

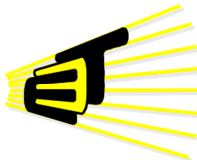
**DISEÑO DE UN ALGORITMO QUE PERMITA LA RECONSTRUCCIÓN DE  
IMÁGENES SÍSMICAS EN 3D A PARTIR DE DATOS COMPRIMIDOS**

**AMAT DUBAN ZULUAGA QUINTERO**

**MILTON ANDREY GONZALEZ QUINTERO**



**ESCUELA DE INGENIERÍAS  
ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA  
Y DE TELECOMUNICACIONES**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS**

**ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE  
TELECOMUNICACIONES**

**BUCARAMANGA**

**2012**

**DISEÑO DE UN ALGORITMO QUE PERMITA LA RECONSTRUCCIÓN DE  
IMÁGENES SÍSMICAS EN 3D A PARTIR DE DATOS COMPRIMIDOS**

Presentado por:

**AMAT DUBAN ZULUAGA QUINTERO**

**MILTON ANDREY GONZALEZ QUINTERO**

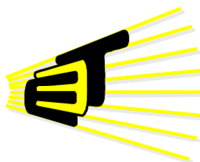
Dirigido por:

**Director: PhD (c) ANA BEATRIZ RAMIREZ SILVA**

**Codirector: MIE. SERGIO ALBERTO ABREO CARRILLO**



**ESCUELA DE INGENIERÍAS  
ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA  
Y DE TELECOMUNICACIONES**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE INGENIERÍAS FISICOMECÁNICAS  
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE  
TELECOMUNICACIONES  
BUCARAMANGA**

**2012**

## TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN .....	8
ABSTRACT .....	9
1. INTRODUCCIÓN .....	10
2. MUESTREO COMPRIMIDO .....	10
2.1. Descripción de la técnica CS.....	11
2.2. Reconstrucción de una señal usando la teoría CS .....	11
3. REPRESENTACIÓN DE SEÑALES POCO DENSAS .....	11
3.1. Transformada de Fourier.....	12
3.2. Transformada Wavelet .....	12
4. TRANSFORMADA CURVELET .....	12
4.1. Transformada Curvelet de tiempo continuo.....	13
4.2. Transformada Curvelet digital .....	14
5. TRANSFORMADA CURVELET 3D.....	14
6. ALGORITMO DE RECONSTRUCCIÓN.....	15
6.1. Métodos de solución para muestreo comprimido .....	15
6.2. Método de punto interior .....	15
7. EXPLORACIÓN SÍSMICA.....	16
8. SIMULACIÓN DE LA TÉCNICA DE MUESTREO COMPRIMIDO.....	16
9. SIMULACIÓN EN SISMOGRAMAS 2D.....	16
9.1. Simulación basada en Wavelet .....	16
9.2. Simulación basada en Curvelet.....	17
10. SIMULACIÓN DE SISMOGRAMAS EN 3D.....	17
10.1. Simulación basada en Wavelet .....	17
10.2. Simulación basada en Curvelet.....	18
11. ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	18
12. CONCLUSIÓN .....	19
13. TRABAJO FUTURO.....	19
REFERENCIAS .....	19
AUTORES .....	19

## LISTA DE FIGURAS

Fig. 1. Obtención de mediciones y a partir de x.	11
Fig. 2. Descripción gráfica de la técnica CS.	11
Fig 3. Representación “poco densa” de una señal sinusoidal mediante su transformada de Fourier.	12
Fig. 4. Representación “poco densa” de una imagen mediante sus coeficientes <i>Wavelet</i> .	12
Fig. 5. Descomposición <i>Wavelet</i> de una imagen en 4 niveles.	13
Fig. 6. Subdivisión <i>Curvelet</i> en frecuencia y espacio. La figura de la izquierda representa la subdivisión inducida en el plano de frecuencia. La figura a la derecha representa esquemáticamente la grilla cartesiana espacial asociada con una escala y orientación dadas.	14
Fig. 7. Subdivisión digital en frecuencia.	14
Fig. 8. Subdivisión en frecuencia. A la izquierda esquema para la subdivisión en <i>Curvelet</i> 3D continuo. A la derecha subdivisión discreta.	15
Fig. 9. Proceso exploración sísmica.	16
Fig. 10. Descripción general del proceso de reconstrucción en la cual aparecen la compresión y la descompresión.	16
Fig. 11. Descomposición <i>Wavelet</i> de un sismograma sintético en sus coeficientes de aproximación y detalles direccionales.	17
Fig. 12. Reconstrucción de un sismograma a partir de sus coeficientes <i>Wavelet</i> . a) Sismograma original, b) Muestras aleatorias del sismograma, c) Sismograma reconstruido.	17
Fig. 13. Reconstrucción de un sismograma a partir de sus coeficientes <i>Curvelet</i> . a) Sismograma original, b) Muestras aleatorias del sismograma, c) Sismograma reconstruido.	17
Fig. 14. Sismograma 3D original.	17
Fig. 15. Sismograma reconstruido basado en <i>Wavelet</i> con 30% de información. PSNR = 21,7225[dB].	18
Fig. 16. Sismograma reconstruido basado en <i>Wavelet</i> con 40% de información. PSNR = 22,4859[dB].	18
Fig. 17. Sismograma reconstruido basado en <i>Wavelet</i> con 50% de información. PSNR = 23,9865[dB].	18
Fig. 18. Grafica donde se muestra la disminución del error y la lenta convergencia de este en cada nueva iteración.	18
Fig. 19. Sismograma original 3D para la reconstrucción basada en <i>Curvelet</i> .	18
Fig. 20. Sismograma reconstruido basado en <i>Curvelet</i> con 40% de información. PSNR=18,2748[dB].	18

## RESUMEN

### TITULO:

DISEÑO DE UN ALGORITMO QUE PERMITA LA RECONSTRUCCIÓN DE IMÁGENES SÍSMICAS EN 3D A PARTIR DE DATOS COMPRIMIDOS<sup>1</sup>.

### AUTOR:

AMAT DUBAN ZULUAGA QUINTERO.  
MILTON ANDREY GONZALEZ QUINTERO<sup>2</sup>.

### PALABRAS CLAVES:

Curvelet, Mínimos Cuadrados, Muestreo Comprimido, Normalización  $\ell_1$ , Optimización, Poca Densidad, Wavelet.

### DESCRIPCIÓN:

Este artículo presenta la implementación de un algoritmo en Matlab que realiza la reconstrucción de un sismograma en tres dimensiones (3D) a partir de un número reducido de muestras adquiridas de manera aleatoria (tomando muy pocos datos, aproximadamente un 30% de la información utilizada con las técnicas tradicionales de adquisición), usando la técnica de muestreo comprimido (*Compressive Sampling*). Esta técnica se fundamenta en que las señales muestreadas deben ser poco densas (*Sparse*) en algún dominio específico, (*Wavelet* y *Curvelet*). Estas señales pueden ser muestreadas por debajo de la frecuencia de muestreo requerida por el teorema de Shannon-Nyquist. Para hacer la reconstrucción de la imagen sísmica en 3D se utiliza una herramienta computacional que resuelve problemas de optimización mediante el uso del método de punto interior para mínimos cuadrados con regularización  $\ell_1$ . El algoritmo de optimización es usado para reconstruir los coeficientes de la señal poco densa, y luego se aplica una transformación inversa para obtener el sismograma 3D reconstruido. Al final de este artículo se muestra una comparación del sismograma 3D reconstruido con los sismogramas originales, de modo que se pueda verificar la eficiencia de esta implementación y su posible aplicación a futuro en el proceso de adquisición de trazas sísmicas.

---

<sup>1</sup> Trabajo de grado.

<sup>2</sup> Facultad de Ingenierías Físicomecánicas. Escuela Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones.  
Director: PhD(c) Ana Beatriz Ramírez Silva Codirector: MIE Sergio Alberto Abreo Carrillo.

## ABSTRACT

### TITLE:

DESIGN OF AN ALGORITHM THAT ALLOWS THE RECONSTRUCTION OF SEISMIC IMAGES IN 3-D FROM COMPRESSED DATA<sup>3</sup>.

### AUTHOR:

AMAT DUBAN ZULUAGA QUINTERO.  
MILTON ANDREY GONZALEZ QUINTERO<sup>4</sup>.

### KEY WORDS:

Curvelet, least squares, compressed sample,  $\ell_1$  regularization, optimization, sparse, Wavelet.

### DESCRIPTION:

This paper presents the implementation of an algorithm in Matlab to perform the reconstruction of a seismogram in three dimensions (3D) from a small number of samples randomly acquired (using few data about 30% of the information used to traditional acquisition techniques), using the compressed sampling technique. This technique is based on the concept that the signals to be sampled must be sparse in a specific domain (Wavelet and Curvelet). These signals can be sampled without satisfy the Shannon-Nyquist theorem. In order to do the reconstruction of the 3D seismic image it can be used a computational tool that resolves optimization problems through the interior point method of least squares  $\ell_1$  regularized. The optimization algorithm is used to reconstruct the signal sparse coefficients, and then it can be applied an inverse transformation to obtain the reconstructed 3D seismogram. At the end of this paper there is a comparison among the reconstructed 3D seismogram with the original seismograms, in order to verify the efficiency in this implementation and the possible future application in the acquisition process of seismic traces.

---

<sup>3</sup> Work Degree.

<sup>4</sup> Faculty of Physical-Mechanical Engineering. School of Engineerings Electrical, Electronic and Telecommunications. Directress: PhD(c) Ana Beatriz Ramírez Silva Codirector: MIE Sergio Alberto Abreo Carrillo.

# Diseño de un algoritmo que permita la reconstrucción de imágenes sísmicas en 3D a partir de datos comprimidos

Amat Duban Zuluaga Quintero, Milton Andrey Gonzalez Quintero, Ana Beatriz Ramirez Silva, Sergio Alberto Abreo Carrillo

**Resumen**—Este artículo presenta la implementación de un algoritmo en Matlab que realiza la reconstrucción de un sismograma en tres dimensiones (3D) a partir de un número reducido de muestras adquiridas de manera aleatoria (tomando muy pocos datos, aproximadamente un 30 % de la información utilizada con las técnicas tradicionales de adquisición), usando la técnica de muestreo comprimido (*Compressive Sampling*). Esta técnica se fundamenta en que las señales muestreadas deben ser poco densas (*Sparse*) en algún dominio específico, (*Wavelet* y *Curvelet*). Estas señales pueden ser muestreadas por debajo de la frecuencia de muestreo requerida por el teorema de Shannon-Nyquist. Para hacer la reconstrucción de la imagen sísmica en 3D se utiliza una herramienta computacional que resuelve problemas de optimización mediante el uso del método de punto interior para mínimos cuadrados con regularización  $\ell_1$ . El algoritmo de optimización es usado para reconstruir los coeficientes de la señal poco densa, y luego se aplica una transformación inversa para obtener el sismograma 3D reconstruido. Al final de este artículo se muestra una comparación del sismograma 3D reconstruido con los sismogramas originales, de modo que se pueda verificar la eficiencia de esta implementación y su posible aplicación a futuro en el proceso de adquisición de trazas sísmicas.

**Palabras Claves**— Curvelet, Mínimos Cuadrados, Muestreo Comprimido, Normalización  $\ell_1$ , Optimización, Poca Densidad, Wavelet.

## I. INTRODUCCIÓN

**A**CTUALMENTE para la adquisición de datos sísmicos la estrategia utilizada en tres dimensiones se basa en el teorema de muestreo de Shannon-Nyquist, el cual dice que una señal puede ser reconstruida perfectamente si se toman muestras al menos al doble de la frecuencia máxima presente en la señal (conocido como frecuencia de Nyquist). Recientemente una nueva técnica que permite la reconstrucción exitosa de señales e imágenes partiendo de menos datos que los requeridos por el teorema de muestreo de Shannon-Nyquist ha sido propuesto. Esta técnica permite el uso de

Amat D. Zuluaga pertenece al grupo de investigación en Conectividad y Procesamiento de Señales, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia. (e-mail: amat425@gmail.com)

Milton A. Gonzalez pertenece al grupo de investigación en Conectividad y Procesamiento de Señales, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia. (e-mail: andrey8809@gmail.com)

Ana B. Ramirez es la directora de proyecto. Ingeniera electrónica, Universidad Industrial de Santander, Colombia. Master of Science in Electrical Engineering, Universidad de Puerto Rico, USA. PhD(C) in Electrical Engineering, University of Delaware, USA. (e-mail: anieramirez@gmail.com)

Sergio A. Abreo es el codirector de proyecto. Ingeniero electrónico, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia. MIE en ingeniería electrónica, Universidad Industrial de Santander, Colombia. (e-mail: abreosergio@gmail.com)

menos recursos de almacenamiento y transmisión lo que es una ventaja en aplicaciones donde los datos se deben adquirir de forma remota y el tiempo de adquisición es una variable crítica.

Para que las señales puedan ser muestreadas usando esta técnica, ellas deben cumplir con algunas características. La característica mas importante es la densidad de la señal en un dominio específico. Por ejemplo, las imágenes cumplen con esta característica en los dominios de una familia de espacios conocidos como *X-let*, de las cuales el mas conocido es el *Wavelet*. Para nuestra aplicación particular de sísmica, nos interesa la transformada *Curvelet*, pues se ha podido establecer que esta representa de mejor manera los datos sísmicos en comparación con otras transformadas como la *Wavelet* y *Counturlet*. En este trabajo usamos la transformada *Wavelet* para comparar con los resultados obtenidos con la transformada *Curvelet*.

El proceso inverso para obtener el sismograma consiste en reconstruir los coeficientes del sismograma (no la imagen en sí) a partir de un numero de muestras adquirido aleatoriamente. Este proceso consiste en la solución de un problema de optimización que se resuelve con el uso del método de punto interior que minimiza el error medio cuadrático con regularización  $\ell_1$ . Al finalizar el proceso de reconstrucción de los coeficientes, se lleva a cabo la transformada inversa de los coeficientes reconstruidos para así obtener el sismograma reconstruido.

## II. MUESTREO COMPRIMIDO

El muestreo comprimido es un paradigma de muestreo/detección que revoluciona el conocimiento común en la adquisición de datos. Los enfoques convencionales de muestreo de las señales e imágenes siguen el famoso teorema de Shannon-Nyquist que debe cumplir con la llamada frecuencia de Nyquist que se define en [8, pag. 518] como  $\omega_s > 2\omega_M$ , donde  $\omega_s$  es la frecuencia de muestreo y  $\omega_M$  es la frecuencia máxima presente en la señal. De hecho este principio se presenta en la mayoría de dispositivos electrónicos de audio y video, así como dispositivos de imágenes médicas, receptores de radio y demás.

El muestreo comprimido (CS por sus siglas en inglés *compressive sensing*) es una técnica introducida recientemente y busca unificar el proceso de muestreo y compresión de señales poco densas de manera simultánea. Esta técnica permite reducir considerablemente la cantidad de muestras necesarias para reconstruir una señal.

La teoría del muestreo comprimido afirma que una señal poco densa o “*Sparse*” puede ser reconstruida con alta probabilidad a partir de un conjunto de muestras provenientes de su proyección aleatoria. La condición de baja densidad puede ocurrir en algún dominio, conocido como diccionario  $\Psi$ , el cual a su vez debe ser incoherente con la matriz de medición,  $\Phi$  [3]. Más adelante se definen las dos premisas fundamentales para CS: poca densidad e incoherencia.

De esta forma el número de muestras se ve reducido considerablemente lo que conlleva algunas ventajas:

- Menor frecuencia de muestreo.
- Menor cantidad de datos muestreados.
- Menor uso de recursos de almacenamiento.
- Menores requerimientos de velocidad en convertidores analógicos-digitales.

### II-A. Descripción de la técnica CS

Sea  $s \in \mathbf{R}^N$  el vector cuyos componentes representan la versión discretizada de una señal analógica de interés y  $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_Z]$  la matriz cuyas columnas definidas en  $\mathbf{R}^N$  conforman un diccionario de funciones básicas, ortogonales o no, que son usadas para representar señales como combinaciones lineales de ellas. [10]

$$x \approx \sum_{i=1}^k \Psi_{ni} s_{ni} = \Psi s \quad (1)$$

Se define  $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$  como la matriz de proyección aleatoria, donde cada componente de esta matriz  $\Phi_{i,j}$ , proviene de una distribución de probabilidad Gaussiana. Adicionalmente, se considera que las filas de una matriz de proyección  $\Phi$  son incoherentes con las columnas de  $\Psi$ , es decir que ningún vector columna de  $\Psi$  puede ser combinación lineal de las filas de  $\Phi$ . El conjunto de mediciones aleatorias, denotado por  $y$ , se obtiene al proyectar la señal original  $x$  en la base creada por la matriz de proyección  $\Phi$ , de modo que:

$$y = \Phi x \quad (2)$$

Como se puede ver en la ecuación (2), el vector  $M$ -dimensional  $y$  contiene la proyección de la señal de interés sobre una base aleatoria. Note que debido a que  $M \ll N$  la información representada por el vector  $N$ -dimensional  $x$  ha sido comprimida en solo  $M$  componentes. La teoría de CS establece que existe un factor  $c > 1$ , tal que solo  $M = f(cK)$  medidas incoherentes son necesarias para reconstruir con alta probabilidad la señal  $x$  a partir del conjunto de proyecciones aleatorias  $y$ , resolviendo este proceso inverso con la solución a un problema de optimización.

### II-B. Reconstrucción de una señal usando la teoría CS

Sea  $x \in \mathbf{R}^N$  una señal que es poco densa, en algún dominio o diccionario  $\Psi$  (tiempo, frecuencia, ...), ésta puede ser reconstruida usando sólo un conjunto reducido de proyecciones  $y$  sobre una base aleatoria  $\Phi \in \mathbf{R}^M$  formada por una colección de vectores  $\{\phi_j\}_{j=1}^M$ , siempre y cuando la matriz de proyecciones  $\Phi$  sea incoherente con el diccionario  $\Psi$ .

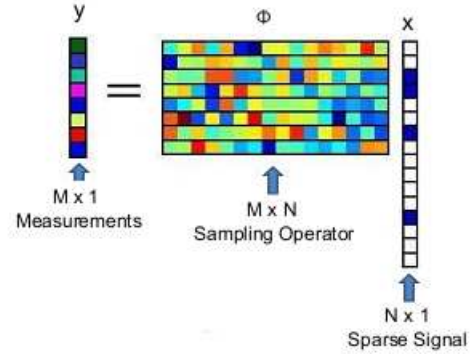


Figura 1: Obtención de mediciones  $y$  a partir de  $x$ .

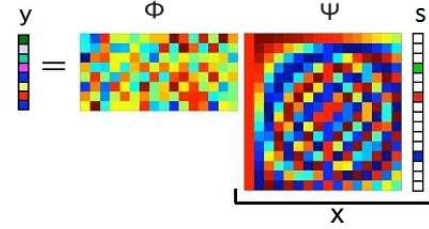


Figura 2: Descripción gráfica de la técnica CS.

$$y = \Phi x = \Phi \Psi s = \Theta s \quad (3)$$

donde  $\Theta = \Phi \Psi$  es una matriz de  $M \times N$ .

La estrategia de muestreo comprimido se puede dividir en dos bloques:

1. Proceso de medición: Consiste en muestrear la señal original tomando sus proyecciones sobre una matriz  $\Phi$ , la cual se genera de forma aleatoria. Los elementos de dicha matriz pueden provenir de una distribución gaussiana o de otros tipos diferentes de distribuciones. Por lo tanto el problema se reduce a diseñar una matriz  $\Phi$  de dimensión  $M \times N$ , con  $M \ll N$  de forma que  $y = \Phi x$  donde  $y$  es un vector de dimensión  $M \times 1$ . Esta matriz debe garantizar que la información importante de una señal poco densa no se vea dañada por la reducción de dimensión de  $x \in \mathbf{R}^N$  a  $y \in \mathbf{R}^M$ .
2. Proceso de reconstrucción: Consiste en resolver un problema de optimización que para este caso en particular, es de la forma  $\min \| \Theta s - y \|_2^2 + \lambda \| s \|_1$  donde la variable es  $s \in \mathbf{R}^N$ , y los datos del problema son  $\Theta \in \mathbf{R}^{M \times N}$ ,  $y \in \mathbf{R}^M$  y  $\lambda \in \mathbf{R}_+^N$ , para lo cual se usa el método de punto interior para mínimos cuadrados con regularización  $\ell_1$ .

### III. REPRESENTACIÓN DE SEÑALES “POCO DENSAS”

En muchas aplicaciones las señales portan cantidades abrumadoras de datos, aunque la información relevante es tan difícil de encontrar como una aguja en un pajar. Una forma rápida y sencilla de procesamiento es mediante la representación de las mismas como señales poco densas (*sparse* en inglés), las cuales contienen la información que representa la señal en

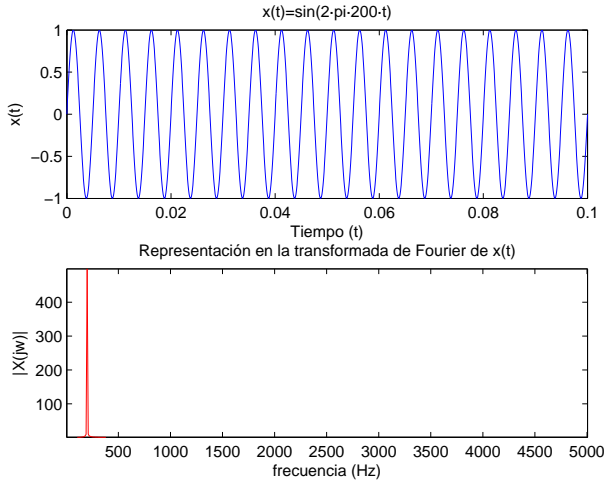


Figura 3: Representación “poco densa” de una señal sinusoidal mediante su transformada de Fourier.

unos pocos coeficientes. Estas representaciones se construyen a partir de una combinación lineal de formas de onda elementales contenidas en una familia llamada diccionario. Las señales pueden representarse en diferentes diccionarios, y entre todas las posibles representaciones, la preferencia es hacia aquella con el menor número posible de entradas distintas de cero para hacerla más compresible.

Las bases de Fourier y *Wavelet* son ejemplos de diccionarios, ya que descomponen señales sobre formas de onda oscilatoria que revelan muchas propiedades de la señal y proporcionan una forma de representación poco densa.

### III-A. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier se utiliza extensivamente en la física y la matemática ya que corresponde a operadores de convolución invariantes en el tiempo.

El análisis de Fourier representa cualquier función de energía finita  $f(t)$  como una suma de ondas sinusoidales  $e^{i\omega t}$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4)$$

La amplitud  $\hat{f}(\omega)$  de cada onda sinusoidal  $e^{i\omega t}$  que es igual a su correlación con  $f(t)$  también es llamada transformada de Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (5)$$

Si  $f(t)$  es una señal sinusoidal, entonces la transformada de Fourier puede estar formada por unos cuantos coeficientes de Fourier. De esta forma la transformada de Fourier define una representación poco densa de ciertas funciones.

Para las señales discretas, la transformada de Fourier es una descomposición en una base ortogonal discreta de Fourier  $\{e^{i2\pi kn/N}\}_{0 \leq k < N}$  de  $\mathbf{C}^N$ , la cual tiene propiedades similares a la transformada de Fourier en señales analógicas.

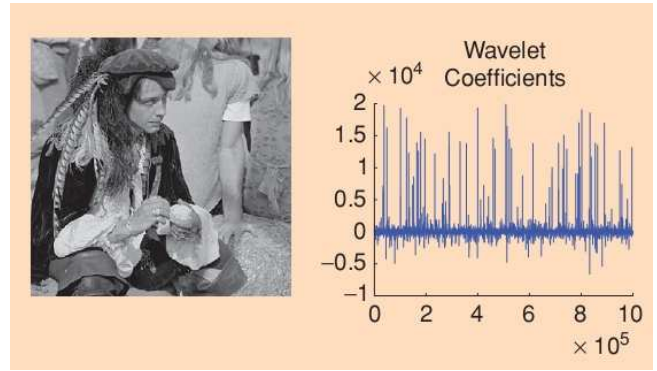


Figura 4: Representación “poco densa” de una imagen mediante sus coeficientes *Wavelet*. [2]

### III-B. Transformada Wavelet

Las bases *Wavelet* como las bases de Fourier, representan la regularidad de una señal mediante la amplitud de los coeficientes. La descomposición de señales en sus coeficientes *Wavelet* ha sido ampliamente estudiada en procesamiento de imágenes. Por ejemplo, en imágenes los coeficientes *Wavelet* más grandes se localizan en la vecindad de los bordes y las texturas irregulares.

El desarrollo de esta transformada inicio en 1910 cuando Haar construyó una función constante por partes cuyas dilataciones y translaciones generan una base ortonormal.

$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbf{Z}^2} \quad (6)$$

Cualquier señal de energía finita  $f$  puede así ser representada por el producto interno de sus coeficientes *Wavelet*

$$\langle f, \psi_{j,n} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{j,n}(t) dt \quad (7)$$

Y puede ser recuperada por la suma de ellos en esta base ortonormal *Wavelet*

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,n} \rangle \psi_{j,n} \quad (8)$$

Si  $f$  es regular localmente y  $2^j$  es pequeño, entonces es casi constante en este intervalo y los coeficientes *Wavelet*  $\langle f, \psi_{j,n} \rangle$  son casi cero. Esto significa que los coeficientes *Wavelet* más grandes están localizados solo en transiciones bruscas de la señal.

En procesamiento de imágenes usualmente se utiliza la transformada *Wavelet* para la compresión de imágenes digitales resultantes después de una conversión analógica-digital. Por ejemplo, una imagen digital típicamente puede tener mas de  $10^6$  muestras. La representación poco densa de esta imagen usando el diccionario *Wavelet* reduce el número de coeficientes necesarios para representar la imagen. Los algoritmos de compresión eficiente y reducción de ruido son implementados con simples operadores en estas bases.

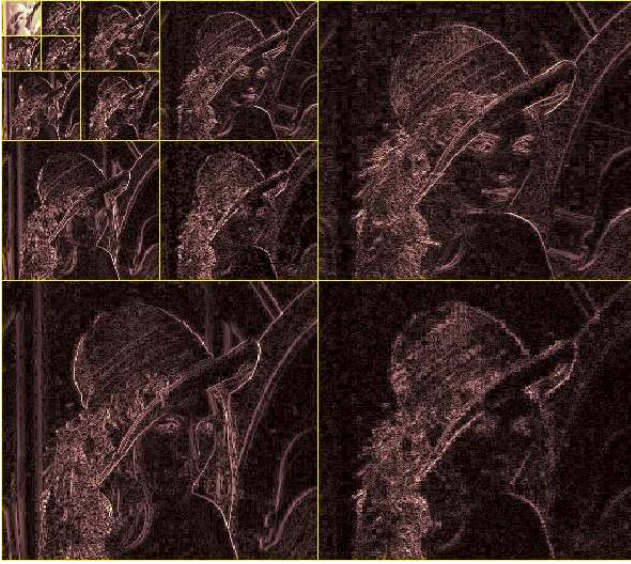


Figura 5: Descomposición *Wavelet* de una imagen en 4 niveles.

#### IV. TRANSFORMADA CURVELET

##### *Problemas de Wavelet*

A pesar del éxito de la transformada *Wavelet* clásica, ésta tiene fuertes limitaciones que la hacen poco eficiente. Por ejemplo, la *Wavelet* contiene solo un número fijo de elementos direccionales, independiente de la escala. Por otra parte, las ideas clásicas de resolución múltiple se refieren solo a una porción de toda la gama de los fenómenos multiescala. Siguiendo este razonamiento se han propuesto otros mecanismos de transformación como la transformada *Ridgelet* y la transformada *Curvelet*.

##### IV-A. Transformada *Curvelet* de tiempo continuo

Trabajando en el espacio bidimensional  $\mathbf{R}^2$  se tiene una variable espacial  $x$ , una variable del dominio de la frecuencia  $\omega$ , además de manejar coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  en el dominio de la frecuencia. Se empieza con un par de ventanas  $W(r)$  y  $V(t)$ , que son llamadas “ventana radial” y “ventana angular” respectivamente. Ambas son suaves, no negativas y de valor real, con  $W$  tomando argumentos reales positivos y soportados en  $r \in (1/2, 2)$  y  $V$  tomando argumentos reales y soportado en  $t \in [-1, 1]$ .

Estas ventanas obedecerán las siguientes condiciones:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} W^2(2^j r) = 1, \quad r \in (3/4, 3/2); \quad (9)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} V^2(t - \ell) = 1, \quad t \in (-1/2, 1/2) \quad (10)$$

Ahora, para cada  $j \geq j_0$ , se introduce la ventana de frecuencia  $U_j$  definida en el dominio de Fourier por

$$U_j(r, \theta) = 2^{-3j/4} W(2^{-j} r) V\left(\frac{2^{\lfloor j/2 \rfloor} \theta}{2\pi}\right) \quad (11)$$

donde  $\lfloor j/2 \rfloor$  es la parte entera de  $j/2$ . Así el soporte de  $U_j$  es una “cuña” polar definida por el soporte de  $W$  y  $V$ , las ventanas radial y angular, aplicadas con ventanas de ancho dependiente de la escala en cada dirección.

La forma de onda  $\varphi_j(x)$  se define por medio de su transformada de Fourier  $\widehat{\varphi}_j(\omega) = U_j(\omega)$ . Puede decirse entonces que  $\varphi_j$  es una *Curvelet* “madre”, ya que todas las *Curvelets* se obtienen por rotaciones y traslaciones de  $\varphi_j$ . Es necesario introducir las siguientes notaciones:

- Las secuencias equiespaciadas de ángulos de rotación se definen por  $\theta_\ell = 2\pi \cdot 2^{-\lfloor j/2 \rfloor} \cdot \ell$ , con  $\ell = 0, 1, \dots$  tal que  $0 \leq \theta_\ell < 2\pi$ .
- La secuencia de parámetros de traslación se definen  $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2$ .

Con estas notaciones, se definen las *Curvelets* (como función de  $x = (x_1, x_2)$ ) a escala  $2^{-j}$ , orientación  $\theta_\ell$  y posición  $x_k^{(j, \ell)} = R_{\theta_\ell}^{-1}(k_1 \cdot 2^{-j}, k_2 \cdot 2^{-j/2})$  por

$$\varphi_{j, \ell, k}(x) = \varphi_j(R_{\theta_\ell}(x - x(j, \ell)_k)),$$

donde  $R_\theta$  es la matriz de rotación en  $\theta$  radianes y  $R_\theta^{-1}$  su inversa.

Un coeficiente *Curvelet* es entonces simplemente el producto interno entre un elemento  $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$  y una *Curvelet*  $\varphi_{j, \ell, k}$ ,

$$c(j, \ell, k) := \langle f, \varphi_{j, \ell, k} \rangle = \int_{\mathbf{R}^2} f(x) \overline{\varphi_{j, \ell, k}(x)} dx \quad (12)$$

En *Curvelet* también hay elementos de escala gruesa, los cuales se definen como

$$\varphi_{j_0, k}(x) = \varphi_{j_0}(x - 2^{-j_0} k), \quad \widehat{\varphi}_{j_0}(\omega) = 2^{-j_0} W_0(2^{-j_0} |\omega|)$$

La transformada *Curvelet* posee algunas propiedades que se listan a continuación.

1. **Marco estrecho.** Debido a que es una base ortonormal, una función arbitraria  $f(x_1, x_2) \in L^2(\mathbf{R}^2)$  se puede expandir como una combinación lineal de *Curvelets*:

$$f = \sum_{j, \ell, k} \langle f, \varphi_{j, \ell, k} \rangle \varphi_{j, \ell, k}. \quad (13)$$

2. **Escalamiento parabólico.**  $\varphi_j(x)$  decae rápidamente lejos de un rectángulo de  $2^{-j}$  por  $2^{-j/2}$  con el eje mayor señalando la dirección vertical. La longitud y ancho efectivos obedecen la relación de escalamiento

$$\text{longitud} \approx 2^{-j/2}, \text{ ancho} \approx 2^{-j} \Rightarrow \text{ancho} = \text{largo}^2. \quad (14)$$

3. **Comportamiento oscilatorio.** A partir de esta definición,  $\widehat{\varphi}_j$  es soportada lejos del eje vertical  $\omega_1 = 0$  pero cerca del eje horizontal  $\omega_2 = 0$ . Esto indica que  $\varphi_j(x)$  es oscilatorio en la dirección  $x_1$  y pasabajas en la dirección  $x_2$ . Así a escala  $2^{-j}$  una *Curvelet* es una pequeña aguja cuya envolvente es una “cresta” de longitud efectiva  $2^{-j/2}$  y ancho efectivo  $2^{-j}$ , y que muestra un comportamiento oscilatorio en la “cresta” principal.

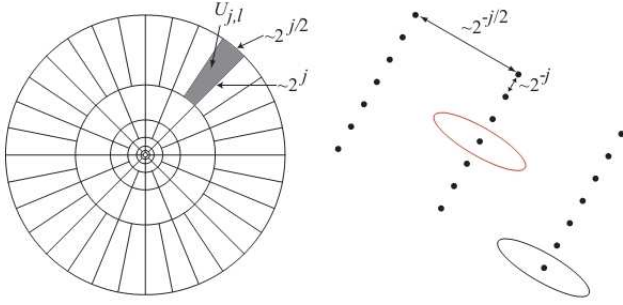


Figura 6: Subdivisión *Curvelet* en frecuencia y espacio. La figura de la izquierda representa la subdivisión inducida en el plano de frecuencia. La figura a la derecha representa esquemáticamente la grilla cartesiana espacial asociada con una escala y orientación dadas. [1]

4. **Momentos de fuga.** Se dice que el modelo *Curvelet* tiene momentos de fuga cuando

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) x_1^n dx_1 = 0, \forall 0 \leq n < q, \forall x_2 \quad (15)$$

Estas propiedades se ilustran en la Figura 6.

#### IV-B. Transformada *Curvelet* digital

Esta transformación es lineal y toma como entrada arreglos cartesianos de la forma  $f[t_1, t_2], 0 \leq t_1, t_2 < n$ , lo que permite pensar en la salida como una colección de coeficientes  $c^D(j, \ell, k)$  obtenidos por el análogo digital de (12).

$$c^D(j, \ell, k) := \sum_{0 \leq t_1, t_2 < n} f[t_1, t_2] \overline{\varphi_{j, \ell, k}^D[t_1, t_2]} \quad (16)$$

Donde cada  $c^D(j, \ell, k)$  es una forma de onda *Curvelet* digital.

##### Coronización digital

En la definición de tiempo continuo dada por la ecuación (11), la ventana  $U_j$  extrae frecuencias suavemente cerca de la corona diádica  $\{2^j \leq r \leq 2^{j+1}\}$  y cerca del ángulo  $\{-\pi \cdot 2^{-j/2} \leq \theta \leq \pi \cdot 2^{-j/2}\}$ . Las coronas y rotaciones no están adaptadas a arreglos cartesianos. Por otra parte, es conveniente reemplazar estos conceptos por equivalentes cartesianos; “coronas cartesianas” basadas en cuadrados concéntricos (en lugar de círculos) y cortes. Por ejemplo el equivalente cartesiano de la familia  $(W_j)_{j \geq 0}$ ,  $W_j(\omega) = W(2^{-j}\omega)$ , debería ser una ventana de la forma

$$\widetilde{W}_j(\omega) = \sqrt{\Phi_{j+1}^2(\omega) - \Phi_j^2(\omega)}, j \geq 0,$$

donde  $\Phi$  se define como el producto de la ventana pasa bajas unidimensional

$$\Phi_j(\omega_1, \omega_2) = \phi(2^{-j}\omega_1)\phi(2^{-j}\omega_2)$$

La función  $\phi$  obedece  $0 \leq \phi \leq 1$ , debería ser igual a 1 sobre  $[-1/2, 1/2]$ , y las salidas de fugas de  $[-2, 2]$ .

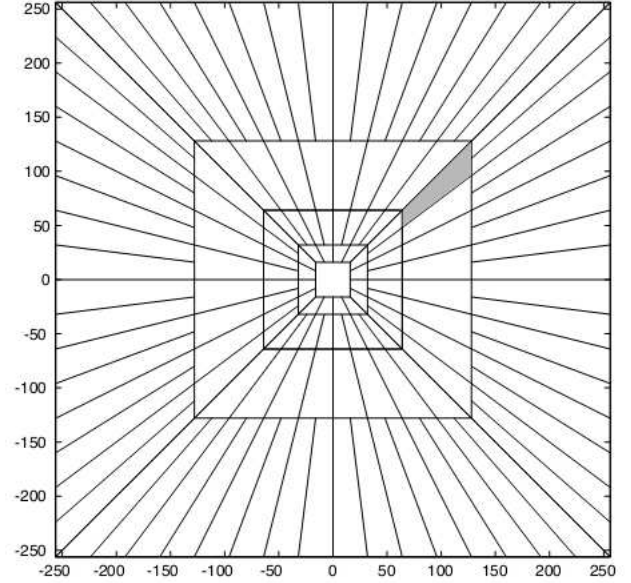


Figura 7: Subdivisión digital en frecuencia. [1]

Para examinar la localización angular, se supone que  $V$  es como se estableció antes, osea, obedece a la ecuación (10) y establece

$$V_j(\omega) = V(2^{\lfloor j/2 \rfloor} \omega_2 / \omega_1)$$

Se puede usar  $\widetilde{W}_j$  y  $V_j$  para definir la ventana “cartesiana”

$$\widetilde{U}_j := \widetilde{W}_j(\omega) V_j(\omega) \quad (17)$$

Es claro que  $\widetilde{U}_j$  aísla las frecuencias cerca de la cuña  $\{(\omega_1, \omega_2) : 2^j \leq \omega_1 \leq 2^{j+1}, -2^{-j/2} \leq \omega_2 / \omega_1 \leq 2^{-j/2}\}$  y es un equivalente cartesiano de la ventana “polar” de tiempo continuo. Se introduce ahora el conjunto de pendientes equiespaciadas  $\tan \theta_l \cdot 2^{\lfloor -j/2 \rfloor}, \dots, 2^{\lfloor j/2 \rfloor} - 1$ , y define

$$\widetilde{U}_{j, l} := W_j(\omega) V_j(S_{\theta_l} \omega),$$

donde  $S_{\theta}$  es la matriz de corte.

Los ángulos aquí no son equiespaciados, pero las pendientes sí. Cuando se completa por simetría y la rotación por  $\pm\pi/2$  radianes la familia  $\widetilde{U}_{j, \ell}$  define el equivalente cartesiano de la familia  $U_j(R_{\theta_\ell} \omega)$  de tiempo continuo. La familia  $\widetilde{U}_{j, \ell}$  implica una subdivisión concéntrica como se muestra en la Figura 7.

Por construcción,  $V_j(S_{\theta_\ell} \omega) = V(2^{\lfloor j/2 \rfloor} \omega_2 / \omega_1 - l)$  y para cada  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$  con  $\omega_1 > 0$ , tenemos

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |V_j(S_{\theta_\ell} \omega)|^2 = 1$$

La sumatoria anterior restringida a los ángulos de interes,  $-1 \tan \theta_\ell < 1$ , obedece  $\sum_{\text{todo ángulo}} |V_j(S_{\theta_\ell} \omega)|^2 = 1$ , para  $\omega_1 / \omega_2 \in [-1 + 2^{-\lfloor j/2 \rfloor}, 1 - 2^{-\lfloor j/2 \rfloor}]$ . A partir de lo cual se obtiene

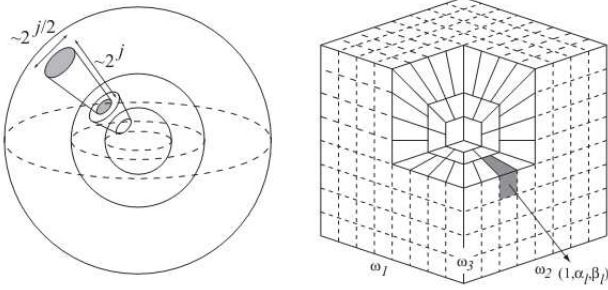


Figura 8: Subdivisión en frecuencia. A la izquierda esquema para la subdivisión en *Curvelet* 3D continuo. A la derecha subdivisión discreta. [11]

$$\sum_{\text{toda escala}} \sum_{\text{todo ángulo}} |\tilde{U}_{j,\ell}(\omega)|^2 = 1. \quad (18)$$

Esta es una manera de definir las ventanas “esquina” especialmente adaptadas a uniones sobre los cuatro cuadrantes tal que la ecuación (18) se mantiene para toda  $\omega \in \mathbf{R}^2$ .

## V. TRANSFORMADA CURVELET 3D

Las *Curvelets* existen en cualquier dimensión. En 3 dimensiones, las *Curvelets* son pequeñas placas de longitud lateral aproximadamente  $2^{-j/2}$  en dos direcciones y grosor aproximado  $2^j$  en la dirección ortonormal. Ellas varían suavemente en las dos direcciones largas y oscilan en la dirección corta. Las *Curvelets* 3D deberían proveer representaciones eficientes de objetos 3D con singularidades a lo largo de superficies 2D.

Entonces la transformada *Curvelet* 3D preserva las propiedades de la transformada 2D. Y más importante aún, el soporte de frecuencia de una *Curvelet* 3D debe localizarse cerca a una cuña siguiendo la propiedad de escalamiento parabólico. Para la transformada continua, el contenido de la ventana de frecuencia es como se describe a continuación. La ventana radial suavemente extrae la frecuencia cerca a la corona diádica  $\{2^{j-1} \leq r \leq 2^{j+1}\}$ . Para cada escala  $j$ , la esfera unitaria  $S^2$  la cual representa todas las direcciones en  $\mathbf{R}^3$  es partida en  $O(2^{j/2} \times 2^{j/2}) = O(2^j)$  ventanas angulares suaves, cada una de las cuales tiene soporte en forma de disco con radio  $O(2^{j/2})$ , y los cuadrados que forman una partición de la unidad de  $S^2$ , como se muestra en la Figura 8.

La transformada *Curvelet* discreta 3D toma como entrada una grilla cartesiana 3D de la forma  $f(n_1, n_2, n_3)$ ,  $0 \leq n_1, n_2, n_3 < n$ , y da como salida una colección de coeficientes  $c^D(j, \ell, k)$  definidos por

$$c^D(j, \ell, k) := \sum_{n_1, n_2, n_3} f(n_1, n_2, n_3) \overline{\varphi_{j,\ell,k}^D(n_1, n_2, n_3)} \quad (19)$$

Donde  $j, \ell \in \mathbf{Z}$  y  $k = (k_1, k_2, k_3)$ .

## VI. ALGORITMO DE RECONSTRUCCIÓN

Como se mencionó anteriormente la técnica de muestreo comprimido explota la baja densidad de las señales en un dominio específico. De esta forma un algoritmo de optimización

que minimiza el error medio cuadrático entre las muestras adquiridas y la proyección de la señal poco densa y que al mismo tiempo minimiza la norma  $\ell_1$  del vector que representa los coeficientes de la señal poco densa, es propuesto para encontrar la solución al problema inverso de reconstrucción

$$\min \|\Theta s - y\|_2^2 + \lambda \|\Psi^{-1} x\|_1 \quad (20)$$

donde la variable es  $s \in \mathbf{R}^N$  y  $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$  denota la norma  $\ell_1$ . Además  $\Phi = [\phi_1 \dots \phi_M]^T \in \mathbf{R}^{M \times N}$  es llamada la matriz de compresión,  $\lambda > 0$  es el parámetro de regularización, y  $\Psi$  es llamada la transformada de poca densidad (*sparisifying transform*). Note que la condición sobre la norma  $\ell_1$  del vector  $s$  coincide con el hecho de que se conoce que la señal es poco densa. Una mejor condición sería minimizar la norma  $\ell_0$  del vector  $s$ , pero esta condición hace que el problema de optimización no sea convexo y por consiguiente mas difícil de implementar.

### VI-A. Métodos de solución para muestreo comprimido

Cuando  $\Psi$  es invertible se puede reformular el problema de muestreo comprimido de la ecuación (20) como el problema de mínimos cuadrados con regularización  $\ell_1$

$$\min \|As - y\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \quad (21)$$

donde la variable es  $s \in \mathbf{R}^N$  y los datos del problema o parámetros son  $A = \Phi\Psi \in \mathbf{R}^{M \times N}$  y  $y \in \mathbf{R}^M$ . El problema de regularización  $\ell_1$  en (21) se puede transformar en un programa cuadrático convexo, con limitaciones de desigualdad lineal,

$$\min \|As - y\|_2^2 + \sum_{i=1}^n \lambda u_i \quad (22)$$

$$\text{sujeto a } -u_i \leq s_i \leq u_i, \quad i = 1, \dots, n$$

donde las variables son  $x$  y  $u$ .

La matriz de datos  $A$  es por lo general plenamente densa, y así problemas con tamaños pequeños y medianos se pueden solucionar mediante métodos estándar de optimización convexos tal como los métodos de punto interior.

### VI-B. Método de punto interior

Primero se define la barrera logarítmica para las cotas límites  $-u_i \leq x_i \leq u_i$  en (22)

$$\Phi(x, u) = - \sum_{i=1}^n \log(u_i + x_i) - \sum_{i=1}^n \log(u_i - x_i)$$

con dominio definido  $\Phi(x, u) = \{(x, u) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \mid |x_i| < u_i, i = 1, \dots, N\}$ .

La siguiente ecuación resuelve el mismo problema de (20)

$$\phi_t(x, u) = t \|Ax - y\|_2^2 + t \sum_{i=1}^n \lambda u_i + \Phi(x, u),$$

donde del parámetro  $t$  es constante.

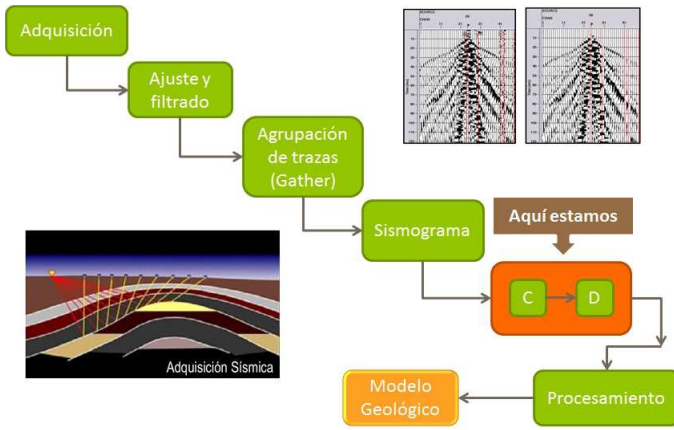


Figura 9: Proceso exploración sísmica.

Para cada nuevo punto en cada iteración se halla por medio de la suma del valor anterior mas un porcentaje en la dirección de descenso

$$\phi_t(s + \Delta s, u + \Delta u) \leq \phi_t(s, u) - \alpha \nabla \phi_t(s, u)$$

donde  $\nabla \phi_t$  representa el gradiente de  $\phi_t$  y  $\alpha$  es un parámetro del algoritmo y es constante.

Este algoritmo usa como criterio de parada el valor de la brecha de dualidad dividida por el valor del objetivo dual.

## VII. EXPLORACIÓN SÍSMICA

Los datos sísmicos graban las amplitudes de reflexiones de señales durante el tiempo de recepción. La función de amplitud es conocida como traza sísmica. Un conjunto de trazas dan un muestreo espacio-temporal de la señal reflejada conteniendo diferentes llegadas que responden a las diferentes interacciones de la onda incidente con las inhomogeneidades del subsuelo. Geofísicamente, las *Curvelets* proveen una representación óptima de eventos sísmicos locales y puede ser usado de manera efectiva para la preservación del proceso sísmico.

## VIII. SIMULACIÓN DE LA TÉCNICA DE MUESTREO COMPRIMIDO

Aquí la técnica es usada para reconstruir un sismograma que ha sido previamente muestreado de manera aleatoria, donde se busca obtener sismogramas reconstruidos semejantes a los sismogramas antes de ser muestreados. Básicamente se está agregando un paso al proceso de adquisición de imágenes sísmicas para probar la factibilidad de poder aplicar esta técnica en un futuro proceso de adquisición con datos comprimidos.

En la Figura 9 se puede ver a grandes rasgos como es el proceso de adquisición de trazas sísmicas que se convertirán en modelos geológicos al finalizar la cadena de procesos. Se puede ver que se agrega un nuevo proceso que internamente contiene una compresión (muestreo aleatorio) y una descompresión (donde se aplica la reconstrucción al sismograma previamente muestreado).

La Figura 10 muestra de manera general el proceso que se aplica en este trabajo, donde el bloque transformada inversa

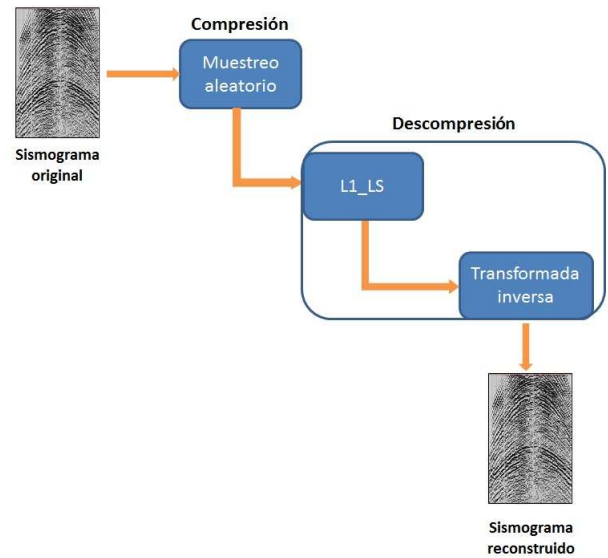


Figura 10: Descripción general del proceso de reconstrucción en la cual aparecen la compresión y la descompresión.

designa a *Wavelet* o a *Curvelet*. Este proceso consiste básicamente en dos pasos, compresión y descompresión.

La compresión se hace muestreando el sismograma, de lo cual se obtiene una pequeña porción de información, que se almacena en un vector, siendo estos los datos a partir de los cuales se hace la reconstrucción.

A la descompresión llegan los datos “comprimidos.”<sup>a</sup> partir de los cuales resolviendo un problema de optimización, mediante el método de punto interior para mínimos cuadrados con regularización  $\ell_1$ , se generan coeficientes en un dominio específico (*Wavelet* o *Curvelet*), que al finalizar el proceso iterativo de la minimización se les aplica una transformada inversa, obteniendo de esta manera el sismograma reconstruido.

## IX. SIMULACIÓN EN SISMOGRAMAS 2D

La reconstrucción finalmente se realizó usando el método de punto interior para la solución de mínimos cuadrados con regularización  $\ell_1$ .<sup>1</sup> El algoritmo se presenta en [4] y [5].

### IX-A. Simulación basada en Wavelet

Esta simulación usa la transformada *Wavelet* como dominio de representación poco densa de sismogramas. Existe una restricción respecto a la entrada del sistema, cuyos datos deben ser diádicos ( $N \times N$  donde  $N = 2^n$ ) para poder correr los códigos del algoritmo. En esta parte del trabajo se usaron como entradas sismogramas generados de manera sintética. La reconstrucción es exitosa a pesar que la direccionalidad de la transformada se encuentra altamente restringida, lo que hace que el numero de coeficientes generados por la herramienta que calcula la transformada sea igual al numero de datos del sismograma antes de muestrear.

La transformada *Wavelet* maneja tres direccionalidades, vertical, horizontal y diagonal, las cuales muestran los detalles

<sup>1</sup>Disponible en [http://www.stanford.edu/~boyd/l1\\_ls/](http://www.stanford.edu/~boyd/l1_ls/)

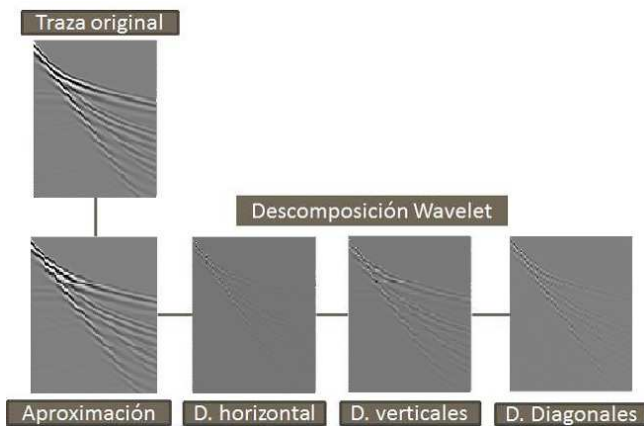


Figura 11: Descomposición *Wavelet* de un sismograma sintético en sus coeficientes de aproximación y detalles direccionales.

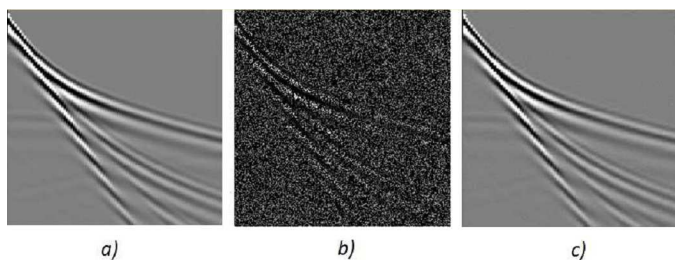


Figura 12: Reconstrucción de un sismograma a partir de sus coeficientes *Wavelet*. a) Sismograma original, b) Muestras aleatorias del sismograma, c) Sismograma reconstruido.

del sismograma, además de manejar una aproximación a los datos originales. En la Figura 11 se muestra la descomposición de un sismograma sintético en su aproximación y sus detalles direccionales.

La reconstrucción del sismograma usando la transformada *Wavelet* se realizó muestreando el sismograma original conservando solo el 30% de los datos, después de un proceso iterativo en el cual se busca cumplir con una tolerancia. Se obtiene una reconstrucción completa como se muestra en la Figura 12. En el muestreo se toman datos de manera aleatoria, en la imagen de la Figura 12.b se ven las muestras tomadas.

Una figura de mérito para medir que tan buena es la calidad de una imagen con respecto a otra es la medida de PSNR (*Peak Signal-to-Noise Ratio* en inglés) la cual se da en decibeles (dB). Se considera que una imagen es similar a otra cuando la medición de PSNR es superior a 30[dB]. Para la reconstrucción en la Figura 12 se obtuvo un PSNR de 42.0566[dB]. A partir de este dato se puede afirmar lo que se ve a simple vista, que las imágenes son altamente similares.

#### IX-B. Simulación basada en *Curvelet*

La transformada *Curvelet* tiene una ventaja respecto a la *Wavelet* en que su direccionalidad es mucho más alta, pudiendo seleccionarse para determinar los detalles en el sismograma a reconstruir. Debido a la mayor direccionalidad de *Curvelet* se obtiene un número mayor de coeficientes para representar

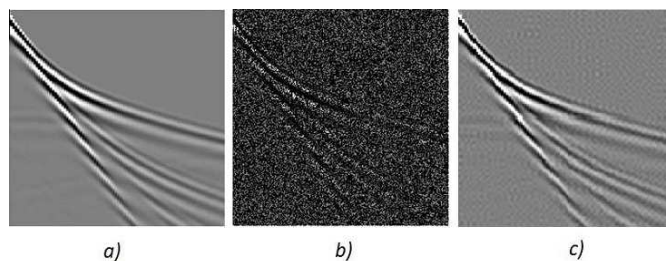


Figura 13: Reconstrucción de un sismograma a partir de sus coeficientes *Curvelet*. a) Sismograma original, b) Muestras aleatorias del sismograma, c) Sismograma reconstruido.

los detalles direccionales del sismograma, lo que provoca que el número de iteraciones para la reconstrucción sea mayor y por tanto el tiempo de procesamiento.

La Figura 13 muestra la reconstrucción del sismograma viéndose una comparación con el sismograma original y el sismograma muestreado, donde se ve que el sismograma reconstruido es bastante similar al original. Debido a que para realizar esta reconstrucción se usan computadores personales con procesadores de uso comercial, se da un límite de iteraciones, pero a pesar de esto los resultados que se ven son bastante buenos y la medida obtenida de PSNR que es de 32.4527[dB] confirma que a pesar de las restricciones dadas al momento de correr los algoritmos el sismograma reconstruido es similar al sismograma original.

## X. SIMULACIÓN DE SISMOGRAMAS 3D

La simulación para sismogramas 3D sigue el mismo proceso usado en 2D. Las condiciones han de ser las mismas que en 2D, como por ejemplo, la forma de los datos debe ser igual (datos diádicos), solo que la cantidad de información de los sismogramas ya no será  $N^2$  sino  $N^3$ , lo que hace que la exigencia de procesamiento aumente polinomialmente.

### X-A. Simulación basada en *Wavelet*

La simulación basada en *Wavelet* se hace a partir de un cubo tomado de un sismograma real y se realizó la reconstrucción a partir de 30%, 40% y 50% de datos. Debido a la exigencia de procesamiento para estos datos la simulación se trunca en un número determinado de iteraciones obteniéndose reconstrucciones que comparadas con los datos originales poseen PSNR de entre 20[dB] y 24[dB] (hay que recordar que una reconstrucción se considera buena con un PSNR mínimo de 30[dB]). Estos PSNR bajos se deben a que el algoritmo se trunca por el máximo número de iteraciones, por lo que el error no alcanza a converger al valor mínimo deseado. Para obtener mejores resultados es necesario entonces el uso de procesamiento en paralelo o supercomputadores de modo que se pueda obtener el error mínimo necesario para obtener un sismograma reconstruido que pueda considerarse similar al original.

### X-B. Simulación basada en *Curvelet*

Para esta simulación basada en *Curvelet* se usó el mismo proceso descrito anteriormente. si en *Wavelet* la exigencia

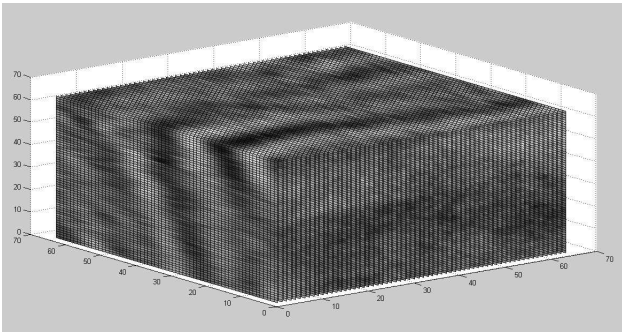


Figura 14: Sismograma 3D original.

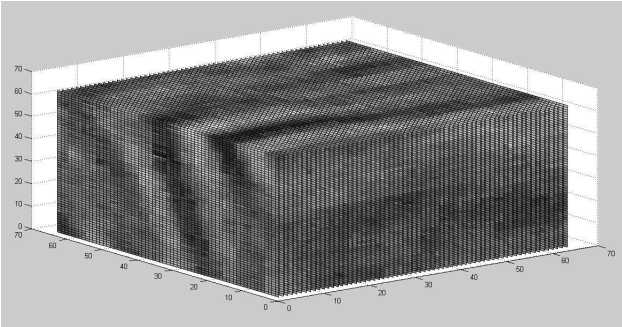


Figura 15: Sismograma reconstruido basado en *Wavelet* con 30 % de información. PSNR = 21,7225[dB].

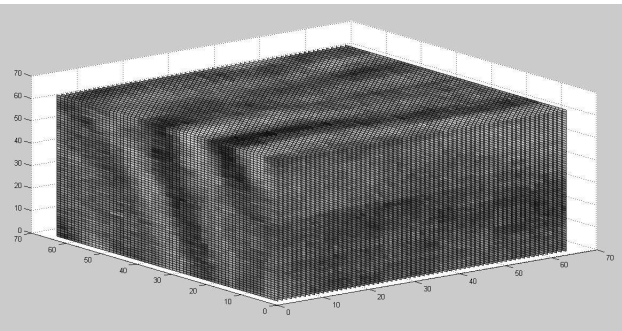


Figura 16: Sismograma reconstruido basado en *Wavelet* con 40 % de información. PSNR = 22,4859[dB].

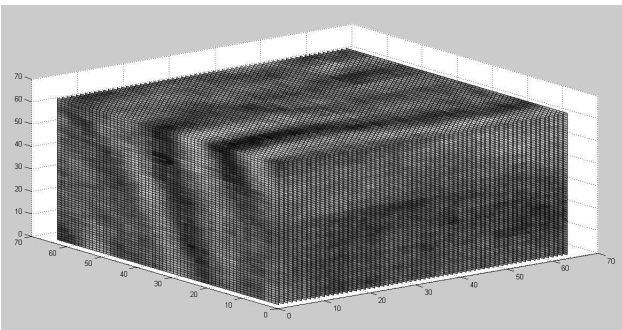


Figura 17: Sismograma reconstruido basado en *Wavelet* con 50 % de información. PSNR = 23,9865[dB].

computacional era alta, en *Curvelet* esta exigencia es mucho más grande debido a que el número de coeficientes es mucho mayor que en *Wavelet* dada la alta direccionalidad manejada

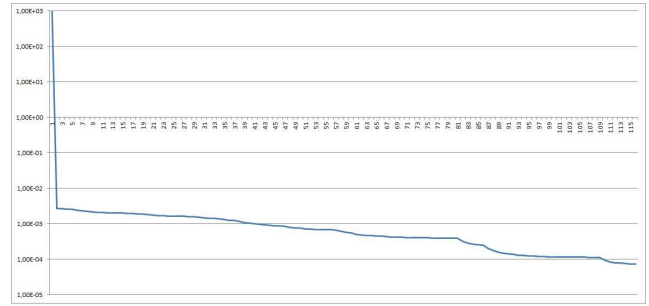


Figura 18: Gráfica donde se muestra la disminución del error y la lenta convergencia de este en cada nueva iteración.

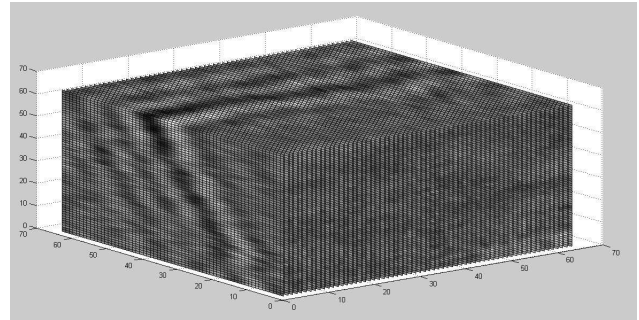


Figura 19: Sismograma original 3D para la reconstrucción basada en *Curvelet*.

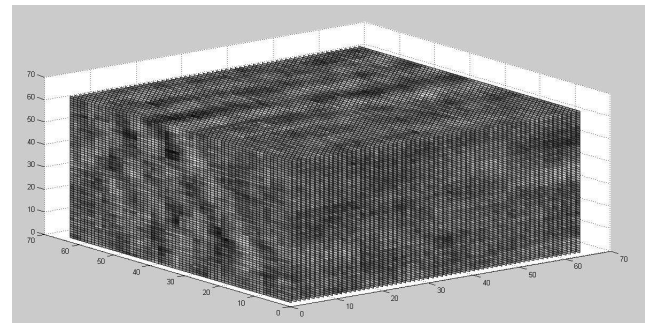


Figura 20: Sismograma reconstruido basado en *Curvelet* con 40 % de información. PSNR=18.2748[dB].

en este dominio, haciendo que las iteraciones sean más lentas y la reducción del error no se reduzca de manera considerable en cada iteración, por lo que encontrar el error mínimo requerirá de un gran número de iteraciones que conllevan en un computador personal tiempos muy grandes que exceden la capacidad de estos. En la Figura ?? se muestra el resultado de la reconstrucción para cada iteración, donde puede apreciarse la lenta reducción del error y en la Figura 20 puede verse un sismograma 3D reconstruido con 40 % de muestras con pocas iteraciones para apreciar la lenta convergencia del algoritmo.

## XI. ANÁLISIS DE RESULTADOS

La técnica de muestreo comprimido revoluciona la adquisición y muestreo de señales dado que se puede recuperar exitosamente una señal teniendo en cuenta que la información muestreada de esta forma es mucho menor a la información muestreada con los métodos tradicionales.

En 2D las pruebas se pueden realizar obteniendo buenos resultados en computadores personales debido a que la exigencia de procesamiento de los algoritmos, a pesar de ser alta, puede ser soportada por estos, y los resultados exitosos lo prueban.

Los resultados obtenidos para la simulación basada en *Curvelet* 2D nos muestran una reconstrucción que a simple vista no supera a *Wavelet*, a pesar de que se ha probado que *Curvelet* ofrece una mejor representación de poca densidad de trazas sísmicas que *Wavelet*. Esto se debe a que al ser mayor la cantidad de coeficientes en *Curvelet* se requieren un gran número de iteraciones para que la reconstrucción obtenida tenga una medida de PSNR mayor o igual que *Wavelet*.

Al abordar el problema de reconstrucción para datos 3D se encontraron limitaciones de procesamiento debido a la poca capacidad de computo con la que se conto para hacer dichas simulaciones. los resultados que se obtuvieron con la transformada *Wavelet* 3D no fueron los mejores, y la razón es que el algoritmo de reconstrucción no alcanza a converger a un error aceptable dado que se trunca en un máximo número de iteraciones establecidas previamente en el algoritmo. Una solución sería aumentar este número a una cantidad muy considerable y hacer el procesamiento en un supercomputador o utilizar procesamiento en paralelo.

La reconstrucción de datos 3D basados en *Curvelet* tuvo limitaciones muy fuertes, empezando por el hecho de que la *toolbox Curvelet*<sup>2</sup> para Matlab, hace la implementación de la transformada 3D en C++, y ha de usarse un compilador para poder correr esta transformada en Matlab, y solo puede correrse en linux. Otra limitación está dada por la implementación que realiza la transformada solo para datos de máximo de  $180 \times 180 \times 180$  píxeles [11]. Además también por la direccionalidad de la transformada se genera un número de coeficientes mayor al número de píxeles en el cubo se necesitarían más iteraciones que en *Wavelet* para una reconstrucción buena, pero después de correr los algoritmos se ve que la convergencia es bastante lenta por lo que la exigencia de procesamiento es muy grande y como en el caso de *Wavelet* se necesitarían supercomputadores o procesamiento en paralelo para obtener una buena reconstrucción.

## XII. CONCLUSIÓN

La reconstrucción de sismogramas ha sido implementada tanto para 2D como para 3D obteniéndose resultados que satisfactorios. A pesar de las dificultades se cumple con lo que se buscaba que era hacer reconstrucciones de sismogramas usando la técnica del muestreo comprimido.

## XIII. TRABAJO FUTURO

Como trabajo futuro se propone lo siguiente:

1. Continuar el estudio de la técnica de modo que se pueda hacer una reconstrucción de datos sísmicos tomados en campo.
2. Eliminar la restricción de datos de entrada diádicos.
3. Implementar la técnica para una adquisición física de datos sísmicos en campo y la reconstrucción de los mismos.

<sup>2</sup>Disponible en [www.curvelet.org](http://www.curvelet.org)

## REFERENCIAS

- [1] CANDÈS, Emmanuel; DEMANET, Laurent; DONOHO, David y YING, Lexing. "Fast Discrete Curvelet Transforms". Julio 2005.
- [2] CANDÈS, Emmanuel y WAKIN, Michael. "An Introduction To Compressive Sampling", en *IEEE Signal Processing Magazine*. Marzo 2008. pp 21 - 30.
- [3] DÍAZ SANCHEZ, María José. *Algoritmo y aplicación de Compressive sensing*. Proyecto fin de carrera de Ingeniería de Telecomunicaciones. Departamento Teoría de Señal y Comunicaciones. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. España.
- [4] KIM, Seung Jean; KOH, Kwangmoo; LUSTIG, Michael y BOYD, Stephen. "An Efficient Method For Compressed Sensing".
- [5] KIM, Seung Jean; KOH, Kwangmoo; LUSTIG, Michael; BOYD, Stephen y GORINEVSKY, Dmitry. "An Interior-Point Method For Large-Scale  $\ell_1$ -Regularized Least Squares".
- [6] MA, Jianwei y PLONKA, Gerlind. "A Review of Curvelets and Recent Applications", en *IEEE Signal Processing Magazine*. 2010.
- [7] MALLAT, Stéphane. *A Wavelet Tour of Signal Processing (The Sparse Way)*. 3a Edición. Elsevier. 2009. pp 1 ? 31.
- [8] OPPENHEIM, Allan V.; WILLSKY, Alan S. y NAWAB, S. Hamid. *Señales Y Sistemas*. 2a Edición. Pearson Prentice Hall. 1998.
- [9] STARCK, Jean-Luc; ELAD, Michael y DONOHO, David. "Redundant Multiscale Transforms and Their Applications for Morphological Component Separation", en *Advances in imaging and Electron Physics*. Volumen 132. 2004. pp 287 - 348.
- [10] VELÁZQUEZ UZCATEGUI, Alexis Daniel. *Implementación a nivel de hardware de la teoría de compressive sensing*. Trabajo requisito parcial para optar al título de Ingeniero Electricista. Escuela de Ingeniería Eléctrica. Facultad de Ingeniería. Universidad de los Andes. Venezuela. Junio de 2008.
- [11] YING, Lexing; DEMANET, Laurent y CANDÈS, Emmanuel. "3D Discrete Curvelet Transform".

**Amat Duban Zuluaga Quintero** Nació en Bucaramanga, Colombia en el año de 1988. Es estudiante de ingeniería electrónica de la Universidad Industrial de Santander, además pertenece al grupo de investigación en Conectividad y Procesamiento de Señales (CPS) de dicha universidad. Sus intereses de investigación incluyen el procesamiento de señales e imágenes.

**Milton Andrey González Quintero** Nació en Aguachica departamento de Cesar, Colombia en el año de 1988. Es estudiante de ingeniería electrónica de la Universidad Industrial de Santander, adicionalmente pertenece al grupo de investigación en Conectividad y Procesamiento de Señales (CPS) de la UIS. Sus intereses de investigación incluyen el procesamiento de señales e imágenes.

**Ana Beatriz Ramírez Silva** Es Ingeniera Electrónica de la Universidad Industrial de Santander y Master en Ciencias de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Puerto Rico. En la actualidad se encuentra vinculada con la Universidad Industrial de Santander como profesora asistente y es candidata a doctor de la Universidad de Delaware, EU, en el área de procesamiento de señales.

**Sergio Alberto Abreo Carrillo** Nació en Bucaramanga, Colombia en el año de 1983. Es Ingeniero en Control Electrónico de la Universidad Francisco José de Caldas y magister en ingeniería electrónica de la Universidad Industrial de Santander. Ha sido profesor cátedra en la escuela de ingenierías eléctrica, electrónica y de telecomunicaciones en los últimos tres años dirigiendo los cursos de señales, sistemas digitales y arquitectura de computadores. Adicionalmente pertenece a los grupos de investigación en Conectividad y Procesamiento de Señales (CPS) de la UIS y Petrosísmica del Instituto Colombiano del Petróleo (ICP). Sus intereses de investigación incluyen diseño e implementación de procesadores específicos usando FPGAs, computación de alto rendimiento, migración sísmica e imaging.