

Celdas en hiperespacios de continuos

Daniel Armando Herrera Villamizar

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en Matemáticas

Bucaramanga

2016

Celdas en hiperespacios de continuos

Daniel Armando Herrera Villamizar

Trabajo de grado para optar al título de
Magister en Matemáticas

Director
Ph.D. Javier Enrique Camargo García

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Maestría en Matemáticas
Bucaramanga

2016

Agradecimientos

A mi director de tesis Javier Enrique Camargo García por su paciencia, predisposición y colaboración en la realización de este trabajo.

A mi madre Carmen Villamizar por su apoyo y colaboración durante toda mi maestría.

A mis compañeros de la maestría en Matemáticas y en Educación Matemática por hacer mi vida académica y social agradable y divertida.

A toda la Escuela de Matemáticas, principalmente a mis profesores por transmitirme sus conocimientos académicos y sus valores.

Índice general

Introducción	10
1. Preliminares	13
1.1. Notación	13
1.2. Continuos	14
1.3. Hiperespacios de continuos	19
1.4. Funciones de Whitney	20
1.5. Arcos de orden	22
2. Celdas en los hiperespacios 2^X y $\mathcal{C}(X)$	26
2.1. Modelos geométricos de $\mathcal{C}(X)$ para algunos continuos	26
2.2. Celdas en el hiperespacio 2^X	30
2.3. Celdas en el hiperespacio $\mathcal{C}(X)$	32
2.4. Celdas en el hiperespacio $\mathcal{C}(A, X)$	41
3. Celdas en el hiperespacio $\mathcal{C}_n(X)$	47
3.1. Resultados previos	47
3.2. Nuevos aportes	49
Bibliografía	54

Índice de figuras

1.2.1. La curva senoidal del topólogo S	15
1.2.2. Triodo simple	16
1.2.3. El abanico armónico \mathcal{F}_ω	16
1.2.4. Un 3-odo	18
1.2.5. Un 3-odo	18
1.5.1. Diagrama	24
2.1.1. $\mathcal{C}(X)$ para $X = \text{Arco}$	27
2.1.2. $\mathcal{C}(X)$ para $X = \text{Curva cerrada simple}$	27
2.1.3. $\mathcal{C}(X)$ para $X = \text{Paleta}$	28
2.1.4. n -odo simple y n -aleta	29
2.1.5. $\mathcal{C}(X)$ para $X = n$ -odo simple	29
2.1.6. $\mathcal{C}(X)$ para $X = \text{Triodo simple}$	30
2.3.1. $Sb(A, [0, 1])$	33
2.3.2. La curva senoidal del topólogo S	33
2.3.3. \mathcal{Z} no es cerrado superiormente respecto a A	34

RESUMEN

TÍTULO: CELDAS EN HIPERESPACIOS DE CONTINUOS.*

AUTOR: DANIEL ARMANDO HERRERA VILLAMIZAR.**

PALABRAS CLAVES: Continuo, Hiperespacios, n -celda, n -odo, subcontinuo descomponible.

DESCRIPCIÓN:

Se conocen modelos de hiperespacios para diferentes continuos que nos permiten conocerlos totalmente en cuanto a sus propiedades topológicas y geométricas. Sin embargo para la mayoría de continuos no es posible dar modelos geométricos a sus hiperespacios y por esta razón debemos encontrar maneras alternativas para describir propiedades de estos hiperespacios. Un problema curioso e interesante que nos ayuda a entender la geometría de los hiperespacios, es identificar celdas en estos hiperespacios.

Es conocido que el hiperespacio 2^X de un continuo X , siempre contiene un cubo de Hilbert. Además, 2^X es un cubo de Hilbert si y sólo si X es un continuo localmente conexo. Tenemos que $\mathcal{C}(X)$ contiene n -celdas si y sólo si X contiene n -odos, para algún $n \in \mathbb{N}$. De manera más general, $\mathcal{C}_n(X)$ es un cubo de Hilbert si y sólo si X es un continuo localmente conexo sin arcos libres. Además, con estas ideas, no es difícil probar que si X contiene un subcontinuo descomponible, entonces $\mathcal{C}_n(X)$ contiene una $(n + 1)$ -celda, para cada $n \in \mathbb{N}$. En este trabajo, mostramos que el recíproco del resultado anterior también es válido y de esta manera damos una respuesta afirmativa a la pregunta; “¿Dado un continuo X . Si $\mathcal{C}_n(X)$ contiene $(n + 1)$ -celdas, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces X contiene un subcontinuo descomponible?”.

Este trabajo está dividido en tres capítulos. En el Capítulo 1 mostramos algunas definiciones y resultados de los continuos y sus hiperespacios. Comenzamos el Capítulo 2 mostrando modelos geométricos para el hiperespacio $\mathcal{C}(X)$ de ciertos continuos seguido de algunos resultados obtenidos previamente que nos permiten determinar n -celdas en los hiperespacios 2^X y $\mathcal{C}(X)$. En el Capítulo 3 mostramos algunos resultados obtenidos sobre n -celdas en el hiperespacio $\mathcal{C}_n(X)$, y por último presentamos nuestros resultados.

*Trabajo de investigación

**Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Ph.D. Javier Enrique Camargo García.

ABSTRACT

TITLE: CELLS IN HYPERSPACES OF CONTINUA.*

AUTHOR: DANIEL ARMANDO HERRERA VILLAMIZAR.**

KEY WORDS: Continuum, Hyperspaces, n -cell, n -od, decomposable subcontinuum.

DESCRIPTION:

Geometric models of hyperspaces are known for different continua, they allow us to know totally their topology and geometric properties. However for several continua are not possible showing geometric models to their hyperspaces. In this way we must to find alternative ways for describing properties of these hyperspaces. A curious and interesting problem that help us to understand the geometry of hyperspaces, is identifying cells contained in these hyperspaces.

We known that the hyperspace 2^X of a continuum X , always contains a Hilbert cube. Also, 2^X is a Hilbert cube if and only if X is a locally connected continuum. We have that $\mathcal{C}(X)$ contains n -cells if and only if X contains n -ods for any $n \in \mathbb{N}$ and $\mathcal{C}_n(X)$ is a Hilbert cube if and only if X is locally connected without free arcs. Also, with these ideas is not difficult to show that if X contains a decomposable subcontinuum, then $\mathcal{C}_n(X)$ contains a $(n + 1)$ -cell, for any $n \in \mathbb{N}$. In this work, we show that the sufficiency condition above is true and in this way we give a positive answer to question; "*Let X be a continuum. If $\mathcal{C}_n(X)$ contains $(n + 1)$ -cells, then does X contain a decomposable subcontinuum?*".

This work is divided in three chapters. The first chapter gives some definitions and results for continua and their hyperspaces. We start the second chapter showing geometric models of hyperspace $\mathcal{C}(X)$ for some continua, next we give some results obtained previously that allow us to identify n -cells contains in the hyperspaces 2^X and $\mathcal{C}(X)$. In the third chapter we give some results about n -cells for the hyperspace $\mathcal{C}_n(X)$, and finally we show our results.

* Research work

** Faculty of Sciences. School of Mathematics. Director: Ph.D. Javier Enrique Camargo García.

Introducción

La teoría de hiperespacios tuvo sus inicios a principios del siglo XX con los trabajos de F. Hausdorff y L. Vietoris, quienes fueron los primeros en utilizar la palabra *hiperespacio* para describir al conjunto de todos los subconjuntos cerrados de un espacio topológico. Durante las décadas de los 20's y los 30's se dieron a conocer muchos resultados acerca de la estructura fundamental de los hiperespacios; uno de los más importantes se dio en el año de 1931 cuando K. Borsuk y W. Mazurkiewicz sentaron las bases para entender la estructura de arco de los hiperespacios, al probar que 2^X y $\mathcal{C}(X)$ son arcoconexos. En 1942, John L. Kelley presentó una gran variedad de tópicos en la teoría de hiperespacios en el que se destaca el estudio de los hiperespacios de continuos hereditariamente indescomponibles; sin embargo, la importancia de estos continuos solo se dio a conocer hasta la década de los 70's. Además, Kelley fue el primero en usar *funciones de Whitney* en la investigación de hiperespacios, con ello definió, estudió e hizo uso de funciones especiales, que denominó *segmentos*. Las funciones de Whitney y los segmentos han servido como herramientas básicas para determinar nuevos resultados relacionados con los hiperespacios. Entre los años de 1970 y 1976 se dio a conocer una gran variedad de resultados en la teoría de hiperespacios; uno de los más importantes fue presentado por D. Curtis, R. Schori y J. West, quienes dieron una respuesta afirmativa a la pregunta *¿Si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X es un cubo de Hilbert?* planteada desde la década de los 20's. Para la solución de este problema fue necesario introducir técnicas de topología infinito dimensional al estudio de los hiperespacios. En resumen, el estudio de la estructura topológica de los hiperespacios sigue siendo un campo de trabajo con problemas muy interesantes para investigadores en el área de topología, por este motivo, es indiscutible la importancia de realizar investigaciones en esta área de las matemáticas.

Como veremos en el Capítulo 2, los hiperespacios de subcontinuos $\mathcal{C}([0, 1])$ y $\mathcal{C}(S^1)$, donde $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$, son homeomorfos a $[0, 1]^2$ (una 2-celda). Por otra

parte, se conocen modelos de hiperespacios para diferentes continuos que nos permiten conocerlos totalmente en cuanto a sus propiedades topológicas y geométricas. Sin embargo para la mayoría de continuos no es posible dar modelos geométricos a sus hiperespacios y por esta razón debemos encontrar maneras alternativas para describir propiedades de estos hiperespacios. Un problema curioso e interesante que además, nos ayuda a entender la geometría de los hiperespacios, es identificar celdas en estos hiperespacios. En esta dirección se han desarrollado algunas investigaciones que serán nuestro tema central en este trabajo.

Es conocido que el hiperespacio de los subconjuntos cerrados no vacíos de un continuo X , denotado por 2^X , siempre contiene un cubo de Hilbert [6, Teorema 14.12]. Además, 2^X es un cubo de Hilbert si y sólo si X es un continuo localmente conexo [6, Teorema 15.6]. A partir de [12] y [5] tenemos que $\mathcal{C}(X)$ contiene n -celdas si y sólo si X contiene n -odos, para algún $n \in \mathbb{N}$. De manera más general, $\mathcal{C}_n(X)$ es un cubo de Hilbert si y sólo si X es un continuo localmente conexo sin arcos libres [8, Teorema 6.1.6]. Además, con estas ideas, no es difícil probar que si X contiene un subcontinuo descomponible, entonces $\mathcal{C}_n(X)$ contiene una $(n + 1)$ -celda, para cada $n \in \mathbb{N}$ [8, Teorema 6.1.10]. En este trabajo, mostraremos que el recíproco del resultado anterior también es válido y de esta manera daremos una respuesta afirmativa a [8, Pregunta 7.4.1]; “¿Dado un continuo X . Si $\mathcal{C}_n(X)$ contiene $(n + 1)$ -celdas, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces X contiene un subcontinuo descomponible?”, siendo este un nuevo resultado para la teoría de los hiperespacios de continuos y además el resultado más importante que obtuvimos en el desarrollo de este trabajo de grado.

Este trabajo está dividido en tres capítulos. En el Capítulo 1 mostraremos algunas definiciones y resultados de los continuos y sus hiperespacios, donde destacamos la construcción de una función de Whitney en el hiperespacio 2^X y la existencia de arcos de orden bajo cierta condición. Comenzaremos el Capítulo 2 mostrando modelos geométricos para el hiperespacio $\mathcal{C}(X)$ de ciertos continuos seguido de algunos resultados obtenidos previamente que nos permitirán determinar n -celdas en los hiperespacios 2^X y $\mathcal{C}(X)$, para ello será necesario introducir la definición de semifrontera de un subespacio de $\mathcal{C}(X)$ y algunos resultados obtenidos relacionados con la semifrontera. Por último presentaremos el hiperespacio $\mathcal{C}(A, X)$ y reproduciremos la prueba del siguiente resultado; “ A está contenido en el centro de un k -odo si y sólo si $\mathcal{C}(A, X)$ contiene una k -celda, para algún $k \in \mathbb{N}$ ” resultado tomado originalmente de [11], que nos permite localizar n -celdas en el hiperespacio $\mathcal{C}(X)$. En el Capítulo 3 mostraremos algunos resultados obtenidos sobre n -celdas en el hiperespacio $\mathcal{C}_n(X)$, y por último presentaremos el

resultado principal de este trabajo, probaremos que “ X es un continuo hereditariamente indescomponible, si y sólo si $\mathcal{C}_n(X)$ no contiene $(n + 1)$ –celdas, para ningún $n \in \mathbb{N}$ ”.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos definiciones, ejemplos y teoremas básicos de la teoría de continuos, necesarios para el desarrollo del presente trabajo. Comenzaremos definiendo lo que es un continuo y presentando algunos ejemplos. Después, definiremos los hiperespacios de un continuo X e introducimos la métrica de Hausdorff para dar estructura de espacio métrico a estos hiperespacios. Por último, mostraremos como construir una función de Whitney y una condición suficiente para la existencia de un arco de orden en el hiperespacio 2^X .

1.1. Notación

Empezamos introduciendo algunas notaciones usadas en libros de topología general y teoría de continuos que usaremos a lo largo de este trabajo.

- \mathbb{N} : El conjunto de enteros positivos.
- $A \setminus B$: Es la diferencia entre dos subconjuntos de un espacio X .
- $A \subset B$: A es un subconjunto de B (puede suceder que $A = B$).
- $A \subsetneq B$: A es un subconjunto de B y $A \neq B$.
- $A \not\subset B$: A intersección con el complemento de B es diferente del conjunto vacío \emptyset .
- $f|_A$: Es la restricción de una función f a un subespacio A de su dominio.
- \overline{A} : Es la cerradura del conjunto A con respecto al espacio X .

- $fr_Y(A)$: Es la frontera del conjunto A con respecto al espacio Y .
- $int_Y(A)$: Es el interior del conjunto A con respecto al espacio Y .
- $\dim[X]$: Es la dimensión de un espacio métrico separable X .

1.2. Continuos

En esta sección presentamos la definición de continuo seguido de algunos ejemplos entre los que destacamos las n -celdas y por último, presentaremos una clase de continuos conocidos como n -odos que usaremos con mucha frecuencia en este trabajo.

Definición 1.2.1. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y diferente del vacío.

Ahora presentamos algunos ejemplos de continuos.

Ejemplo 1.2.2. Un *arco* es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$.

Dado un homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow \alpha$, donde $h(0) = p$ y $h(1) = q$, diremos que α es un *arco de p a q* .

Ejemplo 1.2.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, una n -*celda* es un espacio homeomorfo a $[0, 1]^n$, donde $[0, 1]^n = \underbrace{[0, 1] \times \cdots \times [0, 1]}_{n\text{-veces}}$.

De lo anterior, un arco es una 1-celda.

Ejemplo 1.2.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, una n -*esfera* es un espacio homeomorfo a la esfera S^n en \mathbb{R}^{n+1} , donde $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. En particular un espacio homeomorfo a S^1 se denomina *curva cerrada simple*.

Ejemplo 1.2.5. El *cubo de Hilbert* que denotamos por \mathcal{Q} , es un espacio homeomorfo al producto cartesiano numerable $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ dotado de la topología producto.

Ejemplo 1.2.6. La *curva senoidal del topólogo* que denotamos por S , se define por $S = \overline{W}$, donde $W = \{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$. Es decir, $S = W \cup (\{0\} \times [-1, 1])$, como mostramos en la Figura 1.2.1.

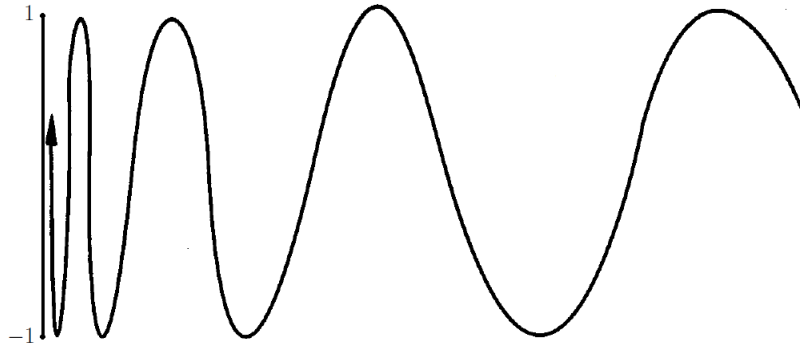


Figura 1.2.1: La curva senoidal del topólogo S

Ejemplo 1.2.7. Un *disco unitario* es un espacio homeomorfo a D^2 , donde $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$.

El disco unitario es realmente una 2-celda. Sin embargo, llamaremos disco unitario a ésta presentación de la 2-celda.

Los siguientes continuos los usaremos frecuentemente en el desarrollo de este trabajo.

Ejemplo 1.2.8. Para algún entero $n \geq 3$, un n -*odo simple*, que denotamos por \mathcal{F}_n es un espacio homeomorfo a la unión de n arcos α_i , $\mathcal{F}_n = \bigcup_{i=1}^n \alpha_i$, donde α_i es el segmento convexo que va del punto a al punto b_i , con $a = (0, 0)$ y $b_i = (1, \frac{1}{i})$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. En particular, un 3-*odo simple* (*triodo simple*) se ilustra como los de la Figura 1.2.2.

Un ∞ -*odo*, que contiene infinitos arcos, puede asociarse a un abanico armónico y lo describimos a continuación.

Ejemplo 1.2.9. El *abanico armónico*, que denotamos por \mathcal{F}_ω , es un espacio homeomorfo a la unión $\bigcup_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, donde α_n es segmento convexo que va del punto a al punto b_n , con $a = (0, 0)$, $b_0 = (1, 0)$ y $b_n = (1, \frac{1}{n})$, para cada $n \in \mathbb{N}$. La Figura 1.2.3 representa a \mathcal{F}_ω .

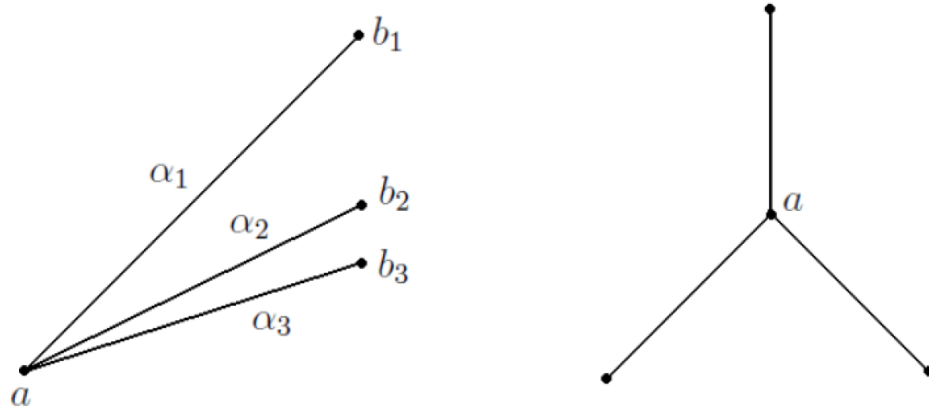


Figura 1.2.2: Triodo simple

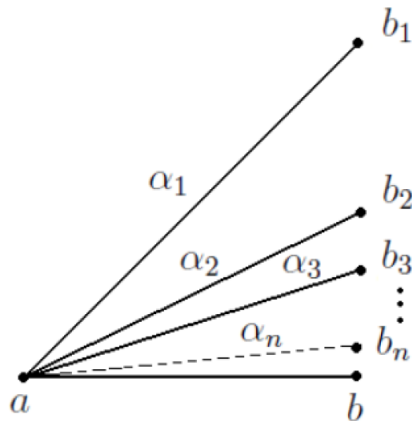


Figura 1.2.3: El abanico armónico \mathcal{F}_ω

Definición 1.2.10. Un continuo X es *arcoconexo* si para cualquier par de puntos p y q de X existe un arco de p a q .

Un arco, una curva cerrada simple o cualquier n -celda, son ejemplos de continuos arcoconexos, por otra parte, la curva senoidal del topólogo es un ejemplo de un continuo que no es arcoconexo.

Definición 1.2.11. Un continuo X es *descomponible* si existen subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Si un continuo no es descomponible se dice que es *indescomponible*.

Un arco, una 2-celda, una curva cerrada simple, son ejemplos de continuos descomponibles. Además, existen continuos como el arco que tienen la propiedad que todo subcontinuo no degenerado es descomponible, porque como se conoce, sus subcontinuos no degenerados son arcos. Un continuo que cumpla que todo subcontinuo es descomponible se dice *hereditariamente descomponible*. De manera análoga, si todo subcontinuo no degenerado de un continuo X es indescomponible, se dice que X es *hereditariamente indescomponible*. En [9, Capítulo I], se pueden encontrar construcciones de continuos indescomponibles y hereditariamente indescomponibles.

Definición 1.2.12. Sea Y un espacio topológico. Un subconjunto conexo K de Y es una *componente* de Y , si para todo subconjunto conexo W de Y tal que $K \subset W$, se tiene que $W = K$.

Proposición 1.2.13. Sean X un continuo y N un subcontinuo propio de X . Si S es una componente de $X \setminus N$, entonces $S \cup N$ es un subcontinuo de X .

Demostración. Sea S es una componente de $X \setminus N$. Entonces, por [9, Teorema 5.6], $\overline{S} \cap N \neq \emptyset$. Además, $\overline{S} \setminus S \subset N$, pues si $x \in \overline{S} \setminus S$ y $x \notin N$, entonces $S \cup \{x\} \subset X \setminus N$. Como S es conexo y $x \in \overline{S}$, tenemos que $S \cup \{x\}$ es conexo. Luego $S \subsetneq S \cup \{x\} \subset X \setminus N$, lo cual es una contradicción, pues S es componente. Así, $\overline{S} \setminus S \subset N$. Por tanto $S \cup N = \overline{S} \cup N$ es un continuo. \square

La siguiente definición generaliza la noción de n -odo simple.

Definición 1.2.14. Sea $n \in \mathbb{N}$. Un continuo Y es un n -odo si existe un subcontinuo M de Y tal que $Y \setminus M$ tiene al menos n componentes. Además, diremos que M es un centro del n -odo.

En particular un n -odo simple es un n -odo, sin embargo existen n -odos que no son n -odos simples. Note que la curva cerrada simple M de la Figura 1.2.4 es un subcontinuo de Y , y $Y \setminus M$ tiene tres componentes. Por lo tanto Y es un 3-odo, pero Y no es un 3-odo simple. En la Figura 1.2.5 representamos otro continuo Y que es la unión de la curva senoidal del topólogo con los arcos $[1, 2]$ y $[-2, -1]$. Note que $M = [-1, 1]$ es un subcontinuo de Y , y que $Y \setminus M$ tiene tres componentes. Por lo tanto Y es un 3-odo, pero no es un 3-odo simple.

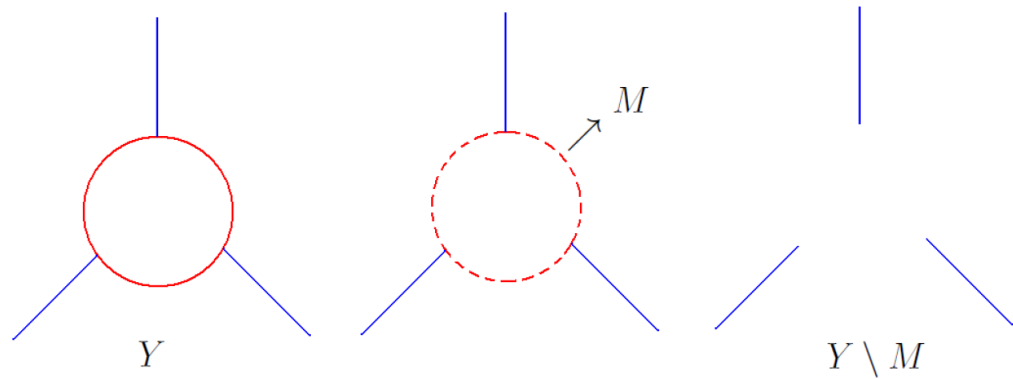


Figura 1.2.4: Un 3 – *odo*

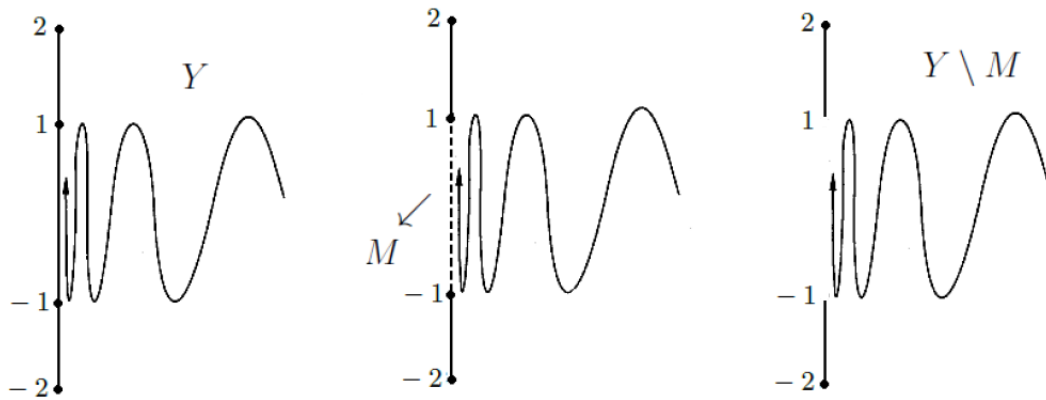


Figura 1.2.5: Un 3 – *odo*

Definición 1.2.15. Una *dendrita* es un continuo localmente conexo que no contiene una curva cerrada simple.

Las dendritas son ejemplos de continuos en el plano, arcoconexos tales que todo subcontinuo propio es una dendrita. Para mayor información sobre las dendritas ver [9, Capítulo X].

1.3. Hiperespacios de continuos

En esta sección definimos los hiperespacios de un continuo y mencionaremos su estructura de espacio topológico utilizando la métrica de Hausdorff. Además, mostraremos algunas notaciones que utilizaremos en este trabajo.

Dado un continuo X , definimos sus hiperespacios como los siguientes conjuntos:

- $2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\}$,
- $\mathcal{C}_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $\mathcal{C}(X)$ al hiperespacio $\mathcal{C}_1(X)$,
- $\mathcal{F}_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dado un continuo (X, d) donde d es la métrica sobre X . En la siguiente definición damos estructura de espacio métrico a los hiperespacios.

Definición 1.3.1. Para todo A y B en 2^X se define la métrica de Hausdorff como

$$H_d(A, B) = \inf \{r > 0 : A \subset \mathcal{B}(B, r) \text{ y } B \subset \mathcal{B}(A, r)\},$$

donde $\mathcal{B}(A, r) = \{x \in X : d(x, A) < r\}$ y $\mathcal{B}(B, r) = \{x \in X : d(x, B) < r\}$.

En [6, Capítulo I], se muestra que la topología inducida por la métrica de Hausdorff sobre 2^X es equivalente a la topología de *Vietoris* definida como la topología generada por

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \dots, U_k \rangle : U_1, \dots, U_k \text{ son subconjuntos abiertos de } X \text{ y } k \in \mathbb{N}\},$$

donde $\langle U_1, \dots, U_k \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^k U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, k\}\}$. Note que, por definición, $\mathcal{C}_n(X)$ y $\mathcal{F}_n(X)$ son espacios métricos como subespacios de 2^X ; por lo tanto quedan dotados de la topología de subespacio. Denotaremos por $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n$ a $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n = \langle U_1, \dots, U_m \rangle \cap \mathcal{C}_n(X)$.

Aunque de manera general se pueden definir hiperespacios sobre cualquier espacio topológico, en este trabajo siempre que se hable de un hiperespacio nos estamos refiriendo al hiperespacio de un continuo.

1.4. Funciones de Whitney

Las funciones de Whitney constituyen una manera de medir el tamaño de los elementos de 2^X (sin ser una función de medida) y son una herramienta muy poderosa para estudiar la estructura de los hiperespacios.

Definición 1.4.1. Una *función de Whitney* es una función continua $\mu : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty)$, donde $\mathcal{H} \in \{2^X, \mathcal{C}_n(X)\}$, que satisface las siguientes condiciones:

- (a) $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$.
- (b) $\mu(A) < \mu(B)$ si $A \subsetneq B$.

Nótese que si tenemos una función de Whitney para 2^X y $k \in \mathbb{N}$, la restricción a $\mathcal{C}_k(X)$ es nuevamente una función de Whitney para $\mathcal{C}_k(X)$.

Sabemos que tanto 2^X como $\mathcal{C}_n(X)$ son compactos, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Así que la imagen de ellos bajo una función de Whitney es un conjunto acotado de $[0, \infty)$. Además, la condición (b) asegura que el máximo de una función de Whitney siempre se alcanza en el elemento X de 2^X o de $\mathcal{C}_n(X)$ según en donde estemos contemplando la función. Cuando X es no degenerado, las condiciones (a) y (b) garantizan que $\mu(X) > 0$. Así podemos tomar la función $\frac{\mu}{\mu(X)} : 2^X \rightarrow [0, 1]$ o con dominio $\mathcal{C}_n(X)$ según sea el caso. Observemos que esta nueva función sigue cumpliendo las propiedades (a) y (b) pero ahora tiene dos propiedades adicionales, la primera es que su imagen está contenida en el intervalo $[0, 1]$ y la segunda es que $\mu(X) = 1$. En esta situación decimos que normalizamos una función de Whitney. Estas propiedades la hacen todavía mejor y más cómoda en su manejo. Por esta razón, supondremos que X siempre es no degenerado y le pediremos a las funciones de Whitney que satisfagan la propiedad adicional:

- (c) $\mu(X) = 1$.

En el Teorema 1.4.3 veremos que para cualquier continuo X siempre existe una función de Whitney. Antes de probar esto veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.4.2. Sea $X = [0, 1]$ y definamos la función $\mu : \mathcal{C}(X) \rightarrow [0, 1]$ como $\mu(A) = \text{diám}(A)$, para todo $A \in \mathcal{C}(X)$.

Veamos que μ es continua. Sean $A, B \in \mathcal{C}(X)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $H_d(A, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Supongamos que $\text{diám}(B) \leq \text{diám}(A)$. Como $A \subset \mathcal{B}(B, \frac{\varepsilon}{2})$, tenemos que $\text{diám}(A) \leq \text{diám}(\mathcal{B}(B, \frac{\varepsilon}{2})) = \text{diám}(B) + 2(\frac{\varepsilon}{2})$. Luego $\text{diám}(A) - \text{diám}(B) \leq \varepsilon$. Además, es claro que esta función satisface las propiedades (a), (b) y (c).

La demostración que presentamos en el siguiente teorema la tomamos de [6, Capítulo VII].

Teorema 1.4.3. *Para cualquier continuo X , el hiperespacio 2^X admite funciones de Whitney.*

Demostración. Sea $D = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso numerable de X , ver [3, VIII, Teorema 7.3], y supongamos que la métrica d de X satisface la condición $d(p, q) \leq 1$ para todo $p, q \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $\mu_n : 2^X \rightarrow [0, 1]$ como $\mu_n(A) = \max\{d(a, p_n) : a \in A\} - \min\{d(a, p_n) : a \in A\}$ y veamos que μ_n es continua. Sean $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$ tales que $H_d(A, B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como A es compacto, existen $a_1, a_2 \in A$ tales que $d(a_1, p_n) = \min\{d(a, p_n) : a \in A\}$ y $d(a_2, p_n) = \max\{d(a, p_n) : a \in A\}$. Como $H_d(A, B) < \frac{\varepsilon}{2}$, $A \subset \mathcal{B}(B, \frac{\varepsilon}{2})$. Así, existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $d(a_1, b_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(a_2, b_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. De lo anterior obtenemos que $\max\{d(a, p_n) : a \in A\} = d(a_2, p_n) \leq d(a_2, b_2) + d(b_2, p_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \max\{d(b, p_n) : b \in B\}$ y $\min\{d(b, p_n) : b \in B\} \leq d(b_1, p_n) \leq d(b_1, a_1) + d(a_1, p_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \min\{d(a, p_n) : a \in A\}$. Entonces, $\mu_n(A) - \mu_n(B) = (\max\{d(a, p_n) : a \in A\} - \min\{d(a, p_n) : a \in A\}) - (\max\{d(b, p_n) : b \in B\} - \min\{d(b, p_n) : b \in B\}) < \varepsilon$. De manera similar se obtiene que $\mu_n(B) - \mu_n(A) < \varepsilon$. Por tanto, $|\mu_n(A) - \mu_n(B)| < \varepsilon$ y esto prueba que μ_n es continua. Ahora definamos $\mu : 2^X \rightarrow [0, 1]$ como $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}$ para todo $A \in 2^X$. Note que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A \in 2^X$, $0 \leq \mu_n(A) \leq \max\{d(a, p_n) : a \in A\} \leq 1$. De manera que $\left| \frac{\mu_n(A)}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}$ converge a una función continua, por [3, III, Proposición 10.5]. Por tanto, μ está bien definida y es continua. Claramente, μ satisface la condición (a), porque para cada $x \in X$, $\mu_n(\{x\}) = \max\{d(a, p_n) : a \in \{x\}\} - \min\{d(a, p_n) : a \in \{x\}\} = d(x, p_n) - d(x, p_n) = 0$. Ahora veamos que μ satisface la condición (b). Como $A \subset B$, $\{d(a, p_n) : a \in A\} \subset \{d(b, p_n) : b \in B\}$. De manera que $\max\{d(a, p_n) : a \in A\} \leq \max\{d(b, p_n) : b \in B\}$ y $\min\{d(b, p_n) : b \in B\} \leq \min\{d(a, p_n) : a \in A\}$. Entonces $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $b_0 \in B \setminus A$. Como A es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(b_0, 2\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Como el conjunto D es denso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(b_0, p_m) < \varepsilon$. Si existiera $a \in A$ tal que $d(a, p_m) \leq \varepsilon$, $d(a, b_0) \leq d(a, p_m) + d(p_m, b_0) < 2\varepsilon$. Pero esto contradice que $\mathcal{B}(b_0, 2\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Luego $\varepsilon < \min\{d(a, p_m) : a \in A\}$. Note que $\min\{d(b, p_m) : b \in B\} \leq d(b_0, p_m) < \varepsilon$. Entonces, $\min\{d(b, p_m) : b \in B\} < \min\{d(a, p_m) : a \in A\}$. Por tanto, $\mu_m(A) < \mu_m(B)$. Así, si $A \subsetneq B$ tenemos que $\mu(A) < \mu(B)$. Por tanto, si se normaliza μ , se tiene una función de Whitney para 2^X . \square

No es difícil verificar que si $\mu : 2^X \rightarrow [0, 1]$ es una función de Whitney, para algún continuo X , entonces la restricción $\mu|_{\mathcal{C}_n(X)} : \mathcal{C}_n(X) \rightarrow [0, 1]$ es una función de Whitney, para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Así, es inmediata la prueba de la siguiente afirmación.

Teorema 1.4.4. *Para cualquier continuo X , el hiperespacio $\mathcal{C}_n(X)$ admite funciones de Whitney, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

1.5. Arcos de orden

En esta sección se mostrará que dados dos elementos M y N en 2^X , $M \subsetneq N$, tal que cada componente de N intersección con M es diferente del vacío, es posible construir un arco α en 2^X de M a N de manera que α con la relación de orden \subset es un conjunto totalmente ordenado.

Definición 1.5.1. Sea X un continuo. Un *arco de orden* en 2^X es un arco α en 2^X tal que si $A, B \in \alpha$, entonces $A \subset B$ o $B \subset A$.

Observación 1.5.2. Por comodidad, algunas veces usaremos la notación $[A, B]$ para denotar a un arco de orden que va de A a B en 2^X . Aclarando que A y B son elementos de 2^X .

Antes de probar la existencia de arcos de orden en 2^X veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.5.3. Sea X la curva senoidal del topólogo. Para cada $t \in [-1, 1]$, definamos $A_t \in \mathcal{C}(X)$ por $A_t = \{(0, y) \in X : -1 \leq y \leq t\}$ y para cada $t \in (0, 1]$ definamos $B_t \in \mathcal{C}(X)$ por $B_t = A_1 \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in X : 0 < x \leq t\}$. Sea $h : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X)$, definida por

$$h(t) = \begin{cases} A_{4t-1} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ B_{2t-1} & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

para todo $t \in [0, 1]$. Es fácil deducir que h es una inmersión, tal que $h(0) = \{(0, -1)\}$ y $h(1) = X$. Además, note que para todo $A, B \in [\{(0, -1)\}, X]$, $A \subset B$ o $B \subset A$.

Teorema 1.5.4. *Sea X un continuo y sean A y B elementos de 2^X tales que $A \subsetneq B$. Si cada componente de B intersección con A es diferente del vacío, entonces existe un arco de orden en 2^X de A a B .*

Demostración. Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$ y \mathcal{F} la familia de todos los subconjuntos Γ de 2^X que cumplen las siguientes propiedades:

- (a) Si $G \in \Gamma$, entonces $A \subset G \subset B$.
- (b) Si $G \in \Gamma$, entonces cada componente de G intersección con A es diferente del vacío.

(c) Si $G', G'' \in \Gamma$, entonces $G' \subset G''$ o $G'' \subset G'$.

Dada $\mathcal{C} = \{\Gamma_i : i \in \Lambda\}$ una cadena de \mathcal{F} , $\Gamma_j \subset \bigcup_{i \in \Lambda} \Gamma_i$ para todo $j \in \Lambda$. Veamos que $\bigcup_{i \in \Lambda} \Gamma_i \in \mathcal{F}$. Sea $G_0 \in \bigcup_{i \in \Lambda} \Gamma_i$, entonces existe $l \in \Lambda$ tal que $G_0 \in \Gamma_l$. Como $\Gamma_l \in \mathcal{F}$, tenemos que $A \subset G_0 \subset B$ y cada componente de G_0 intersección con A es diferente del vacío. Además, si $G'_0, G''_0 \in \bigcup_{i \in \Lambda} \Gamma_i$, existen $p, q \in \Lambda$ tales que $G'_0 \in \Gamma_p$ y $G''_0 \in \Gamma_q$. Como \mathcal{C} es una cadena, $\Gamma_p \subset \Gamma_q$ o $\Gamma_q \subset \Gamma_p$. Así, $G'_0 \subset G''_0$ o $G''_0 \subset G'_0$. De lo anterior, toda cadena está acotada superiormente y, por [3, II, Teorema 2.1] existe $\Gamma_0 \in \mathcal{F}$ tal que Γ_0 es maximal. Veamos que Γ_0 es cerrado. Sea $D_0 \in \overline{\Gamma_0} \setminus \Gamma_0$. Entonces existe una sucesión $(D_n)_{n=1}^\infty$ en Γ_0 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = D_0$. Como $A \subset D_n \subset B$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $A \subset D_0 \subset B$. Probemos que si $D \in \Gamma_0$, entonces $D \subset D_0$ o $D_0 \subset D$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $D \subset D_n$ o $D_n \subset D$, entonces existe una subsucesión $(D_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(D_n)_{n=1}^\infty$ tal que $D \subset D_{n_k}$ o $D_{n_k} \subset D$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que $D \subset D_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, como $\lim_{k \rightarrow \infty} D_{n_k} = D_0$, tenemos que $D \subset D_0$ y $\Gamma_0 \cup \{D_0\} \in \mathcal{F}$. Por otro lado Γ_0 es maximal, luego $D_0 \in \Gamma_0$, lo que es una contradicción. Entonces $\Gamma_0 = \overline{\Gamma_0}$ es cerrado. Por tanto Γ_0 es compacto en 2^X . Sea $\mu : 2^X \rightarrow [0, 1]$ una función de Whitney. Denotemos por μ_0 a la restricción $\mu|_{\Gamma_0} : \Gamma_0 \rightarrow [\mu(A), \mu(B)]$. Note que μ_0 es inyectiva. Veamos ahora que μ_0 es sobreyectiva. Como Γ_0 es maximal y cada componente de B intercepta a A , tenemos que $A \in \Gamma_0$ y $B \in \Gamma_0$. Además, $\mu_0(\Gamma_0) \subset [\mu(A), \mu(B)]$. Probemos que $[\mu(A), \mu(B)] \subset \mu_0(\Gamma_0)$. Supongamos que $[\mu(A), \mu(B)] \not\subseteq \mu_0(\Gamma_0)$, entonces existe un subintervalo cerrado no degenerado $[r_0, t_0]$ de $[\mu(A), \mu(B)]$ tal que $r_0, t_0 \in \mu_0(\Gamma_0)$ y $s \notin \mu_0(\Gamma_0)$ si $r_0 < s < t_0$. Sean $R_0, T_0 \in \Gamma_0$ tales que $\mu_0(R_0) = r_0$ y $\mu_0(T_0) = t_0$. Luego, si $G \in \Gamma_0$, entonces $G \subset R_0$ o $T_0 \subset G$. Además, como $r_0 < t_0$, tenemos que $R_0 \subsetneq T_0$. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $T_0 \not\subseteq \overline{\mathcal{B}(R_0, \varepsilon)}$. Sea $p \in T_0 \setminus \overline{\mathcal{B}(R_0, \varepsilon)}$ y sea K la componente de T_0 tal que $p \in K$. Por (b), $K \cap A \neq \emptyset$ y como $A \subset R_0$ por (a), $K \cap R_0 \neq \emptyset$. Sea $q \in K \cap R_0$ y sea $U = \mathcal{B}(R_0, \varepsilon) \cap K$. Entonces, $U \subsetneq K$ y $U \neq \emptyset$. Sea M la componente de \overline{U} tal que $q \in M$. Así, tenemos que $M \cap fr_K(U) \neq \emptyset$. Sean $G_0 = R_0 \cup M$ y $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{G_0\}$. Note que, $R_0 \subsetneq G_0$. Además, como $M \subset K \subset T_0$ y $R_0 \subset T_0$, tenemos que $G_0 \subset T_0$ y como $p \in T_0 \setminus G_0$, entonces $G_0 \subsetneq T_0$. Por otro lado, $R_0, T_0 \in \Gamma_0$ y $R_0 \subset T_0$. Así, tenemos que $A \subset R_0 \subset T_0 \subset B$ y $A \subset G_0 \subset B$, por lo tanto Γ_1 satisface (a). Como $G_0 = R_0 \cup M$ y además M es conexo y $M \cap R_0 \neq \emptyset$, tenemos que cada componente de G_0 contiene una componente de R_0 . Así, como cada componente de R_0 intercepta a A por (b), cada componente de G_0 intercepta a A . Por lo tanto, Γ_1 satisface (b). Note que si $G \in \Gamma_0$, entonces $G \subset G_0$ o $G_0 \subset G$. Como $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \{G_0\}$, por (c) Γ_1 satisface (c). Así, Γ_1 satisface (a), (b) y (c). Luego, $\Gamma_1 \in \mathcal{F}$. Por tanto, como

$\Gamma_0 \subset \Gamma_1$ y Γ_0 es maximal, tenemos que $\Gamma_1 = \Gamma_0$. Entonces $G_0 \in \Gamma_0$ y $r_0 < \mu_0(G_0) < t_0$, pero esto es una contradicción. Así, μ_0 es sobreyectiva, y además es cerrada, luego μ_0 es un homeomorfismo. Por tanto Γ_0 es un arco de orden en 2^X de A a B . \square

Observación 1.5.5. Si α es un arco de orden en 2^X de A a B , entonces $A = \bigcap \alpha$ y $B = \bigcup \alpha$.

Con el Teorema 1.5.4 es inmediata la prueba del siguiente corolario.

Corolario 1.5.6. Para cada $A \in \mathcal{H} \setminus \{X\}$, donde $\mathcal{H} \in \{2^X, \mathcal{C}_n(X)\}$, existe un arco α de A a X y por lo tanto \mathcal{H} es arcoconexo.

Definición 1.5.7. Dados $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty)$ una función de Whitney y $A, B \in 2^X$. Diremos que una función continua $\sigma : [0, 1] \rightarrow 2^X$ es un *segmento respecto a μ de A a B* si satisface las siguientes condiciones:

- (a) $\sigma(0) = A$ y $\sigma(1) = B$.
- (b) $\mu(\sigma(t)) = (1-t)\mu(\sigma(0)) + t\mu(\sigma(1))$, para cada $t \in [0, 1]$.
- (c) Si $0 \leq t \leq t' \leq 1$, entonces $\sigma(t) \subset \sigma(t')$.

Proposición 1.5.8. Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$ y cada componente de B intersección con A es diferente del vacío, entonces existe un segmento respecto a una función de Whitney dada en 2^X de A a B .

Demostración. Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces, por el Teorema 1.5.4, existe un arco de orden α en 2^X de A a B . Sea $\mu : 2^X \rightarrow [0, \infty)$ una función de Whitney dada. Note que $\mu_0 = \mu|_\alpha : \alpha \rightarrow [0, \infty)$ es una función inyectiva porque $\mu_0(C) < \mu_0(D)$ para todo $C \subsetneq D$. Además es una función cerrada. Por lo tanto es un homeomorfismo sobre su imagen. Observe que la imagen de la función μ_0 es un arco $[a, b] \subset [0, \infty)$. Definamos $\rho : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ por $\rho(t) = (1-t)a + tb$ para cada $t \in [0, 1]$. No es difícil ver que ρ es un homeomorfismo. Ahora, definamos $\sigma : [0, 1] \rightarrow 2^X$ por $\sigma = \mu_0^{-1} \circ \rho$ como lo ilustra el diagrama. Como ρ es continua y sobreyectiva, y μ_0^{-1} es continua, tenemos que σ es continua y $\sigma([0, 1]) = \alpha$. Así, $\mu(\sigma(t)) = \rho(t)$ para todo $t \in [0, 1]$.

$$\begin{array}{ccc} & & \alpha \\ & \nearrow^{\mu_0^{-1} \circ \rho} & \uparrow \mu_0^{-1} \\ [0, 1] & \xrightarrow{\rho} & [a, b] \end{array}$$

Figura 1.5.1: Diagrama

De esta manera tenemos que $\mu(\sigma(0)) = \rho(0) = a$ y $\mu(\sigma(1)) = \rho(1) = b$. Por tanto, $\mu(\sigma(t)) = (1-t)\mu(\sigma(0)) + t\mu(\sigma(1))$, para cada $t \in [0, 1]$ y así se tiene la condición (b). Como $a \leq b$, tenemos que $b - a \geq 0$. De esta manera, si $0 \leq t \leq t' \leq 1$ entonces $a + t(b - a) \leq a + t'(b - a)$. Es decir $(1-t)a + tb \leq (1-t')a + t'b$. Luego $\mu(\sigma(t)) \leq \mu(\sigma(t'))$. α es un arco de orden, entonces supongamos que $\sigma(t') \subsetneq \sigma(t)$. Como μ es una función de Whitney, tenemos que $\mu(\sigma(t')) < \mu(\sigma(t))$, lo que es una contradicción. Entonces, $\sigma(t) \subset \sigma(t')$ y esto prueba la condición (c). Por último, $\sigma(0) = \mu^{-1}(\rho(0)) = \mu^{-1}(a) = A$ y $\sigma(1) = \mu^{-1}(\rho(1)) = \mu^{-1}(b) = B$. Así se satisface la condición (a) y el teorema queda demostrado. \square

De la prueba de la Proposición 1.5.8 se puede concluir el siguiente corolario.

Corolario 1.5.9. *Todo arco de orden en 2^X es la imagen continua de un segmento.*

Capítulo 2

Celdas en los hiperespacios 2^X y $\mathcal{C}(X)$

Comenzaremos este capítulo ilustrando gráficamente los modelos geométricos de $\mathcal{C}(X)$ para algunos continuos. Además, recopilamos algunos resultados conocidos relacionados con celdas en hiperespacios. Inicialmente, basados en [6], probaremos que para cualquier continuo no degenerado, el hiperespacio 2^X contiene una copia del cubo de Hilbert. Luego mostraremos que si un continuo X contiene un n -odo, entonces el hiperespacio $\mathcal{C}(X)$ contiene una n -celda, resultado demostrado por J. T. Rogers, Jr. en 1972, ver [12]. Además, mostraremos que si $\mathcal{C}(X)$ contiene una n -celda, entonces X contiene un n -odo, resultado demostrado en 1988, ver [5]. Por último, extenderemos estos resultados con el teorema probado por la profesora Patricia Pellicer en 2007, ver [11], que dice que A está contenido en el centro de un n -odo si y sólo si $\mathcal{C}(A, X)$ contiene una n -celda.

2.1. Modelos geométricos de $\mathcal{C}(X)$ para algunos continuos

A continuación presentamos modelos geométricos para algunos continuos. En cada ejemplo daremos una idea de como obtener estos modelos sin entrar en detalles de la demostración, para mayor información, ver [6, Capítulo II].

Vamos a construir un modelo geométrico para $\mathcal{C}(X)$ cuando X es un arco, $X = [0, 1]$. Observe que los puntos de $\mathcal{C}([0, 1])$ son los intervalos cerrados $[a, b]$, con $0 \leq a \leq b \leq 1$. Esto nos lleva a definir una inmersión $h : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$, como $h([a, b]) = (a, b)$ para cada $[a, b] \in \mathcal{C}([0, 1])$. La imagen de $\mathcal{C}([0, 1])$ bajo h es una 2-celda; un triángulo en \mathbb{R}^2 con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$ como se observa en la Figura 2.1.1.

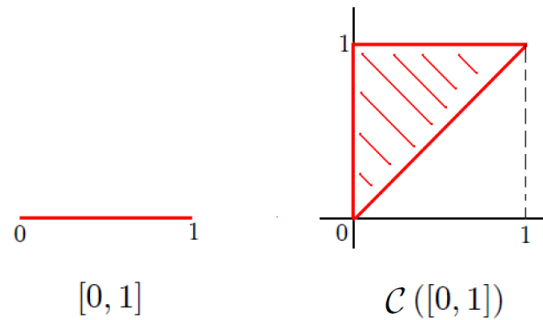


Figura 2.1.1: $\mathcal{C}(X)$ para $X = \text{Arco}$

Vamos a construir un modelo geométrico para $\mathcal{C}(X)$ cuando X es una curva cerrada simple, $X = S^1$. Observe que los continuos no degenerados de S^1 son arcos o el mismo espacio S^1 . Por esta razón, definimos un homeomorfismo $h : \mathcal{C}(S^1) \rightarrow D^2$ como $h(A) = (1 - [l(A)/2\pi])m(A)$, para cada $A \in \mathcal{C}(S^1)$; donde $l(A)$ es la longitud A y $m(A)$ es el punto medio del segmento de arco A . (Si $A = S^1$, $h(A) = 0$). De esta manera, no es difícil verificar que la imagen de $\mathcal{C}(S^1)$ es el disco unitario D^2 como se observa en la Figura 2.1.2.

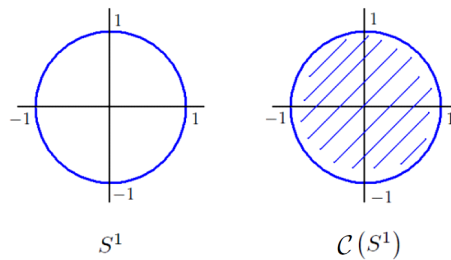


Figura 2.1.2: $\mathcal{C}(X)$ para $X = \text{Curva cerrada simple}$

El continuo X que se muestra en la Figura 2.1.3 se conoce como la *paleta*; que es la unión de una curva cerrada simple y un arco que se interceptan en un extremo del arco. Este continuo se puede escribir como $X = S^1 \cup [1, 2]$. El modelo geométrico para $\mathcal{C}(X)$ de este continuo se puede ver en la Figura 2.1.3. Denotaremos por $\mathcal{C}_{(p)}(X)$ a

los subcontinuos de $\mathcal{C}(X)$ que tienen a p . El homeomorfismo para este hiperespacio se define en tres etapas. Primero definimos un homeomorfismo $\varphi : \mathcal{C}_{((0,1))}(S^1) \rightarrow D^2 \subset D^2$, de manera similar al homeomorfismo h que usamos para $\mathcal{C}(S^1)$, donde D^2 es el disco centrado en $(\frac{1}{2}, 0)$ de radio $\frac{1}{2}$ y $\varphi(\{1\}) = (0, 1)$. Note que para cada $A \in \mathcal{C}_{((0,1))}(X)$, A se puede escribir de manera única como $A = B_A \cup [1, t_A]$, donde $B_A \in \mathcal{C}_{((0,1))}(S^1)$ y $t_A \in [1, 2]$. Después extendemos φ a una inmersión $g : \mathcal{C}(S^1) \cup \mathcal{C}_{((0,1))}(X) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(A) = \begin{cases} (\varphi(A), 0) & \text{si } A \in \mathcal{C}(S^1) ; \\ f(A) & \text{si } A \in \mathcal{C}_{((0,1))}(X) , \end{cases}$$

donde $f(A) = (\varphi(B_A), t_A - 1)$ para cada $A \in \mathcal{C}_{((0,1))}(X)$. Definimos la inmersión $j : \mathcal{C}([1, 2]) \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $j([s, t]) = ((s, 0), t - 1)$ para todo $[s, t] \in \mathcal{C}([1, 2])$ de manera similar al homeomorfismo h que usamos para $\mathcal{C}([0, 1])$. Por último definimos una inmersión $h : \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$h(A) = \begin{cases} g(A) & \text{si } A \in \mathcal{C}(S^1) \cup \mathcal{C}_{((0,1))}(X) ; \\ j(A) & \text{si } A \in \mathcal{C}([1, 2]) . \end{cases}$$

Así, $h(\mathcal{C}(X))$ se puede ver como el de la Figura 2.1.3.

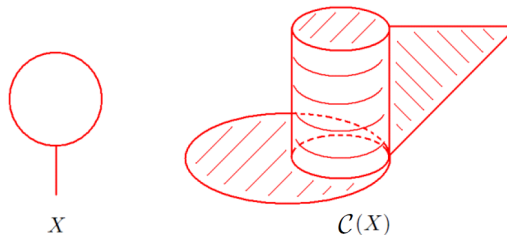


Figura 2.1.3: $\mathcal{C}(X)$ para $X = \text{Paleta}$

En el Capítulo 1 definimos un n -odo simple como la unión de n arcos que emanan de un punto v llamado *vértice* como lo ilustra la Figura 2.1.4. De manera análoga definimos una n -aleta como un continuo que es la unión de n 2-celdas llamadas *aletas* las cuales se interceptan en un solo punto y cualesquiera dos aletas se interceptan solo en ese punto como lo ilustra la Figura 2.1.4. Claramente una n -aleta F , contiene un n -odo simple cuyos arcos se encuentran en las fronteras de las diferentes aletas de F . Llamamos a este n -odo simple una base de la n -aleta F , en el sentido que si Y es un

n -odo simple con vértice v , entonces el espacio descomposición de $Y \times [0, 1]$ obtenido por la contracción $\{v\} \times [0, 1]$ a un punto es una n -aleta; y $Y \times \{0\}$ es una base de esta n -aleta.

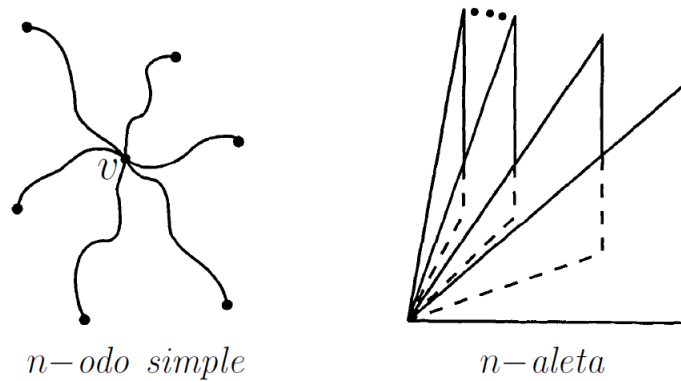


Figura 2.1.4: n -odo simple y n -aleta

Cuando X es un n -odo simple un modelo geométrico para $\mathcal{C}(X)$ es el *poliedro n -dimensional* que está representado en la Figura 2.1.5. El poliedro puede ser descrito como el resultado de pegar una n -aleta a una n -celda $[0, 1]^n$ por la identificación de una base de la n -aleta con un n -odo simple acostado sobre $fr([0, 1]^n)$ (la frontera de $[0, 1]^n$).

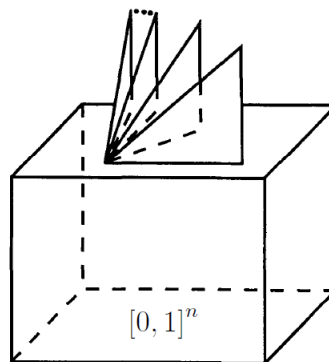


Figura 2.1.5: $\mathcal{C}(X)$ para $X = n$ -odo simple

Si X es un triodo simple, el modelo geométrico para $\mathcal{C}(X)$ de este continuo se puede ver como el de la Figura 2.1.6.

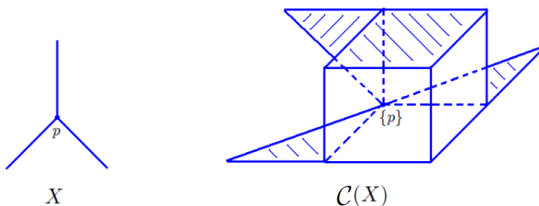


Figura 2.1.6: $\mathcal{C}(X)$ para $X =$ Triodo simple

En los ejemplos anteriores mostramos que los hiperespacios $\mathcal{C}(X)$ de un arco o una curva cerrada simple son una 2-celda. Note que cuando el continuo X es una paleta o un triodo simple su hiperespacio $\mathcal{C}(X)$ contiene una 3-celda. Con el Teorema 2.3.1, que probaremos más adelante, podemos asegurar que si un continuo X contiene un n -odo, su hiperespacio $\mathcal{C}(X)$ contiene una n -celda.

2.2. Celdas en el hiperespacio 2^X

El Teorema 2.2.2 muestra que el hiperespacio 2^X de cualquier continuo no degenerado contiene una copia del cubo de Hilbert. Particularmente, esto muestra que para cualquier continuo no degenerado X , el espacio 2^X tiene dimensión infinita.

Lema 2.2.1. *Sean X un continuo no degenerado y $p \in X$. Entonces existe una sucesión $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos no degenerados de $X \setminus \{p\}$, disyuntos dos a dos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_i = \{p\}$.*

Demostración. Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos en $X \setminus \{p\}$ tal que $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ converge a p . Una simple inducción muestra que, para cada $i \in \mathbb{N}$, existen subconjuntos abiertos, U_i , en $X \setminus \{p\}$ con las siguientes propiedades:

1. $x_i \in U_i$, para cada $i \in \mathbb{N}$, y $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
2. $\text{diám}(U_i) < \frac{1}{2^i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Ahora, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\{x_i\} \in U_i$. Como X es un espacio normal, existe un subconjunto abierto V_i de X tal que $\{x_i\} \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea A_i la

componente de $\overline{V_i}$ que contiene a $\{x_i\}$. Luego, por [9, Teorema 5.4] $A_i \cap (X \setminus V_i) \neq \emptyset$. Así, como $\{x_i\} \subset V_i$ tenemos que $A_i \neq \{x_i\}$. Por tanto, para cada $i \in \mathbb{N}$, A_i es un subcontinuo no degenerado de U_i . Esto muestra que A_i es un continuo no degenerado, para cada $i \in \mathbb{N}$, y $A_i \cap A_j = \emptyset$, siempre que $i \neq j$. Además, como cada $x_i \in A_i \subset U_i$ y $\text{diám}(U_i) < \frac{1}{2^i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $(A_i)_{i=1}^\infty$ converge a $\{p\}$. \square

Teorema 2.2.2. *Si X es un continuo no degenerado, entonces 2^X contiene un cubo de Hilbert.*

Demostración. Sea $p \in X$. Por el Lema 2.2.1, existe una sucesión $(A_i)_{i=1}^\infty$, de subcontinuos no degenerados de $X \setminus \{p\}$ disyuntos dos a dos tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_i = \{p\}$. Por el Corolario 1.5.6, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe un arco α_i en 2^{A_i} . Note que, $\prod_{i=1}^\infty \alpha_i$ es un cubo de Hilbert. Sea $(B_i)_{i=1}^\infty$ una sucesión en $\prod_{i=1}^\infty \alpha_i$. Note que para cada $i \in \mathbb{N}$, $B_i \subset A_i$ y $(A_i)_{i=1}^\infty$ converge a $\{p\}$ en 2^X . Por lo tanto, $(B_i)_{i=1}^\infty$ converge a $\{p\}$ en 2^X . Definimos $h : \prod_{i=1}^\infty \alpha_i \rightarrow 2^X$ por

$$h((B_i)_{i=1}^\infty) = \left(\bigcup_{i=1}^\infty B_i \right) \cup \{p\},$$

para cada $(B_i)_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty \alpha_i$. Como $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, y $p \notin A_i$ para ningún $i \in \mathbb{N}$, tenemos que h es inyectiva. Sean $B^k = (B_i^k)_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty \alpha_i$, y $B = (B_i)_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty \alpha_i$, tales que la sucesión $(B^k)_{k=1}^\infty$ converge a B . Sea $\varepsilon > 0$. Como $(A_i)_{i=1}^\infty$ converge a $\{p\}$ en 2^X . Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diám}(A_i) < \varepsilon$ para cada $i \geq N$. Ahora, por [3, X, Teorema 5.4] la convergencia en $\prod_{i=1}^\infty \alpha_i$ implica la convergencia coordenada a coordenada. Así, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $H_d(B_i^k, B_i) < \varepsilon$ para cada $i \leq N$ cuando $k \geq K$. Como $B_i^k \subset A_i$ y $B_i \subset A_i$, para cada i y k , tenemos que $H_d(B_i^k, B_i) < \varepsilon$ para cada $i \geq N$ y para cada k . De lo anterior, tenemos que $H_d(B_i^k, B_i) < \varepsilon$ para cada $k \geq K$. Por tanto $H_d(h(B^k), h(B)) < \varepsilon$ para todo $k \geq K$. Así, h es continua. Por último como h es cerrada, inyectiva y continua, tenemos que h es una inmersión. \square

Del resultado anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.3. $\dim[2^X] = \infty$.

Resultados que involucran el estudio de hiperespacios con profundidad, afirman que 2^X es exactamente el cubo de Hilbert si y sólo si X es un continuo no degenerado y localmente conexo [6, Teorema 15.6]. Análogamente $\mathcal{C}_n(X)$ es un cubo de Hilbert si y sólo si X es un continuo no degenerado, localmente conexo y sin arcos libres [8, Teorema 6.1.6].

2.3. Celdas en el hiperespacio $\mathcal{C}(X)$

A continuación haremos una reproducción del resultado obtenido en [12] por J. T. Rogers, Jr. en el año de 1972. Este resultado nos garantiza la existencia de n -celdas en el hiperespacio $\mathcal{C}(X)$ a partir de la existencia de n -odos en el continuo X .

Teorema 2.3.1. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si X contiene un n -odo, entonces $\mathcal{C}(X)$ contiene una n -celda.*

Demostración. Sea X un continuo que contiene un n -odo M . Entonces, existe $N \in \mathcal{C}(M) \setminus \{M\}$ tal que $M \setminus N$ tiene al menos n componentes. Sean S_1, \dots, S_n componentes distintas de $M \setminus N$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ definimos $B_i = S_i \cup N$. Así, por la Proposición 1.2.13, cada B_i es un subcontinuo de X . Como $N \subsetneq B_i$, por la Proposición 1.5.8, existe un segmento $\sigma_i : [0, 1] \rightarrow 2^X$ de N a B_i para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Además, $\sigma_i([0, 1]) = \alpha_i$ es un arco de orden para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, por el Corolario 1.5.9. Note que $\sigma_i(0) \in \mathcal{C}(X)$ y cada componente de $\sigma_i(t)$ intersección con $\sigma_i(0)$ es diferente del vacío. Para cada $t \in [0, 1]$, tenemos que $\sigma_i([0, 1]) \subset \mathcal{C}(X)$. Como $N \subset \sigma_i(t)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y todo $t \in [0, 1]$, tenemos que $\bigcup_{i=1}^n \sigma_i(t_i) \in \mathcal{C}(X)$ para cualquier elección de t_i en $[0, 1]$. Definamos $h : [0, 1]^n \rightarrow \mathcal{C}(X)$ por $h(t_1, \dots, t_n) = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i(t_i)$ para cada $(t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$. Como cada σ_i es continua y la función unión es continua, por [10, Lema 1.48], tenemos que h es continua. Además, es fácil ver que h es inyectiva. Como h está definida entre continuos, h es cerrada, y por tanto, h es una inmersión y $\mathcal{C}(X)$ contiene una n -celda. \square

Con el Teorema 2.3.12 ilustraremos el resultado obtenido en [5] en el año de 1988, resultado que nos garantiza la existencia de n -odos en un continuo X a partir de la existencia de n -celdas en su hiperespacio $\mathcal{C}(X)$. Para esto es necesario introducir el concepto de semifrontera de un subespacio del hiperespacio $\mathcal{C}(X)$, definición que presentamos a continuación. Esta definición también será utilizada en la siguiente sección.

Definición 2.3.2. Sean X un continuo y $A, B \in \mathcal{C}(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Se define la *semifrontera* de $\mathcal{C}(A)$ en $\mathcal{C}(B)$ como $Sb(A, B) = \{C \in \mathcal{C}(A) : \text{existe un arco de orden } \alpha \text{ en } \mathcal{C}(B) \text{ tal que } \bigcap \alpha = C \text{ y } D \not\subseteq A \text{ para todo } D \in \alpha \setminus \{C\}\}$.

A continuación ilustramos esta definición con un par de ejemplos.

Ejemplo 2.3.3. Consideremos el hiperespacio $\mathcal{C}([0, 1])$ que ilustramos en la Sección 2.1 y tomemos $A = [0, \frac{1}{2}]$. Entonces $Sb(A, [0, 1]) = \{[a, \frac{1}{2}] \in \mathcal{C}(A) : 0 \leq a \leq \frac{1}{2}\}$.

Tenemos claro que el hiperespacio $\mathcal{C}([0, \frac{1}{2}])$ se puede visualizar geoméricamente como el de la Figura 2.3.1. Note que para cada punto $[a, \frac{1}{2}]$ de $\mathcal{C}([0, \frac{1}{2}])$, donde $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ existe un arco de orden α en $\mathcal{C}([0, 1])$ desde $[a, \frac{1}{2}]$ hasta $[a, 1]$ y $\cap \alpha = [a, \frac{1}{2}]$. Además, si $[a, b] \in \alpha \setminus \{[a, \frac{1}{2}]\}$ tenemos que $\frac{1}{2} < b \leq 1$ y por lo tanto $[a, b] \notin [0, \frac{1}{2}]$. Así, $Sb(A, [0, 1]) = \{[a, \frac{1}{2}] \in \mathcal{C}(A) : 0 \leq a \leq \frac{1}{2}\}$.

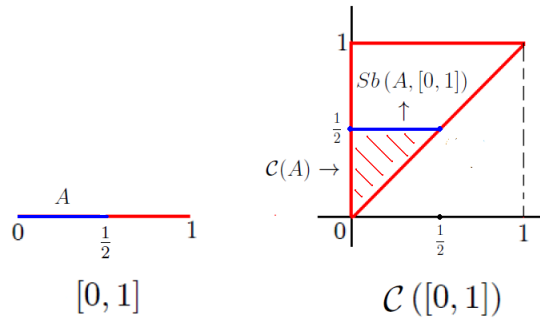


Figura 2.3.1: $Sb(A, [0, 1])$

En el ejemplo anterior, se observa que $fr_{\mathcal{C}([0,1])}(\mathcal{C}(A)) = Sb(A, [0, 1])$, sin embargo esto no siempre sucede. El siguiente ejemplo ilustra lo anterior.

Ejemplo 2.3.4. Tomemos a X como curva senoidal del topólogo S y tomemos a A como el segmento de recta que va de a hasta b en la barra límite y denotemos A por $[a, b]$ como se ilustra en la Figura 2.3.2.

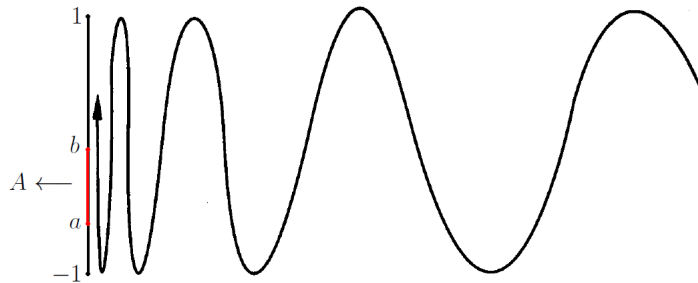


Figura 2.3.2: La curva senoidal del topólogo S

Es fácil convencerse que

$$Sb(A, S) = \{[a, t] \in \mathcal{C}(A) : a \leq t \leq b\} \cup \{[s, b] \in \mathcal{C}(A) : a \leq s \leq b\}.$$

Por otro lado $int_S(A) = \emptyset$, entonces $\mathcal{C}(A)$ es un compacto tal que $int_{\mathcal{C}(S)}(\mathcal{C}(A)) = \emptyset$. Por lo tanto $\mathcal{C}(S) \setminus \mathcal{C}(A)$ es denso, es decir $\overline{\mathcal{C}(S) \setminus \mathcal{C}(A)} = \mathcal{C}(S)$. Luego, $fr_{\mathcal{C}(S)}(\mathcal{C}(A)) = \overline{\mathcal{C}(A)} \cap \overline{\mathcal{C}(S) \setminus \mathcal{C}(A)} = \mathcal{C}(S) \cap \mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A)$. Así, $Sb(A, S) \neq fr_{\mathcal{C}(S)}(\mathcal{C}(A))$.

Definición 2.3.5. Sean A y B subcontinuos de X tales que $A \subsetneq B$ y \mathcal{Z} un subcontinuo de $Sb(A, B)$. Diremos que \mathcal{Z} es *cerrado superiormente* respecto a A si para cada $D \in \mathcal{Z}$ y $E \in \mathcal{C}(X)$ tales que $D \subset E \subset A$, se tiene que $E \in \mathcal{Z}$.

Si retomamos el Ejemplo 2.3.3, tenemos que $Sb(A, [0, 1])$ es un continuo. Si $\mathcal{Z} = Sb(A, [0, 1])$ y $D \in \mathcal{Z}$, entonces $D = [a, \frac{1}{2}]$ para algún $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. Además, si $E \in \mathcal{C}([0, 1])$ y $D \subset E \subset A$ entonces $E = [b, \frac{1}{2}]$ donde $0 \leq b \leq a \leq \frac{1}{2}$. Luego, $E \in \mathcal{Z}$ y así tenemos que \mathcal{Z} es cerrado superiormente respecto a A .

A continuación presentamos un ejemplo de un subcontinuo \mathcal{Z} de $Sb(A, X)$ que no es cerrado superiormente.

Ejemplo 2.3.6. Tomemos $X = [0, 1]$ y $A = [0, \frac{1}{2}] \subsetneq [0, 1]$ como en el Ejemplo 2.3.3. Sea $\mathcal{Z} = \{[t, \frac{1}{2}] \in Sb(A, [0, 1]) : \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}\}$ un subcontinuo de $Sb(A, [0, 1])$ como se ilustra en la Figura 2.3.3 y veamos que \mathcal{Z} no es cerrado superiormente respecto a A . Note que si $E \in \mathcal{C}(X)$ y $D \subset E \subset A$, entonces $E = [s, \frac{1}{2}]$ donde $0 \leq s \leq t \leq \frac{1}{2}$. Así, si $0 \leq s < \frac{1}{4}$ tenemos que $E \notin \mathcal{Z}$.

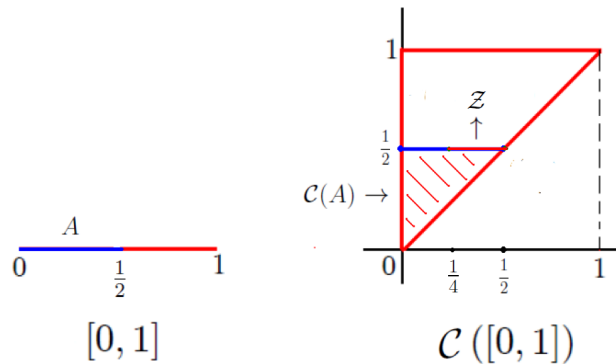


Figura 2.3.3: \mathcal{Z} no es cerrado superiormente respecto a A

Definición 2.3.7. Dado $m \geq 1$, decimos que \mathcal{Z} tiene *propiedad $S(m)$* si no es posible

construir m -odos con los elementos de \mathcal{Z} . Es decir, si $D, E \in \mathcal{Z}$ y $D \subset E$, entonces $E \setminus D$ tiene a lo más $m - 1$ componentes.

A continuación presentamos algunos resultados que utilizaremos más adelante en la prueba del Teorema 2.3.11

Proposición 2.3.8. *Sea X un continuo y sea $A \in \mathcal{C}(X) \setminus \{X\}$, entonces:*

(a) *Si $B \in Sb(A, X)$, entonces existe una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X)$ tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(s) \not\subseteq A$ para cada $s > 0$.*

(b) *Si $B \in Sb(A, X)$ y $B \subset D \subset A$, entonces $D \in Sb(A, X)$.*

Demostración. (a) Sea $B \in Sb(A, X)$, entonces $B \in \mathcal{C}(A)$ y existe un arco de orden β en $\mathcal{C}(X)$ tal que $\bigcap \beta = B$ y para todo $D \in \beta \setminus \{B\}$ tenemos que $D \not\subseteq A$. Por el Corolario 1.5.9 existe un segmento $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X)$ tal que $\alpha(0) = B$. Así, para cada $D \in \beta \setminus \{B\}$, existe $t \in [0, 1]$ tal que $\alpha(t) = D$. Por lo tanto $\alpha(s) \not\subseteq A$ para cada $s > 0$.

(b) Sea $B \in Sb(A, X)$ y sea $D \in \mathcal{C}(A)$ tal que $B \subset D \subset A$. Por (a) existe una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X)$ tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(s) \not\subseteq A$ para cada $s > 0$. Definamos $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X)$ por $\sigma(t) = D \cup \alpha(t)$. σ es continua. Ahora veamos que $\sigma([0, 1])$ es un arco de orden en $\mathcal{C}(X)$. Sean $\sigma(p)$ y $\sigma(q)$ en $\sigma([0, 1])$, con $\sigma(p) \neq \sigma(q)$. Como α es un segmento, podemos suponer que $\alpha(p) \subset \alpha(q)$. Luego, $D \cup \alpha(p) \subset D \cup \alpha(q)$, es decir $\sigma(p) \subset \sigma(q)$, para cualquier $0 \leq p \leq q \leq 1$. Entonces $\sigma([0, 1])$ es un arco de orden en $\mathcal{C}(X)$. Además, $\sigma(0) = D \cup \alpha(0) = D \cup B = D$. Entonces $\bigcap \sigma([0, 1]) = D$. Por otro lado, para todo $F \in \sigma([0, 1]) \setminus \{D\}$ tenemos que $F \not\subseteq A$ porque $\alpha(s) \not\subseteq A$ para cada $s > 0$. Así, $D \in Sb(A, X)$. \square

Proposición 2.3.9. *Sean X un continuo, $A \in \mathcal{C}(X) \setminus \{X\}$ y $B \in \mathcal{C}(A)$ y sea $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{C}(X)$ que converge a B . Entonces cada una de las siguientes condiciones implica que $B \in Sb(A, X)$.*

(a) *Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \not\subseteq A$ y $B_{n+1} \subset B_n$.*

(b) *Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \not\subseteq A$ y $B_n \cap B \neq \emptyset$.*

(c) *Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in Sb(A, X)$ y $B_n \cap B \neq \emptyset$.*

Demostración. (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset B_n$, entonces por el Teorema 1.5.4 existe un arco de orden α_n de B_{n+1} a B_n y por el Corolario 1.5.9 existe un segmento $\sigma_n : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \rightarrow \mathcal{C}(B_n)$ tal que $\sigma_n(\frac{1}{n+1}) = B_{n+1}$, $\sigma_n(\frac{1}{n}) = B_n$ y $\sigma_n(s) \subset \sigma_n(t)$ para cada $s \leq t$. Definamos $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X)$ por

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_n(t) & \text{si } t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \text{ para algún } n \geq 1 \\ B & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Es fácil ver σ satisface las siguientes condiciones:

- (1) Es continua.
- (2) Si $\sigma(s) \subset \sigma(t)$ para cada $s \leq t$.
- (3) Si $s > 0$, entonces $\sigma(s) \not\subseteq A$.

Así, $\sigma([0, 1])$ es un arco de orden, $B = \bigcap \sigma([0, 1])$ y para cada $D \in \sigma([0, 1]) \setminus \{B\}$, $D \not\subseteq A$. Por lo tanto $B \in Sb(A, X)$.

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $C_n = (\bigcup_{i=n}^{\infty} B_i) \cup B$. Como $B_n \cap B \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $C_n \in \mathcal{C}(X)$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \not\subseteq A$. Luego $C_n \not\subseteq A$. Como $C_{n+1} \subset C_n$ y C_n converge a B , por (a) tenemos que $B \in Sb(A, X)$.

(c) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in Sb(A, X)$. Luego, por la Proposición 2.3.8 (a), existe una función continua $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X)$ tal que $\alpha_n(0) = B_n$ y $\alpha_n(s) \not\subseteq A$ para cada $s > 0$. Tomemos $t_n > 0$ tal que $H_d(\alpha_n(t_n), B_n) < \frac{1}{n}$, donde d es la métrica de X . Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n(t_n) \in \mathcal{C}(X)$ y $\alpha_n(t_n) \not\subseteq A$. Además, $B_n \cap B \neq \emptyset$, entonces $\alpha_n(t_n) \cap B \neq \emptyset$ y $\alpha_n(t_n)$ converge a B . Luego, por (b) tenemos que $B \in Sb(A, X)$. \square

Dado $E \in \mathcal{C}(X) \setminus \{X\}$, denotamos por $m(E)$ al conjunto de los elementos minimales de $Sb(E, X)$.

Proposición 2.3.10. *Sea $E \in \mathcal{C}(X)$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Si $m(E)$ tiene al menos n elementos, entonces X contiene n -odos.*

Demostración. Sea $E \in \mathcal{C}(X) \setminus \{X\}$ tal que $Sb(E, X)$ tiene al menos n elementos minimales E_1, \dots, E_n . Supongamos que para cada A, B en $\mathcal{C}(X)$, $A \cap B$ tiene un número finito de componentes. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe una función continua $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X)$ tal que $\alpha_i(0) = E_i$ y $\alpha_i(p) \not\subseteq E$ para cada $p > 0$, por la Proposición 2.3.8 (a). Dado $i \in \{1, \dots, n\}$, para cada $i \neq j$ tenemos que $E_j \not\subseteq E_i$. Como $\alpha_i(0) = E_i$, existe $t_i > 0$ tal que $E_j \not\subseteq \alpha_i(t_i)$ para cada $j \neq i$. Vamos a probar que si $i \neq j$, existe un $s > 0$ tal que $\alpha_i(s) \cap \alpha_j(t_j) \subset E$. Si $E_i \cap \alpha_j(t_j) = \emptyset$, entonces existe $s > 0$ tal que $\alpha_i(s) \cap \alpha_j(t_j) = \emptyset$. Así, podemos suponer que $E_i \cap \alpha_j(t_j) \neq \emptyset$. Sean C_1, \dots, C_r las componentes de $E_i \cap \alpha_j(t_j)$. Supongamos que no existe $s > 0$ tal que $\alpha_i(s) \cap \alpha_j(t_j) = \emptyset$. Sea $k \in \mathbb{N}$ y sea C la unión de las componentes de $\alpha_i(\frac{1}{k}) \cap \alpha_j(t_j)$ cuya intersección con E_i es vacío. Entonces C es compacto y $C \cap E_i = \emptyset$. Así, existe $z_k \in (0, \frac{1}{k})$, tal que $\alpha_i(z_k) \cap C = \emptyset$. Por la suposición, podemos escoger un punto x en $\alpha_i(z_k) \cap \alpha_j(t_j) \setminus E$. Por construcción de C , la componente D_k de $\alpha_i(\frac{1}{k}) \cap \alpha_j(t_j)$ que tiene a x intersección con E_i es diferente del vacío. Como $\emptyset \neq D_k \cap E_i \subset D_k \cap E_i \cap \alpha_j(t_j)$, entonces existe $l_k \in \{1, \dots, r\}$ tal que $D_k \cap C_{l_k} \neq \emptyset$. Como $C_{l_k} \subset E_i \cap \alpha_j(t_j) \subset \alpha_i(\frac{1}{k}) \cap \alpha_j(t_j)$, concluimos que $C_{l_k} \subset D_k$.

Sea $l_0 \in \{1, \dots, r\}$ tal que $l_0 = l_k$ para infinitos k . Supongamos que $k_1 < k_2 < \dots$ son tales que $l_0 = l_{k_m}$ para cada m . Entonces las siguientes propiedades son ciertas para cada $m \geq 2$: $D_{k_m} \in \mathcal{C}(X)$, $D_{k_m} \not\subseteq E$, $C_{l_0} \subset D_{k_m}$ y D_{k_m} es una componente de $\alpha_i\left(\frac{1}{k_m}\right) \cap \alpha_j(t_j)$ que está contenida en $\alpha_i\left(\frac{1}{k_{m-1}}\right) \cap \alpha_j(t_j)$. Así, $D_{k_m} \subset D_{k_{m-1}}$. Sea $D = D_{k_1} \cap D_{k_2} \cap \dots = \lim_{m \rightarrow \infty} D_{k_m}$. Como $D_{k_m} \subset \alpha_i\left(\frac{1}{k_m}\right)$ y $\alpha_i\left(\frac{1}{k_m}\right)$ converge a E_i , $D \subset E_i \subset E$. Por la Proposición 2.3.9 (a), $D \in Sb(E, X)$. Como E_i es minimal, $D = E_i$. Esto es una contradicción ya que $D \subset \alpha_j(t_j)$. Esto prueba la existencia de s . Por lo tanto, dado $i \in \{1, \dots, n\}$, podemos escoger $s_i \in (0, t_i)$ tal que $\alpha_i(s_i) \cap \alpha_j(t_j) \subset E$ para cada $j \neq i$. Definimos $B = E \cup \alpha_1(s_1) \cup \dots \cup \alpha_n(s_n)$. Entonces B es un n -odo. \square

El siguiente teorema es el resultado más importante de esta sección donde mostraremos una condición necesaria para que el hiperespacio $\mathcal{C}(X)$ contenga una n -celda. Mostraremos los detalles más importantes de la demostración, sin embargo, citaremos algunos resultados que no probaremos para sustentar algunos detalles.

Vamos a probar que si X no contiene n -odos, entonces $\mathcal{C}(X)$ no contiene n -celdas. Para esto necesitamos estimar la dimensión de algunos subespacios de $\mathcal{C}(X)$. Esto se hará probando una serie de resultados auxiliares.

Teorema 2.3.11. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{C}(X)$ contiene una n -celda, entonces X contiene un n -odo.*

Demostración. Sean A y B subcontinuos de X tales que $A \not\subseteq B$ y \mathcal{Z} un subcontinuo de $Sb(A, B)$ cerrado superiormente respecto a A con propiedad $S(m)$.

Afirmación 1. Para cada $D \in Sb(A, B)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $E \in Sb(A, B)$ y $H_d(D, E) < \varepsilon$, entonces $D \cap E \neq \emptyset$.

Como estamos suponiendo que X no contiene n -odos, por la Proposición 2.3.10, el conjunto $\mathcal{M} = \{M \in \mathcal{C}(X) : M \text{ es un elemento minimal de } Sb(A, B)\}$ es finito. Sea $\mathcal{M}' = \{M \in \mathcal{M} : M \not\subseteq D\}$. Como \mathcal{M}' es finito, el conjunto $\mathcal{L} = \{E \in \mathcal{C}(X) : E \text{ contiene algún elemento de } \mathcal{M}'\}$ es cerrado en $\mathcal{C}(X)$. Como $D \notin \mathcal{L}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}(D, \varepsilon) \cap \mathcal{L} = \emptyset$. Si $E \in Sb(A, B)$ y $H_d(D, E) < \varepsilon$, entonces $E \notin \mathcal{L}$. Por [6, Teorema 69.4], existe un elemento minimal M de $Sb(A, B)$ tal que $M \subset E$. Entonces $M \notin \mathcal{M}'$ y $M \subset D$. Por tanto, $E \cap D \neq \emptyset$.

Afirmación 2. $Sb(A, B)$ es cerrado.

Sean $D \in \mathcal{C}(X)$ y $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión en $Sb(A, B)$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} D_k = D$. Como $D_k \subset A$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $D \subset A$. Por la Afirmación 1, podemos suponer que $D_k \cap D \neq \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 2.3.9 (c), concluimos que $D \in Sb(A, B)$.

Afirmación 3. Sea $D \in \mathcal{C}(A) \setminus \{A\}$, entonces $fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(D) \cap \mathcal{Z}) = Sb(D, A) \cap \mathcal{Z}$.

Sea $E \in Sb(D, A) \cap \mathcal{Z}$. Entonces $E \in \mathcal{Z}$, $E \subset D$ y existe una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(A)$ tal que $\alpha(0) = E$ y $\alpha(s) \subsetneq D$, para todo $s > 0$, por la Proposición 2.3.8 (a). Como \mathcal{Z} es cerrado superiormente respecto a A , cada $\alpha(\frac{1}{k}) \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{C}(D)$. Como $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(\frac{1}{k}) = E$, concluimos que $E \in fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(D) \cap \mathcal{Z})$. Ahora, sea $E \in fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(D) \cap \mathcal{Z})$. Entonces $E \in \mathcal{C}(D)$, $E \in \mathcal{Z}$ y existe una sucesión $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ en \mathcal{Z} tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k = E$ y $E_k \notin \mathcal{C}(D)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{Z} \subset Sb(A, B)$, por la Afirmación 1, podemos suponer que $E_k \cap E \neq \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 2.3.9 (b), $E \in Sb(D, A)$. Por tanto, $E \in Sb(D, A) \cap \mathcal{Z}$.

Afirmación 4. Sea $G \subset X$ cerrado tal que $A \subsetneq G$. Supongamos que el conjunto $\mathcal{C}(G \cap A) = \{D \in \mathcal{C}(X) : D \subset G \cap A\} \neq \emptyset$. Entonces existe un número finito de componentes C_1, \dots, C_k de $G \cap A$ tal que $\mathcal{C}(G \cap A) \cap \mathcal{Z} = (\mathcal{C}(C_1) \cup \dots \cup \mathcal{C}(C_k)) \cap \mathcal{Z}$ y $fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(G \cap A) \cap \mathcal{Z}) = (Sb(C_1, A) \cup \dots \cup Sb(C_k, A)) \cap \mathcal{Z}$.

Por la Proposición 2.3.10, existe solamente un número finito de elementos minimales en $Sb(A, B)$. Supongamos que M_1, \dots, M_k son los elementos minimales en $Sb(A, B)$ contenidos en $G \cap A$. Sea C_i la componente de $G \cap A$ tal que $M_i \subset C_i$. Si $D \in \mathcal{C}(G \cap A) \cap \mathcal{Z}$, entonces $D \subset G \cap A$ y $D \in \mathcal{Z}$. Por [6, Teorema 69.4] existe un elemento minimal en $Sb(A, B)$ el cual está contenido en D . Entonces este elemento minimal es algún M_i . Como $D \subset C_i$, para algún $i \in \{1, \dots, k\}$, tenemos que $D \in (\mathcal{C}(C_1) \cup \dots \cup \mathcal{C}(C_k)) \cap \mathcal{Z}$. Esto prueba que $\mathcal{C}(G \cap A) \cap \mathcal{Z} \subset (\mathcal{C}(C_1) \cup \dots \cup \mathcal{C}(C_k)) \cap \mathcal{Z}$. La otra implicación es obvia. Si $i \neq j$, tenemos que $\mathcal{C}(C_i) \cap \mathcal{Z} = \mathcal{C}(C_j) \cap \mathcal{Z}$ o $(\mathcal{C}(C_i) \cap \mathcal{Z}) \cap (\mathcal{C}(C_j) \cap \mathcal{Z}) = \emptyset$. Por tanto $fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(G \cap A) \cap \mathcal{Z}) = fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(C_1) \cap \mathcal{Z}) \cup \dots \cup fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(C_k) \cap \mathcal{Z})$. Aplicando la Afirmación 3, obtenemos que $fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(G \cap A) \cap \mathcal{Z}) = (Sb(C_1, A) \cup \dots \cup Sb(C_k, A)) \cap \mathcal{Z}$.

Afirmación 5. Si \mathcal{Z} tiene propiedad $S(m)$, para algún $m \geq 2$ y $D \in \mathcal{C}(A) \setminus \{A\}$, entonces $\mathcal{Z} \cap Sb(D, A)$ es un subcontinuo de $Sb(D, A)$ el cual es cerrado superiormente

respecto a D y $\mathcal{Z} \cap Sb(D, A)$ tiene propiedad $S(m - 1)$.

Como \mathcal{Z} es cerrado superiormente respecto a A , por la Proposición 2.3.8 (b) tenemos que $\mathcal{Z} \cap Sb(D, A)$ es cerrado superiormente respecto a D . Entonces cada arco de orden de un elemento en $\mathcal{Z} \cap Sb(D, A)$ a D está contenido en $\mathcal{Z} \cap Sb(D, A)$. Esto implica que $\mathcal{Z} \cap Sb(D, A)$ es arcoconexo y por la Afirmación 2, $Sb(D, A)$ es cerrado. Así, $\mathcal{Z} \cap Sb(D, A)$ es un subcontinuo de $Sb(A, B)$. Supongamos que $\mathcal{Z} \cap Sb(D, A)$ no tiene propiedad $S(m - 1)$. Entonces existen $E, F \in \mathcal{Z} \cap Sb(D, A)$ tal que $E \subset F$ y $F \setminus E$ tiene el menos $m - 1$ componentes. Existen $m - 1$ subcontinuos G_1, \dots, G_{m-1} de F tal que $F = \bigcup_{i=1}^{m-1} G_i$, $E = \bigcap_{i=1}^{m-1} G_i$, $G_i \cap G_j = E$ si $i \neq j$, y $G_i \setminus E \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, m - 1\}$. Fijemos puntos $p_i \in G_i \setminus E$. Como $E \in Sb(D, A)$, existe una función $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(A)$ tal que $\alpha(0) = E$, $\alpha(s) \subsetneq \alpha(t)$ si $s < t$ y $\alpha(s) \subsetneq D$, para todo $s > 0$. Sea $t_0 > 0$ tal que $\{p_1, \dots, p_k\} \cap \alpha(t_0) = \emptyset$. Como X no contiene n -odos, $\alpha(t_0) \cap D$ tiene un número finito de componentes. Sea C la componente de $\alpha(t_0) \cap D$ tal que $E \subset C$. Entonces $(\alpha(t_0) \cap D) \setminus C$ es cerrado y $[(\alpha(t_0) \cap D) \setminus C] \cap E = \emptyset$. Así, existe $t_1 > 0$ tal que $t_1 < t_0$ y $\alpha(t_1) \cap [(\alpha(t_0) \cap D) \setminus C] = \emptyset$. Entonces $\alpha(t_1) \cap D \subset C$. Sea $F' = F \cup \alpha(t_1)$. Como \mathcal{Z} es cerrado superiormente respecto a A , tenemos que $F' \in \mathcal{Z}$, $C \in \mathcal{Z}$ y $F' \setminus C = (G_1 \setminus C) \cup \dots \cup (G_{m-1} \setminus C) \cup (\alpha(t_1) \setminus C)$. Como $p_i \in G_i \setminus C$ y $\alpha(t_1) \setminus C \neq \emptyset$, los conjuntos $G_1 \setminus C, \dots, G_{m-1} \setminus C, \alpha(t_1) \setminus C$ son diferentes del vacío. Como $\overline{G_i \setminus C} \cap (\alpha(t_1) \setminus C) \subset D \cap (\alpha(t_1) \setminus C) = \emptyset$ y $\overline{\alpha(t_1) \setminus C} \cap (G_i \setminus C) \subset \alpha(t_1) \cap (D \setminus C) = \emptyset$, los conjuntos $G_1 \setminus C, \dots, G_{m-1} \setminus C, \alpha(t_1) \setminus C$ están mutuamente separados. Por tanto F' es un m -odo en \mathcal{Z} . Esto contradice el hecho que \mathcal{Z} tiene propiedad $S(m)$ y completa la prueba que $\mathcal{Z} \cap Sb(D, A)$ tiene propiedad $S(m - 1)$.

Afirmación 6. Si \mathcal{Z} tiene propiedad $S(m)$, entonces $\dim[\mathcal{Z}] \leq m - 1$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Por inducción sobre m . Para $m = 1$. Sea $D \in \mathcal{Z}$, entonces $D \subset A$. Como \mathcal{Z} es cerrado superiormente respecto a A , tenemos que $A \in \mathcal{Z}$. Además \mathcal{Z} tiene propiedad $S(1)$, luego $A \setminus D$ no tiene componentes, entonces $A = D$. Así, $\mathcal{Z} = \{A\}$ y por tanto $\dim[\mathcal{Z}] = 0$. Ahora supongamos que la proposición es cierta para $m - 1$ y $m \geq 2$. Entonces, estamos asumiendo que \mathcal{Z} tiene propiedad $S(m)$ y necesitamos mostrar que $\dim[\mathcal{Z}] \leq m - 1$. Sean $D \in \mathcal{Z}$ y $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}(X)$ abierto tal que $D \in \mathcal{U}$. Encontraremos $\mathcal{V} \subset \mathcal{Z}$ tal que $D \in \mathcal{V} \subset (\mathcal{U} \cap \mathcal{Z})$ y $\dim[fr_{\mathcal{Z}}\mathcal{V}] \leq m - 2$. Por la Afirmación 1, podemos asumir que para todo $E \in \mathcal{U} \cap \mathcal{Z}$, $D \cap E \neq \emptyset$. Sean $U_1, \dots, U_k \subset X$ abiertos tal que

$D \in \langle U_1, \dots, U_k \rangle \subset \mathcal{U}$. Tomemos $U \subset X$ abierto tal que $D \subset U \subset \bar{U} \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$. Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, sea $\mathcal{U}_i = \{E \in \mathcal{C}(X) : E \cap U_i \neq \emptyset\}$ y sea $G_i = A \setminus U_i$. Mostraremos que $\dim [fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{Z})] \leq m-2$. Como los puntos en $D \cap U_i$ pertenecen a $A \setminus G_i$, $A \subsetneq G_i$. Sea $\mathcal{G}_i = \mathcal{Z} \setminus (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{Z}) = \{E \in \mathcal{Z} : E \subset G_i\} = \{E \in \mathcal{Z} : E \subset G_i \cap A\}$, para mostrar que $\dim [fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{Z})] \leq m-2$, solamente necesitamos probar que $\dim [fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{G}_i)] \leq m-2$. Podemos asumir que $\mathcal{G}_i \neq \emptyset$. Entonces, por la Afirmación 4, obtenemos un número finito de componentes C_1, \dots, C_k de $G_i \cap A$ tal que $fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{G}_i) = (Sb(C_1, A) \cup \dots \cup Sb(C_k, A)) \cap \mathcal{Z}$. Por la Afirmación 5, $\mathcal{Z} \cap Sb(C_i, A)$ es un subcontinuo de $Sb(C_i, A)$ que es cerrado superiormente respecto a C_i y $\mathcal{Z} \cap Sb(C_i, A)$ tiene propiedad $S(m-1)$. Entonces por la hipótesis de inducción, $\dim [\mathcal{Z} \cap Sb(C_i, A)] \leq m-2$. Por tanto, $\dim [fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{G}_i)] \leq m-2$, por [4, Teorema III 2]. Sea C_0 la componente de $U \cap A$ tal que $D \subset C_0$. Sea $C = \bar{C}_0$. Definimos $\mathcal{V} = \mathcal{Z} \cap \mathcal{U}_1 \cap \dots \cap \mathcal{U}_k \cap int_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(C) \cap \mathcal{Z})$. Entonces $\mathcal{V} \subset \mathcal{Z}$ es abierto. Dado $E \in \langle U \cap U_1, \dots, U \cap U_k \rangle \cap \mathcal{Z}$, $E \in \mathcal{U} \cap \mathcal{Z}$. Entonces $E \subset U \cap A$ y $E \cap D \neq \emptyset$. Así, $E \subset C_0$. Esto prueba que $D \in \langle U \cap U_1, \dots, U \cap U_k \rangle \cap \mathcal{Z} \subset \mathcal{C}(C) \cap \mathcal{Z}$. Por lo tanto $D \in int_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(C) \cap \mathcal{Z})$. Así, $D \in \mathcal{V}$. Si $C \neq A$, por la Afirmación 3, $fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(C) \cap \mathcal{Z}) = Sb(C, A) \cap \mathcal{Z}$. Por la Afirmación 5, podemos aplicar la hipótesis de inducción a $Sb(C, A) \cap \mathcal{Z}$ y podemos concluir que $\dim [fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(C) \cap \mathcal{Z})] \leq m-2$. En el caso que $C = A$, el conjunto $fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(C) \cap \mathcal{Z}) = fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z}) = \emptyset$. En cualquier caso $\dim [fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(C) \cap \mathcal{Z})] \leq m-2$. Como $fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{V}) \subset fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z} \cap \mathcal{U}_1) \cup \dots \cup fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z} \cap \mathcal{U}_k) \cup fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{C}(C) \cap \mathcal{Z})$, tenemos que $\dim [fr_{\mathcal{Z}}(\mathcal{V})] \leq m-2$, por [4, Teorema III 2]. Finalmente es claro que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{Z}$. Por lo tanto $\dim [\mathcal{Z}] \leq m-1$.

Ahora supongamos que existe una n -celda $\mathbb{D} \subset \mathcal{C}(X)$. Sean $D, E \in \mathbb{D}$ tal que $D \neq E$ y $E \subsetneq D$. Fijemos $p \in E \setminus D$. Entonces existe $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}(X)$ abierto tal que $D \in \mathcal{U}$ y $p \notin F$ para todo $F \in \mathcal{U}$. Sea \mathbb{E} una n -celda tal que $D \in \mathbb{E}$ y $\mathbb{E} \subset \mathbb{D} \cap \mathcal{U}$. Sea $A = \bigcup \{F \in \mathcal{C}(X) : F \in \mathbb{E}\}$. Entonces $A \in \mathcal{C}(X)$ y $p \notin A$. Como X no contiene n -odos, $Sb(A, X)$ tiene propiedad $S(n-1)$. Por la Afirmación 6, $\dim [Sb(A, X)] \leq n-2$. Entonces $\mathbb{E} \subsetneq Sb(A, X)$. Fijemos un elemento $G \in \mathbb{E} \setminus Sb(A, X)$. Como $\dim [Sb(A, X)] \leq n-2$, $Sb(A, X) \cap \mathbb{D}$ no desconecta a \mathbb{D} , por [4, Corolario al Teo. IV 4]. Así, existe una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D} \setminus Sb(A, X)$ tal que $\alpha(0) = G$ y $\alpha(1) = E$. Sea $t_0 = \max \{t \in [0, 1] : \alpha(t) \subset A\}$. Entonces $t_0 < 1$ y es fácil mostrar que $\alpha(t_0) \in Sb(A, X)$. \square

De los Teoremas 2.3.1 y 2.3.11 tenemos una condición necesaria y suficiente para que el hiperespacio de subcontinuos $\mathcal{C}(X)$ contenga una n -celda.

Teorema 2.3.12. *Sea X un continuo. Entonces $\mathcal{C}(X)$ contiene una n -celda si y sólo si X contiene un n -odo.*

2.4. Celdas en el hiperespacio $\mathcal{C}(A, X)$

En esta sección presentamos un resultado importante, probado por la profesora Patricia Pellicer en 2007, ver [11], que nos permite localizar celdas en el hiperespacio $\mathcal{C}(X)$.

Dado un continuo X y A un subcontinuo de X , definimos el hiperespacio $\mathcal{C}(A, X)$ por:

$$\mathcal{C}(A, X) = \{B \in \mathcal{C}(X) : A \subset B\}.$$

Si $A = \{p\}$, por simplicidad denotaremos a $\mathcal{C}(\{p\}, X)$ por $\mathcal{C}(p, X)$. Dados un continuo X y $p \in X$ definimos $Sb(p, A, Y) = Sb(A, Y) \cap \mathcal{C}(p, Y)$, donde $A, Y \in \mathcal{C}(p, X)$ tales que $A \subsetneq Y$ y $Sb(A, Y)$ es la semifrontera de $\mathcal{C}(A)$ en $\mathcal{C}(Y)$ como se definió en la sección anterior.

La demostración del Teorema 2.4.1 que presentamos a continuación, usa los mismos argumentos expuestos en la prueba del Teorema 2.3.12, sin embargo, existen detalles importantes que lo diferencian y por esta razón presentamos su demostración. Vamos a probar que un punto $p \in X$ está contenido en el centro de un k -odo si y sólo si $\mathcal{C}(p, X)$ contiene una k -celda. Esto se hará probando una serie de resultados auxiliares.

Teorema 2.4.1. *Sea X un continuo y A un subcontinuo de X . Si $\mathcal{C}(A, X)$ contiene una k -celda, entonces A está contenido en el centro de un k -odo.*

Demostración. Sean A y Y elementos de $\mathcal{C}(p, X)$ tales que $A \subsetneq Y$, y \mathcal{F} un subcontinuo de $Sb(p, A, Y)$ cerrado superiormente respecto a A con propiedad $S(k)$.

Afirmación 1. Sean $B, D \in \mathcal{C}(p, A)$ y $k \in \mathbb{N}$. Si p no está contenido en el centro de un k -odo, entonces $B \setminus D$ y $D \cap B$ tienen a lo más $k - 1$ componentes.

Si $B \setminus D$ tiene al menos k componentes, entonces $B \cup D$ es un k -odo con centro D , lo que es una contradicción. Supongamos que $D \cap B$ tienen al menos k componentes distintas D_1, \dots, D_k , para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Por el Teorema 1.5.4, existe un arco de orden β_i de D_i a B y por el Corolario 1.5.9 existe un segmento α_i . Tomemos $s > 0$ tal que $\alpha_i(s) \cap \alpha_j(s) = \emptyset$ si $i \neq j$. Entonces, es fácil ver que $D \cup \alpha_1(s) \cup \dots \cup \alpha_k(s) \in \mathcal{C}(p, A)$ y que $[D \cup \alpha_1(s) \cup \dots \cup \alpha_k(s)] \setminus D$ tiene al menos k componentes, lo que es una contradicción.

Afirmación 2. Sea $B \in \mathcal{C}(p, A)$ y sea $(B_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{C}(p, Y)$ que converge a B tal que $B_n \setminus A \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $B \in Sb(p, A, Y)$.

Supongamos que $B_1 = Y$ y que $B_n \setminus (\bigcup \{B_i : i \geq n+1\} \cup B) \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $K_n = \bigcup \{B_i : i \geq n\} \cup B$. Entonces, $K_{n+1} \subsetneq K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y K_n converge a B . Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un arco de orden α_n de K_{n+1} a K_n y existe un segmento $\beta_n : [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \rightarrow \mathcal{C}(p, K_n)$, tal que $\beta_n(\frac{1}{n+1}) = K_{n+1}$ y $\beta_n(\frac{1}{n}) = K_n$. Definamos $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(p, Y)$ por:

$$\beta(s) = \begin{cases} \beta_n(s) & \text{si } s \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] ; \\ B & \text{si } s = 0 , \end{cases}$$

Veamos que β es un arco de orden de B a Y . Note que $\beta_{n+1}(\frac{1}{n+1}) = K_{n+1} = \beta_n(\frac{1}{n+1})$. Para mostrar que β es continua, es suficiente mostrar que es continua en 0. Sea $(t_i)_{i=1}^\infty$ una sucesión en $[0, 1]$ que converge a 0 y supongamos que $t_i \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Además, para cada $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $B \subset K_{n_i+1} \subset \beta_{n_i}(t_i)$ y $\beta(t_i) = \beta_{n_i}(t_i) \subset K_{n_i}$, K_{n_i} converge a B y $B = \beta(0)$. Por lo tanto, $\beta(t_i)$ converge a $\beta(0)$. Así, β es continua. Por otro lado, $\beta(0) = B$ y $\beta(1) = \beta_1(1) = K_1 = B_1 = Y$. Sean $s, t \in [0, 1]$ tales que $s < t$. Si $\frac{1}{n+1} \leq s < t \leq \frac{1}{n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $\beta(s) = \beta_n(s) \subsetneq \beta_n(t) = \beta(t)$. Por otro lado, si $s < \frac{1}{n} < t$ para algún $n \in \mathbb{N}$, no es difícil ver que $\beta(s) \subsetneq K_n \subsetneq \beta(t)$. Así, en cualquier caso $\beta(s) \subsetneq \beta(t)$. Por lo tanto, β es un arco de orden de B a Y . Por último, sea $t > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < t$. Entonces, $B_n \setminus A \subset B_n \subset K_n \subset \beta(t)$ y $B_n \setminus A \neq \emptyset$. Por tanto, $\beta(t) \setminus A \neq \emptyset$ y así $B \in Sb(p, A, Y)$.

Afirmación 3. $Sb(p, A, Y)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}(p, A)$.

sea $(B_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en $Sb(p, A, Y)$ que converge a algún $B \in \mathcal{C}(p, A)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea α_n un arco de orden de B_n a Y y un segmento β_n , tal que $\beta_n(t) \setminus A \neq \emptyset$ si $t > 0$. Sea $t_n > 0$ tal que $H_d(B_n, \beta_n(t_n)) < \frac{1}{n}$. Entonces, es fácil ver que la sucesión $(\beta_n(t_n))_{n=1}^\infty$ converge a B . Luego, por la Afirmación 2, $B \in Sb(p, A, Y)$.

Afirmación 4. Sea K un subconjunto cerrado de X tal que $A \subsetneq K$ y sea $p \in K$. Entonces, existe exactamente una componente K_1 de $A \cap K$ que contiene elementos de \mathcal{F} y $fr_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(A \cap K) \cap \mathcal{F}) = Sb(p, K_1, A) \cap \mathcal{F}$.

Sea K_1 la componente de $A \cap K$ que tiene a p y sea B un elemento de \mathcal{F} que está contenido en $A \cap K$. Como $B \in \mathcal{C}(p, A)$, es claro que $B \subset K_1$. Ahora, supongamos que $B \in fr_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(A \cap K) \cap \mathcal{F})$. Entonces, $B \in \mathcal{F}$, $p \in B$ y $B \subset A \cap K$. Luego, $B \in \mathcal{C}(p, K_1)$. Sea $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathcal{F} que converge a B , tal que $B_n \setminus (A \cap K) \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, $B_n \setminus K_1 \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, por la Afirmación 2, tenemos que $B \in Sb(p, K_1, A) \cap \mathcal{F}$. Inversamente, sea $D \in Sb(p, K_1, A) \cap \mathcal{F}$. Entonces, $D \in \mathcal{C}(A \cap K) \cap \mathcal{F}$ y existe un arco de orden α de D a A y un segmento γ tal que $\gamma(t) \setminus K_1 \neq \emptyset$ para $t > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$. De lo anterior tenemos que $\gamma(\frac{1}{n}) \in \mathcal{C}(A) \setminus \mathcal{C}(A \cap K)$ y $\gamma(\frac{1}{n})$ converge a $\gamma(0) = D$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $D \subset \gamma(\frac{1}{n})$ y $D \in \mathcal{F}$. Así, \mathcal{F} es cerrado superiormente respecto a A . Luego $\gamma(\frac{1}{n}) \in \mathcal{F}$ y por lo tanto, $\gamma(\frac{1}{n}) \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{C}(A \cap K)$. Así, $D \in fr_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(A \cap K) \cap \mathcal{F})$.

Afirmación 5. Sea $L \in \mathcal{C}(p, A) \setminus \{A\}$. Entonces, $Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$ es un subcontinuo de $Sb(p, A, Y)$ cerrado superiormente respecto a L .

Primero probemos que $Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$ es cerrado superiormente respecto a L . Sea $B \in Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$ y sea $D \in \mathcal{C}(B, L)$. Entonces $D \in \mathcal{F}$. Además, como $B \in Sb(p, L, A)$, existe un arco de orden α de B a A y un segmento β tal que $\beta(s) \setminus L \neq \emptyset$ si $s > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $D_n = D \cup \beta(\frac{1}{n})$. Entonces es fácil ver que la sucesión $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a D y $D_n \setminus L \neq \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por la Afirmación 2, tenemos que $D \in Sb(p, L, A)$ y por lo tanto, $Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$ es cerrado superiormente respecto a L . Recordemos que \mathcal{F} es un subcontinuo de $Sb(p, A, Y)$. Luego, por la Afirmación 3, tenemos que $Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$ es un subconjunto cerrado $Sb(p, A, Y)$. Por otro lado, sea $B \in Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$ y γ un arco de orden de B a L . Como $Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$ es cerrado superiormente respecto a L , tenemos que $\gamma \subset Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$. Así, cualquier elemento de $Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$ puede unirse a L por un arco contenido en $Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$. Luego, $Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$ es arcoconexo y por lo tanto es un subcontinuo de $Sb(p, A, Y)$.

Afirmación 6. Sean $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y sea $L \in \mathcal{C}(p, A) \setminus \{A\}$. Entonces se tienen las siguientes condiciones:

(i) Si p no está contenido en el centro de un n -odo y si \mathcal{F} tiene la propiedad $S(k)$, entonces $Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$ tiene la propiedad $S(k-1)$.

(ii) Si p no está contenido en el centro de un k -odo, entonces $Sb(p, A, Y)$ tiene la propiedad $S(k-1)$.

Supongamos que $Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$ no tiene la propiedad $S(k-1)$. Entonces existen $B, C \in Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$ tal que $B \setminus C$ tiene al menos $k-1$ componentes. Sean B_1, \dots, B_{k-1} componentes distintas de $B \setminus C$ y sea $b_i \in B_i$ para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Como $C \in Sb(p, L, A) \cap \mathcal{F}$, existe un arco de orden α de C a A y un segmento γ tal que $\gamma(t) \setminus L \neq \emptyset$ si $t > 0$. Sea $s > 0$ tal que $b_i \notin \gamma(s)$ para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Ahora, por la Afirmación 1, tenemos que $\gamma(s) \cap L$ tiene una cantidad infinita de componentes. De esta manera existe $r \in (0, s)$ tal que $\gamma(r) \cap L$ es conexo. Sean $B' = B \cup \gamma(r)$ y $C' = \gamma(r) \cap L$. Entonces B' y C' están en $\mathcal{C}(p, A)$. Note que $B \subset B'$ y $C \subset C'$. Como \mathcal{F} es cerrado superiormente respecto a A , tenemos que $B', C' \in \mathcal{F}$. Veamos que $B' \setminus C'$ tiene al menos k componentes.

$$B' \setminus C' = [(B \cup \gamma(r)) \setminus \gamma(r)] \cup [(B \cup \gamma(r)) \setminus L] = (B \setminus \gamma(r)) \cup (\gamma(r) \setminus L)$$

Ahora, $B \setminus \gamma(r) \subset B \setminus C$ y $b_i \in B \setminus \gamma(r)$ para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Por lo tanto, $B \setminus \gamma(r)$ tiene al menos $k-1$ componentes contenidas en L . Como estas componentes y $\gamma(r) \setminus L$ son conjuntos mutuamente separados, podemos concluir que $B' \setminus C'$ tiene al menos k componentes, lo que es una contradicción. La condición (ii) se prueba de manera similar.

Afirmación 7. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y supongamos que p no está contenido en el centro de ningún r -odo. Si \mathcal{F} tiene la propiedad $S(k)$, entonces $\dim[\mathcal{F}] \leq k-1$.

Hagamos inducción sobre k . Si $k = 1$. Sea $B \in \mathcal{F}$. Entonces $B \subset A$ y $A \setminus B$ no tiene componentes. Así, $B = A$ y por tanto $\mathcal{F} = \{A\}$ y $\dim[\mathcal{F}] = 0$. Supongamos que \mathcal{F} tiene la propiedad $S(k)$. Sean $F \in \mathcal{F}$ y \mathcal{U} un subconjunto abierto de $\mathcal{C}(X)$ que contiene a F . Sea $\mathcal{V} = \langle V_1, \dots, V_n \rangle$ un abierto de $\mathcal{C}(X)$ tal que $F \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Sea U un subconjunto abierto de X tal que $F \subset U \subset \bar{U} \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$ y sea M la adherencia de la componente de $U \cap A$ que contiene a F . Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ sea $\mathcal{V}_i = \{D \in \mathcal{C}(X) : D \cap V_i \neq \emptyset\}$. Entonces, cada \mathcal{V}_i es un subconjunto abierto de $\mathcal{C}(X)$. Sea $\mathcal{W} = \mathcal{V}_1 \cap \dots \cap \mathcal{V}_n \cap \text{int}_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{F})$. Claramente \mathcal{W} es un subconjunto abierto de \mathcal{F} . Por construcción, $F \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, $F \in \mathcal{V}_1 \cap \dots \cap \mathcal{V}_n$. Ahora, sea $E \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{F}$. Entonces, $p \in E \subset A$ y así, $E \in \mathcal{C}(M)$. Luego, $\mathcal{C}(U) \cap \mathcal{F} \subset \mathcal{C}(M) \cap \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{C}(U)$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{C}(X)$. De esta manera, $F \in \text{int}_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{F})$ y así, $F \in \mathcal{W}$.

Claramente, $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$. Ahora, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, sea $K_i = X \setminus V_i$. Note que $\mathcal{F} \setminus \mathcal{V}_i = \mathcal{C}(K_i) \cap \mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K_i) \cap \mathcal{C}(A)$. Así, $\mathcal{F} \setminus \mathcal{V}_i = \mathcal{C}(K_i) \cap \mathcal{F} = \mathcal{C}(A \cap K_i) \cap \mathcal{F}$. De lo anterior y por la Afirmación 4, existe a lo más una componente L_i de $A \cap K_i$ que contiene elementos de \mathcal{F} . Además, $fr_{\mathcal{F}}(\mathcal{V}_i \cap \mathcal{F}) = fr_{\mathcal{F}}(\mathcal{F} \setminus \mathcal{V}_i) = fr_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(A \cap K_i) \cap \mathcal{F}) = Sb(p, L_i, A) \cap \mathcal{F}$. Ahora, por la Afirmación 5, tenemos que $Sb(p, L_i, A) \cap \mathcal{F}$ es un subcontinuo de $Sb(p, A, Y)$ cerrado superiormente respecto a L_i . Además, por la Afirmación 6, tenemos que $Sb(p, L_i, A) \cap \mathcal{F}$ tiene la propiedad $S(k-1)$. Así, por la hipótesis de inducción tenemos que $\dim[Sb(p, L_i, A) \cap \mathcal{F}] \leq k-2$. Por lo tanto $\dim[fr_{\mathcal{F}}(\mathcal{V}_i \cap \mathcal{F})] \leq k-2$. Ahora probemos que $\dim[fr_{\mathcal{F}}(int_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{F}))] \leq k-2$. Analizamos dos casos. Si $M = A$, entonces $fr_{\mathcal{F}}(int_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{F})) = fr_{\mathcal{F}}(int_{\mathcal{F}}(\mathcal{F})) = fr_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) = \emptyset$. Por lo tanto la conclusión se satisface. Supongamos ahora que $A \setminus M \neq \emptyset$. Por las afirmaciones 5 y 6, tenemos que $Sb(p, M, A) \cap \mathcal{F}$ es un subcontinuo de $Sb(p, A, Y)$ cerrado superiormente respecto a M y $Sb(p, M, A) \cap \mathcal{F}$ tiene la propiedad $S(k-1)$. Luego, por la hipótesis de inducción tenemos que $\dim[Sb(p, M, A) \cap \mathcal{F}] \leq k-2$. Además, por la Afirmación 4, tenemos que $fr_{\mathcal{F}}(int_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{F})) \subset fr_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{F}) = fr_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(A \cap M) \cap \mathcal{F}) = Sb(p, M, A) \cap \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\dim[fr_{\mathcal{F}}(int_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{F}))] \leq k-2$. Note que $fr_{\mathcal{F}}(\mathcal{W}) = fr_{\mathcal{F}}[(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{F}) \cap \dots \cap (\mathcal{V}_n \cap \mathcal{F}) \cap (int_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{F}))] \subset fr_{\mathcal{F}}(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{F}) \cup \dots \cup fr_{\mathcal{F}}(\mathcal{V}_n \cap \mathcal{F}) \cup fr_{\mathcal{F}}(int_{\mathcal{F}}(\mathcal{C}(M) \cap \mathcal{F}))$. Así, por [4, Teorema III 2] tenemos que $\dim[\mathcal{F}] \leq k-1$.

Ahora supongamos que $\mathcal{C}(p, X)$ contiene una k -celda \mathbb{C} . Sean $B, D \in \mathbb{C}$ tales que $B \neq D$ y sea $b \in B \setminus D$. Consideremos un subconjunto abierto \mathcal{U} de $\mathcal{C}(p, X)$ tal que $D \in \mathcal{U}$ y si $L \in \mathcal{U}$, entonces $b \notin L$. Tomemos además una k -celda $\mathbb{C}_1 \subset \mathcal{U} \cap \mathbb{C}$ que contiene a D . Definamos $A = \bigcup \{L \in \mathcal{C}(p, X) : L \in \mathbb{C}_1\}$. Note que $b \notin A$. Ahora por la Afirmación 6 (ii), tenemos que $Sb(p, A, X)$ tiene la propiedad $S(k-1)$. Así, por la Afirmación 7, tenemos que $\dim[Sb(p, A, X)] \leq k-2$ y podemos tomar $C \in \mathbb{C}_1 \setminus Sb(p, A, X)$. Además, por [4, Corolario al Teo. IV 4], tenemos que $Sb(p, A, X) \cap \mathbb{C}$ no separa a \mathbb{C} . Entonces, podemos tomar una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus Sb(p, A, X)$ tal que $\gamma(0) = \mathbb{C}$ y $\gamma(1) = B$. Sea $s = \sup \{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in A\}$. Entonces, no es difícil ver $s > 0$ y $\gamma(s) \in Sb(p, A, X)$. Lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{C}(p, X)$ no contiene k -celdas. \square

Teorema 2.4.2. *Sea X un continuo y A un subcontinuo de X . Si A está contenido en el centro de un k -odo, entonces $\mathcal{C}(A, X)$ contiene una k -celda.*

Demostración. Supongamos que p está contenido en el centro M de un k -odo T .

Entonces, $T \setminus M$ tiene al menos k componentes M_1, \dots, M_k . Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, tomamos una arco de orden α_i de M a $M \cup M_i$. Definamos una función $h : [0, 1]^k \rightarrow \mathcal{C}(p, X)$ por $h(t_1, \dots, t_k) = \bigcup_{i=1}^k \alpha_i(t_i)$. Es fácil ver que h está bien definida y es continua. Ahora, sean $(r_1, \dots, r_k), (t_1, \dots, t_k) \in [0, 1]^k$ tales que $r_i < t_i$ para algún $i \in \{1, \dots, k\}$. Entonces $\alpha_i(r_i) \subsetneq \alpha_i(t_i)$. De lo anterior, tenemos que $h(r_1, \dots, r_k) \neq h(t_1, \dots, t_k)$. Por lo tanto h es inyectiva. Así, h es una inmersión. Luego, $\mathcal{C}(p, X)$ contiene una k -celda. \square

De los Teoremas 2.4.1 y 2.4.2 tenemos una condición necesaria y suficiente para que el hiperespacio de subcontinuos $\mathcal{C}(A, X)$ contenga una k -celda.

Teorema 2.4.3. *Sea X un continuo y A un subcontinuo de X . Entonces A está contenido en el centro de un k -odo si y sólo si $\mathcal{C}(A, X)$ contiene una k -celda.*

Capítulo 3

Celdas en el hiperespacio $\mathcal{C}_n(X)$

En este capítulo mostramos los aportes más importantes de nuestro trabajo, principalmente nuestros resultados son enfocados a dar respuesta positiva a la pregunta planteada por el profesor Sergio Macias en [8]. Dado un continuo X “¿Si $\mathcal{C}_n(X)$ contiene $(n + 1)$ –celdas, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces X contiene un subcontinuo descomponible?”

Comenzaremos el capítulo mostrando algunos resultados previos demostrados por el profesor Sergio Macias relacionados con la existencia de n –celdas en el hiperespacio $\mathcal{C}_n(X)$ y por último mostraremos nuestros aportes.

3.1. Resultados previos

Los resultados que presentamos a continuación fueron tomados de [8]. El primero de ellos garantiza la existencia de una n –celda para el hiperespacio $\mathcal{C}_n(X)$ de cualquier continuo X para cada $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.1.1. *Sea X un continuo. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{C}_n(X)$ contiene una n –celda.*

Demostración. Por [9, Corolario 5.5], existen subcontinuos no degenerados A_1, \dots, A_n de X tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$, siempre que $i \neq j$. Sea $a_j \in A_j$ y por el Corolario 1.5.9. existe $\alpha_j : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(X)$ tal que $\alpha_j([0, 1])$ es un arco de orden donde $\alpha_j(0) = \{a_j\}$ y $\alpha_j(1) = A_j$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$. Definamos $\xi : [0, 1]^n \rightarrow \mathcal{C}_n(X)$ por $\xi((t_1, \dots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^n \alpha_i(t_i)$ para cada $(t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$. Note que ξ es inyectiva. Además, como cada α_j es continua, por [10, Lema 1.48], ξ es continua. Por tanto ξ es una inmersión. \square

Teorema 3.1.2. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si X contiene k subcontinuos descomponibles disyuntos dos a dos con $k \leq n$, entonces $\mathcal{C}_n(X)$ contiene una $(k+n)$ -celda.

Demostración. Supongamos que $k < n$. Sean M_1, \dots, M_k , k subcontinuos descomponibles de X disyuntos dos a dos. Supongamos que $M_j = A_j \cup B_j$, donde A_j y B_j son subcontinuos propios de M_j , para cada $j \in \{1, \dots, k\}$. Podemos suponer que para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, $A_j \cap B_j$ es conexo, $A_j \setminus (A_j \cap B_j) \neq \emptyset$, $B_j \setminus (A_j \cap B_j) \neq \emptyset$, y $[A_j \setminus (A_j \cap B_j)] \cap [B_j \setminus (A_j \cap B_j)] = \emptyset$. Sean C_{k+1}, \dots, C_n , $(n-k)$ subcontinuos no degenerados de X disyuntos dos a dos tales que $M_j \cap C_l = \emptyset$ para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ y para cada $l \in \{k+1, \dots, n\}$. Sean $\alpha_j : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(A_j)$ y $\beta_j : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(B_j)$ tales que $\alpha_j([0, 1]) \cap \beta_j([0, 1])$ son arcos de orden, donde $\alpha_j(0) = A_j \cap B_j$, $\alpha_j(1) = A_j$, $\beta_j(0) = A_j \cap B_j$ y $\beta_j(1) = B_j$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$. Sean $x_l \in C_l$ y $\gamma_l : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}(C_l)$ tal que $\gamma_l([0, 1])$ es un arco de orden, donde $\gamma_l(0) = \{x_l\}$ y $\gamma_l(1) = C_l$, para cada $l \in \{k+1, \dots, n\}$. Note que, $[0, 1]^{k+n}$ es homeomorfo a $[0, 1]^{2k} \times [0, 1]^{n-k}$. Definamos $\xi : [0, 1]^{2k} \times [0, 1]^{n-k} \rightarrow \mathcal{C}_n(X)$ por $\xi((t_1, \dots, t_{2k}), (t_1, \dots, t_{n-k})) = \left(\bigcup_{j=1}^k (\alpha_j(t_{2j-1}) \cup \beta_j(t_{2j})) \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{n-k} \gamma_{k+l}(t_l) \right)$. Note que ξ es inyectiva y además por [10, Lema 1.48], ξ es continua. Por tanto ξ es una inmersión. Por otro lado, si $k = n$, utilizamos el mismo argumento sin usar las funciones γ_l . \square

Como caso particular del teorema anterior tenemos el siguiente corolario

Corolario 3.1.3. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si X contiene un subcontinuo descomponible, entonces $\mathcal{C}_n(X)$ contiene una $(n+1)$ -celda.

En la siguiente sección probaremos que el recíproco del corolario anterior también se tiene, siendo este un nuevo aporte a la teoría de continuos y sus hiperespacios.

Para finalizar esta sección mostraremos algunos resultados que se utilizarán en la siguiente sección.

Proposición 3.1.4. Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo. Si \mathcal{K} es un subconjunto conexo de $\mathcal{C}_n(X)$, entonces $\bigcup \mathcal{K} = \bigcup \{K : K \in \mathcal{K}\}$ tiene a lo más n componentes.

Demostración. Supongamos que existe $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_n(X)$ conexo, tal que $\bigcup \mathcal{K}$ tiene al menos $n+1$ componentes. Así, existen $n+1$ subconjuntos mutuamente separados C_1, \dots, C_{n+1} de X tal que $\bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{j=1}^{n+1} C_j$. Sean $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{K} : A \subset \bigcup_{j=1}^n C_j\}$ y $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{K} : A \cap C_{n+1} \neq \emptyset\}$. Veamos que \mathcal{B} y \mathcal{D} son subconjuntos separados de $\mathcal{C}_n(X)$. Supongamos que existe $A \in \mathcal{B} \cap \mathcal{D}$. Entonces $A \subset \bigcup_{j=1}^n C_j$ y $A \cap C_{n+1} \neq \emptyset$. Luego, existe $a \in A \cap C_{n+1}$, es decir $a \in A$ y $a \in C_{n+1}$. Así, existe $p \in \{1, \dots, n\}$ tal $a \in C_p$. Entonces $C_{n+1} \cap C_p \neq \emptyset$,

lo que es una contradicción ya que C_{n+1} y C_p son mutuamente separados. Por tanto, \mathcal{B} y \mathcal{D} son subconjuntos separados de $\mathcal{C}_n(X)$ y $\mathcal{K} = \mathcal{B} \cup \mathcal{D}$, lo que es una contradicción porque \mathcal{K} es conexo. Por lo tanto $\bigcup \mathcal{K}$ tiene a lo más n componentes. \square

Proposición 3.1.5. *Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}_n(X)$ compacto y localmente conexo. Entonces $\bigcup \mathcal{M} \subset X$ es compacto y localmente conexo.*

Demostración. Claramente $\bigcup \mathcal{M}$ es compacto. Supongamos que $\bigcup \mathcal{M}$ no es localmente conexo. Entonces existe una sucesión $(x_i)_{i=1}^\infty$ en $\bigcup \mathcal{M}$ que converge a x , y $\varepsilon > 0$, tal que ninguna subsucesión de $(x_i)_{i=1}^\infty$ está en un subconjunto conexo de $\bigcup \mathcal{M}$ con diámetro menor que ε . Sea $(F_i)_{i=1}^\infty$ una sucesión en \mathcal{M} con $x_i \in F_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Por la compacidad, podemos suponer que $(F_i)_{i=1}^\infty$ converge a un elemento F de \mathcal{M} y $x \in F$. Sea V un abierto de que tiene a x tal que $F \cap V = \{x\}$ y $\text{diám } V < \varepsilon$. Entonces, existe un abierto conexo \mathcal{U} de \mathcal{M} que tiene a F tal que cada elemento de \mathcal{U} intersección con V es distinto del vacío. Supongamos que las sucesiones $(x_i)_{i=1}^\infty$ y $(F_i)_{i=1}^\infty$ están en V y \mathcal{U} respectivamente. Entonces $L = \bigcup \{E \cap V : E \in \mathcal{U}\}$ es un subconjunto de $\bigcup \mathcal{M}$ con diámetro menor que ε , $(x_i)_{i=1}^\infty \subset L$ y es fácil ver que L es conexo, lo que es una contradicción. Así, $\bigcup \mathcal{M}$ es localmente conexo. \square

3.2. Nuevos aportes

En esta sección mostramos nuestros aportes a la teoría de hiperespacios de continuos. Primero haremos una generalización del Teorema 3.1.2 y por último daremos una respuesta positiva a [8, Pregunta 7.4.1].

Proposición 3.2.1. *Sea $A \in \mathcal{C}_n(X)$ tal que $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$, donde cada A_i es una componente de A y $k \leq n$. Si A_i es un n_i -odo para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $\mathcal{C}_n(X)$ contiene una m -celda, donde $m = \sum_{i=1}^k n_i$.*

Demostración. Como cada A_i es un n_i -odo, por el Teorema 2.3.1, $\mathcal{C}(A_i)$ contiene una n_i -celda, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Tenemos que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, existe una inmersión $h_i : [0, 1]^{n_i} \rightarrow \mathcal{C}(A_i)$. Note que $[0, 1]^m$ es homeomorfo a $[0, 1]^{n_1} \times \dots \times [0, 1]^{n_k}$. Definamos $h : [0, 1]^{n_1} \times \dots \times [0, 1]^{n_k} \rightarrow \mathcal{C}_n(X)$ por $h(t_1, \dots, t_k) = \bigcup_{i=1}^k h_i(t_i)$. Como cada A_i es una componente de A , tenemos que h es inyectiva. Además, cada h_i es continua. Luego, por [10, Lema 1.48] h es continua. Por tanto h es una inmersión. \square

A continuación probaremos un lema técnico que usaremos más adelante

Lema 3.2.2. Sean X un continuo y $n \geq 2$. Sean \mathcal{K} un subcontinuo de $\mathcal{C}_n(X) \setminus \mathcal{C}_{n-1}(X)$ y $A \in \mathcal{K}$. Si K es una componente de $\bigcup \mathcal{K}$ y A tiene exactamente m componentes en K , entonces D tiene exactamente m componentes contenidas en K , para cada $D \in \mathcal{K}$.

Demostración. Note que $\bigcup \mathcal{K} \in \mathcal{C}_n(X)$ por la Proposición 3.1.4. Sea K una componente de $\bigcup \mathcal{K}$. Como K es una componente de $\bigcup \mathcal{K}$ y $\bigcup \mathcal{K}$ tiene un número finito de componentes, tenemos que $K' = \bigcup \mathcal{K} \setminus K$ es un subconjunto cerrado de X . Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ definimos:

$$\mathcal{L}_j = \{D \in \mathcal{K} : D \text{ tiene exactamente } j \text{ componentes contenidas en } K'\}.$$

Veamos primero que \mathcal{L}_j es un subconjunto abierto de \mathcal{K} , para cada $j \in \{1, \dots, n\}$.

Sea $j_0 \in \{1, \dots, n\}$. Si $\mathcal{L}_{j_0} = \emptyset$, entonces \mathcal{L}_{j_0} es abierto. Supongamos que $\mathcal{L}_{j_0} \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{L}_{j_0}$. Como $A \in \mathcal{C}_n(X) \setminus \mathcal{C}_{n-1}(X)$, sin pérdida de generalidad, podemos escribir $A = A_1 \cup \dots \cup A_{j_0} \cup A_{j_0+1} \cup \dots \cup A_n$, donde A_1, \dots, A_n son las componentes, $A_1 \cup \dots \cup A_{j_0} \subset K$ y $A_{j_0+1} \cup \dots \cup A_n \subset K'$. Sean U_1, \dots, U_n subconjuntos abiertos de X disjuntos dos a dos tales que:

1. $A_j \subset U_j$, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$.
2. $U_1 \cup \dots \cup U_{j_0} \subset X \setminus K'$.
3. $U_{j_0+1} \cup \dots \cup U_n \subset X \setminus K$.

Note que $A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle_n$ y $\langle U_1, \dots, U_n \rangle_n \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{L}_{j_0}$. Por lo tanto, \mathcal{L}_{j_0} es un subconjunto abierto de \mathcal{K} .

Ahora veamos que $\mathcal{K} = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{L}_j$. Claramente $\bigcup_{j=1}^n \mathcal{L}_j \subset \mathcal{K}$. Sea $B \in \mathcal{K}$. Supongamos que $B \notin \mathcal{L}_j$, para ningún $j \in \{1, \dots, n\}$. Entonces, $B \cap K = \emptyset$. Sean U y V subconjuntos abiertos de X tales que $K \subset U$, $K' \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Sean $\mathcal{U} = \langle X, U \rangle_n \cap \mathcal{K}$ y $\mathcal{V} = \langle V \rangle_n \cap \mathcal{K}$ subconjuntos abiertos de \mathcal{K} . Claramente $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Como $B \subset K'$, tenemos que $B \in \mathcal{V}$ y así $\mathcal{V} \neq \emptyset$. Además, note que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ y $\mathcal{K} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. De esta manera, como \mathcal{K} es conexo, tenemos una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{K} = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{L}_j$. Por último, como $\mathcal{L}_j \cap \mathcal{L}_l = \emptyset$, para cada $j \neq l$, por la conexidad de \mathcal{K} , tenemos que $\mathcal{K} = \mathcal{L}_l$, para algún $l \in \{1, \dots, n\}$. \square

El siguiente teorema muestra que si un continuo X no contiene una curva cerrada simple, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ no contiene $(n+1)$ -celdas.

Teorema 3.2.3. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{F}_n(X)$ contiene una $(n+1)$ -celda, entonces X contiene una curva cerrada simple.

Demostración. Supongamos que X no contiene una curva cerrada simple. Como $\mathcal{F}_1(X)$ es homeomorfo a X , $\mathcal{F}_1(X)$ no contiene 2-celdas. Supongamos, inductivamente, que $\mathcal{F}_{n-1}(X)$ no contiene n -celdas y probemos que $\mathcal{F}_n(X)$ no contiene $(n+1)$ -celdas. Supongamos que \mathcal{A} es una $(n+1)$ -celda contenida en $\mathcal{F}_n(X)$. Como $\mathcal{F}_{n-1}(X)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{F}_n(X)$ y $\mathcal{F}_{n-1}(X)$ no contiene n -celdas, tenemos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{F}_{n-1}(X)$.

Note que $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{C}_n(X)$, por la Proposición 3.1.4 y $\bigcup \mathcal{A}$ es un subconjunto compacto y localmente conexo de X , por la Proposición 3.1.5. Sean A_1, \dots, A_k las componentes de $\bigcup \mathcal{A}$, para algún $k \leq n$. Como X no contiene una curva cerrada simple, cada A_j es una dendrita, $j \in \{1, \dots, k\}$.

Por el Lema 3.2.2, $|B \cap A_j| = |D \cap A_j| = m_j$, para cada $B, D \in \mathcal{A}$ y $j \in \{1, \dots, k\}$. Note que, $1 \leq m_j \leq n$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, y $\sum_{j=1}^k m_j = n$. Sea $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \prod_{j=1}^k \mathcal{F}_{m_j}(A_j)$ definida por:

$$\varphi(B) = (B \cap A_1, \dots, B \cap A_k), \text{ para cada } B \in \mathcal{A}.$$

Para ver que φ es continua, sea $\varphi_j : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}_{m_j}(A_j)$ definida por $\varphi_j(B) = B \cap A_j$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ y $B \in \mathcal{A}$. Sea $B \in \mathcal{A}$ y sean W_1, \dots, W_s subconjuntos abiertos de X tales que $\varphi_j(B) = B \cap A_j \in \langle W_1, \dots, W_s \rangle \cap \mathcal{F}_{m_j}(A_j)$. Sean U y V subconjuntos abiertos de X tales que $A_j \subset U$, $\bigcup_{l \neq j} A_l \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como $|B \cap A_j| = m_j$, existen subconjuntos abiertos U_1, \dots, U_{m_j} de X disyuntos dos a dos tales que $\bigcup_{l=1}^{m_j} U_l \subset U$ y $\varphi_j(B) \in \langle U_1, \dots, U_{m_j} \rangle \cap \mathcal{F}_{m_j}(A_j) \subset \langle W_1, \dots, W_s \rangle \cap \mathcal{F}_{m_j}(A_j)$. Note que si $\mathcal{U} = \langle U_1, \dots, U_{m_j}, V \rangle \cap \mathcal{A}$, entonces $B \in \mathcal{U}$ y $\varphi_j(\mathcal{U}) \subset \langle U_1, \dots, U_{m_j} \rangle \cap \mathcal{F}_{m_j}(A_j) \subset \langle W_1, \dots, W_s \rangle \cap \mathcal{F}_{m_j}(A_j)$. Así, φ_j es continua, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$. Por lo tanto, φ es continua.

Note que si $B \neq D$, entonces existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $B \cap A_j \neq D \cap A_j$. Luego, $\varphi_j(B) \neq \varphi_j(D)$. Así, φ es inyectiva y por lo tanto, φ es una inmersión. Note que $\dim[\mathcal{A}] = \dim[\varphi(\mathcal{A})]$. Por [4, Teorema III 1], $\dim[\mathcal{A}] \leq \dim\left[\prod_{j=1}^k \mathcal{F}_{m_j}(A_j)\right]$. Además, por [4, Teorema III 4],

$$\dim\left[\prod_{j=1}^k \mathcal{F}_{m_j}(A_j)\right] \leq \sum_{j=1}^k \dim[\mathcal{F}_{m_j}(A_j)].$$

En la prueba de [2, Lema 3.1], se muestra que $\dim[\mathcal{F}_{m_j}(A_j)] \leq m_j \dim[A_j]$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$. Como A_j es una dendrita para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, A_j es hereditariamente descomponible por [7, Teorema 4, pág. 301]. Además, por [8, Corolario 2.6.34],

$\dim [A_j] = 1$. Así, $\dim [\mathcal{A}] \leq \sum_{j=1}^k m_j \dim [A_j] = \sum_{j=1}^k m_j = n$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(X)$ no contiene $(n+1)$ -celdas. \square

El siguiente resultado muestra una propiedad interesante del hiperespacio $\mathcal{C}_n(X)$ de un continuo hereditariamente indescomponible.

Proposición 3.2.4. *Sean X un continuo hereditariamente indescomponible y $n \geq 2$. Si Γ es un subcontinuo localmente conexo de $\mathcal{C}_n(X) \setminus \mathcal{C}_{n-1}(X)$, entonces $\bigcup \Gamma \in \mathcal{C}_n(X) \setminus \mathcal{C}_{n-1}(X)$.*

Demostración. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Gamma \subset \mathcal{C}_n(X)$ una función continua y sobreyectiva, por [9, Teorema 8.14], y consideremos $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_n(X)$ definida por

$$\sigma(t) = \bigcup \gamma([0, t]), \text{ para cada } t \in [0, 1].$$

Note que σ es continua, por la Proposición 3.1.4 y [10, Lema 1.48]. Además, $\sigma(0) \in \Gamma$ y si $t \leq s$, entonces $\sigma(t) \subset \sigma(s)$.

Afirmación. Si $s < t$, entonces cada componente de $\sigma(t)$ intercepta a $\sigma(s)$.

Sea $s < t$. Como γ es una función continua, $\gamma([0, t])$ es un subcontinuo de $\mathcal{C}_n(X)$. Supongamos que D es una componente de $\sigma(t)$ tal que $D \cap \sigma(s) = \emptyset$. Como $\sigma(t) = \bigcup \gamma([0, t])$, tenemos que $\gamma(r) \subset \sigma(t)$, para cada $r \in [0, t]$. Note que $\sigma(t) \setminus D$ es un subconjunto cerrado de X . Sean U y V subconjuntos abiertos disyuntos de X tales que $D \subset U$ y $\sigma(t) \setminus D \subset V$. Sean $\langle X, U \rangle_n$ y $\langle V \rangle_n$ subconjuntos abiertos de $\mathcal{C}_n(X)$. Si $r < s$, entonces $\gamma(r) \subset \sigma(s)$. Por lo tanto, $\gamma(r) \cap D = \emptyset$ y $\gamma(r) \in \langle V \rangle_n$. Así, $\langle V \rangle_n \cap \gamma([0, t]) \neq \emptyset$. Además, D es una componente de $\sigma(t)$. Así, existe $l \in [0, t]$ tal que $\gamma(l) \cap D \neq \emptyset$ y $\langle X, U \rangle_n \cap \gamma([0, t]) \neq \emptyset$. Por tanto, $U \cap V = \emptyset$ y $\langle X, U \rangle_n \cap \langle V \rangle_n = \emptyset$. Finalmente, como $\sigma(t) \subset U \cup V$, tenemos que $\gamma([0, t]) \subset \langle X, U \rangle_n \cup \langle V \rangle_n$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, si $s < t$, cada componente de $\sigma(t)$ intercepta a $\sigma(s)$.

Supongamos que $\bigcup \Gamma \in \mathcal{C}_{n-1}(X)$, es decir, $\sigma(1) \in \mathcal{C}_{n-1}(X)$. Como $\mathcal{C}_{n-1}(X)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{C}_n(X)$, existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $t_0 = \min \{t \in [0, 1] : \sigma(t) \in \mathcal{C}_{n-1}(X)\}$. Sean L_1, \dots, L_k las componentes de $\sigma(t_0)$, para algún $k \leq n-1$.

Sea $A \in \Gamma$. Asumimos que $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$, donde A_1, \dots, A_n son las componentes de A . Como $k \leq n-1$, existe $j \in \{1, \dots, k\}$, tal que A tiene al menos dos componentes en L_j . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $j = 1$ y que A tiene exactamente m componentes con $1 < m < n$, digamos A_1, \dots, A_m contenidas en L_1 . Como $\sigma(0) \in \Gamma$, por el Lema 3.2.2, $\sigma(0)$ tiene exactamente m componentes contenidas en L_1 . Además,

$\sigma(t)$ tiene exactamente m componentes en L_1 , para cada $t < t_0$, porque $\sigma(0), \sigma(t) \in \mathcal{C}_n(X) \setminus \mathcal{C}_{n-1}(X)$ y por la afirmación.

Sea $R_t = \bigcup \gamma([t, t_0]) \subset \mathcal{C}_n(X)$, para cada $t \in [0, t_0]$. Note que $R_t \subset \sigma(t_0)$ y $\sigma(t) \cup R_t \subset \sigma(t_0)$. Por lo tanto, $L_1 = \left(\bigcup_{j=1}^m A_{j,t} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^l R_{j,t} \right)$, donde $A_{1,t}, \dots, A_{m,t}$ son las m componentes de $\sigma(t)$ en L_1 , y $R_{1,t}, \dots, R_{l,t}$ son componentes de R_t . Como L_1 es indescomponible y $\bigcup_{j=1}^m A_{j,t} \subsetneq L_1$, tenemos que $R_{s,t} = L_1$, para algún $s \in \{1, \dots, l\}$. Así, L_1 es una componente de R_t , para todo $t \in [0, t_0]$; en particular, L_1 es una componente de $R_{t_0} = \gamma(t_0) \in \Gamma$. Lo que es una contradicción, ya que R_{t_0} tiene exactamente m componentes contenidas en L_1 , por el Lema 3.2.2. Por lo tanto $\bigcup \Gamma \in \mathcal{C}_n(X) \setminus \mathcal{C}_{n-1}(X)$. \square

Teorema 3.2.5. *Sea X un continuo y sea $n \in \mathbb{N}$. Si X es hereditariamente indescomponible, entonces $\mathcal{C}_n(X)$ no contiene $(n+1)$ -celdas*

Demostración. Sea X un continuo hereditariamente indescomponible. Veamos que X no contiene 2-odos. Supongamos que $Y \subset X$ es un 2-odo. Entonces existe un subcontinuo M de Y tal que $Y \setminus M$ tiene al menos dos componentes. Sean S_1 y S_2 componentes de $Y \setminus M$. Como M es un subcontinuo propio de X , por la Proposición 1.2.13 $B_1 = S_1 \cup M$ y $B_2 = S_2 \cup M$ son subcontinuos de X . Luego, $B_1 \cup B_2 = S_1 \cup S_2 \cup M = Z$ es un subcontinuo de X . Además, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Así, B_1 y B_2 son subcontinuos propios de Z . Por tanto, Z es descomponible, lo que es una contradicción. Entonces, X no contiene 2-odos y por el Teorema 2.3.12, $\mathcal{C}(X)$ no contiene 2-celdas. Supongamos inductivamente que $\mathcal{C}_{n-1}(X)$ no contiene n -celdas y probemos que $\mathcal{C}_n(X)$ no contiene $(n+1)$ -celdas. Supongamos que existe una $(n+1)$ -celda \mathcal{A} , contenida en $\mathcal{C}_n(X)$. Como $\mathcal{C}_{n-1}(X)$ es un conjunto cerrado de $\mathcal{C}_n(X)$ y $\mathcal{C}_{n-1}(X)$ no contiene n -celdas, tenemos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_n(X) \setminus \mathcal{C}_{n-1}(X)$. Sea $\varphi : \mathcal{C}_n(X) \setminus \mathcal{C}_{n-1}(X) \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathcal{C}(X))$ definida por $\varphi(A) = \{A_1, \dots, A_n\}$, para cada $A \in \mathcal{C}_n(X) \setminus \mathcal{C}_{n-1}(X)$, donde A_1, \dots, A_n son las componentes de A . Por [8, Teorema 6.1.21], φ es una inmersión. Así, $\varphi(\mathcal{A})$ es una $(n+1)$ -celda tal que $\varphi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}_n(\mathcal{C}(X))$. Note que, por [10, Teorema 1.61], $\mathcal{C}(X)$ es únicamente arcoconexo. Luego, $\mathcal{C}(X)$ no contiene una curva cerrada simple. Por lo tanto, $\mathcal{F}_n(\mathcal{C}(X))$ no contiene $(n+1)$ -celdas, por el teorema 3.2.3. Lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathcal{C}_n(X)$ no contiene $(n+1)$ -celdas. \square

El siguiente teorema se sigue del Corolario 3.1.3 y del Teorema 3.2.5.

Teorema 3.2.6. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces X es un continuo hereditariamente indescomponible si y sólo si $\mathcal{C}_n(X)$ no contiene $(n+1)$ -celdas.*

Bibliografía

- [1] J. Camargo, D. Herrera and S. Macías, *Cells and n -fold hyperspaces*, por aparecer Colloquium Mathematicum.
- [2] D. Curtis and N. T. Nhu, *Hyperspaces of Finite Subsets Which are Homeomorphic to \mathcal{N}_0 -dimensional Linear Metric Space*, Topology Appl., 19 (1985), 251-260.
- [3] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.
- [4] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1948.
- [5] A. Illanes, *Cells and cubes in hyperspaces*, Fund. Math. 130 (1988) 57-65.
- [6] A. Illanes, S.B. Nadler Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, New York 1999.
- [7] K. Kuratowski, *Topology*, Vol II, Academic Press, New York, N. Y., 1968.
- [8] S. Macías, *Topics on Continua, Pure and Applied Mathematics Series*, Vol. 275, Chapman and Hall/CRC, Taylor and Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.
- [9] S.B. Nadler Jr., *Continuum Theory, An Introduction, Pure and Applied Mathematics*, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [10] S.B. Nadler Jr., *Hyperspaces of Sets. A Text with Research Questions*, Vol. 158, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2006.
- [11] P. Pellicer-Covarrubias, *Cells in hyperspaces*, Topology Appl. 154 (2007) 1002-1007.
- [12] J. T. Rogers, Jr., *Dimension of hyperspaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sèr. Sci. Math. Astronom. Phys., 20 (1972), 177-179.
- [13] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1942.
- [14] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1970.