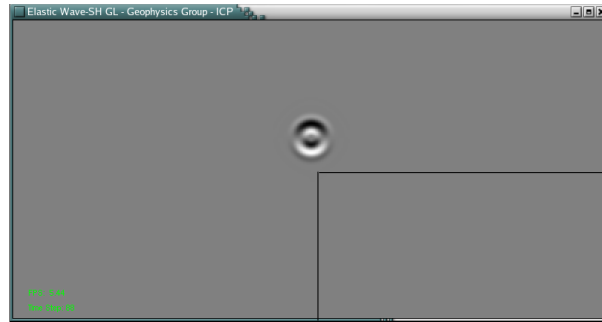


Figura 4.2: Componente $U(x, t)$, y $t = 88 [ms]$ para un esquema de segundo orden en diferencias finitas ecuación elástica bidimensional para la onda S_h en un medio isótropo semi-homogéneo

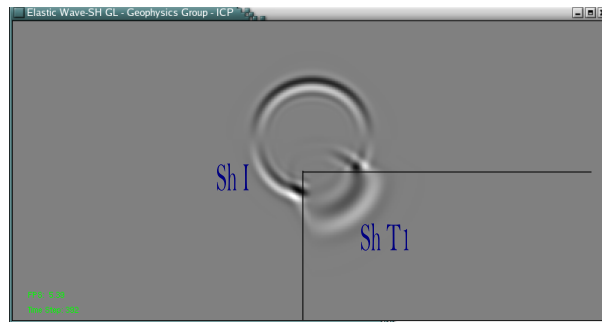


Figura 4.3: Componente $U(x, t)$, y $t = 392 [ms]$ para un esquema de segundo orden en diferencias finitas ecuación elástica bidimensional para la onda S_h en un medio isótropo semi-homogéneo

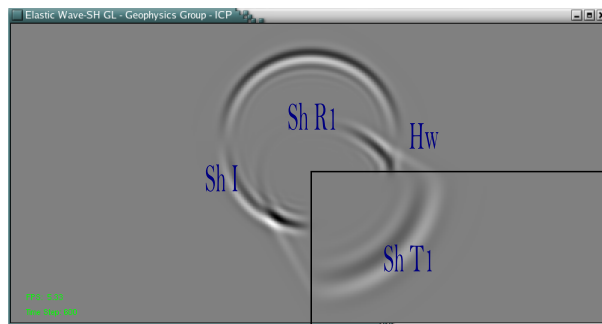


Figura 4.4: Componente $U(x, t)$, y $t = 600 [ms]$ para un esquema de segundo orden en diferencias finitas ecuación elástica bidimensional para la onda S_h en un medio isótropo semi-homogéneo

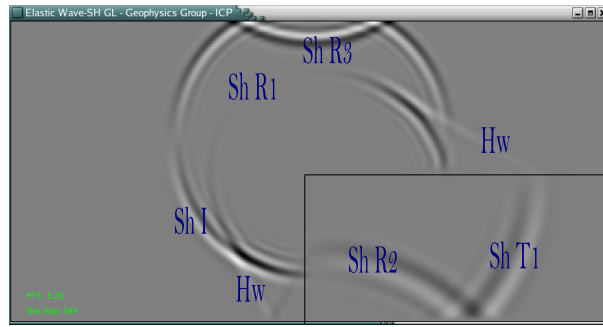


Figura 4.5: Componente $U(x, t)$, y $t = 944$ [ms] para un esquema de segundo orden en diferencias finitas ecuación elástica bidimensional para la onda S_h en un medio isótropo semi-homogéneo

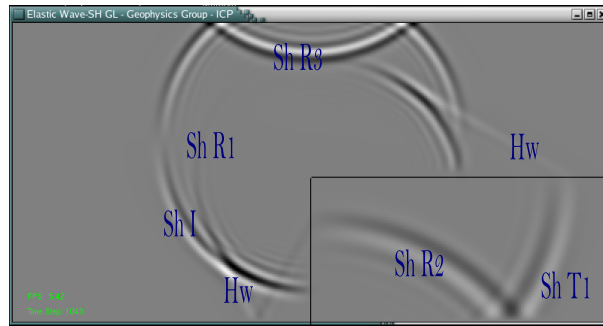


Figura 4.6: Componente $U(x, t)$, y $t = 1043$ [ms] para un esquema de segundo orden en diferencias finitas ecuación elástica bidimensional para la onda S_h en un medio isótropo semi-homogéneo

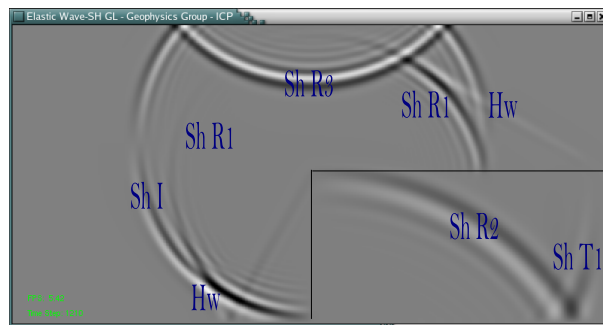


Figura 4.7: Componente $U(x, t)$, y $t = 1210$ [ms] para un esquema de segundo orden en diferencias finitas ecuación elástica bidimensional para la onda S_h en un medio isótropo semi-homogéneo

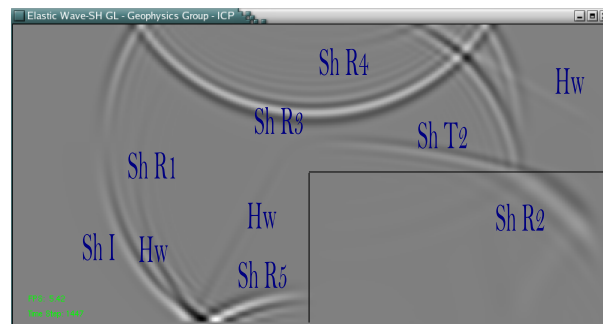


Figura 4.8: Componente $U(x, t)$, y $t = 1447$ [ms] para un esquema de segundo orden en diferencias finitas ecuación elástica bidimensional para ondas SH en un medio isótropo semi-homogéneo

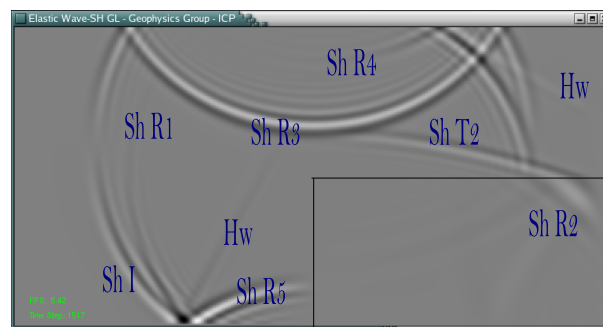


Figura 4.9: Componente $U(x, t)$, y $t = 1571$ [ms] para un esquema de segundo orden en diferencias finitas ecuación elástica bidimensional para la onda S_h en un medio isótropo semi-homogéneo

Tabla 4.1: Parámetros físicos para el modelo geológico de la propagación de una onda S_h

Parámetro	Tipo	Valor
δt	Paso de tiempo	0,001[s]
δx	Tamaño de la celda	0,01[Km]
x	Desplazamiento horizontal	400[Km]
z	Profundidad	200[Km]
$\rho_1 = \rho_2$	Densidad de Masa	1[Kg/m ³]
μ_1	Modulo de cizalla	1[GPa]
$\mu_2 = 2\mu_1$	Modulo de cizalla	2[GPa]
$P(x, z)$	Inicio de la propagación	(80, 200) [Km]

4.2 Propagación de ondas $P - SV$

A continuación observaremos la propagación de las ondas $P-SV$ para un medio elástico e isótropo semi-homogéneo, teniendo en cuenta las ecuaciones diferenciales (1.28) y (1.29) utilizando el esquema en diferencias finitas de segundo orden de aproximación. Para modelar estas propagaciones tendremos en cuenta lo descrito para el modelo de SH y los datos del cuadro (4.2)

Tabla 4.2: Parámetros físicos y numéricos para el caso de ondas $P - SV$

Parámetro	Tipo	Valor
δt	Paso de tiempo	0,016[s]
δx	Tamaño de la celda	50,125[m]
N_x	Desplazamiento horizontal	400[Km]
N_z	Profundidad	200[Km]
L	Longitud	20[Km]
$\rho_1 = \rho_2$	Densidad de Masa	2370[Kg/m ³]
α_1	Velocidad Onda P	3000 [m/s]
α_2	Velocidad Onda P	4500 [m/s]
β_1	Velocidad Onda SV	1500 [m/s]
β_2	Velocidad Onda SV	2500 [m/s]
$P(x, z)$	Inicio de la propagación	(40, 200) [Km]

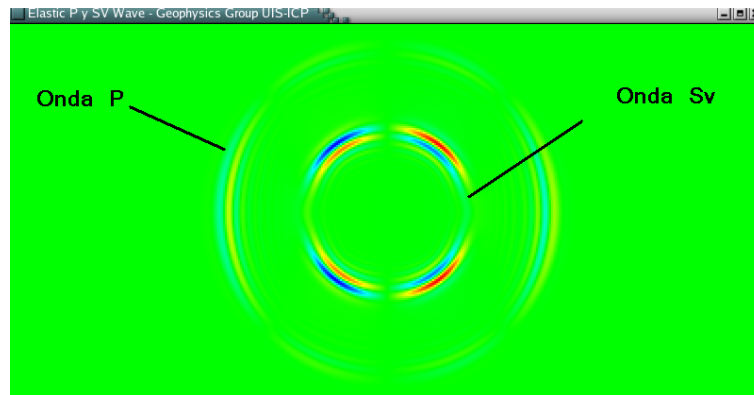


Figura 4.10: Componente horizontal de la propagación de una onda P y una onda S_v en un medio homogéneo, se observan los frentes perfectamente circulares., debido a la simetría del medio y su homogeneidad

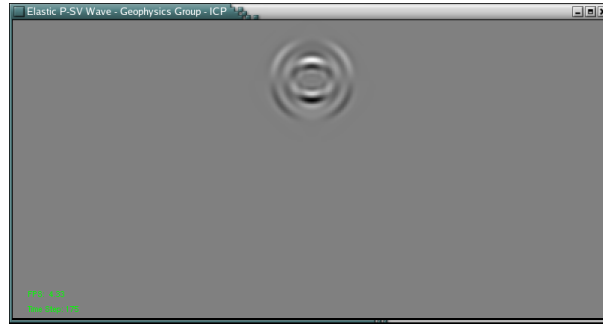


Figura 4.11: Componente $v_z(x, t)$, y $t = 175$ [ms] para un esquema de segundo orden de la ecuación elástica bidimensional en un medio semi-homogéneo

4.3 Modelamiento Anisótropo

Anisotropía Debil

En este apartado se muestra un esquema de cuarto orden en diferencias finitas para la ecuación elástica bidimensional. Se podrá ver como a un medio perfectamente isótropo al introducir valores de anisotropía a través de los parámetros de thomsen, podemos ver como los frentes de onda, sufren cambios leves tanto para las ondas compresionales como longitudinales.

En la imagen de la izquierda de la Figura (4.21) hace referencia a la componente horizontal de la velocidad para un tiempo de 335 (ms), la velocidad de onda P como $\alpha = 4449(m/s)$, $\beta = 2585(m/s)$ y $\rho = 2320(Kg/m^3)$ de un modelo de homogéneo. Ahora la segunda imagen de la derecha de la Figura (4.21), los valores de $\delta = 0,186$, $\epsilon = 0,224$ y $\gamma = 0,0096$. el tiempo es de 330 (ms), ademas hace referencia a la velocidad de onda P como $\alpha = 4449(m/s)$, $\beta = 2585(m/s)$ y $\rho = 2320(Kg/m^3)$ de un modelo de velocidad homogéneo. Los valores de los coeficientes elasticos son $C_{11} = 1,4480$, $C_{44} = 0,337595$, $C_{13} = 0,49017$, $C_{33} = 1,00$, $C_{66} = 0,402413$ y $C_{12} = 0,643173$

Comparación de un esquema en DF entre un 2-orden y 4-orden

En la figura 4.22 se observa una comparación entre el esquema de segundo orden $\mathcal{O}((\delta t)^2, (\delta x)^2)$ y el de cuarto orden $\mathcal{O}((\delta t)^2, (\delta x)^4)$ para la propagación en un medio elástico homogéneo isótropo con velocidades $\alpha = 3000$ [m/s], $\beta = 1500$ [m/s] y la densidad del medio como $\rho = 2,37 * 10^3$ [Kg/m³] Podemos ver que utilizando un cuarto orden eliminamos oscilaciones acumuladas en el proceso iterativo, mejorando asi la imagen del

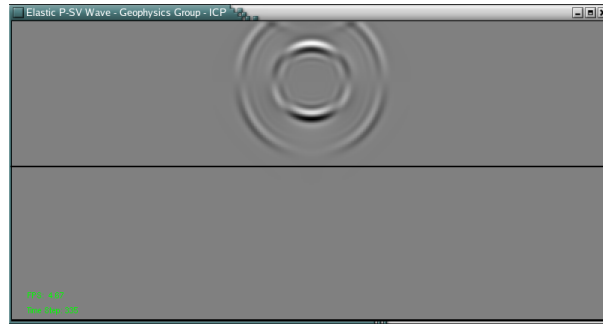


Figura 4.12: Componente $v_z(x, t)$, y $t = 335$ [ms] para un esquema de segundo orden de la ecuación elástica bidimensional en un medio semi-homogéneo

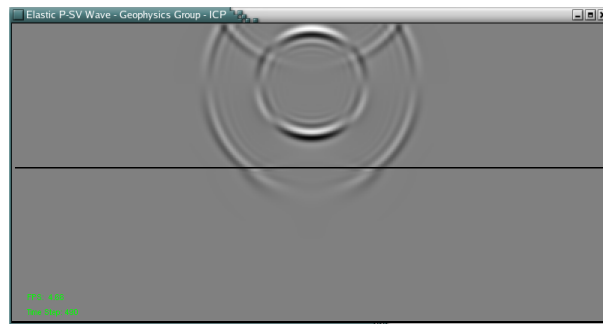


Figura 4.13: Componente $v_z(x, t)$, y $t = 490$ [ms] para un esquema de segundo orden de la ecuación elástica bidimensional en un medio semi-homogéneo



Figura 4.14: Componente $v_z(x, t)$, y $t = 618$ [ms] para un esquema de segundo orden de la ecuación elástica bidimensional en un medio semi-homogéneo

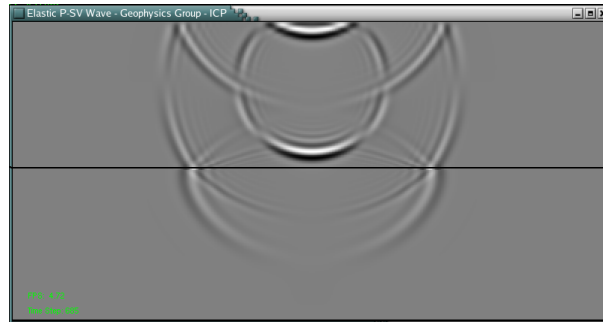


Figura 4.15: Componente $v_z(x, t)$, y $t = 685$ [ms] para un esquema de segundo orden de la ecuación elástica bidimensional en un medio semi-homogéneo

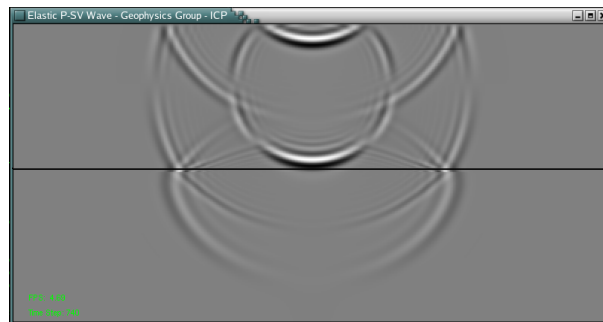


Figura 4.16: Componente $v_z(x, t)$, y $t = 740$ [ms] para un esquema de segundo orden de la ecuación elástica bidimensional en un medio semi-homogéneo

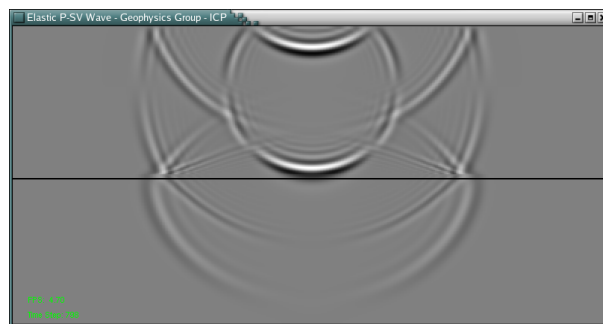


Figura 4.17: Componente $v_z(x, t)$, y $t = 798$ [ms] para un esquema de segundo orden de la ecuación elástica bidimensional en un medio semi-homogéneo

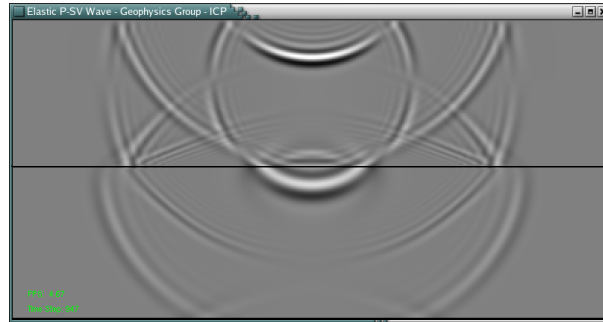


Figura 4.18: Componente $v_z(x, t)$, y $t = 947$ [ms] para un esquema de segundo orden de la ecuación elástica bidimensional en un medio semi-homogéneo

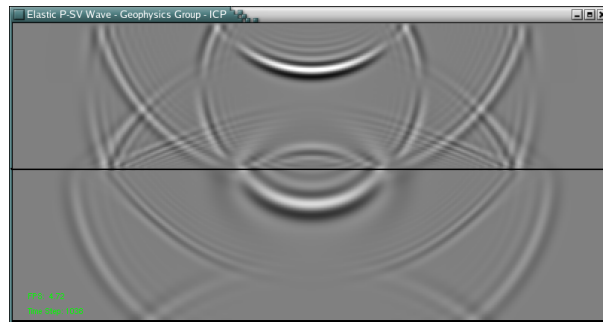


Figura 4.19: Componente $v_z(x, t)$, y $t = 1038$ [ms] para un esquema de segundo orden de la ecuación elástica bidimensional en un medio semi-homogéneo

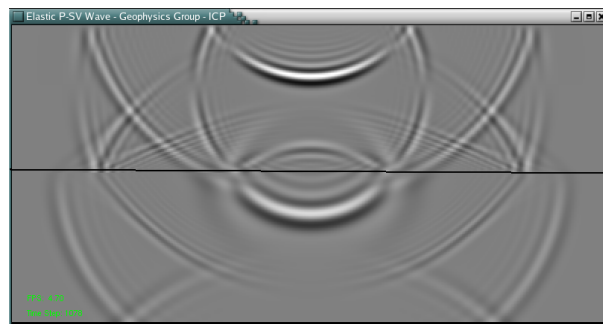


Figura 4.20: Componente $v_z(x, t)$, y $t = 1078$ [ms] para un esquema de segundo orden de la ecuación elástica bidimensional en un medio semi-homogéneo

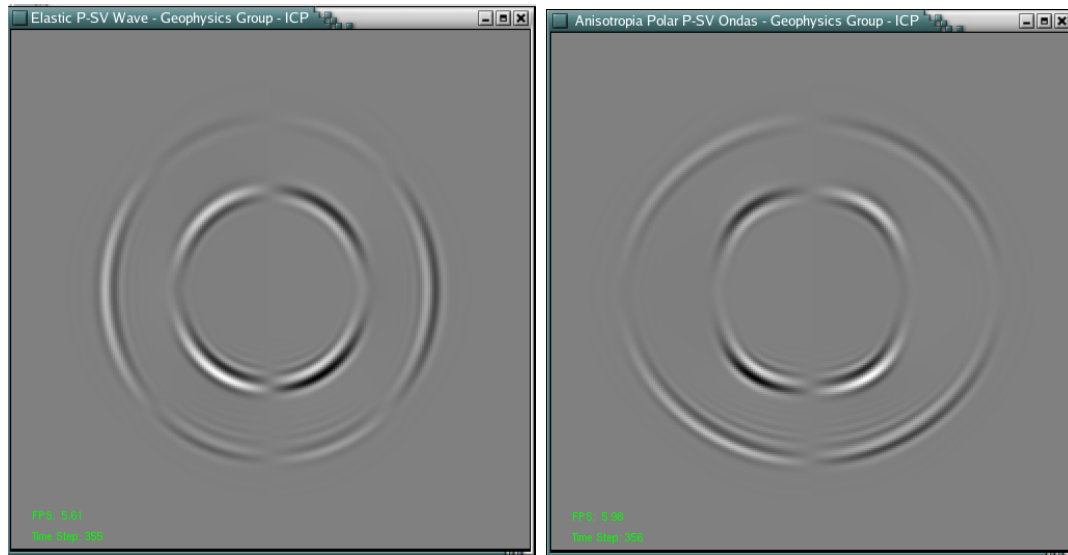


Figura 4.21: Frentes de Onda en un medio isótropo y un medio con anisotropía polar débil

perfil de onda, aumentando el costos computacional. (Ver los sectores de la elipse roja y azul que esta dibujada en cada modelo).

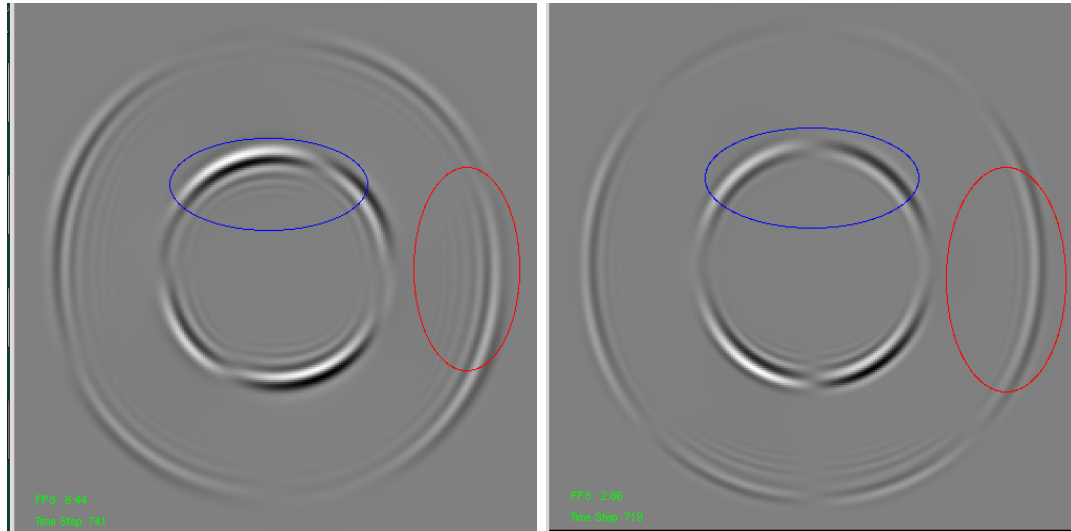


Figura 4.22: Tiempos 741[ms] (imagen izquierda) y 719[ms] (imagen derecha).

Un caso para VTI

A continuación se presenta un modelo de velocidades para la propagación de un medio con anisotropía polar (VTI) se construyó un modelo geológico donde el eje vertical z es la profundidad siendo de 250[m], el eje horizontal x representa la posición horizontal también de 250[m].

Para este modelo homogéneo se definió la velocidad de la onda P esta dada por el parámetro α , la velocidad de la onda S esta dada por el parámetro β . La densidad de masa es la constante ρ .

Este tipo de propagación utiliza un esquema en diferencias finitas de cuarto orden de aproximación en el espacio y uno de segundo orden en la parte temporal.

En el siguiente cuadro 4.3 esta descrito los valores reales, numéricos y el valor de las constantes elásticas (valores adimensionales)

En las imagenes de la (4.26) hasta (4.30) se pudo observar que los frentes de onda para la onda tipo P y tipo SV , no son perfectamente circulares debido a la marcada anisotropía del medio.



Figura 4.23: Componente horizontal de la velocidad $v_x(x, t)$ en el tiempo $t = 51$ [ms]



Figura 4.24: Componente horizontal de la velocidad $v_x(x, t)$ en el tiempo $t = 134$ [ms]



Figura 4.25: Componente horizontal de la velocidad $v_x(x, t)$ en el tiempo $t = 194$ [ms]

Tabla 4.3: Valores físicos para la propagación de las ondas $P - SV$ en un medio con anisotropía polar VTI

Parametro	Tipo	Valor
α	Velocidad Onda P	4449(m/s)
β	Velocidad Onda S	2585(m/s)
ρ	Densidad de masa	2570(Kg/m ³)
δ	Parametros	0,565
ϵ	de	0,091
γ	Thomsen	0,046



Figura 4.26: Componente horizontal de la velocidad $v_x(x, t)$ en el tiempo $t = 334$ [ms]



Figura 4.27: Componente horizontal de la velocidad $v_x(x, t)$ en el tiempo $t = 419$ [ms]

4.4 Modelos de Velocidad Complejos

Finalmente como objetivo principal era utilizar nuestro esquema en diferencias finitas dominio temporales que se construyó verlo en un modelo de velocidades mas complejo que se acerca a una situación mas real del interior de la tierra para esto se utilizó el modelo de velocidades de *Marmousi* (Figura 4.28).

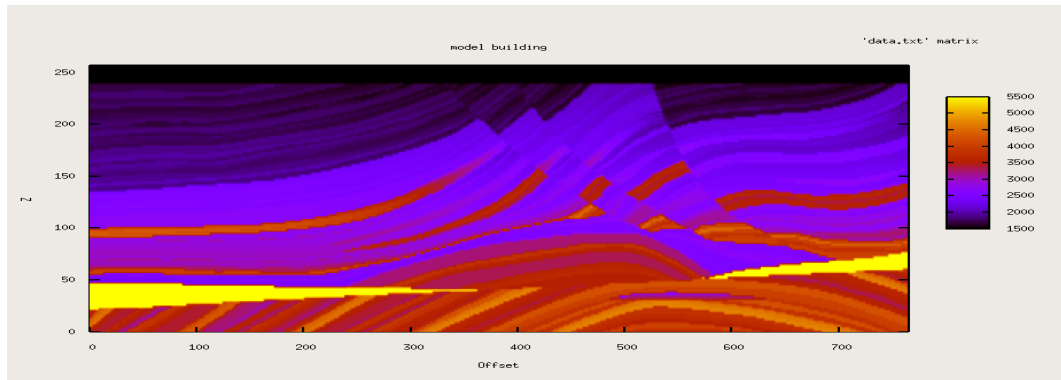


Figura 4.28: Modelo de velocidad *Marmousi*

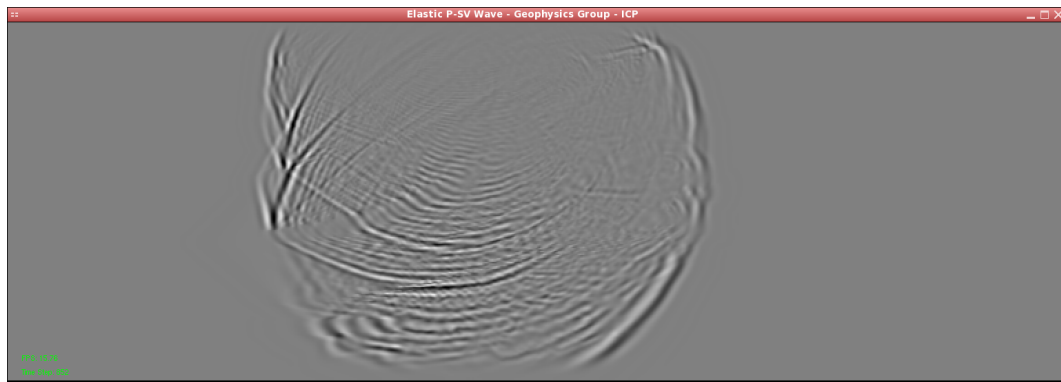


Figura 4.29: Propagación de ondas sísmicas en el modelo de velocidad *Marmousi*, La imagen sintética de la propagación fue la obtenida en la (Figura 4.29)., donde se considero una modelo de 250 [km] en profundidad y mas de 700 [Km] de posición horizontal así fue obtenida después de 852 [ms].

CONCLUSIONES

Se presentó un método simple y sencillo para solucionar la ecuación de esfuerzo-deformación para el medio elástico de la propagación de ondas sísmicas $P - SV$ y SH , utilizando el método numérico de diferencias finitas.

Se obtuvo un esquema en diferencias finitas dominio temporal de segundo $\mathcal{O}[(\delta x)^2, (\delta t)^2]$ y cuarto orden $\mathcal{O}[(\delta x)^4, (\delta t)^2]$ estable aproximando la solución diferencial.

Se obtuvo una visualización en tiempo de la propagación de onda sísmica SH , donde se calculó el campo de velocidad $U(x, t)$ en un espacio plano de un medio isótropo semi-homogéneo.

Se comparó el frente de onda esférico de la onda P en un medio isótropo con el frente de onda no-esférico de un medio anisótropo y como dependen estos frentes de onda de las características propias del medio en el que se propagan.

Se observaron patrones normales de reflexión y transmisión de las ondas compresionales, polarizadas horizontalmente y las ondas polarizadas verticalmente para el medio elástico homogéneo y semi-homogéneo.

Se obtuvo una estabilidad computacional al utilizar una malla intercalada.

Se logró obtener la propagación de las ondas en el conocido campo de velocidades del modelo *Marmousi* para un medio elástico utilizando nuestro esquema en diferencias finitas.

Se logró construir códigos propios en lenguaje de programación c_{++} para una implementación en trabajos futuros.

En base a este trabajo se logró realizar un caso de anisotropía polar inclinada, que fue llevada al XXII Congreso Colombiano de Física.

Como trabajo futuro: se puede extender este modelo a tres dimensiones, estudiar otros casos de anisotropía para el tensor de elasticidad, aplicar este modelo a datos reales,

e introducir los códigos de este trabajo como parte de las herramientas de geofísica de Exploración del ICP.

REFERENCIAS

- [1] Alan R. Levander., 1988 *Fourth-Order finite-difference P-SV seismograms*, Geophysics, Vol 53, No 11 Pag. 1425–1436.
- [2] Berryman, J. G., 1979 *Long-wave elastic anisotropy in transversely isotropic media*, Geophysics, Vol 44, Pag. 897–917.
- [3] Crampin, S., 1981 *A review of wave motion in anisotropic and cracked elastic media wave motion*, Geophysics, Vol 3, Pag. 343–391
- [4] Cerjan, C., Kolsloff, D., And Reshef, M., 1985 *A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations*, Geophysics Vol 50, No 4, Pag 705-708.
- [5] Helbig K., 1994 *Foudations of anisotropy for exploration seismic (Handbook of Geophysical Exploration)*, Pergamon, 1st edition.
- [6] Juhlin, C., 1995 *Finite-difference elastic wave propagation in 2D heterogeneous transversaly isotropic media*, Geophysical Prospecting Vol. 43, Pag 843–858.
- [7] Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J., 2003 *The Rock Physics Handbook*, Cambridge University Press.
- [8] Sullivan D., 2000 *Electromagnetic Simulation Using The FDTD Method*, IEEE Press Series on RF & Microwave Technology (2000) New York.
- [9] Kelly, K. R., Ward, R. W., Treitel S., and Alford, R. M., 1974, *Synthetic Seismograms :A Finite -Difference Approach*, Geophysics Vol. 41 No 1 Pag 2–27.
- [10] Krebes, E. S., 2004 *Seismic Forward Modeling* Department of Geology and Geophysics, University of Calgary, Calgary.

-
- [11] Reynolds, A. C., 1978 *Boundary Conditions for the Numerical Solutions of Wave Propagation Problems*, Geophysics Vol. 43 No. 6 Pag 1099–1110.
- [12] Slawinski, M.A., 2003. “*Seismic waves and rays inelastic media*”. Univ. of Newfoundland
- [13] Thomsen, L., 2001 *Entendimiento de la Anisotropía sísmica en exploración y explotación*, Vol, 41 N.4 Sociedad Mexicana de Geofísicos SEG–EAGE
- [14] Thomsen., L., 1986 *Weak elastic anisotropy*, Geophysics, Vol. 51, Pag. 1954–1966.
- [15] Zacaria, A., Penrose, J., Thomas, F.,and Wang, X., 2000 *The two Dimensional Numerical of Acoustic wave propagation in Sallow Water*. Acoustics.
- [16] Virieux, J., 1986 *P–SV : Wave propagation in heterogeneous media: Velocity–stress finite–difference method*, Geophysics, Vol 51, Pag. 889–901
- [17] Virieux, J., 1984 *SH : Wave propagation in heterogeneous media: Velocity–stress finite–difference method*, Geophysics, Vol 49, 1933–1937

PONENCIAS

Resumen de la ponencia presentada en el XXII Congreso Nacional de Física, (*Página 30, Libro de Resúmenes Vol. No. 22 Año 2007*)

MODELO NUMÉRICO DE PROPAGACIONES ELÁSTICAS PARA UN MEDIO CON ANISOTROPÍA POLAR INCLINADA

J.A. Torres-Peña¹, C. Piedrahita-Escobar², J.D. Sanabria-Gómez¹, H. Gonzalez-Alvarez²,
Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander¹, Bucaramanga, Santander
Instituto Colombiano de Petróleo², Piedecuesta, Santander

Se presenta un esquema numérico en diferencias finitas para propagaciones de ondas elásticas en el subsuelo. Para simular la heterogeneidad y la anisotropía del medio, se plantea el modelo elastodinámico con componentes tensoriales de esfuerzos y de deformación juntos con los campos de velocidad, variables en el dominio computacional. Este esquema de diferencias utiliza la discretización de cuarto orden en las derivadas espaciales y un segundo orden en las temporales. La anisotropía polar inclinada es el caso más sencillo que se puede asumir, debido a que tiene un único polo de simetría al cual las ondas se propagan, esta aproximación nos permite definir un modelo geológico con un tipo de anisotropía, en este caso una anisotropía débil. La precisión del modelo haciendo uso de diferencias finitas requiere que la malla tenga una mayor resolución, esto conlleva a un incremento en el costo computacional, obteniendo un tamaño óptimo en el paso de malla en concordancia con la relación de dispersión

Palabras Claves: Diferencias finitas, ecuación de onda elástica, Anisotropía polar inclinada

Resumen de la ponencia presentada en la Escuela CIMPA-REALMA-UNESCO-COLOMBIA, *Matemáticas para modelamiento y simulación*, celebrado en la ciudad de Santiago de Cali, del 11 al 23 de Junio del 2007. (<http://paginasweb.univalle.edu.co/cimpa/>)

MODELO ACÚSTICO DEL SUBSUELO Y GENERADOR DE TRAZAS SÍSMICAS SINTÉTICAS

Herling Gonzalez Álvarez

Instituto Colombiano del Petroleo, Piedecuesta, Santander, Colombia

Jairo Alberto Torres Peña

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Santander, Colombia

Se presenta un modelo geológico acústico para propagaciones sísmicas en 2D que permite genera trazas sintéticas. El modelo acústico utiliza el esquema de diferencias finitas de cuarto orden para calcular la propagación de onda compresional tipo P en un medio con diferentes valores de velocidad dentro del subsuelo, el medio se asume isótropo y no homogéneo. Para su visualización se ha desarrollado un código C++ basado en el concepto orientado a objetos con la librería gráfica OpenGL.

Palabras Claves: Diferencias finitas, ecuación de onda acústica, visualización, OpenGL.