

LA CONEXIDAD Y EL AXIOMA DE
COMPLETITUD EN UN CONJUNTO K
DENSO, SIN ELEMENTOS PRIMERO Y
ÚLTIMO

FREDDY CONTRERAS MORENO

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Bucaramanga

2005

LA CONEXIDAD Y EL AXIOMA DE
COMPLETITUD EN UN CONJUNTO K
DENSO, SIN ELEMENTOS PRIMERO Y
ÚLTIMO

FREDDY CONTRERAS MORENO

Trabajo de grado presentado como
requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Directora
SONIA MARLENI SABOGAL P.

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga

2005

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

A Dios por ser mi amigo, mi guía, la luz y el camino para poder culminar esta etapa de mi vida.

A mi hija Maira Alejandra.

A mi padre Ramón y familia por su apoyo incondicional.

A mi tía Margarita y a mi abuela Eva por ser mi apoyo moral y económico.

A la Dra. Sonia Marleni Sabogal por su valiosa orientación, colaboración, paciencia y lo más importante su amistad.

A mi esposa Xiomara por su comprensión.

A mis amigos de la carrera que me acompañaron en los momentos más difíciles, por brindarme su amistad y colaboración, en especial a Tilson, Martha, Deyanira, Diana, Beatriz, John, Tatiana y a todos aquellos que hicieron posible mi formación profesional.

TITLE: CONEXITY AND AXIOMA OF COMPLETENESS IN A DENSE K GROUP, WITHOUT ELEMENTS FIRST AND LAST*

AUTHOR: FREDDY CONTRERAS MORENO**

KEY WORDS: Mathematics, ordered field, density, completeness, isomorphisms, topology of order, conexity.

DESCRIPTION

In this work it is pretended to analyzed the theme of the article Conexity and axioma of completeness of a dense k group, without elements first and last, published by Revista Integración Vol 9, N° 2 in 1991 written by Rafael Ahumada, based on the articles: conexity and axioma of completeness published by Revista Boletín de Matemáticas, Vol XX N° 2 in 1986 written by Yu Takeuchi and the article Conexity and axioma of completeness published by Revista Boletín de Matemáticas Vol XXI N° 1 in 1987, written by Rafael Ahumada.

This work includes three chapters: The first one (preliminaries) the reader will find basic theoretical fundamentation for the following chapters. In the second one (equivalent forms of the axioma of completeness), it is presented nine equivalent forms of the axioma of completeness in an ordered field K , doing an analysis of this propositions and adding details which not appear in the demonstrations. Finally, in the third one (conexity and axioma of completeness depending only on the order), it is proved that equivalency between axioma of completeness and conexity is independent from operations and only depends on the order, adding other hypothesis related to order as density and absence of maximum and minimum elements. In the analyzing process of the article "Conexity" and the axioma of completeness, it was rectified some mistakes of "mechanographic type", it was carrying out some demonstrations which not appear there and the results are illustrated with different examples.

*Thesis

** FACULTY OF SCIENCES, LICENTIATE IN MATHEMATICS.
DIRECTORA SONIA MARLENI SABOGAL P..

TITULO: LA CONEXIDAD Y EL AXIOMA DE COMPLETITUD EN UN CONJUNTO K DENSO, SIN ELEMENTOS PRIMERO Y ÚLTIMO*

AUTOR: FREDDY CONTRERAS MORENO**

PALABRAS CLAVES: Matemáticas, campos ordenados, densidad, completitud, isomorfismos, topología de orden, relaciones, conexidad.

DESCRIPCIÓN

En este trabajo de monografía se ha querido analizar el tema del artículo *La conexidad y el axioma de completitud en un conjunto K denso, sin elementos primero y último*, publicado en la revista Integración. Vol 9, No 2 en el año de 1991 por Rafael Ahumada, basado en los artículos: *La conexidad y el axioma de completitud* publicado en la revista Boletín de Matemáticas. Vol XX. No 2, en el año de 1986 por Yu Takeuchi y el artículo *La conexidad y el axioma de completitud* publicado en la revista Boletín de Matemáticas. Vol.XXI. No 1 en el año de 1987, por Rafael Ahumada.

El trabajo consta de tres capítulos. En el primero (*Preliminares*) el lector encontrará fundamentación teórica básica para los siguientes capítulos. En el segundo capítulo (*Formas equivalentes del axioma de completitud*), se presentan nueve formas equivalentes del axioma de completitud en un campo ordenado K , haciendo un análisis de estas proposiciones y agregando detalles que no aparecen en las demostraciones. Finalmente en el tercer capítulo (*La conexidad y el axioma de completitud dependiendo únicamente del orden*), se prueba que la equivalencia entre el axioma de completitud y la conexidad es independiente de las operaciones y solo depende del orden, agregando otras hipótesis relativas al orden como densidad y ausencia de elementos máximo y mínimo. En el proceso del análisis del artículo "La conexidad" y el axioma de completitud, se corrigieron algunos errores de tipo "mecanográfico", se realizaron algunas demostraciones que allí no aparecen y se ilustran los resultados con diversos ejemplos.

* Monografía

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTORA SONIA MARLENI SABOGAL P..

Contenido

1. PRELIMINARES	1
1.1. Relaciones de orden en un conjunto	1
1.2. El axioma de completitud	7
1.3. Topología	16
2. FORMAS EQUIVALENTES DEL AXIOMA DE COMPLETITUD	20
3. LA CONEXIDAD Y EL AXIOMA DE COMPLETITUD, DEPEN- DIENDO ÚNICAMENTE DEL ORDEN	34
Bibliografía	50

Introducción

La forma más usada del axioma de completitud en los textos clásicos de análisis real, es aquella en la que se afirma que todo subconjunto de \mathbb{R} , no vacío y acotado superiormente, admite supremo. Sin embargo existen al menos diez formas equivalentes de enunciar este axioma, lo que quizá es un hecho poco conocido.

Varias de estas formas equivalentes tienen “nombre propio” como el *Teorema de Bolzano-Weierstrass*, el *Teorema del encaje de Cantor* o el *Teorema de Heine-Borel*, entre otros, pero en general no se hace énfasis en su equivalencia con el axioma de completitud. En este trabajo de monografía se exhiben (con base en [1], [2] y [11]) algunas equivalencias del axioma de completitud en un campo ordenado K . Además se presenta otra equivalencia con la conexidad en el contexto de los conjuntos totalmente ordenados y bajo algunas hipótesis adicionales relativas al orden.

El trabajo consta de tres capítulos. En el primero (*Preliminares*) el lector encontrará fundamentación teórica básica para los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo (*Formas equivalentes del axioma de completitud*), se presentan nueve formas equivalentes del axioma de completitud en un campo ordenado K , haciendo un análisis de estas proposiciones y agregando detalles que no aparecen en las demostraciones que se encuentran en [11] y [1].

Finalmente en el tercer capítulo (*La conexidad y el axioma de completitud dependiendo únicamente del orden*), se prueba que la equivalencia entre el axioma de completitud y la conexidad es independiente de las operaciones y solo depende del orden, agregando

otras hipótesis relativas al orden como densidad y ausencia de elementos máximo y mínimo. En el proceso del análisis del artículo [2], se corrigieron algunos errores de tipo “mecanográfico”, se realizaron algunas demostraciones que allí no aparecen y se ilustran los resultados con diversos ejemplos.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo se recopilan los conceptos y resultados que se usarán en los siguientes capítulos. Estos conceptos teóricos se han clasificados en tres secciones: la correspondiente a la teoría de orden en un conjunto, una segunda sección donde se resumen los aspectos más importantes del axioma de completitud y algunas propiedades derivadas de este axioma, y finalmente aparecen algunas nociones básicas de la topología.

1.1. Relaciones de orden en un conjunto

Definición 1.1 (Relación binaria). Sean K y F dos conjuntos, una **relación binaria** de K en F es un subconjunto R de $K \times F$. Si la pareja (x, y) está en R se escribe xRy . Si $K = F$ entonces se dice que R es una relación en K .

Definición 1.2. El conjunto de las parejas (x, y) tales que xRy , es un subconjunto de $K \times F$, y se llama **grafo** de la relación R .

Definición 1.3 (Relaciones reflexivas). Una relación binaria definida en un conjunto es **reflexiva**, si cualquiera que sea el elemento x del conjunto, la pareja (x, x) verifica la relación.

Simbólicamente: sea K un conjunto y R una relación en K , entonces R es reflexiva si y sólo si: $(\forall x \in K)(xRx)$.

Ejemplo 1.1.

(a) Sea $K = \mathbb{N}$ y R la relación en K , " $x = y$ ", entonces R es reflexiva.

(b) Sea $K = \mathbb{N}$ y R la relación "tiene por cuadrado a". R no es reflexiva porque las únicas parejas de la forma (x, x) son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Definición 1.4 (Relaciones simétricas). Una relación binaria definida en un conjunto K es **simétrica**, si cualquiera que sea la pareja (x, y) que verifica la relación, se tiene que la pareja (y, x) también la verifica.

Simbólicamente: sea K un conjunto y R una relación en K , entonces R es simétrica si y sólo si:

$$(\forall x, y \in K)(xRy \Rightarrow yRx).$$

Ejemplo 1.2.

(a) En \mathbb{R} la relación " $x = y$ ", es simétrica.

(b) En \mathbb{R} la relación "ser el doble de", no es simétrica por que la pareja $(6, 3)$ la verifica, pero $(3, 6)$ no.

Definición 1.5 (Relaciones transitivas). Una relación binaria definida en un conjunto es **transitiva**, si cualquiera que sean las parejas (x, y) y (y, z) que verifican la relación, entonces la pareja (x, z) también la verifica.

Simbólicamente: sea K un conjunto y R una relación en K , entonces R es transitiva si y sólo si:

$$(\forall x, y, z \in K)(xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz).$$

Ejemplo 1.3.

- (a) Si X es un conjunto, la relación “ser subconjunto”, es transitiva en $\mathcal{P}(X)$.
- (b) Si X es un conjunto, la relación “=” es transitiva en X .
- (c) En \mathbb{N} la relación “<” es transitiva.

Definición 1.6 (Relaciones antisimétricas). Una relación binaria definida en un conjunto es **antisimétrica**, si cada vez que una pareja (x, y) y su transpuesta (y, x) verifican simultáneamente la relación, entonces $x = y$. Simbólicamente: sea K un conjunto y R una relación en K , entonces R es antisimétrica si y sólo si:

$$(\forall x, y \in A)(xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y).$$

Ejemplo 1.4.

- (a) En \mathbb{N} la relación “divide a” es antisimétrica.
- (b) Si X es un conjunto, entonces en $\mathcal{P}(X)$ la relaciones de contención e igualdad son antisimétricas.

Definición 1.7 (Relación de equivalencia). Una relación binaria definida en un conjunto $K \neq \emptyset$ es una relación de equivalencia, si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 1.5.

- (a) En todo conjunto no vacío, la igualdad entre los elementos del conjunto es una relación de equivalencia.
- (b) La relación de paralelismo (\parallel) es una relación de equivalencia en el conjunto de rectas en el plano.

Relaciones de orden en un conjunto

La definición de orden formaliza las nociones de prioridad, anterioridad, superioridad, etc.

Axioma 1.1 (Axioma del buen orden). *Todo subconjunto no vacío de \mathbb{N} tiene un primer elemento.*

Definición 1.8. Una relación binaria definida en un conjunto $K \neq \emptyset$ es una relación de **preorden**, si es reflexiva y transitiva.

En particular se tiene que toda relación de equivalencia es una relación de preorden.

Definición 1.9. Un conjunto en el cual se ha definido una relación binaria de preorden se llama **preordenado** por dicha relación.

Una relación tiene dos tipos de representaciones: cartesiana (figura 1 y 3) y mediante un grafo (figura 2 y 4).

Ejemplo 1.6. Las relaciones cuyos grafos están dados por las **figuras** 1, 2, 3 y 4 definen relaciones antisimétricas.

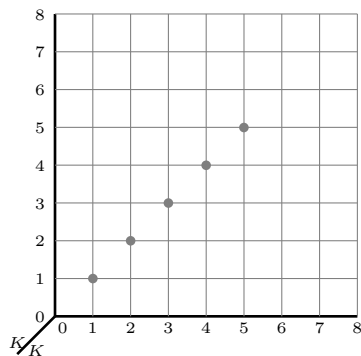


Figura 1.

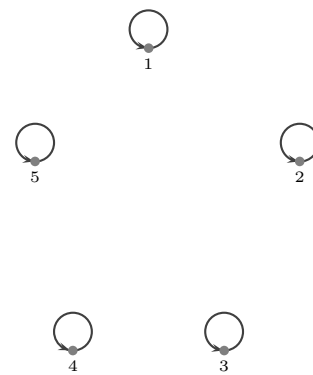


Figura 2.

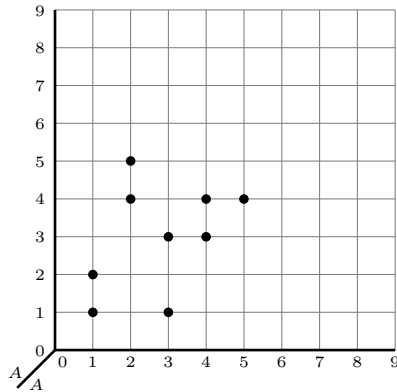


Figura 3.

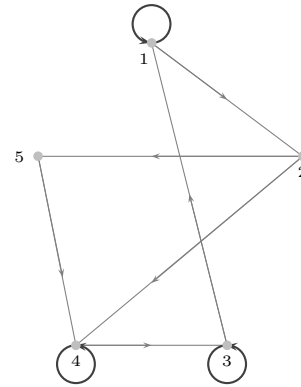


Figura 4.

Definición 1.10. Una relación binaria definida en un conjunto K es una relación de **orden** en K , cuando la relación es reflexiva, transitiva y antisimétrica; se representa por $x \preceq y$. Además, si \preceq es un orden en K , se puede definir \prec por:

$$\forall x, y \in K, \quad x \prec y \text{ si y sólo si } (x \preceq y \wedge x \neq y).$$

Un conjunto dotado de una relación de orden se llama **conjunto ordenado**.

Dada una relación de orden \prec , se puede definir otra relación de orden que se llama la opuesta y se representa por \succ , de la siguiente manera: $x \prec y$ si, y sólo si, $y \succ x$.

Definición 1.11. Sea K un conjunto dotado de una relación de orden \prec . Se dice que dos elementos x y y de K son **comparables por medio de dicha relación** si se tiene que $x \prec y$ ó $y \prec x$.

Definición 1.12. Se dice que una relación de orden sobre un conjunto K es una relación de **ORDEN TOTAL**, si dos elementos cualesquiera de K son comparables por esa relación. En tal caso se dice que K está **totalmente ordenado**.

Ejemplo 1.7.

- (a) En los números racionales, se tiene que la relación \leq determina un conjunto totalmente ordenado.
- (b) En \mathbb{N} se tiene que la relación “divide a” no constituye un orden total. Por ejemplo, 2 y 5 no son comparables.

Ejemplo 1.8. La representación cartesiana de la **figura 5** y el grafo de la **figura 6** son totalmente ordenados.

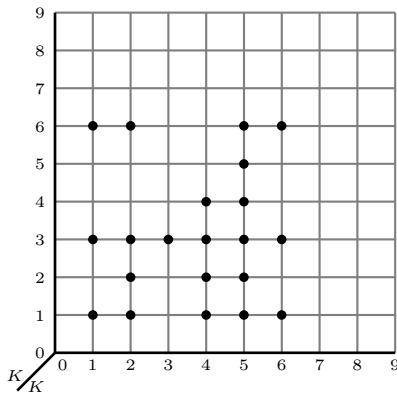


Figura 5.

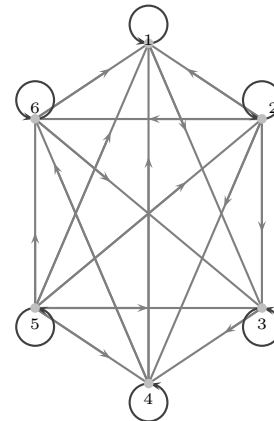


Figura 6.

Ejemplo 1.9. la representación cartesiana de las **figuras 7 y 9** y los grafos de las **figuras 8 y 10** son parcialmente ordenados.

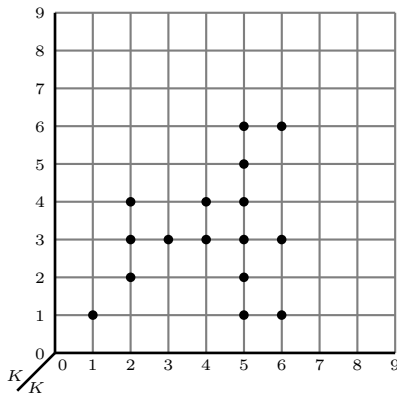


Figura 7

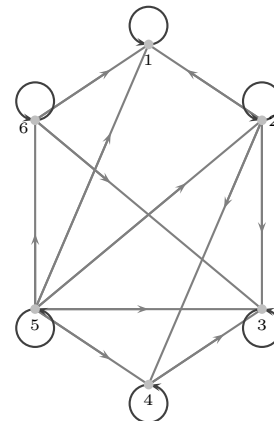


Figura 8

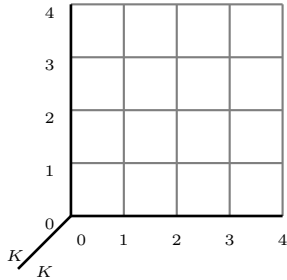


Figura 9

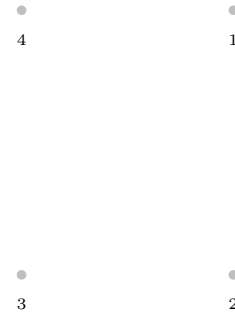


Figura 10

Definición 1.13. Sea K un conjunto no vacío y \preceq es un orden total sobre K . Dados dos elementos a y b en K , existen cuatro subconjuntos de K que se denominan **intervalos** determinados por a y b . Son los siguientes:

1. $(a, b) = \{x \in K \mid a \prec x \prec b\}$;
2. $[a, b) = \{x \in K \mid a \preceq x \prec b\}$;
3. $(a, b] = \{x \in K \mid a \prec x \preceq b\}$;
4. $[a, b] = \{x \in K \mid a \preceq x \preceq b\}$.

1.2. El axioma de completitud

Definición 1.14. Un conjunto no vacío de elementos de K se dice que forma un **grupo** si en K está definida una operación binaria llamada producto denotada por (\cdot) tal que:

- 1) $a, b \in K$ implica que $a \cdot b \in K$ (ley clausurativa).
- 2) $a, b, c \in K$ implica que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (ley asociativa).

- 3) Existe un elemento $e \in K$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in K$ (existencia de un elemento identidad en K).
- 4) Para todo $a \in K$ existe un elemento $a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (existencia de inversos en K).

Definición 1.15. Un grupo K se dice que es **abeliano (o conmutativo)** si para cualesquiera $a, b \in k$ se tiene: $a \cdot b = b \cdot a$.

Definición 1.16. Un conjunto no vacío K se dice que es un anillo asociativo si en K están definidas dos operaciones, denotadas por “+” y “·” respectivamente tales que para cualesquiera $a, b, c \in K$:

- 1) $a + b$ está en K .
- 2) $a + b = b + a$.
- 3) $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- 4) Hay un elemento 0 en K tal que $a + 0 = a$ (para todo $a \in K$).
- 5) Existe un elemento $-a \in K$ tal que $a + (-a) = 0$.
- 6) $a \cdot b$ está en K .
- 7) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- 8) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (las dos leyes distributivas).

Definición 1.17. Sea $(K, +, \cdot)$ un anillo. Diremos que $(K, +, \cdot)$ es un **cuerpo** si para todo $a \in K$ con $a \neq 0$, existe a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, y diremos que $(K, +, \cdot)$ es un **campo** si es un cuerpo y la multiplicación es conmutativa.

Proposición 1.1. *Sea K un campo. Entonces las siguientes condiciones 1 y 2 son equivalentes:*

1. *Existe $P \subseteq K$ que cumple las siguientes propiedades:*

i) Dado $x \in K$ se tiene que $x \in P$ o $x = 0$ o $-x \in P$, estas tres posibilidades son mutuamente excluyentes. En otras palabras, K es la unión disyunta de P , $\{0\}$, y $-P$, donde $-P = \{-x \mid x \in P\}$.

ii) Si $x, y \in P$ entonces $x + y \in P$ y $x \cdot y \in P$.

2. Existe el orden total en $K \leq$, tal que para todo $a, b, c \in K$, $a \leq b$ implica:

$$(\alpha) \quad a + c \leq b + c.$$

$$(\beta) \quad ac \leq bc \text{ si } c \geq 0.$$

$$(\gamma) \quad bc \leq ac \text{ si } c \leq 0.$$

Demostración.

1 \implies 2) Definamos en K : $a \leq b \iff a = b \vee b - a \in P$. Veamos que \leq es un orden.

Reflexiva: si $a \in K$ es claro que $a = a \implies a \leq a$.

Antisimétrica: si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $(a = b \vee b - a \in P) \wedge (b = a \vee a - b \in P)$.

- Si $a = b$ y $b = a$ entonces $a = b$.
- Si $a = b$ y $a - b \in P \implies a - b = 0$ y $a - b \in P$ lo que contradice *i)* luego este caso no es posible.
- Si $b - a \in P$ y $b = a$, análogo al caso anterior.
- Si $b - a \in P$ y $a - b \in P \implies b - a \in P$ y $-(b - a) \in P$ nuevamente se contradice *i)*, luego este caso tampoco es posible.

Transitiva: si $a \leq b$ y $b \leq c \implies (a = b \vee b - a \in P) \wedge (b = c \vee c - b \in P)$.

- Si $a = b$ y $b = c \implies a = c \implies a \leq c$.
- Si $a = b$ y $c - b \in P \implies c - b = c - a \implies c - a \in P \implies a \leq c$.
- Si $b - a \in P$ y $b = c \implies b - a = c - a \in P \implies a \leq c$.
- Si $b - a \in P$ y $c - b \in P \implies (b - a) + (c - b) \in P$ (por *ii)*) entonces $c - a \in P \implies a \leq c$.

Ahora veamos que \leq es un orden total.

Sean $a, b \in K$. Como $a - b \in K$, usando *i)* se debe tener que $a - b \in P$, o $a - b = 0$, o

$-(a - b) \in P$:

- Si $a - b \in P$ entonces $b \leq a$.
- Si $a - b = 0$ entonces $a = b$ luego $b \leq a$.
- Si $-(a - b) \in P$ entonces $b - a \in P$ de modo que $a \leq b$.

Supongamos ahora $a \leq b \implies a = b \vee b - a \in P$.

Si $a = b \implies a + c = b + c \implies a + c \leq b + c$ y se cumple (α) .

Sea $c \geq 0$, como $a = b \implies ac = bc \implies ac \leq bc$ y se cumple (β) .

Sea $c \leq 0$, como $a = b \implies ac = bc \implies bc \leq ac$ y se cumple (γ) .

Si $b - a \in P \implies (b + c) - (a + c) = b + c - a - c = b - a \in P \implies a + c \leq b + c$.

Sea $c \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq c \implies c = 0$ o $c - 0 = c \in P$.

Si $c = 0 \implies c(b - a) = 0 \implies bc - ac = 0 \implies bc = ac \implies ac \leq bc$.

Si $c \in P \implies c(b - a) \in P$ (por (ii)) $\implies (bc - ac) \in P \implies ac \leq bc$.

Sea $c \leq 0 \implies c = 0$ o $0 - c = -c \in P$.

Si $c = 0 \implies c(b - a) = 0 \implies bc = ac \implies bc \leq ac$.

Si $-c \in P \implies (-c)(b - a) \in P$ (por (ii)) $\implies (-bc + ac) \in P \implies (ac - bc) \in P \implies bc \leq ac$. Y se cumple (γ) .

Ahora demostremos que **2** \implies **1**). Sea:

$$P =: \{x \in K \mid 0 \leq x, \wedge, x \neq 0\} = \{x \in K \mid 0 < x\},$$

claramente $P \subseteq K$. Veamos que P cumple las propiedades $i)$ y $ii)$.

$i)$ Sea $x \in K$, como \leq es un orden total, entonces $x \leq 0$ o $0 \leq x$

- Si $x \leq 0$ entonces usando (α) se tiene que $x + (-x) \leq 0 + (-x)$ luego $0 \leq -x$ entonces $0 = -x$ o $0 < -x$. Si $0 = -x$ entonces $x + 0 = x + (-x) \implies x = 0$, y si $0 < -x \implies -x \in P$.

- Si $0 \leq x$ entonces $0 = x$ o $0 < x$, es decir $x = 0 \vee x \in P$.

Ahora veamos que las tres posibilidades $x \in P, x = 0$ y $-x \in P$, son mutuamente excluyentes.

Supongamos que $x \in P$ y $x = 0$ entonces $0 < x$ y $x = 0$ y se tiene que $x \neq 0$ y $x = 0$ lo

cual es absurdo.

Supongamos ahora que $x \in P$ y que $-x \in P$, entonces $0 < x$ y $0 < -x$ entonces $0 \leq x$ y $0 \leq -x$, luego por (α) se tiene que $x + 0 \leq x + (-x)$ luego $0 \leq x$ y $x \leq 0$, y por ser \leq antisimétrica se tiene que $x = 0$, pero $0 < x$ implica $0 \neq x$.

Finalmente supongamos que $x = 0$ y que $-x \in P$, entonces $x = 0$ y $x < 0$ de modo que $x = 0$ y $x \neq 0$ lo cual es absurdo.

ii) Sean $x, y \in P$, veamos que $x + y \in P$ y que $xy \in P$. Tenemos que $0 < x$ y que $0 < y$ entonces $0 \leq x$ y por tanto de (α) se sigue que $0 + y \leq x + y$ entonces $y \leq x + y$ y $0 \leq y$ luego $0 \leq x + y$. Si fuera $0 = x + y$ se tendría que $y = -x$ y por tanto $0 < -x$ y $0 < x$, lo cual, como ya se vio en $i)$ es imposible. Luego se tiene que $0 < x + y$ y por consiguiente $x + y \in P$.

Por otro lado, $0 \leq x$ y $0 \leq y$ entonces $0 \cdot y \leq x \cdot y$ por tanto $0 \leq x \cdot y$. Si fuera $0 = x \cdot y$ entonces como K es campo se tiene que $x = 0$ o $y = 0$, lo que contradice que $0 < x$ y $0 < y$. Así, $0 < x \cdot y$, en consecuencia $x \cdot y \in P$. \square

Definición 1.18. Sea K un campo. Diremos que K es un **campo ordenado** si, y sólo si, K cumple alguna de las afirmaciones (**1** o **2**) de la proposición anterior.

Proposición 1.2. Si K es un campo ordenado entonces para cualesquiera $a, b \in K$ con $a \neq b$, se tiene que $a < b$ ó $b < a$, y estas dos posibilidades son mutuamente excluyentes.

Demostración. Sabemos que al definir $P =: \{x \in K \mid 0 < x\}$ entonces para cualquier $y \in K$ se tiene que $y \in P$ o $y = 0$ o $-y \in P$ y estas tres posibilidades son mutuamente excluyentes. Consideremos entonces $b - a \in K$, como $a \neq b$ entonces $b - a \neq 0$, luego $b - a \in P$ ó $-(b - a) \in P$, por tanto $0 < b - a$ ó $0 < a - b$, luego $a < b$ ó $b < a$. \square

Proposición 1.3. Sean K un campo ordenado y $a \in K$. Si $0 < a$ entonces $-a < 0$.

Demostración. Si $0 < a \implies 0 \leq a \implies 0 + (-a) \leq a + (-a) \implies -a \leq 0 \implies -a = 0 \vee -a < 0$. Si $-a = 0 \implies a = 0$ lo cual contradice la hipótesis, así $-a < 0$. \square

Corolario 1.1. *El conjunto de los números complejos \mathbb{C} no es un campo ordenado.*

Demostración. Supongamos que \mathbb{C} es un campo ordenado y consideremos $i, 0 \in \mathbb{C}$. Claramente $i \neq 0 \implies i < 0$ ó $0 < i$ (Proposición 1.2);

Si $i < 0 \implies i \leq 0 \implies i \cdot i \geq 0 \cdot i \implies i^2 \geq 0 \implies -1 \geq 0 \implies -1 > 0 \implies 0 > 1 \implies 0 \cdot i < i \cdot 1 \implies 0 < i$. Lo cual contradice la Proposición 1.2.

Si $0 < i \implies 0 \cdot i < i \cdot i \implies 0 < i^2 \implies 0 < -1 \implies 1 < 0 \implies i \cdot 1 < 0 \cdot i \implies i < 0$. Lo cual contradice nuevamente la Proposición 1.2. \square

La estructura de orden nos permite definir en K el valor absoluto en la forma usual y en consecuencia conceptos topológicos tales como "conjuntos abiertos", "conjuntos cerrados", "conjuntos compactos", "puntos de acumulación", "convergencia de sucesiones", etcetera. como se verá en la sección 1.3.

Definición 1.19. Sea K un campo. Se define la **característica** de K , como el menor entero positivo n tal que $n \cdot 1 = 0$. Si tal entero no existe, se dice que K es de **característica cero**.

Proposición 1.4. *Si K es un campo ordenado, entonces K es de característica cero.*

Demostración. Como $0 \neq 1$ entonces $0 < 1$, ó $1 < 0$. Si fuese $1 < 0$ entonces $0 \cdot 1 < 1 \cdot 1$ de donde $0 < 1$ lo cual contradice la Proposición 1.2. Así, se tiene que $0 < 1$ entonces $0 + 1 < 1 + 1 \implies 1 < 1 + 1 \implies 1 + 1 < 1 + 1 + 1 \implies 1 + 1 + 1 < 1 + 1 + 1 + 1$, y así sucesivamente, de esta forma obtenemos: $0 < 1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 < \dots$, luego para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que $n \cdot 1 \neq 0$ lo cual implica que K es de característica cero. \square

Corolario 1.2. *Sea K un campo ordenado. Entonces K contiene un subconjunto isomorfo al conjunto de los números naturales \mathbb{N} (y por tanto K es infinito).*

Demostración. Sea K un campo ordenado y sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow K$ definida por $f(n) =: n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-veces}}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que f es uno a uno: si $f(n) = f(m)$ entonces $n \cdot 1 = m \cdot 1$ (podemos asumir sin pérdida de generalidad que $n \geq m$), entonces $n \cdot 1 - m \cdot 1 = 0$ de donde $(n - m) \cdot 1 = 0$ y puesto que K es de característica cero (Proposición 1.4), entonces se debe tener que $n - m = 0$, luego $n = m$. De esta forma tenemos que $f(\mathbb{N})$ es un subconjunto de K , isomorfo (equipotente) a \mathbb{N} . \square

De manera más informal, se puede decir que K contiene una "copia" de \mathbb{N} . Identificando $f(n) = n \cdot 1$ con n , notaremos, como es usual, $\frac{1}{n}$ el inverso de n en K y $\frac{m}{n}$ el producto entre m y $\frac{1}{n}$ en K .

Corolario 1.3. *Todo campo ordenado contiene a \mathbb{Q} .*

Demostración. En efecto por el Corolario 1.2 tenemos que $\mathbb{N} \subseteq K$, entonces $\mathbb{Z} \subseteq K$ ya que si $n \in K$ entonces $-n \in K$.

Si $m \in \mathbb{Z}^*$ entonces $m \in K$, por tanto $\frac{1}{m} \in K$, entonces $\frac{n}{m} = n \cdot \frac{1}{m} \in K$ entonces $\mathbb{Q} \subseteq K$. \square

Corolario 1.4. *Si p es primo, \mathbb{Z}_p no es un campo ordenado.*

Demostración. Si \mathbb{Z}_p fuera un campo ordenado debería contener una copia de los naturales (Corolario 1.2), pero \mathbb{Z}_p es finito, luego \mathbb{Z}_p no es un campo ordenado. \square

Definición 1.20. Sea (K, \leq) un conjunto parcialmente ordenado y A un subconjunto de K . Una **cota inferior** de A es cualquier elemento x de K tal que para todo $a \in A$ se cumple que $x \leq a$. Si existen cotas inferiores de A se dice que A está **acotado inferiormente**. Análogamente, una **cota superior** de A es cualquier elemento x de K tal que para todo $a \in A$ se cumple que $a \leq x$. Si existen cotas superiores de A se dice que A está **acotado superiormente**.

Definición 1.21. Sea (K, \leq) un conjunto parcialmente ordenado y A un subconjunto de K .

- i) Si A está acotado por arriba, entonces se dice que una cota superior u es el supremo (o mínima cota superior) de A si ningún número menor que u es cota superior de A y se denota $\sup A$.
- ii) Si A está acotado por abajo, entonces se dice que una cota inferior v es el ínfimo (o máxima cota inferior) de A si ningún número mayor que v es cota inferior de A y se denota $\inf A$.

Definición 1.22. Sea (K, \leq) un conjunto parcialmente ordenado y A un subconjunto de K , un elemento a de A se dice **mínimo** en A y se escribe $a = \text{mín } A$, si $a \leq x$ para cualquier $x \in A$. Simbólicamente $a = \text{mín } A$ si y sólo si $(a \in A) \wedge (\forall x \in A : a \leq x)$. Análogamente se dice que a es **máximo** en A y se escribe $a = \text{máx } A$ si $x \leq a$ para cualquier elemento $x \in A$. Simbólicamente $a = \text{máx } A$ si y sólo si $(a \in A)$ y $(\forall x \in A : x \leq a)$.

Si existe el mínimo de un conjunto K , es único al igual que el máximo.

Ahora enunciaremos el axioma de completitud en un conjunto K ordenado que en la mayoría de los libros de análisis real aparece como axioma de completitud de \mathbb{R} y es por ello que se dice que \mathbb{R} es un campo ordenado:

Axioma 1.2 (Axioma de completitud). *Si K es un conjunto ordenado y A es un subconjunto de K no vacío acotado superiormente, entonces el conjunto de cotas superiores de A posee mínimo.*

Lema 1.1. *Sea K un campo totalmente ordenado y $S \subseteq K$. Si S posee un mínimo m , entonces $S^- = \{x \in K \mid -x \in S\}$ posee máximo; más aún, $\text{máx } S^- = -m$.*

La demostración de estas y otras propiedades se encuentran en [7].

Teorema 1.1. *Sea K un conjunto totalmente ordenado que satisface el axioma de completitud y $A \subseteq K$. Si A está acotado inferiormente, entonces el conjunto de sus cotas inferiores posee necesariamente un máximo.*

Teorema 1.2. (*Propiedad de aproximación*). Sea K un conjunto totalmente ordenado y S un subconjunto de K no vacío que posee supremo b . Entonces, para todo $x \prec b$ existe un $y \in S$ tal que $x < y \leq b$.

Teorema 1.3. Para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathbb{N}n = \{mn \mid m \in \mathbb{N}\}$ está bien ordenado por la relación “ $<$ ”.

Teorema 1.4. \mathbb{Z} no es acotado.

Definición 1.23. Sea K un campo ordenado y $x \in K$. Se define el *valor absoluto* de x , notado $|x|$ como sigue:

$$|x| =: \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0. \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Teorema 1.5. Si K un campo ordenado y $x \in K$ entonces:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

La demostración aparece en [3].

Definición 1.24. Una **sucesión** en un conjunto K es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y cuyo codominio esta contenido en K .

Para una sucesión $x : \mathbb{N} \rightarrow K$, es común denotar la imagen de $n \in \mathbb{N}$ por x_n en lugar de $x(n)$, y este valor suele llamarse el **término n -ésimo** de la sucesión. Además la sucesión x se denota $x = (x_n)$.

Definición 1.25. Sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de K . Se dice que x es **creciente** si para cualesquiera n y m en \mathbb{N} con $n < m$ se tiene que $x_n \leq x_m$. Si $x_n \geq x_m$, se dice que x es **decreciente**. Se dice que X es **monótona** si es creciente ó decreciente.

Definición 1.26. Sea K un campo ordenado y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en K . Diremos que la sucesión $(x_n)_n$ es **convergente** en K si existe un $x \in K$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq N$.

Definición 1.27. Sea K un campo ordenado y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en K . Diremos que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$, tal que, si $m, n \geq N$ entonces

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

1.3. Topología

En esta sección se precisan algunas nociones básicas de topología, que se usaran más adelante.

Definición 1.28. Sea K un conjunto no vacío, Una **topología** sobre el conjunto K es una colección τ de subconjuntos de K , llamados **conjuntos abiertos**, los cuales satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in \tau$ y $K \in \tau$.
2. Si $A \in \tau$ y $B \in \tau$ entonces $A \cap B \in \tau$.
3. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de τ , entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

En este caso a la pareja (K, τ) se le llama **espacio topológico**.

Ejemplo 1.10. En todo conjunto no vacío K siempre es posible definir al menos dos topologías sobre K . La primera es el conjunto $\{\emptyset, K\}$ la cual es llamada **topología grosera o trivial** y la segunda, $\mathcal{P}(K)$ la cual es llamada **topología discreta**.

Definición 1.29. Sea (K, τ) un espacio topológico y $F \subseteq K$. Diremos que F es **cerrado** si, y sólo si, su complemento F^c es abierto.

Definición 1.30. Sea (K, τ) un espacio topológico, diremos que K es **disconexo o no conexo** si existen dos abiertos disjuntos no vacíos, cuya unión es todo K . Es decir, si

$$\exists A, B \in \tau : A \cap B = \emptyset \text{ con } A \neq \emptyset, \text{ y } B \neq \emptyset, A \cup B = K.$$

En tal caso el conjunto $\{A, B\}$ es una **disconexión** de K . Si no existe una desconexión de K , se dice que K es **conexo**.

Proposición 1.5. *Sea (K, τ) un espacio topológico, entonces K es conexo si, y sólo si, los únicos conjuntos de K que son abiertos y cerrados simultáneamente son \emptyset y K .*

Demostración. Supongamos que U es un subconjunto propio no vacío de K que es a la vez abierto y cerrado, entonces su complemento $V = K - U$ es también un subconjunto propio no vacío y abierto en K , además $U \cup V = K$ luego U y V constituyen una desconexión de K , contradiciendo el hecho de que K es conexo.

Recíprocamente si U y V forman una desconexión de K , entonces U y $V = K - U$ son abiertos, luego $K - V$ es cerrado, pero $K - V = U$ y por tanto U es un subconjunto propio de K que es a la vez abierto y cerrado en K . \square

Definición 1.31. Sea (K, τ) un espacio topológico. Una colección $\mathfrak{A} = \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ de subconjuntos de K se dice que recubre a K o que es un **recubrimiento** de K , si la unión de los elementos de \mathfrak{A} coincide con K ; es decir, si $K = \bigcup_{\alpha \in \Delta} \mathcal{A}_\alpha$. Se dice que \mathfrak{A} es un **recubrimiento abierto** de K si es un recubrimiento de K formado por subconjuntos abiertos de K .

Definición 1.32. Un espacio topológico (K, τ) se dice que es **compacto** si de cada recubrimiento abierto \mathfrak{A} de K se puede extraer una subcolección finita

$$\mathfrak{A}' = \{\mathcal{A}_{\alpha_1}, \mathcal{A}_{\alpha_2}, \dots, \mathcal{A}_{\alpha_n}\}$$

que también recubre a K .

Definición 1.33. Sean K un campo totalmente ordenado, $a \in K$ y $\varepsilon > 0$. Se define la **bola de centro a y radio ε** , notada y definida por $B_\varepsilon(a) =: \{x \in K \mid |x - a| < \varepsilon\}$. El conjunto $B_\varepsilon(a) - \{a\}$ se denomina **bola perforada** y se nota $B_\varepsilon^\circ(a)$.

Dado un campo totalmente ordenado K , es posible demostrar que la familia de subconjuntos de K que son uniones de bolas constituye una topología sobre K .

Definición 1.34. Sean K un campo totalmente ordenado, $S \subseteq K$, y $x \in K$. Se dice que x es un **punto interior** de S , si existe una bola con centro en x totalmente contenida en S . El conjunto de los puntos interiores de S se denomina **interior** de S y se denota $\text{int}(S)$ o S° . Simbólicamente se tiene:

$$x \in \text{int}(S) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq S.$$

Definición 1.35. Sean K un campo totalmente ordenado, $S \subseteq K$ y $x \in K$. Se dice que x es un **punto de adherencia** de S , si toda bola con centro en x contiene puntos de S . El conjunto de los puntos de adherencia de S se denomina **adherencia, clausura o cerradura** de S y se denota \overline{S} . Simbólicamente se tiene:

$$x \in \overline{S} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap S \neq \emptyset.$$

Una consecuencia inmediata de las definiciones de interior y adherencia de un conjunto es que $S^\circ \subseteq S \subseteq \overline{S}$.

Definición 1.36. Sean K un campo totalmente ordenado, $S \subseteq K$ y $x \in K$. Se dice que x es un **punto de acumulación** en S , si toda bola perforada con centro en x contiene puntos de S . El conjunto de los puntos de acumulación de S se denomina **derivado** de S y se denota S' . Simbólicamente se tiene:

$$x \in S' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon^\circ(x) \cap S \neq \emptyset.$$

Teorema 1.6. Sean K un campo totalmente ordenado, $S \subseteq K$ y $x \in K$. Entonces x es un punto de acumulación de S si, y sólo si, toda bola perforada con centro en x contiene una cantidad infinita de puntos de S . Simbólicamente:

$$x \in S' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : |B_\varepsilon^\circ(x) \cap S| \geq \aleph_0.$$

Demostración.

\Rightarrow) Supongamos que $|B_\varepsilon^\circ(x) \cap S| < \aleph_0$, es decir, $B_\varepsilon^\circ(x) \cap S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Ahora tomemos $\varepsilon = \min\{|x - x_1|, |x - x_2|, \dots, |x - x_n|\}$, $\varepsilon > 0$ ya que para todo $\delta > 0$ se

tiene que $x \notin B_\delta^\circ(x)$ y en consecuencia se tendrá que $B_\varepsilon^\circ(x) \cap S = \emptyset$ lo cual contradice la hipótesis y por consiguiente se concluye que $|B_\varepsilon^\circ(x) \cap S| \geq \aleph_0$.

\Leftarrow) Es inmediato: para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $\#B_\varepsilon^\circ(x) \cap S \geq \aleph_0$ entonces $B_\varepsilon^\circ(x) \cap S \neq \emptyset$ luego $x \in S'$. \square

En el siguiente teorema se da una caracterización de los abiertos de un espacio topológico.

Teorema 1.7. *Sean K un campo totalmente ordenado, $S \subseteq K$. Entonces S es **abierto** si, y sólo si, todos sus puntos son interiores, es decir si, y sólo si, $S \subseteq S^\circ$.*

Como ya se tiene que $S^\circ \subseteq S$, el teorema anterior equivale a decir que un conjunto es abierto si coincide con su interior.

Teorema 1.8. *Sean K un campo totalmente ordenado, $S \subseteq K$. Entonces S es **cerrado** si, y sólo si, contiene a todos sus puntos adherentes, es decir si, y sólo si $\overline{S} \subseteq S$.*

Como ya se tiene que $S \subseteq \overline{S}$, el teorema anterior equivale a decir que un conjunto es cerrado si coincide con su adherencia.

La demostración del siguiente teorema se encuentran en [7].

Teorema 1.9. *La intersección arbitraria de una colección de conjuntos cerrados es cerrada.*

Capítulo 2

FORMAS EQUIVALENTES DEL AXIOMA DE COMPLETITUD

En el capítulo anterior se presentó, la forma quizá la usada del axioma de completitud para un conjunto ordenado (Axioma 1.2). En el presente capítulo se considera un campo ordenado K y se presentan en forma sistemática ocho axiomas equivalentes al de completitud. Antes se deben definir algunos conceptos.

Definición 2.1. Sea K un campo ordenado. Diremos que una pareja (A, B) de subconjuntos no vacíos de K es una **cortadura** de K si:

1. $A < B$ (esto es, $a < b$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$).
2. $A \cup B = K$.

Definición 2.2. Un campo ordenado K se dice **algebraicamente completo** si no existe una extensión propia de K a otro campo ordenado donde K sea denso. Es decir no existe un campo ordenado F tal que $K \subsetneq F$ y tal que $(\forall x, y \in F)(\exists z \in K)(x < z < y)$.

La siguiente proposición es la central del presente capítulo.

Definición 2.3. Sea K un campo ordenado. Diremos que K es **arquimediano** si para cada $x \in K$ con $x > 0$, existe un número natural n tal que $x < n$.

Proposición 2.1. Sea K un campo ordenado. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Todo subconjunto de K no vacío y acotado superiormente posee extremo superior en K (axioma de completitud).
2. Toda sucesión creciente y acotada superiormente converge en K (teorema de Weierstrass).
3. Todo subconjunto infinito y acotado de K , tiene por lo menos un punto de acumulación en K (teorema de Bolzano Weierstrass).
4. Dada una sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos cerrados y acotados de K , la intersección es no vacía (teorema del encaje de Cantor).
5. Todo subconjunto cerrado y acotado de K , es compacto (teorema de Heine-Borel).
6. Si (A, B) es una cortadura de K , entonces A tiene máximo o B tiene mínimo.
7. K es arquimediano y toda sucesión de Cauchy converge en K .
8. K es arquimediano y algebraicamente completo.

La demostración de la Proposición anterior se deja para más adelante. El axioma de completitud implica las siguientes tres propiedades las cuales a su vez son equivalentes entre sí.

Proposición 2.2. Sea K un campo ordenado completo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- a) \mathbb{Q} es denso en K ; es decir, para todo $x, y \in K$ con $x < y$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$.

b) K es arquimediano.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ (en K) es decir; dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$, si $n > N_0$ (obsérvese que ϵ es cualquier elemento positivo de K).

Demostración.

a) \Rightarrow b). Sea $x \in K$, $x > 0$; por hipótesis existen $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $x < \frac{n}{k} < x + 1$, luego $x < \frac{n}{k} \leq n$ y así $x < n$.

b) \Rightarrow c). Dado $\epsilon > 0$, $\epsilon \in K$, por hipótesis existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\epsilon} < N_0$. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > N_0$ se tiene que $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} < \epsilon$ por lo tanto, $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ si $n > N_0$.

c) \Rightarrow a). Sean $x, y \in K$, supongamos que $0 \leq x < y$. Por el item c) de la Proposición 2.2 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < y - x$. Aplicando nuevamente el item c) de la Proposición 2.2 existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \frac{1}{ny}$, o sea, $y < \frac{k}{n}$. Consideremos el conjunto $I =: \{t \in \mathbb{N} \mid \frac{t}{n} > y\}$, entonces I es no vacío, pues $k \in I$. Como $I \subseteq \mathbb{N}$ y \mathbb{N} es bien ordenado sea $m = \min(I)$, como $m - 1 < m = \min(I)$ entonces $m - 1 \notin I$ así $\frac{m-1}{n} \leq y$. Luego $\frac{m-1}{n} - x = \frac{m}{n} - x - \frac{1}{n} > y - x - \frac{1}{n} > 0$, entonces $\frac{m-1}{n} - x > 0$, luego $\frac{m-1}{n} > x$, y así $x < \frac{m-1}{n} < y$.

Un resultado análogo al anterior se tiene cuando $0 \leq y < x$. Si $x < 0 < y$ claramente $0 \in \mathbb{Q}$ y se cumple la condición a). Si $x < y < 0$ entonces $0 < -y < -x$ y ya se demostró que en este caso existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $-y < q < -x$ lo que implica que $x < -q < y$, con $-q \in \mathbb{Q}$. \square

Cabe notar que estas tres últimas propiedades (Proposición 2.2) no son equivalentes al axioma de completitud para lo cual basta observar que \mathbb{Q} es arquimediano pero no satisface el axioma de completitud.

Proposición 2.3. Si K es un campo ordenado y completo entonces K es isomorfo a los reales.

Demostración. Sea K un cuerpo ordenado y completo. Denote con $0'$ y $1'$ o cero y uno de K . Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $n' = n \cdot 1' = 1' + \dots + 1'$ n -veces y $(-n)' = -n'$. Definamos una función $f : \mathbb{R} \rightarrow K$ poniendo $f(\frac{p}{q}) = \frac{p'}{q'}$ para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ y para x irracional, sea $f(x) = \sup\{\frac{p'}{q'} \in K \mid \frac{p}{q} < x\}$. Se debe ver que f es un isomorfismo de \mathbb{R} sobre K . \square

Proposición 2.4. Si K es un campo ordenado y completo entonces \mathbb{Q} es denso en K .

Demostración. Como todo cuerpo ordenado y completo es isomorfo a \mathbb{R} . Así K contiene una copia de \mathbb{Q} . Puesto que \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} y $K \approx \mathbb{R}$ entonces \mathbb{Q} es denso en K . \square

En [3] se adopta la Propiedad 1 de la Proposición 2.1 como el axioma de completitud para \mathbb{R} (pág. 11, axioma 10), y luego se demuestran solamente las siguientes implicaciones, en \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} &(\text{Prop. 2.1}(1)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.2}(b)). \\ &(\text{Prop. 2.1}(1)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.1}(3)). \\ &(\text{Prop. 2.1}(3)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.1}(4)). \\ &(\text{Prop. 2.1}(4)) \text{ y } (\text{Prop. 2.2}(a)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.1}(5)). \\ &(\text{Prop. 2.1}(3)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.1}(7)). \\ &(\text{Prop. 2.1}(1)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.1}(2)). \end{aligned}$$

Estas demostraciones se pueden generalizar fácilmente para cualquier campo K ordenado y completo.

Ahora se demostrarán las siguientes implicaciones:

$$\begin{aligned} &(\text{Prop. 2.1}(2)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.1}(1)), \quad (\text{Prop. 2.1}(7)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.1}(1)), \quad (\text{Prop. 2.1}(1)) \Rightarrow \\ &(\text{Prop. 2.1}(6)), \quad (\text{Prop. 2.1}(6)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.1}(2)), \quad (\text{Prop. 2.1}(5)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.1}(3)), \text{Prop.} \\ &2.1(3) \Rightarrow (\text{Prop. 2.1}(2)), \quad (\text{Prop. 2.1}(4)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.1}(7)), \quad (\text{Prop. 2.1}(2)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.1}(8)), \end{aligned}$$

(Prop. 2.1(8)) \Rightarrow (Prop. 2.1(1)), las cuales, junto con las implicaciones mencionadas anteriormente (que se encuentran en [3]), garantizan la equivalencia de las ocho propiedades 1-8 (Prop. 2.1) para un campo ordenado K .

(Prop. 2.1(2)) \Rightarrow (Prop. 2.1(1)): *Si toda sucesión creciente y acotada superiormente converge en K , entonces K satisface el axioma de completitud.*

Demostración. Evidentemente toda sucesión decreciente e inferiormente acotada también converge en K . Primero probaremos que K es arquimediano. Por hipótesis, la sucesión $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ que es decreciente y acotada inferiormente por 0, converge en K . Sea $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$, entonces $c \geq 0$. Si $c > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\frac{1}{n} - c| < \frac{1}{2}c$ para todo $n > N$, luego $-\frac{1}{2}c < \frac{1}{n} - c < \frac{1}{2}c$, de donde $\frac{1}{2}c < \frac{1}{n} < c + \frac{1}{2}c = \frac{3}{2}c$ para todo $n > N$. Como $4n > n > N$, se tiene que $\frac{1}{2}c < \frac{1}{4n}$, entonces $2c < \frac{1}{n}$, luego $2c < \frac{1}{n} < \frac{3}{2}c$ lo cual es absurdo. Así, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ y dado $x > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{x} \Rightarrow n > x$, de modo que K es arquimediano.

Supongamos ahora que A es un subconjunto no vacío de K , acotado superiormente; sean $x_1 \in A$ y y_1 una cota superior de A , y consideremos el punto $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$.

- Si $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$ es una cota superior de A , se hace $x_2 = x_1$, $y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1)$. Continuando con este proceso obtenemos el n -ésimo término; es decir, si $\frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$ es cota superior de A entonces hacemos $x_n = x_{n-1}$ y $y_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$ entonces $y_n - x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1}) - x_{n-1} = -\frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-1} = \frac{1}{2}(y_{n-1} - x_{n-1})$.
- Si $\frac{1}{2}(x_1 + y_1)$ no es una cota superior de A , se toman $x_2 \in A$, $x_2 > \frac{1}{2}(x_1 + y_1)$ y $y_2 = y_1$. Continuando con este proceso obtenemos el n -ésimo término; es decir, si $\frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$ no es cota superior de A entonces tomamos $x_n \in A$, $x_n > \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$ y $y_n = y_{n-1}$, entonces $-x_n < -\frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1})$ y se tiene

$$y_n - x_n = y_{n-1} - x_n < y_{n-1} - \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1}) = \frac{1}{2}y_{n-1} - \frac{1}{2}x_{n-1} = \frac{1}{2}(y_{n-1} - x_{n-1}).$$

Así obtenemos dos sucesiones monótonas $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la primera creciente y la segunda decreciente, tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$, y_n es cota superior de A y $\frac{1}{2}(y_{n-1} - x_{n-1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) (y_{n-2} - x_{n-2}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) (y_{n-3} - x_{n-3}) \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (y_1 - x_1)$, entonces

$$0 < y_n - x_n \leq \frac{1}{2}(y_{n-1} - x_{n-1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (y_1 - x_1). \quad (*)$$

Luego por hipótesis las sucesiones (x_n) , (y_n) convergen en K . Sean

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0, \quad x_0, y_0 \in K.$$

Por la propiedad arquimediana en K , se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (y_1 - x_1) = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, luego $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; así $x_0 = y_0$. Evidentemente se tiene que x_0 es una cota superior de A pues $x_0 = y_0$ y cada y_n es, por construcción, una cota superior de A . Si M es cualquier cota superior de A , como $x_0 \in A$, entonces $x_0 \leq M$, por tanto $x_0 = y_0 = \sup(A)$.

□

(Prop. 2.1(7)) \Rightarrow (Prop. 2.1(1)). Si K es arquimediano y toda sucesión de Cauchy converge en K , entonces K satisface el axioma de completitud.

Demostración. Sea A un subconjunto no vacío de K acotado superiormente. En la demostración anterior las sucesiones (x_n) y (y_n) son de Cauchy, ya que por (*) se tiene que para todo $k \geq n$, (x_n) es creciente, entonces $x_k \geq x_n$ si, y sólo si, $-x_n \geq -x_k$ si, y sólo si, $y_n - x_n \geq y_n - x_k$ entonces $0 \leq y_n - y_k \leq y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (y_1 - x_1)$, además por la propiedad Arquimediana en K se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (y_1 - x_1) = 0$.

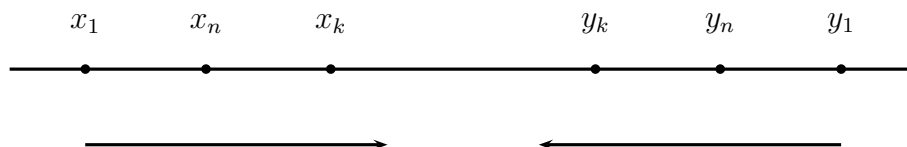


Figura 11.

Luego por hipótesis las sucesiones (x_n) y (y_n) convergen, y

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sup(A).$$

□

(Prop. 2.1(1)) \Rightarrow (Prop. 2.1(6)). Si K satisface el axioma de completitud entonces para toda cortadura (A, B) de K , A tiene máximo o B tiene mínimo.

Demostración. Por hipótesis se tiene que todo subconjunto no vacío y acotado inferiormente tiene extremo inferior. Sea (A, B) una cortadura de K ; para todo $a \in A$ y $b \in B$ tenemos que $a < b$ entonces $\sup(A) \leq b$ para todo $b \in B$ y $a \leq \inf(B)$ para todo $a \in A$, luego $\sup(A) \leq \inf(B)$. Como $A \cup B = K$ se tienen dos posibilidades:

- $\sup(A) \in A$, en este caso A tiene máximo.
- $\sup(A) \in B$, en este caso $\inf(B) \in B$, luego B tiene mínimo.

Nótese que en cualquier caso se debe tener que $\sup(A) = \inf(B)$ ya que $A \cup B = K$. □

(Prop. 2.1(6)) \Rightarrow (Prop. 2.1(2)). Si para cada cortadura (A, B) de K , A tiene máximo o B tiene mínimo, entonces toda sucesión creciente y acotada superiormente converge en K .

Demostración. Sea (a_n) una sucesión creciente y acotada superiormente. Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, a_1 es cota inferior de (a_n) , luego $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también es acotada inferiormente. Sean

$$A = \{x \in K \mid x \leq a_n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in K \mid x \leq a_n\}$$

y

$$B = \{x \in K \mid x > a_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in K \mid x > a_n\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \exists y \in K : \quad a_n \leq y \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ y < y + 1, \quad y + 1 \in K. \end{array} \right\} \Rightarrow a_n < y + 1 = x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, ya que la sucesión (a_n) es creciente y acotada. Evidentemente $A < B$ y $A \cup B = K$, luego (A, B) es una cortadura de K , entonces por hipótesis, A tiene máximo o B tiene mínimo. Supongamos que A tiene máximo M ; como $M \in A$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $M \leq a_m$. Dado $\epsilon > 0$ arbitrario, $M + \epsilon \in B$, luego $a_n < M + \epsilon$ para todo $n \geq m$, por lo tanto $M \leq a_m$ y $(n \geq m)$ entonces $a_n \geq a_m$, luego $M \leq a_n < M + \epsilon$ para todo $n \geq m$, así dado $\epsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |a_n - M| = a_n - M < \epsilon$ por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = M$.

De la misma manera se demuestra que (a_n) converge en K para el caso en que B tiene mínimo. \square

(Prop. 2.1(5)) \Rightarrow (Prop. 2.1(3)). *Si todo subconjunto cerrado y acotado de K es compacto entonces todo subconjunto infinito y acotado de K tiene un punto de acumulación en K .*

Demostración. Sea S un subconjunto infinito y acotado de K , entonces existe un intervalo

$[a, b]$ tal que $S \subseteq [a, b]$. Dado $x \in K$, si x no es punto de acumulación de S , existe una vecindad de x , digamos $V(x; \delta(x)) = (x - \delta(x), x + \delta(x))$, que contiene un número "finito" de puntos de S . Es claro que $[a, b] \subseteq K \subseteq \bigcup_{x \in K} V(x; \delta(x))$.

Por la compacidad del intervalo $[a, b]$ existen x_1, x_2, \dots, x_m tales que:

$$S \subset [a, b] \subset \bigcup_{k=1}^m V(x_k; \delta(x_k)),$$

pero esta última contención implica que S es un conjunto finito, lo cual es una contradicción. \square

(Prop. 2.1(3)) \Rightarrow (Prop. 2.1(2)). *Si todo subconjunto infinito y acotado de K tiene por lo menos un punto de acumulación en K , entonces toda sucesión creciente y acotada superiormente converge en K .*

Demostración. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente y acotada superiormente. Si el conjunto

$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es finito entonces la sucesión es “constante” a partir de algún término y por tanto converge.

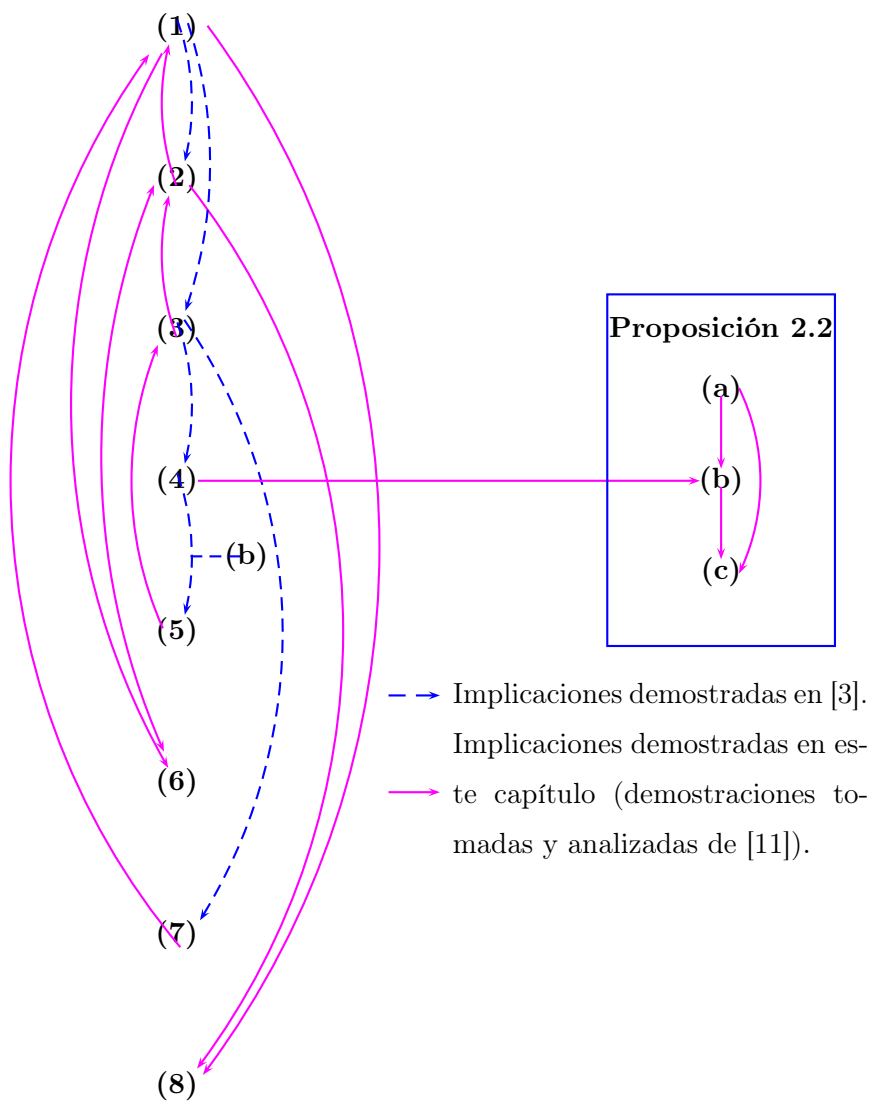
Si el conjunto $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito, entonces por hipótesis A tiene por lo menos un punto de acumulación, el cual, es evidentemente el límite de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

En el siguiente “diagrama de implicaciones” que aparece en la Figura 12 se puede observar que existen “camino” que demuestran las implicaciones:

$$(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (6) \rightarrow (7) \rightarrow (8) \rightarrow (1)$$

con lo cual queda demostrada la Proposición 2.1.

Figura 12.



Con el fin de obtener directamente la implicación $(\text{Prop. 2.1}(4)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.1}(5))$ se demostrará antes que $(\text{Prop. 2.2}(a))$ es una consecuencia de $(\text{Prop. 2.1}(4))$.

$(\text{Prop. 2.1}(4)) \Rightarrow (\text{Prop. 2.2}(a))$. Si dada una sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos cerrados y acotados de K y la intersección es no vacía, entonces \mathbb{Q} es denso en K .

Demostración. Para probar que \mathbb{Q} es denso en K , se probará que K es arquimediano (Proposición 2.2b). Si K no fuera arquimediano existiría $b \in K$ tal que $b > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto acotado

$$S = \{x \in K \mid x \leq n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in K \mid x \leq n\},$$

entonces S es un conjunto cerrado. En efecto, si $x \in K - S$ entonces $x > n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x - 1 > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto es $(x - 1, x + 1) \subset K - S$, entonces x es punto interior de $K - S$, por lo tanto $K - S$ es abierto y así S es cerrado.

Ahora, sea $S_n = S \cap \{x \in K \mid x \geq n, n \in \mathbb{N}\}$, entonces $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos de K . En efecto: $n \leq m$ implica que $S_n \supseteq S_m : x \in S_m$, entonces $x \in S \wedge x \geq m \geq n$, luego $x \in S \wedge x \geq n$, y así $x \in S_n$. Ahora veamos que $T_n = \{x \in K \mid x \geq n\}$ es cerrado. Sea $y \notin T_n$, entonces $y < n$ llamemos $\delta = n - y > 0$, veamos que $y \in V(y; \frac{\delta}{2}) \subseteq K - T_n$. En efecto: sea $z \in (y - \frac{\delta}{2}, y + \frac{\delta}{2})$, entonces $y - \frac{\delta}{2} < z < y + \frac{\delta}{2} = y + \frac{n-y}{2} = y + \frac{n}{2} - \frac{y}{2} = \frac{y+n}{2} < \frac{n+n}{2} = n$, esto es $z < n$, en consecuencia $z \notin T_n$, luego, $z \in K - T_n$. Por consiguiente $K - T_n$ es abierto, entonces T_n es cerrado. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $S_n \neq \emptyset$ pues para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \in S_n$. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que S_n es cerrado (ya que es la intersección de dos subconjuntos cerrados de K) y que es acotado. En efecto: $S_n = S \cap \{x \in K \mid x \geq n\}$, entonces n es cota inferior de S_n . Además, si $x \in S_n$, entonces $x \in S$, luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq m$. Como $b > m$ entonces $x < b$, y b sería una cota superior de S , por tanto b es cota superior de S_n . Aplicando la hipótesis a la sucesión $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset$, pero si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \Rightarrow x \leq n_o$ para algún n_o . Como $n_o < n_o + 1$ entonces $x < n_o + 1$. Pero $x \geq n_o + 1$ ($x \geq n \forall n \in \mathbb{N}$) entonces se tendría que $n_o + 1 \leq x < n_o + 1$ contradicción, por lo tanto, K debe ser arquimediano, o sea que \mathbb{Q} es denso en K . \square

(Prop. 2.1(2)) \Rightarrow (Prop. 2.1(8)). Si toda sucesión creciente y acotada superiormente converge en K , entonces K es arquimediano y algebraicamente completo.

Demostración. Como ya se demostró que la Proposición 2.1(2) implica la Proposición

2.1(1) entonces K es completo, usando la Proposición 2.3 se tiene entonces que \mathbb{Q} es denso en K . Sea F una extensión del campo ordenado K tal que K es denso en F , entonces \mathbb{Q} es denso en F (esto es, F es arquimediano). En efecto: sean $f_1, f_2 \in F$ con $f_1 < f_2$. Como K es denso en F , existen $k_1, k_2 \in K$ tales que $f_1 < k_1 < k_2 < f_2$. Ahora, como \mathbb{Q} es denso en K (pues K es un campo ordenado y completo) existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $k_1 < q < k_2$, luego $f_1 < q < f_2$. Dado $x \in F$ existe una sucesión creciente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de K tal que

$$x - \frac{1}{n} < a_n \leq x \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

o sea que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ (en F). Por hipótesis, la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en K , digamos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (en K). Como K es denso en F entonces se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ (en F), luego $x = a \in K$, esto es $F = K$. Por lo tanto, K es algebraicamente completo. \square

Antes de demostrar la implicación (Prop. 2.1(8)) \Rightarrow (Prop. 2.1(1)), recordemos que el sistema de los números reales \mathbb{R} , construido por cortaduras de \mathbb{Q} , ó, por sucesiones de Cauchy en \mathbb{Q} , es un campo ordenado que satisface el axioma de completitud. Tenemos entonces el siguiente lema.

Lema 2.1. *Todo campo arquimediano K es un subcampo ordenado de \mathbb{R} (en el sentido de isomorfismo, es decir, K es isomorfo a un subcampo ordenado de \mathbb{R}).*

Demostración. Puesto que \mathbb{Q} es denso en K (Proposición 2.2), entonces dado $x \in K$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $r_n \in \mathbb{Q}$ tal que $x - \frac{1}{n} < r_n < x$, de modo que existe una sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de \mathbb{Q} que converge a x (en K). La sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{Q} , luego $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en \mathbb{R} , digamos $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = y$ (en \mathbb{R}). Es fácil ver que “ y ” no depende de la elección de la sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que tiende a “ x ” en K , esto es, tenemos una función de K en \mathbb{R} que hace corresponder $y \in \mathbb{R}$ a $x \in K$. Evidentemente, esta función es inyectiva y respeta las operaciones y el orden del cuerpo ordenado. De esta manera se ve que \mathbb{R} posee un subcuerpo ordenado “isomorfo”, a K . \square

(Prop. 2.1(8)) \Rightarrow (Prop. 2.1(1)). Si K es arquimediano y algebraicamente completo, entonces K satisface el axioma de completitud.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{R}$ (por el Lema (2.1)). Si $K \neq \mathbb{R}$ entonces \mathbb{R} es una extensión propia del cuerpo ordenado K , donde K es denso en \mathbb{R} , luego K no es algebraicamente completo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto la hipótesis implica que K es isomorfo al cuerpo real \mathbb{R} , esto es, K satisface el axioma de completitud. \square

Hasta aquí, hemos presentado ocho equivalencias del axioma de completitud, ahora se mostrará otra equivalencia más relacionada con la conexidad.

Teorema 2.1. Sea $K(+, \cdot, \leq)$ un campo ordenado. Entonces K satisface el axioma de completitud si, y sólo si, es conexo (según la topología del orden).

Demostración. Supongamos que K satisface el axioma de completitud. Sea F un subconjunto abierto y cerrado en K . Si F no es vacío, existe $t \in K$ tal que $t \in F$. Veamos que $F = K$.

Asumamos que F es un subconjunto propio de K , entonces existe $x \in K$ tal que $x \notin F$, entonces $x \neq t$. Digamos $t < x$, en tal caso llamemos $S = \{y \in F \mid y < x\}$, entonces $S \neq \emptyset$ (pues $t \in S$) y está acotado superiormente por x .

Por el axioma de completitud, existe $z \in K$ tal que $z = \sup(S)$. Ahora, como para todo $s \in S$, $s < x$ entonces $z \leq x$.

Si $z \notin F$, entonces $z \in F^c$ y como F^c es abierto, existe $r > 0$ tal que $(z - r, z + r) \subseteq F^c$. Pero, como $z = \sup(S)$, existe $s_0 \in S$ tal que $z - r < s_0 \leq z$, lo cual es absurdo, ya que $s_0 \in F$, y $s_0 \in (z - r, z + r) \subseteq F^c$. Así que $z \in F$ con lo que $z < x$ pues $x \notin F$. Como F es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $(z - \delta, z + \delta) \subseteq F$. Tomemos $\gamma = \min\{\delta, x - z\}$, entonces $(z - \gamma, z + \gamma) \subseteq F$. Luego si μ es tal que $z < \mu < z + \gamma$ se tiene que $\mu \in F$ y $\mu < z + \gamma \leq x$, o sea que $\mu \in S$ con $z = \sup S < \mu$ lo cual es absurdo, ya que $z = \sup S$.

Concluimos que $F = K$ ó $F = \emptyset$ implicando que K es conexo.

Para el caso en que $x < t$ llamamos $S = \{y \in F \mid y > x\}$, usamos de nuevo el axioma de completitud, S tiene extremo inferior y procedemos análogamente hasta obtener $F = K$. Recíprocamente supongamos que K es conexo y sea $\emptyset \neq S \subseteq K$, con S acotado superiormente. Llamemos: $A = \{\alpha \in K \mid \alpha \text{ es cota superior de } S\}$.



Figura 13.

Entonces $A \neq \emptyset$ y $A \subsetneq K$ pues $S \subsetneq K$ (K no tiene máximo) y $S \neq \emptyset$.

Si existe $s_0 \in A$ tal que $s_0 \in S$, entonces $s_0 = \sup(S)$. Asumamos que para todo $s \in S$, $s \notin A$ y veamos que A es cerrado en K . Sea $t \in A^c$, entonces t no es cota superior de S y por tanto, existe $s_0 \in S$ con $t < s_0$. Llamemos $r = s_0 - t > 0$ y mostremos que $(t - r, t + r) \subseteq A^c$: si $y \in (t - r, t + r)$ entonces $y < t + r = s_0 \in S$, luego y no puede ser cota superior de S , así se tiene que $y \in A^c$ y por tanto A^c es abierto, es decir A es cerrado.

Como A es cerrado, $\emptyset \neq A \subsetneq K$ y K es conexo, se tiene que A no puede ser abierto, por tanto, existe $\alpha_0 \in A$ tal que para todo $r \in K^+$: $(\alpha_0 - r, \alpha_0 + r) \not\subseteq A$. Concluimos que $\alpha_0 = \sup(S)$. En efecto: como $\alpha_0 \in A$, α_0 es cota superior de S . Sea a cualquier cota superior de S ($a \in A$), si se tuviera $a < \alpha_0$ entonces $r = \alpha_0 - a > 0$ y por tanto $(a, \alpha_0 + r) = (\alpha_0 - r, \alpha_0 + r) \not\subseteq A$ lo cual es absurdo ya que al ser a cota superior de S cualquier $x \geq a$ también lo será. Luego, $\alpha_0 \leq a$, esto es, α_0 es la menor de las cotas superiores de S . \square

Capítulo 3

LA CONEXIDAD Y EL AXIOMA DE COMPLETITUD, DEPENDIENDO ÚNICAMENTE DEL ORDEN

En el capítulo anterior se probó (Proposición 2.1) la equivalencia de ocho propiedades, cada una equivalente al axioma de completitud, para lo cual se analizaron y “desglosaron” las demostraciones que aparecen en [11]. Además se probó una equivalencia más con la conexidad en un campo ordenado (Teorema 2.1), usando las operaciones del campo.

En este capítulo se analizará el artículo [2]. “*La conexidad y el axioma de completez en un conjunto totalmente ordenado K denso*”, sin elementos primero y último, en el cual se prueba que la equivalencia con la conexidad es independiente de las operaciones y solo depende del orden. Lo que se hace es “quitar” la estructura de cuerpo y dejar la estructura de orden con ciertas características (totalidad, densidad y ausencia de mínimo y máximo).

En [2] se define la noción de conjunto abierto en un conjunto totalmente ordenado (Definición 7 y en seguida se presenta el siguiente enunciado como definición: (Definición 8).

Sea K un conjunto totalmente ordenado. El conjunto

$$\tau = \{S \subseteq K \mid S \text{ es abierto}\} \cup \{\emptyset\}$$

es una topología para K , llamada la topología de orden para K . Sin embargo este enunciado es en realidad una proposición y es así como en este trabajo lo hemos considerado, por tanto se hará la demostración correspondiente (Proposición 3.1). Antes es necesario establecer dos conceptos:

Definición 3.1. Vecindad. Sea K un conjunto totalmente ordenado, $a, b \in K$ con $a < b$; definimos $V(a, b)$ como el conjunto siguiente: $V(a, b) = \{x \in K \mid a < x < b\}$.

Definición 3.2. Conjunto abierto. Sea K un conjunto totalmente ordenado, $S \subset K$, $S \neq \emptyset$, decimos que S es **abierto**, si para todo $x \in S$ existen $a, b \in K$, con $a < b$, tales que $x \in V(a, b) \subset S$.

Proposición 3.1. *Sea K un conjunto totalmente ordenado sin elementos primero y último. El conjunto $\tau = \{S \subseteq K \mid S \text{ es abierto}\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología para K , llamada la **topología de orden** para K .*

Nota 3.1. En la definición de conjunto abierto dada en [3] se exige que $S \neq \emptyset$; sin embargo es bien sabido que en cualquier espacio topológico \emptyset es un conjunto abierto, por tanto en la definición de la familia τ se podría omitir $\{\emptyset\}$. Además el conjunto $S = \emptyset$ satisface (vacíamente) la condición: para todo $x \in S$ existen $a, b \in K$ con $a < b$ tales que $x \in V(a, b) \subseteq S$.

Nota 3.2. En la Definición 8 de [2], (que como ya se comentó, es en realidad una proposición que debe ser demostrada), la exigencia: “ K es un conjunto totalmente ordenado”, **no** es suficiente, pues si por ejemplo, se toma un conjunto finito y totalmente ordenado, digamos $K = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ con $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, entonces K no sería un conjunto abierto según la definición de [2] (Definición 7), ya que para $x = a_1$ (y también para $x = a_n$) fallaría la condición de la definición. Es así como, además de que K sea totalmente ordenado, se exigirá que **no** posea elemento mínimo, ni elemento máximo, tal como lo hacemos en la Proposición 3.1.

Demostración.

[ET1] $\emptyset \in \tau$, es claro de la definición de τ .

Para ver que $K \in \tau$, tomemos $x \in K$. Como K no tiene primero ni último elemento existen $a, b \in K$ tales que $a < x < b$, entonces $x \in V(a, b) \subseteq K$, luego $K \in \tau$.

[ET2] Sean $S_1, S_2 \in \tau$ y sea $x \in S_1 \cap S_2$ entonces $x \in S_1 \wedge x \in S_2$, luego existen $a, b \in K$ con $a < b$ tal que $x \in V(a, b) \subseteq S_1$ y existen $c, d \in K$ con $c < d$ tal que $x \in V(c, d) \subseteq S_2$, entonces $x \in V(a, b) \cap V(c, d) \subseteq S_1 \cap S_2$ veamos que $V(a, b) \cap V(c, d) = V(e, f)$ donde $e = \max\{a, c\}$ y $f = \min\{b, d\}$, (obsérvese que $e = \max\{a, c\}$ existe porque K es totalmente ordenado y análogamente $f = \min\{b, d\}$ existe porque K es totalmente ordenado). Sea $x \in V(a, b) \cap V(c, d)$ entonces $a < x < b$ y $c < x < d$, como:

- i) $a < x$ y $c < x$ entonces $\max\{a, c\} < x$, luego $e < x$.
- ii) $x < b$ y $x < d$ entonces $x < \min\{b, d\}$, luego $x < f$.

Por lo tanto de i) y ii), $x \in V(e, f)$. Recíprocamente, si $x \in V(e, f)$ entonces $e < x < f$, luego $a \leq e < x < f \leq b$ y $c \leq e < x < f \leq d$ de modo que $a < x < b$ y $c < x < d$ en consecuencia $x \in V(a, b) \cap V(c, d)$; por tanto $x \in V(e, f) \subseteq S_1 \cap S_2$ y así $S_1 \cap S_2 \in \tau$.

[ET3] Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de elementos de τ y $M = \cup_{i \in I} A_i$. Tomemos un punto arbitrario $x \in M = \cup_{i \in I} A_i$ entonces $x \in A_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$; como A_{i_0} está en τ , existen $a, b \in K$, con $a < b$ tal que $x \in V(a, b) \subseteq A_{i_0} \subseteq \cup_{i \in I} A_i$, entonces concluimos que $\cup_{i \in I} A_i$ es abierto. \square

Proposición 3.2. *Sea (K, \leq) un conjunto (parcialmente) ordenado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) *Todo subconjunto no vacío acotado superiormente tiene sup.*
- ii) *Todo subconjunto no vacío acotado inferiormente tiene inf.*

Demostración.

(i) \rightarrow (ii): Sea $S \subseteq K$, $S \neq \emptyset$ y S acotado inferiormente; queremos ver que existe $\inf S$.

Definimos el conjunto C como $C := \{x \in K \mid x \text{ es cota inferior de } S\}$ dado que S es acotado inferiormente, entonces $C \neq \emptyset$ y además para cualquier $s \in S$, s será una cota superior de C , por tanto C es no vacío y acotado superiormente, luego por hipótesis, debe existir $c = \sup C$. Veamos que $c = \inf S$. Para todo $s \in S$, ya sabemos que s es cota superior de C y como $c = \sup C$ entonces $c \leq s$, por tanto c es cota inferior de S . Sea ahora t una cota inferior de S , es decir $t \in C$, luego $t \leq c = \sup C$, de modo que c es la máxima cota inferior de S , o sea $c = \inf S$.

(ii) \rightarrow (i): Sea $S \subseteq K$, $S \neq \emptyset$ y S acotado superiormente. Queremos ver que existe $\sup S$. Sea C el conjunto definido por: $C = \{x \in K \mid x \text{ es cota superior de } S\}$, $C \neq \emptyset$ (pues S es acotado superiormente) y cualquier $s \in S$ es cota inferior de C , luego C es no vacío y acotado inferiormente, entonces por hipótesis existe $c = \inf C$. Veamos que $c = \sup S$. Sea $s \in S$, entonces es cota inferior de C , por tanto $s \leq c$, y así c es cota superior de S . Sea t una cota superior de S , es decir $t \in C$ de modo que $c \leq t$ (pues c es cota inferior de C), por tanto c es la mínima cota superior de S , o sea $c = \sup S$. \square

A continuación presentamos las demostraciones de las proposiciones que aparecen en [2], pero de una forma más detallada, analizando los casos que allí no se consideran o solo se mencionan y también corrigiendo errores de tipo “mecanográfico”. Además se presentan dos versiones de la demostración de la Proposición 3.3 para el caso $x < y$, utilizando la propiedad del ínfimo y sin necesidad de ello.

En lo que sigue K será un conjunto totalmente ordenado, denso y sin elementos primero y último, y τ será la topología de orden para K .

Proposición 3.3. *Si K cumple el axioma de completitud entonces (K, τ) es conexo.*

Demostración.

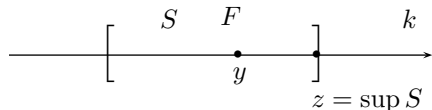


Figura 14a.

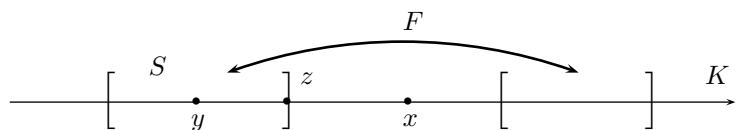


Figura 14b.

Sean $F \subseteq K$, F cerrado, $F \neq K$ y no vacío. Debemos ver que F no es abierto con lo cual (K, τ) será conexo. Sean $x \notin F$, $y \in F$, luego $x \neq y$. Consideramos dos casos:

I. Supongamos $y < x$ (ver figura 14 b)

Sea $S = \{t \in F \mid t < x\}$; $S \neq \emptyset$ pues $y \in S$, además S es acotado superiormente porque x es una cota superior de S . Sea $z = \sup S$ (existe por hipótesis) entonces $y \leq z \leq x$ porque $y \in S$, $z = \sup S$ y x es una cota superior de S .

a) Si $y = z$ entonces $z \in F$ luego $z \in S$, por tanto z es el máximo de S ; si $V(a, b)$ es una vecindad que contiene a z veamos que $V(a, b) \not\subseteq F$, (con lo cual se concluiría que F no es abierto). Veamos los dos casos posibles:

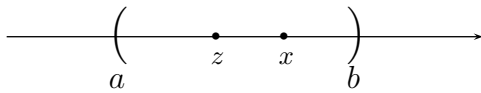


Figura 15.

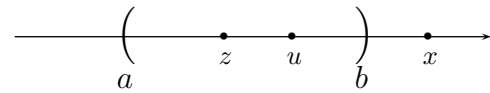


Figura 16.

- Si $b > x$ entonces $x \in V(a, b)$ y $x \notin F$ entonces $V(a, b) \not\subseteq F$.
- Si $b \leq x$ entonces sea $u \in V(z, b)$ (aquí se usa la densidad de K) o sea $z < u < b \leq x$ entonces $z < u < x$ de modo que $u \notin F$ (porque si fuese $u \in F$ entonces $u \in S$ y $z < u$, absurdo pues $z = \max S$). Como $V(z, b) \subseteq V(a, b)$ entonces $u \in V(a, b)$ y $u \notin F$ por lo tanto $V(a, b) \not\subseteq F$ como queríamos ver; entonces $z \in F$ no es punto interior de F , por lo tanto F no es abierto.

b) Si $y \neq z$ entonces tendremos $y < z \leq x$;

sea $z \in V(a, b) = \{x \in K \mid a < x < b\}$ entonces $V(a, b)$ es una vecindad de z y $a < z < b$. Como $z = \sup S$ y $a < z$ entonces a no es cota superior de S , luego existe $u \in S$ tal que: $a < u$ y tendríamos $a < u \leq z < b$ entonces $u \in V(a, b) \cap S$, luego $V(a, b) \cap S \neq \emptyset$ y como $S \subseteq F$ entonces $V(a, b) \cap F \neq \emptyset$. Así, toda vecindad de z interseca a F , lo que significa que $z \in \overline{F} = F$, pues F es cerrado, de modo que $z \in F$. Ahora, como $z = \sup S$ y x es cota superior de S , entonces $z \leq x$, pero si fuese $z = x$ se tendría que $z \notin F$, por tanto

$z < x$ y se tendría entonces que $z \in S$, es decir z es el máximo de S y este caso ya se analizó.

Observación 3.1. En la demostración que aparece en [2], se argumenta la existencia de un $c \in K$ tal que $a < c < z < b$. Sin embargo se observa que tal elemento c no es indispensable para esta parte de la demostración.

Observación 3.2. La segunda parte de la demostración no se hace en [2]; aquí presentamos dos formas de hacer la segunda parte de la prueba.

II. Ahora veamos el caso para el cual $x < y$.

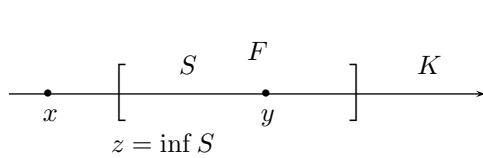


Figura 17.

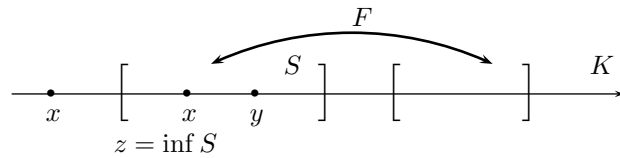


Figura 18.

Sea $S = \{t \in F \mid x < t\}$; $S \neq \emptyset$ pues $y \in S$, además S es acotado inferiormente pues x es una cota inferior de S . Sea $z = \inf S$ (existe por hipótesis) entonces $x \leq z \leq y$ porque $y \in S$, $z = \inf S$ y x es una cota inferior de S .

a) Si $y = z$ entonces $z \in F$ por tanto $z \in S$, luego $z = \min S$; ahora si $V(a, b)$ es una vecindad de z , veamos que $V(a, b) \not\subseteq F$ (con lo cual concluimos que F es cerrado más no abierto). Veamos los dos casos posibles:

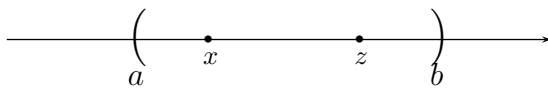


Figura 19.

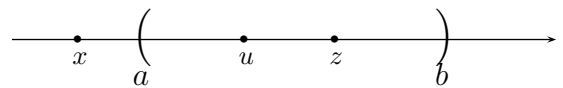


Figura 20.

- i) Si $a < x$ entonces $x \in V(a, b)$ y por hipótesis $x \notin F$, por tanto $V(a, b) \not\subseteq F$.
- ii) Si $a \geq x$ entonces, sea $u \in V(a, z)$ (existe por la densidad de K), luego $a < u < z$ y por tanto $x < u < z$ luego $u \notin F$ (porque si $u \in F$ entonces $u \in S$ y $u < z$, lo cual sería un absurdo ya que $z = \min S$),

como $V(a, z) \subseteq V(a, b)$ entonces $u \in V(a, b)$ y $u \notin F$, luego $V(a, b) \not\subseteq F$ como queríamos ver, luego $z \in F$ no es punto interior de F entonces F no es abierto.

- b) Ahora, si $y \neq z$ entonces $x \leq z < y$; sea $V(a, b)$ un abierto básico que contiene a z , luego $a < z < b$, como $z = \inf S$, b no es cota inferior de S , luego existe $u \in S$ tal que $a < z \leq u < b$ entonces $u \in V(a, b) \cap S$, de modo que $V(a, b) \cap F \neq \emptyset$ ($S \subseteq F$) entonces $z \in \overline{F} = F$. Como $z = \inf S$ y x es cota inferior de S entonces $x \leq z$ y puesto que $x \notin F$ entonces necesariamente $x < z$ de modo que $z \in S$ y este caso ya se analizó.

A continuación hacemos la segunda versión de la segunda parte de la demostración anterior sin utilizar la propiedad del ínfimo, y que resulta mucho mas corta.

- (II). Ahora veamos el caso para el cual $x < y$. Queremos probar que F no es abierto. Por contradicción, supongamos que F es abierto, entonces F^c es cerrado y se tiene que $x \in F^c$, $y \notin F^c$, $F^c \neq K$ y $F^c \neq \emptyset$, además $x < y$, entonces basta aplicar la parte I con el cerrado F^c para concluir que F^c no es abierto, lo que implica que F no es cerrado y esto contradice la escogencia de F . \square

Proposición 3.4. *Si (K, τ) es conexo, entonces K cumple el axioma de completitud.*

Demostración. Sea $S \subseteq K$, $S \neq \emptyset$, S acotado superiormente; consideremos:

$$A = \{u \in K \mid u \text{ es cota superior de } S\};$$

$A \neq \emptyset$; pues S es acotado superiormente; tomemos $A \neq K$ (ya que si $A = K$ entonces $\forall s_1, s_2 \in S$ se tendría que si s_1 es cota superior de S entonces $s_2 \leq s_1$, y si s_2 es cota superior de S entonces $s_1 \leq s_2$, luego $s_1 = s_2$ lo que implica $S = \{s\}$, por tanto, en este caso $\sup S = s$). Si existe $u_0 \in S$ tal que $u_0 \in A$, entonces $u_0 = \sup S$.

Supongamos que ningún punto de S pertenece a A ; sea $B = A^c$, veamos que B es abierto: en efecto, sea $x \in B$; entonces $x \notin A$, luego x no es cota superior de S entonces existe $y \in S$ tal que $x < y$, como K es denso existe $b \in K$ tal que $x < b < y$. Como K no

tiene primer elemento, existe $a \in K$ tal que $a < x < b < y$, luego $x \in V(a, b)$, y además, si $z \in V(a, b)$ tenemos que $a < z < b < y$; luego z no es cota superior de S , o sea que $z \notin A$, luego $z \in B$, de donde tenemos que $V(a, b) \subseteq B$, o sea que x es punto interior de B (pues existe $V(a, b)$ tal que $x \in V(a, b) \subseteq B$) luego B es abierto y por lo tanto A es cerrado.

Como K es conexo, A no es abierto, luego existe $u_0 \in A$ tal que para toda vecindad V de u_0 se tiene que $V \not\subseteq A$, o sea u_0 no es punto interior de A . Si $u_0 = \text{mín } A$ ya estaría ($u_0 = \text{sup } S$). Si u_0 no es el mínimo de A , sea $v < u_0$ y $v \in A$. Como K no tiene último elemento existe $b \in K$ tal que $u_0 < b$; entonces para $x \in V(v, b)$ tenemos que $v < x$, luego $x \in A$, y por lo tanto $V(v, b) \subseteq A$ y $u_0 \in V(v, b)$ lo que contradice que u_0 no es punto interior de A .

Por lo tanto u_0 es el mínimo de A , o sea que $u_0 = \text{sup } S$ y por lo tanto K cumple el axioma de completitud. \square

De las Proposiciones 3.3 y 3.4 se obtiene inmediatamente que si K es totalmente ordenado, denso, sin mínimo, ni máximo y con la topología del orden, entonces el axioma de completitud es equivalente a la conexidad, es decir:

Corolario 3.1. (K, \leq) cumple el axioma de completitud si, y sólo si, (K, τ) es conexo.

Ejemplo 3.1. Un claro ejemplo son los números reales (\mathbb{R}) ya que es un conjunto totalmente ordenado, denso, sin elementos primero y último. Es bien conocido que la topología usual de \mathbb{R} es la misma topología del orden usual de \mathbb{R} y que \mathbb{R} con este orden es completo, o, equivalentemente (según el corolario anterior) que \mathbb{R} con la topología usual es conexo.

Antes de presentar nuestro siguiente ejemplo, daremos la siguiente definición.

Definición 3.3. (Orden lexicográfico). En \mathbb{R}^2 definimos las relaciones “ $<$ ” y “ \leq ” como sigue:

- $(a, b) < (c, d)$ si y sólo si $(a < c) \vee (a = c \wedge b < d)$;

- $(a, b) \leq (c, d)$ si y sólo si $(a, b) = (c, d) \vee (a, b) < (c, d)$.

Proposición 3.5. (\mathbb{R}^2, \leq) es un conjunto totalmente ordenado, denso, no conexo y sin elementos primero y último.

Demostración.

I. Veamos que “ \leq ” es un orden total, para ello debemos probar:

i) Reflexiva: para toda $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tenemos:

$(a, b) \leq (a, b) \iff (a, b) = (a, b) \vee (a, b) < (a, b)$. Claramente $(a, b) = (a, b)$ entonces $(a, b) \leq (a, b)$.

ii) Antisimétrica: si $[(a, b) \leq (c, d)] \wedge [(c, d) \leq (a, b)]$ debemos probar que $(a, b) = (c, d)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} [(a, b) \leq (c, d) \iff (a, b) = (c, d) \vee (a, b) < (c, d)] \wedge [(c, d) \leq (a, b) \\ \iff (c, d) = (a, b) \vee (c, d) < (a, b)]. \end{aligned}$$

Se presentan los siguientes casos:

a) $(a, b) = (c, d) \wedge (c, d) = (a, b) \implies (a, b) = (c, d) \implies (a, b) \leq (c, d)$.

b) $(a, b) = (c, d) \wedge (c, d) < (a, b) \implies (a, b) < (a, b)$

$\implies (a < a) \vee (a = b \wedge b < b)$, lo cual es absurdo, luego este caso es imposible.

c) $(a, b) < (c, d) \wedge (c, d) = (a, b) \implies (a, b) < (a, b)$ de nuevo este caso es imposible.

d) $[(a, b) < (c, d)] \wedge [(c, d) < (a, b)] \iff [(a < c) \vee (a = c \wedge b < d)] \wedge [(c < a) \vee (c = a \wedge d < b)]$.

Se presentan los siguientes subcasos:

1) $a < c \wedge c < a$, absurdo.

2) $(a < c) \wedge (c = a) \wedge (d < b) \implies (a < c) \wedge (c = a)$, absurdo.

3) $(a = c) \wedge (b < d) \wedge (c < a) \implies (a = c) \wedge (c < a)$, absurdo.

4) $(a = c) \wedge (b < d) \wedge (c = a) \wedge (d < b) \implies (b < d) \wedge (d < b)$, absurdo. Luego se concluye que la única posibilidad que se tiene es el item a).

iii) Transitiva: $(a, b) \leq (c, d) \wedge (c, d) \leq (e, f)$. Veamos que $(a, b) \leq (e, f)$.

Tenemos los siguientes casos:

1) $(a, b) = (c, d) \wedge (c, d) = (e, f) \implies a = c \wedge b = d \wedge c = e \wedge d = f \implies (a, b) \leq (e, f)$.

2) $(a, b) = (c, d) \wedge (c, d) < (e, f) \implies a = c \wedge b = d \wedge [c < e \vee (c = e \wedge d < f)]$.

Tenemos dos subcasos:

1) $(a = c) \wedge (b = d) \wedge (c < e) \implies a < e \implies (a, b) < (e, f) \implies (a, b) \leq (e, f)$.

2) $(a = c) \wedge (b = d) \wedge (c = e) \wedge (d < f) \implies a = e \wedge b < d \implies (a, b) < (e, f) \implies (a, b) \leq (e, f)$.

3) $(a, b) < (c, d) \wedge (c, d) = (e, f) \implies [a < c \vee (a = c \wedge b < d)] \wedge (c = e) \wedge (d = f)$ entonces:

1) $a < c \wedge c = e \wedge d = f \implies a < e \implies (a, b) < (e, f) \implies (a, b) \leq (e, f)$.

2) $(a = c) \wedge (b < d) \wedge (c = e) \wedge (d = f) \implies a = e \wedge b < f \implies (a, b) < (e, f) \implies (a, b) \leq (e, f)$. \square

II. Veamos que (\mathbb{R}^2, \leq) es un orden total: sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, como $a, c \in \mathbb{R} \implies a < c$ ó $a = c$ ó $c < a$.

1) si $a < c \implies (a, b) < (c, d) \implies (a, b) \leq (c, d)$.

2) si $a = c$, tenemos: $b < d$ ó $b = d$ ó $d < b$:

a) si $b < d \implies a = c \wedge b < d \implies (a, b) < (c, d) \implies (a, b) \leq (c, d)$.

$$b) \text{ si } b = d \implies a = c \quad \wedge \quad b = d \implies (a, b) = (c, d) \implies (a, b) \leq (c, d).$$

$$c) \text{ } d < b \implies (c = a) \wedge (d < b) \implies (c, d) < (a, d) \implies (c, d) \leq (a, d).$$

3) si $c < a$ análogo a 1).

III. Ahora veamos que (\mathbb{R}^2, \leq) es un orden denso: sea $(a, b) < (c, d) \implies (a < c) \vee (a = c \wedge b < d)$.

a) Si $a < c$, existe $t : a < t < c$ (densidad de \mathbb{R}). Entonces $(a, b) < (t, b) < (c, d)$.

b) Si $a = c \wedge b < d$ entonces sea t tal que $b < t < d$ entonces $(a, b) < (a, t) < (c, d)$.

IV. Veamos que (\mathbb{R}^2, \leq) no tiene primero ni último elemento. Si (a, b) fuese primer elemento entonces $(a, b) \leq (c, d)$ para todo $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, pero $(a - 1, b) < (a, b) < (a + 1, b)$, de modo que existiría un elemento más pequeño que el primero, lo cual es absurdo. Análogamente se prueba que ningún elemento es el último elemento.

Miremos como son los abiertos básicos de (\mathbb{R}^2, \leq) . Dados $(a, b) < (c, d)$, para determinar el “intervalo”, $V((a, b), (c, d)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (a, b) < (x, y) < (c, d)\}$, determinemos en primer lugar los conjuntos $((a, b), \rightarrow)$ y $(\leftarrow, (c, d))$ (que se definirán enseguida) y posteriormente la intersección de ellos dos.

$$i) ((a, b), \rightarrow) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (a, b) < (x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x \vee (a = x \wedge b < y)\}.$$

$$ii) (\leftarrow, (c, d)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) < (c, d)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < c \vee (x = c \wedge y < d)\}.$$

Ejemplo 3.2.

$$((1, 2), \rightarrow) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1, 2) < (x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x \vee (1 = x \wedge 2 < y)\}.$$

(Ver Figura 21).

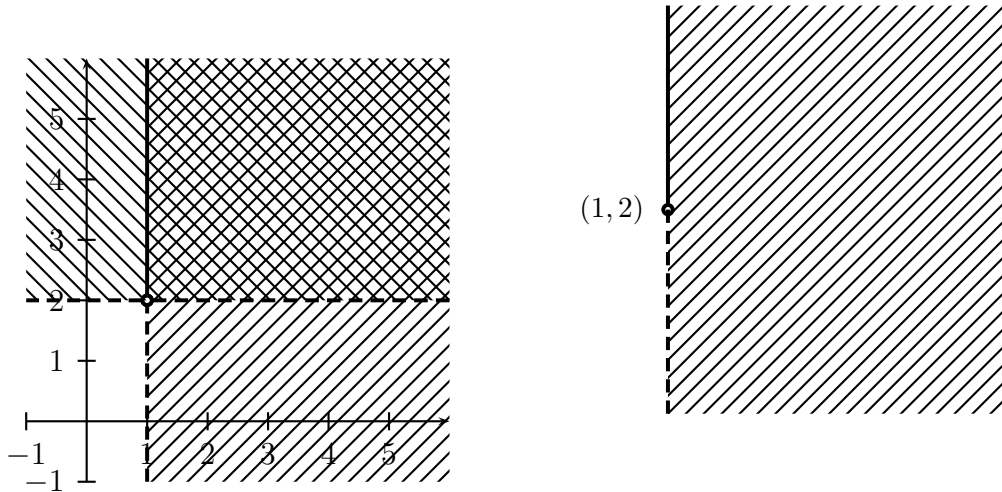


Figura 21.

Ejemplo 3.3.

$$(\leftarrow, (3, 2)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) < (3, 2)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 3 \vee (x = 3 \wedge y < 2)\}.$$

(Ver Figura 22).

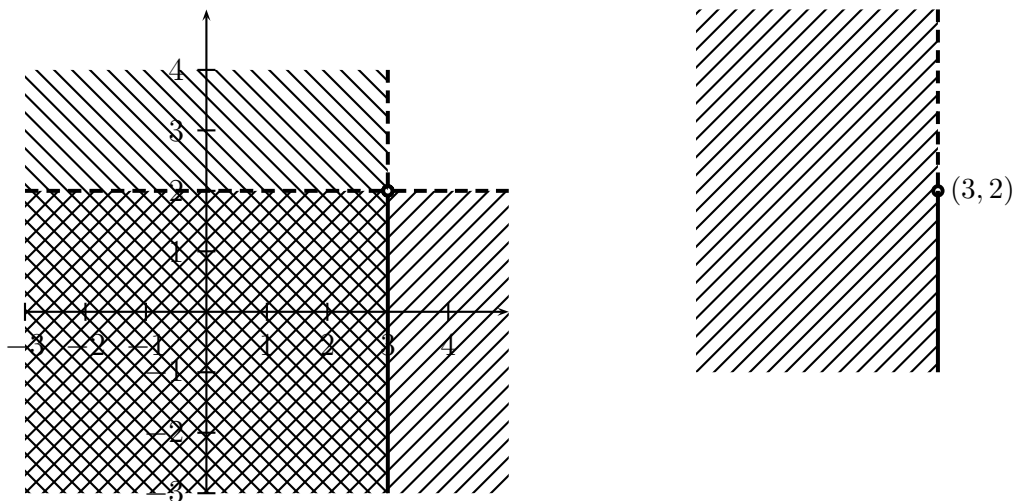


Figura 22.

Entonces los abiertos serán esencialmente de cuatro formas:(ver Figuras 23, 24, 25 y 26).

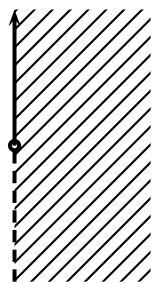


Figura 23.

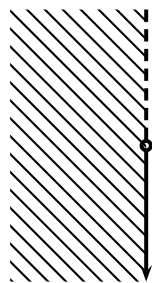


Figura 24.

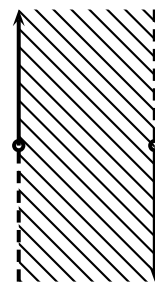


Figura 25.



Figura 26.

Ahora tomemos por ejemplo $A = \{(x, y) \mid x \geq 1\}$. Como claramente A y A^c , cada uno se puede obtener como unión de abiertos como los de la figura 26 ("palitos" verticales sin sus extremos), luego A es abierto y cerrado, $A \neq \emptyset$ y $A \neq \mathbb{R}^2$. De esta manera $(\mathbb{R}^2, \tau_{lex})$ es no conexo y por tanto (por el Corolario 3.1) $(\mathbb{R}^2, \leq_{lex})$ no satisface el axioma de completitud.

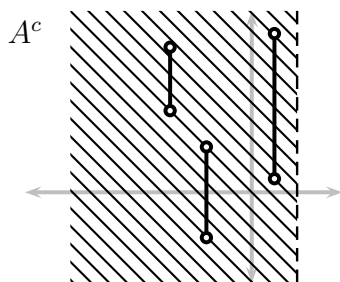


Figura 27.

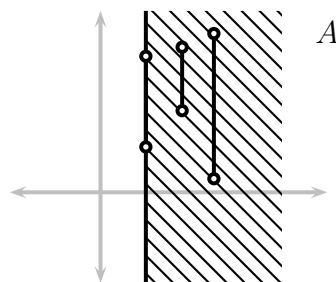


Figura 28.

Las condiciones: orden total, sin elemento primero y último son indispensables para obtener efectivamente una topología de K .

Ahora veamos algunos ejemplos que ilustran como, si no se cumplen algunas de las hipótesis, entonces el Corolario 3.1 puede “fallar”.

Ejemplo 3.4.

1) Sea $K = (a, b] \cup [c, d)$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b < c < d$ con el orden usual de \mathbb{R} (ver Figura 29). Entonces (K, \leq) cumple las siguientes propiedades:

- Es un orden total.
- No tiene primero ni último elemento.
- No es denso (pues entre b y c no hay elementos de K , es decir $(b, c) = \emptyset$).
- Satisface el axioma de completitud.
- No es conexo pues $(a, b] = (a, c)$ es abierto no vacío y $[c, d) = (b, d)$ también es abierto no vacío, $K = (a, b] \cup [c, d)$ y $(a, b] \cap [c, d) = \emptyset$.

La única hipótesis que no se cumple es la densidad y el corolario falla (hay completitud pero no conexidad).



Figura 29.

2) Sea $K = (a, b) \cup (b, c]$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ con el orden usual de \mathbb{R} (ver Figura 30). Entonces (K, \leq) cumple:

1. Es un orden total.
2. No tiene primer elemento.
3. Si tiene último elemento (es c).

4. Es denso.
5. No satisface el axioma de completitud ($(b - \epsilon, b)$ es acotado superiormente pero no tiene supremo).
6. No es conexo.

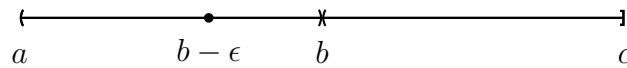


Figura 30.

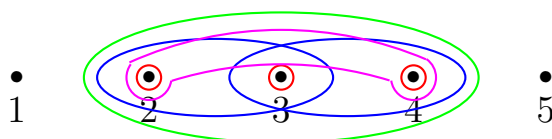
Las hipótesis que no se cumplen son la del “último elemento y la conexidad” luego el corolario falla (el espacio es desconexo y no completo).

También puede ocurrir que aunque no se cumpla alguna de las hipótesis, el conjunto sea completo y conexo.

3) Sea $K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con el orden usual (ver Figura 31).

$$\begin{aligned}
 \tau_{\leq} &= \langle \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 5)\} \rangle \\
 &= \langle \{\emptyset, \{2\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3\}, \{3, 4\}, \{4\}\} \rangle \\
 &= \langle \{\emptyset, K, \{2\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3\}, \{3, 4\}, \{4\}, \{2, 4\}\} \rangle
 \end{aligned}$$

Figura 31.



1. Es un orden total.
2. Tiene primer elemento.
3. Tiene último elemento.
4. No es denso.
5. Satisface el axioma de completitud.
6. Es conexo.

4) Sea $K = (a, b] \cup \{c\} \cup (d, e)$ donde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $a < b < c < d < e$ con el orden usual de \mathbb{R} (ver Figura 32). Se tiene:

1. Es un orden total.
2. No tiene primer elemento.
3. No tiene último elemento.
4. No es denso ($(b, c) = \emptyset$).
5. Satisface el axioma de completitud.
6. No es conexo ($K = (a, c) \cup (b, e)$).

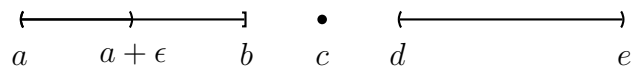


Figura 32.

En este último ejemplo no se cumple la densidad y el espacio no es conexo, aunque satisface el axioma de completitud, es decir, nuevamente se verifica (como en el Ejemplo 3.4) que la densidad es una condición necesaria para que se cumpla la equivalencia establecida en el Corolario 3.1.

Bibliografía

- [1] AHUMADA Rafael. La Conexidad y el axioma de completez. Boletín de Matemáticas. Vol. XXI. N°1, (1987). Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.
- [2] AHUMADA Rafael y PUERTA Fernando. La conexidad y el axioma de completez en un conjunto totalmente ordenado K denso, sin elemento primero y último. Revista Integración. Vol. 9. N°2, (1991). Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.
- [3] APÓSTOL Tom. Análisis matemático. 2a. Edición. Madrid: Reverté. 1976
- [4] BARTLE Robert y SHERBERT Donald. Introducción al análisis matemático de una Variable. 2a. Edición. México: Limusa. 1999
- [5] LIMA Elon. Curso de análisis volumen 1. 5a. Edición. Río de Janeiro: Instituto de Matemática pura y aplicada. 1987.
- [6] HERSTEIN I. Álgebra moderna. México : Trillas. 1988.
- [7] MAYORGA Bernardo. Libro de Lectura de Cálculo. Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. 1996.
- [8] MUNKRES James. Topología. Madrid: Prentice Hall. 2002.
- [9] PINZÓN Alvaro. Conjuntos y estructuras. México: Harla S.A. 1973.

[10] SERGE Lang. Álgebra. Addison-Wesley. 1965.

[11] TAKEUCHI, Yu. Axioma de completitud. Boletín de Matemáticas. Vol. XX. N°2, (1986). Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.