

EL GRUPO FUNDAMENTAL EN LA TEORÍA DE NUDOS

SHANIA ZHARICK GOMEZ CONEO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2026

EL GRUPO FUNDAMENTAL EN LA TEORÍA DE NUDOS

SHANIA ZHARICK GOMEZ CONEO

Trabajo de grado para optar al título de
Matemática

Director

Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas

Doctor en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2026

DEDICATORIA

A Dios, fuente de toda verdad y sabiduría. A Milo y a toda mi familia.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primer lugar a Dios, quien sostuvo mi camino incluso en los momentos de mayor incertidumbre.

A mi padre, mi madre y mis abuelas, les agradezco por ser mi motor incondicional y brindarme el respaldo necesario para culminar este gran paso en mi vida. Por otra parte, a Jimmy, gracias por su presencia constante, por caminar a mi lado en este proceso y por ese cariño tan bonito que voy a atesorar siempre en mi corazón. Los quiero muchísimo.

A mi director de tesis, agradezco su orientación, paciencia y acompañamiento académico durante el desarrollo de este trabajo.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	13
1 MARCO TEÓRICO	14
1.1 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE NUDOS	14
1.2 DEFINICIONES BÁSICAS	14
1.3 TEOREMA DE REIDEMEISTER	20
2 PRELIMINARES DE TOPOLOGÍA ALGEBRAICA	25
2.1 HOMOTOPÍA	27
2.2 HOMOTOPÍA DE LAZOS	28
2.3 GUPOS FUNDAMENTALES	29
3 GRUPO FUNDAMENTAL DE NUDOS	35
3.1 INVARIANCIA DEL GRUPO DEL NUDO	37
3.2 PRODUCTO LIBRE DE GRUPOS	40
4 TEOREMA DE SEIFERT - VAN KAMPEN	43
4.1 COMPLEJO SIMPLICIAL	52
4.2 RETRACTO	53
4.2.1 Retracto por Deformación	54
4.3 NUDOS TORALES	55
4.4 GRUPO FUNDAMENTAL DE LOS NUDOS TORALES	56
4.4.1 Ejemplos	58
5 PRESENTACIÓN DE WIRTINGER	60

5.1	ALGORITMO DE WIRTINGER	61
5.1.1	Ejemplos	66
5.2	PSEUDOCÓDIGO DEL ALGORITMO DE WIRTINGER	76
6	CONCLUSIONES	81
	BIBLIOGRAFÍA	82

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1 Nudo trivial, trébol y ocho.	14
Figura 2 Tabla de nudos de Rolfsen (hasta 10 cruces).	16
Figura 3 Movimientos de Reidemeister.	17
Figura 4 Ejemplo de la construcción poligonal de los primeros 6 nudos.	18
Figura 5 Comparación entre los nudos 6_3 y 8_{18} de la tabla de Rolfsen que son el nudo de 6 cruces del tipo 3 y el nudo de 8 cruces del tipo 18. Se muestran sus respectivas representaciones poligonales, evidenciando diferencias estructurales entre ambos.	19
Figura 6 Comparativa visual de enlaces con creciente complejidad topológica. Se observa desde el enlace trivial de dos componentes separadas (superior izquierda), pasando por el enlace de Hopf de dos cruces (centro superior), hasta configuraciones más intrincadas de cuatro, cinco y seis cruces. Las imágenes evidencian cómo aumenta la simetría y el entrelazamiento a medida que crece el número de cruces, destacando la diferencia entre estructuras estelares regulares y formas asimétricas.	19
Figura 7 Clasificación de los triángulos pequeños utilizados en la triangulación del plano ABC: primer tipo (cruces), segundo tipo (vértices) y tercer tipo (aristas).	22
Figura 8 El nudo de nueve cruces 9_1 (izquierda) y su correspondiente imagen especular 9_1^* (derecha) .	23
Figura 9 Secuencia de movimientos de Reidemeister que transforma el nudo ocho (4_1) en su imagen especular, demostrando que es anfiquiral .	24
Figura 10 Concatenación $\alpha * \beta$. (Elaborado en Python)	27

- Figura 11 Ejemplo de homotopía $H(s, t) = (t, (1 - s)t + st^2)$, $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ entre los caminos $\gamma_0(t) = (t, t)$ y $\gamma_1(t) = (t, t^2)$. (Elaborado en Python) 28
- Figura 12 Una forma visual de entender $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. El círculo verde es nuestra circunferencia base S^1 . Las líneas negras muestran lazos que se enrollan a su alrededor: el primero da 1 vuelta (clase 1), el segundo da 2 vueltas (clase 2) y el tercero da 3 vueltas (clase 3). Básicamente, cada número entero corresponde a cuántas veces das la vuelta al círculo; como no puedes desenrollar un lazo de 3 vueltas para convertirlo en uno de 2 sin romperlo, cada número representa una clase distinta. 30
- Figura 13 La esfera S^2 puede entenderse como la piel externa de una pelota de baloncesto. Se trata de una superficie cerrada pero vacía en su interior, similar a un globo desinflado o una burbuja. 31
- Figura 14 Intuición geométrica de por qué $\pi_1(S^2) = \{1\}$. La secuencia muestra cómo cualquier lazo dibujado sobre la esfera (como el ecuador negro) puede deslizarse y contraerse continuamente hasta convertirse en un solo punto. A diferencia del círculo, en la esfera no hay ningún agujero que impida este movimiento, por lo que todos los lazos son triviales. 31
- Figura 15 Representación del toro T^2 con sus lazos generadores a (meridiano) y b (longitud) . 32
- Figura 16 Representación esquemática de distintos lazos contenidos en el grupo fundamental del nudo trébol ($\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$). Algunas de estas trayectorias son homotópicas entre sí, representando así el mismo elemento algebraico dentro del grupo. 35
- Figura 17 Construcción geométrica de los generadores del grupo fundamental del nudo trébol. Se ilustran los lazos meridianos alrededor de cada arco del nudo y su conexión mediante caminos hacia un punto base común x_0 , formando la estructura de generadores del grupo. 36

Figura 18	Construcción del lazo asociado $L(f)$ a partir de un camino cualquiera f con extremos en x e y , mediante la concatenación con los caminos elegidos α_x y $\bar{\alpha}_y$ basados en x_0 .	46
Figura 19	Subdivisión del dominio $[0, 1] \times [0, 1]$ en rectángulos elementales R_i y su correspondiente mapeo mediante la homotopía F sobre las regiones abiertas U y V , ilustrando el comportamiento de los caminos intermedios f_i, g_i y las curvas transversales β_i .	48
Figura 20	Clasificación de simplejos según su dimensión (izquierda) y un ejemplo de complejo simplicial (derecha). Los simplejos actúan como los bloques de construcción geométricos elementales (0, 1, 2, 3 y generalizados a dimensión k) que, al unirse de forma ordenada bajo ciertas reglas de intersección por sus caras, dan lugar a un complejo simplicial completo.	53
Figura 21	Ejemplos representativos de nudos y enlaces torales, clasificados según su tipo (p, q) y número de componentes.	55
Figura 22	Nudo toral $T(2, 7)$. Cómo visualizar p y q: $q = 7$ son los 7 lazos exteriores, si cortas frontal la curva lo cruza 7 veces. $p = 2$ es más difícil de ver directamente; si sigues la curva con el dedo, notarás que debes dar dos vueltas completas de 360° alrededor del agujero central antes de volver al punto de partida. (Elaborado en GeoGebra)	56
Figura 23	Representación del nudo toral $T(2, 5)$. (Elaborado en GeoGebra)	59
Figura 24	Representación del nudo toral $T(3, -8)$. (Elaborado en GeoGebra)	59
Figura 25	Referencia didáctica para facilitar el uso de la presentación de Wirtinger en ejemplos posteriores.	62

- Figura 26 Representación geométrica de un cruce en el plano de proyección T . Las regiones asociadas a los arcos están delimitadas por los entornos tubulares (en rojo): R_k corresponde al arco superior continuo (puente), mientras que R_i y R_j representan las componentes discontinuas del arco inferior de entrada y salida, respectivamente. El sector central (en verde) define el entorno abierto del cruce donde intersecan las regiones. Cabe precisar que las regiones R_k , R_i y R_j constituyen subconjuntos abiertos en la topología del plano de proyección $T \cong \mathbb{R}^2$ tras la remoción de la proyección del nudo. En el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, estas regiones no son abiertas, sino que actúan como fronteras bidimensionales a través de las cuales los lazos generadores intersecan transversalmente al plano T para rodear cada arco del nudo. 62
- Figura 27 Reducción combinatoria local del cruce en la región contráctil S_l para la obtención de la relación. 63
- Figura 28 Efecto homotópico de adjuntar la caja B_1 sobre la pieza A . 65
- Figura 29 Representación del nudo trébol $T(3, 2)$ en la superficie del toro. Su grupo fundamental, $\pi_1(S^3 \setminus K) = \langle x, y \mid x^3 = y^2 \rangle$, describe las clases de homotopía de lazos en el complemento del nudo, donde la relación $x^3 = y^2$ identifica el elemento central del grupo. 69
- Figura 30 Diagrama de nudo con 8 cruces, equivalente al trébol mediante movimientos de Reidemeister de tipo I. 69
- Figura 31 **El nudo cuadrado (square knot)**. En el ámbito práctico, actúa como un nudo de unión simétrico diseñado para asegurar cabos de igual diámetro bajo tensión constante. Desde la perspectiva de la teoría de nudos, se clasifica como un nudo compuesto formado por la suma conexa de un nudo de trébol y su imagen especular ($3_1 \# 3_1^*$). 73

RESUMEN

TÍTULO:EL GRUPO FUNDAMENTAL EN LA TEORÍA DE NUDOS *

AUTOR:SHANIA ZHARICK GÓMEZ CONEO **

PALABRAS CLAVE:TEORÍA DE NUDOS, GRUPO FUNDAMENTAL, COMPLEMENTO DE UN NUDO, TEOREMA DE SEIFERT–VAN KAMPEN, INVARIANTES TOPOLÓGICOS, TOPOLOGÍA ALGEBRAICA.

DESCRIPCIÓN: La teoría de nudos constituye una rama fundamental de la topología algebraica dedicada al estudio de las propiedades invariantes de curvas cerradas embebidas en el espacio euclidiano tridimensional. El problema central de esta disciplina reside en la clasificación rigurosa de nudos bajo la relación de equivalencia inducida por la isotopía ambiente. La presente monografía tiene por objeto el análisis exhaustivo del grupo fundamental del complemento de un nudo, consolidado históricamente como el invariante algebraico primordial para la distinción de clases de equivalencia de nudos no triviales. El núcleo metodológico de esta investigación se fundamenta en la aplicación sistemática del teorema de Seifert–van Kampen, herramienta esencial de la topología algebraica que permite deducir presentaciones explícitas del grupo fundamental a partir de la descomposición del espacio en subconjuntos abiertos conexos. Este procedimiento facilita la transición de la estructura geométrica del diagrama del nudo a una representación algebraica precisa mediante generadores y relaciones. Asimismo, se integra el uso de herramientas computacionales avanzadas con fines estrictamente ilustrativos, orientados a la visualización de las configuraciones espaciales y al soporte pedagógico de los conceptos abstractos tratados. Los resultados obtenidos contribuyen a la sistematización del conocimiento en topología algebraica, ofreciendo un tratado teórico que vincula indisolublemente la geometría de los nudos con su interpretación algebraica, fortaleciendo así los fundamentos para la enseñanza universitaria de esta disciplina.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas, Doctor en Ciencias Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: THE FUNDAMENTAL GROUP IN KNOT THEORY *

AUTHOR: SHANIA ZHARICK GÓMEZ CONEO **

KEYWORDS: KNOT THEORY, FUNDAMENTAL GROUP, KNOT COMPLEMENT, SEIFERT–VAN KAMPEN THEOREM, TOPOLOGICAL INVARIANTS, ALGEBRAIC TOPOLOGY.

DESCRIPTION:

Knot theory constitutes a fundamental branch of algebraic topology dedicated to the study of the invariant properties of closed curves embedded in three-dimensional Euclidean space. The central problem of this discipline lies in the rigorous classification of knots under the equivalence relation induced by ambient isotopy. The purpose of this monograph is the exhaustive analysis of the fundamental group of the knot complement, historically established as the primordial algebraic invariant for distinguishing equivalence classes of non-trivial knots. The methodological core of this research is based on the systematic application of the Seifert–van Kampen theorem, an essential tool of algebraic topology that allows for the deduction of explicit presentations of the fundamental group from the decomposition of the space into path-connected open subsets. This procedure facilitates the transition from the geometric structure of the knot diagram to a precise algebraic representation using generators and relations. Likewise, the use of advanced computational tools is integrated for strictly illustrative purposes, aimed at the visualization of spatial configurations and the pedagogical support of the abstract concepts addressed. The results obtained contribute to the systematization of knowledge in algebraic topology, offering a theoretical treatise that indissolubly links the geometry of knots with their algebraic interpretation, thereby strengthening the foundations for the university-level teaching of this discipline.

* Bachelor Thesis

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Advisor: Ph.D Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas.

INTRODUCCIÓN

La teoría de nudos, como disciplina matemática, estudia las distintas formas en que una curva cerrada (sin extremos ni autointersecciones) puede estar anudada en el espacio tridimensional. Formalmente, un nudo se define como un encaje suave del círculo $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}^3$ (o en $\mathbb{S}^3$), junto con la imagen geométrica resultante de dicho encaje.

A finales del siglo XIX, la teoría de nudos recibió un impulso significativo con la propuesta de Lord Kelvin (1867) de modelar los átomos como nudos en el éter, lo que motivó a matemáticos como P. G. Tait, T. P. Kirkman y C. N. Little a iniciar la tabulación sistemática de nudos. Décadas más tarde, Max Dehn introdujo el uso del grupo fundamental del complemento de un nudo (hoy denominado simplemente el *grupo del nudo*) como invariante para su estudio. Este invariante algebraico describe la estructura topológica del complemento y permite distinguir nudos no equivalentes mediante métodos algebraicos. Con el desarrollo de la topología algebraica en el siglo XX, herramientas como el teorema de Seifert–van Kampen facilitaron el cálculo de estos grupos fundamentales de manera sistemática, proporcionando un enfoque riguroso para la clasificación de nudos.

Este trabajo se centra en el estudio del grupo fundamental del complemento de un nudo como herramienta para su clasificación. A partir de la definición formal de nudo, se analiza el complemento topológico $\mathbb{R}^3 \setminus K$ para, mediante el teorema de Seifert–van Kampen, obtener presentaciones explícitas de su grupo fundamental. Como aporte metodológico y didáctico de este escrito, se diseñaron pseudocódigos basados en el algoritmo de Wirtinger, estructurados de manera lógica y universal con el fin de ser implementados de forma directa en cualquier lenguaje de programación. Asimismo, el desarrollo teórico se complementa con un soporte visual que combina material bibliográfico de referencia con esquemas geométricos detallados de autoría propia y la generación de modelos tridimensionales en GeoGebra para la visualización analítica de nudos torales. Con este aparato teórico, computacional y gráfico, se exhibe la no equivalencia de nudos mediante el estudio de isomorfismos de sus grupos, ofreciendo un material riguroso, claro y estructurado que contribuya activamente a la enseñanza de la topología de nudos.

1. MARCO TEÓRICO

1.1. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE NUDOS

1.2. DEFINICIONES BÁSICAS

Definición 1.2.1 (Nudo¹). *Un nudo es una función $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que es un encaje suave, es decir:*

1. *f es infinitamente diferenciable (C^∞),*
2. *La derivada $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in S^1$,*
3. *f es un homeomorfismo sobre su imagen (es inyectiva y continua con inversa continua).*

Ejemplo 1.2.2. *Algunos de los nudos más sencillos y ampliamente estudiados son el nudo trivial, el nudo trébol y el nudo de ocho. El primero corresponde a una cuerda sin anudar (equivalente a un círculo); el segundo es el nudo no trivial más simple, con forma de trébol y tres cruces; y el tercero, llamado así por su parecido con el número 8, es el nudo no trivial más simple que satisface la propiedad de **anfiquiralidad**, la cual se formalizará más adelante.*

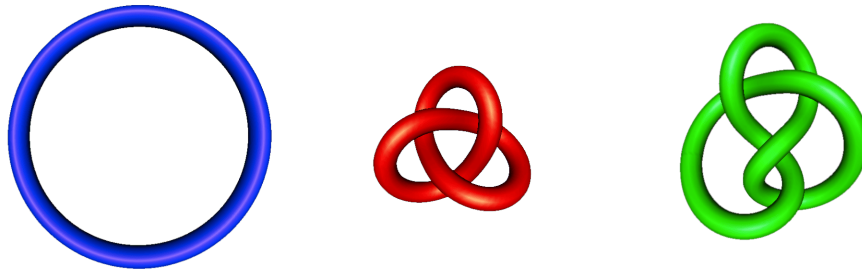


Figura 1. Nudo trivial, trébol y ocho.

La definición abstracta de nudo no es directamente útil para distinguirlos o manipularlos en la práctica. Para abordar este problema, recurrimos a los diagramas de nudo, varios de los ejemplos, definiciones y

¹ Vassily Olegovich Manturov: *Knot Theory*. 2nd. Boca Raton, FL: CRC Press, 2018. ISBN: 978-1-138-56136-3.

resultados mencionados a continuación son tomados o basados en “KnotPlot. Software para visualización de nudos.”², “The Knot Book”³, “Knots. 3rd, fully revised and extended. Vol. 5.”⁴ y “The Knot Atlas.”⁵.

Definición 1.2.3 (Diagrama plano de un nudo). Sea $K : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ un nudo, es decir, una inmersión suave sin autointersecciones. Un **diagrama plano del nudo** es la imagen de K bajo una proyección ortogonal genérica

$$\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

tal que:

1. $\pi \circ K$ es inyectiva excepto en un número finito de puntos, llamados cruces, donde exactamente dos arcos de la imagen se intersectan transversalmente (es decir, no hay tangencias ni puntos triples).
2. En cada cruce, se especifica cuál de los dos arcos corresponde a la parte del nudo que pasa por encima y cuál por debajo, de forma que se recupere la información tridimensional.

De ahora en adelante, a menos que se indique lo contrario, nos referiremos a un *diagrama plano de un nudo* simplemente como **diagrama**.

Estos diagramas permiten representar nudos de manera finita y visual, y, lo más importante, dos diagramas representan el mismo nudo si y solo si pueden transformarse uno en el otro mediante una secuencia finita de movimientos de Reidemeister.

² Robert G. Scharein: *KnotPlot*. Software para visualización de nudos. Centre for Experimental and Constructive Mathematics, Simon Fraser University. 2025. <https://knotplot.com/>.

³ Colin C. Adams: *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. Revised reprint of the 1994 original. Providence, RI: American Mathematical Society, 2004. ISBN: 978-0-8218-3678-1.

⁴ Gerhard Burde, Heiner Zieschang y Michael Heusener: *Knots*. 3rd, fully revised and extended. Vol. 5. De Gruyter Studies in Mathematics. Berlin; Boston: De Gruyter, 2014. ISBN: 978-3-11-027074-7.

⁵ The Knot Atlas: *Project Homepage*. https://katlas.org/wiki/Main_Page.

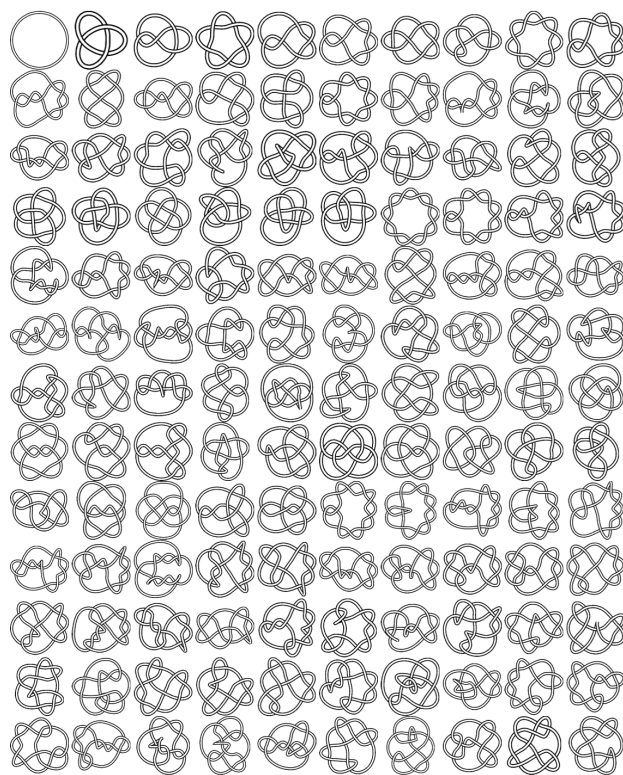


Figura 2. Tabla de nudos de Rolfsen (hasta 10 cruces).

Definición 1.2.4 (Movimientos de Reidemeister). *Dos diagramas planos regulares de nudos son equivalentes por movimientos de Reidemeister si uno puede obtenerse del otro mediante una secuencia finita de las siguientes transformaciones locales:*

R1 Movimiento de tipo I: *Introducir o eliminar un lazo con un único cruce.*

R2 Movimiento de tipo II: *Crear o cancelar un par de cruces opuestos deslizando un arco sobre otro.*

R3 Movimiento de tipo III: *Deslizar un cruce sobre otro cruce (cambiando el orden de interacción de tres arcos, manteniendo las convenciones de cruce).*

Estos movimientos se aplican localmente: el resto del diagrama permanece inalterado⁶.

⁶ Dale Rolfsen: *Knots and Links*. (Original work published 1976). Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.

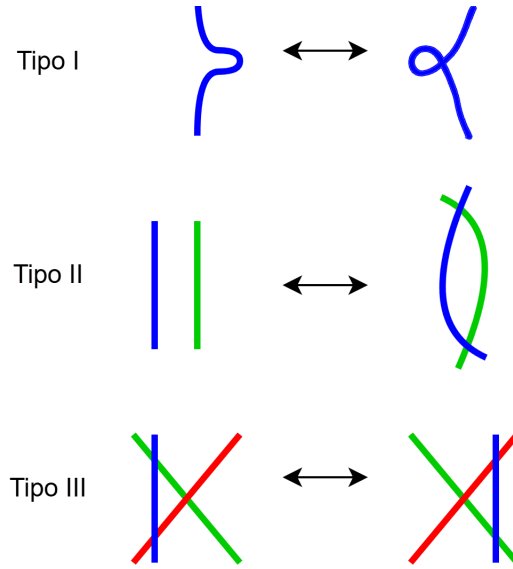


Figura 3. Movimientos de Reidemeister.

Definición 1.2.5 (Isotopía ambiente). *Dadas dos funciones continuas $\varphi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, decimos que están relacionadas por una isotopía ambiente si existe una familia continua de homeomorfismos $H_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizada por $t \in [0, 1]$, tal que:*

$$H_0 = \varphi, \quad H_1 = \psi,$$

y la aplicación $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $H(x, t) = H_t(x)$ es continua.

Definición 1.2.6 (Nudos equivalentes). *Dos nudos γ_1 y γ_2 en $\mathbb{R}^3$ son equivalentes si existe una isotopía ambiente H_t tal que*

$$H_0(x) = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3, \quad \text{y} \quad H_1(\gamma_1) = \gamma_2.$$

Esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva, por lo tanto, es una relación de equivalencia.

La clase de equivalencia de un nudo K se denota por $[K] = \{ K' \subset \mathbb{R}^3 \mid K' \text{ es un nudo y } K' \sim K \}$.

Aunque la definición de equivalencia mediante isotopía ambiente es conceptualmente natural desde la perspectiva topológica, su verificación directa resulta intratable en la práctica debido a la complejidad de caracterizar todas las deformaciones continuas posibles en $\mathbb{R}^3$. Es necesario establecer ciertos resultados preliminares. Estos incluyen la formalización de enlaces poligonales y sus propiedades básicas, que proporcionan el marco discreto necesario para analizar las proyecciones regulares. Una vez asentadas

estas bases, el Teorema de Reidemeister 1.3) permite reducir el problema de la equivalencia de nudos a una secuencia finita de tres movimientos locales elementales (tipos I, II y III) sobre sus diagramas planos.

Definición 1.2.7 (Isotopía planar). *Dadas dos funciones continuas $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, decimos que están relacionadas por una isotopía planar (o isotopía ambiente en el plano) si existe una familia continua de homeomorfismos $H_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por $t \in [0, 1]$, tal que:*

$$H_0 = \varphi, \quad H_1 = \psi,$$

y la aplicación $H : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $H(x, t) = H_t(x)$ es continua⁷.

Definición 1.2.8 (Nudo Poligonal). *Un nudo poligonal es una curva cerrada simple K en $\mathbb{R}^3$ compuesta por un número finito de segmentos de recta (aristas) unidos por vértices. Formalmente, sea $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$. El nudo K es la unión de los segmentos $[v_i, v_{i+1}]$ para $i = 0, \dots, n-2$ y el segmento $[v_{n-1}, v_0]$, cumpliendo dos condiciones esenciales:*

1. **Inyectividad geométrica:** Los segmentos no consecutivos no se intersecan, y los segmentos consecutivos solo se tocan en el vértice común. Es decir, $[v_i, v_{i+1}] \cap [v_j, v_{j+1}] = \emptyset$ si $|i - j| > 1$ (mód n), y $\{v_i\}$ si son adyacentes. (Ver figura 4)
2. **Homeomorfismo:** La curva resultante es homeomorfa al círculo S^1 .

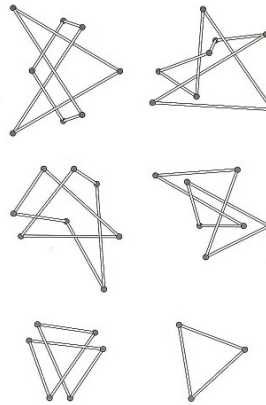


Figura 4. Ejemplo de la construcción poligonal de los primeros 6 nudos.

⁷ Vassily Olegovich Manturov: *Knot Theory*. 2nd. Boca Raton, FL: CRC Press, 2018. ISBN: 978-1-138-56136-3.

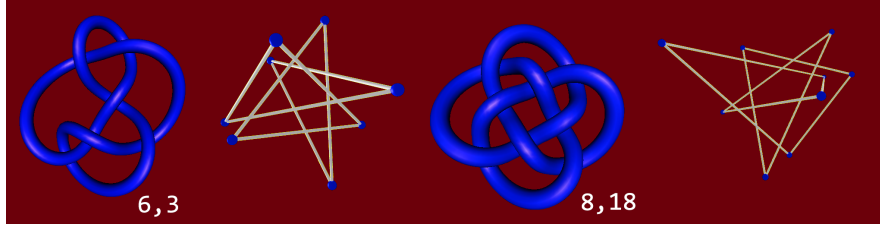


Figura 5. Comparación entre los nudos 6_3 y 8_{18} de la tabla de Rolfsen que son el nudo de 6 cruces del tipo 3 y el nudo de 8 cruces del tipo 18. Se muestran sus respectivas representaciones poligonales, evidenciando diferencias estructurales entre ambos.

Definición 1.2.9 (Enlace). *Un enlace de m componentes es una subvariedad suave de $\mathbb{R}^3$ (o S^3) que consiste en la unión disjunta de m nudos suaves $K_1, K_2, \dots, K_m$. Formalmente, un enlace L es la imagen de un encaje suave:*

$$f : \bigsqcup_{i=1}^m S_i^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

donde $\bigsqcup_{i=1}^m S_i^1$ denota la unión disjunta de m copias del círculo S^1 (ver figura 6). Cada componente $K_i = f(S_i^1)$ se denomina componente del enlace. En el caso particular en que $m = 1$, el enlace se identifica con un nudo. Dos enlaces L y L' se consideran equivalentes si existe una isotopía ambiente de $\mathbb{R}^3$ que transforma L en L' .

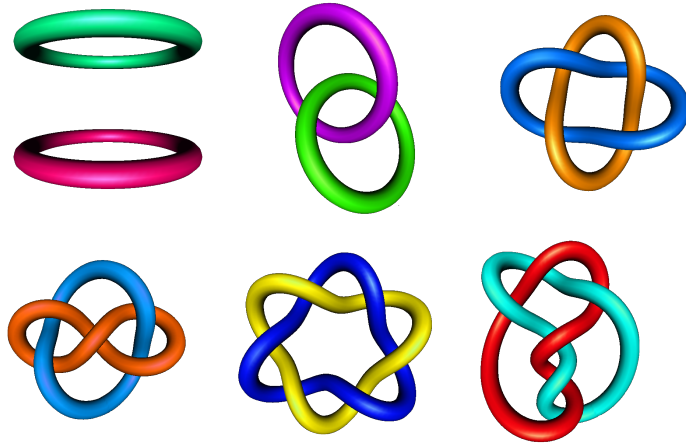


Figura 6. Comparativa visual de enlaces con creciente complejidad topológica. Se observa desde el enlace trivial de dos componentes separadas (superior izquierda), pasando por el enlace de Hopf de dos cruces (centro superior), hasta configuraciones más intrincadas de cuatro, cinco y seis cruces. Las imágenes evidencian cómo aumenta la simetría y el entrelazamiento a medida que crece el número de cruces, destacando la diferencia entre estructuras estelares regulares y formas asimétricas.

Definición 1.2.10. Un nudo K en $\mathbb{R}^3$ es **tame** si es ambientalmente isotópico a un nudo diferenciable (C^∞) o a un nudo poligonal (PL).

A menos que se especifique lo contrario, a lo largo de este trabajo se asumirá convencionalmente que todos los nudos considerados son *tame*.

La aproximación de un nudo suave por uno poligonal se fundamenta en dos ideas clave: suavización y triangulación, e isotopía por aproximación. Dado que un nudo *tame* posee por definición una parametrización geométrica regular en $\mathbb{R}^3$, este puede ser aproximado arbitrariamente bien por una curva poligonal. Esto es posible gracias a que los espacios euclidianos son triangulables y las funciones continuas definidas sobre compactos (como la imagen del nudo) son uniformemente continuas, lo que garantiza que pequeñas variaciones en el dominio producen pequeñas variaciones en la imagen.

Por otro lado, si dicha aproximación poligonal es suficientemente fina (es decir, si sus vértices están lo bastante cerca de la curva original), entonces existe una isotopía ambiente pequeña que deforma continuamente la curva suave hacia la poligonal sin introducir autointersecciones. Esta deformación está asegurada precisamente porque el nudo es *tame* (no presenta puntos de acumulación de enrollamientos infinitos ni comportamientos patológicos que impidan una aproximación controlada).

Por esta razón, es que si un nudo es *tame*, entonces también es equivalente a un nudo poligonal.

Sin embargo, al igual que ocurre con los nudos, existen enlaces *wild* (salvajes) que no son equivalentes a ningún enlace poligonal. Estos presentan complejidades locales infinitas que impiden su representación mediante un número finito de segmentos rectos. Por consiguiente, la equivalencia entre ser *tame* y ser equivalente a un objeto poligonal solo vale dentro de la clase de enlaces bien comportados.

En esta oportunidad, nos restringiremos exclusivamente al estudio de nudos y enlaces *tame*.

1.3. TEOREMA DE REIDEMEISTER

Teorema 1.3.1. Sean D_1 y D_2 diagramas de enlaces suaves. Entonces, D_1 y D_2 representan enlaces isotópicos si y solo si existe una sucesión finita de isotopías planas y de movimientos de Reidemeister Ω_1 , Ω_2 y Ω_3 que transforma D_1 en D_2 ⁸.

⁸ Vassily Olegovich Manturov: *Knot Theory*. 2nd. Boca Raton, FL: CRC Press, 2018. ISBN: 978-1-138-56136-3.

Uno puede probar este hecho utilizando la noción de codimensión; esto involucra algunos tecnicismos complicados. Aquí damos otra prueba para el caso de enlaces poligonales.

Demostración. Una implicación es evidente: uno simplemente debe verificar que los movimientos $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ no cambian la clase de isotopía del enlace.

Ahora, probemos la afirmación inversa del teorema. Sean D_1, D_2 dos diagramas planares de los dos enlaces poligonales isotópicos K_1 y K_2 . Por definición, la isotopía entre K_1 y K_2 consiste en un número finito de isotopías elementales que lucen como $[AB] \rightarrow [AC] \cup [CB]$. Aquí el “enlace antes” se reconstruye en el “enlace después”. Sin pérdida de generalidad, asumamos que para cada paso para el triángulo ABC , las aristas $[DA]$ y $[BE]$, provenientes de los extremos de $[AB]$, no intersecan el interior de ABC . De lo contrario, podemos obtenerlo usando Ω_1 .

Sea L_0 la proyección del “enlace antes” sobre el plano ABC . Dividamos las componentes de intersección de ABC y L_0 en dos conjuntos: superior e inferior, según la ubicación de las aristas del enlace K_0 con respecto al plano ABC .

Teselamos ABC en triángulos pequeños de los cuatro tipos de tal manera que las aristas de los triángulos pequeños no contengan vértices de L_0 . Cada triángulo de primer tipo contiene solo un cruce de L_0 ; aquí las aristas de L_0 intersecan dos lados del triángulo. El triángulo de segundo tipo contiene el único vértice de L_0 y partes de aristas salientes. El triángulo de tercer tipo contiene una parte de una arista de L_0 y ningún vértice⁹. Finalmente, el triángulo de cuarto tipo no contiene ni vértices ni aristas. Todos los tipos de triángulos excepto el cuarto (vacío) están ilustrados en:

⁹ Vassily Olegovich Manturov: *Knot Theory*. 2nd. Boca Raton, FL: CRC Press, 2018. ISBN: 978-1-138-56136-3.

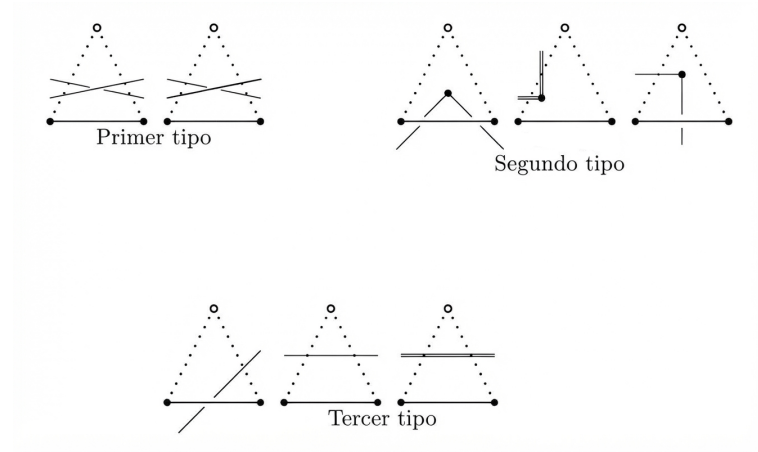


Figura 7. Clasificación de los triángulos pequeños utilizados en la triangulación del plano ABC : primer tipo (cruces), segundo tipo (vértices) y tercer tipo (aristas).

Tal triangulación de ABC puede construirse de la siguiente manera. Primero, cortamos todos los vértices y todos los cruces mediante triángulos del primer y segundo tipo, respectivamente. Luego teselamos la parte restante de ABC y obtenemos triángulos de los últimos dos tipos.

El plan de la prueba es ahora el siguiente. En lugar de realizar la isotopía elemental a ABC , realizamos isotopías elementales paso a paso para los triángulos pequeños que componen ABC . Está claro que estos movimientos elementales (isotopías) pueden representarse como combinaciones de movimientos de Reidemeister e isotopías planares.

Más precisamente, el triángulo de primer tipo genera una combinación de los movimientos de Reidemeister segundo y tercero, los triángulos de segundo y tercer tipo generan Ω_2 o isotopía planar. El triángulo de cuarto tipo genera isotopía planar. $\square$

Definición 1.3.2 (Invariante de nudos). Sea $\mathcal{K}$ el conjunto de nudos en $\mathbb{R}^3$, y $\sim$ la relación de equivalencia dada por isotopía ambiente. Un invariante de nudos es una función $\mathcal{I}: \mathcal{K} \rightarrow X$ que asigna a cada nudo K un valor (numérico, algebraico, topológico, etc.) tal que

$$K_1 \sim K_2 \implies \mathcal{I}(K_1) = \mathcal{I}(K_2).$$

Los invariantes sirven para distinguir nudos no equivalentes: si dos nudos tienen un invariante diferente,

entonces son nudos distintos¹⁰.

Definición 1.3.3 (Imagen especular de un nudo¹¹). Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un nudo. Se define la **imagen especular** (o **nudo espejo**) de K , denotada por K^* , como el nudo obtenido al aplicar la reflexión ortogonal respecto al plano yz ,

$$r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r(x, y, z) = (-x, y, z).$$

Es decir,

$$K^* := r(K) = \{ r(p) \mid p \in K \}.$$

Dado que r es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^3$, se sigue que K^* es también un nudo.

En términos de diagramas, si D es un diagrama plano de K , entonces un diagrama D^* de K^* se obtiene invirtiendo todos los cruces de D . Este proceso se denomina reflexión del diagrama.

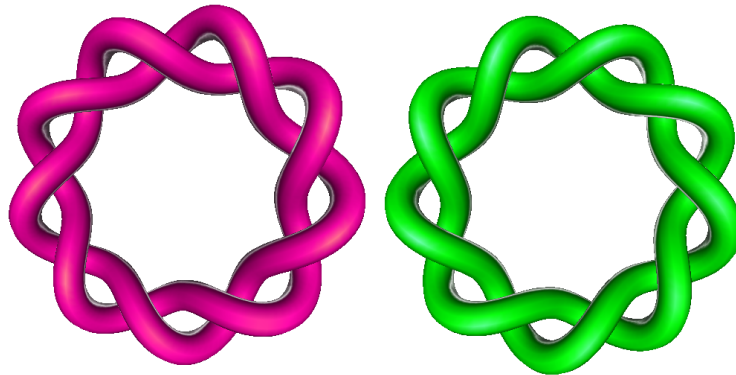


Figura 8. El nudo de nueve cruces 9_1 (izquierda) y su correspondiente imagen especular 9_1^* (derecha) .

Definición 1.3.4 (Nudo anfiquiral¹²). Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un nudo, y sea K^* su imagen especular. Decimos que K es **anfiquiral** si K y K^* son nudos equivalentes; es decir, si existe una isotopía ambiente $H_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

¹⁰ Dale Rolfsen: *Knots and Links*. (Original work published 1976). Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.

¹¹ Dale Rolfsen: *Knots and Links*. (Original work published 1976). Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.

¹² Dale Rolfsen: *Knots and Links*. (Original work published 1976). Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.

con $t \in [0, 1]$, tal que

$$H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3} \quad \text{y} \quad H_1(K) = K^*.$$

Equivalentemente, en términos de diagramas planos, K es anfiquiral si existe una secuencia finita de movimientos de Reidemeister que transforma un diagrama de K en un diagrama de K^* .

En particular, si $\mathcal{I}$ es un invariante de nudos que distingue orientación o quiralidad, entonces K es anfiquiral solo si $\mathcal{I}(K) = \mathcal{I}(K^*)$.

Un ejemplo de este comportamiento se ilustra en la Figura 9 basada en “Knot Theory and Error-Correcting Codes”¹³:

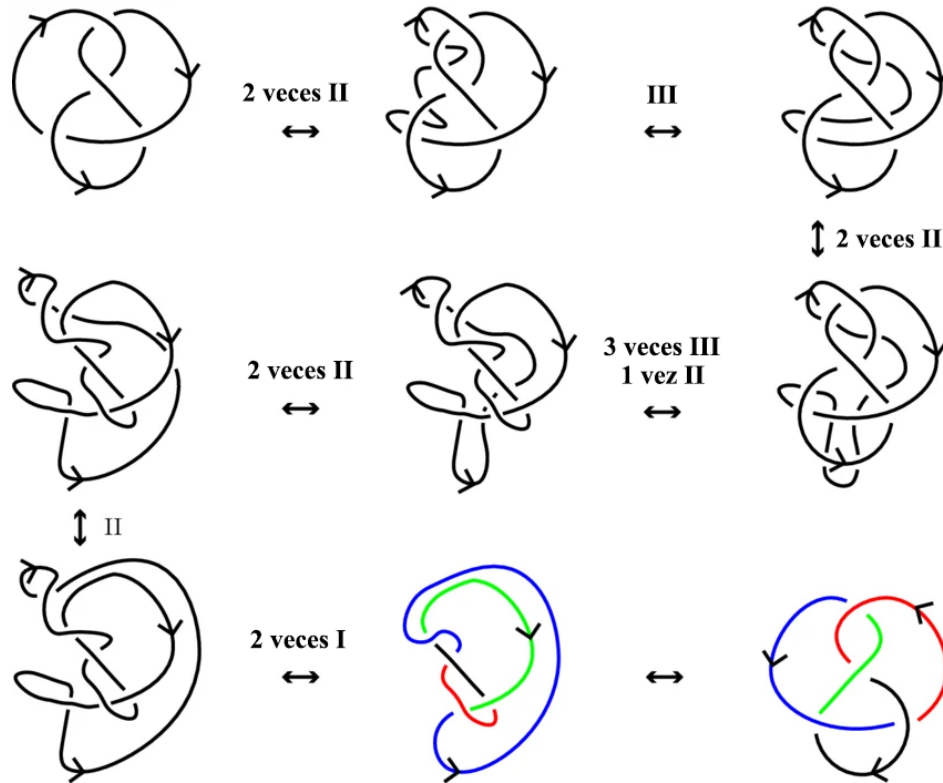


Figura 9. Secuencia de movimientos de Reidemeister que transforma el nudo ocho (4_1) en su imagen especular, demostrando que es anfiquiral .

¹³ Altan B. Kilic et al.: *Knot Theory and Error-Correcting Codes*. En: *Designs, Codes and Cryptography* (2025). DOI: 10.1007/s10623-025-01615-x.

2. PRELIMINARES DE TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

Las definiciones a continuación fueron tomadas de “Abstrac Algebra. 3rd”¹⁴.

Definición 2.0.1 (Grupo). Un **grupo** es un conjunto no vacío G dotado de una operación binaria $\cdot : G \times G \rightarrow G$, que asocia a cada par de elementos $(a, b) \in G \times G$ un elemento $a \cdot b \in G$, y que cumple los siguientes axiomas:

- **Asociatividad:** Para cualesquiera $a, b, c \in G$, se cumple que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- **Elemento neutro:** Existe un elemento $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$ para todo $a \in G$.
- **Elemento inverso:** Para cada $a \in G$, existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Como consecuencia directa de estos axiomas, se tiene que tanto el elemento neutro como el elemento inverso de cada miembro del grupo son únicos.

Definición 2.0.2 (Grupo cíclico). Un grupo G se dice que es **cíclico** si existe un elemento $g \in G$ tal que todo elemento de G puede expresarse como una potencia entera de g . El elemento g se denomina **generador** del grupo y la estructura se denota convencionalmente como $G = \langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Definición 2.0.3 (Subgrupo normal). Sea G un grupo. Un subgrupo $N \leq G$ se dice que es un **subgrupo normal** de G (lo cual se denota por $N \triangleleft G$) si es invariante bajo conjugación por cualquier elemento del grupo ambiente. Es decir, si para cada $g \in G$ y para cada $n \in N$ se verifica que:

$$gng^{-1} \in N$$

Equivalentemente, N es normal en G si y solo si sus clases laterales izquierdas coinciden con sus clases laterales derechas ($gN = Ng$ para todo $g \in G$).

Definición 2.0.4 (Grupo cociente). Sea G un grupo y sea $N \triangleleft G$ un subgrupo normal de G . El **grupo cociente** de G por N , denotado por G/N , es el conjunto de todas las clases laterales (izquierdas o

¹⁴ David S. Dummit y Richard M. Foote: *Abstract Algebra*. 3rd. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2004.

derechas) de N en G , es decir, $G/N = \{gN \mid g \in G\}$. Este conjunto forma un grupo bajo la operación binaria inducida definida por:

$$(aN) \cdot (bN) = (ab)N \quad \text{para cualesquiera } a, b \in G$$

donde la identidad corresponde a la clase $eN = N$ y el inverso está dado por $(gN)^{-1} = g^{-1}N$.

Por otro lado, las siguientes son tomadas de “topología. 2nd”¹⁵

Definición 2.0.5 (Camino). Sea X un espacio topológico. Un camino en X es una función continua

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow X.$$

Los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ se llaman punto inicial y punto final del camino, respectivamente.

Definición 2.0.6 (Lazo). Sea X un espacio topológico y sea $x_0 \in X$ un punto fijo (llamado punto base). Un lazo basado en x_0 es un camino $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tal que

$$\alpha(0) = \alpha(1) = x_0.$$

Es decir, el camino comienza y termina en el mismo punto x_0 .

Definición 2.0.7 (Concatenación de caminos). Sean $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ dos caminos en un espacio topológico X tales que el punto final de α coincide con el punto inicial de β , es decir, $\alpha(1) = \beta(0)$. La concatenación de α y β , denotada $\alpha * \beta$, es el camino definido por:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Esta definición garantiza que α se recorre completamente durante el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ y β durante $[\frac{1}{2}, 1]$, de modo que $\alpha * \beta$ es un camino continuo en $[0, 1]$.

El siguiente ejemplo es una concatenación de caminos en el plano: Camino $\alpha(t) = (t, t^2)$, desde $x_0 = (0, 0)$

¹⁵ James R. Munkres: *Topología*. 2nd. Madrid: Pearson Education, 2000. ISBN: 978-84-205-3561-4.

hasta $x_1 = (1, 1)$; Camino $\beta(t) = (1 + t, 1 - t)$, desde $x_1 = (1, 1)$ hasta $x_2 = (2, 0)$. Concatenación $\alpha * \beta$, definida en $[0, 1]$, que recorre primero α en $[0, \frac{1}{2}]$ y luego β en $[\frac{1}{2}, 1]$.

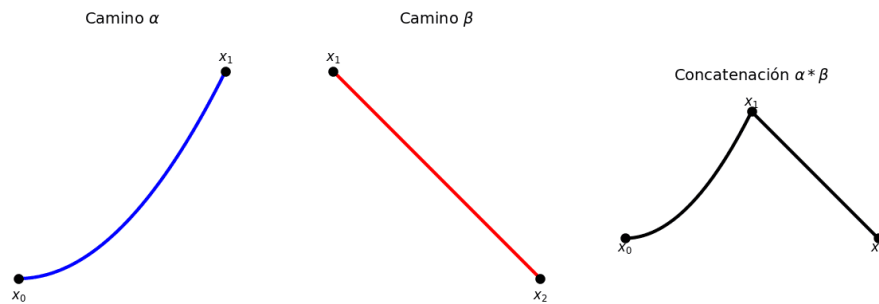


Figura 10. Concatenación $\alpha * \beta$. (Elaborado en Python)

2.1. HOMOTOPÍA

Definición 2.1.1. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos funciones continuas entre espacios topológicos. Una homotopía entre f y g es una función continua

$$H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

tal que

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x, 1) = g(x) \quad \text{para todo } x \in X.$$

Decimos que f y g son homotópicas, y escribimos $f \simeq g$, si existe tal homotopía. Intuitivamente, H describe una deformación continua de f en g .

Definición dada en "topología. 2nd"¹⁶

¹⁶ James R. Munkres: *Topología*. 2nd. Madrid: Pearson Education, 2000. ISBN: 978-84-205-3561-4.

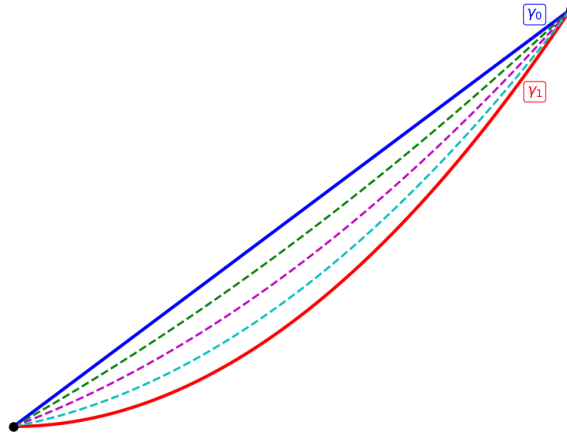


Figura 11. Ejemplo de homotopía $H(s, t) = (t, (1 - s)t + st^2)$, $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ entre los caminos $\gamma_0(t) = (t, t)$ y $\gamma_1(t) = (t, t^2)$. (Elaborado en Python)

2.2. HOMOTOPÍA DE LAZOS

Definición 2.2.1. Sean $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ dos lazos en X basados en el mismo punto $x_0 \in X$ (es decir, $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = x_0$). Decimos que α y β son homotópicos como lazos basados en x_0 si existe una homotopía $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ entre α y β que mantiene fijo el punto base durante toda la deformación, es decir:

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha(s), & H(s, 1) &= \beta(s) & \text{para todo } s \in [0, 1], \\ H(0, t) &= x_0, & H(1, t) &= x_0 & \text{para todo } t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

En este caso, escribimos $\alpha \simeq \beta$ (relativo a $\{0, 1\}$) o simplemente decimos que son homotópicos como lazos basados en x_0 ¹⁷.

Definición 2.2.2 (Espacio conexo por caminos). Un espacio topológico X es **conexo por caminos** si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. A γ se le llama un **camino** de x a y ¹⁸.

¹⁷ James R. Munkres: *Topología*. 2nd. Madrid: Pearson Education, 2000. ISBN: 978-84-205-3561-4.

¹⁸ James R. Munkres: *Topología*. 2nd. Madrid: Pearson Education, 2000. ISBN: 978-84-205-3561-4.

Definición 2.2.3 (Espacio convexo). *Un subconjunto C de un espacio vectorial real (como el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$) se dice que es **convexo** si para cualquier par de puntos $x, y \in C$, el segmento de recta que los une está completamente contenido en C . Es decir, si para todo $x, y \in C$ y para cada $t \in [0, 1]$ se verifica que:*

$$(1 - t)x + ty \in C$$

Aunque todo convexo es simplemente conexo, lo recíproco no es cierto (por ejemplo, una esfera S^2 es simplemente conexa pero no es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^3$).

Definición 2.2.4 (Aplicación y lazo nulhomotópico). *Sean X y Y dos espacios topológicos. Una aplicación continua $g : X \rightarrow Y$ se dice que es **nulhomotópica** si es homotópica a una aplicación constante. Es decir, si existe una aplicación constante $c : X \rightarrow Y$ (donde $c(x) = y_0$ para todo $x \in X$ y un punto fijo $y_0 \in Y$) y una homotopía continua $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que:*

- $F(x, 0) = g(x)$ para todo $x \in X$,
- $F(x, 1) = y_0$ para todo $x \in X$.

2.3. GUPOS FUNDAMENTALES

Definición 2.3.1 (Grupo fundamental). *Sea X un espacio topológico arcoconexo y sea $x_0 \in X$ un punto base. El grupo fundamental de X en x_0 , denotado $\pi_1(X, x_0)$, es el conjunto de todas las clases de homotopía de lazos basados en x_0 , con la operación de grupo dada por la concatenación:*

$$[\alpha] \cdot [\beta] := [\alpha * \beta].$$

Este conjunto forma un grupo (no necesariamente abeliano), cuyo elemento neutro es la clase del lazo constante en x_0 , y los inversos están dados por recorrer el lazo en sentido contrario. Además, $\pi_1(X, x_0)$ es un invariante topológico (demostración en la Sección 3.1): si X e Y son homeomorfos, entonces sus grupos fundamentales son isomorfos.

El grupo fundamental se define a partir de lazos que comienzan y terminan en un punto fijo, llamado punto base. Si se elige otro punto base, en principio se podría obtener un grupo distinto. Sin embargo, cuando el espacio es arcoconexo, es decir, se puede unir cualquier par de puntos mediante un camino contenido en el espacio, los grupos fundamentales obtenidos con distintos puntos base son isomorfos. Por lo tanto, aunque el grupo fundamental dependa técnicamente del punto base seleccionado, como invariante solo importa

su clase de isomorfismo, la cual es única. Así, se puede hablar de “el grupo del nudo” sin necesidad de especificar el punto base,¹⁹.

Ejemplo 2.3.2 (Grupo fundamental de la circunferencia S^1). *El grupo fundamental de la circunferencia, con punto base $x_0 \in S^1$, es isomorfo al grupo aditivo de los enteros:*

$$\pi_1(S^1, x_0) \cong (\mathbb{Z}, +)$$

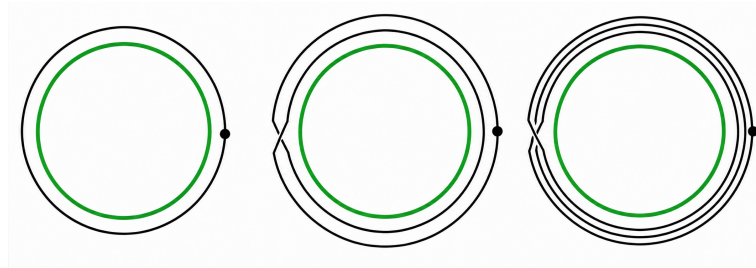


Figura 12. Una forma visual de entender $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. El círculo verde es nuestra circunferencia base S^1 . Las líneas negras muestran lazos que se enrollan a su alrededor: el primero da 1 vuelta (clase 1), el segundo da 2 vueltas (clase 2) y el tercero da 3 vueltas (clase 3). Básicamente, cada número entero corresponde a cuántas veces das la vuelta al círculo; como no puedes desenrollar un lazo de 3 vueltas para convertirlo en uno de 2 sin romperlo, cada número representa una clase distinta.

Ejemplo 2.3.3 (Trivialidad del grupo fundamental de S^2). *Sea $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$. Se tiene que:*

$$\pi_1(S^2, x_0) \cong \{1\}$$

¹⁹ Allen Hatcher: *Algebraic Topology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

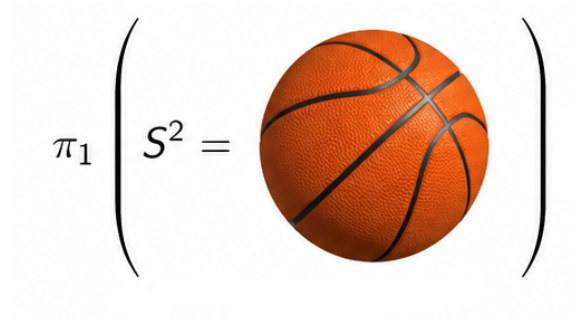


Figura 13. La esfera S^2 puede entenderse como la piel externa de una pelota de baloncesto. Se trata de una superficie cerrada pero vacía en su interior, similar a un globo desinflado o una burbuja.

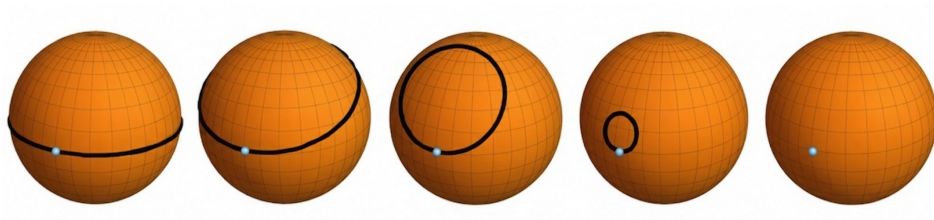


Figura 14. Intuición geométrica de por qué $\pi_1(S^2) = \{1\}$. La secuencia muestra cómo cualquier lazo dibujado sobre la esfera (como el ecuador negro) puede deslizarse y contraerse continuamente hasta convertirse en un solo punto. A diferencia del círculo, en la esfera no hay ningún agujero que impida este movimiento, por lo que todos los lazos son triviales.

Ejemplo 2.3.4. Sea T^2 el toro bidimensional. El grupo fundamental del toro es:

$$\pi_1(T^2, x_0) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Esto se debe a que el toro puede verse como el espacio producto de dos círculos, $S^1 \times S^1$. Dado que el grupo fundamental de un círculo es $\mathbb{Z}$, por la propiedad del producto para grupos fundamentales²⁰ tenemos:

$$\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

²⁰ James R. Munkres: *Topología*. 2nd. Madrid: Pearson Education, 2000. ISBN: 978-84-205-3561-4.

Intuitivamente, los generadores a (meridiano) y b (longitud) corresponden a los dos ciclos no triviales que no pueden colapsarse a un punto. Al ser un grupo abeliano, se cumple la relación de conmutatividad $aba^{-1}b^{-1} = 1$.

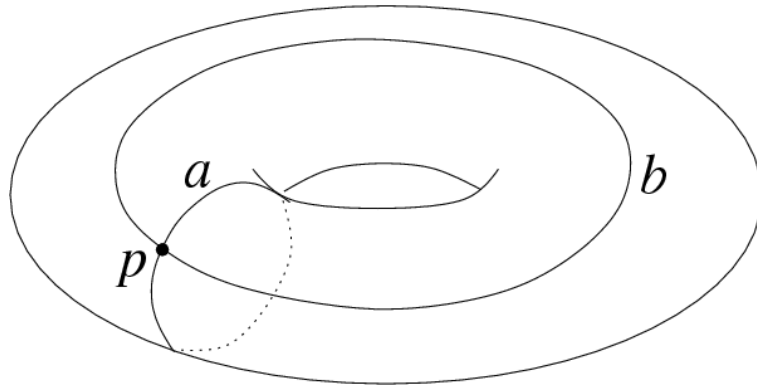


Figura 15. Representación del toro T^2 con sus lazos generadores a (meridiano) y b (longitud) .

El siguiente resultado es tomado de “Algebraic Topology”²¹

Proposición 2.3.5. Para toda esfera de dimensión $n \geq 2$, se cumple que:

$$\pi_1(S^n) \cong \{1\}$$

Demostración. El argumento para calcular el grupo fundamental de S^n se basa en dos hechos fundamentales:

1. $S^n \setminus \{pt\} \cong \mathbb{R}^n$, y $\mathbb{R}^n$ es contráctil para todo $n \geq 1$.
2. Todo lazo $\gamma : S^1 \rightarrow S^n$ es homotópico a un lazo que no es sobreyectivo, es decir, que omite al menos un punto de S^n .

La validez del primer hecho se sustenta en dos construcciones geométricas estándar:

²¹ Allen Hatcher: *Algebraic Topology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

- **Homeomorfismo:** La equivalencia topológica $S^n \setminus \{pt\} \cong \mathbb{R}^n$ se establece explícitamente a través de la *proyección estereográfica*. Tomando sin pérdida de generalidad el polo norte $N = (0, \dots, 0, 1)$ como el punto omitido, la aplicación $\phi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida analíticamente por:

$$\phi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

es continua, biyectiva y posee una inversa continua, lo que formaliza el homeomorfismo.

- **Contractibilidad:** El espacio $\mathbb{R}^n$ es contráctil al origen 0 mediante la homotopía en línea recta $H : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por la interpolación lineal $H(x, t) = (1 - t)x$. Esta aplicación continua deforma la identidad $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ en la aplicación constante e_0 , garantizando que su grupo fundamental sea trivial.

Para demostrar el segundo hecho, consideremos un lazo continuo f en S^n con punto base x_0 . Si la imagen de f ya evita algún punto $x \in S^n$, entonces f es nulhomotópico debido a que $S^n \setminus \{x\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, el cual es simplemente conexo. Por lo tanto, bastará con encontrar una homotopía que deforme a f en un lazo que no sea sobreyectivo.

Para lograr esto, tomemos una pequeña bola abierta B en S^n centrada en cualquier punto $x \neq x_0$. Analizaremos el lazo observando cómo entra, pasa por el punto x y sale de la bola B . Aunque las trayectorias dentro de B podrían ser geométricamente muy complejas (como en el caso extremo de que el lazo intente llenar todo el espacio), es posible empujar estas trayectorias fuera de x sin alterar el resto del lazo.

Dado que B es un conjunto abierto, su preimagen $f^{-1}(B)$ es un conjunto abierto en el intervalo abierto $(0, 1)$, lo que significa que es la unión de una colección de intervalos abiertos disjuntos (a_i, b_i) . El conjunto $f^{-1}(x)$ es un subconjunto cerrado dentro del intervalo cerrado $[0, 1]$, por lo que es compacto. Como este conjunto compacto está contenido en la unión de los intervalos abiertos, debe estar cubierto por una cantidad finita de ellos.

Consideremos uno de los intervalos (a_i, b_i) que interseca a $f^{-1}(x)$. El camino f_i obtenido al restringir f al intervalo cerrado $[a_i, b_i]$ se encuentra contenido en la clausura de B , y sus extremos $f(a_i)$ y $f(b_i)$ están en la frontera de B .

Como $n \geq 2$, la frontera de B (que es una esfera de dimensión $n - 1$) es conexa por caminos, por lo que podemos elegir un camino alternativo g_i desde $f(a_i)$ hasta $f(b_i)$ que se encuentre en la frontera de B (y que, por lo tanto, no pase por el punto x).

Dado que la clausura de B es homeomorfa a un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ (y por ende es simplemente conexa), el camino original f_i es homotópico al nuevo camino g_i manteniendo fijos los extremos. Por lo tanto, podemos deformar el lazo original sustituyendo de manera continua cada porción f_i por g_i .

Al repetir este proceso para cada uno de los pocos intervalos (a_i, b_i) que contienen puntos que van a parar a x , obtenemos un lazo final g que es homotópico al lazo original f pero cuya imagen evita por completo el punto x .

Como la imagen de g no es sobreyectiva al omitir el punto x , se tiene que $\text{Im}(g) \subset S^n \setminus \{x\} \cong \mathbb{R}^n$. Dado que $\mathbb{R}^n$ es contráctil, el lazo g (y por transitividad de la homotopía, el lazo original f) es nulhomotópico en S^n , lo que demuestra que $\pi_1(S^n) \cong \{1\}$ para todo $n \geq 2$. □

3. GRUPO FUNDAMENTAL DE NUDOS

Definición 3.0.1. Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un nudo. El grupo fundamental del nudo K , denotado $\pi_1(K)$ o $G(K)$, se define como el grupo fundamental del complemento de K en $\mathbb{R}^3$:

$$G(K) := \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K).$$

Definición tomada de “Algebraic Topology”²².

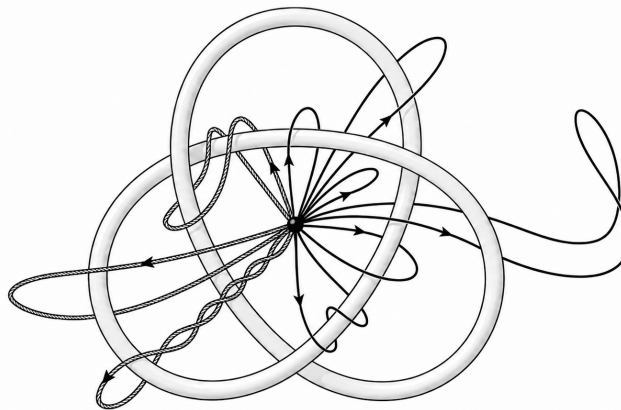


Figura 16. Representación esquemática de distintos lazos contenidos en el grupo fundamental del nudo trébol ($\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$). Algunas de estas trayectorias son homotópicas entre sí, representando así el mismo elemento algebraico dentro del grupo.

Tomado de “The Power of Group Generators and Relations”²³.

Para construir el grupo fundamental del nudo, imaginamos un punto fijo en el espacio vacío que lo rodea (el punto base x_0). Desde este punto, lanzamos “cuerdas” imaginarias hacia cada una de las ramas del nudo.

²² Allen Hatcher: *Algebraic Topology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

²³ Tiancheng Zhou: *The Power of Group Generators and Relations: An Examination of the Concept and Its Applications*. En: *Journal of Applied Mathematics and Physics* 6 (2018), págs. 2425-2444. ISSN: 2327-4379. DOI: 10.4236/jamp.2018.611204. <https://doi.org/10.4236/jamp.2018.611204>.

Al llegar a una rama, la cuerda forma un pequeño círculo o lazo que la rodea completamente (un meridiano) y regresa inmediatamente al punto base (ver figura 17). Cada uno de estos lazos individuales actúa como un generador elemental del sistema.

El grupo fundamental completo no es más que el conjunto de todas las trayectorias posibles que se pueden formar combinando estos lazos básicos. Estas combinaciones se realizan mediante dos operaciones intuitivas:

- **Concatenación:** Recorrer un lazo generador y, sin detenerse, continuar inmediatamente con otro.
- **Potenciación:** Repetir el mismo lazo varias veces seguidas (dar dos, tres o más vueltas a la misma rama) o recorrerlo en sentido inverso.

Así, cualquier elemento del grupo puede visualizarse como un camino largo y complejo que sale de x_0 , serpentea alrededor de distintas partes del nudo siguiendo una secuencia específica de giros, y finalmente regresa al origen.

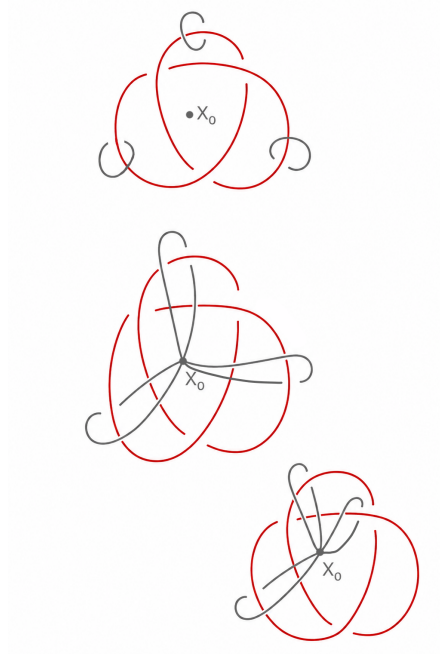


Figura 17. Construcción geométrica de los generadores del grupo fundamental del nudo trébol. Se ilustran los lazos meridianos alrededor de cada arco del nudo y su conexión mediante caminos hacia un punto base común x_0 , formando la estructura de generadores del grupo.

Para comprender cómo se relacionan e interactúan estos generadores dentro de la estructura del grupo, es necesario determinar las relaciones algebraicas que los vinculan. Estas relaciones se obtienen sistemáticamente mediante el algoritmo de Wirtinger, cuya formulación y detalles técnicos abordaremos más adelante, una vez hayamos desarrollado los conceptos preliminares necesarios para su correcta interpretación.

A continuación, se formaliza la propiedad fundamental del complemento del nudo como un invariante topológico robusto bajo la equivalencia de nudos. Cabe señalar que, si bien el enunciado de la siguiente proposición es un resultado clásico referenciado en la literatura especializada (véase Rolfsen 2003), el desglose formal y el desarrollo constructivo de la demostración aquí presentada han sido estructurados de manera independiente como parte del aparato analítico de este trabajo.

3.1. INVARIANCIA DEL GRUPO DEL NUDO

Proposición 3.1.1. *Si dos nudos K_1 y K_2 en S^3 tienen grupos fundamentales no isomorfos,*

$$\pi_1(S^3 \setminus K_1) \not\cong \pi_1(S^3 \setminus K_2),$$

entonces K_1 y K_2 no son isotópicamente equivalentes²⁴.

Demostración. Demostramos por contrarrecíproco: suponemos que K_1 y K_2 son isotópicamente equivalentes, y probamos que $\pi_1(S^3 \setminus K_1) \cong \pi_1(S^3 \setminus K_2)$.

Por hipótesis, existe una isotopía ambiente $H : S^3 \times [0, 1] \rightarrow S^3$ tal que:

- $H_0 = \text{id}_{S^3}$,
- $H_1(K_1) = K_2$,
- para cada $t \in [0, 1]$, la aplicación $H_t : S^3 \rightarrow S^3$ definida por $H_t(x) = H(x, t)$ es un homeomorfismo.

Sea $h = H_1|_{S^3 \setminus K_1} : S^3 \setminus K_1 \rightarrow S^3 \setminus K_2$, que está bien definida:

²⁴ Dale Rolfsen: *Knots and Links*. (Original work published 1976). Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.

Como H_1 es biyectivo y $H_1(K_1) = K_2$, tenemos:

$$H_1(S^3 \setminus K_1) = S^3 \setminus H_1(K_1) = S^3 \setminus K_2$$

Por tanto, h lleva $S^3 \setminus K_1$ en $S^3 \setminus K_2$.

Además, h es continua por ser restricción de H_1 que es continua.

Veamos que h es biyectiva.

- *Inyectiva:* Si $h(x) = h(y)$ para $x, y \in S^3 \setminus K_1$, entonces $H_1(x) = H_1(y)$. Como H_1 es inyectiva, $x = y$.
- *Sobreyectiva:* Para todo $y \in S^3 \setminus K_2$, existe $x = H_1^{-1}(y) \in S^3 \setminus K_1$ tal que $h(x) = y$.

La inversa es $h^{-1} = H_1^{-1}|_{S^3 \setminus K_2}$, que es continua por ser restricción de H_1^{-1} .

Así, tenemos que $h : S^3 \setminus K_1 \rightarrow S^3 \setminus K_2$ es un homeomorfismo.

Fijamos un punto base $x_0 \in S^3 \setminus K_1$. Definimos el homomorfismo inducido:

$$h_* : \pi_1(S^3 \setminus K_1, x_0) \longrightarrow \pi_1(S^3 \setminus K_2, h(x_0))$$

mediante:

$$h_*([f]) = [h \circ f]$$

donde $f : [0, 1] \rightarrow S^3 \setminus K_1$ es un lazo basado en x_0 .

Si $[f] = [g]$, existe una homotopía de lazos $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^3 \setminus K_1$ con:

- $F(s, 0) = f(s), F(s, 1) = g(s)$
- $F(0, t) = F(1, t) = x_0$

Definimos $G = h \circ F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^3 \setminus K_2$. Entonces:

- $G(s, 0) = h(f(s)) = (h \circ f)(s)$
- $G(s, 1) = h(g(s)) = (h \circ g)(s)$
- $G(0, t) = G(1, t) = h(x_0)$

Por tanto, G es una homotopía entre $h \circ f$ y $h \circ g$, lo que implica $[h \circ f] = [h \circ g]$.

h_* está bien definido.

Para $[f], [g] \in \pi_1(S^3 \setminus K_1, x_0)$:

$$\begin{aligned}
 h_*([f] \cdot [g]) &= h_*([f * g]) \\
 &= [h \circ (f * g)] \\
 &= [(h \circ f) * (h \circ g)] \quad (\text{pues } h \circ (f * g) = (h \circ f) * (h \circ g)) \\
 &= [h \circ f] \cdot [h \circ g] \\
 &= h_*([f]) \cdot h_*([g])
 \end{aligned}$$

h_* es un homomorfismo.

Como h es homeomorfismo, existe $h^{-1} : S^3 \setminus K_2 \rightarrow S^3 \setminus K_1$ que induce:

$$(h^{-1})_* : \pi_1(S^3 \setminus K_2, h(x_0)) \rightarrow \pi_1(S^3 \setminus K_1, x_0)$$

Probamos que son inversos:

a) $(h^{-1})_* \circ h_* = \text{id}_{\pi_1(S^3 \setminus K_1, x_0)}$: Para todo $[f] \in \pi_1(S^3 \setminus K_1, x_0)$:

$$\begin{aligned}
 ((h^{-1})_* \circ h_*)([f]) &= (h^{-1})_*(h_*([f])) \\
 &= (h^{-1})_*([h \circ f]) \\
 &= [h^{-1} \circ (h \circ f)] \\
 &= [(h^{-1} \circ h) \circ f] \\
 &= [\text{id}_{S^3 \setminus K_1} \circ f] \\
 &= [f]
 \end{aligned}$$

b) $h_* \circ (h^{-1})_* = \text{id}_{\pi_1(S^3 \setminus K_2, h(x_0))}$: Para todo $[g] \in \pi_1(S^3 \setminus K_2, h(x_0))$:

$$\begin{aligned}
 (h_* \circ (h^{-1})_*)([g]) &= h_*((h^{-1})_*([g])) \\
 &= h_*([h^{-1} \circ g]) \\
 &= [h \circ (h^{-1} \circ g)] \\
 &= [(h \circ h^{-1}) \circ g] \\
 &= [\text{id}_{S^3 \setminus K_2} \circ g] \\
 &= [g]
 \end{aligned}$$

h_* es biyectivo con inverso $(h^{-1})_*$.

Luego, h_* es un isomorfismo. Así, $\pi_1(S^3 \setminus K_1) \cong \pi_1(S^3 \setminus K_2)$.

Por contrarrecíproco, si $\pi_1(S^3 \setminus K_1) \not\cong \pi_1(S^3 \setminus K_2)$, entonces K_1 y K_2 no son isotópicamente equivalentes. □

3.2. PRODUCTO LIBRE DE GRUPOS

Definición 3.2.1. El **producto libre** de dos grupos G y H , denotado $G * H$, es el conjunto de todas las palabras reducidas, las cuales se definen como sucesiones finitas de la forma

$$x_1 x_2 \cdots x_n$$

donde $n \geq 0$, cada factor x_i pertenece al conjunto $(G \cup H) \setminus \{e_G, e_H\}$ (donde e_G y e_H denotan los elementos neutros de G y H , respectivamente), y se cumple que factores adyacentes pertenecen a grupos distintos (es decir, si $x_i \in G$, entonces $x_{i+1} \in H$, y viceversa).

La operación en $G * H$ es la concatenación de palabras seguida de un proceso de reducción (eliminando elementos neutros que queden adyacentes y multiplicando factores consecutivos que pertenezcan al mismo grupo). El elemento neutro es la palabra vacía (el caso en que $n = 0$).

Bajo esta construcción, los grupos G y H se identifican naturalmente con subgrupos de $G * H$ mediante las

inclusiones canónicas

$$\iota_G: G \hookrightarrow G * H, \quad g \mapsto (g), \quad \iota_H: H \hookrightarrow G * H, \quad h \mapsto (h).$$

(Véase (William S. Massey: *A Basic Course in Algebraic Topology*. Vol. 127. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer-Verlag, 1991))

Definición 3.2.2 (Homomorfismo inducido por una aplicación continua). *Sea $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ tal que $f(x_0) = y_0$ una aplicación continua entre espacios topológicos punteados. Entonces f induce un homomorfismo de grupos*

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0),$$

definido por

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha],$$

donde $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ es la clase de homotopía de un lazo $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ basado en x_0 , y $f \circ \alpha$ es el lazo en Y basado en y_0 obtenido componiendo α con f .

Este homomorfismo está bien definido: si dos lazos α y α' son homotópicos en X manteniendo fijo el punto base x_0 (es decir, existe una homotopía $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, 1) = \alpha'(s)$, y $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ para todo t), entonces sus imágenes $f \circ \alpha$ y $f \circ \alpha'$ son homotópicas en Y manteniendo fijo y_0 . Por tanto, $[f \circ \alpha] = [f \circ \alpha']$ en $\pi_1(Y, y_0)$.

Además, f_ preserva la operación del grupo fundamental. Si $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces:*

$$f_*([\alpha] * [\beta]) = f_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] * [f \circ \beta] = f_*([\alpha]) * f_*([\beta]),$$

Así, f_ es un homomorfismo de grupos.*

Finalmente, si $\text{id}_X: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ es la identidad, entonces $(\text{id}_X)_([\alpha]) = [\text{id}_X \circ \alpha] = [\alpha]$, luego $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.*

Definición 3.2.3 (Homomorfismo inducido por la inclusión). *Sea $A \subseteq X$ subespacio topológico, con A y X conexos por caminos, y sea $x_0 \in A$. La **inclusión** es la aplicación continua*

$$i: (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0), \quad i(a) = a \quad \text{para todo } a \in A.$$

El homomorfismo inducido por i , denotado $i_*: \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, viene dado por

$$i_*([\gamma]) = [\gamma],$$

es decir, cada clase de homotopía de lazos en A se envía a la misma clase considerada como lazo en X . Este homomorfismo es inyectivo si y solo si todo lazo en A que puede contraerse a un punto en X ya podía contraerse a un punto dentro de A ²⁵.

Sin embargo, para abordar el cálculo efectivo de estos grupos fundamentales, la definición topológica por sí sola resulta insuficiente. Necesitamos un mecanismo algebraico que nos permita reconstruir la estructura global del espacio a partir de sus componentes locales. Es precisamente con este fin que introduciremos el *Teorema de Seifert-van Kampen*, la herramienta clave que nos permitirá descomponer y analizar la complejidad topológica subyacente.

Teorema 3.2.4. *Supongamos que $X = U \cup V$, donde U y V son conjuntos abiertos de X . Supongamos que $U \cap V$ es conexo por caminos y que $x_0 \in U \cap V$. Sean i y j las aplicaciones inclusión de U y V , respectivamente, en X . Entonces las imágenes de los homomorfismos inducidos*

$$i_*: \pi_1(U, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \quad \text{y} \quad j_*: \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

generan $\pi_1(X, x_0)$.

(La demostración de este resultado es presentada en “Topology. 2nd.”²⁶; Teorema 59.1.)

²⁵ Martin Søndergaard Christensen: «Introductory Knot Theory: The Knot Group and The Jones Polynomial». Bachelor Thesis in Mathematics. Copenhagen, Denmark: University of Copenhagen, Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, jul. de 2011. https://web.math.ku.dk/~moller/students/martin_Sondergaard_Christensen.pdf.

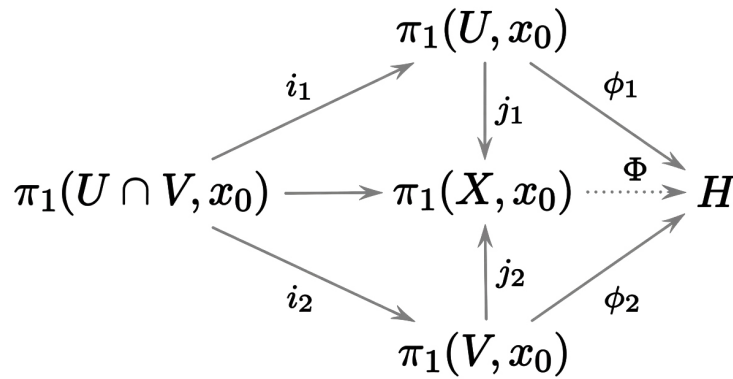
²⁶ James R. Munkres: *Topología*. 2nd. Madrid: Pearson Education, 2000. ISBN: 978-84-205-3561-4.

4. TEOREMA DE SEIFERT - VAN KAMPEN

Teorema 4.0.1 (Seifert - Van Kampen). Sea $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos en X ; supongamos que U , V y $U \cap V$ son conexos por caminos; sea $x_0 \in U \cap V$. Sea H un grupo y sean

$$\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \longrightarrow H \quad \text{y} \quad \phi_2 : \pi_1(V, x_0) \longrightarrow H$$

homomorfismos. Sean i_1, i_2, j_1, j_2 los homomorfismos indicados en el siguiente diagrama, cada uno de ellos inducido por la inclusión.



Si $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, entonces existe un único homomorfismo $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H$ tal que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$ y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$.

Además, sea:

$$j : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

el homomorfismo del producto libre que extiende los homomorfismos j_1 y j_2 inducidos por la inclusión. Entonces j es sobreyectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal N del producto libre que contiene todos los elementos representados por palabras de la forma

$$(i_1(g))^{-1}, i_2(g))$$

para $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$.

En otras palabras, el núcleo de j está generado por todos los elementos del producto libre de la forma $i_1(g)^{-1}i_2(g)$ y sus conjugados.

(Véase (Munkres 2000, Teoremas 70.1 y 70.2); la siguiente demostración se presenta siguiendo detalladamente el desarrollo y la estructura expuestos.)

Demostración.

La unicidad es fácil. El **teorema anterior** afirma que $\pi_1(X, x_0)$ está generado por las imágenes de j_1 y j_2 . El valor de Φ sobre el generador $j_1(g_1)$ debe ser igual a $\phi_1(g_1)$, y su valor sobre $j_2(g_2)$ debe coincidir con $\phi_2(g_2)$. Entonces Φ está completamente determinado por ϕ_1 y ϕ_2 . La demostración de que Φ existe es un caso aparte.

Por comodidad introduciremos la siguiente notación: dado un camino f en X , escribiremos $[f]$ para denotar su clase de homotopía de caminos en X . Si f está en U , entonces $[f]_U$ denotará su clase de homotopía de caminos en U . Las notaciones $[f]_V$ y $[f]_{U \cap V}$ se definen de modo similar.

Paso 1. Comenzamos definiendo una aplicación ρ que asigna a cada lazo f basado en x_0 , contenido en U o en V , un elemento de H . Definimos

$$\rho(f) = \phi_1([f]_U) \text{ si } f \text{ está en } U,$$

$$\rho(f) = \phi_2([f]_V) \text{ si } f \text{ está en } V.$$

Entonces ρ está bien definida, ya que si f está en la intersección de U y V , entonces

$$\phi_1([f]_U) = \phi_1 i_1([f]_{U \cap V}) \quad \text{y} \quad \phi_2([f]_V) = \phi_2 i_2([f]_{U \cap V}),$$

y estos dos elementos de H son iguales por hipótesis. La aplicación ρ satisface las siguientes condiciones:

(1) Si $[f]_U = [g]_U$, o si $[f]_V = [g]_V$, entonces $\rho(f) = \rho(g)$.

(2) Si f y g están en U , o si ambas están en V , entonces $\rho(f * g) = \rho(f) \cdot \rho(g)$.

La primera afirmación se satisface por definición, y la segunda porque tanto ϕ_1 como ϕ_2 son homomorfismos.

Paso 2. Ahora vamos a extender ρ a una aplicación σ que asigna a cada camino f contenido en U o en V , un elemento de H , tal que la aplicación σ satisfaga la condición (1) del Paso 1, y satisfaga la condición (2) cuando $f * g$ está definido.

Para comenzar elegimos, para cada $x \in X$, un camino α_x desde x_0 hasta x como sigue: si $x = x_0$, sea α_x el camino constante en x_0 . Si $x \in U \cap V$, sea α_x un camino en $U \cap V$. Y si x está en U o en V pero no en $U \cap V$, sea α_x un camino en U o en V , respectivamente.

Entonces para cualquier camino f en U o en V , definimos un lazo $L(f)$ en U o en V , respectivamente, basado en x_0 por la ecuación

$$L(f) = \alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y)$$

donde x es el punto inicial de f e y es el punto final de f (véase la Figura 18). Finalmente, definimos

$$\sigma(f) = \rho(L(f)).$$

Probemos que σ es una extensión de ρ . Si f es un lazo basado en x_0 que está en U o en V , entonces

$$L(f) = e_{x_0} * (f * e_{x_0})$$

ya que α_{x_0} es el camino constante en x_0 . Entonces $L(f)$ es homotópica por caminos a f en U o en V , de modo que $\rho(L(f)) = \rho(f)$ por la condición (1) para ρ . Por tanto, $\sigma(f) = \rho(f)$. la figura a continuación está inspirada en "Topología. 2nd."²⁷.

²⁷ James R. Munkres: *Topología*. 2nd. Madrid: Pearson Education, 2000. ISBN: 978-84-205-3561-4.

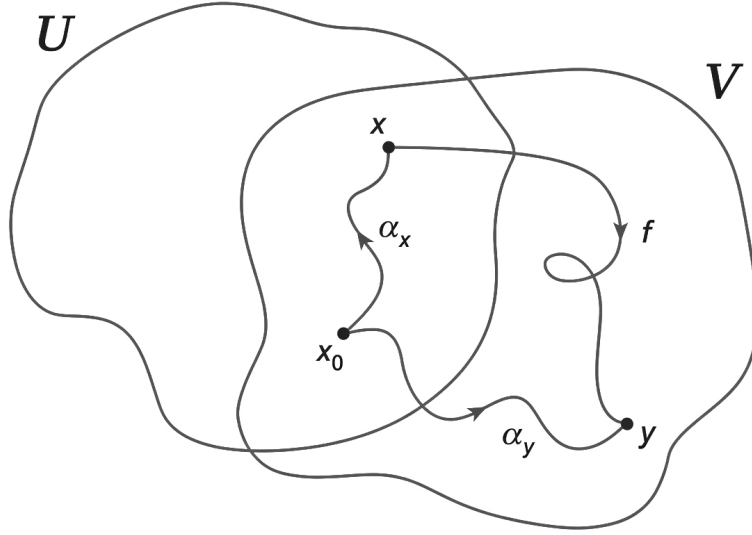


Figura 18. Construcción del lazo asociado $L(f)$ a partir de un camino cualquiera f con extremos en x e y , mediante la concatenación con los caminos elegidos α_x y $\bar{\alpha}_y$ basados en x_0 .

Para comprobar la condición (1), sean f y g caminos homotópicos en U o en V . Entonces los lazos $L(f)$ y $L(g)$ son también homotópicos por caminos en U o en V , de modo que la condición (1) para ρ se aplica. Para comprobar (2), sean f y g caminos arbitrarios en U o en V tales que $f(1) = g(0)$. Tenemos

$$L(f) * L(g) = (\alpha_x * (f * \bar{\alpha}_y)) * (\alpha_y * (g * \bar{\alpha}_z))$$

para puntos adecuados x, y, z ; este lazo es homotópico por caminos en U o en V a $L(f * g)$, por lo que

$$\rho(L(f * g)) = \rho(L(f) * L(g)) = \rho(L(f)) \cdot \rho(L(g))$$

por las condiciones (1) y (2) para ρ . Por tanto, $\sigma(f * g) = \sigma(f) \cdot \sigma(g)$.

Paso 3. Finalmente, extendemos la aplicación σ a una aplicación τ que lleva un camino arbitrario f a un elemento de H . Dicha aplicación satisfará las siguientes condiciones:

- (1) Si $[f] = [g]$ entonces $\tau(f) = \tau(g)$.
- (2) $\tau(f * g) = \tau(f) \cdot \tau(g)$, si $f * g$ está definido.

Dado f , escogemos una partición $s_0 < \dots < s_n$ de $[0, 1]$ tal que f aplica cada uno de los subintervalos $[s_{i-1}, s_i]$ en U o en V . Denotemos por f_i la aplicación lineal positiva del intervalo $[0, 1]$ en el intervalo $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con f . Entonces f_i es un camino en U o en V , y

$$[f] = [f_1] * \dots * [f_n].$$

Para que la aplicación τ constituya una extensión de σ que cumpla con las condiciones (1) y (2), se requiere la validez de la siguiente igualdad:

$$(*) \quad \tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdot \dots \cdot \sigma(f_n).$$

De modo que utilizaremos esta ecuación como definición de τ .

Probaremos que esta definición es independiente de la elección del subintervalo. Será suficiente con probar que el valor de $\tau(f)$ permanece invariable si añadimos un único punto p a la partición. Sea i el índice tal que $s_{i-1} < p < s_i$. Si calculamos $\tau(f)$ utilizando esta nueva partición, el único cambio en la fórmula (*) es que el factor $\sigma(f_i)$ desaparece y es reemplazado por el producto $\sigma(f'_i) \cdot \sigma(f''_i)$, donde f'_i y f''_i son las aplicaciones lineales positivas de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, p]$ y $[p, s_i]$, respectivamente, compuestas con f . Pero f_i es homotópica por caminos a $f'_i * f''_i$ en U o en V , de modo que $\sigma(f_i) = \sigma(f'_i) \cdot \sigma(f''_i)$, por las condiciones (1) y (2) para σ . Por tanto, τ está bien definida.

Se deduce que τ es una extensión de σ . En efecto, si f está en U o en V , podemos utilizar la partición trivial de $[0, 1]$ para definir $\tau(f)$; entonces $\tau(f) = \sigma(f)$ por definición.

Paso 4. Probemos la condición (1) para la aplicación τ . Esta parte de la demostración requiere tomar precauciones.

En primer lugar verificaremos esta condición en un caso especial. Sean f y g caminos en X desde x hasta y , y sea F una homotopía de caminos entre ellos. Supongamos la hipótesis adicional de que existe una partición $s_0 < \dots < s_n$ de $[0, 1]$ tal que F aplica cada rectángulo $R_i = [s_{i-1}, s_i] \times I$ dentro de U o de V . Probaremos en este caso que $\tau(f) = \tau(g)$.

Dado i , consideremos la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con f o con g y denominemos a estos dos caminos f_i y g_i , respectivamente. La restricción de F a cada rectángulo R_i

nos proporciona una homotopía entre f_i y g_i que toma valores en U o en V pero que no es una homotopía de caminos, ya que los extremos de los caminos pueden cambiar durante la homotopía. Consideremos los caminos trazados por los extremos durante la homotopía. Definimos β_i como el camino $\beta_i(t) = F(s_i, t)$. Entonces β_i es un camino en X desde $f(s_i)$ hasta $g(s_i)$. Los caminos β_0 y β_n son los caminos constantes en x e y , respectivamente (véase la Figura 19). Probaremos que, para cada i ,

$$f_i * \beta_i \simeq \beta_{i-1} * g_i$$

con la homotopía de caminos tomando valores en U o en V .

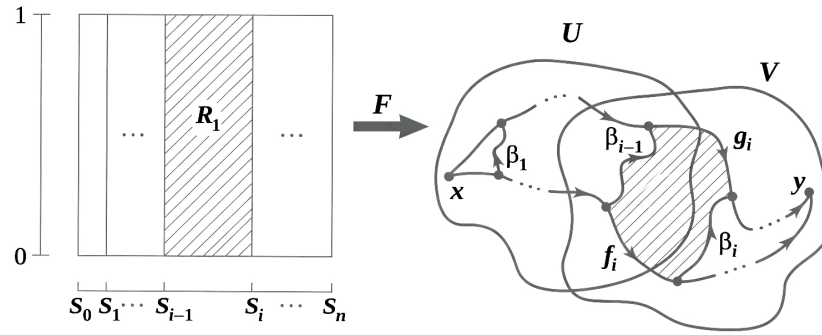


Figura 19. Subdivisión del dominio $[0, 1] \times [0, 1]$ en rectángulos elementales R_i y su correspondiente mapeo mediante la homotopía F sobre las regiones abiertas U y V , ilustrando el comportamiento de los caminos intermedios f_i , g_i y las curvas transversales β_i .

En el rectángulo R_i , consideremos el camino que recorre los lados inferior y derecho de R_i , desde $s_{i-1} \times 0$ hasta $s_i \times 0$ y hasta $s_i \times 1$; si componemos este camino con la aplicación F obtenemos el camino $f_i * \beta_i$. Análogamente, si consideramos el camino que recorre los lados izquierdo y superior de R_i y lo componemos con F obtenemos el camino $\beta_{i-1} * g_i$. Como R_i es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^2$, es un espacio contráctil, lo que garantiza la existencia de una homotopía lineal (en línea recta) entre cualquier par de curvas con extremos comunes dentro del propio rectángulo; al componer esta aplicación con la restricción de F , obtenemos de forma directa la homotopía de caminos deseada entre $f_i * \beta_i$ y $\beta_{i-1} * g_i$ que tiene lugar en el abierto correspondiente U o V .

Se deduce de las condiciones (1) y (2) que

$$\sigma(f_i) \cdot \sigma(\beta_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i)$$

de modo que

$$(**) \quad \sigma(f_i) = \sigma(\beta_{i-1}) \cdot \sigma(g_i) \cdot \sigma(\beta_i)^{-1}.$$

De manera similar se deduce que puesto que β_0 y β_n son caminos constantes, $\sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_n) = 1$. De la igualdad $\beta_0 * \beta_0 = \beta_0$ se deduce $\sigma(\beta_0) \cdot \sigma(\beta_0) = \sigma(\beta_0)$.

Ahora calculamos τ del siguiente modo:

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdot \sigma(f_2) \cdots \sigma(f_n).$$

Sustituyendo (**) en esta ecuación y simplificando, obtenemos la ecuación

$$\tau(f) = \sigma(g_1) \cdot \sigma(g_2) \cdots \sigma(g_n) = \tau(g).$$

Por tanto hemos probado la condición (1) en un caso especial.

Ahora probaremos la condición (1) en el caso general. Dados f y g y una homotopía de caminos F entre ellos, consideremos subdivisiones $s_0, \dots, s_n$ y $t_0, \dots, t_m$ de $[0, 1]$ tales que F aplica cada rectángulo $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ en U o en V . Sea f_j el camino $f_j(s) = F(s, t_j)$; entonces $f_0 = f$ y $f_m = g$. La pareja de caminos f_{j-1} y f_j satisfacen las condiciones de nuestro caso especial, de modo que $\tau(f_{j-1}) = \tau(f_j)$ para todo j . Se deduce entonces que $\tau(f) = \tau(g)$, como deseábamos.

Paso 5. Ahora probaremos la condición (2) para la aplicación τ . Dado un camino $f * g$ en X , escojamos una subdivisión $s_0 < \dots < s_n$ de $[0, 1]$ que contenga al punto $1/2$ como un punto de la subdivisión, tal que $f * g$ aplica cada subintervalo en U o en V . Sea k el índice tal que $s_k = 1/2$.

Para $i = 1, \dots, k$, la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$ compuesta con la aplicación $f * g$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[2s_{i-1}, 2s_i]$ compuesta con f ; denotemos esta aplicación por f_i . De manera análoga, para cada $i = k+1, \dots, n$, la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[s_{i-1}, s_i]$, compuesta también con $f * g$ coincide con la aplicación lineal positiva de $[0, 1]$ en $[2s_{i-1} - 1, 2s_i - 1]$ compuesta con

g ; denotemos esta aplicación por g_{i-k} . Usando la subdivisión $s_0, \dots, s_n$ para el dominio del camino $f * g$ obtenemos

$$\tau(f * g) = \sigma(f_1) \cdots \sigma(f_k) \cdot \sigma(g_1) \cdots \sigma(g_{n-k}).$$

Usando la subdivisión $2s_0, \dots, 2s_k$ para el camino f tenemos

$$\tau(f) = \sigma(f_1) \cdots \sigma(f_k).$$

Y utilizando la subdivisión $2s_k - 1, \dots, 2s_n - 1$ para el camino g tenemos

$$\tau(g) = \sigma(g_1) \cdots \sigma(g_{n-k}).$$

Por tanto, la condición (2) se satisface trivialmente.

Paso 6. El teorema se obtiene ahora aplicando los pasos anteriores. Para cada lazo f en X basado en x_0 , definimos

$$\Phi([f]) = \tau(f).$$

Las condiciones (1) y (2) prueban que Φ es un homomorfismo bien definido.

Probemos que $\Phi \circ j_1 = \phi_1$. Si f es un lazo en U , entonces

$$\begin{aligned} \Phi(j_1([f]_U)) &= \Phi([f]) \\ &= \tau(f) \\ &= \rho(f) = \phi_1([f]_U) \end{aligned}$$

como deseábamos. De forma similar se demuestra $\Phi \circ j_2 = \phi_2$.

Como $\pi_1(X, x_0)$ está generado por las imágenes de j_1 y j_2 entonces j es sobreyectiva.

Probemos que $N \subset \ker j$. Dado que el núcleo de cualquier homomorfismo de grupos constituye siempre un subgrupo normal de su dominio (véase Dummit y Foote 2004, Cap. 3), se verifica que $\ker j$ es un subgrupo normal de $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$. Por lo tanto, es suficiente probar que $i_1(g)^{-1}i_2(g)$ pertenece a $\ker j$ para

todo $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$. Si $i : U \cap V \rightarrow X$ es la aplicación inclusión, entonces

$$ji_1(g) = j_1i_1(g) = i_*(g) = j_2i_2(g) = ji_2(g).$$

Entonces $i_1(g)^{-1}i_2(g)$ pertenece al núcleo de j .

Se deducirá entonces que j induce un epimorfismo

$$k : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N \rightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Probaremos que $N = \ker j$ demostrando que k es inyectivo. Para ello será suficiente con probar que k posee una inversa por la izquierda.

Sea H el grupo $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$. Definamos $\phi_1 : \pi_1(U, x_0) \rightarrow H$ igual a la inclusión de $\pi_1(U, x_0)$ en el producto libre compuesta con la proyección del producto libre en su cociente con N . Sea $\phi_2 : \pi_1(V, x_0) \rightarrow H$ la aplicación definida de modo análogo. Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \pi_1(U, x_0) & & \\
 & \nearrow i_1 & \downarrow j_1 & \searrow \phi_1 & \\
 \pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, x_0) & \xleftarrow{k} & \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N \\
 & \searrow i_2 & \uparrow j_2 & \swarrow \phi_2 & \\
 & & \pi_1(V, x_0) & &
 \end{array}$$

Φ

Es fácil ver que $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$. Si $g \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, entonces $\phi_1(i_1(g))$ es la clase $i_1(g)N$ en H , y $\phi_2(i_2(g))$ es la clase $i_2(g)N$. Como $i_1(g)^{-1}i_2(g) \in N$, las clases son iguales.

Se deduce de lo demostrado anteriormente que existe un homomorfismo $\Phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H$ tal que $\Phi \circ j_1 =$

ϕ_1 y $\Phi \circ j_2 = \phi_2$. Probaremos que Φ es un inverso por la izquierda de k . Será suficiente con demostrar que $\Phi \circ k$ actúa como el elemento neutro sobre cualquier generador de H , esto es, sobre cualquier clase de la forma gN , donde $g \in \pi_1(U, x_0)$ o $\pi_1(V, x_0)$. Pero si $g \in \pi_1(U, x_0)$, tenemos

$$k(gN) = j(g) = j_1(g)$$

de modo que

$$\Phi(k(gN)) = \Phi(j_1(g)) = \phi_1(g) = gN$$

como deseábamos.

Para $g \in \pi_1(V, x_0)$, el razonamiento es completamente análogo. En primer lugar,

$$k(gN) = j(g) = j_2(g),$$

ya que j extiende a j_2 sobre $\pi_1(V, x_0)$. Aplicando Φ y utilizando la propiedad $\Phi \circ j_2 = \phi_2$ establecida previamente, obtenemos

$$\Phi(k(gN)) = \Phi(j_2(g)) = \phi_2(g).$$

Por construcción, ϕ_2 es la composición de la inclusión de $\pi_1(V, x_0)$ en el producto libre con la proyección al cociente $H = \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$; por tanto, $\phi_2(g) = gN$. En consecuencia,

$$\Phi(k(gN)) = gN.$$

Así, $\Phi \circ k$ actúa como la identidad sobre todos los generadores de H (los provenientes tanto de $\pi_1(U, x_0)$ como de $\pi_1(V, x_0)$). Se concluye que Φ es un inverso por la izquierda de k , lo que implica que k es inyectivo y, por tanto, un isomorfismo. $\square$

4.1. COMPLEJO SIMPLICIAL

Definición 4.1.1. Un **complejo simplicial** K es una colección finita o numerable de simplejos (puntos, segmentos, triángulos, tetraedros, etc.) en un espacio euclidiano $\mathbb{R}^N$, tales que:

- Cada cara de un simplejo en K también pertenece a K .
- La intersección de dos simplejos cualesquiera en K es vacía o es una cara común de ambos.

El soporte geométrico $|K|$ (la unión de todos los simplejos) se llama **poliedro** asociado al complejo. En topología algebraica, estos objetos permiten modelar espacios topológicos mediante estructuras combinatorias, facilitando el cálculo de invariantes como el grupo fundamental.

(Véase (Hatcher 2002))

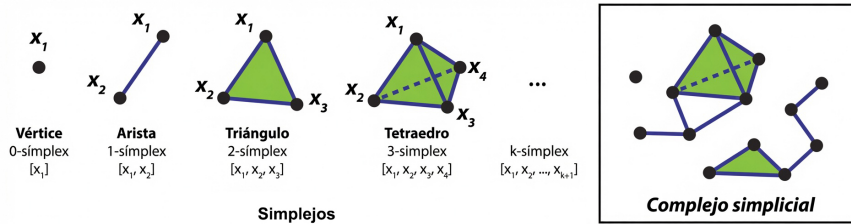


Figura 20. Clasificación de simplejos según su dimensión (izquierda) y un ejemplo de complejo simplicial (derecha). Los simplejos actúan como los bloques de construcción geométricos elementales (0, 1, 2, 3 y generalizados a dimensión k) que, al unirse de forma ordenada bajo ciertas reglas de intersección por sus caras, dan lugar a un complejo simplicial completo.

Tomado de “Algebraic Topology.”²⁸

4.2. RETRACTO

Definición 4.2.1. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. Decimos que A es un **retracto** de X si existe una aplicación continua $\rho : X \rightarrow A$, llamada **retracción**, tal que:

$$\rho(x) = x \quad \text{para todo } x \in A.$$

Es decir, ρ actúa como la identidad sobre A , mientras colapsa el resto de X hacia él.

²⁸ Mengsen Zhang et al.: *Topological portraits of multiscale coordination dynamics*. En: *Journal of Neuroscience Methods* 339 (jun. de 2020), pág. 108672. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2020.108672.

Una retracción induce un homomorfismo suprayectivo entre grupos fundamentales:

$$\rho_* : \pi_1(X, x_0) \twoheadrightarrow \pi_1(A, x_0),$$

lo que implica que $\pi_1(A, x_0)$ es un cociente de $\pi_1(X, x_0)$ ²⁹.

4.2.1. Retracto por Deformación

Definición 4.2.2. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. Decimos que A es un **retracto por deformación** de X si existe una retracción $\rho : X \rightarrow A$ que es **homotópica a la identidad** en X , relativa a A . Es decir, existe una homotopía continua

$$H : [0, 1] \times X \rightarrow X$$

tal que:

1. $H(0, x) = x$ para todo $x \in X$,
2. $H(1, x) = \rho(x)$ para todo $x \in X$,
3. $H(t, a) = a$ para todo $t \in [0, 1]$ y todo $a \in A$.

En este caso, ρ induce un **isomorfismo** entre grupos fundamentales:

$$\rho_* : \pi_1(X) \xrightarrow{\sim} \pi_1(A).$$

Esto significa que X y A tienen la misma estructura homotópica básica³⁰.

Las nociones de complejo simplicial, retracto y retracto por deformación proporcionan el marco técnico necesario para analizar la estructura homotópica del complemento de ciertos nudos. En particular, estos conceptos resultan fundamentales en el estudio de los nudos torales, ya que permiten identificar retractos por deformación del complemento del nudo hacia complejos 2-dimensionales más sencillos. Esta reducción

²⁹ Allen Hatcher: *Algebraic Topology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

³⁰ Allen Hatcher: *Algebraic Topology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

geométrica facilita el cálculo explícito del grupo fundamental mediante presentaciones combinatorias, como la obtenida a través del método de Wirtinger, aprovechando la simetría inherente de la inmersión del nudo en el toro estándar de S^3 .

4.3. NUDOS TORALES

Definición 4.3.1. Sea $p, q \in \mathbb{Z}$ con $\gcd(p, q) = 1$ y $|p|, |q| \geq 2$. El nudo toral $T(p, q)$ es el nudo que se obtiene al trazar una curva en la superficie de un toro estándar en $\mathbb{R}^3$ que da p vueltas alrededor del tubo del toro (meridiano) y q vueltas alrededor del eje (longitud o paralelo)³¹.

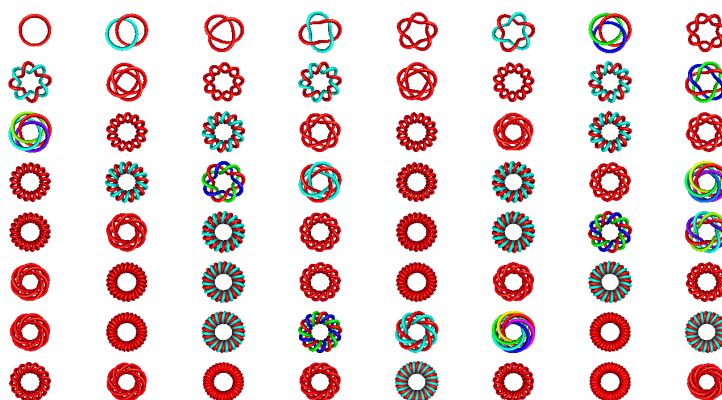


Figura 21. Ejemplos representativos de nudos y enlaces torales, clasificados según su tipo (p, q) y número de componentes.

Tomado de "Knot Theory and Its Applications"³².

Ejemplo 4.3.2. Ejemplo del nudo toral $T(2, 7)$ dibujado sobre la superficie de un toro estándar.

³¹ Kunio Murasugi: *Knot Theory and Its Applications*. Boston: Birkhäuser, 1996. ISBN: 978-0-8176-3817-1.

³² Robert G. Scharein: *KnotPlot*. Software para visualización de nudos. Centre for Experimental and Constructive Mathematics, Simon Fraser University. 2025. <https://knotplot.com/>.

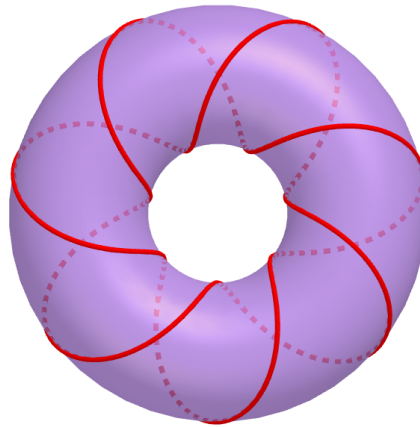


Figura 22. Nudo toral $T(2, 7)$. **Cómo visualizar p y q :** $q = 7$ son los 7 lazos exteriores, si cortas frontal la curva lo cruza 7 veces. $p = 2$ es más difícil de ver directamente; si sigues la curva con el dedo, notarás que debes dar dos vueltas completas de 360° alrededor del agujero central antes de volver al punto de partida. (Elaborado en GeoGebra)

4.4. GRUPO FUNDAMENTAL DE LOS NUDOS TORALES

El siguiente resultado fue tomado de “The Fundamental Group of Torus Knots”³³

Proposición 4.4.1. *El nudo toral $T(p, q)$ satisface la siguiente propiedad: Su grupo fundamental (el grupo del nudo) tiene la presentación*

$$\pi_1(S^3 \setminus T(p, q)) \cong \langle x, y \mid x^p = y^q \rangle.$$

La relación $x^p = y^q$ constituye el núcleo algebraico de la presentación anterior y se deriva geoméricamente al aplicar el Teorema de Seifert-Van Kampen (ver Sección 4) sobre el complemento del nudo. Para este cálculo, el espacio se divide en dos sectores abiertos (el interior del toro macizo y el exterior del toro) cuya frontera común es precisamente la superficie del toro donde se alojaba originalmente el nudo $T(p, q)$.

Dado que dicha curva removida daba p vueltas en dirección meridional y q vueltas en dirección longitudinal, se genera una restricción topológica en la frontera común. Esta restricción obliga a que recorrer el espacio

³³ Ilyas Aderogba Mustapha: «The Fundamental Group of Torus Knots». Tesis de maestría. Cameroon: African Institute for Mathematical Sciences (AIMS-Cameroon), mayo de 2018.

dando p vueltas continuas alrededor del tubo (representado por el generador x^p) resulte ser completamente equivalente (homótopo) a recorrerlo dando q vueltas alrededor del agujero central (representado por el generador y^q), puesto que ambas trayectorias se pueden deformar de manera continua la una en la otra al quedar geoméricamente “atadas” a la ausencia del nudo que fue extraído.

Demostración. Consideremos la descomposición estándar de la 3-esfera, $S^3 = T_1 \cup T_2$, donde T_1 y T_2 son dos toros macizos tales que su intersección coincide exactamente con su frontera común, es decir, el toro bidimensional $T^2 = T_1 \cap T_2 = \partial T_1 = \partial T_2$. Por definición, el nudo toroidal $K = T(p, q)$ es una curva simple cerrada contenida en dicha superficie frontera T^2 .

Para aplicar el Teorema de van Kampen, es necesario construir entornos abiertos. Consideremos un entorno tubular de la frontera común homeomorfo a $T^2 \times (-\epsilon, \epsilon)$ para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, donde el toro original corresponde al nivel $T^2 \times \{0\}$. Definimos los siguientes entornos abiertos en $S^3 \setminus K$:

$$U = (\text{int}(T_1) \cup (T^2 \times [0, \epsilon))) \setminus K,$$

$$V = (\text{int}(T_2) \cup (T^2 \times (-\epsilon, 0])) \setminus K.$$

Puesto que U , V y su intersección $U \cap V$ son espacios conexos por caminos, fijamos un punto base $x_0 \in U \cap V$. Por el Teorema de van Kampen, el grupo fundamental del complemento del nudo satisface el isomorfismo:

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \frac{\pi_1(U) * \pi_1(V)}{N},$$

donde N es el subgrupo normal generado por los elementos de la forma $i_1(g)^{-1}i_2(g)$ para todo generador $g \in \pi_1(U \cap V)$, siendo $i_1 : U \cap V \rightarrow U$ e $i_2 : U \cap V \rightarrow V$ las inclusiones topológicas y sus homomorfismos inducidos en el grupo fundamental.

Procedemos a calcular los grupos fundamentales de cada espacio mediante equivalencias homotópicas. En primer lugar, el entorno abierto U se retrae por deformación sobre el núcleo de lazo central de T_1 , el cual es homeomorfo a una circunferencia S^1 . Por consiguiente, su grupo fundamental es un grupo cíclico infinito generado por la clase de homotopía de un lazo x , es decir, $\pi_1(U) \cong \langle x \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}$. De manera análoga, el espacio V se retrae por deformación sobre el núcleo de lazo central de T_2 , de modo que su grupo fundamental está generado por la clase de homotopía de un lazo y , obteniendo $\pi_1(V) \cong \langle y \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Por otra parte, la intersección satisface que $U \cap V = (T^2 \setminus K) \times (-\epsilon, \epsilon)$, la cual se retrae por deformación sobre el espacio $T^2 \setminus K$. Dado que K es una curva simple cerrada sobre la superficie $\partial T_1 = \partial T_2$, la remoción

de dicha trayectoria resulta en un espacio homeomorfo a un cilindro abierto, el cual a su vez se retrae por deformación sobre una circunferencia. Así, se tiene que $\pi_1(U \cap V) \cong \langle \alpha \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}$, donde el generador α representa la clase de un lazo paralelo a la trayectoria del nudo K sobre la superficie del toro.

Para determinar la estructura del subgrupo normal N , analizamos la acción de los homomorfismos inducidos por la inclusión sobre el generador α . La restricción de la curva tipo $T(p, q)$ respecto al primer toro macizo T_1 implica que el lazo realiza p revoluciones en la dirección meridional (alrededor del tubo); por lo tanto, el homomorfismo inducido actúa como $i_1(\alpha) = x^p$. En contraposición, la restricción de la misma curva respecto al segundo toro macizo T_2 implica que el lazo realiza q revoluciones en la dirección longitudinal (alrededor del eje), de modo que el homomorfismo inducido actúa como $i_2(\alpha) = y^q$.

Al aplicar la identificación requerida por el Teorema de van Kampen, el subgrupo N está generado por el relator $i_1(\alpha)^{-1}i_2(\alpha) = x^{-p}y^q$, lo cual establece la igualdad $x^{-p}y^q = 1$ o, equivalentemente, la relación algebraica $x^p = y^q$. Combinando estos resultados, se obtiene la presentación del grupo del nudo:

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \langle x, y \mid x^p = y^q \rangle.$$

Finalmente, puesto que el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ es homeomorfo a la 3-esfera menos un punto ($S^3 \setminus \{\infty\}$), y la remoción de un punto aislado en el infinito no altera el grupo fundamental del complemento de una curva compacta acotada, se concluye el isomorfismo deseado:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(S^3 \setminus K) \cong \langle x, y \mid x^p = y^q \rangle.$$

□

4.4.1. Ejemplos

Ejemplo 4.4.2. *El siguiente es el nudo toral $T(2, 5)$ en la familia de nudos torales de tipo $(2, q)$ (con q impar y $|q| \geq 3$), también conocidos como nudos de puente 2 o nudos alternantes. Su grupo fundamental admite la presentación clásica*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T(2, 5)) \cong \langle x, y \mid x^2 = y^5 \rangle.$$

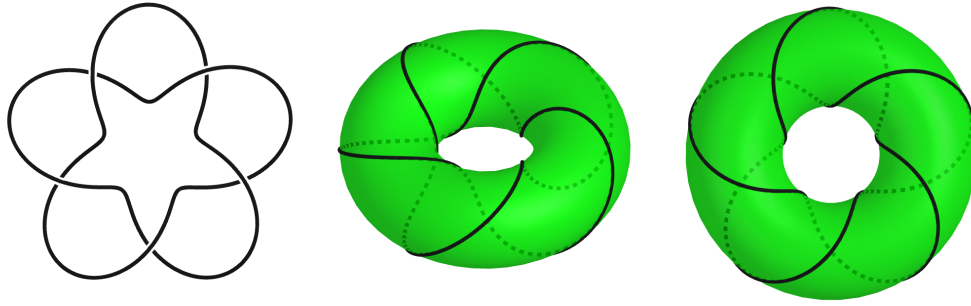


Figura 23. Representación del nudo toral $T(2, 5)$. (Elaborado en GeoGebra)

Ejemplo 4.4.3. El nudo toral $T(3, -8)$ (ver Figura 24) es la imagen especular de $T(3, 8)$; topológicamente, $T(p, -q)$ no es equivalente a $T(p, q)$, por lo que $T(3, -8)$ y $T(3, 8)$ son nudos distintos. Su grupo fundamental admite la presentación

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T(3, -8)) \cong \langle x, y \mid x^3 = y^{-8} \rangle \cong \langle x, y \mid x^3 y^8 = 1 \rangle.$$

Aunque el signo cambia la orientación, el grupo abstracto es isomorfo al de $T(3, 8)$ (porque $y \mapsto y^{-1}$ da un isomorfismo).

El diagrama estándar de $T(3, 8)$ tiene $(3 - 1) \cdot 8 = 16$ cruces, número que es mínimo; por tanto, $T(3, -8)$ también tiene mínimo 16 cruces. A diferencia de los nudos $T(2, q)$, los nudos $T(p, q)$ con $p, q \geq 3$ no son alternantes, así que $T(3, -8)$ es un nudo toral no alternante.

Cabe destacar que este caso ilustra un fenómeno relevante en la teoría de nudos: el hecho de que $T(3, 8)$ y $T(3, -8)$ compartan grupos fundamentales isomorfos demuestra que, a pesar de ser un invariante algebraico sumamente potente, el grupo del nudo no constituye un invariante completo, ya que no permite distinguir entre ciertos nudos geoméricamente no equivalentes.

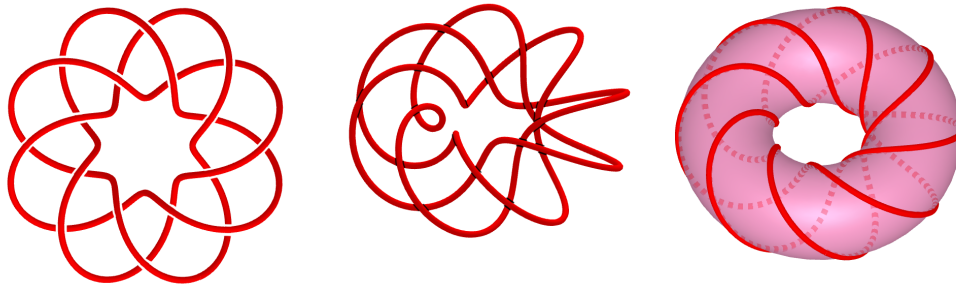


Figura 24. Representación del nudo toral $T(3, -8)$. (Elaborado en GeoGebra)

5. PRESENTACIÓN DE WIRTINGER

Wilhelm Wirtinger fue un matemático austríaco nacido el 19 de julio de 1865 en Ybbs an der Donau (Austria) y fallecido el 16 de enero de 1945 en Austria. Estudió matemáticas en la Universidad de Viena desde 1884, obtuvo su doctorado en 1887 y su habilitación en 1890, convirtiéndose posteriormente en profesor extraordinario en 1895. Sus trabajos abarcaron áreas como análisis complejo, geometría, teoría de números, grupos de Lie y topología, aunque una de sus contribuciones más importantes fue el desarrollo de la denominada presentación de Wirtinger dentro de la teoría de nudos. Su trabajo estuvo fuertemente influenciado por Felix Klein, particularmente por sus investigaciones sobre geometría y funciones algebraicas. Además, Wirtinger mantuvo relación intelectual con matemáticos importantes de la teoría de nudos y la topología, entre ellos Kurt Reidemeister, quien posteriormente desarrolló los movimientos de Reidemeister fundamentales para la clasificación de nudos, y Emil Artin, quien difundió métodos relacionados con la presentación de Wirtinger en la década de 1920. También tuvo conexiones académicas con figuras como David Hilbert y Stanisław Zaremba. Su trabajo representó una transición entre la geometría clásica del siglo XIX y la topología algebraica moderna del siglo XX, contribuyendo al desarrollo formal de la teoría de nudos como disciplina matemática rigurosa. Entre sus estudiantes y colaboradores indirectos se encontraban figuras destacadas como Kurt Gödel, Erwin Schrödinger, Wilhelm Blaschke y Leopold Vietoris.

Tras estudiar casos particulares como los nudos torales, es necesario disponer de un método general para calcular el grupo fundamental del complemento de cualquier nudo. Este fue introducido por Wilhelm Wirtinger alrededor de 1904 en sus conferencias en Viena, aunque no se publicó hasta 1908 en las *Actas de la Academia de Ciencias de Viena*. Entre finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX, especialmente entre 1895 y 1905, Wirtinger desarrolló métodos para estudiar el grupo fundamental del complemento de un nudo utilizando diagramas planos, asignando generadores a los arcos y relaciones a los cruces, lo que permitió transformar problemas geométricos en problemas algebraicos. El método de Wirtinger permite obtener una presentación explícita del grupo $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ a partir de una proyección plana del nudo K : se asigna un generador a cada arco entre cruces y una relación por cada cruce, determinada por la orientación local de los hilos involucrados. Como señala Stillwell, este enfoque marcó un punto de inflexión en la teoría de nudos, al permitir pasar de clasificaciones empíricas a cálculos algebraicos rigurosos basados en la estructura del grupo fundamental. Esta construcción, conocida actualmente como presentación de Wirtinger, se convirtió en una herramienta fundamental de la topología algebraica moderna. La presentación resultante, conocida

hoy como *presentación de Wirtinger*, sigue siendo la herramienta estándar para analizar nudos arbitrarios mediante diagramas planos.

(Este recuento histórico se basa principalmente en la cronología expuesta en “Classical topology and combinatorial group theory. 2nd.”³⁴, complementado con la revisión de diversas fuentes historiográficas digitales independientes).

5.1. ALGORITMO DE WIRTINGER

Definición 5.1.1. Sea $K \subset \mathbb{R}^3$ un nudo y sea $D(K)$ una proyección regular orientada de K sobre un plano. La presentación de Wirtinger es un procedimiento para obtener una presentación del grupo fundamental del complemento del nudo,

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K),$$

a partir del diagrama $D(K)$.

Se descompone el diagrama en arcos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, donde cada arco corresponde al segmento comprendido entre dos cruces consecutivos. A cada arco α_m se le asocia un generador x_m del grupo fundamental, interpretado geoméricamente como la clase de homotopía de un lazo meridiano alrededor de dicho arco basado en un punto fijo $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus K$.

Para cada cruce del diagrama se introduce una relación obtenida al recorrer la frontera de una vecindad del cruce. Si x_k corresponde al arco que pasa sobre el cruce (superior), mientras que x_i y x_j corresponden a los arcos inferiores entrante y saliente respectivamente, entonces la relación asociada tiene la forma

$$x_k x_i x_k^{-1} = x_j,$$

o equivalentemente,

$$x_k^{-1} x_i x_k = x_j,$$

dependiendo de la orientación local elegida en el cruce.

³⁴ John Stillwell: *Classical topology and combinatorial group theory*. 2nd. Graduate Texts in Mathematics 72. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. ISBN: 0-387-97970-0.

En la práctica, las relaciones de la presentación de Wirtinger se obtienen distinguiendo entre cruces positivos y cruces negativos del diagrama orientado. Sea c_k un cruce del diagrama, y sean x_k , x_i y x_j los generadores asociados al arco superior, al arco inferior entrante y al arco inferior saliente respectivamente. Entonces, la relación r_k asociada al cruce viene dada por

$$r_k : \begin{cases} x_k x_i x_k^{-1} = x_j, & \text{si } c_k \text{ es un cruce positivo,} \\ x_k^{-1} x_i x_k = x_j, & \text{si } c_k \text{ es un cruce negativo.} \end{cases}$$

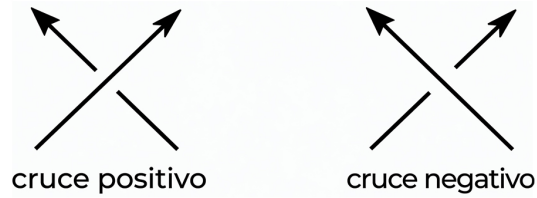


Figura 25. Referencia didáctica para facilitar el uso de la presentación de Wirtinger en ejemplos posteriores.

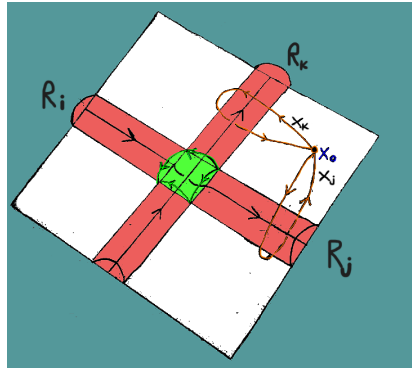


Figura 26. Representación geométrica de un cruce en el plano de proyección T . Las regiones asociadas a los arcos están delimitadas por los entornos tubulares (en rojo): R_k corresponde al arco superior continuo (puente), mientras que R_i y R_j representan las componentes discontinuas del arco inferior de entrada y salida, respectivamente. El sector central (en verde) define el entorno abierto del cruce donde intersecan las regiones. Cabe precisar que las regiones R_k , R_i y R_j constituyen subconjuntos abiertos en la topología del plano de proyección $T \cong \mathbb{R}^2$ tras la remoción de la proyección del nudo. En el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$, estas regiones no son abiertas, sino que actúan como fronteras bidimensionales a través de las cuales los lazos generadores intersecan transversalmente al plano T para rodear cada arco del nudo.

Las estructuras tridimensionales de los lazos generadores y el punto base x_0 se retraen por deformación hacia un entorno poligonal compacto bidimensional, denotado como la región S_l (un disco topológico contráctil, ver Figura 27). En este modelo, el punto base x_0 se sitúa en una de las esquinas del perímetro ∂S_l , de modo que transitar por las aristas del cuadrado equivale a aplicar los generadores orientados x_i, x_j y x_k . Dado que el interior de esta región no interseca al nudo, recorrer el contorno cerrado de la frontera ∂S_l partiendo desde x_0 debe ser homotópicamente trivial. Esto permite deducir la ecuación estructural leyendo directamente el perímetro de la región como la identidad del grupo, facilitando la identificación de la relación de Wirtinger asociada al cruce.

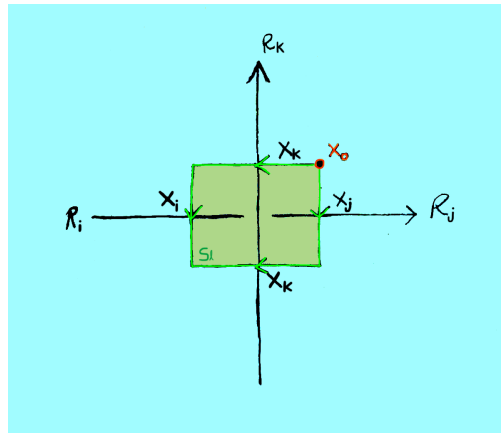


Figura 27. Reducción combinatoria local del cruce en la región contráctil S_l para la obtención de la relación.

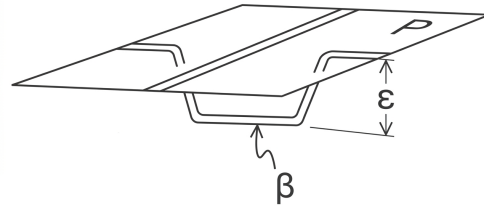
Teorema 5.1.2. *El grupo $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ está generado por las clases de homotopía de los x_i y tiene presentación*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_n \rangle.$$

Además, cualquiera de los r_i puede omitirse y lo anterior sigue siendo cierto.

(Véase (Rolfsen 2003))

Demostración. Recordemos que K yace en el plano $P = \{z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$, excepto donde se hunde una distancia ε en cada cruce.



Para aplicar el teorema de Van Kampen, descomponemos $X = \mathbb{R}^3 - K$ en $n + 2$ piezas: $A, B_1, \dots, B_n$, y C . Definimos

$$A = \{z \geq -\varepsilon\} - K.$$

La frontera inferior de A es el plano $P' = \{z = -\varepsilon\}$ con n segmentos $\beta_1, \dots, \beta_n$ removidos. Sea B_i una caja rectangular sólida cuya tapa superior ajusta sobre P' y rodea a β_i . Pero removemos β_i mismo de B_i , y (para que B_i contenga al punto base x_0) adjuntamos un arco que va desde la tapa superior, recto hacia x_0 , evitando K . Las cajas B_i pueden tomarse disjuntas entre sí. Finalmente, definimos

$C =$ clausura de todo lo que está por debajo de $A \cup B_1 \cup \dots \cup B_n$, más un arco hacia x_0 .

Ahora investigamos el efecto de adjuntar B_1 a A (ver Figura 28). Dado que la caja sólida B_1 es simplemente conexa, el análisis se centra en el espacio de la intersección $B_1 \cap A$, constituido por la tapa superior rectangular de la caja sobre el plano P' privada del segmento β_1 , junto con el arco de conexión hacia el punto base x_0 . Desde una perspectiva topológica, un rectángulo plano al que se le remueve un segmento interior se retrae por deformación sobre una circunferencia S^1 , mientras que el arco adjunto, al ser homeomorfo a un intervalo, no altera la homotopía del conjunto. En consecuencia, la intersección posee el tipo de homotopía de la circunferencia ($B_1 \cap A \simeq S^1$). Como el grupo fundamental de la circunferencia es invariante bajo homotopía y corresponde al grupo libremente generado por el número de vueltas enteras, se demuestra que $\pi_1(B_1 \cap A) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, el cual es un grupo cíclico infinito generado por la clase de homotopía del lazo γ que rodea transversalmente a β_1 .

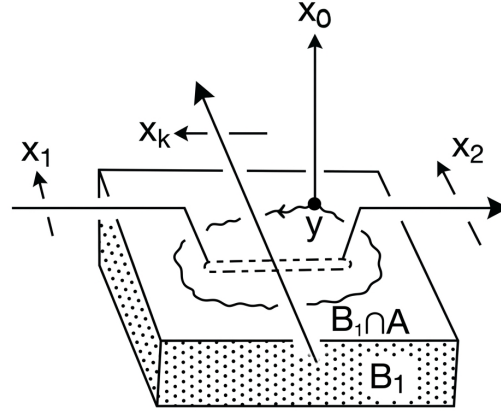


Figura 28. Efecto homotópico de adjuntar la caja B_1 sobre la pieza A .

Cabe aclarar que, con el fin de mantener la claridad visual en el diagrama de la Figura 28, la flecha que señala hacia la etiqueta x_0 funciona estrictamente como una línea indicadora o de nomenclatura. Debido a la alta densidad de elementos en la región local de la intersección, esta flecha apunta de manera directa hacia el punto base situado sobre el lazo y , sirviendo únicamente como una referencia de rotulado y no como una extensión geométrica o trayectoria adicional del espacio.

Como se ve claramente en la figura, cuando y se incluye en A , se convierte en la palabra $x_k x_1^{-1} x_k^{-1} x_2$ (aquí asumimos que el cruce es del primer tipo). Así, por Van Kampen, $\pi_1(A \cup B_1)$ tiene generadores $x_1, \dots, x_n$ y la única relación $x_k x_1^{-1} x_k^{-1} x_2 = 1$. Esto es equivalente a $x_k x_1 = x_2 x_k$, que es precisamente r_1 . Por tanto,

$$\pi_1(A \cup B_1) = \langle x_1, \dots, x_n; r_1 \rangle.$$

De manera similar, al adjuntar B_2 , argumentamos que

$$\pi_1(A \cup B_1 \cup B_2) = \langle x_1, \dots, x_n; r_1, r_2 \rangle,$$

y así sucesivamente, hasta obtener

$$\pi_1(A \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n) = \langle x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_n \rangle.$$

Finalmente, adjuntar C a $A \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n$ no afecta al grupo fundamental, ya que tanto C como $C \cap (A \cup B_1 \cup \cdots \cup B_n)$ son simplemente conexos.

Esto completa la prueba, salvo por la observación de que uno de los r_i (digamos r_n) es redundante. Para verlo, trabajemos en $S^3 = \mathbb{R}^3 + \infty$. Sean $A' = A + \infty$ y $C' = B_n \cup C + \infty$. Es claro que

$$A' \cup B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1} \cup C' = \mathbb{R}^3 \setminus K, \quad \pi_1(A') = \pi_1(A),$$

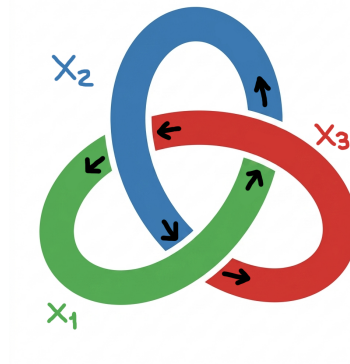
y adjuntar $B_1, \dots, B_{n-1}$ tiene el mismo efecto que antes. Pero ahora notamos que

$$C' \cap (A' \cup B_1 \cup \cdots \cup B_{n-1})$$

es simplemente conexo, pues es una 2-esfera menos un arco, y lo mismo vale para C' . Así llegamos a la misma conclusión sin necesidad de adjuntar la relación r_n .

5.1.1. Ejemplos

Ejemplo 5.1.3. *Considérese el diagrama orientado del nudo trébol mostrado en la figura.*



El diagrama posee tres arcos, a los cuales se les asocian los generadores

$$x_1, x_2, x_3.$$

Aplicando el algoritmo de la presentación de Wirtinger, cada cruce del diagrama produce una relación entre los generadores. En cada caso, el generador correspondiente al arco superior actúa por conjugación sobre el generador asociado al arco inferior entrante, obteniéndose el generador del arco inferior saliente.

Del primer cruce se obtiene la relación

$$x_1 x_2 x_1^{-1} = x_3.$$

Del segundo cruce se obtiene

$$x_2 x_3 x_2^{-1} = x_1.$$

Finalmente, del tercer cruce se obtiene

$$x_3 x_1 x_3^{-1} = x_2.$$

Por tanto, la presentación de Wirtinger del grupo fundamental del complemento del nudo trébol es

$$\pi_1(S^3 \setminus K) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 x_2 x_1^{-1} = x_3, x_2 x_3 x_2^{-1} = x_1, x_3 x_1 x_3^{-1} = x_2 \rangle.$$

Obsérvese que una de las relaciones es consecuencia de las otras dos, por lo que la presentación puede simplificarse eliminando una de ellas. Este fenómeno ocurre en general para diagramas conexos de nudos, donde una de las relaciones de Wirtinger resulta redundante.

En este caso, la tercera relación es consecuencia de las dos primeras. En efecto, a partir de

$$x_1 x_2 x_1^{-1} = x_3$$

y

$$x_2 x_3 x_2^{-1} = x_1,$$

se puede sustituir $x_3 = x_1x_2x_1^{-1}$ en la segunda relación para obtener

$$x_2(x_1x_2x_1^{-1})x_2^{-1} = x_1.$$

Reordenando esta expresión se deduce

$$x_3x_1x_3^{-1} = x_2,$$

que coincide con la tercera relación. Por tanto, una de las relaciones resulta redundante y la presentación puede escribirse de forma equivalente como

$$\pi_1(S^3 \setminus K) = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1x_2x_1^{-1} = x_3, x_2x_3x_2^{-1} = x_1 \rangle.$$

A partir de la primera relación,

$$x_1x_2x_1^{-1} = x_3,$$

se obtiene

$$x_3x_1 = x_1x_2.$$

De la segunda relación,

$$x_2x_3x_2^{-1} = x_1,$$

se deduce

$$x_2x_3 = x_1x_2.$$

Comparando ambas expresiones se obtiene

$$x_3x_1 = x_2x_3.$$

Introduciendo ahora los cambios de variable

$$x = x_1x_2, \quad y = x_1x_2x_3,$$

puede verificarse que

$$x^3 = y^2.$$

Por tanto, el grupo fundamental del complemento del nudo trébol admite la presentación clásica

$$\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \langle x, y \mid x^3 = y^2 \rangle.$$

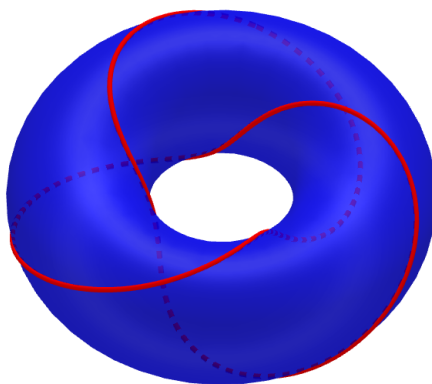


Figura 29. Representación del nudo trébol $T(3, 2)$ en la superficie del toro. Su grupo fundamental, $\pi_1(S^3 \setminus K) = \langle x, y \mid x^3 = y^2 \rangle$, describe las clases de homotopía de lazos en el complemento del nudo, donde la relación $x^3 = y^2$ identifica el elemento central del grupo.

Ejemplo 5.1.4. La presentación de Wirtinger se aplica directamente a cualquier diagrama regular, incluso si contiene movimientos de Reidemeister que no alteran su tipo topológico. Consideremos el siguiente nudo, que es ambientalmente isotópico al trébol (3_1) :

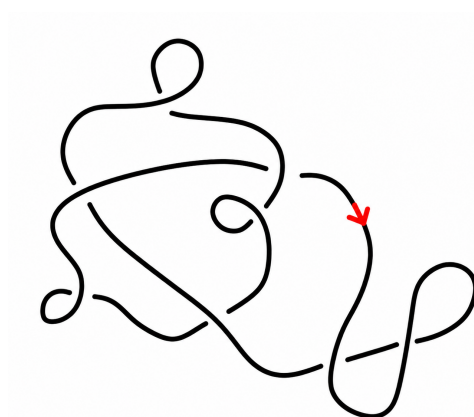
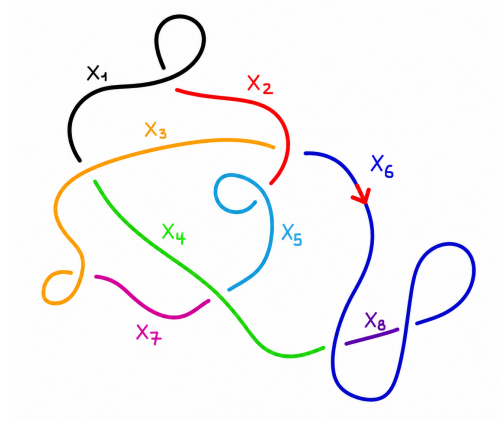


Figura 30. Diagrama de nudo con 8 cruces, equivalente al trébol mediante movimientos de Reidemeister de tipo I.

Asignamos generadores $x_1, \dots, x_8$ a cada arco, según la orientación indicada en el diagrama coloreado:



Aplicando la regla de Wirtinger en cada cruce, obtenemos las siguientes relaciones:

$$x_1^{-1}x_1x_1 = x_2 \quad (1)$$

$$x_3x_4x_3^{-1} = x_1 \quad (2)$$

$$x_2x_3x_2^{-1} = x_6 \quad (3)$$

$$x_5^{-1}x_2x_5 = x_5 \quad (4)$$

$$x_3x_7x_3^{-1} = x_3 \quad (5)$$

$$x_4x_5x_4^{-1} = x_7 \quad (6)$$

$$x_6^{-1}x_8x_6 = x_4 \quad (7)$$

$$x_6x_6x_6^{-1} = x_8 \quad (8)$$

Las ecuaciones (1), (4), (5) y (8) son triviales o implican identidades inmediatas:

- De (1): $x_1 = x_2$
- De (4): $x_2 = x_5 \Rightarrow x_1 = x_5$
- De (5): $x_7 = x_3$
- De (8): $x_6 = x_8$

- De (7) y (8): $x_4 = x_6$ (pues $x_6^{-1}x_8x_6 = x_4$ y $x_8 = x_6$)

Por tanto, los generadores se reducen a tres clases de equivalencia:

$$x_1 = x_2 = x_5, \quad x_3 = x_7, \quad x_4 = x_6 = x_8.$$

Sustituyendo en las relaciones no triviales restantes (2), (3), (6), y renombrando $a = x_1$, $b = x_3$, $c = x_6$, obtenemos:

$$bcb^{-1} = a \tag{9}$$

$$aba^{-1} = c \tag{10}$$

$$cac^{-1} = b \tag{11}$$

Notemos que la ecuación (10) define directamente el generador c en términos de a y b como $c = aba^{-1}$. Al sustituir esta expresión en las relaciones restantes obtenemos un sistema equivalente:

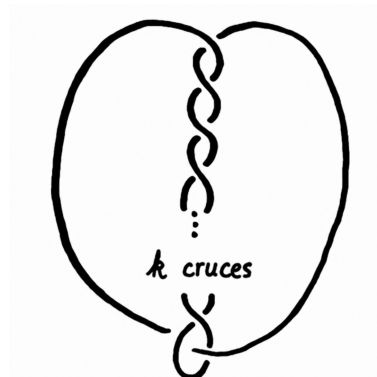
- De (9): $b(aba^{-1})b^{-1} = a \implies bab = aba$.
- De (11): $(aba^{-1})a(aba^{-1})^{-1} = b \implies aba^{-1}aab^{-1}a^{-1} = b \implies abb^{-1}a^{-1} = b$, la cual se reduce a una identidad consistente con la estructura estructural del nudo.

De este modo, preservando temporalmente las tres clases de equivalencia del diagrama, la presentación del grupo fundamental del nudo trébol queda formalmente establecida como:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus 3_1) \cong \langle a, b, c \mid aba = bab, c = aba^{-1} \rangle.$$

A partir de aquí, la presentación estándar de dos generadores $\langle a, b \mid aba = bab \rangle$ se recupera de manera directa mediante la eliminación de la variable redundante c .

Ejemplo 5.1.5. Una generalización de este comportamiento es el siguiente:



Sea K un nudo cuyo diagrama plano regular presenta una región central de torsión con k cruces y un cierre inferior, conformando un total de n arcos y n cruces. Según el Teorema de la Presentación de Wirtinger, derivado del Teorema de Seifert–van Kampen, el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ posee inicialmente una presentación con n generadores $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (uno por cada arco) y n relaciones $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ (una por cada cruce). Cada relación establece que el generador del arco que sale de un cruce es conjugado del generador del arco que entra, mediante el generador del arco que pasa por encima; es decir, tiene la forma $x_{\text{salida}} = x_{\text{encima}} \cdot x_{\text{entrada}} \cdot x_{\text{encima}}^{-1}$.

Dado que el diagrama del nudo es conexo, una de estas n relaciones es redundante, pues puede deducirse algebraicamente de las demás. Por lo tanto, contamos con $n - 1$ relaciones independientes. Ahora bien, observe la estructura geométrica del diagrama: existen dos arcos principales exteriores, que denominaremos x e y , los cuales actúan como las ramas base del nudo. Los restantes $n - 2$ arcos son segmentos internos que conectan secuencialmente estos arcos principales a través de la zona de torsión y el cierre inferior.

La naturaleza de las relaciones de Wirtinger permite despejar el generador de un arco interno en términos de los generadores de los arcos adyacentes. Dado que los arcos internos forman una cadena continua conectada a x e y , podemos sustituir recursivamente cada generador interno por una palabra formada únicamente por x e y . Este proceso de sustitución utiliza $n - 2$ de las relaciones disponibles para eliminar los $n - 2$ generadores intermedios.

Al finalizar esta reducción, solo permanecen los dos generadores base x e y .

En cuanto a las relaciones, partíamos de $n - 1$ independientes y hemos empleado $n - 2$ para realizar las

sustituciones anteriores. Esto deja exactamente una relación restante, $(n - 1) - (n - 2) = 1$, la cual surge al expresar la condición de cierre del nudo exclusivamente en términos de x e y . En conclusión, el grupo fundamental admite la presentación simplificada:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \langle x, y \mid R(x, y) = 1 \rangle,$$

donde $R(x, y)$ es la palabra resultante de este proceso, demostrando que el grupo está generado por dos elementos y definido por una única relación.

Ejemplo 5.1.6. Veamos ahora el siguiente nudo:

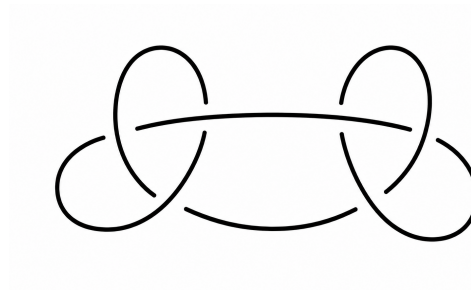


Figura 31. **El nudo cuadrado (square knot).** En el ámbito práctico, actúa como un nudo de unión simétrico diseñado para asegurar cabos de igual diámetro bajo tensión constante. Desde la perspectiva de la teoría de nudos, se clasifica como un nudo compuesto formado por la suma conexa de un nudo de trébol y su imagen especular ($3_1 \# 3_1^*$).

En lugar de aplicar Wirtinger directamente a su diagrama completo, podemos usar un atajo topológico basado en la estructura de suma conexa.

El nudo cuadrado se obtiene como la suma conexa de un trébol derecho y un trébol izquierdo. Topológicamente, su complemento en $\mathbb{R}^3$ puede descomponerse como la unión de dos subespacios:

$$X = X_1 \cup X_2,$$

donde:

- X_1 es el complemento de un trébol derecho dentro de una bola grande (con un “túnel” de conexión),

- X_2 es el complemento de un trébol izquierdo dentro de otra bola, pegada por ese túnel.



Cada uno de estos espacios tiene tipo de homotopía igual al complemento de un trébol individual. Por tanto:

$$\pi_1(X_1) \cong \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle, \quad \pi_1(X_2) \cong \langle w, z \mid zwz = wzw \rangle.$$

La intersección $X_1 \cap X_2$ es un cilindro (homotópicamente equivalente a un círculo), cuyo grupo fundamental es generado por el meridiano común de conexión. Identificamos este generador en ambos lados: si en X_1 el meridiano es x , y en X_2 es w , entonces imponemos la relación $x = w$.

Aplicando el teorema de Seifert-van Kampen, obtenemos:

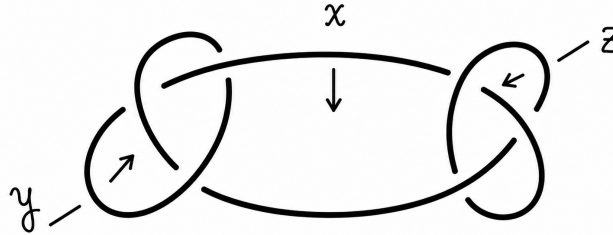
$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \text{Square Knot}) = \langle x, y, w, z \mid xyx = yxy, zwz = wzw, x = w \rangle.$$

Eliminando w (reemplazándolo por x) dentro de la relación del segundo factor, llegamos a la presentación definitiva:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \text{Square Knot}) = \langle x, y, z \mid xyx = yxy, xzx = xzx \rangle$$

Es importante contrastar este resultado con el del nudo de la abuela ($3_1 \# 3_1$), cuya construcción involucra dos tréboles con la misma quiralidad. Si bien la orientación de la identificación altera la forma de la presentación directa obtenida para el nudo de la abuela, un análisis algebraico revela que los grupos fundamentales de ambos nudos son isomorfos. Por lo tanto, el nudo cuadrado y el nudo de la abuela

no son ambientalmente isotópicos, a pesar de que el grupo fundamental no logre distinguirlos.



Debido a este isomorfismo, para establecer que ambos nudos compuestos no son equivalentemente topológicos debemos recurrir a invariantes más finos como el polinomio de Jones $V_K(t)$, el cual es multiplicativo ante la suma conexa, es decir, $V_{K_1 \# K_2}(t) = V_{K_1}(t) \cdot V_{K_2}(t)$.

Dado que $V_{3_1}(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$ y $V_{\overline{3}_1}(t) = t + t^3 - t^4$, se tiene que

$$V_{\text{square}}(t) = (t^{-1} + t^{-3} - t^{-4})(t + t^3 - t^4) = -t^3 + t^2 - t + 3 - t^{-1} + t^{-2} - t^{-3},$$

mientras que

$$V_{\text{granny}}(t) = (t^{-1} + t^{-3} - t^{-4})^2 = t^{-2} + 2t^{-4} - 2t^{-5} + t^{-6} - 2t^{-7} + t^{-8}.$$

La desigualdad $V_{\text{square}}(t) \neq V_{\text{granny}}(t)$ confirma definitivamente que los nudos no son ambientalmente isotópicos, una distinción imposible de lograr con el grupo fundamental o el polinomio de Alexander, dado que $\Delta_{\text{square}}(t) = \Delta_{\text{granny}}(t)$.

Ejemplos tomados de “Knots and Links”³⁵ y “The Knot Atlas”³⁶.

³⁵ Dale Rolfsen: *Knots and Links*. (Original work published 1976). Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.

³⁶ The Knot Atlas: *Project Homepage*. https://katlas.org/wiki/Main_Page.

5.2. PSEUDOCÓDIGO DEL ALGORITMO DE WIRTINGER

El procedimiento descrito anteriormente para obtener presentaciones de Wirtinger puede implementarse de manera computacional debido a que las relaciones asociadas a cada cruce siguen una estructura algebraica sistemática. En particular, cada cruce puede codificarse mediante una colección ordenada de datos que identifica el arco superior, los arcos inferiores y el signo del cruce.

A partir de esta información es posible construir automáticamente los generadores y relaciones de la presentación del grupo fundamental. De este modo, el cálculo manual realizado en ejemplos simples, como el nudo trébol, puede extenderse eficientemente a diagramas con un mayor número de cruces mediante herramientas computacionales.

El siguiente código implementa un procedimiento básico para generar presentaciones de Wirtinger a partir de una lista de cruces codificados algebraicamente.

Listing 5.1. Cálculo automático (pseudocódigo) de relaciones de Wirtinger

```
CLASE WirtingerCalculator

METODO calculate_group(cruces):

    // Entrada:
    // lista de tuplas:
    // (arco_superior, arco_inferior_entrante,
    // arco_inferior_saliente, signo)

    // Salida:
    // lista_ordenada_de_generadores,
    // lista_de_relaciones

    INICIAR conjunto generadores = vacio
```



```

INICIAR lista relaciones = vacio

// Paso 1: Recolectar todos los generadores unicos

PARA CADA cruce EN cruces HACER:

    agregar cruce.arco_superior A generadores

    agregar cruce.arco_inferior_entrante A generadores

    agregar cruce.arco_inferior_saliente A generadores

FIN PARA

// Paso 2: Construir relaciones segun el signo del cruce

PARA CADA cruce EN cruces HACER:

    asignar k = cruce.arco_superior

    asignar i = cruce.arco_inferior_entrante

    asignar j = cruce.arco_inferior_saliente

    asignar s = cruce.signo

    SI s == 1 ENTONCES:

        relacion = concatenar(

```

```

k, "*", i, "*", k, "^-1", "*", i, "^-1"
)

SINO:

relacion = concatenar(
k, "^-1", "*", i, "*", k, "*", i, "^-1"
)

FIN SI

agregar relacion A relaciones

FIN PARA

// Paso 3: Devolver resultados ordenados

convertir generadores A lista

ordenar lista_generadores alfabeticamente

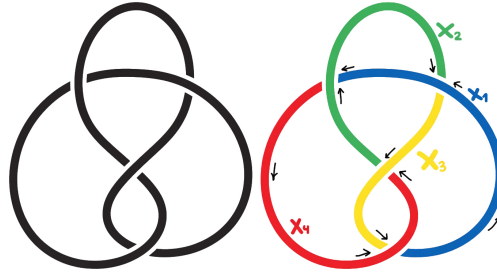
RETORNAR (lista_generadores, relaciones)

FIN METODO

FIN CLASE

```

Ejemplo 5.2.1. Veamos ahora este nudo (4_1), una forma de representar sus arcos es esta:



Aplicando el algoritmo de Wirtinger, obtenemos las siguientes relaciones:

$$r_1 : x_1 x_2 x_1^{-1} x_3^{-1} = 1$$

$$r_2 : x_3^{-1} x_4 x_3 x_2^{-1} = 1$$

$$r_3 : x_2 x_1 x_2^{-1} x_4^{-1} = 1$$

$$r_4 : x_4^{-1} x_3 x_4 x_1^{-1} = 1$$

Por tanto, la presentación del grupo fundamental es:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus 4_1) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \mid r_1, r_2, r_3, r_4 \rangle$$

Para implementar el algoritmo computacionalmente, podemos codificar los cruces como una lista de tuplas $(x_i, x_j, x_k, \epsilon)$, donde: - x_i : generador del arco superior, - x_j : generador del arco inferior entrante, - x_k : generador del arco inferior saliente, - $\epsilon \in \{+1, -1\}$: signo del cruce.

La matriz (o lista) de cruces para este nudo sería:

$$M_{4_1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ x_3 & x_4 & x_2 & -1 \\ x_2 & x_1 & x_4 & 1 \\ x_4 & x_3 & x_1 & -1 \end{pmatrix}$$

Listing 5.2. Pseudocódigo: Calculadora de Grupo de Wirtinger

INICIO PRUEBA_WIRTINGER

DEFINIR cruces_figuras COMO LISTA DE TUPLAS:

("x1", "x2", "x3", 1)

("x3", "x4", "x2", -1)

("x2", "x1", "x4", 1)

("x4", "x3", "x1", -1)

CREAR instancia calculadora DE TIPO WirtingerCalculator

LLAMAR calculadora.calculate_group(cruces_figuras)

ASIGNAR resultado A:

(generadores, relaciones)

IMPRIMIR "Generadores:", generadores

IMPRIMIR "Relaciones:"

PARA CADA relacion EN relaciones HACER:

IMPRIMIR relacion + " = 1"

FIN PARA

FIN PRUEBA_WIRTINGER

6. CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se ha desarrollado un marco teórico y computacional riguroso para el estudio del grupo fundamental del complemento de nudos en $\mathbb{R}^3$, consolidando las herramientas de la topología algebraica como un invariante estructural robusto. A través de la demostración formal y detallada del teorema de Seifert-van Kampen, se establecieron los fundamentos analíticos indispensables para deducir de manera sistemática la presentación de Wirtinger a partir de proyecciones regulares. Abordar este tema permitió no solo el cálculo explícito y la caracterización analítica de familias complejas como los nudos torales, sino también el diseño e implementación de un pseudocódigo propio optimizado para la asignación y reducción formal de generadores y relaciones en cruces orientados. Asimismo, el análisis de nudos compuestos, específicamente la comparación analítica entre el nudo cuadrado y el nudo de la abuela, sirvió para delimitar con precisión el alcance del grupo fundamental; al demostrarse el isomorfismo algebraico entre ambos grupos complementarios, se justificó con rigor la necesidad de incorporar invariantes geométrico-polinómicos complementarios, logrando su distinción geométrica definitiva a través del cálculo explícito de sus respectivos polinomios de Jones.

Lejos de presentarse como un sistema cerrado, las metodologías implementadas en este manuscrito sientan las bases analíticas para futuras líneas de investigación orientadas firmemente hacia el desarrollo computacional y la matemática aplicada. En el ámbito del diseño de algoritmos, se proyecta refinar el pseudocódigo desarrollado mediante la integración de módulos de simplificación algebraica basados en el análisis combinatorio de movimientos de Reidemeister, optimizando sustancialmente la complejidad de las relaciones antes de su computación. Desde una perspectiva de modelado numérico, la generalización de este marco teórico hacia enlaces de múltiples componentes y estructuras de *tangles* abiertos constituye el paso natural para trasladar estos conceptos abstractos al estudio de sistemas físicos y biológicos. Estas herramientas automatizadas permitirán estructurar modelos predictivos viables en biología molecular, orientados a simular el entrelazamiento y la acción topológica de enzimas sobre cadenas de ADN, así como en la caracterización e ingeniería estructural de polímeros complejos y fibras textiles bajo tensión, consolidando la utilidad práctica de la topología computacional en las ciencias aplicadas.

BIBLIOGRAFÍA

Adams, Colin C.: *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. Revised reprint of the 1994 original. Providence, RI: American Mathematical Society, 2004. ISBN: 978-0-8218-3678-1.

Burde, Gerhard, Heiner Zieschang y Michael Heusener: *Knots*. 3rd, fully revised and extended. Vol. 5. De Gruyter Studies in Mathematics. Berlin; Boston: De Gruyter, 2014. ISBN: 978-3-11-027074-7.

Christensen, Martin Søndergaard: «Introductory Knot Theory: The Knot Group and The Jones Polynomial». Bachelor Thesis in Mathematics. Copenhagen, Denmark: University of Copenhagen, Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, jul. de 2011. https://web.math.ku.dk/~moller/students/martin_Sondergaard_Christensen.pdf.

Dummit, David S. y Richard M. Foote: *Abstract Algebra*. 3rd. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2004.

Hatcher, Allen: *Algebraic Topology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

Kilic, Altan B. et al.: *Knot Theory and Error-Correcting Codes*. En: *Designs, Codes and Cryptography* (2025). DOI: 10.1007/s10623-025-01615-x.

Manturov, Vassily Olegovich: *Knot Theory*. 2nd. Boca Raton, FL: CRC Press, 2018. ISBN: 978-1-138-56136-3.

Massey, William S.: *A Basic Course in Algebraic Topology*. Vol. 127. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer-Verlag, 1991.

Munkres, James R.: *Topología*. 2nd. Madrid: Pearson Education, 2000. ISBN: 978-84-205-3561-4.

Murasugi, Kunio: *Knot Theory and Its Applications*. Boston: Birkhäuser, 1996. ISBN: 978-0-8176-3817-1.

Mustapha, Ilyas Aderogba: «The Fundamental Group of Torus Knots». Tesis de mtría. Cameroon: African Institute for Mathematical Sciences (AIMS-Cameroon), mayo de 2018.

Rolfsen, Dale: *Knots and Links*. (Original work published 1976). Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.

Scharein, Robert G.: *KnotPlot*. Software para visualización de nudos. Centre for Experimental and Constructive Mathematics, Simon Fraser University. 2025. <https://knotplot.com/>.

Stillwell, John: *Classical topology and combinatorial group theory*. 2nd. Graduate Texts in Mathematics 72. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993. ISBN: 0-387-97970-0.

The Knot Atlas: *Project Homepage*. https://katlas.org/wiki/Main_Page.

Wang Xiao, Luping: «Introducción a la teoría de nudos». Dirigido por Fernando Etayo Gordejuela. Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación. Trabajo fin de grado en Matemáticas. Universidad de Cantabria, oct. de 2012. <https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/1215>.

Wolfram MathWorld: *Figure-Eight Knot*. <https://mathworld.wolfram.com/FigureEightKnot.html>.

Wolfram Research, Inc.: *Figure eight knot*. 2025. <https://mathworld.wolfram.com/FigureEightKnot.html>.

Yonatan: *Two generators of the fundamental group of the torus*. Wikimedia Commons. 2005. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fundamental_group_torus2.png.

Zhang, Mengsen et al.: *Topological portraits of multiscale coordination dynamics*. En: *Journal of Neuroscience Methods* 339 (jun. de 2020), pág. 108672. DOI: 10.1016/j.jneumeth.2020.108672.

Zhou, Tiancheng: *The Power of Group Generators and Relations: An Examination of the Concept and Its Applications*. En: *Journal of Applied Mathematics and Physics* 6 (2018), págs. 2425-2444. ISSN: 2327-4379. DOI: 10.4236/jamp.2018.611204. <https://doi.org/10.4236/jamp.2018.611204>.