

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS

MARÍA CAROLINA CASTAÑEDA McCORMICK

HENRY ANDRÉS REYES ANAYA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIARÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
BUCARAMANGA

2004

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS

MARÍA CAROLINA CASTAÑEDA McCORMICK

HENRY ANDRÉS REYES ANAYA

Trabajo de grado para optar por el título de
Ingeniero Civil

Director

Jorge Alberto Guzmán Jaimes

MSc Ingeniero Civil

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIARÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
BUCARAMANGA

2004

A mis abuelitos y hermanas
quienes siempre estuvieron conmigo
y creyeron que este título
sería una realidad

A Kari y a mis padres

por confiar en mi

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Jorge Alberto Guzmán, por su visión innovadora, dedicación, disponibilidad y valiosos consejos.

A los ingenieros Edward Niño y Ángel Anaya, por su colaboración en la programación del modelo matemático.

A Hernando Castañeda, por sus ideas para la realización del modelo físico.

RESUMEN

TITULO:

SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION DE RICHARDS*

AUTORES:

CASTAÑEDA MCCORMICK, María Carolina

REYES ANAYA, Henry Andrés **

PALABRAS CLAVES: Ecuación de Richards, Simulación, Zona no saturada, Movimiento del agua, Diferencias finitas, Modelo físico.

DESCRIPCIÓN:

El presente trabajo, muestra un modelo numérico-matemático y un modelo físico los cuales simulan el movimiento del agua en la zona no saturada del suelo. Para el modelo numérico-matemático, se utilizó la ecuación de Richards en la dirección vertical despreciando los componentes horizontales. En el modelo físico se elaboraron perfiles de humedad para una columna de suelo homogéneo con el fin de comprobar el movimiento del frente húmedo respecto al tiempo en la zona no saturada.

En la solución numérico-matemática se utilizó una aproximación de diferencias finitas implícitas de la ecuación de Richards en la cual se incorporaron las funciones hidráulicas del suelo mediante spline cúbicos. Esta solución, se validó con la solución cuasi-analítica del suelo Yolo light clay de Phillip y mediante un modelo físico. En el modelo físico, se empleó un suelo arcillo-arenoso en una columna 80 cm. de altura a la cual se le suministro un caudal constante.

El modelo numérico-matemático desarrollado mostró una muy baja desviación respecto a las soluciones cuasi-analíticas y numéricas desarrolladas por otros autores, así como con el modelo físico del presente trabajo. La solución numérica a la ecuación de Richards es una alternativa válida en el estudio del transporte de contaminantes, estabilidad de taludes y recarga de acuíferos en donde se requiere el conocimiento del movimiento del frente húmedo.

* Tesis de grado

** Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas

Escuela de Ingeniería Civil

Director I.C. MSc. Jorge Alberto Guzmán Jaimes.

ABSTRACT

TITTLE:

NUMERIC SOLUTION OF RICHARDS' EQUATION*

AUTHORS:

CASTAÑEDA MCCORMICK, Maria Carolina

REYES ANAYA, Henry Andres **

KEYWORDS: Richards' equation, Simulation, Unsaturated zone, Movement of water, Finite differences, Physic model.

DESCRIPTION:

The present work, shows a mathematical and physical model, which simulates the movement of water in the unsaturated zone. For the mathematical model, it was used the Richards' equation in the vertical direction, rejecting the horizontal components. In the physical model, there were elaborated the moisture profiles for homogeneous soils, in order to check in the unsaturated zone, the movement of the humid front regarding the time.

The mathematical solution was carried out using an approach of implicit finite differences of the Richards' equation, in which the hydraulic functions of the soils were incorporated by means of cubic spline. This solution was validated with Phillip's quasi-analytical solution of the Yolo light clay soil an also by means of a physical model. In the physical model, a sandy-clay loam soil was used in a column of 80cm high, to which is given a constant flow.

The mathematical model showed a very low deviation regarding the quasi-analytic and numeric solutions developed by other authors, as well as with the physical model of the present work. The numeric solution of Richards' equation is an alternative been worth in the study of the transport of pollutants, stability of banks and the recharges of aquifers, where the knowledge of the movement of the humid front is required.

* Degree Project.

** Faculty of Physical-Mechanical Engineering.

Civil Engineering School.

Advisor I.C. MSc. Jorge Alberto Guzmán Jaimes.

CONTENIDO

	pág
INTRODUCCIÓN	1
1. AGUA SUBSUPERFICIAL	2
1.1 GENERALIDADES	2
1.2 ZONA NO SATURADA	4
1.2.1 Zona de raíces	5
1.2.2 Zona de capilaridad	5
1.3 HUMEDAD DEL SUELO	6
1.4 TRANSPORTE DE AGUA EN EL SUELO	7
1.4.1 Movimiento del agua	8
1.5 POTENCIAL DE HUMEDAD	9
1.5.1 Potencial gravitacional	9
1.5.2 Potencial hidrostático	10
1.5.3 Potencial osmótico	10
1.5.4 Otros potenciales	11
1.6 CURVAS CARACTERÍSTICAS DEL SUELO	13
1.6.1 Curva característica de humedad del suelo	13
1.6.2 Conductividad hidráulica	15
2. SOLUCIÓN MATEMÁTICA DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS	17
2.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO	17
2.2 APROXIMACIÓN POR DIFERENCIAS FINITAS	21
2.2.1 Generalidades	21
2.2.2 Diferencias finitas	22
2.2.3 Aplicación de diferencias finitas	24

2.3 SOLUCIÓN NUMÉRICA	27
2.4 PARÁMETROS BÁSICOS	31
2.4.1 Condiciones iniciales	32
2.4.2 Condición de frontera superior	32
2.4.3 Condición de frontera inferior	33
2.5 REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES HIDRÁULICAS DEL SUELO	34
2.5.1 Función spline	34
2.6 VALORES PARA LOS INTERVALOS MEDIOS	35
2.7 DIAGRAMA DE FLUJO	36
3. MODELO FÍSICO	37
3.1 GENERALIDADES	37
3.1.1 Sistema de riego	37
3.1.2 Columna de suelo	39
3.2 PROCEDIMIENTO	39
3.2.1 Actividades preliminares	40
3.2.2 Puesta en marcha y toma de muestras	44
3.3 DATOS OBTENIDOS	47
4. VALIDACIÓN DEL MODELO	50
4.1 MODELO MATEMÁTICO	50
4.1.1 Calculo del error	52
4.2 MODELO FÍSICO	55
5. CONCLUSIONES	58
BIBLIOGRAFÍA	60
APÉNDICE A	62
APÉNDICE B	67

INTRODUCCIÓN

La importancia del recurso hídrico en la vida del hombre, hace de vital importancia conocer la existencia, entender el comportamiento y darle un manejo adecuado a este recurso en los diferentes lugares donde se encuentre. Colombia es el cuarto país en el mundo en reservas hídricas, debido a lo cual se debe buscar la forma correcta de explotar este recurso tanto ambiental como económicamente.

El presente trabajo busca estudiar el movimiento del agua en la zona no saturada, donde en una primera parte se desarrollan conceptos básicos con el fin de ubicar al lector en el contexto de la hidrología subsuperficial, prestando especial importancia a la zona de interconexión entre la superficie del suelo y la zona saturada. Posteriormente, con base en la ecuación de Richards se desarrolla un modelo matemático utilizando una aproximación por medio de diferencias finitas de la forma implícita, con el fin de obtener los perfiles de humedad para distintos tipos de suelo. Luego, utilizando una solución cuasi analítica del suelo Yolo light clay se validó dicho modelo. Por último, se diseñó un modelo físico, con el cual se ensayaron distintos suelos con el fin de representar el movimiento del frente húmedo en la zona no saturada.

Con este trabajo se espera motivar la continuación del estudio de la zona no saturada, ya que a partir de este, se puede avanzar en el desarrollo de modelos hidrológicos distribuidos de base física (physically-based distributed models) en donde se involucran las diferentes macro componentes del ciclo hidrológico (superficie, zona no saturada y zona saturada). Es necesario, desarrollar cuencas experimentales y modelos físicos que permitan validar los modelos numéricos y el estudio de los procesos hidrológicos involucrados.

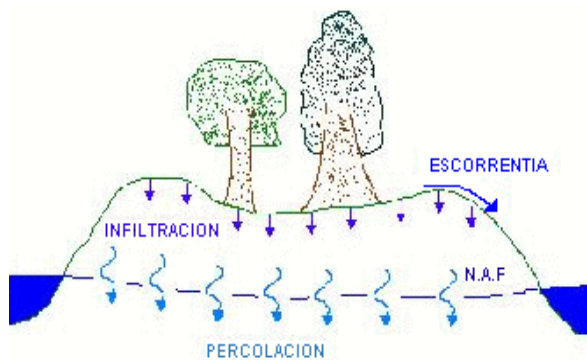
1. AGUA SUBSUPERFICIAL

1.1 GENERALIDADES

En Colombia, la zona no saturada no ha recibido la atención que esta reclama existiendo pocos estudios acerca de ella en nuestro medio, ya que los hidrólogos se especializan en el estudio del agua superficial y los geólogos en la disponibilidad del agua subterránea, quedando olvidada la interconexión que existe entre ellas; es decir, la zona no saturada.

En el ciclo hidrológico, el agua subsuperficial representa un papel muy importante, donde los procesos como la escorrentía, la infiltración y la percolación están estrechamente relacionados con el contenido de agua presente en el subsuelo (Figura 1). Esto ha motivado diversos estudios hidrológicos, dependiendo de la profundidad de

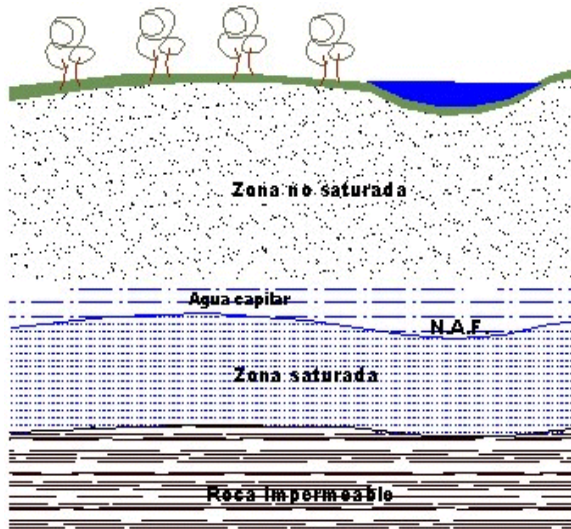
Figura 1. Ciclo Hidrológico del agua.



los estratos, tipo de suelo (propiedades físicas y químicas), condiciones atmosféricas y tipo de cultivos entre otros factores, con los cuales, dependiendo del grado de complejidad del estudio que se requiera, podrán obtener diferentes resultados con los cuales se pueda mostrar con mayor precisión la realidad del movimiento del agua en el suelo.

De este modo, es necesario tener en cuenta algunas consideraciones y

Figura 2. Distribución de zonas del subsuelo



discriminaciones de las zonas por donde transita el fluido en estudio, ya que a pesar que el objetivo de la mayoría de análisis de flujo es conocer la cantidad de agua presente en un sitio determinado para su posterior extracción, se debe analizar un poco más, estudiando el movimiento de agua a diferentes profundidades. Una primera división de la zona subsuperficial del suelo está dada por el nivel de agua freática (N.A.F) o *Superficie Freática*, superficie irregular de material no confinado donde la

presión hidrostática es igual a la presión atmosférica (Linsley and Kohler, 1988), dividiendo así la zona subsuperficial en dos grandes regiones (Figura 2).

La región sobre el N.A.F es llamada *Zona No Saturada, de Aireación o Vadosa*, donde los poros del suelo pueden contener aire, agua o una combinación de estas y donde la presión del agua es menor que la presión atmosférica, produciendo presiones de tensión o de succión.

En la región bajo el nivel freático, llamada *Zona Saturada*, los poros del suelo se encuentran completamente llenos de agua; esto hace que se encuentren bajo presión debido a la presión hidrostática, la cual es mayor que la presión atmosférica e igualmente por el peso de sobrecarga y la cabeza hidrostática.

1.2 ZONA NO SATURADA

Esta zona presenta una mayor complejidad con respecto a las otras zonas del suelo. Esto ocurre debido a que en esta zona se presentan los tres estados físicos de la materia, la matriz del suelo (sólido), la humedad (líquido) y el aire (gaseoso), el cual incluye el vapor de agua. Además, la conductividad hidráulica es variable debido al contenido de humedad presente en el suelo; así como otros factores del movimiento del agua, entre los que se encuentra el gradiente de presión mátrico (característica inherente al suelo).

El movimiento de agua a través de la Zona No Saturada tiene un comportamiento no lineal debido a las propiedades físicas del suelo presente las cuales varían principalmente respecto al contenido de humedad, ya que como se mencionó anteriormente, sus partículas pueden contener aire y/o agua, impidiendo que el agua se mueva uniformemente a través del suelo.

La humedad del suelo en esta zona puede estar presente en distintas formas y estados, dependiendo de las características físicas y químicas del suelo. El agua que es transportada por los poros o intersticios (infiltración y percolación) y que desciende por acción de la gravedad es llamada *agua gravitacional*; cuando estos poros son muy pequeños el agua asciende y se denomina *agua por capilaridad*; los otros tipos de humedad presentes están dados por el *agua higroscópica*, una fina capa de agua adherida a los granos de suelo debido a la atracción molecular, la cual es difícilmente removida en condiciones climáticas normales; por último, se encuentra el agua en forma de *vapor de agua* atrapado en el suelo.

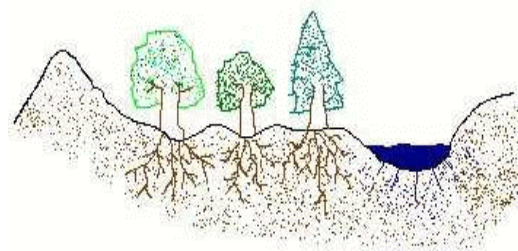
En la zona no saturada pueden reconocerse dos zonas principales: la Zona de Raíces y la Zona de Capilaridad. En ocasiones puede distinguirse una tercera zona cuando existen niveles de agua freática profundos, donde los efectos de capilaridad y/o extracción de agua por las raíces de las plantas son prácticamente nulos.

1.2.1 Zona de raíces

La zona de raíces es la región comprendida entre la superficie del terreno y la profundidad a la cual han penetrado los sistemas radiculares de las plantas (Figura 3).

La profundidad de las raíces puede llegar hasta los diez metros, dependiendo de la vegetación, cultivos presentes en el terreno y tipo de suelo (Linsley and Kohler, 1988). Por lo tanto, es la zona principal en estudios de evaporación y transpiración, debido al intercambio de agua y otros componentes de la superficie con la atmósfera, provocados

Figura 3. Zona de Raíces



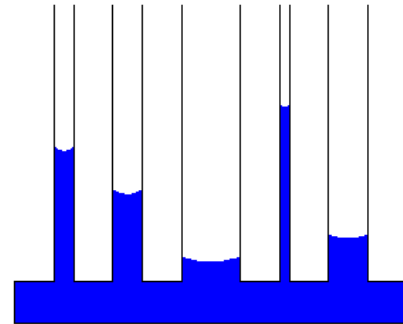
por la presencia de vegetación, la cual requiere de un medio no saturado y de reservas de agua para la supervivencia de cultivos en periodos de sequía.

1.2.2 Zona de capilaridad

En la vecindad al nivel freático del suelo, en su parte superior se encuentra la *Zona Capilar*, región en la cual el agua asciende debido a una fuerza capilar producida por la acción molecular entre el líquido y el sólido que toca. A pesar que esta zona se encuentra en la parte no saturada del suelo, esta puede llegar a saturarse en cercanías del N.A.F, debido a la fuerza de capilaridad antes mencionada.

La magnitud de la fuerza de capilaridad está fuertemente ligada con el tipo de suelo, dependiendo del tamaño de los poros (a menor tamaño de poros, mayor capilaridad), y sin importar el volumen de vacíos (porosidad), ya que dos tipos de suelo con igual porosidad pueden tener niveles de ascenso muy distintos debido a la dimensión de sus poros, al igual que sucede en un ensayo con tubos capilares donde el nivel de ascensión depende del diámetro de los tubos capilares, presentándose una mayor ascensión en los tubos de menor diámetro (Figura 4).

Figura 4. Asención del agua en tubos capilares.



1.3 HUMEDAD DEL SUELO

De acuerdo a la cantidad de agua presente en la zona no saturada, se han tratado de establecer límites específicos para la realización de estudios de humedad del suelo, los cuales no están claramente definidos, determinándose así, *puntos de equilibrio* como la capacidad de campo y el punto de marchitez.

El contenido de humedad del suelo después de un drenaje por gravedad es llamado *capacidad de campo (field capacity)*. El tiempo al cual se mide esta humedad no es específico, ya que varía dependiendo de la profundidad a la que se encuentre el N.A.F, disminuyendo para niveles freáticos superficiales y aumentando a medida que el N.A.F se hace más profundo. La condición de humedad del suelo se alcanza en dos ó tres días, después de una lluvia fuerte o de una irrigación aunque en presencia de niveles de agua freática poco profundos, la capacidad de campo puede ser obtenida dentro de pocas horas, después que la zona de raíces ha sido completamente humedecida (de Laar, 1995).

El *punto de marchitez o de marchitamiento (wilting point)* es el nivel al cual las plantas no pueden extraer la humedad del suelo; el punto de marchitez es equivalente al contenido de humedad a una presión aproximada de 1.5 MPa (Linsley and Kohler, 1988).

La *humedad disponible (available moisture)* está definida como la cantidad de agua presente en la zona de raíces entre la capacidad de campo y el punto de marchitez (de Laar, 2001).

$$AM = D_r \cdot (\theta_{FC} - \theta_{WP}) \quad (1)$$

Donde, AM es la humedad disponible, D_r es el espesor de la zona de raíces, θ_{FC} es el contenido de humedad de la capacidad de campo, θ_{WP} es el contenido de humedad del punto de marchitez.

1.4 TRANSPORTE DE AGUA EN EL SUELO

La estructura del suelo y sus propiedades están relacionadas con la porosidad. La *porosidad original o primaria* del suelo se crea por procesos geológicos durante la formación geológica de este, mientras que la *porosidad secundaria*, se desarrolla después que las rocas están formadas, sufriendo algún tipo de evolución, por ejemplo juntas, fracturas y/o orificios. La *porosidad efectiva* es también importante, ya que permite la interconexión de los poros y la continuidad del flujo de agua, donde la continuidad del fluido es una de las características más importantes debido a que en ella radica la transmisibilidad del fluido de un punto a otro.

1.4.1 Movimiento del agua

La *infiltración* es el movimiento de agua de la superficie del terreno hacia el suelo por intermedio de sus poros, fracturas, diaclasas y fallas (roca); si el agua continua moviéndose a través del suelo, este movimiento se conoce como *percolación* en donde el agua puede llegar hasta la zona saturada.

El agua que se infiltra puede moverse lateralmente a cortas profundidades debido a la presencia de estratos impermeables que se encuentran por debajo de la superficie del terreno, los cuales están próximos a las fuentes de agua provocando así que el agua fluya hacia el cauce del río o fuente de agua; también puede percolar, donde hará parte del flujo base del río; ó permanecerá sobre el nivel freático, en la zona no saturada.

Figura 5. Tipos de escorrentía



de la superficie del suelo, aparece la *escorrentía del suelo (overland flow)*, es entonces cuando el suelo se cubre de una delgada capa de agua (Figura 5). Cuando esta capa de agua llega a la fuente de agua es llamada *escorrentía superficial*. Algunos factores de los cuales depende la escorrentía superficial son la intensidad de la lluvia, tipo de vegetación, área de drenaje, distribución de la lluvia, geometría de la fuente de agua, profundidad del N.A.F, la pendiente de la superficie del terreno entre otras. La *escorrentía* comprende el agua que escurre en el suelo y la que llega hasta las diversas fuentes de agua; es decir, la sumatoria de la escorrentía del suelo y la escorrentía superficial.

La *retención superficial* es el agua interceptada en dirección al suelo, ya sea por la vegetación, el almacenamiento en depresiones y la evaporación, jugando un papel importante en lluvias de baja intensidad y corta duración, donde el agua es consumida por estas intercepciones.

1.5 POTENCIAL DE HUMEDAD

El gradiente del potencial de humedad es proporcional a las fuerzas producidas por el agua en movimiento en la zona subsuperficial del suelo. El *potencial de humedad* está dado como la energía mínima por gramo de agua que será gastada en el transporte de un cuerpo de agua de un punto a otro.

El potencial total es la sumatoria de varios potenciales, como son el potencial gravitacional, potencial de presión hidrostática, potencial osmótico, potencial externo, potencial de absorción, potencial térmico y el potencial químico.

$$\psi_T = \psi_g + \psi_h + \psi_{osm} + \psi_q + \psi_{ter} + \psi_{ext} + \psi_{abs} \quad (2)$$

Donde ψ_t es el potencial total, ψ_g el potencial gravitacional, ψ_h el potencial hidrostático, ψ_{osm} el potencial osmótico, ψ_q el potencial químico, ψ_{ter} el potencial térmico, ψ_{ext} el potencial externo y ψ_{abs} el potencial de absorción.

1.5.1 Potencial gravitacional

El *potencial gravitacional* es la energía requerida para mover una masa de agua m desde un nivel de referencia (potencial gravitacional cero) hasta una posición dada z . El potencial gravitacional esta dado por unidad de masa, obteniendo así:

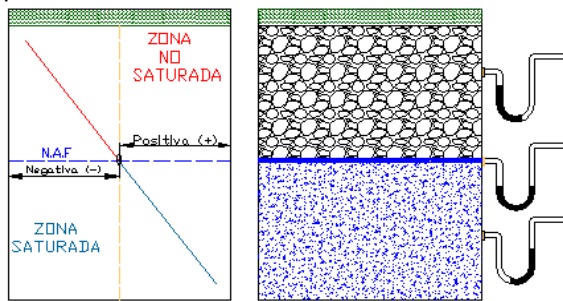
$$\psi_g = \frac{mgz}{m} = gz [J / Kg] \quad (3)$$

El potencial gravitacional es únicamente función de la altura sobre el nivel de referencia, mas conocida como la cabeza de posición (Remson, 1971).

1.5.2 Potencial hidrostático

En la zona no saturada el potencial hidrostático se debe a las fuerzas de atracción producidas por la matriz del suelo. Este potencial es más notorio en suelos arcillosos, donde además de la fuerza capilar obtenida de las fuerzas de adhesión y cohesión, la atracción de sólidos y de iones intercambiables contribuye a la retención de agua.

Figura 6. Representación de las presiones presentes en el suelo.



El potencial hidrostático es igual a cero en el N.A.F. Como la presión en el N.A.F es igual a la presión atmosférica, las presiones del agua subsuperficial están relacionadas con la presión atmosférica, la cual es mayor a medida que aumenta la profundidad (Figura 6).

$$\psi_h = \frac{P}{\rho} [J / m] \quad (4)$$

1.5.3 Potencial osmótico

El potencial osmótico resulta de la diferencia en concentraciones de soluto en el suelo. El gradiente osmótico tiende a forzar el agua en la dirección de la mayor concentración de iones. Este potencial tiene relevancia cuando se trabaja con suelos o aguas salinas; sin embargo, en la mayoría de los casos es despreciable. Por lo tanto, se tiene que:

$$\psi_{osm} = 0 \quad (5)$$

1.5.4 Otros potenciales

Además del potencial osmótico, otros potenciales como los de absorción, térmico, externo y químico son despreciables en el modelamiento de flujo de agua a través del suelo, ya que no son representativos respecto a los antes citados y tampoco es fácil involucrarlos en las ecuaciones. Un estudio más detallado de estos potenciales se encuentra en Remson, 1971.

Por lo tanto, asumiendo un sistema isotérmico, el potencial de humedad se describe como la cantidad de trabajo liberado para remover una unidad de masa de agua del suelo de cierto sitio en forma de agua pura libre a la misma temperatura, y transfiriendo esta cantidad isotérmicamente a un nivel de referencia de potencial cero (de Laats, 1980). Así se obtiene:

$$\nabla \psi_t = \nabla \psi_g + \nabla \psi_h [J / Kg] \quad (6)$$

$$\nabla \psi_t = g \nabla z + \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) [J / Kg] \quad (7)$$

Para un sitio dado, se obtiene:

$$\psi_t = \int_0^p \frac{1}{\rho} d\alpha + g \int_0^z d\beta [J / Kg] \quad (8)$$

El potencial ψ_t representa una cantidad escalar si este gradiente describe un campo vectorial sin una componente rotacional, (De Wiest-1966). ψ_t esta dado por la ecuación (8) generando un campo vectorial irrotacional, suponiendo la densidad como función de p y asumiendo un medio homogéneo e incompresible, se tiene para un sistema isotérmico:

$$\psi_t = gz + \frac{P}{\rho} [J / Kg] \quad (9)$$

Multiplicando la ecuación (9) por ρ , obtenemos el potencial de humedad P , el cual es expresado en energía por unidad de volumen:

$$P = \rho gz + p [J / m^3] \quad (10)$$

Dividiendo finalmente la ecuación (10) por (ρg) , se tiene el potencial de humedad en energía por unidad de peso, lo cual es equivalente a unidades de longitud y es llamada cabeza hidráulica.

$$H = z + \frac{P}{\rho g} [m] \quad (11)$$

Esta última ecuación es valida tanto en la zona no saturada como en la zona saturada, existiendo una diferencia, ya que en la zona no saturada P es debida a la fuerza mátrica y en la zona saturada a la presión hidrostática. La cabeza hidráulica es

entonces la suma de la cabeza gravitacional z y la cabeza de presión ψ , donde esta última está definida por:

$$\psi = \frac{P}{\rho g} [m] \quad (12)$$

Por lo tanto, una expresión para el potencial de humedad es la dada por:

$$H = z + \psi [m] \quad (13)$$

1.6 CURVAS CARACTERÍSTICAS DEL SUELO

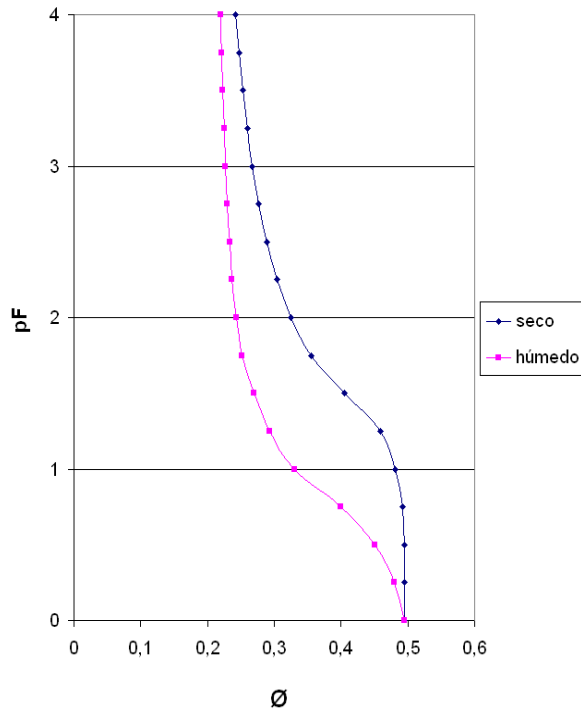
Existen dos importantes relaciones en el estudio del suelo en la zona no saturada, como lo son la curva característica de humedad y la curva de conductividad hidráulica. Estas funciones son dependientes del contenido de humedad y con base en estas se pueden conocer las propiedades de los suelos parcialmente saturados.

1.6.1 Curva característica de humedad del suelo

La curva característica de humedad del suelo es la relación entre la humedad volumétrica θ (cm^3/cm^3) y la cabeza de presión (succión). Esta curva describe el estado de energía relativo al volumen de agua almacenada en un material poroso bajo condiciones variables de saturación (Stephens, 1996).

Esta curva depende del tamaño y distribución de los poros, así como de la mineralogía de cada suelo; sin embargo, no existe una única curva para un determinado suelo, ya que estas varían de acuerdo al método empleado para su obtención, además de

Figura 7. Curva de humedecimiento-secado



humedecimiento (Jensen, 1983).

fenómenos presentes en el suelo como la histéresis, causada por los procesos de humedecimiento y secado del suelo. La curva de humedecimiento (**wetting**) y secado (**drying**) del suelo (Figura 7), muestra una diferencia debido a los ángulos de contacto entre el agua y los poros del suelo; sumado a esto, se encuentra la dificultad para el escape del aire atrapado y la capacidad de expansión de los suelos arcillosos. Por esto, la histéresis generalmente hace que se obtengan mayores contenidos de agua para el fenómeno de secado que para el fenómeno de

El rango de presiones que pueden presentarse en un suelo es muy amplio, debido a esto y por razones prácticas, en la elaboración de la curva se introdujo un nuevo término, pF, el cual es el logaritmo en base diez del valor absoluto de la presión.

$$pF = \log|-\psi| \quad (14)$$

Aunque este valor puede estar en un amplio intervalo, los valores representativos están dados en un intervalo de [0 , 4.2]; este intervalo tiene como base la vida útil de las plantas, ya que para pF=0, se tiene el estado saturado y para pF=4.2 se tiene el punto donde mueren las plantas.

Analizando la curva característica, se conoce el comportamiento y estructura del suelo con respecto a la humedad. Cuando el pF se incrementa, las arenas con respecto a las arcillas pierden rápidamente agua debido a los macroporos, ya que las arcillas a pesar de poseer porosidades altas debido a la naturaleza de sus poros pequeños, hacen mas difícil el paso del agua a través de ellos manteniendo la humedad del suelo por mucho mas tiempo (Figura 8,9).

Figura 8. Funciones hidráulicas Yolo Light Clay

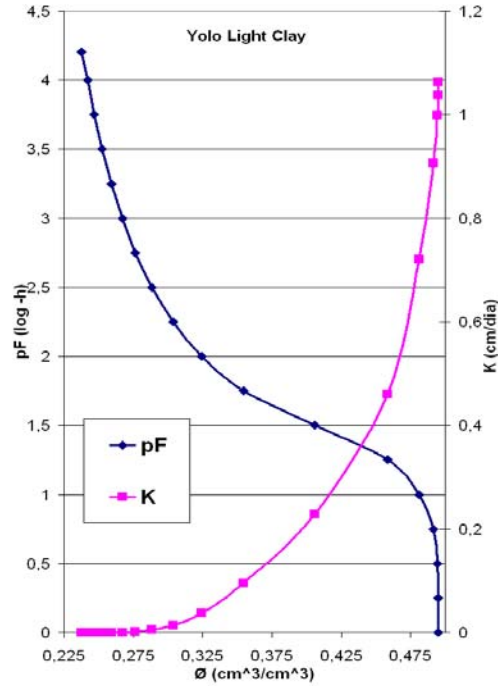
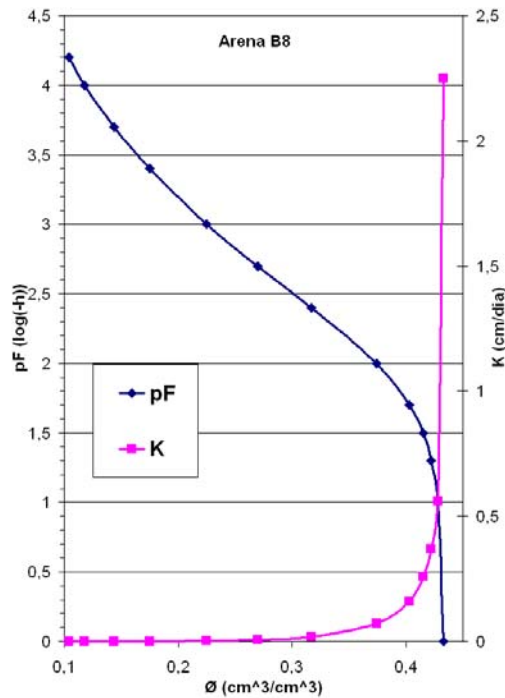


Figura 9. Funciones hidráulicas suelo B8.



1.6.2 Conductividad hidráulica

La conductividad hidráulica (K) de un suelo describe la facilidad de un medio para conducir un fluido. Para la zona no saturada este no es un valor único; este valor depende del contenido de humedad del suelo y por lo tanto de la presión existente en el sitio de contacto del agua con el suelo.

El valor de la conductividad hidráulica puede variar en gran proporción entre el suelo saturado (K_s) y el mismo suelo con un contenido de humedad menor. Las arenas son buenas para el transporte y almacenamiento de agua debido a la cantidad de macroporos presentes en ellas, produciendo así, una baja resistencia del flujo. Las arcillas por el contrario, presentan un decrecimiento gradual de la conductividad hidráulica con valores relativamente bajos.

Los fenómenos presentes en la elaboración de la curva característica de humedad se hacen también presentes en la construcción de la función de la conductividad hidráulica esto se debe a la presencia de los mismos factores anteriormente descritos. Para aplicaciones prácticas, la histéresis se desprecia ya que no es de gran importancia para la mayoría de suelos; sin embargo, se debe tener especial atención de este fenómeno cuando los suelos en estudio sean arcillosos.

2. SOLUCION MATEMATICA DE LA ECUACION DE RICHARDS

2.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

El movimiento del agua es dado de mayor a menor potencial. La ley de Darcy (1856) está dada por:

$$\vec{q} = -K\nabla H \text{ (15)}$$

Donde q es el caudal por unidad de área [m/s], K es la conductividad hidráulica [m/s], H es la cabeza hidráulica y ∇ es el operador de Laplace.

En la zona no saturada, la conductividad hidráulica es función del contenido de agua en el suelo, expresándose como $K=K(\theta)$; por el contrario en la zona saturada, K es independiente de θ (de Laat, 2001), por lo tanto la ley de Darcy para la zona no saturada se puede expresar como:

$$\vec{q} = -K(\theta)\nabla H \text{ (16)}$$

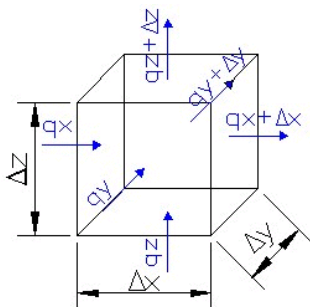
Y en cada dirección como:

$$q_x = -K(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ (17)}$$

$$q_y = -K(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ (18)}$$

$$q_z = -K(\theta) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \quad (19)$$

Figura 10. Conservación de masas.



Para el elemento mostrado (Figura 10), se determina el movimiento del agua en dirección unidimensional, donde q_x es el gasto de entrada y $q_{x+\Delta x}$ es el gasto de salida. Teniendo en cuenta el concepto de conservación de masa se obtiene:

masa de entrada - masa de salida = masa neta

donde,

$$m.entrada = \rho \cdot q_x \Delta_y \Delta_z \Delta_t \quad (20)$$

$$m.salida = \rho \cdot (q_{x+\Delta x}) \Delta_y \Delta_z \Delta_t \quad (21)$$

$$m.neta = (\rho \cdot q_x - \rho \cdot q_{x+\Delta x}) \Delta_y \Delta_z \Delta_t \quad (22)$$

Multiplicando por $(\Delta x/\Delta x)$ obtenemos que la masa neta resultante es:

$$m.neta_x = \frac{-\Delta \rho \cdot q_x}{\Delta_x} \Delta_x \Delta_y \Delta_z \Delta_t \quad (23)$$

Donde ρ es la densidad del agua [Kg/m³]. La ecuación (23) de igual manera puede describir la masa neta para las otras direcciones:

$$m.neta_y = \frac{-\Delta \rho \cdot q_y}{\Delta_y} \Delta_x \Delta_y \Delta_z \Delta_t \quad (24)$$

$$m.neta_z = \frac{-\Delta\rho \cdot q_z}{\Delta_z} \Delta_x \Delta_y \Delta_z \Delta_t \quad (25)$$

Conociendo que el cambio de humedad en un volumen y en un delta de tiempo está dado por $(\Delta\rho \theta \Delta_x \Delta_y \Delta_z)$, se iguala a la ley de conservación de masa y obtenemos:

$$\Delta\rho\theta\Delta_x\Delta_y\Delta_z = -\left(\frac{\Delta\rho \cdot q_x}{\Delta_x} + \frac{\Delta\rho \cdot q_y}{\Delta_y} + \frac{\Delta\rho \cdot q_z}{\Delta_z}\right) \Delta_x\Delta_y\Delta_z\Delta_t \quad (26)$$

Asumiendo una densidad constante, llegamos a la ecuación de continuidad:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = -\left(\frac{\Delta q_x}{\Delta_x} + \frac{\Delta q_y}{\Delta_y} + \frac{\Delta q_z}{\Delta_z}\right) \quad (27)$$

Escribiendo la ecuación (27) en forma diferencial:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) = \nabla \vec{q} \quad (28)$$

Esta ecuación se denota de forma diferencial debido a que el gasto (q) y la humedad (θ) depende tanto de la dirección del analisis como del tiempo.

Combinando la ecuación de continuidad (27) y la de Darcy (15), obtenemos la ecuación general de flujo:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K(\theta)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K(\theta)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K(\theta)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right] + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (29)$$

Como θ está relacionada con ψ en la curva de humedad característica del suelo, la relación de la conductividad hidráulica $K(\theta)$ también se puede escribir como $K(\psi)$. La ecuación (29) se puede escribir como una ecuación de una variable dependiente con la introducción de la capacidad de humedad diferencial (C):

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial\theta}{\partial\psi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} = C(\psi) \frac{\partial\psi}{\partial t} [m/s] \quad (30)$$

Donde $C(\psi)$ es el recíproco de la pendiente de la humedad característica:

$$C(\psi) = \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \quad (31)$$

Reemplazando $K(\theta)$ por $K(\psi)$ y substituyendo la ecuación (31) en la (30), se obtiene:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] + K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (32)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de Richards (1931). La solución de esta requiere el uso de la relación entre la conductividad hidráulica y la humedad característica del suelo (de Laar, 2001).

La ecuación (32) se puede escribir en términos de θ introduciendo la difusividad (D), la cual se define como:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{K(\theta)}{C(\theta)} \quad (33)$$

La difusividad no es un término físicamente definido, es una simplificación con el fin de resolver de una manera más sencilla y eficaz la no linealidad que se presenta en la solución de la ecuación de Richards. Sin embargo, la utilización de la difusividad no puede realizarse en medios saturados, ya que se presenta una variación de la presión (ψ) mientras que el contenido de humedad (θ) permanece constante, haciendo que esta relación no esté definida para esta zona. Escribiendo la ecuación de Richards en términos de D y θ ; es decir, reemplazando en la ecuación (32), se obtiene la ecuación de Philip (1957) llamada la ecuación de transporte-difusión:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (34)$$

Analizando el flujo en dirección vertical, la ecuación se reduce a dos términos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \quad (35)$$

2.2 APROXIMACIÓN POR DIFERENCIAS FINITAS

2.2.1 Generalidades

Las soluciones de ecuaciones de flujo pueden ser llevadas a cabo con la utilización de aproximaciones numéricas. Uno de los métodos más utilizados es el de diferencias finitas, debido a su facilidad de aplicación y solución, evitando el trabajo de elaborar complicadas grillas como se requiere para el método de elementos finitos; sin embargo, ambos métodos conllevan a la elaboración de un sistema de ecuaciones simultáneas.

La idea básica de las diferencias finitas es reemplazar derivadas en un punto, por la tasa de cambio en las variables apropiadas sobre un intervalo pequeño pero finito (Remson, 1971):

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta x} \approx \frac{\Delta \theta}{\Delta x} \quad (36)$$

Este no deja de ser un método de aproximación, pero tomando un Δx pequeño, se

pueden obtener errores despreciables, así como también sucede con una grilla correctamente definida y un adecuado uso del método.

2.2.2 Diferencias finitas

Se tiene una función $f(x)$ continua y finita, la cual puede expandirse por medio de series de Taylor en dos direcciones, la positiva y la negativa.

- Dirección positiva

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{df}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (37)$$

- Dirección Negativa

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \frac{\Delta x}{1!} \frac{df}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \dots \quad (38)$$

Utilizando la ecuación (37) se puede resolver df/dx , despreciando los términos elevados al cuadrado y de mayor grado, con lo cual se obtiene la diferencia delantera:

$$\frac{df}{dx} \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (39)$$

Realizando el mismo procedimiento para la ecuación (38) se obtiene la diferencia trasera:

$$\frac{df}{dx} \cong \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} \quad (40)$$

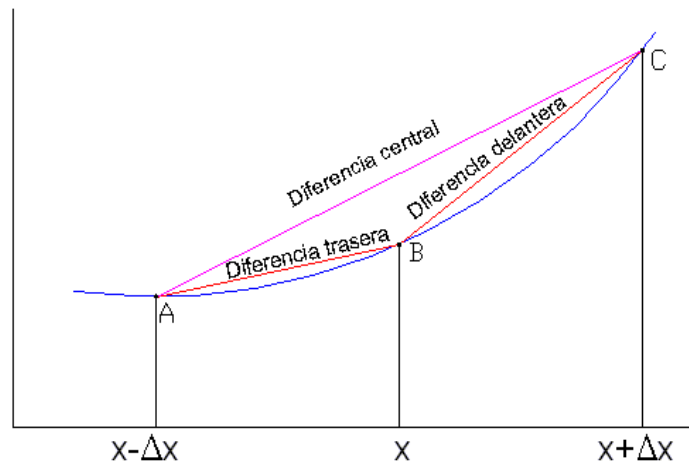
Restándole a la ecuación (38) la ecuación (37), se obtiene la diferencia central:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (41)$$

El error de las derivadas (37) y (38) es el error de truncamiento de las series de Taylor. El error de truncamiento en este caso es de Δx^2 .

Se observa (Figura 11) como se efectúa la aproximación numérica utilizando las diferencias finitas, donde a medida que Δx es menor, se obtiene una derivada mas precisa en el punto B.

Figura 11. Aproximación por diferencias finitas.



Para hallar las derivadas de segundo orden, se suman las ecuaciones (37) y (38) con lo cual se despeja el termino d^2f/dx^2 , y se desprecian los términos de orden superior con lo cual se obtiene:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \cong \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (42)$$

La cual tiene un error de truncamiento de Δx^2 .

De este modo, se pueden obtener aproximaciones a derivadas de orden superior; sin embargo, para las ecuaciones utilizadas en soluciones de flujo, se puede considerar suficiente con la aproximación por diferencias de segundo orden.

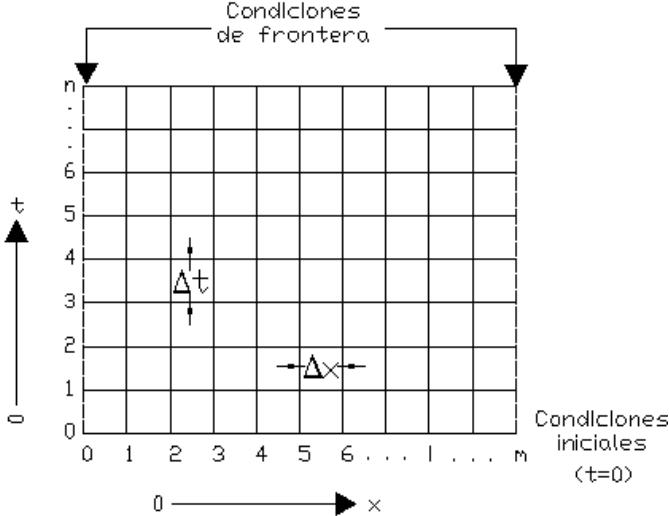
2.2.3 Aplicación de diferencias finitas

Para la utilización de diferencias finitas es necesario adoptar una notación para los distintos términos de la ecuación, así como para los intervalos de aproximación; esto se observa en la grilla que depende de las variables independientes. Para ilustrar la aplicación de las diferencias finitas, se decidió mostrar un ejemplo de la infiltración horizontal en un suelo, dada por la ecuación de difusión en una dirección.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (43)$$

Donde las coordenadas de interés para la elaboración de la grilla son t y x, las cuales representan el tiempo y la distancia respectivamente, tal como se muestra (Figura 12), convirtiéndose este en el primer paso para obtener la solución. Esta grilla nos muestra los nodos (intersecciones) que corresponden a una profundidad y tiempo determinado.

Figura 12. Grilla para la solución de diferencias finitas.



La solución se puede llevar a cabo mediante dos enfoques, explícito e implícito, donde se pueden presentar distintos problemas de convergencia.

- Aproximación explícita

Esta se lleva a cabo por medio de sustitución de las derivadas parciales por las diferencias delanteras en el tiempo n y $n+1$. Aplicando esto a la ecuación (43) se obtiene:

$$\frac{(\theta_i^{n+1} - \theta_i^n)}{\Delta t} = D \left(\frac{(\theta_{i-1}^n - \theta_i^n)}{\Delta x} - \frac{(\theta_i^n - \theta_{i+1}^n)}{\Delta x} \right) \quad (44)$$

En la cual se puede resolver el término:

$$\theta_i^{n+1} = \theta_i^n + D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (\theta_{i-1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i+1}^n) \quad (45)$$

Esta ecuación puede ser resuelta para todos los nodos con la introducción de las condiciones de frontera, tanto la superior como la inferior, ya que todos los términos n se suponen conocidos de un tiempo anterior.

Por lo tanto, la solución de la ecuación(43) se convierte en la solución iterativa de la ecuación (45); sin embargo, es conveniente analizar algunos problemas de estabilidad que se pueden presentar. El resultado obtenido no es una realidad absoluta; si los Δx y Δt tienden a cero, se obtiene una buena aproximación, sin embargo, es conveniente estimar los posibles errores ya que si estos se amplían se convierte en una solución inestable. Para prevenir esto es necesario cumplir con la condición:

$$D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2} \quad (46)$$

Para evitar lo que constituye una restricción que limita el modelamiento, se utiliza un esquema implícito, donde los requisitos de convergencia y estabilidad son menores.

- Aproximación implícita

Esta es obtenida por medio de un reemplazo de la diferencia trasera en sus derivadas, con lo cual se aproxima para un tiempo futuro. Aplicándolo a la ecuación (43) se obtiene:

$$\frac{\theta_i^n - \theta_i^{n-1}}{\Delta t} = D \left(\frac{\theta_{i-1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i+1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (47)$$

Con dicha ecuación, evaluada en cada nodo, se obtiene un sistema de ecuaciones debido a las tres incógnitas existentes en cada ecuación. El error presente puede ser minimizado con la utilización de la aproximación de Crank-Nicolson (De Laat, 2001).

Reorganizando la ecuación (47) sin utilizar la aproximación de Crank-Nicolson se obtiene:

$$\theta_{i-1}^n - \theta_i^n \left(2 + \frac{\Delta x^2}{D\Delta t} \right) + \theta_{i+1}^n = -\theta_i^{n-1} \quad (48)$$

Reordenando la ecuación (48), se obtiene:

$$\theta_i^{n-1} = -\theta_{i+1}^n + \theta_i^n \left(2 + \frac{\Delta x^2}{D\Delta t} \right) - \theta_{i-1}^n \quad (49)$$

Para esta ecuación se asignan coeficientes para así visualizar de una manera más sencilla el sistema de ecuaciones:

$$A = -1 \text{ (50)}$$

$$B = 2 + \frac{\Delta x^2}{D\Delta t} \text{ (51)}$$

$$C = -1 \text{ (52)}$$

$$D = 1 \text{ (53)}$$

De este modo, el sistema de ecuaciones, con la introducción de las condiciones de frontera se obtiene el perfil de humedades de todos los puntos de la columna de suelo y se visualiza de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \cdots & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_{ND} & B_{ND} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^n \\ \theta_2^n \\ \theta_3^n \\ \vdots \\ \theta_{ND}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_{ND} \end{bmatrix} \text{ (54)}$$

2.3 SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS

Algunos parámetros como suelos isotrópicos e incompresibles, flujos laminares y un medio poroso continuo entre otros, se asumen con el fin de simular el movimiento del agua en el suelo. Es por esto y principalmente por la no linealidad presente en las curvas de conductividad hidráulica contra presión y presión contra contenido de humedad que no existe una solución analítica general que describa el flujo del agua en la zona no saturada.

En la zona no saturada, el gradiente hidráulico en la dirección horizontal es despreciable con respecto al gradiente en la dirección vertical, cuando existen grandes áreas con condiciones hidrológicas uniformes en la superficie. Debido a esto, el flujo tiene un movimiento predominantemente en dirección vertical.

La ecuación que gobierna el flujo (31) en la dirección vertical, puede ser resuelta por medio de diferencias finitas y con la introducción de las extracciones (S [1/seg]), esta es escrita de la forma:

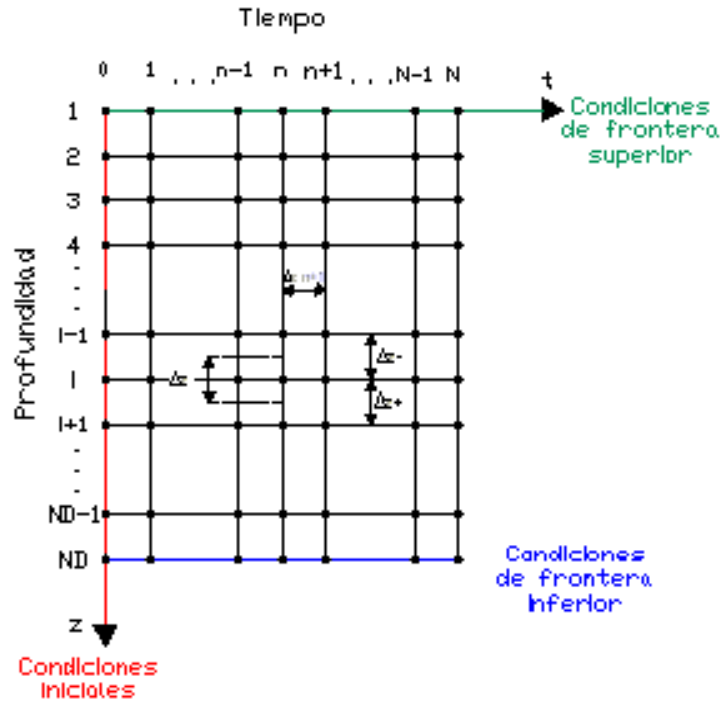
$$C \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z} - S \quad (55)$$

Donde q está dado por:

$$q = -K \frac{\partial H}{\partial z} = -K \frac{\partial \psi}{\partial z} + K \quad (56)$$

Se decidió realizar un modelo (Figura 13) en donde los nodos se encuentran separados por Δz de igual longitud, así como de intervalos de tiempo iguales Δt , conformando un sistema de coordenadas. $\psi(i, n)$, donde i representa el nodo y n el tiempo en el cual se encuentra. Así mismo, se observan las condiciones que rigen el modelo, como lo son las condiciones iniciales y las de frontera.

Figura 13. Grilla empleada en el modelo, donde el eje X representa el tiempo y el eje Y la profundidad de la columna de suelo.



Aplicando diferencias finitas de la manera implícita a la ecuación (55), obtenemos las ecuaciones para los intervalos medios de tiempo y de espacio:

$$C_i^{n+1/2} \frac{\psi_i^{n+1} - \psi_i^n}{\Delta t} = - \frac{(q_{i+1/2}^{n+1} - q_{i-1/2}^{n+1})}{\Delta z} \quad (57)$$

$$q_{i+1/2}^{n+1} = -K_{i+1/2}^{n+1/2} \left(\frac{\psi_{i+1}^{n+1} - \psi_i^{n+1}}{\Delta z_+} \right) + K_{i+1/2}^{n+1/2} \quad (58)$$

$$q_{i-1/2}^{n+1} = -K_{i-1/2}^{n+1/2} \left(\frac{\psi_i^{n+1} - \psi_{i-1}^{n+1}}{\Delta z_-} \right) + K_{i-1/2}^{n+1/2} \quad (59)$$

Reemplazando las ecuaciones (58) y (59) en (57) se obtiene la siguiente expresión:

$$C_i^{n+1/2} \left(\frac{\psi_i^{n+1} - \psi_i^n}{\Delta t} \right) = \frac{\left[K_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{\psi_{i+1}^{n+1} - \psi_i^{n+1}}{\Delta z_+} - K_{i+1/2}^{n+1/2} - K_{i-1/2}^{n+1/2} \frac{\psi_i^{n+1} - \psi_{i-1}^{n+1}}{\Delta z_-} + K_{i-1/2}^{n+1/2} \right]}{\Delta z} \quad (60)$$

Reorganizando la ecuación (60) de manera que los términos para el siguiente intervalo de tiempo queden a la izquierda (desconocidos) se obtiene:

$$- \psi_{i-1}^{n+1} \left[\frac{K_{i-1/2}^{n+1/2}}{(\Delta z)(\Delta z_-)} \right] + \psi_i^{n+1} \left[\frac{C_i^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{K_{i+1/2}^{n+1/2}}{(\Delta z)(\Delta z_+)} + \frac{K_{i-1/2}^{n+1/2}}{(\Delta z)(\Delta z_-)} \right] - \psi_{i-1}^{n+1} \left[\frac{K_{i+1/2}^{n+1/2}}{(\Delta z)(\Delta z_+)} \right] = \psi_i^n \frac{C_i^{n+1/2}}{\Delta t} - \frac{K_{i+1/2}^{n+1/2} - K_{i-1/2}^{n+1/2}}{(\Delta z)} \quad (61)$$

Para la solución de la ecuación se asignan coeficientes de la siguiente manera:

$$A_i = - \frac{K_{i-1/2}^{n+1/2}}{(\Delta z)(\Delta z_-)} \quad (62)$$

$$B_i = \frac{C_i^{n+1/2}}{\Delta t} - A_i - C_i \quad (63)$$

$$C_i = - \frac{K_{i+1/2}^{n+1/2}}{(\Delta z_i)(\Delta z_i +)} \quad (64)$$

$$D_i = \frac{C_i^{n+1/2}}{\Delta t} \psi_i^n - \frac{K_{i+1/2}^{n+1/2} - K_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - S_i \quad (65)$$

Empleando estos coeficientes, la ecuación se visualiza de la siguiente forma para todos los nodos:

$$A_i \psi_{i-1}^{n+1} + B_i \psi_i^{n+1} + C_i \psi_{i+1}^{n+1} = D_i \quad (66)$$

De este modo, se tiene un sistema de ecuaciones, donde ND es el número total de nodos, en donde esta cantidad depende de la precisión deseada del estudio, el sistema de ecuaciones se puede escribir de forma matricial como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & \dots & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & \dots & \\ 0 & A_3 & B_3 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{ND} & B_{ND} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \vdots \\ \psi_{ND} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \vdots \\ D_{ND} \end{bmatrix} \quad (67)$$

2.4 PARÁMETROS BÁSICOS

Para solucionar el sistema de ecuaciones se debe conocer el estado en el cual se encuentra el suelo, las condiciones iniciales de todo el perfil, así como también, las condiciones de frontera tanto superior como inferior para sus respectivos nodos.

2.4.1 Condiciones iniciales

Estas condiciones son las presentes en el perfil de suelo en el instante anterior al inicio de la simulación. Cuando estas no son conocidas pero se tienen registros de lluvias para los días anteriores (2-3 días), se recomienda tomar el valor de la capacidad de campo para el conjunto de celdas.

2.4.2 Condición de frontera superior

Existen dos tipos de condiciones en la frontera superior para la solución de las diferencias finitas empleadas en el modelo. La condición saturada o de Dirichlet y la condición de flujo o de Neumann.

Para la condición saturada, se asume que el nodo superior se encuentra saturado un instante después de iniciar la simulación; por lo tanto, se conoce la presión en el nodo superior, reduciéndose el sistema en una ecuación, quedando un sistema de ND-1 ecuaciones.

$$\psi_1 = 0 \text{ (68)}$$

La condición de flujo se establece mediante el suministro de un caudal, donde q_1 es el flujo resultante a través de la superficie del suelo, el cual puede ser calculado de la siguiente manera (Jensen, 1983):

$$q_1 = \textit{precipitacion} - \textit{interceptacion} - \textit{evaporacion} \text{ (69)}$$

donde la ecuación para el primer nodo esta dada por los siguientes coeficientes:

$$A_1 = 0 \text{ (70)}$$

$$B_1 = \frac{C_1^{n+1/2}}{\Delta t} + \frac{K_{1+1/2}^{n+1/2}}{\Delta z_{1+} \cdot \Delta z_1} \quad (71)$$

$$C_1 = -\frac{K_{1+1/2}^{n+1/2}}{\Delta z_{1+} \cdot \Delta z_1} \quad (72)$$

$$D_1 = \frac{C_1^{n+1/2}}{\Delta t} \psi_1^n - \frac{K_{1+1/2}^{n+1/2}}{\Delta z_1} + \frac{q_1}{\Delta z_1} - S_1^n \quad (73)$$

2.4.3 Condición de frontera inferior

La condición de frontera inferior se define con la ubicación del último nodo de la grilla, donde la presión para este nodo puede ser cero ($\psi = 0$) cuando se encuentra en el nivel freático; positiva ($\psi > 0$) cuando esta por debajo de dicho nivel, donde el valor será igual a la profundidad por debajo del nivel freático; y por último, negativa ($\psi < 0$) cuando se encuentra en la zona no saturada. Conociendo este valor, el sistema de ecuaciones se reduce nuevamente en una ecuación.

2.5 REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES HIDRÁULICAS DEL SUELO

Debido al carácter no lineal y a la diversidad de formas presentes en las funciones hidráulicas de los suelos, estas se han tratado de ajustar a diferentes curvas, las cuales no representan a cabalidad el comportamiento real de las mismas. En algunos casos, estas curvas se ajustan muy bien para arcillas y no mucho para las arenas, o en su defecto, el error se presenta en las partes húmedas y/o secas del suelo. Además de lo anterior, la definición de los parámetros para cada ecuación, hacen complicada la solución de dichas funciones.

Por esto, se utilizó un ajuste de la función mediante una interpolación realizada con spline cúbicos. Este método nos permite un ajuste de la función pasando por tantos puntos como datos reales se tengan, con lo cual se asegura que el trabajo hecho en el laboratorio tendrá la importancia del caso, minimizando los posibles errores de aproximación.

2.5.1 Función spline

El ajuste de curvas por medio de spline cúbicos consiste en representar cada intervalo entre dos puntos por medio de una ecuación $f(x)$ de la forma:

$$f(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad (74)$$

Donde a_i , b_i , c_i y d_i son constantes halladas para cada intervalo y x_i es el punto inicial del intervalo; por lo tanto, la ecuación (74) es válida para el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, donde $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ (Apéndice A).

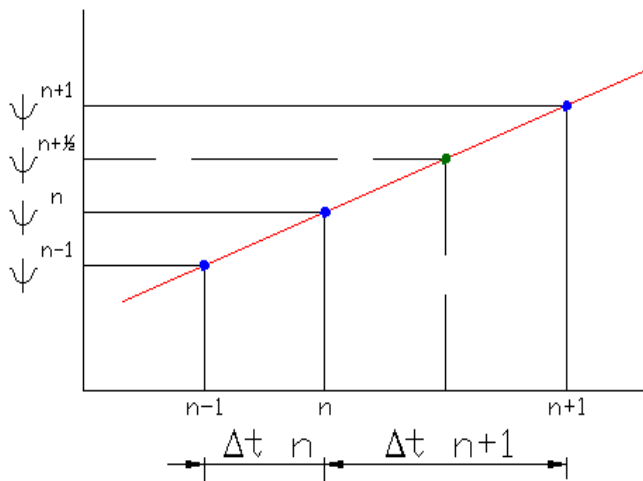
2.6 VALORES PARA LOS INTERVALOS MEDIOS

Para la estimación de la conductividad hidráulica en los puntos medios de los intervalos de espacio, se optó por utilizar el método geométrico debido a que este genera solo un pequeño error. El tamaño de este no está fuertemente influenciado por los incrementos en el espacio y es preferible en términos de flexibilidad y precisión para la simulación de flujo de agua en suelos parcialmente saturados (Haverkamp y Vauclin, 1979); por lo tanto, la expresión esta dada por:

$$K_{i+1/2}^n = \left(K_i^n \cdot K_{i+1}^n \right)^{1/2} \quad (75)$$

$$K_{i-1/2}^n = \left(K_i^n \cdot K_{i-1}^n \right)^{1/2} \quad (76)$$

Figura 14. Relación empleada para realizar la extrapolación para el intervalo medio de tiempo siguiente.



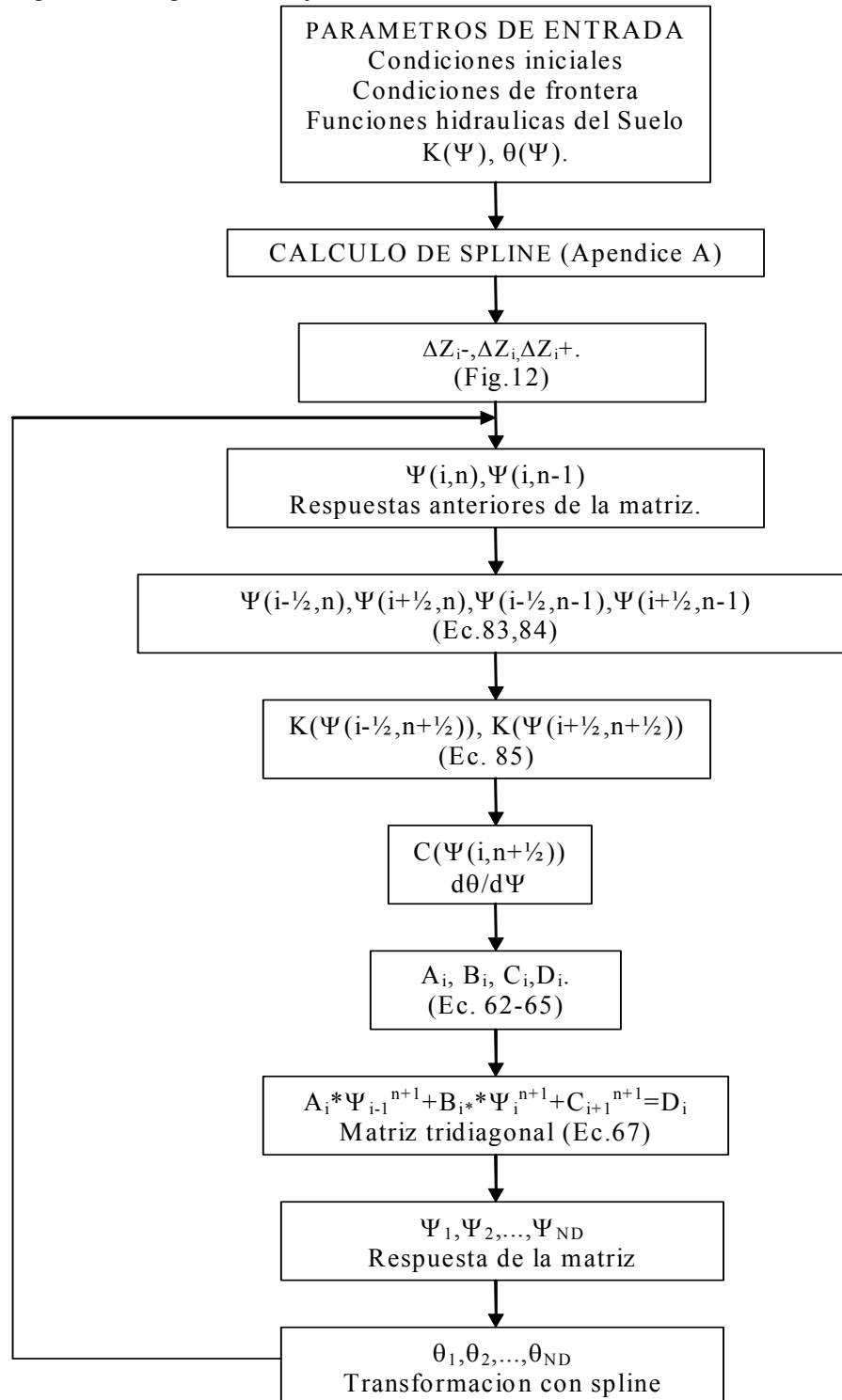
Para resolver las ecuaciones (62), (63), (64) y (65), se realiza una extrapolación (Figura 14) para calcular la conductividad hidráulica en el intervalo medio de tiempo, teniendo en cuenta la conductividad hidráulica de cada nodo tanto en el tiempo n como en el anterior y siguiente; además asumiendo un Δt constante, esta extrapolación es de tipo lineal, lo cual no se ajusta a la realidad; sin embargo, en la ejecución del

programa los resultados obtenidos son satisfactorios. La expresión para la extrapolación esta dada por:

$$K_{i+1/2}^{n+1/2} = \left[K_i^n + \left(\frac{K_i^n - K_i^{n-1}}{2} \right) \right] \quad (77)$$

2.7 DIAGRAMA DE FLUJO

Figura 15. Diagrama de flujo del modelo matemático



3. MODELO FÍSICO

3.1 GENERALIDADES

El modelo físico realizado describe el movimiento del frente húmedo en una columna de suelo; es decir, el movimiento del agua en la zona no saturada. Para esto fue necesario establecer las componentes a utilizar para el diseño y puesta en marcha de este modelo, así como también el tipo de suelo a ensayar y sus parámetros iniciales.

El ensayo demanda una muestra de suelo en lo posible homogénea, así como un suministro de caudal constante para simular el movimiento del agua en la zona no saturada. Para esto, se elaboró un sistema de riego que proporcionará un caudal constante y una columna de suelo, para lo cual se desarrollaron distintos métodos de suministro de agua y se ensayaron varios tipos de suelo para permitir un análisis de acuerdo a los instrumentos utilizados.

3.1.1 Sistema de riego

- Botella de Mariotte

La botella de Mariotte es un instrumento que por medio de presiones constantes, puede llegar a suministrar un caudal constante. Para la realización del modelo, se elaboraron algunos ajustes según los requerimientos. Esta botella de Mariotte (Figura 16) consta de un botellón de plástico de capacidad 20L, al cual se le adaptaron varios accesorios.

Figura 16. Botella de Mariotte



Figura 17. Tubo reductor y flauta.



En su parte inferior, a 3 cm aproximadamente se instaló un tubo de PVC de diámetro de $\frac{1}{2}$ ", al cual se le adaptó una llave y posteriormente un tubo reductor y una flauta (Figura 17). La llave, con el fin de controlar la salida de agua y la flauta, también en tubería de PVC de $\frac{1}{2}$ ", para distribuir el caudal a la columna de suelo en función de la cantidad y el diámetro de sus orificios.

En su parte superior, la botella tiene una abertura la cual fue sellada para evitar el paso de aire en exceso; así mismo, se introdujo en el centro del selle, un tubo de plástico de aproximadamente 3 mm de diámetro, el cual permite controlar de una manera más precisa la cantidad de agua a evacuar. De este modo, entre más arriba se encuentre el tubo de diámetro de 3 mm con respecto al fondo de la botella, mayor será el caudal que la botella podrá evacuar; esto se debe a la cantidad de aire que entra en la botella. Se observa un accesorio en su parte superior derecha (Figura 16), un tubo de PVC de diámetro de 1.5" con su respectivo tapón roscado, el cual sirve para suministrar el agua a la botella.

Para la calibración de la botella de Mariotte, se variaron las cantidades de orificios en la flauta, así como también el diámetro de los mismos. Esto con el fin de obtener un caudal óptimo para la ejecución del ensayo. Para las pruebas se utilizó la flauta con un solo orificio, ubicado en el centro de ella y evacuando un caudal de 1.26 L/h. Además, al agua contenida en la botella se le agregó colorante azul, para observar con mayor claridad el movimiento del frente húmedo en la columna de suelo.

- Equipo de micro goteo

Para el ensayo realizado se decidió utilizar un equipo de micro goteo que reemplazó la flauta (Figura 18), con el objetivo de suministrar un caudal de salida menor el cual cumpliera los requerimientos planteados para un adecuado funcionamiento del modelo físico.

Figura 18. Equipo de Micro goteo.



3.1.2 Columna de suelo

La columna es una estructura que consta de dos placas de vidrio templado, tres listones de madera y 15 tornillos galvanizados (Figura 19). Cada placa de vidrio de 1

Figura 19. Columna de suelo parcialmente llena.



m x 0.5 m x 0.01 m posee 15 perforaciones de diámetro $\frac{1}{2}$ " a través de las cuales pasan los tornillos de diámetro $\frac{3}{8}$ " de 15 cm de longitud, uniendo así las placas de vidrio con los listones de madera de área de 10 cm x 10 cm con una respectiva protección entre estos y el vidrio por medio, una delgada capa de icopor. La columna se llena con suelo hasta una altura determinada, la cual es medida a partir de la superficie superior del listón de madera inferior. Al listón de madera inferior se le elaboraron dos perforaciones adicionales en la dirección vertical de diámetro $\frac{1}{2}$ ", con el fin de permitir la salida de humedad por medio de dicho drenaje.

3.2 PROCEDIMIENTO

El procedimiento para la realización del ensayo se puede dividir en distintas partes. Las actividades preliminares, que como su nombre lo indica son las actividades a realizar antes de la ejecución del ensayo como tal, como lo son la armada de la columna, compactación del suelo, la calibración del caudal a suministrar (en este caso se optó por utilizar la botella junto con el equipo de micro goteo); y la otra parte es la puesta en marcha y toma de muestras del ensayo.

3.2.1 Actividades preliminares

Primero que todo, se arma la estructura de la columna, se selecciona el tipo de suelo a utilizar y posteriormente se inicia la compactación del suelo utilizando un martillo de compactación, con el cual se realiza el ensayo de Proctor. La humedad con la cual se compacta varía dependiendo del tipo de suelo, buscando acercarse a la humedad óptima de compactación. La compactación se realizó mediante capas de suelo de 10 cm cada una, a las cuales se les suministraron 30 golpes (Figura 20). La última capa, se enrasó y se colocó una delgada capa de grava para proporcionar una distribución uniforme del caudal suministrado por el sistema de riego, evitando así la socavación del punto de entrada del caudal.

Figura 20. Columna de suelo a 40 cm



- Tipos de suelo

La elección del tipo de suelo a utilizar es muy importante, no solo por el tiempo de simulación, sino por la validez de la ecuación de Darcy, ecuación base para la solución numérica elaborada.

El tipo de suelo tiene una incidencia directa en el tiempo de simulación del ensayo, siendo largo para arcillas y corto para las arenas. El movimiento del frente húmedo varía debido a las características inherentes a ellos; por lo tanto, se estudiaron los distintos comportamientos de cada uno de los suelos para posteriormente realizar una simulación que permitiera la medición de humedades. Además, era necesario obtener valores cercanos a las condiciones tanto iniciales como de frontera, para luego realizar la simulación por medio del modelo matemático desarrollado.

Es importante recalcar, que la ecuación de Darcy no aplica para flujos turbulentos, por tanto se debe prestar especial atención cuando se trabaja con suelos granulares. Teniendo en cuenta estos parámetros para la selección del tipo de suelo a emplear en

el modelo físico, se consideró una arcilla, una arena y un suelo arcillo-arenoso.

Arcilla

En primera instancia, se utilizó una arcilla con un alto contenido de finos, donde se esperaba un movimiento lento del frente húmedo y así llevar a cabo una simulación en el modelo matemático por un largo periodo. Para la compactación de este suelo fue necesario la adición de gran cantidad de agua (40% en peso). Este suelo presenta problemas de expansión además de un drenaje por gravedad muy lento, debido a esto se decidió dejar la columna luego de ser compactada en reposo por un periodo de quince días, para permitir su drenaje y poder alcanzar condiciones iniciales estables.

Para este tipo de suelo, la obtención de datos para una simulación resultaría complicado, ya que el caudal suministrado debe ser muy pequeño, debido a la impermeabilidad, lo cual dificulta el paso del agua hacia el suelo.

Figura 21. Modelamiento con suelo arcilloso



Se realizó una prueba utilizando la botella de Mariotte y la flauta, donde se observó una lamina de agua en la parte superior de la columna de suelo (Figura 21), lo cual no era deseable para la simulación con el modelo matemático desarrollado, ya que sería necesaria la incorporación de un nuevo componente para la zona superficial para así conocer la escorrentía que se produce. Por lo tanto, se decidió no utilizar este tipo de suelo y por el contrario buscar un suelo que permitiera una entrada de caudal mayor y un movimiento más rápido del frente.

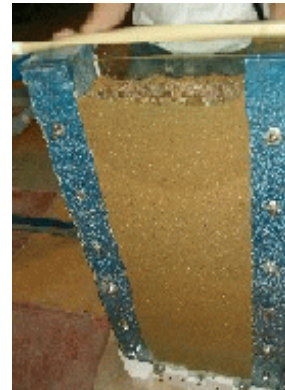
Arena

Debido a los inconvenientes presentados para los suelos finos con respecto a la entrada de flujo, se decidió probar como sería el comportamiento con un suelo de tipo

arenoso, donde el tiempo de simulación fuera corto y el movimiento del frente rápido. Para el suelo arenoso, se dejó la columna en reposo una semana después de su compactación, conociendo que su drenaje sería mucho más rápido que el presentado en la arcilla. Se utilizó como sistema de riego la botella en combinación con la flauta.

En el suelo arenoso, la situación fue diferente. El movimiento del frente húmedo se daba de una manera rápida pero bien definida (Figura 22). A los pocos minutos se observaba la curva del frente húmedo, el cual avanzó sin dificultad a medida que el ensayo transcurría; sin embargo, debido a la rapidez del movimiento del frente húmedo y a la poca altura de la columna, esta se saturó rápidamente. De esta forma, las muestras de los datos que se obtendrían serían en su mayoría saturadas impidiendo generar un perfil de humedad del suelo como era deseado y presentándose la dificultad en el cálculo de condiciones iniciales y de frontera inferior.

Figura 22. Movimiento del frente húmedo en el suelo arenoso



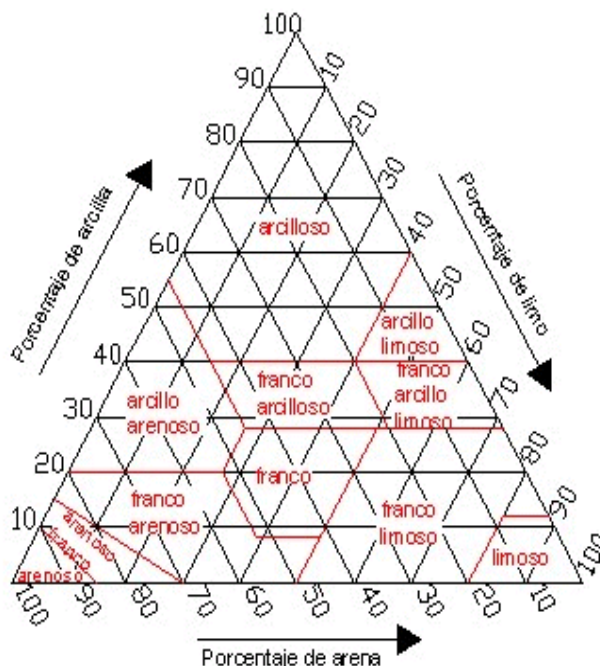
Arcillo-arenoso

Al observar el comportamiento tanto de la arena como de la arcilla se optó por realizar la simulación del modelo físico con un suelo franco, el cual proporcionara un movimiento medio. Este suelo, de acuerdo a un estudio de granulometría tuvo un porcentaje de arenas del 66%, de limos del 14% y de arcillas del 20% (Tabla 1), el cual se clasificó según el diagrama adoptado por el “**Soil Conservation Service**” (Figura 23) donde sus ejes coordenados representan las tres fracciones granulométricas: arena, arcilla y limos, obteniendo así una tierra arcillo-arenosa.

Tabla 1. Granulometría

PESO INICIAL MUESTRA [gr]		900	
PESO DESPUES TAMIZ N°200 [gr]		593,77	
GRANULOMETRIA			
ABERTURA [m m]	PESO SUELO RETENIDO	% RETENIDO PARCIAL	% PASA
4,750	3,12	0,53	99,47
2,000	38,61	6,50	92,97
0,840	194,17	32,70	60,27
0,420	149,64	25,20	35,07
0,250	114,74	19,32	15,75
0,149	47,61	8,02	7,73
0,074	45,88	7,73	0,00
GRANULOMETRIA FINOS			
ABERTURA [m m]	% RETENIDO PARCIAL	% PASA	CLASIFICACION
0,0880	21,9	78,1	LIMO
0,0625	0,7	77,4	LIMO
0,0444	0,7	76,7	LIMO
0,0316	0,7	76,0	LIMO
0,0217	1,4	74,6	LIMO
0,0157	1,9	72,7	LIMO
0,0116	1,9	70,8	LIMO
0,0087	2,6	68,2	LIMO
0,0060	2,6	65,6	LIMO
0,0043	2,6	63,0	LIMO
0,0031	4,1	58,9	LIMO
0,0022	5,1	53,7	ARCILLA
0,0013	4,3	49,4	ARCILLA
	49,4	0,0	ARCILLA

Figura 23. Triangulo de clasificación de la textura del suelo



Se decidió llevar a cabo la simulación con un avance del frente húmedo hasta la altura media de la columna, teniéndose así la posibilidad de calcular las condiciones iniciales con las muestras que fueran tomadas al finalizar la simulación.

3.2.2 Puesta en marcha y toma de muestras

Para la puesta en marcha de la simulación del modelo físico, se mantuvo la columna en reposo por un periodo de una semana después de la compactación; la columna de suelo permaneció en un espacio donde no recibía sol, lo cual no afectaba la cantidad de días para que esta drenara por gravedad ni se produciría un secado por sectores, estas condiciones con el fin de alcanzar valores de humedad inicial cercanos a la capacidad de campo.

En la realización del ensayo, se decidió la utilización de la botella Mariotte, pero se eliminó la flauta debido a que la botella por si sola proporcionaba un caudal constante muy grande para los requerimientos del ensayo; debido a esto, se adecuó el equipo de micro goteo, obteniendo así un caudal que permitiera la simulación de un frente húmedo lento y uniforme ($q= 1\text{ml} / \text{min}$).

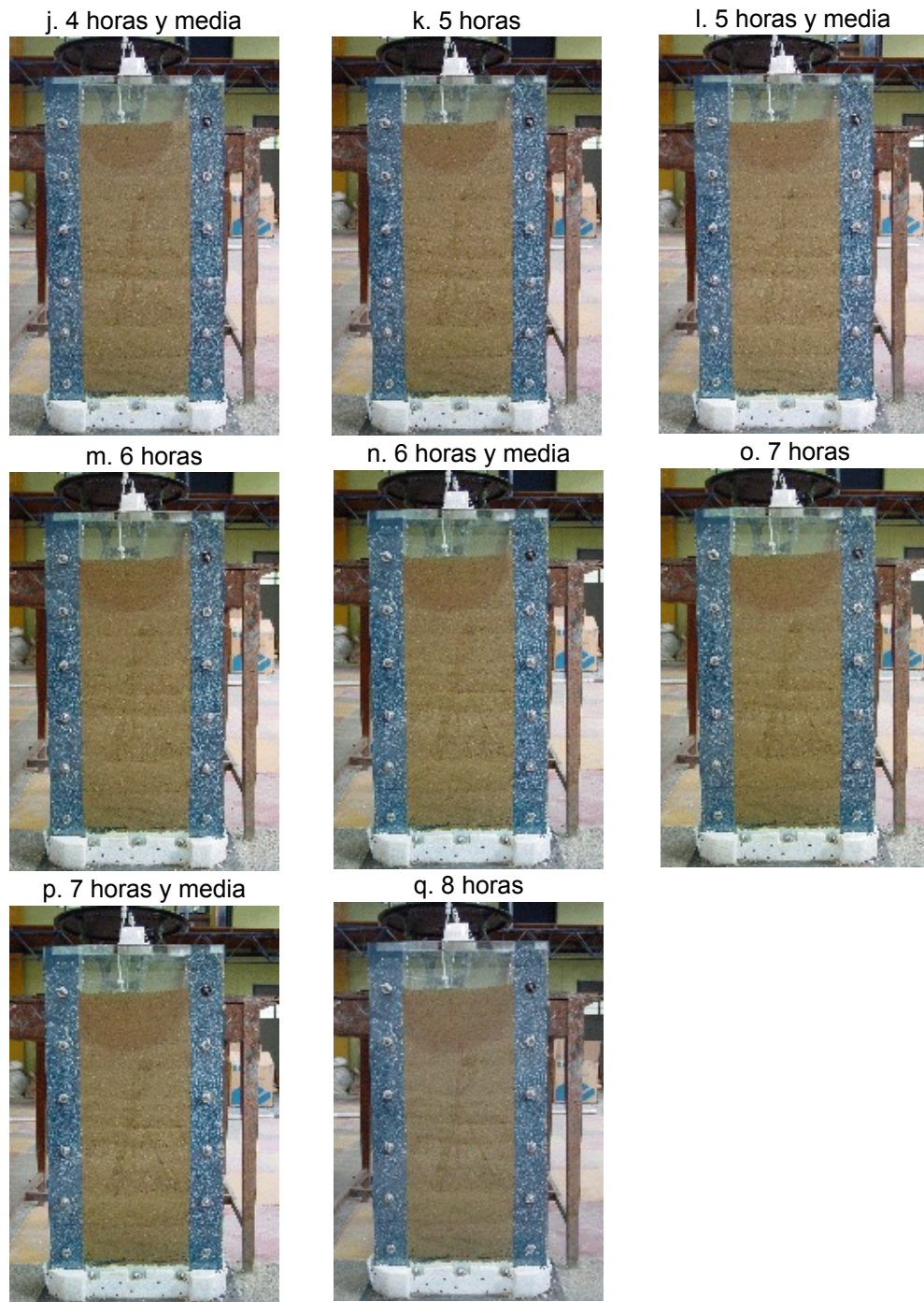
Después de realizadas las actividades previas se comenzó la puesta en marcha del ensayo, donde este se inicia con la abertura de la llave ubicada en la parte inferior de la botella de Mariotte, seguido del equipo de micro goteo, para un mayor control. A partir de ese momento se comenzó a contar el tiempo total de simulación.

A medida que el tiempo pasó, se observó el movimiento del frente húmedo y como avanzaba lentamente pero de una forma bien definida, se tomaron fotografías cada 30 minutos desde un mismo punto para observar el movimiento del frente (**Figura 24**), apreciándose una curva cóncava en la columna de suelo, la cual se mueve en todos

los sentidos, sin que llegue a predominar el sentido de la gravedad.

Figura 24. Movimiento del frente húmedo en la columna de suelo cada 30 minutos.





El tiempo total de la simulación fue de 8 horas, donde la superficie de la columna de suelo terminó prácticamente saturada (Figura 24.q), pero debido a una leve pendiente que se presentó en la superficie y sumado a esto la distribución dada por la capa de grava, no se permitió que el frente húmedo avanzara simétricamente respecto al eje

central de la columna, presentandose una pequeña desviación hacia la parte izquierda.

Cuando finalizó el tiempo de simulación, se desarmó la columna de suelo para tomar las muestras de la misma cada cinco centímetros, una en el centro de la columna, otra al lado izquierdo y otra al lado derecho del sistema de riego (Figura 25). Luego de ser extraídas las muestras, se llevaron al laboratorio donde se pesaron y luego se secaron en el horno con el fin de calcular el contenido de humedad para las diferentes profundidades y poder obtener el perfil de humedad del suelo (z vs θ).

Figura 25. Toma de muestras cada 5cm



3.3 DATOS OBTENIDOS

El contenido de humedad gravimétrico se calcula por diferencias de peso es decir:

$$w = \frac{W_{humedo} - W_{seco}}{W_{seco}} \quad (78)$$

Para obtener el contenido de humedad volumétrico, es necesario conocer el peso específico del suelo utilizado para el ensayo, para lo cual se realizó el ensayo de gravedad específica, por lo tanto, el contenido de humedad volumétrico se calcula:

$$w_{cm^3/cm^3} = \frac{w}{\rho_s} \quad (79)$$

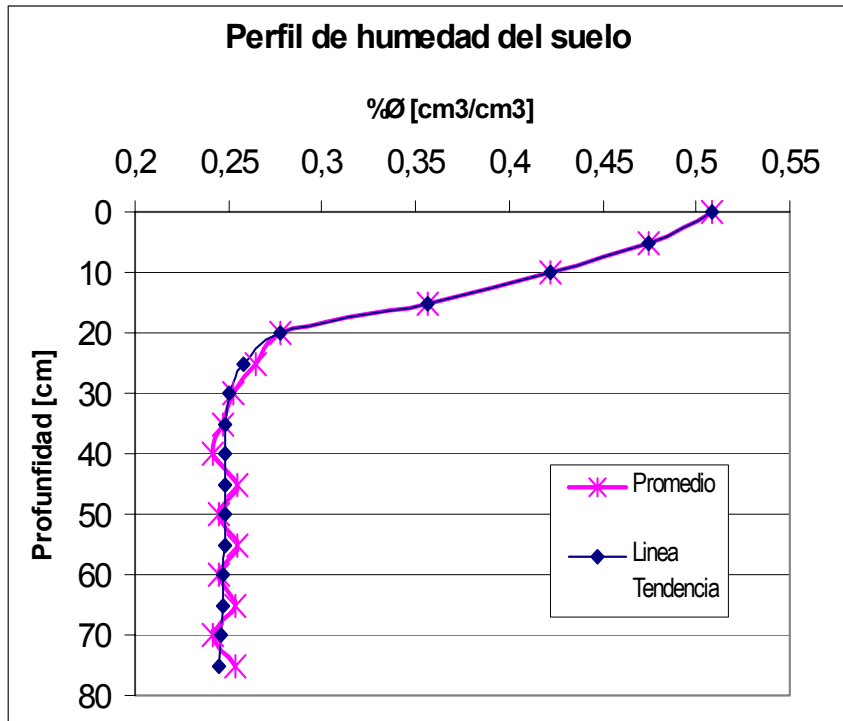
El contenido de humedad volumétrico de cada uno de los puntos tomados son mostrados en la Tabla 2.

Tabla 2. Datos de laboratorio para el suelo arcillo-arenoso

Profundidad [cm]	Contenidos de humedad [cm ³ /cm ³]		
	Columna Izquierda	Columna Central	Columna Derecha
0	0,5029	0,5498	0,4728
5	0,4802	0,5254	0,4187
10	0,4354	0,4542	0,3760
15	0,3866	0,4109	0,2714
20	0,2922	0,2661	0,2734
25	0,2690	0,2599	0,2637
30	0,2543	0,2591	0,2447
35	0,2492	0,2586	0,2337
40	0,2400	0,2471	0,2368
45	0,2593	0,2539	0,2518
50	0,2474	0,2422	0,2442
55	0,2580	0,2579	0,2493
60	0,2556	0,2494	0,2308
65	0,2575	0,2532	0,2517
70	0,2476	0,2552	0,2218
75	0,2575	0,2532	0,2517

Debido a las oscilaciones que se observan en los últimos centímetros de la columna, se elaboró la línea de tendencia promediando estos datos (Figura 26). Estas oscilaciones se deben a factores como el tipo de compactación y la humedad de compactación, los cuales debido a la cantidad de suelo manejada no fue posible obtener las mismas condiciones para todas las capas; también, debido a la dificultad de salida del aire y la humedad, entre otros.

Figura 26. Perfil de humedad promedio del suelo arcillo-arenoso



La condición de frontera superior esta dada por el caudal suministrado por el sistema de riego empleado; mientras que la condición de frontera inferior se tomó como el promedio de los contenidos de humedad de las ultimas celdas de la columna, razón por la cual, se simuló hasta que el frente húmedo llegara a la altura media de la columna, para así conocer mediante pruebas de laboratorio el contenido de humedad para esta frontera. Las condiciones iniciales de simulación se asumieron igual al valor de la condición de frontera inferior para la totalidad de la columna de suelo.

4. VALIDACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO

Este capítulo muestra la comparación de resultados obtenidos mediante el modelo matemático y una solución cuasi-analítica desarrollada para el suelo Yolo light clay con base en la ecuación de Richards; así como también, el análisis de resultados del modelo físico desarrollado con un suelo determinado.

4.1 MODELO MATEMÁTICO

Una de las pruebas clásicas para el desempeño de modelos de flujo de la humedad del suelo es la infiltración en una columna vertical semi infinita de Yolo light clay para el cual Philip desarrolló una solución cuasi-analítica (Jensen, 1983), utilizando series de potencia y resolviéndolas por métodos numéricos.

Se tomó como base de comparación el suelo Yolo light clay debido a que este se encuentra caracterizado, siendo de fácil acceso los datos de sus funciones hidráulicas; además este suelo ha sido empleado en validaciones para soluciones numéricas que simulan la zona no saturada. Las funciones hidráulicas del Yolo light clay se muestran a continuación (Tabla 3, Figura 8):

Tabla 3. Funciones Hidráulicas Yolo light clay

pF [c m]	θ [c m ³ /c m ³]	K [c m /dia]
-16000	0,1528	4,785E -06
-10000	0,1586	1,100E -05
-5000	0,1697	3,750E -05
-2500	0,1851	1,279E -04
-1000	0,2149	6,471E -04
-500	0,2469	2,204E -03
-250	0,2883	7,478E -03
-100	0,3547	3,680E -02
-50	0,4057	1,158E -01
-31	0,4363	2,334E -01
-20	0,4586	4,062E -01
-10	0,4814	7,204E -01
-1	0,4950	1,048
0	0,4951	1,049

Las condiciones asumidas para la simulación de una columna de suelo de 80 cm con un espaciamiento entre nodos de 5 cm y un intervalo de tiempo de 300 seg con un tiempo total de simulación de 150 horas, fueron las siguientes:

Condiciones iniciales: Se tomo un valor de humedad de 0.2376 lo cual corresponde una presión de -600 cm para todos los nodos de la columna.

Condición de frontera superior: Se asumió la condición saturada, es decir una presión de 0 cm y un contenido de humedad de 0.495.

Condición de frontera inferior: Se asumió un valor igual a la condición inicial para el ultimo nodo.

A continuación se muestran los resultados obtenidos tanto de la solución cuasi-analítica (Jensen,1983), como los resultados obtenidos por la solución numérica (Tabla 4).

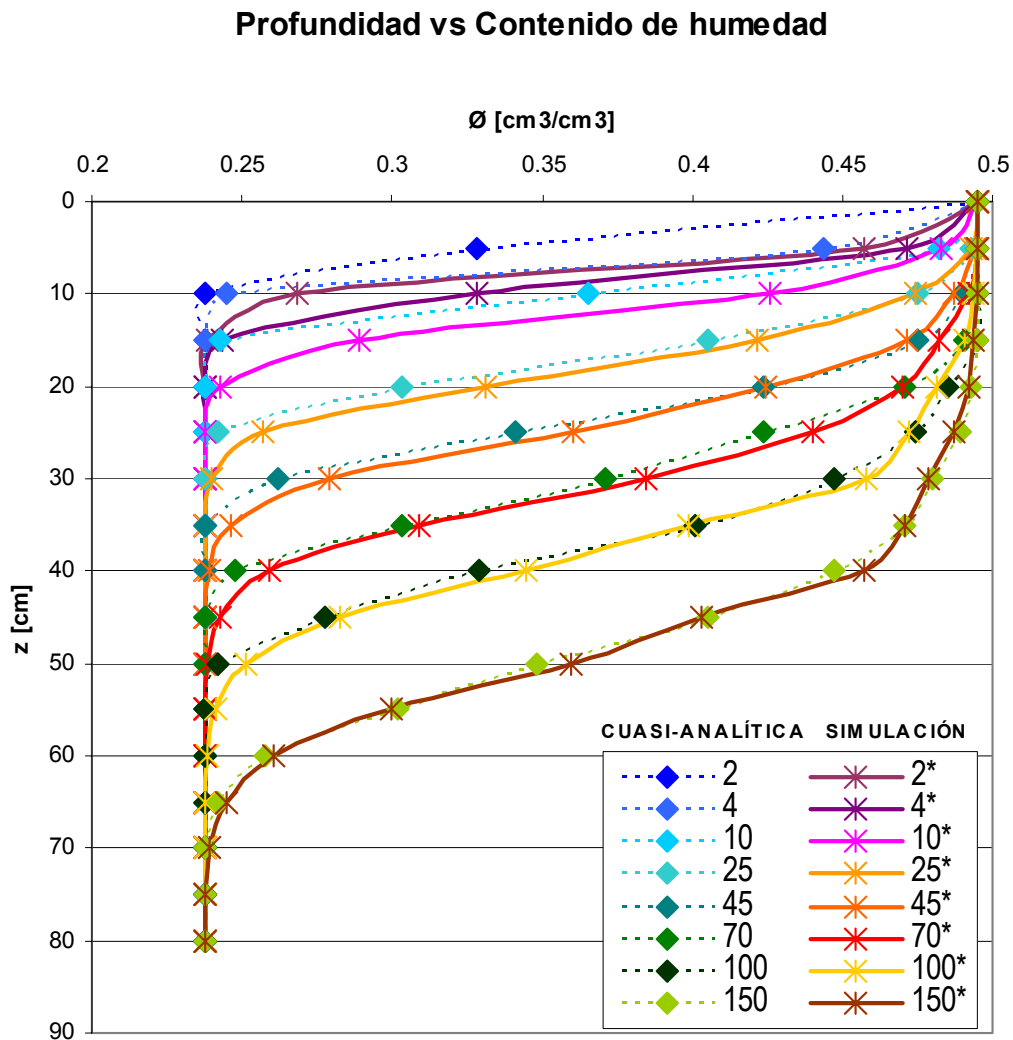
Tabla 4. Contenidos de humedad para la solución cuasi-analítica y numérica.

Profundidad [cm]	Tiempo [hr]															
	2	2*	4	4*	10	10*	25	25*	45	45*	70	70*	100	100*	150	150*
0	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495
5	0,328	0,457	0,444	0,472	0,482	0,483	0,493	0,493	0,495	0,494	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495
10	0,238	0,269	0,245	0,328	0,365	0,426	0,475	0,475	0,490	0,487	0,495	0,492	0,495	0,494	0,495	0,495
15	0,238	0,238	0,238	0,243	0,243	0,289	0,405	0,421	0,475	0,472	0,491	0,482	0,495	0,491	0,495	0,494
20	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,243	0,303	0,331	0,424	0,424	0,471	0,470	0,485	0,482	0,493	0,492
25	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,242	0,257	0,341	0,360	0,424	0,440	0,474	0,472	0,489	0,487
30	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,240	0,262	0,279	0,371	0,384	0,447	0,458	0,480	0,479
35	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,246	0,303	0,309	0,401	0,399	0,471
40	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,239	0,248	0,259	0,329	0,344	0,447
45	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,242	0,278	0,283	0,405
50	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,239	0,242	0,251	0,348
55	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,241	0,302
60	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,258
65	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,242
70	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,240
75	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238
80	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238

Los tiempos con * son los correspondientes a la simulacion del Yolo Light Clay mediante el modelo numérico.

Estos resultados se observan también mediante una gráfica, donde se aprecia de una mejor manera la diferencia obtenida entre la solución cuasi-analítica y el modelo numérico (Figura 27).

Figura 27. Perfiles de humedad del Yolo light clay para ambas soluciones



4.1.1 CÁLCULO DEL ERROR

Para el cálculo del porcentaje de error se tomo como valor real los datos de la solución cuasi analítica, donde estos se compararon con los valores de la simulación. A continuación se muestran los errores obtenidos, en los cuales se observa un error del 39% para los primeros nodos en las primeras horas de simulación; sin embargo, a medida que la simulación avanza, se observa como los errores disminuyen y son en su mayoría inferiores al 5%. El alto error observado para los primeros nodos en las

primeras horas se debe a la extrapolación lineal que se hace en primera instancia, la cual a medida que el tiempo de simulación transcurre, más se ajusta a la realidad. El error se calculó de la siguiente manera:

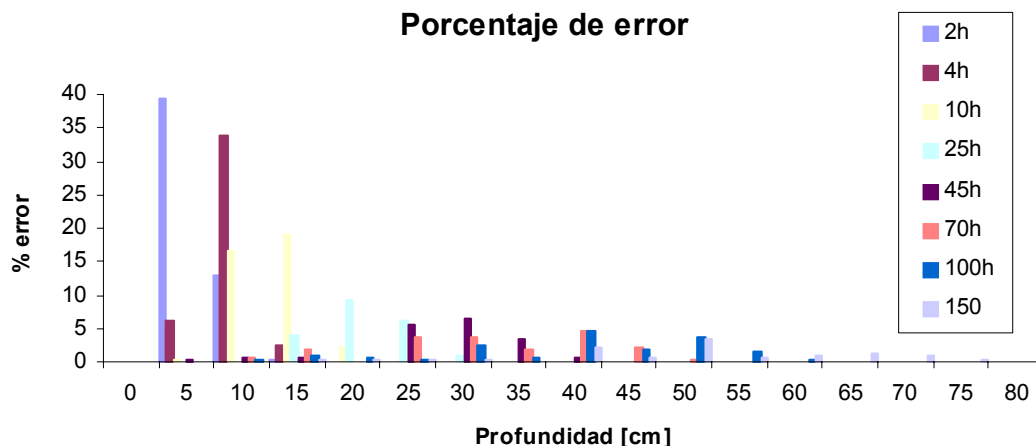
$$\%error = \left| \frac{V_{cuasi-analitico} - V_{simulacion}}{V_{cuasi-analitico}} \right| * 100 \text{ (80)}$$

Para la validación se obtienen los siguientes errores (Tabla 5, Figura 28):

Tabla 5. Porcentajes de error entre la solución cuasi-analítica y la simulación.

Profundidad [cm]	Tiempo [Hr]							
	2	4	10	25	45	70	100	150
0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	39,48	6,233	0,162	0,020	0,178	0,023	0,005	0,008
10	13,05	33,90	16,65	0,103	0,541	0,521	0,258	0,018
15	0,315	2,451	19,02	4,074	0,667	1,741	0,796	0,258
20	0,010	0,083	2,107	9,267	0,108	0,148	0,713	0,161
25	0,005	0,006	0,143	6,154	5,575	3,845	0,400	0,396
30	0,005	0,005	0,012	1,070	6,562	3,58	2,372	0,271
35	0,005	0,005	0,005	0,118	3,433	1,929	0,537	0,078
40	0,005	0,005	0,005	0,015	0,601	4,582	4,674	2,302
45	0,005	0,005	0,005	0,005	0,090	2,058	1,765	0,488
50	0,005	0,005	0,005	0,005	0,016	0,406	3,794	3,272
55	0,005	0,005	0,005	0,005	0,006	0,075	1,423	0,707
60	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,016	0,323	1,074
65	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,006	0,070	1,088
70	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,017	0,818
75	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,007	0,202
80	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005

Figura 28. Porcentajes de error entre la solución cuasi-analítica y la solución numérica



El error promedio se calculó de la siguiente manera:

$$\%Error_{promedio} = \frac{\sum \left(\left| \frac{V_{real} - V_{simulacion}}{V_{real}} \right| * 100 \right)}{n} \quad (81)$$

Tabla 6. Errores promedio

	Tiempo [Hr]								% Error
	2	4	10	25	45	70	100	150	Promedio Total
% Error promedio	3,11	2,51	2,24	1,23	1,05	1,11	1,01	0,66	1,62

Los valores obtenidos para los diferentes intervalos de tiempo fueron (Tabla 6):

A continuación se muestran la varianza y las desviaciones. En las desviaciones se observa para las primeras horas de simulación un valor de 0.1 y a medida que avanza la simulación esta desviación disminuye llegando a valores de hasta 0.054. La varianza (82) y la desviación (83) se calcularon de la siguiente manera:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (V_{cuasi-analitico} - V_{simulacion})^2 \quad (82)$$

$$STD = \sqrt{S^2} \quad (83)$$

Los resultados obtenidos fueron (Tabla 7):

Tabla 7. Valores de varianza y desviación.

Tiempo	2	4	10	25	45	70	100	150
S ²	0,00111	0,00048	0,00037	0,00008	0,00005	0,00007	0,00003	0,00003
S	0,03329	0,02194	0,01913	0,00898	0,00682	0,00862	0,00563	0,00552

4.2 MODELO FÍSICO

Para el análisis del suelo del modelo físico se decidió simular el modelo matemático con base en un suelo holandés, ya que no es posible la obtención de las funciones hidráulicas de este suelo con los equipos disponibles.

Gracias al acceso que se tenía a las curvas características de humedad de subsuelos holandeses y su conductividad hidráulica (Wösten, 1994), fue posible comparar el suelo empleado para el modelo físico, clasificado como arcillo-arenoso (Tabla 1) con el suelo O8 (Tabla 8) el cual posee características similares. A partir de este suelo, se simuló con un intervalo de tiempo de 10 segundos durante 8 horas, suministrándole un caudal de 0.00001 cm/seg a una columna de 75 cm, parámetros con los cuales se desarrollo la simulación en el modelo físico.

Tabla 8. Funciones Hidráulicas suelo O8

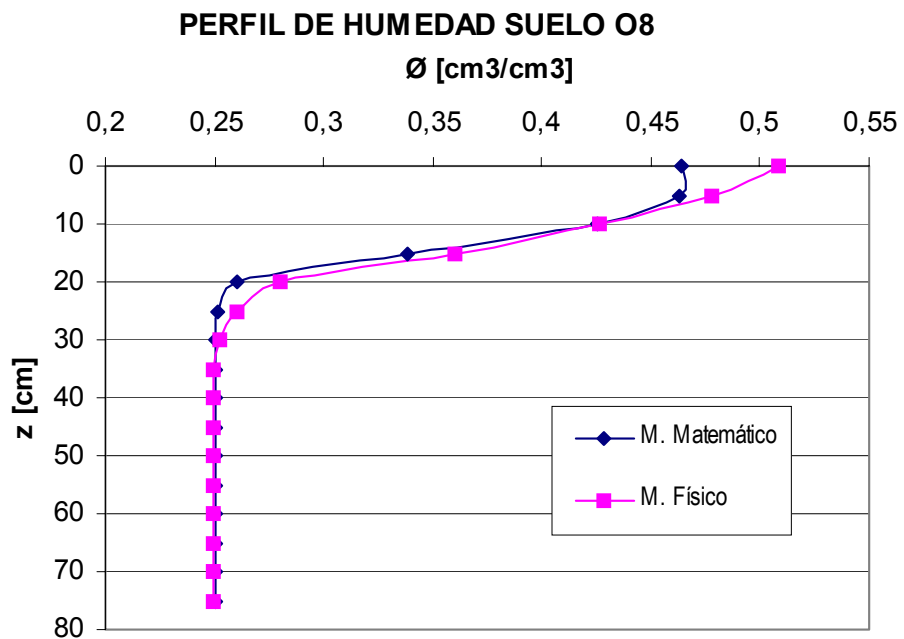
pF [cm]	Ø [cm³/cm³]	K [cm/día]
-16000	0,0740	1,40E-06
-10000	0,0870	4,30E-06
-5000	0,1100	2,30E-05
-2500	0,1390	1,20E-04
-1000	0,1890	1,10E-03
-500	0,2370	5,40E-03
-250	0,2930	2,50E-02
-100	0,3690	0,16
-50	0,4140	0,49
-31	0,4340	0,88
-20	0,4470	1,39
-10	0,4580	2,33
-1	0,4660	9,08
0	0,4670	9,09

Los resultados al termino de la simulación utilizando el programa elaborado fueron los siguientes (Tabla 9, Figura 29):

Tabla 9. Resultados de la simulación para el suelo O8 durante 8 horas

θ [cm ³ /cm ³]	Ψ [cm]	K [cm/día]
0,46380703	-3,36	8,020
0,46336154	-3,87	7,656
0,42530998	-38,92	0,454
0,33869676	-144,25	0,028
0,26004891	-373,01	0,023
0,25166622	-414,06	0,016
0,25067818	-419,26	0,016
0,25055663	-419,90	0,015
0,25054048	-419,99	0,015
0,25053845	-420,00	0,015
0,25053822	-420,00	0,015
0,25053819	-420,00	0,015
0,25053819	-420,00	0,015
0,25053819	-420,00	0,015
0,25053819	-420,00	0,015
0,25053819	-420,00	0,015
0,25053819	-420,00	0,015

Figura 29. Perfil de humedad del suelo (modelo matemático y modelo físico)



Siguiendo el mismo procedimiento para el cálculo del error, se obtuvo (Tabla 10):

Tabla 10. Comparación de resultados suelo O8

Profundidad [cm]	Contenido humedad Laboratorio [cm ³ /cm ³]	Contenido humedad Simulación [cm ³ /cm ³]	% error
0	0,5085	0,4638	8,792
5	0,4780	0,4634	3,062
10	0,4260	0,4253	0,162
15	0,3600	0,3387	5,918
20	0,2800	0,2600	7,125
25	0,2600	0,2517	3,205
30	0,2526	0,2507	0,761
35	0,2495	0,2506	0,424
40	0,2495	0,2505	0,417
45	0,2495	0,2505	0,416
50	0,2495	0,2505	0,416
55	0,2495	0,2505	0,416
60	0,2495	0,2505	0,416
65	0,2495	0,2505	0,416
70	0,2495	0,2505	0,416
75	0,2495	0,2505	0,416
		% error promedio	2,05

El mayor error se debe a los valores saturados de la curva características de humedad utilizada, ya que en esta el contenido de humedad en estado saturado alcanza un valor de $\theta_{[cm^3/cm^3]}=0.467$ mientras que para el suelo empleado se alcanzan valores de $\theta_{[cm^3/cm^3]}=0.508$. Este error es notorio para los nodos cercanos a la superficie donde el suelo se acerca a la saturación; sin embargo, a medida que se avanza en la columna se observa como los valores se ajustan al modelo. Finalmente, el error promedio para esta simulación es de 2.05%, el cual es aceptable para una simulación de este tipo.

5. CONCLUSIONES

El modelo matemático y computacional del presente proyecto permite calcular el movimiento de agua en el suelo en la dirección vertical de la zona no saturada como una función del tiempo mediante la solución de la ecuación de Richard's. Es posible conocer la variabilidad del contenido de humedad y de la presión de poros como una función de la división de celdas seleccionada.

En el modelo desarrollado se utilizaron las funciones hidráulicas del suelo (Ψ vs θ , K vs θ) las cuales se incorporaron al modelo mediante interpolación de SPLINE cubico y diferenciación numérica en lugar de ecuaciones aproximadas como Brooks and Corey o Van Genuchten. Se observó una muy buena respuesta del modelo numérico.

La solución numérica de la ecuación de Richards muestra una alta y rápida variabilidad como era de esperarse de la respuesta no lineal de la zona no saturada. El modelo describió aceptablemente bien el fenómeno observado de movimiento de agua en suelos medianamente granulares.

El modelo implícito de diferencia finitas es sensible al tamaño de la celda y al intervalo de tiempo de simulación definido. El intervalo de tiempo es altamente sensitivo en la simulación y en la medida que la conductividad hidráulica crece se requieren deltas de tiempo muy pequeños. La definición del delta de tiempo de simulación es una variable importante en la inestabilidad numérica del la Ecuación de Richards.

Se validó el modelo desarrollado con la experiencia de otros trabajos de investigación como los de Jensen y de Laat, encontrandose errores muy bajos. Se desconocen algunos valores de dichos trabajos en las primeras horas de simulación a efecto de

poder compararlos.

Se desarrolló un modelo físico el cual se comparó con simulaciones numéricas. Se encontró una alta correspondencia; sin embargo, cabe anotar que la falta de equipos de laboratorio dificultaron la obtención de las propiedades del suelo real a efecto de poder llevar a cabo una validación completa.

Se recomienda el desarrollo de un modelo 3D en el que se incluya el movimiento de agua en las direcciones X y Y ya que como se observó en el modelo físico estas son de gran importancia. Se requieren sensores de humedad para poder medir en tiempo real el movimiento de agua en el suelo a las diferentes profundidades y se requiere llevar a cabo la determinación de las propiedades hidráulicas del suelo.

El presente trabajo es de gran importancia en el estudio de transporte de contaminantes en la zona no saturada, movimiento de agua en el suelo, estabilidad de taludes, recarga de acuíferos, cambios de almacenamiento del suelo, etc., en donde prima la relación no lineal de la zona no saturada.

BIBLIOGRAFÍA

BLAESING, Horst; ARRIOJA, Raúl. Simulación de la infiltración en suelos. En: Ingeniería Hidráulica en Mexico. Vol. 9, No.1(ene.-abr. 1994); p.5-12

BERTRAM, Albrecht; Métodos numéricos para ingenieros. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 1985. 159 p.

DAVIS, Stanley N; DE WIEST, Roger J.M. Hydrogeology. New York: John Wiley & Sons Inc, 1967. 463 p.

DE LAAT, P.J.M. Soil-Water-Plant relations. The Netherlands: IHE Delft, 1996; p. 1-58

-----Model for unsaturated flow above a shallow water-table, applied to a regional sub-surface flow problem. Wagening: Centre for agricultural publishing and documentation; 1980; p. 197

-----Unsaturated flow modelling. The Netherlands: IHE Delft, 2001; p .1-33

FREDLUND, Delwin G. Implementación de la mecánica del suelo parcialmente saturado. Medellín: Hombre Nuevo Editores, 2003; p. 86

JENSEN, Karsten. Høgh. Simulation of water flow in unsaturated zone include the root zone. Denmark:Institute of hidrodynamics and hidraulic engineering, 1983. 440 p.

HAVERKAMP, R et al; A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration. En: Soil Sci, Soc, Am , J. Vol. 41 (1979); p.285-294

HAVERKAMP, R; VAUCLIN, M. A note on estimating finite difference interblock hydraulic conductivity values for transient unsaturated flow problems. En: Water Resources. Vol. 15, No.1 (feb.1979); p.181-187

LINSLEY, Ray Jr; KOHLER, Max. Hydrology for Engineers. London: McGraw Hill Book Company, 1988; p. 164-189

REMSON, Irwin; HORNBERGER, George M. y MOLZ, Fred. Numerical methods in subsurface hidrology Nex York: John Wiley & Sons Inc, 1971. 389 p.

STEPHENS, Daniel B.; Vadose zone hidrology. Boca Raton: Lewis Publishers, 1996. 347 p.

SWARTZENDRUBER, Dale. Flow trough porous media. New York: Academic Press Inc, 1969; p. 215-287

WÖSTEN, J.H.M, VEERMAN, G.J. y STOLTE, J..Waterrententie en ondergronden in Nederland: de Staringreeks. Technical document 18. DLO-Satring Centrum, Wageningen, 1994; p. 66

APÉNDICE A
SPLINE CUBICO

A.1 ALGORITMO PARA DETERMINAR LOS COEFICIENTES DEL SPLINE

El siguiente algoritmo se utilizó para determinar los coeficientes empleados en la solución del spline cúbico, el cual se realiza tanto para la curva característica de humedad como para la curva de conductividad hidráulica.

- a) Se elabora una tabla mostrando el número de datos con sus respectivos valores, donde i corresponde al numero de dato, y al contenido de humedad o conductividad hidráulica y x corresponde a la presión para ese punto.

i		
y		
x		

- b) Se determinan los intervalos.

$$I_i = [x_i, x_{i+1}] \quad (84)$$

- c) Se define la longitud de cada intervalo.

$$\Delta_i = x_{i+1} - x_i \quad (85)$$

- d) Se hallan los coeficientes a_i para $i=1,2,\dots,n$.

$$a_i = y_i \quad (86)$$

- e) Los coeficientes c en los puntos iniciales y finales son cero.

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_n &= 0 \end{aligned} \quad (87)$$

- f) Para determinar los términos C_2, \dots, C_{n-1} , es necesario la solución de un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{bmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & \vdots & \cdots & 0 \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \cdots & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{h_2}(y_3 - y_2) - \frac{3}{h_1}(y_2 - y_1) \\ \frac{3}{h_3}(y_4 - y_3) - \frac{3}{h_2}(y_3 - y_2) \\ \frac{3}{h_4}(y_5 - y_4) - \frac{3}{h_3}(y_4 - y_3) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_n}(y_{n+1} - y_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(y_n - y_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (88)$$

- g) Los términos b_i para $i=1,2,\dots,n-1$ se determinan mediante la formula:

$$b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i) \quad (89)$$

h) Se determina d_i para $i=1,2,\dots,n-1$.

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \quad (90)$$

$$d_n = 0 \quad (91)$$

Por ultimo, estos se reemplazan en la ecuación (74) para cada intervalo.

A.1.1 Ejemplo de solución

El programa basado en el archivo propiedades del suelo realiza el spline cúbico para así determinar las ecuaciones que describen las propiedades hidráulicas del suelo. Siguiendo el algoritmo para la realización del spline cubico descrito en el capítulo anterior, este se muestra numéricamente para una mejor ilustración:

a) Los datos de entrada son los siguientes:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	495	481	458	252	405	354	288	246	214	185	169	158	152
x	-1	-10	-20	-31	-50	-100	-250	-500	-1000	-2500	-5000	-10000	-16000

b) Los intervalos son:

I1=[-1,-10]

I2=[-10,-20]

I3=[-20,-31]

I4=[-31,-50]

I5=[-50,-100]

I6=[-100,-250]

I7=[-250,-500]

I8=[-500,-1000]

I9=[-1000,-2500]

I10=[-2500,-5000]

I11=[-5000,-10000]

I12=[-10000,-16000]

c) La longitud de cada intervalo es:

$$\begin{array}{llll} \Delta 1=[-9] & \Delta 2=[-10] & \Delta 3=[-11] & \Delta 4=[-19] \\ \Delta 5=[-50] & \Delta 6=[-150] & \Delta 7=[-250] & \Delta 8=[-500] \\ \Delta 9=[-1500] & \Delta 10=[-2500] & \Delta 11=[-5000] & \Delta 12=[-6000] \end{array}$$

d) Los coeficientes a_i para i de 1 hasta 13 son:

$$\begin{array}{llllll} a_1=0.495 & a_2=0.481 & a_3=0.458 & a_4=0.436 & a_5=0.405 & a_6=0.354 \\ a_7=0.288 & a_8=0.246 & a_9=0.214 & a_{10}=0.185 & a_{11}=0.169 & a_{12}=0.158 \\ a_{13}=0.152 \end{array}$$

e) Los coeficientes c en los puntos iniciales y finales son cero.

$$c_1=0$$

$$c_{13}=0$$

f) Se resuelve el sistema de ecuaciones por medio de la matriz tridiagonal de la forma:

-38	-10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-10	-42	-11	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-11	-60	-19	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-19	-138	-50	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-50	-400	-150	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-150	-800	-250	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-250	-1500	-500	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-500	-4000	-1500	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-1500	-8000	-2500	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-2500	-15000	-5000
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-6000	-22000

g) El vector respuestas es:

0,002336667
-0,000788182
-0,001266029
-0,001749789
-0,00174
-0,0008292
-0,0003048
-0,0001324
-4,1E-05
-0,00001194
-3,81E-06

h) Resolviendo el sistema de ecuaciones se hallan:

$c_2 = -6.99E-5$	$c_3 = 3.22E-5$	$c_4 = 1.20E-5$	$c_5 = 9.95E-6$
$c_6 = 3.93E-6$	$c_7 = 4.47E-7$	$c_8 = 1.22E-7$	$c_9 = 1.70E-8$
$c_{10} = 1.77E-9$	$c_{11} = 4.87E-10$	$c_{12} = 4.03E-11$	

i) Los términos b_i son:

$b_1 = 0.0013$	$b_2 = 0.0019$	$b_3 = 0.0023$	$b_4 = 0.0018$
$b_5 = 0.0014$	$b_6 = 0.0007$	$b_7 = 0.0002$	$b_8 = 0.0001$
$b_9 = 3.78E-5$	$b_{10} = 9.56E-6$	$b_{11} = 3.91E-6$	$b_{12} = 1.11E-6$

j) Los términos d_i son:

$d_1 = 2.59E-6$	$d_2 = -3.40E-6$	$d_3 = 6.13E-7$	$d_4 = 3.63E-8$
$d_5 = 4.68E-8$	$d_6 = 5.53E-9$	$d_7 = 4.32E-10$	$d_8 = 7.05E-11$
$d_9 = 3.39E-12$	$d_{10} = 1.71E-13$	$d_{11} = 2.97E-14$	$d_{12} = 2.24E-15$

APÉNDICE B
DATOS DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA

Las tablas a continuación ilustran paso a paso los procesos descritos en el segundo capítulo para realizar la simulación del Yolo light clay, donde los parámetros para la simulación fueron:

- Profundidad columna 80 cm

- Espacio entre nodos (Δz) 5 cm

- Intervalo de tiempo (Δt) 300 segundos

- Condiciones iniciales (Ψ) -600 cm

- Condición frontera superior Estado saturado, $\Psi=0$ cm

- Condición de frontera inferior -600 cm

Iteracion 1	Se calcula para la grafica unicamente. Esta no varia para la simulacion.	Son las extracciones que se pueden presentar, en este caso son cero. Unidades de 1/seg	Se obtienen de la curva \emptyset vs ψ de las condiciones iniciales.	Se toman igual a las condiciones iniciales para la primera iteracion, se utilizan para la extrapolacion.	Presion capilar en el punto medio entre el nodo anterior y el analizado.	Presion capilar igual a la obtenida en el punto 6, se utiliza para poder extrapolar.	Presion en el nodo analizado en el tiempo medio siguiente, es una extrapolacion.
1-NODO	2-PROFUNDIDAD	3- S (i,j)	4- ψ (i,j)	5- ψ (i,j-1)	6- ψ (i-½,j)	7- ψ (i-½,j-1)	8- ψ (i,j+½)
(i)	$((i-1)*\Delta z)$	(un. q(1/seg))	(cond.iniciales)	(cond. Iniciales)	$((\psi(i-1,j)*\psi(i,j))^{1.5})$	$((\psi(i-1,j-1)*\psi(i,j-1))^{1.5})$	$(\psi(i,j)+(\psi(i,j)-\psi(i,j-1)))/2)$
1	0	0	-600	-600	0	0	-600
2	5	0	-600	-600	-600	-600	-600
3	10	0	-600	-600	-600	-600	-600
4	15	0	-600	-600	-600	-600	-600
5	20	0	-600	-600	-600	-600	-600
6	25	0	-600	-600	-600	-600	-600
7	30	0	-600	-600	-600	-600	-600
8	35	0	-600	-600	-600	-600	-600
9	40	0	-600	-600	-600	-600	-600
10	45	0	-600	-600	-600	-600	-600
11	50	0	-600	-600	-600	-600	-600
12	55	0	-600	-600	-600	-600	-600
13	60	0	-600	-600	-600	-600	-600
14	65	0	-600	-600	-600	-600	-600
15	70	0	-600	-600	-600	-600	-600
16	75	0	-600	-600	-600	-600	-600
17	80	0	-600	-600	-600	-600	-600

Presion en el punto medio entre el nodo analizado y el siguiente, para un tiempo medio posterior	Presion en el punto medio entre el nodo anterior y el analizado, para un tiempo medio posterior.	Capacidad diferencial de humedad, evaluada con la presion capilar del punto 8, se obtiene de la curva de retencion del suelo $d\theta/d\psi$.	Conductividad hidraulica evaluada con la presion capilar del punto 9 .	Conductividad hidraulica evaluada con la presion capilar del punto 10.	Diferencia de profundidad entre el nodo analizado y el anterior. Para $i=0, \Delta z=0$	Diferencia de profundidad entre el nodo analizado y el posterior. Para $i=n, \Delta z=0$
9- $\psi(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$	10- $\psi(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$	11- C ($\psi(i,j+\frac{1}{2})$)	12- K ($\psi(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$)	13-K ($\psi(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$)	14- Δz -	15- $\Delta z+$
$\frac{\psi(i+\frac{1}{2},j)+(\psi(i+\frac{1}{2},j)-\psi(i+\frac{1}{2},j-1)))}{2}$	$\frac{\psi(i-\frac{1}{2},j)+(\psi(i-\frac{1}{2},j)-\psi(i-\frac{1}{2},j-1)))}{2}$	(dependen del suelo)	(dependen del suelo)	(dependen del suelo)	(2(i)-2(i-1))	(2(i+1)-2(i))
-600	0	8,215E-05	1,848E-08	0,0000123	0	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
0	-600	8,215E-05	0,0000123	1,848E-08	5	0

Diferencia de profundidad entre el punto medio del nodo analizado y el punto medio del posterior.	Primer coeficiente del arreglo matricial.	Segundo coeficiente del arreglo matricial.	Tercer coeficiente del arreglo matricial.	Vector de respuestas del sistema de ecuaciones, *** al termino Dn-1 se le debe restar Cn-1* ψ (n,j+1)	Matriz tridiagonal elaborada con los coeficientes A, B y C	Presion capilar en cada nodo en el tiempo posterior.	Contenido de humedad en cada nodo en el tiempo posterior.
16- Δz	17- A	18- B	19- C	20- D	21-[matriz]	22- ψ (i,j+1)	23- Ø (i,j+1)
$((2(i)-2(i-1)))-(2(i+1)-2(i)))$	$(-13/14*16)$	$11/\Delta t + (13/14*16)+(12/15*16)$	$(-12/15*16)$	$(11/\Delta t)*4-(12-13)/16-3$	$\begin{bmatrix} B & C & 0 \\ A & B & C \\ 0 & A & B \end{bmatrix}$	$[21]^*[20]$	
2,5	**	**	-1,478E-09	**		0	0,495
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002054		-598,71	0,238
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002054		-600,00	0,238
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002054		-600,00	0,238
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002054		-600	0,238
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002054		-600	0,238
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002054		-600	0,238
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002054		-600	0,238
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002054		-600	0,238
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002054		-600	0,238
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002054		-600	0,238
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002054		-600	0,238
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002054		-600	0,238
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002054		-600	0,238
5	-7,392E-10	3,44E-07	-7,392E-10	-0,0002058		-600	0,238
2,5	-1,478E-09	**	**	-0,0002078		-600	0,238

Iteracion 2							
1-NODO	2-PROFUNDIDAD	3- S (i,j)	4- ψ (i,j)	5- ψ (i,j-1)	6- ψ (i-1/2,j)	7- ψ (i-1/2,j-1)	8- ψ (i,j+1/2)
(i)	$((i-1)*\Delta z)$	(un. q(1/s))	(resp. iteracion 1)	(cond. Iniciales)	$((\psi(i-1,j)*\psi(i,j))^{1.5})$	$((\psi(i-1,j-1)*\psi(i,j-1))^{1.5})$	$(\psi(i,j)+(\psi(i,j)-\psi(i,j-1))/2)$
1	0	0	0	-600	0	0	300**
2	5	0	-599,353496	-600	0	0	-599,0302446
3	10	0	-599,999303	-600	-599,6763129	-599,6763129	-599,9989551
4	15	0	-599,999999	-600	-599,9996513	-599,9996513	-599,9999989
5	20	0	-600	-600	-599,9999996	-599,9999996	-600
6	25	0	-600	-600	-600	-600	-600
7	30	0	-600	-600	-600	-600	-600
8	35	0	-600	-600	-600	-600	-600
9	40	0	-600	-600	-600	-600	-600
10	45	0	-600	-600	-600	-600	-600
11	50	0	-600	-600	-600	-600	-600
12	55	0	-600	-600	-600	-600	-600
13	60	0	-600	-600	-600	-600	-600
14	65	0	-600	-600	-600	-600	-600
15	70	0	-600	-600	-600	-600	-600
16	75	0	-600	-600	-600	-600	-600
17	80	0	-600	-600	-600	-600	-600

9- $\psi(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$	10- $\psi(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$	11- C ($\psi(i,j+\frac{1}{2})$)	12- K ($\psi(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$)	13-K ($\psi(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$)	14- $\Delta z-$	15- $\Delta z+$
$\frac{\psi(i+\frac{1}{2},j)+\psi(i+\frac{1}{2},j-1)}{2}$	$\frac{\psi(i-\frac{1}{2},j)+\psi(i-\frac{1}{2},j-1)}{2}$	(dependen del suelo)	(dependen del suelo)	(dependen del suelo)	$(2(i)-2(i-1))$	$(2(i+1)-2(i))$
0	0	0	1,230E-05	0,0000123	0	5
-599,676	0	8,233E-05	1,850E-08	1,230E-05	5	5
-600,000	-599,676	8,215E-05	1,848E-08	1,850E-08	5	5
-600,000	-600,000	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600,000	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
0	-600	8,215E-05	0,0000123	1,848E-08	5	0

16- Δz	17- A	18- B	19- C	20- D	21-[matriz]	22- $\psi (i,j+1)$	23- $\emptyset (i,j+1)$
$(2(i)-2(i-1))-(2(i+1)-2(i))$	$(-13/14*16)$	$11/\Delta t+$ $(13/14*16)+(12/15*16)$	$(-12/15*16)$	$(11/\Delta t)*4-(12-13)/16-3$	$\begin{bmatrix} B & C & 0 \\ A & B & C \\ 0 & A & B \end{bmatrix}$		
2,5	**	**	-9,84E-07	**		0	0,495
5	-4,92E-07	1,18E-06	-7,399E-10	-0,0004088		-347,127	0,268
5	-7,399E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-599,727	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600,000	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004112		-600	0,238
2,5	-1,478E-09	**	**	-0,0004132		-600	0,238

Iteracion 3							
1-NODO	2-PROFUNDIDAD	3- S (i,j)	4- ψ (i,j)	5- ψ (i,j-1)	6- ψ (i-½,j)	7- ψ (i-½,j-1)	8- ψ (i,j+½)
(i)	$((i-1)*\Delta z)$	(un. q(1/s))	(resp. iteracion 2)	(resp. iteracion 1)	$((\psi(i-1,j)*\psi(i,j))^{1.5})$	$((\psi(i-1,j-1)*\psi(i,j-1))^{1.5})$	$(\psi(i,j)+(\psi(i,j)-\psi(i,j-1)))/2)$
1	0	0	0	0	0	0	0
2	5	0	-347,127	-599,353	-456,269	0	-221,014
3	10	0	-599,727	-599,999	-599,863	-456,269	-599,590
4	15	0	-599,999	-599,999	-599,999	-599,863	-600,000
5	20	0	-600	-600	-600	-600,000	-600,000
6	25	0	-600	-600	-600	-600,000	-600
7	30	0	-600	-600	-600	-600	-600
8	35	0	-600	-600	-600	-600	-600
9	40	0	-600	-600	-600	-600	-600
10	45	0	-600	-600	-600	-600	-600
11	50	0	-600	-600	-600	-600	-600
12	55	0	-600	-600	-600	-600	-600
13	60	0	-600	-600	-600	-600	-600
14	65	0	-600	-600	-600	-600	-600
15	70	0	-600	-600	-600	-600	-600
16	75	0	-600	-600	-600	-600	-600
17	80	0	-600	-600	0	-600	-600

9- $\psi(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$	10- $\psi(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$	11- C ($\psi(i,j+\frac{1}{2})$)	12- K ($\psi(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$)	13-K ($\psi(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})$)	14- $\Delta z-$	15- $\Delta z+$
$\frac{\psi(i+\frac{1}{2},j)+(\psi(i+\frac{1}{2},j)-\psi(i+\frac{1}{2},j-1)))}{2}$	$\frac{\psi(i-\frac{1}{2},j)+(\psi(i-\frac{1}{2},j)-\psi(i-\frac{1}{2},j-1)))}{2}$	(dependen del suelo)	(dependen del suelo)	(dependen del suelo)	$(2(i)-2(i-1))$	$(2(i+1)-2(i))$
0	0	0	1,230E-05	0,0000123	0	5
-456,269	0	3,095E-04	2,998E-08	1,230E-05	5	5
-599,863	-456,2689492	8,223E-05	1,849E-08	2,998E-08	5	5
-600,000	-599,8631211	8,215E-05	1,848E-08	1,849E-08	5	5
-600,000	-599,9998522	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-599,9999998	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
-600	-600	8,215E-05	1,848E-08	1,848E-08	5	5
0	-600	8,215E-05	0,0000123	1,848E-08	5	0

16- Δz	17- A	18- B	19- C	20- D	21-[matriz]	22- $\psi(i,j+1)$	23- $\emptyset(i,j+1)$
$(2(i)-2(i-1))-(2(i+1)-2(i))$	$(-13/14*16)$	$11/\Delta t+$ $(13/14*16)+(12/15*16)$	$(-12/15*16)$	$(11/\Delta t)^4-(12-13)/16-3$	[B C 0 A B C 0 A B]	0	0,495
2,5	**	**	-9,84E-07	**		-290,838	0,279
5	-4,92E-07	3,07E-06	-1,199E-09	-0,0008928		-599,184	0,238
5	-1,199E-09	6,87E-07	-7,395E-10	-0,0004109		-599,999	0,238
5	-7,395E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600,000	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004107		-600	0,238
5	-7,392E-10	6,86E-07	-7,392E-10	-0,0004112		-600	0,238
2,5	-1,478E-09	**	**	-0,0004132		-600	0,238