USO DE TALLERES CREATIVOS ALREDEDOR DE APLICACIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS COMO ACTIVIDADES DE REFUERZO PARA EDUCANDOS DE DÉCIMO GRADO

MANDIUS CARVAJALINO ORTIZ
VIVIANA ANDREA PARADA ALMEIDA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

USO DE TALLERES CREATIVOS ALREDEDOR DE APLICACIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS COMO ACTIVIDADES DE REFUERZO PARA EDUCANDOS DE DÉCIMO GRADO

MANDIUS CARVAJALINO ORTIZ
VIVIANA ANDREA PARADA ALMEIDA

Trabajo de grado para obtener el título de Licenciados en Matemáticas

Orientadora
Esp. SANDRA ÉVELY PARADA RICO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2007

AGRADECIMIENTOS

A Sandra Parada, maestra orientadora de esta investigación por su constante motivación, afecto, apoyo y colaboración.

A nuestros padres, hermanos, abuelos, sobrinos, por darnos su amor y apoyo.

A Luz Elena, Sergio Ricardo, Diana Roció y María Alexandra, educandos de la Escuela Normal Superior de Bucaramanga, por ser los protagonistas de esta experiencia.

A Dios, por darnos la licencia de culminar este anhelo.

A los profesores de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander.

Y a todas aquellas personas que colaboraron de una forma u otra en la realización de este trabajo.

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

TITULO: USO DE TALLERES CREATIVOS ALREDEDOR DE APLICACIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS COMO ACTIVIDADES DE REFUERZO PARA EDUCANDOS DE DÉCIMO GRADO.*

AUTORES: CARVAJALINO ORTIZ, MANDIUS.
PARADA ALMEIDA, VIVIANA ANDRÉA.**

PALABRAS CLAVES: Talleres creativos, Actividades de refuerzo, Aplicaciones de las funciones trigonométricas, Evaluación diagnóstica, Seguimiento de los procesos de aprendizaje.

DESCRIPCIÓN

Esta investigación tiene como objetivo **plantear y analizar el uso de talleres creativos alrededor de las Aplicaciones de las funciones trigonométricas como actividades de refuerzo para educandos de décimo grado.** Los talleres creativos son presentados como una alternativa de refuerzo en la que el educando a partir de la resolución de problemas tienen la posibilidad de reconstruir los conceptos que aun después de la clase dada por el maestro no han sido asimilados por su estructura cognitiva.

A través de este trabajo de investigación pretendemos responder a la pregunta **¿Cuáles son los elementos principales que se deben tener en cuenta a la hora de diseñar talleres creativos como actividades de refuerzo para los educandos de décimo grado?**

En este trabajo entendemos por taller creativo taller creativo como la agrupación de situaciones diseñadas a partir de los elementos del contexto de los educandos a quienes se aplican, y cuya finalidad es el fortalecimiento de sus procesos de aprendizaje. Denominándosele creativo porque es el producto de la inventiva del maestro, quien retoma cada uno de los elementos que reconoce como motivacionales para sus educandos (gustos, preferencias,…), y apoyándose en el uso de material didáctico plantea nuevas situaciones.

El método de investigación usado para el desarrollo de esta investigación es el estudio de caso cualitativo, el cual se fundamenta en los aportes de diferentes autores en el campo de la evaluación y la resolución de problemas.

Durante la aplicación de las actividades de refuerzo, asimismo, de los talleres creativos, reconocimos dos elementos claves en su construcción, como fueron: “Las actividades diagnósticas para identificar las dificultades y características del grupo” y “El seguimiento de las actividades para la retroalimentación de los procesos de enseñanza y aprendizaje”.

---

* Trabajo de Grado

** Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander. Orientadora: Esp. SANDRA ÉVELY PARADA RICO.

SUMMARY

TITLE: USE CREATIVE WORKSHOPS AROUND APPLICATIONS OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS, FOR SUPPORTING ACTIVITIES TO STUDENTS OF TENTH GRADE*[*]

AUTHORS: CARVAJALINO ORTIZ, MANDIUS.
PARADA ALMEIDA, VIVIANA ANDRÉA.[**]

KEY WORDS: Creative workshops, Support activities, Trigonometric functions applications,. Diagnostic evaluation, Follow up of learning process.

DESCRIPTION

The purpose of this research is **to state and analyse the use of creative workshops around applications of trigonometric functions for support activities to students of tenth grade.** Creative workshops are presented like a choice of support, where the student, solving different kinds of problems has the possibility of rebuild the concepts, which, even after the class haven`t been assimilated by their cognitive structure.

Through this research we want to answer the next question **¿Which are the main elements that are due to consider at the time of designing creative factories as activities of reinforcement for the educandos of tenth grade?**

In this work we understand by creative factory creative factory as the grouping of situations designed from the elements of the context of the educandos to those who are applied, and whose purpose is the fortification of its processes of learning. Denominating to it him creative because it is the product of the inventiveness of the teacher, who retakes each one of the elements that recognize like motivacionales for their educandos (tastes, preferences,…), and leaning in the use of didactic material it raises new situations.

The method of the research used in its development is the study of qualitative cases, which is supported in different contributions of authors in the field of evaluation and problems solving.

During the application of the support activities, and creative workshops we recognize two main elements in its building: “diagnostic activities to identify difficulties and group characteristics” and “the follow up of activities to feedback the process of teaching and learning”.

[*] Working degree
[**] School of Mathematics, Universidad Industrial de Santander, Counselor: Esp. SANDRA EVELY PARADA RICO

LA INVESTIGACIÓN…

La idea de investigación que presentamos en este trabajo surgió a partir de nuestra experiencia durante el Servicio Social y Trabajo de Grado I realizado en la Escuela Normal Superior de Bucaramanga (ENS) como respuesta a muchas de las inquietudes que nacieron durante el desarrollo de la misma. La mayoría de estas inquietudes giran alrededor de la preocupación que sentimos como maestros frente a las dificultades de aprendizaje de nuestros educandos, en especial, en el de la matemática. Por ello nuestro objetivo de investigación es el presentar una alternativa a partir de la cual se puedan superar aquellas dificultades en el aprendizaje que son producto de los vacíos cognitivos, como resultado de las reflexiones que hicimos acerca del porque de las dificultades que se presentaron en los educandos durante las actividades de refuerzo que desarrollamos.

La alternativa que presentamos consiste en el uso de talleres creativos como actividades de refuerzo, los cuales fueron aplicados a un grupo de 36 educandos de grado décimo de la ENS, quienes en su mayoría son muchachos que presentan varios vacíos cognitivos y que decidieron participar en ellas voluntariamente. Sin embargo, para el análisis de las actividades seleccionamos a solo cuatro de los educandos, a quienes hicimos el seguimiento de sus procesos de aprendizaje.

Los criterios para seleccionar los cuatros sujetos de investigación fueron:

1. El que haya participado activamente en todos los talleres creativos y
2. la representatividad tiene frente al grupo con el cual presenta características comunes.

Dentro del grupo de educandos se presentaron cuatro subgrupos caracterizados por:

1. Quienes presentan facilidad para el aprendizaje de la matemática, y muestran disposición para aprenderla,
2. Quienes presentan facilidad para el aprendizaje de la matemática, y sin embargo, muestran poca disposición para aprenderla,
3. Quienes presentan dificultades en el aprendizaje de la matemática, y muestran voluntad en su superación; y
4. Quienes presentan dificultades en el aprendizaje de la matemática, y sin embargo, muestran poco esfuerzo para superarlas.

Durante la planeación de las actividades de refuerzo pudimos constatar que en Colombia no existen unos criterios definidos en los que se establezcan los requisitos que demandan la elaboración de unas actividades como estas, ni siquiera en el decreto 0230 del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2002) en el que se hace mención a las normas en materia de currículo, evaluación y promoción de los educandos y evaluación institucional, se establecen unos lineamientos claros para ello; de tal suerte que las actividades de refuerzo y recuperación son desarrolladas según las propias interpretaciones de los coordinadores académicos y de los mismos maestros, contrario a lo ocurre, por ejemplo en España, más exactamente en la Comunidad Autónoma de Extremadura, en donde la misma Consejería de Educación (2006) a partir de la Instrucción nº 7 de la Dirección General de Calidad y Equidad Educativa busca favorecer el rendimiento académico del alumnado al dictar en ella unas normas que rigen la realización de estas actividades.

Por lo que pudimos observar de la socialización de las experiencias de nuestros compañeros en la práctica pedagógica, de nuestras vivencias personales como estudiantes y actuales profesores de matemáticas, las actividades de refuerzo que se han realizado hasta el momento en la mayoría de las instituciones consisten en *la entrega de una miscelánea de ejercicios* por parte del maestro de la materia, que deben ser desarrolladas por los educandos sin su orientación, con el objetivo de realizar un "repaso" de los temas en los cuales se presentan, según el maestro, mayores dificultades, y que se espera sirvan de preparación para la *evaluación de recuperación,* la cual se define en el decreto 0230 del MEN (2002) como una "prueba escrita basada en un programa de refuerzo pertinente con las dificultades que presenta el educando y que el maestro del área entrega al finalizar el año escolar, para ser presentada a más tardar la semana anterior al comienzo del siguiente año escolar".

Como podemos ver la concepción de actividad de refuerzo que tienen las comunidades educativas (directivas, maestros, padres de familia y educandos) en general, es una concepción ambigua, puesto que no son concebidas como un "conjunto de acciones que se deben planear y desarrollar *a lo largo del año escolar* con el propósito de que el educando eleve el nivel de logros alcanzados" (Parada, 1996), sino como espacios destinados únicamente a la resolución de ejercicios.

Al reflexionar acerca de la concepción que se tiene sobre actividad de refuerzo vemos que no se está cumpliendo con los objetivos de la evaluación que se plantean en el decreto citado anteriormente, pues no se les está dando la importancia como estrategia de "apoyo para aquellos educandos que presentan dificultades en sus estudios", debido a que son realizadas únicamente al final del año escolar y con quienes no han alcanzado los *logros promocionales,* los cuales según Ortiz (2005) "representan los resultados que el educando debe alcanzar al finalizar el año escolar -el resultado anticipado por supuesto-, las aspiraciones, propósitos, metas, los aprendizajes esperados en los educandos, el modelo a alcanzar tanto desde el punto de vista cognitivo como práctico y afectivo-motivacional (el saber o pensar, el saber hacer o actuar y el ser o sentir)", excluyendo de esta manera a quienes no se han apropiado completamente de los conceptos, como son los educandos que aprueban la materia en Aceptable.

Por ello, vimos la necesidad de plantear unas actividades de refuerzo que fueran significativas para los educandos, y que además de mejorar los resultados obtenidos en la materia, nos permitieran desarrollar en ellos un pensamiento lógico y matemático a partir de la resolución de problemas[1] actividad considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático (Lineamientos Curriculares, 1998) el uso de material didáctico matemático, entre otros; asimismo, cambiar la concepción de actividad de refuerzo que la comunidad educativa tenía haciéndolos partícipes del proceso, pues creemos que si a partir de ellas logramos fortalecer las bases con las que el educando inicia el nuevo año o el estudio de un nuevo concepto, muy seguramente la asimilación de esta información se dará más fácilmente y en forma significativa al "ser vinculada de una manera clara y estable con los conocimientos previos de los cuales este dispone" Ausubel (1983) citado por McKewen (1998), siendo sin lugar a dudas esta última nuestra principal preocupación.

Igualmente buscamos propiciar en los maestros una reflexión acerca de la forma como se han venido realizando tanto las actividades como los talleres

[1] Santos (1997) citado por Parada (2005) considera la resolución de problemas como el proceso de acontecimientos que nos llevan a recorrer diferentes etapas durante la búsqueda de la solución, como aceptar el desafío, formular las preguntas adecuadas a cada caso, clarificar el objeto, definir y ejecutar el plan de acción y evaluar la solución. La resolución de problemas llevará consigo el uso de procedimientos heurísticos (el arte del descubrimiento) de una manera imprescindible.

que para cada una ellas se planean, pues en nuestra experiencia como estudiantes y tutores hemos visto que estos últimos se han convertido en el resultado del "corte y pegue" de ejercicios de diferentes libros o de Internet, que al ser presentados de forma descontextualizada producen muy poco interés en los chicos, ocasionando una desmotivación grande por aprender y convirtiéndose en un obstáculo para el buen desarrollo de cualquier clase de actividad que el maestro diseñe. Es por esto que planteamos el uso de *talleres creativos*[2] como actividades de refuerzo alrededor de algunos de los conceptos que se trabajan tanto en el grado décimo como en grados anteriores.

Con el desarrollo de los talleres buscábamos que el educando redescubriera los conceptos y tuviera una participación más activa en su proceso de aprendizaje, con el fin de convertirlo en actor y constructor de su propio conocimiento, para así lograr un aprendizaje verdaderamente significativo. Sin embargo, antes de elaborarlos iniciamos con el reconocimiento de los temas en que los educandos presentaban mayores dificultades; esto se hizo a partir de una actividad diagnóstica inicial, que será presentada en el capítulo *La Experiencia*.

Durante la planeación y elaboración de los *talleres creativos* surgió en nosotros la inquietud de **¿Cuáles son los elementos principales que se deben tener en cuenta a la hora de diseñar talleres creativos como actividades de refuerzo para los educandos de décimo grado?**

[2] Para efectos de esta investigación definiremos al taller creativo como la agrupación de situaciones diseñadas a partir de los elementos del contexto de los educandos a quienes se aplican, y cuya finalidad es el fortalecimiento de sus procesos de aprendizaje. Denominándosele creativo porque es el producto de la inventiva del maestro, quien retoma cada uno de los elementos que reconoce como motivacionales para sus educandos (gustos, preferencias,…), y apoyándose en el uso de material didáctico plantea nuevas situaciones.

Tratando de dar respuesta a este interrogante nos planteamos como objetivo de investigación el **plantear y analizar el uso de talleres creativos alrededor de las aplicaciones de las funciones trigonométricas como actividades de refuerzo para educandos de décimo grado.** Esta investigación se sitúa dentro de un estudio exploratorio de caso[3] que abordaremos desde una perspectiva cualitativa. "Dentro de los abordajes cualitativos de la investigación, el estudio de caso es una estrategia de investigación que posibilita profundizar en el tema y, así mismo, dar a conocer las experiencias observadas en el desarrollo de la investigación" Bogdan y Biklen (1991, p1) citado por Parada (2005).

Nuestra experiencia será contada en cinco capítulos, los cuales serán descritos a continuación:

En el capítulo ***Los Educandos*** describiremos brevemente a cuatro de los participantes de las actividades de refuerzo, quienes reflejan en su actitud frente a la matemática algunas de las características que como maestros percibimos en la mayoría de las aulas. Los nombres de los educandos son verdaderos, las respectivas autorizaciones se pueden ver en los anexos.

En ***La Experiencia*** daremos a conocer a groso modo cada una de las actividades que realizamos con los educandos, las observaciones que hicimos durante su desarrollo, así como las reflexiones que a partir de ellas se produjeron. La experiencia la contaremos en dos fases; en la primera haremos un recuento de *Las actividades de refuerzo* y en la segunda mostraremos *Los talleres creativos como actividades de refuerzo* alrededor de las Aplicaciones de la funciones trigonométricas.

---

[3] El estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes (Stake, 1999).

En el capítulo **Claves para la construcción de actividades de refuerzo significativas** presentaremos las categorías que emergieron a partir de nuestra experiencia. Estas son: “Las actividades diagnósticas para identificar las dificultades y características del grupo” y “El seguimiento de las actividades para la retroalimentación de los procesos de enseñanza y aprendizaje”. Para el análisis de cada una de estas categorías tuvimos en cuenta no solo nuestros puntos de vista, sino también los aportes que a partir de las lecturas y de la misma experiencia nos brindan los diferentes autores y asimismo quienes participaron de las actividades, los educandos.

Las conclusiones las presentaremos a modo de ***Reflexiones***, debido a que la experiencia que vivimos con los educandos nos llevó a cuestionarnos acerca de la forma como construimos las actividades de refuerzo, cuyo enriquecimiento se hizo posible solo a partir del desarrollo de las actividades.

Finalmente, anexamos al trabajo ***Los Talleres*** que aplicamos como actividades de refuerzo a los educandos de grado décimo de la ENS, los cuales podrán ser utilizados por los docentes que así los deseen, ya sea en sus formas originales o adaptadas a las características del contexto en el que se encuentran.

LOS EDUCANDOS…

Los participantes de ésta experiencia y representantes de cada uno de los subgrupos son:

Luz Elena García Pabón

Figura 1. Luz Elena García

Luz Elena es una joven respetuosa, amable, responsable, participativa y compañerista, a la cual le agrada el trabajo en grupo. Ella responde con entusiasmo a las actividades del área, pidiendo orientaciones y aceptando las observaciones que le permiten mejorar su proceso de aprendizaje.

Sergio Ricardo León Quijano

Figura 2. Sergio Ricardo León

Sergio es un muchacho respetuoso, honesto y noble, que tiene una gran facilidad para aprender. Aunque los resultados obtenidos en la materia no han sido los mejores, hemos observado que cuando le pone empeño a su trabajo logra avanzar rápidamente.

Diana Rocío Rueda Carreño

Figura 3. Diana Rocío Rueda

Diana es una niña respetuosa, tímida, noble y alegre. Aunque presenta algunas dificultades en el área de matemáticas, observamos que siempre intenta superarlas, mostrando interés por aprender y recibiendo las orientaciones que se le proporcionan con el fin de favorecer su aprendizaje.

María Alexandra Cabeza Hernández

Figura 4. María Alexandra Cabeza

María Alexandra es una joven agradable, alegre, participativa y colaboradora. Aunque no es una estudiante muy aplicada en el área de matemáticas, vemos que posee un potencial enorme, que debido a su desinterés por aprender no ha podido ser explotado.

LA EXPERIENCIA…

Para la realización de las actividades de refuerzo se hace necesario primero identificar los conceptos a trabajar, puesto que para nosotros son ellos la base fundamental para la construcción de los talleres creativos. La identificación de los conceptos se hizo mediante el desarrollo de una actividad diagnóstica inicial los días 30 y 31 de agosto de 2006, y fue aplicada a aproximadamente 178 educandos de los cinco cursos del grado décimo de la ENS.

La Actividad Diagnóstica Inicial

Inicialmente el docente debe partir de un diagnóstico, pero no un diagnóstico basado en lo que él cree interesará a sus estudiantes, sino preguntándole a él mismo cuáles son sus dificultades… Barajas (1999).

Figura 5. Prueba diagnóstica

Como actividad diagnóstica inicial elaboramos un primer taller de aplicación en el que se abordó el concepto de *Ubicación de puntos en el plano.* Escogimos este tema por la importancia que tiene dentro de los procesos de aprendizaje de muchos de los temas que se trabajan en los grados superiores y que serán retomados en las actividades de refuerzo, como es el caso de las representaciones gráficas de las funciones trigonométricas, pues a partir de nuestra experiencia como estudiantes hemos visto que el realizar el bosquejo del comportamiento de una función se hace más sencillo cuando se ubican primero algunos puntos como los máximos, mínimos, corte con los ejes, entre otros.

Veamos el taller de aplicación que elaboramos como actividad diagnóstica inicial (para mayor claridad, ver anexo dos).

Figura 6. Taller Nº 1

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO I
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE BUCARAMANGA

NOMBRE: ______________________________ GRADO: ________________
FECHA: __________________________

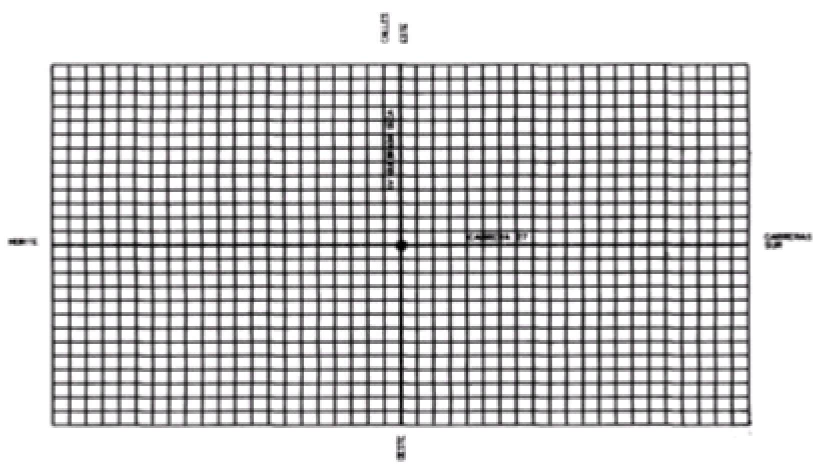
TEMA: Ubicación de puntos en el plano cartesiano.
OBJETIVO: Realizar una prueba diagnóstica para determinar la necesidad de actividades de refuerzo.

- ***Lea el siguiente texto y realice la actividad propuesta al final.***

Miguel es un joven que viene de Bogotá a visitar a su novia Laura que estudia en la Escuela Normal. Como no conoce Bucaramanga su novia le da algunas indicaciones para llegar al colegio, y después lo guía hacia el restaurante "El Hipopótamo" donde van a almorzar. Luego del almuerzo Miguel le pide que lo lleve a la UIS, pues ha escuchado que es muy bonita. Después de recorrer la Universidad Laura le dice a Miguel que la acompañe al Estadio al curso de natación. Una vez terminado el curso se dirigen a la casa de Laura (en la Aurora) pues sus padres lo invitaron a cenar. Pasada la tarde Miguel invita a Laura a San Francisco, debido a que desea darle un regalo antes de irse.

- ***Ubique en el plano cartesiano cada uno de los lugares que Miguel visitó con su novia Laura, y determine la correspondiente pareja ordenada.***

1 .Escuela Normal: ubicado en la carrera 27 con Avenida quebrada seca (calle 29).
2. Restaurante "El Hipopótamo": ubicado a 11 cuadras al norte de la Escuela Normal.
3. UIS: ubicada a 9 cuadras al norte del Restaurante El Hipopótamo.
4. Estadio: ubicado a 3 cuadras al sur y 3 cuadras al este de la UIS.
5. Casa de Laura: ubicada a 18 cuadras al sur y 2 al este del estadio.
6. Tienda de zapatos: ubicada 13 cuadras al oeste y 10 al norte de la casa de Laura.



¿En qué tema cree necesitar refuerzo?**______________________________.**

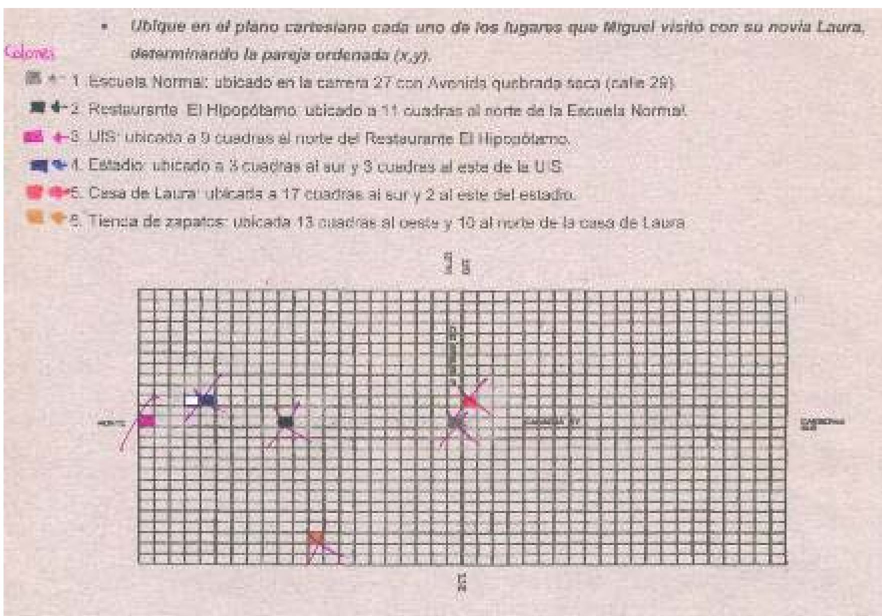
La elaboración de este taller no fue nada fácil para nosotros, pues queríamos diseñar una situación diferente a las realizadas tradicionalmente para este tema con la que los chicos no se sintieran evaluados ni presionados al desarrollarla. Al plantear la situación buscábamos que al educando identificarse, tanto con los personajes como con el espacio en el que se desarrolla, sintiera una mayor seguridad al reconocer que sí es posible darle uso a la matemática en las diferentes situaciones que se presentan en su vida cotidiana. Esto último tratando de responder a uno de los interrogantes que mayores obstáculos produce en el aprendizaje, pues de su respuesta depende en gran medida la motivación que se logre producir en los educandos, "*Profe, ¿y esto para qué sirve?",* pues como bien lo dice Ausubel (1983) citado por McKewen (1998) "para que el aprendizaje sea significativo una de las condiciones es que el contenido del aprendizaje sea potencialmente significativo". Por ello, elaboramos una corta narración en la que se aplicaba la ubicación de puntos en el plano al recorrido dado por una pareja de novios en la ciudad de Bucaramanga.

El objetivo que nos planteamos para esta primera actividad no era únicamente reconocer cuál era la comprensión que sobre el tema tenía el educando, sino también observar su capacidad de análisis, su facilidad para seguir indicaciones y ubicarse espacialmente. Además, al final del taller planteamos una pregunta abierta con el propósito de que el educando autoevaluara sus conocimientos y reconociera aquellos en los cuales necesitaba una ayuda adicional -un refuerzo -, ya fuera para construirlo o para reconstruirlo.

Durante el desarrollo del taller pudimos observar que eran varios chicos los que tenían dificultades para ubicar puntos en el plano; sin embargo, aunque tratamos de orientarlos con el fin de responder a sus inquietudes, hubo quienes aun después de haber terminada la actividad siguieron persistiendo en ellas. Las dificultades a las que hacemos referencia son las que se presentan comúnmente cuando se aborda este tema, como es el no relacionarlo con un par ordenado, aunque con ello no queremos decir que no son importantes sí pudimos observar una situación que más que dificultad nos muestra como las concepciones que el ser humano tiene le permiten interpretar las situaciones de diferentes maneras, como ocurrió en el caso de Silvia.

En la siguiente imagen podemos ver la solución que Silvia Natalia le dio a la situación.

Figura 7. Solución de Silvia



Silvia Natalia Pineda (décimo dos).

A primera vista pareciera que Silvia no tuviera una concepción clara sobre puntos en el plano, pues vemos que en lugar de ubicar puntos lo que hizo fue ubicar cuadrados en donde cree se encuentran ubicados los lugares, lo que a nuestro modo de ver representan manzanas completas en lugar de sitios específicos. Sin embargo, al indagar más a fondo sobre ello notamos que la solución dada por Silvia no es del todo incorrecta, pues es cierto que “la UIS y la misma Escuela Normal son más que un punto". Creemos que tal vez este último fue el cuestionamiento que guió el desarrollo que hizo de la situación, el cual debido a su validez nos muestra lo delicado que puede llegar a ser el uso del "aspecto realidad" en el diseño de cualquier actividad, pues podemos encontrar casos de chicos en los cuales a partir de las situaciones se creen conflictos cognitivos en lugar de aprendizajes, quienes de una u otra forma podrían llegar a afectar su credibilidad y debido a ello su interés por la matemática.

Debido a esta clase de dificultad determinamos realizar la primera actividad como refuerzo para este tema, los otros fueron identificados tomando como base las repuestas dadas por los educandos a la pregunta abierta. Sin embargo, no todos ellos fueron tenidos en cuenta para la realización de las actividades de refuerzo, en éstas sólo se trabajaron las dificultades más representativas dentro del grupo; es decir, las dificultades que se presentaban con mayor frecuencia en los educandos, como lo podemos ver en la siguiente tabla.

	Número de estudiantes por refuerzo										
GRADO	**R1**	**R2**	R3	**R4**	R5	R6	**R7**	**R8**	R9	R10	R11
Décimo uno	**6**	**3**	3	**15**	0	0	**5**	**2**	9	6	0
Décimo dos	**1**	**2**	2	**3**	0	1	**11**	**8**	6	5	0
Décimo tres	**1**	**3**	0	**15**	0	1	**5**	**4**	10	6	1
Décimo cuatro	**2**	**1**	1	**8**	0	1	**6**	**6**	3	7	1
Décimo cinco	**4**	**2**	4	**4**	0	0	**2**	**6**	6	6	2
Total de estudiantes	**14**	**11**	10	**45**	0	3	**29**	**26**	34	30	4

"Las actividades de refuerzo que se realizaron fueron las señaladas con color azul".

(R1) Ubicación de puntos en el plano

(R2) Solución de ecuaciones cuadráticas (por factorización y fórmula)

(R3) Paralelepípedos.

(R4) Aplicación de razones trigonométricas.

(R5) Conversión de ángulos.

(R6) Líneas trigonométricas y razones.

(R7) Leyes del seno, coseno, razones trigonométricas a través de un ángulo en posición normal.

(R8) Representación gráfica de las funciones seno y coseno, y transformaciones.

(R9) No necesita ningún refuerzo.

(R10) Necesita refuerzo en todo.

(R11) Calculadoras, problemas de modelación de situaciones de la vida real.

Aunque la idea original que teníamos era que el educando asistiera únicamente al taller en el cual necesitaba el refuerzo, tuvimos que programar las actividades de tal manera que quienes asistieran a un taller participaran en todos los siguientes, puesto que para el desarrollo de nuestra idea de investigación necesitábamos el análisis de los procesos observados en los educandos y el seguimiento de por lo menos uno de los grupos, idea que igualmente compartió el profesor Carlos Bautista[4], quien desde el principio mostró agrado por la actividad.

El grupo inicialmente seleccionado para el desarrollo de las actividades fue el conformado por los educandos que manifestaron en la actividad diagnóstica "necesitar refuerzo en todo", pero debido a que deseábamos que su participación fuera voluntaria y no una obligación para la recuperación de los logros pendientes, decidimos junto con el profesor Carlos citar a una reunión el día 8 de septiembre de 2006 a los padres de familia para que se

[4] Carlos Bautista Duque es uno de los docentes que está a cargo del área de matemáticas en la ENS y actualmente es profesor cátedra de la Escuela de Matemáticas de la UIS. Durante el Servicio Social fue nuestro profesor tutor.

involucraran en el proceso de mejoramiento que su hijo deseaba iniciar, y a su vez se comprometieran junto con ellos a participar activamente de las actividades. La citación que se envió fue la siguiente:

ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE BUCARAMANGA
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
Bucaramanga, septiembre 6 de 2006

Señor Padre de familia:
La presente es con el ánimo de invitarlo a la reunión que se realizará el día viernes 8 de septiembre de 2006, a las 7 p.m. en el salón Catleya. El objetivo de la reunión es tratar aspectos relacionados con las actividades de refuerzo en el área de matemáticas, a las cuales su hijo desea asistir. Esperamos su colaboración y participación en este proceso.

Nota: *Sin su presencia a esta reunión no será posible la admisión de su hijo a las actividades de refuerzo.*

Cordialmente,
CARLOS BAUTISTA DUQUE
Profesor

Debido a que la asistencia de los padres a la reunión no fue la esperada, pues sólo fueron 20 de ellos, acordamos dar la semana del 18 al 22 de septiembre para que los padres o acudientes de aquellos educandos que quisieran asistir a las actividades, y no hubiesen podido ir a la reunión, se presentaran a hablar con nosotros, con el fin de autorizar la asistencia de su hijo, e igualmente, reafirmaran su compromiso con el proceso.

Las actividades de refuerzo

Las actividades de refuerzo que planeamos fueron desarrolladas del 23 de septiembre al 20 de noviembre de 2006, en un horario extraclase y dentro de la misma institución. Debido a que el grupo de educandos que solicitaron el refuerzo era numeroso, optamos por dividirlos en tres subgrupos, así[5]:

[5] Esta decisión fue tomada teniendo en cuenta las sugerencias dadas por los padres de familia durante la reunión que se realizó el día 8 de septiembre de 2006.

- ✓ Grupo A, sábados de 8 a 10 a.m.
- ✓ Grupo B, sábados de 10 a 12 m.
- ✓ Grupo C, lunes de 4 a 6 p.m.

La metodología que llevamos a cabo durante la realización de las actividades fue variada: algunas veces se iniciaban con un corto "repaso explicativo" de los conceptos necesarios para abordar el tema de trabajo, y otras veces iniciábamos con la socialización de los conceptos reforzados en las sesiones anteriores o de las tareas que se dejaban con el fin de reconocer la comprensión que sobre él tenían los educandos. Posteriormente realizábamos ejemplos en donde se aplicaban estos temas, y por último, se desarrollaba el correspondiente taller de aplicación.

Los talleres de aplicación se elaboraron para cada una de las actividades de refuerzo, en ellos se proponían situaciones en las cuales se aplicaban los conceptos a reforzar. La mayoría de las situaciones fueron diseñadas teniendo en cuenta las características propias de los chicos, como sus gustos (lugares, actividades…), prioridades (novio, amigos…), etc. Estas situaciones fueron complementadas con el uso de herramientas didácticas como materiales visuales (carteleras, figuras geométricas…), materiales didácticos matemáticos (origami, regletas de factorización…), juegos, etc. Aunque al igual que Piaget citado por Martínez (s.f.) creemos que "el educando no llega a realizar abstracciones por el mero hecho de manejar objetos concretos. La abstracción comienza a producirse cuando llega a captar el sentido de las manipulaciones que hace con el material. Una verdadera operación intelectual permite múltiples composiciones, las operaciones mentales son flexibles y pueden realizarse de distintas maneras. Aunque sin ningún material didáctico, el estudiante puede por sí solo llegar a realizar operaciones intelectuales, la utilización de dicho material favorece el proceso para llegar a ellas".

El compartir la concepción que Piaget tiene con respecto al valor del material didáctico fue algo que nació en nosotros durante el mismo desarrollo de las actividades de refuerzo, pues antes de ello creíamos que "era obvio", como erróneamente creemos son muchas otras cosas, que el simple uso de herramientas didácticas aseguraba el éxito en el proceso de enseñanza, sin siquiera sospechar que al enfrentarnos a la realidad veríamos que esto en la mayoría de los casos es poco probable. Aunque durante las primeras actividades sentimos desilusión al ver que no estábamos logrando lo que queríamos no nos dejamos desanimar y seguimos haciendo uso de ellas en las actividades, pues de igual manera veíamos que había a quienes éstas mismas les facilitaban sus procesos de aprendizaje, razón por la cual decidimos seguirlas implementando.

El desarrollo de los talleres se hizo en su mayoría en parejas o pequeños grupos, pero siempre bajo nuestra orientación. El trabajo se hizo de esta manera porque hemos observado, y vivido, que el trabajo en grupo, especialmente el realizado con pares, es bastante enriquecedor, lo que se debe según Robles (2001) a que "los aportes que hace un estudiante a sus compañeros de grupo (una o dos personas) en cuanto a experiencias, comentarios, sugerencias y reflexiones sobre el trabajo que ha desarrollado contribuyen a transformar el trabajo individual en un producto más rico que contempla las observaciones hechas por los demás compañeros".

La planeación de las actividades de refuerzo no se hizo desde un principio; ellas se fueron diseñando a medida que se iban aplicando, pues al desarrollarlas fuimos encontrando vacíos que no habíamos previsto reforzar y que sabíamos afectarían la realización de posteriores actividades. Igualmente, porque durante la interacción con los educandos fuimos atendiendo muchas de las inquietudes y opiniones que surgían, y que necesitaban ser tenidas en cuenta; junto a ellas los intereses y gustos que pudimos observar también fueron implementados en las actividades.

✓ *Actividad de refuerzo de "ubicación de puntos en el plano"*

La actividad de refuerzo de ubicación de puntos en el plano fue la primera actividad que elaboramos; su aplicación se hizo el 23 de septiembre de 2006. En esta primera actividad tuvimos la oportunidad de hablar con todos los educandos que participarían de la experiencia, motivo por el cual optamos por realizar una sola sesión en el horario de 8:00 a 11:00 a.m. con el fin de dar algunas sugerencias acerca del horario y la asistencia, el uniforme, el objetivo de las actividades y el compromiso que estaban adquiriendo.

Veamos el taller de aplicación que elaboramos para esta actividad (para mayor claridad ver anexo tres).

Figura 8. Actividad de Refuerzo Nº 1

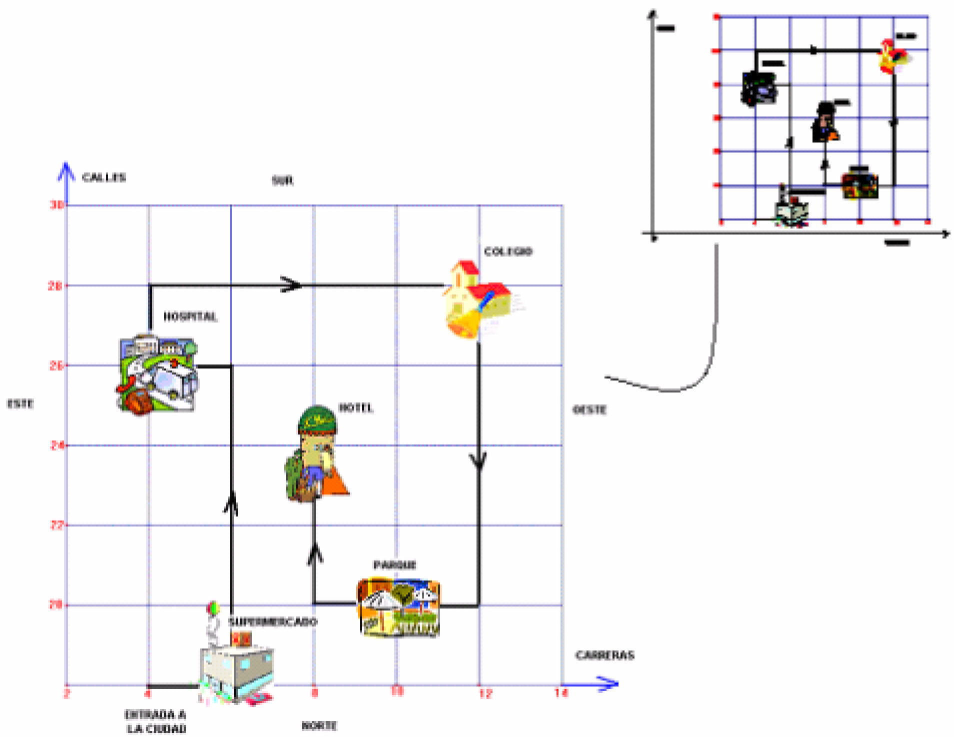
ACTIVIDAD DE REFUERZO Nº1
UBICACION DE PUNTOS EN EL PLANO

NOMBRE: ________________________________ GRADO: _________________

- **Lea el siguiente texto**

MAPA DE LA CIUDAD DE_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

____________ llegó a la ciudad de _ _ _ _ _ _ _ _ _ (que no conocía) en la cual hablaban un idioma diferente. Como no podía comunicarse con nadie tuvo que caminar toda la ciudad para poder conocerla, pero mientras lo hacía iba diseñando un mapa en el cual ubicaba algunos lugares importantes. El mapa que diseñó fue el siguiente:



Su recorrido terminó cuando encontró el Hotel, debido a que ya era muy tarde y solo deseaba descansar. Al día siguiente, cuando bajó a desayunar, se encontró con un abuelito que hablaba su mismo idioma. Así que aprovechó para conversar con él y preguntarle por algunos lugares que aun no había conocido. Pero como el abuelito era ciego, le preguntó qué lugares había conocido, para de esta forma poder darle las indicaciones de los otros. __________ le contó que había conocido el supermercado, el hospital, el colegio, el parque, y por supuesto, el hotel; pero que deseaba conocer la biblioteca, el estadio, el terminal, la universidad y algún restaurante.

Al terminar de escucharlo(a) el abuelito le dio las siguientes indicaciones:

- ✓ La universidad se encuentra a seis cuadras al norte y cuatro al oeste del hotel.

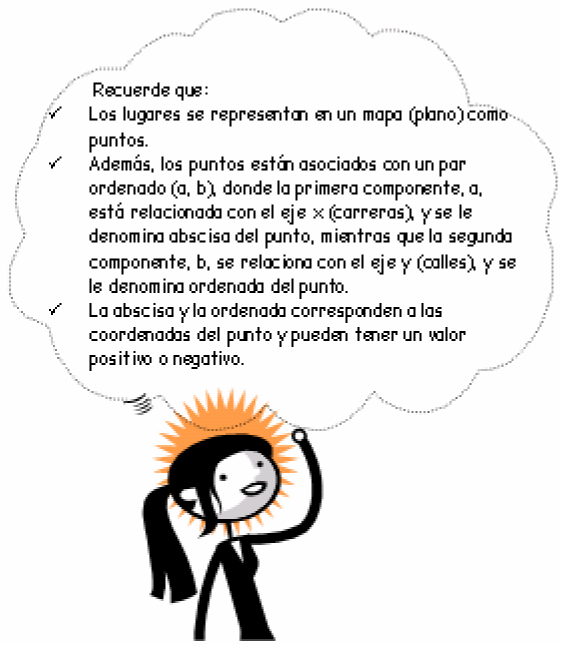
- ✓ El restaurante se encuentra a tres cuadras al este y dos al sur del supermercado.
- ✓ El terminal está ubicado a tres cuadras al norte y una al oeste del hospital.
- ✓ El estadio está ubicado a dos cuadras al oeste y tres cuadras al sur del parque.
- ✓ La biblioteca se encuentra dos cuadras al este y dos al sur del colegio.

- **Complete el mapa de la ciudad de _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _.**

____________ quiere terminar su mapa, ayúdalo(a) a ubicar los lugares y a determinar las direcciones que le hacen falta.

- ✓ Determine las coordenadas de los lugares que ____________visitó.
- ✓ Ubique (en el mapa) siguiendo las instrucciones del abuelito los lugares que ______________ desea conocer.
- ✓ Determine las coordenadas de los lugares que acabas de ubicar en el mapa.
- ✓ Cuando ya tengas todos los datos, completa la siguiente tabla:

LUGAR	UBICACIÓN (x, y)
Supermercado	
Hospital	
Colegio	
Parque	
Hotel	
Restaurante	
Terminal	
Biblioteca	
Estadio	
Universidad	



- **¿Qué lugares hacen falta?**

- ✓ Ubique en el mapa y determine las coordenadas de tres lugares le hagan falta a la ciudad de _ _ _ _ _.
- ✓ Si quieres enviar a sus amigos a ese lugar, especifique la dirección, escríbala en la siguiente tabla:

LUGAR	UBICACIÓN (x, y)	INSTRUCCIONES

La actividad de inició sin ninguna explicación del tema, debido a que dentro del taller se daba una breve definición acerca de la forma como se representa un punto en el plano. Además, su desarrollo se hizo de forma individual y por un lapso de 30 minutos; luego se les pidió a los educandos que formaran parejas e intercambiaran los talleres con el fin de corregirlos durante la socialización.

Figura 9. Socialización Nº 1.

Durante la socialización los educandos desarrollaron cada uno de los ítems. Esto se hizo con el fin de observar el trabajo realizado e identificar las falencias que en general se presentaron, y que a partir de ella se buscaba fueran superadas.

A través de las expresiones de algunos educandos pudimos reconocer varias de las dificultades que se dieron al desarrollar el taller de aplicación, entre ellas:

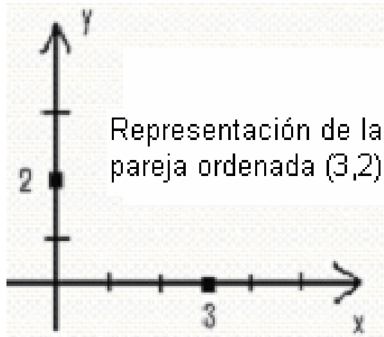
- ✓ Falta de contextualización de la situación.

  Profe, ¿En cuál eje ubico las calles y en cuál las carreras? (Laura Marín, Grupo A).

- ✓ Interpretación inadecuada de la gráfica.

  ¡El mapa es muy pequeño y no puedo ubicar el colegio! (María Eugenia Gil, Grupo C).

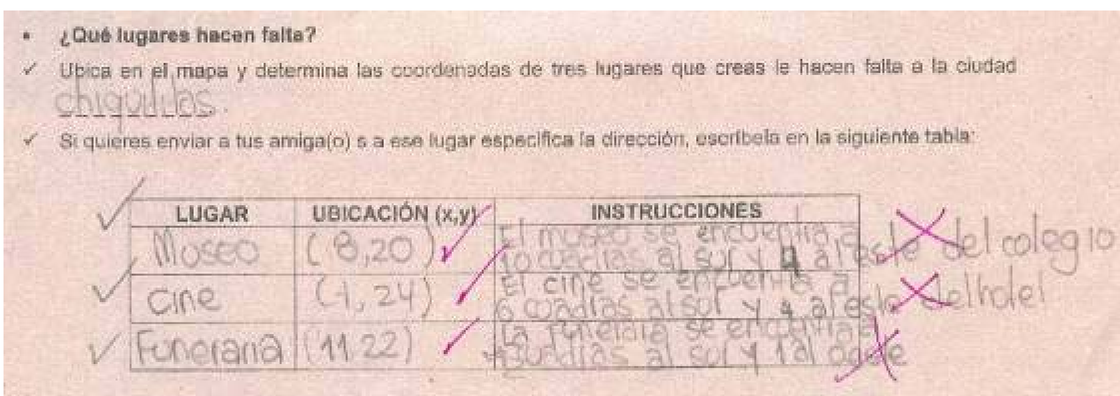
- ✓ Concepción errónea de la representación de un punto en el plano.



- ✓ Dificultad para elaborar instrucciones (esta dificultad se relaciona directamente con el último punto del taller).

Veamos las instrucciones desarrolladas por Diana Rocío y comparémoslas con las ubicaciones que hace en el mapa.

Figura 10. Solución de Diana Rocío

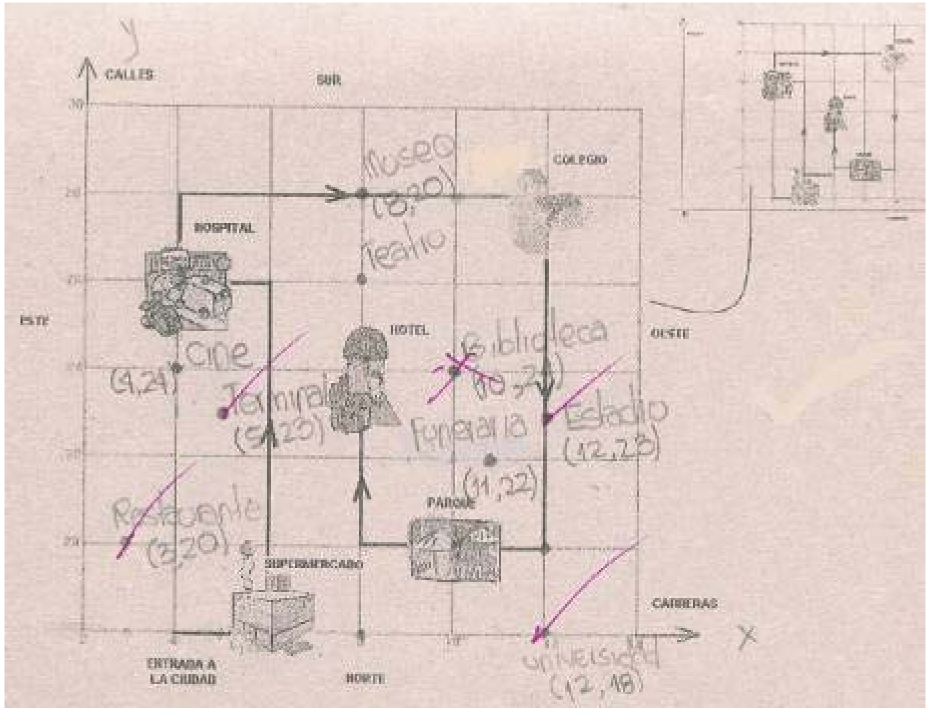


- ¿Qué lugares hacen falta?
- ✓ Ubica en el mapa y determina las coordenadas de tres lugares que creas le hacen falta a la ciudad

chiquitas.

- ✓ Si quieres enviar a tus amiga(o) s a ese lugar especifica la dirección, escribela en la siguiente tabla:

LUGAR	UBICACIÓN (x,y)	INSTRUCCIONES
Moseo	(8,20)	El moseo se encuentra a 10 cuadras al sur y 8 al este del colegio
cine	(1,24)	El cine se encuentra a 6 cuadras al sur y 4 al este del hotel
Foneraria	(11,22)	La foneraria se encuentra a 13 cuadras al sur y 1 al oeste



Como podemos ver, Diana no presenta dificultad para ubicar puntos en el plano, pues a cada lugar lo relaciona con la pareja ordenada correspondiente; sin embargo, al observar las indicaciones que elabora notamos cierta confusión en cuanto a los desplazamientos que debe realizar en cada una de las coordenadas -en este caso en los puntos cardinales-; además, vemos que no tiene en cuenta el punto a partir del cual debe empezar a hacer este desplazamiento. Esta fue una dificultad que observamos en muchos otros educandos y que afrontamos de la siguiente manera, aprovechando la socialización que se llevó a cabo al finalizar la actividad.

Primero le pedíamos a uno de los educandos que escogiera a otro de sus compañeros y le leyera la instrucción que él había construido; éste debía ubicar el lugar en el sitio correspondiente y someterse a una evaluación por parte de sus otros compañeros, e inclusive de quien le estaba dando las indicaciones; de esta manera, iban tanto resolviendo sus inquietudes como autoevaluando su trabajo. De igual forma, se hizo dando el punto en el cual se ubicaba el lugar para que los demás construyeran la instrucción.

Al socializar el taller vimos que esta última actividad, la elaboración de instrucciones, fue la que mayor interés produjo en los chicos, ellos se veían entusiasmados porque podían ubicar los lugares que más les gustaban, y también porque a partir de ellos podían evaluar a sus compañeros. Sin embargo, durante el desarrollo del taller, y asimismo durante la socialización, nadie se percató del dibujo -mapa pequeño- que estaba en la parte superior del mapa de la ciudad. Debido a esto nosotros mismos tuvimos que empezar a cuestionarlos acerca del por qué de su existencia, pues es importante que el educando aprenda a reconocer las características del plano cartesiano para así evitar inconvenientes más adelante cuando tenga que realizar análisis sobre éste. Aunque solo después de las intervenciones de varios de ellos una de las estudiantes contestó correctamente a nuestra pregunta, y dijo: “El profesor siempre nos ha dicho que el punto de corte de los ejes debe ser (0,0), y no otro” (Mónica Chivatá), respuesta que aprovechamos para aclarar que el mapa sobre el cual se desarrolla la situación no es el de la ciudad completa sino el de una parte de ella, por lo que no tiene su origen en (0,0).

Para la segunda parte realizamos el juego ¿En dónde está el submarino? Esta actividad se desarrolló durante aproximadamente 45 minutos. Para ello dividimos a los educandos en dos subgrupos, A y B, los cuales fueron dirigidos por nosotros mismos y representados por un educando de cada subgrupo quien sería el vocero frente al grupo contrario. El objetivo de la actividad era que los educandos trabajaran en conjunto -colaborativamente- para descubrir el lugar (punto) en donde el otro grupo había ubicado el submarino (a cada uno le dimos un icopor sobre el cual había un plano y un chinche que representaba el submarino), para lo cual contaban con la realización de máximo 10 preguntas, cuya respuesta podía ser únicamente sí o no. En este juego se aplicaron conceptos como cuadrante, números enteros, intervalos, puntos cardinales…, sobre los cuales se dieron varias indicaciones con el fin de mejorar las estrategias de juego que estaban implementando.

Aunque durante la actividad pudimos observar que el concepto de ubicación de puntos en el plano era claro para la mayoría de los educandos, vimos en una actividad posterior que aun después del refuerzo eran muchos los chicos que seguían presentando esta dificultad, la que como dijimos anteriormente se presenta con frecuencia, inclusive en estudiantes de educaciones superior, como lo pudimos constatar al trabajar tutorías con estudiantes de cálculo de primer semestre en la asignatura de Didáctica del Cálculo[6], experiencia que de igual manera hoy nos permite comprender la complejidad de su aprendizaje y asimismo la responsabilidad que frente a ella tenemos.

Figura 11. Socialización Nº 2

Debido a la participación activa de los educandos durante las socializaciones tuvimos que concluir con el juego ¿En dónde está el submarino? y no con

[6] La Didáctica del Cálculo es una asignatura del séptimo semestre del programa de Licenciatura en Matemáticas de la UIS.

“Batalla Naval” que era como lo habíamos planeado, pues el tiempo que habíamos determinado para ello, las dos primeras actividades, fue escaso. Sin embargo, hubo quienes la realizaron por iniciativa propia hasta las 11:30 a.m., aunque para nosotros, este imprevisto no ocasionó ningún obstáculo dentro del proceso de aprendizaje del tema.

A partir del desarrollo de esta primera actividad pudimos reconocer varios aspectos que a nuestro modo de ver son un complemento primordial de las actividades de refuerzo.

- *La socialización del trabajo realizado.*

Al socializar el trabajo realizado durante la actividad vimos como muchas de las inquietudes que los estudiantes temían expresarnos fueron siendo aclaradas a medida que ésta se desarrollaba. Notamos que al escuchar las experiencias de sus compañeros los chicos mostraban una mayor compresión, pues se sentían identificados con ellos y de igual manera con las expresiones que para ello usaban, lo que se debe principalmente “al enriquecimiento que el trabajo individual logra, al interactuar con pares” (Robles, 2001). Aunque pudimos observar que el socializar el trabajo que se realiza permite enriquecer los procesos de aprendizaje de los educandos que participan en ella, también fue claro para nosotros que a partir de ésta es posible reconocer algunas de las dificultades que de igual manera interviene en estos y que son las “piedras en el zapato” en el proceso de enseñanza.

- *La participación activa del educando dentro de la situación*.

Al darles la oportunidad a los chicos de protagonizar la situación pudimos observar como un detalle tan simple como éste produce tanta emoción e interés en los educandos, quienes al poder compartir con sus compañeros todo aquello que les gustaba mostraron una mayor disposición para trabajar, que es uno de los aspectos que mayor influencia tiene en el proceso de aprendizaje. Sin embargo, la participación de los educandos en la situación iba mas allá del compartir con los demás, también implicaba la creación de estrategias para fortalecer su propio trabajo, permitiendo una mayor integración del grupo.

Asimismo, durante el desarrollo de la actividad también pudimos reconocer un aspecto que afecta enormemente el trabajo realizado con los estudiantes.

- Trabajo con grupos numerosos.

Aunque vimos como la socialización de los trabajos y la participación activa de los educandos enriquecían las actividades, también pudimos constatar como el que en ellas participe un grupo numeroso de chicos hace que los resultados obtenidos en éstas sean, en la mayoría de las ocasiones, poco satisfactorios, pues el intercambio de información (sugerencias, comentarios, ideas, etc.) se hace muy difícil debido a la gran heterogeneidad de los mismos. Asimismo notamos que al trabajar con grupos numerosos hay menos posibilidad de reconocer las dificultades de cada uno de ellos, lo que impide el seguimiento de sus procesos.

✓ *Actividad de refuerzo de "Factorización y, áreas y perímetros de figuras planas".*

La realización de esta actividad de refuerzo fue una idea que surgió en nosotros como apoyo al proceso de enseñanza iniciado por el profesor para la resolución de las identidades trigonométricas, pues ésta es una actividad que implica la aplicación de los casos de factorización, y asimismo, de las operaciones entre polinomios. Sin embargo, por motivos de tiempo solo se trabajaron operaciones entre monomios y binomios, multiplicación (áreas) y adición (perímetros), por lo que se trabajó con las regletas de factorización.

Esta actividad fue aplicada en dos jornadas distribuidas de la siguiente manera:

- Primera sesión: el 30 de septiembre con los grupos A y B, y 2 el octubre con el grupo C.
- Segunda sesión: el 7 de octubre con los grupos A y B, y el 9 de octubre con el grupo C.

Figura 11. Áreas y perímetros.

Veamos el taller de aplicación que diseñamos para esta actividad. (Para mayor claridad ver anexo cuatro).

Figura 13. Actividad de Refuerzo Nº 2

ACTIVIDAD DE REFUERZO Nº 2

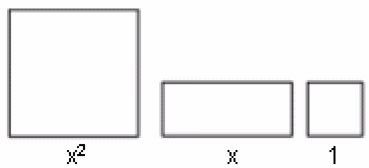
FACTORIZACIÓN Y, ÁREAS Y PERÍMETROS DE FIGURAS PLANAS

NOMBRE: ______________________________ GRADO: ________________

REGLETAS DE FACTORIZACION

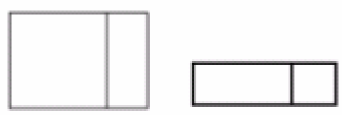
- ***MATERIAL***

Cada juego consta de tres tipos de piezas de diferentes colores (las amarillas y azules: representan a los números positivos; y las rojas y negras: representan a los números negativos) correspondientes a los monomios x^2, x, 1.



- ***INSTRUCCIONES***
  - ✓ Siempre debes hacer coincidir los lados iguales de las figuras vecinas y sin sobreponer regletas.

  Por ejemplo:



  - ✓ Cuando vayas a restar debes colocar las regletas (del mismo tipo de pieza) que representan números negativos sobre las regletas que representan números positivos.
  - ✓ Estas parejas (la misma pieza pero de colores diferentes) serán tomadas como nulas; es decir, como el cero (0).

- ***ACTIVIDAD***

Teniendo en cuenta las instrucciones dadas realiza los siguientes ejercicios:

1. Deduce el área y el perímetro de cada una de las figuras teniendo en cuenta que la regleta rectangular no cuadrada tiene como lado menor una unidad y lado mayor x unidades.

REGLETA	BASE	ALTURA	AREA	PERIMETRO
Cuadrado grande azul				
Cuadrado pequeño amarillo ó café				
Rectángulo azul ó verde				

2. ¿Cuántos rectángulos puedes formar con 8 rectángulos unidad? Realiza los dibujos y determina el área de cada uno de ellos.

¿Qué puedes concluir de los resultados de las áreas de los rectángulos anteriores?

3. Tomando las regletas azules (cuantas quieras) forma tres rectángulos diferentes (usa para cada rectángulo piezas diferentes), llena la siguiente tabla y contesta las siguientes preguntas:

REPRESENTACION GRAFICA	BASE	ALTURA	AREA	PERIMETRO

- ✓ ¿Cuántas piezas de cada tipo usaste en cada uno de los rectángulos?
- ✓ Compara el resultado anterior con el obtenido en la tabla (área). ¿Qué puedes concluir?
- ✓ ¿Cuántas piezas de cada tipo usaste en total para construir los tres rectángulos?

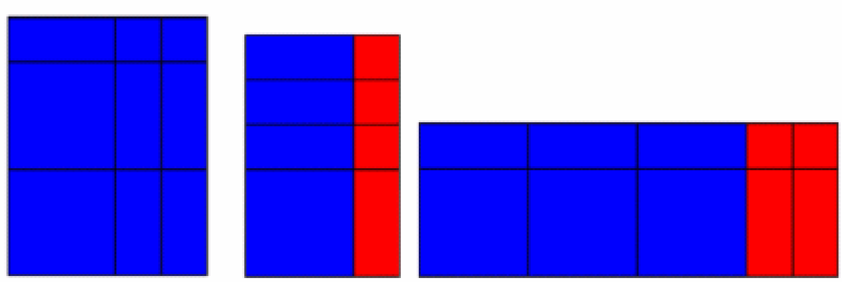
Describe el proceso que seguiste para dar respuesta a esta pregunta.

- ✓ Si ahora quitamos las piezas del segundo rectángulo, ¿cuántas piezas de cada tipo quedan?

Describe el proceso que seguiste para dar respuesta a esta pregunta.

Ahora quita las piezas que usaste en el primer rectángulo, ¿cuántas piezas de cada tipo quedan?

4. Halla el área de las siguientes figuras y expresalas como un producto



5. Con las regletas construye los rectángulos respectivos a cada expresión, determina sus dimensiones (base y altura).

- ✓ x^2+2x+1
- ✓ $3x^2+4x+1$
- ✓ x^2+3x-4

6. Resuelve las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuál es el área del cuadrado de lado $(x+2)$?
- ✓ ¿Cuál es el área del rectángulo de base $(x+3)$ y altura $(x-3)$?
- ✓ ¿Cuál es el área del cuadrado de lado $(x-1)$?

7. Encuentra el resultado equivalente a las expresiones de la columna de la izquierda

$3x^2+x-2=$	$(x-2)^2$
$x^4+8x+7=$	$(x+1)(3x-2)$
$(x^2+3x-2)+(2x^2-x+1)=$	$3x^4-2x+2$
$x^4-4x+4=$	$3x^4+2x-1$
$(3x^2+2x-1)-(4x-3)=$	$(x+1)(x+7)$

8. En la Escuela Normal Superior de Bucaramanga se está estudiando la posibilidad de construir una cancha de fútbol para los estudiantes de bachillerato. La rectora investiga en Internet (en la página de la FIFA) acerca de las características de ésta, pues desea saber si el área con la que cuenta para realizar el proyecto es suficiente. Lo que encontró en la página fue lo siguiente:

- ✓ *Los terrenos reglamentarios de fútbol deben ser rectangulares, de 90m de largo y 46m de ancho como mínimo. Los tiros de esquina tienen una longitud de 1m por lado. Además, la distancia mínima de cada comer al centro del campo es igual a la distancia entre los tiros de esquina que están en los lados más cortos de la cancha (ver dibujo abajo).*

Una vez encontrada esta información la rectora les pide a los estudiantes de décimo lo siguiente:

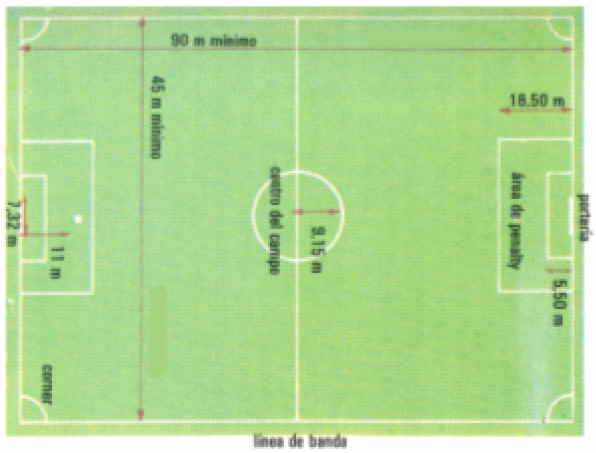
- ✓ Diseñen (con las regletas) una cancha que cumpla con estas características

Basándose en este diseño contesta las siguientes preguntas.

- ✓ ¿Cuáles son las dimensiones (base, altura) de la cancha?
- ✓ ¿Es suficiente el terreno con el que se dispone para el proyecto ($A=4x^2+6x+6$)? Sí ó no, justifica tu respuesta.

Ahora a la rectora se le ocurrió la idea de construir alrededor de la cancha una pista de atletismo; esta pista tiene un metro de ancho.

- ✓ ¿Cuántos metros de malla necesitas para encerrar la cancha (no olvides que es el campo de juego y la pista de atletismo)?
- ✓ ¿Cuánto dinero necesitas para encerrar la cancha si cada metro de malla cuesta $15.000?

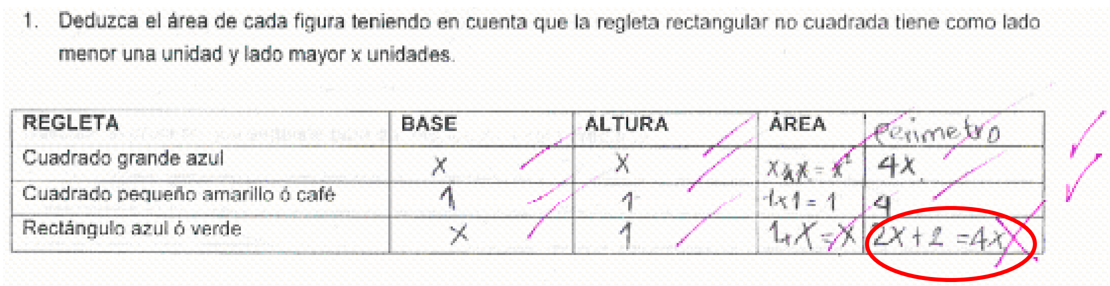


Antes de iniciar con el taller de aplicación realizamos una corta explicación acerca del manejo del material (Regletas de factorización), las equivalencias de cada una de las fichas (el cuadrado grande de lado x representa a x^2; el rectángulo de lado 1 y base x representa a x, y el cuadrado pequeño de lado 1 representa a 1), la relación entre el color y el signo (las *azules* y *amarillas* representan a los números positivos, y las *negras* y *rojas* representan a los números negativos).

Figura 14. Regletas de factorización.

Esta actividad se realizó en parejas que fueron formadas libremente por los chicos; sin embargo, al empezar a desarrollar el taller notamos que la mayoría de ellos aún no entendían cómo se debía manejar el material. En particular, no reconocían las fichas con sus equivalencias, sino que hablaban de cuadrados grandes y pequeños, o de rectángulos, incluso teniendo las instrucciones y los ejemplos en la misma hoja del taller. Por ello, tuvimos que orientar -casi de forma personalizada- a la mayoría de las parejas durante el trabajo en los primeros puntos. En los demás solo intervinimos cuando los educandos lo solicitaban o cuando observábamos dificultades que eran generales; en este último caso realizábamos las respectivas aclaraciones o explicaciones en el tablero. Veamos el trabajo realizado por Sergio en los dos primeros puntos y María Alexandra en el tercer punto.

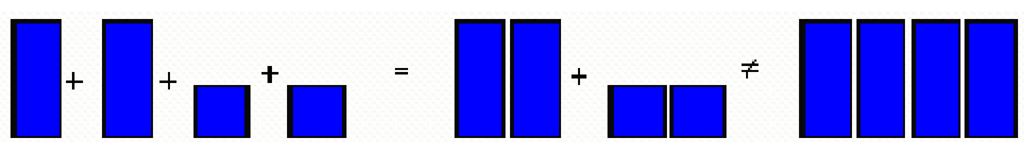
- ✓ *Sergio*



1. Deduzca el área de cada figura teniendo en cuenta que la regleta rectangular no cuadrada tiene como lado menor una unidad y lado mayor x unidades.

REGLETA	BASE	ALTURA	ÁREA	Perimetro
Cuadrado grande azul	X	X	$X \cdot X = X^2$	4X
Cuadrado pequeño amarillo ó café	1	1	$1 \times 1 = 1$	4
Rectángulo azul ó verde	X	1	$1 \cdot X = X$	$2X + 2 = 4X$

En este primer punto podemos ver que Sergio reconoce las equivalencias entre las fichas y la expresión algebraica respectiva -monomios-, así como las dimensiones de cada una de ellas. Sin embargo, vemos que al sumar monomios de diferente grado no presenta la misma claridad que cuando realiza los productos. Esta dificultad la observamos en muchos de los estudiantes, a quienes tratamos de orientar dándoles ejemplos –haciendo uso del material- con el fin de que comprendieran el porque solo se pueden sumar monomios del mismo grado; por ejemplo:



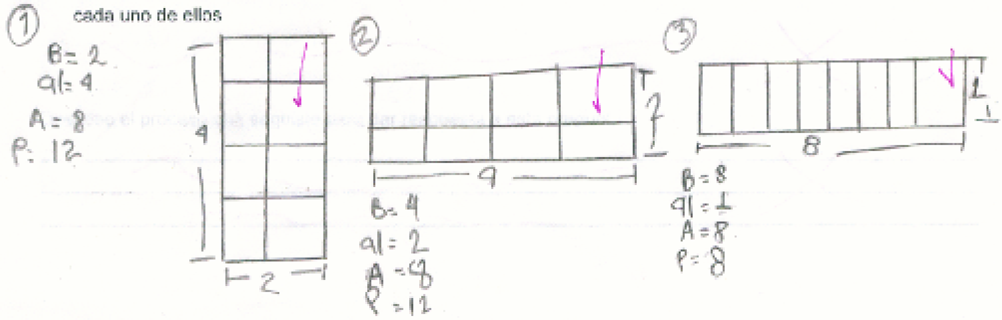
$$x + x + 1 + 1 = 2x + 2 \neq 4x$$

Veamos ahora el trabajo realizado para el segundo ítem.

1. Deduzca el área de cada figura teniendo en cuenta que la regleta rectangular no cuadrada tiene como lado menor una unidad y lado mayor x unidades.

REGLETA	BASE	ALTURA	ÁREA	Perimetro
Cuadrado grande azul	X	X	$X \cdot X = X^2$	4X
Cuadrado pequeño amarillo ó café	1	1	$1 \times 1 = 1$	4
Rectángulo azul ó verde	X	1	$1 \cdot X = X$	$2X + 2 = 4X$

2. ¿Cuántos rectángulos puedes formar con 8 rectángulos unidad? Realiza los dibujos y determina el área de cada uno de ellos



En este segundo punto vemos como Sergio construye de forma correcta rectángulos de diferentes dimensiones y asimismo determina sus áreas teniendo en cuenta las indicaciones dadas al iniciar la actividad. Sin embargo, ésta no fue la prueba que nos permitió reconocer el nivel de comprensión que Sergio tenía sobre el concepto de área, al contrario fue el análisis que hizo de la situación lo que nos dio la posibilidad de reconocerlo, veámoslo a continuación.

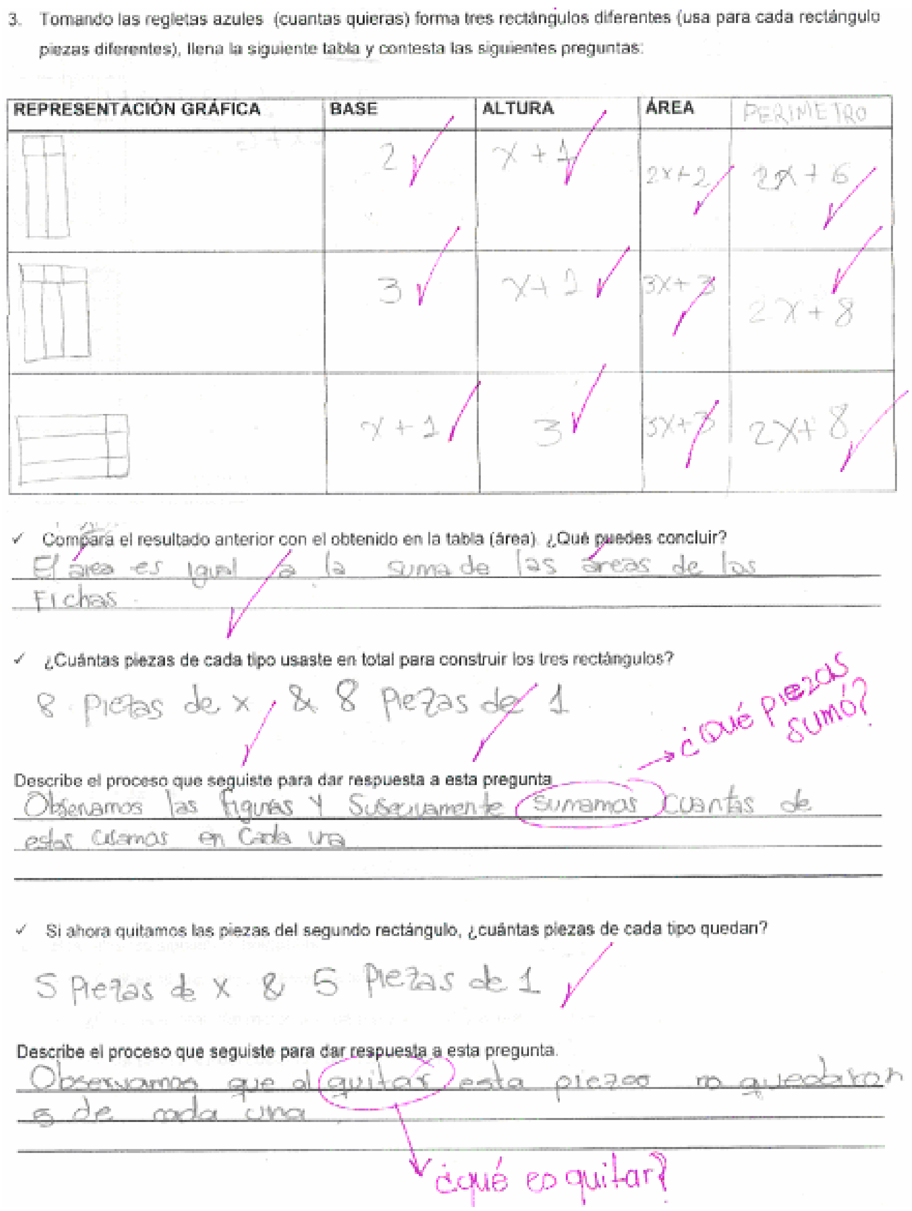
¿Qué puedes concluir de los resultados de las áreas de los rectángulos anteriores?

Que aunque se cambian las formas o el orden de los cuadrados siempre el area va ha valer lo mismo porque se hacen con la misma cantidad de cuadrados

Al leer la reflexión hecha por Sergio notamos que más que saber calcular el área de un rectángulo, Sergio comprende la esencia del mismo, pues más allá de un producto reconoce el área de una figura como la superficie que ésta ocupa.

✓ *María Alexandra*

Figura 15. Trabajo de María



3. Tomando las regletas azules (cuantas quieras) forma tres rectángulos diferentes (usa para cada rectángulo piezas diferentes), llena la siguiente tabla y contesta las siguientes preguntas:

REPRESENTACIÓN GRÁFICA	BASE	ALTURA	ÁREA	PERIMETRO
	2	x + 1	2x+2	2x + 6
	3	x+2	3x+3	2x+8
	x + 1	3	3x+3	2x+8

✓ Compara el resultado anterior con el obtenido en la tabla (área). ¿Qué puedes concluir?

El área es igual a la suma de las áreas de las Fichas

✓ ¿Cuántas piezas de cada tipo usaste en total para construir los tres rectángulos?

8 piezas de x & 8 piezas de 1

¿qué piezas sumó?

Describe el proceso que seguiste para dar respuesta a esta pregunta.

Observamos las figuras y Subsecuentemente sumamos cuantas de estas usamos en cada una

✓ Si ahora quitamos las piezas del segundo rectángulo, ¿cuántas piezas de cada tipo quedan?

5 piezas de x & 5 piezas de 1

Describe el proceso que seguiste para dar respuesta a esta pregunta.

Observamos que al quitar esta pieza no quedaron 5 de cada una

¿qué es quitar?

Al observar el trabajo realizado por María Alexandra notamos comprensión en la mayoría de los temas que ésta aplica, asimismo vemos que aunque hay coherencia entre las conclusiones que realiza y el mismo desarrollo de las situaciones, la forma como expresa lo que observa no es muy clara. Sin embargo, el no poder expresar con claridad las ideas que se tienen es una dificultad que con frecuencia observamos en los educandos, escuchar la expresión “profe, yo entiendo, pero es que…no se cómo decirlo” es una muestra fiel de ello. Al indagar sobre la causa de esta dificultad, vemos que se debe principalmente a la poca importancia que el maestro de matemáticas da en su clase al desarrollo de las habilidades verbales de sus educandos, motivo por cual, al igual que Parada (2005), creemos que es necesario que se “empiecen a abrir espacios donde los educandos logren presentar sus ideas para que el maestro guíe, escuche, discuta, sugiera, pregunte sobre lo que desea expresar y, finalmente, clarifique para que el educando pueda expresar esa idea de una manera adecuada, manejando el lenguaje matemático”.

A partir del desarrollo de la primera parte del taller, y asimismo de la observación del trabajo realizado por los chicos, pudimos reconocer aspectos importantes, que al igual que las observaciones de la primera actividad, tuvimos en cuenta durante el desarrollo de las siguientes.

- Aprovechar el desarrollo que el estudiante hace de una situación para cuestionarlo sobre el porque de ello.

Cuando a un estudiante o a cualquier persona se le pregunta sobre algo y éste responde ¡es que no se como decirlo! nos imaginamos inmediatamente que lo que realmente sucede es que no tiene un conocimiento claro de ello. Esta aseveración es quizás la más acertada en la mayoría de los casos, pues cuando se dice tener conocimiento de algo, por más complejo que sea, cualquier explicación no es más que la muestra de la apropiación que sobre este tiene. Al observar el trabajo realizado por los chicos notamos que la mayoría de ellos tenían grandes dificultades para explicar con sus propias palabras lo que en el mismo realizaban; sin embargo, cuando les planteamos en forma directa preguntas con respecto al mismo tema veíamos que las reflexiones que sobre éste hacían eran mucho más ricas, pues los cuestionamientos a los que se veían enfrentados requerían de un mayor análisis de su parte. Por ello, decidimos destinar espacios dentro del mismo desarrollo de cada actividad para el desarrollo de estos procesos de pensamiento.

- Variación en las actividades de clase.

Al iniciar con la actividad notamos que la mayoría de los chicos sentían curiosidad por la herramienta, por la forma en que se utilizaría, pero principalmente sobre el uso que podría dársele en la clase de matemáticas. Sin embargo, durante el desarrollo del taller, más o menos a la mitad, notamos que el entusiasmo con el que habían iniciado empezaba a disminuir a medida que íbamos avanzando, siendo éste el motivo que mayor preocupación ocasionó en nosotros, pues creímos muchas veces que la actividad se vendría abajo y con ella los objetivos que se habían planteado. Sin embargo, antes de que esto sucediera decidimos terminar con la actividad y continuarla en la siguiente sesión.

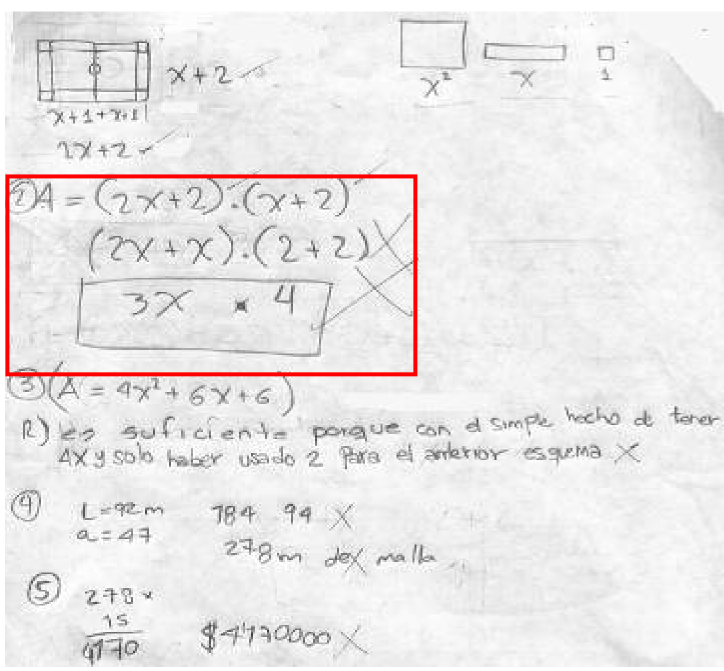
Aunque la decisión de terminar con la actividad hubiese sido la más acertada vemos que fue un riesgo grande para el proceso de aprendizaje que en ella se estaba llevando a cabo, pues pudimos haber perdido tanto el trabajo realizado para ello como el interés de los chicos para aprenderlo. Esta fue una situación que además de enfrentarnos a la realidad que como maestros enfrentaremos a diario nos hizo cuestionarlo acerca de la importancia de la diversidad en la práctica docente, de la creatividad que día a día debemos inyectarle y del compromiso que tenemos como guías de los procesos de aprendizaje de cada uno de los chicos con quienes tenemos la oportunidad de trabajar.

Debido a que el taller era bastante extenso decidimos terminarlo en la siguiente sesión, en ésta se trabajaron las dos últimas situaciones:

Figura 16. Actividades de los Estudiantes

Observemos las respuestas dadas por María Alexandra y Sergio al segundo punto.

Figura 17. Trabajando el Teorema de Pitágoras



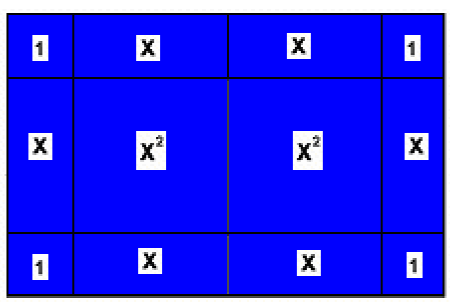
Aunque el diseño de la cancha realizado por María Alexandra y Sergio cumple con las condiciones que pide la FIFA, notamos que presentan dificultad a la hora de realizar algunas operaciones, como la multiplicación entre polinomios efectuada para hallar el área de la cancha.

$$A = (2x+2)\cdot(x+2)$$
$$(2x+x)\cdot(2+2)$$

Al observar la operación realizada por los educandos suponemos que aplicaron la propiedad asociativa, aunque vemos que lo hicieron sin tener en cuenta que no solo se están sumando los monomios, sino que además se establece un producto entre cada pareja de ellos, y que por esta razón es incorrecto realizar una agrupación como la que hicieron.

Con el fin de explicarles el por qué de su error, les pedimos que observaran la cancha y que recordaran la reflexión que sobre las áreas de las figuras habían realizado en el segundo ítem del tercer punto. Lo que buscábamos era que ellos compararan el resultado que obtuvieron al realizar el producto, con el resultado que se obtiene a partir de la construcción que se hace con las regletas de factorización.

La construcción que realizaron fue la siguiente:



Cancha de fútbol construida con las regletas

Al observar la cancha y reflexionar sobre el trabajo realizado en la sesión anterior, recordaron que "el área de la figura total es igual a la suma de las áreas de las figuras que la conforman". De donde obtuvieron que el área de la cancha era: $2x^2+6x+4$ y no $3x \cdot 4$, como fue el resultado obtenido al realizar el producto entre los binomios. Sin embargo; y debido a que se hace necesario formalizar la operación recordamos que para realizar el producto entre polinomios, sin hacer uso de las regletas, se debe "multiplicar cada término de uno de ellos por todos y cada uno de los términos del otro, teniendo en cuenta la ley de los signos, así como la reducción de los términos semejantes; es decir, aquellos que tiene el mismo exponente".

Aunque en esta sesión se dio continuidad a la actividad de refuerzo de factorización, y áreas y perímetros de figuras planas, pudimos observar un elemento que es igualmente imprescindible en el desarrollo de las actividades, la utilización de recursos didácticos para favorecer los procesos de aprendizaje. Al iniciar el estudio del álgebra vemos como muchas de las dificultades que presentan los educandos son las que en nuestro momento y en el momento de la mayoría nos aquejaron, las cuales se fundamentan en la idea de "incógnita" y especialmente en las operaciones que con ellas se pueden realizar. Pues es claro que "pensar en algo[7] como un algo que puede ser algo" es realmente difícil de comprender. Sin embargo, durante el desarrollo del taller vimos como el tener contacto con ese algo hizo que muchos comprendieran el porque de los procesos que con ellos se pueden realizar, lo que a nuestro modo de ver fue un gran apoyo en su proceso de aprendizaje.

[7] Usamos el término algo, porque durante el desarrollo de sus clases el profesor Carlos hablaba de las incógnitas como algo, con el fin de que los estudiantes comprendieran que una incógnita es cualquier cosa de la cual se desconoce su valor.

✓ *Actividad de refuerzo del "Teorema de Pitágoras".*

La aplicación de esta tercera actividad de refuerzo fue realizada los días 14 de octubre con los grupos A y B, y 23 de octubre de 2006 con el grupo C.

La actividad se inició sin ninguna explicación, para ello diseñamos un taller en el que a partir de la construcción de un cuadrado dibujado sobre la hipotenusa de un triangulo rectángulo se hace la representación geométrica del Teorema de Pitágoras.

El desarrollo del taller fue realizado en parejas; sin embargo, los resultados se plasmaron de forma individual.

Figura 18. Actividades de Estudiantes

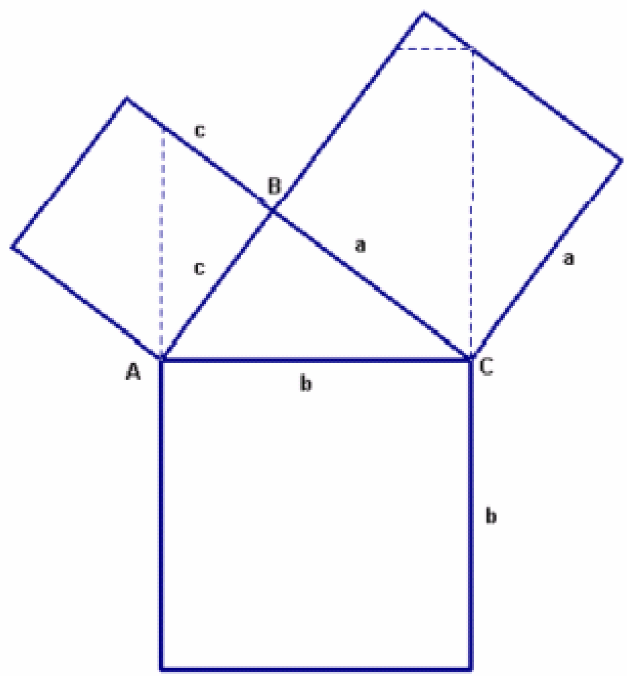
A continuación veremos el taller de aplicación, así como una de las soluciones dadas por los educandos (para mayor claridad ver anexo cinco).

Figura 19. Actividad de Refuerzo Nº 3

ACTIVIDAD DE REFUERZO Nº 3
TEOREMA DE PITÁGORAS

NOMBRES: ______________________________ GRADO: _______________

1. Observe detenidamente la siguiente figura:



"Como puedes ver, en cada lado del triángulo ABC se construyen cuadrados cuyos lados tienen la misma longitud que el lado del triángulo sobre el que se construyeron".

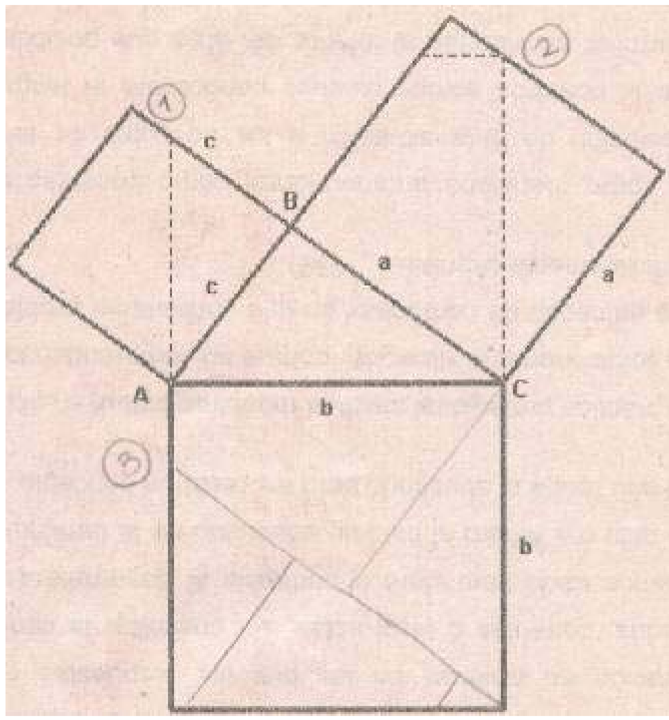
Recorte los dos cuadrados pequeños y trate de construir el cuadrado grande, ¿es posible construirlo?

- ✓ ¿Cuál es el área de cada uno de los cuadrados?
- ✓ ¿Qué relación existe entre las áreas de los cuadrados y las longitudes de los lados del triángulo?

¿Qué se puede concluir?

El desarrollo de la actividad sobre la cual vamos a reflexionar a continuación es el realizado por Diana Rocío. Paso a paso analizaremos el proceso que llevó a cabo, observando las imágenes de su trabajo.

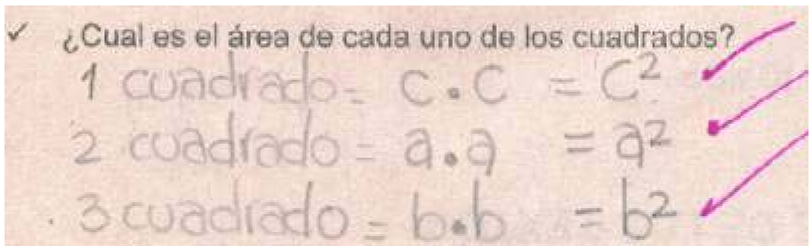
Figura 20. Actividad de Rocío



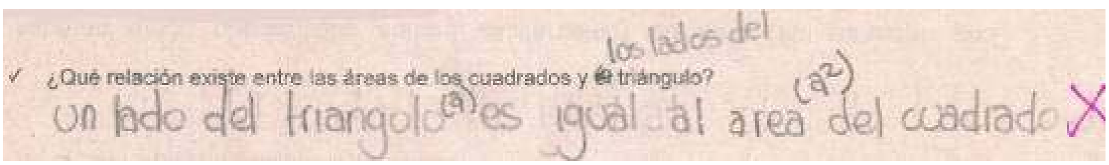
Como podemos ver, Diana construyó en forma adecuada el cuadrado de lado b, a partir de las piezas recortadas de los cuadrados de lados a y c. Sin embargo, el que haya comprobado que sí es posible reconstruir este último a partir de los otros dos, no es una razón suficiente para afirmar que para ella el concepto del Teorema de Pitágoras es claro. Para ello planteamos unas preguntas a partir de las cuales el educando pudiera ir analizando secuencialmente cada una de las características que los llevarían a construir el Teorema por su propia cuenta.

A partir de la primera pregunta, ¿cuál es el área de cada uno de los cuadrados?, buscábamos que el educando recordara el concepto de área al relacionarlo con la superficie ocupada por este, asimismo buscábamos que al plantear la segunda pregunta, el estudiante analizara la relación existente entre éstas, y a partir de ella dedujera el Teorema de Pitágoras.

Veamos a continuación las respuestas que Diana dio a estas preguntas.

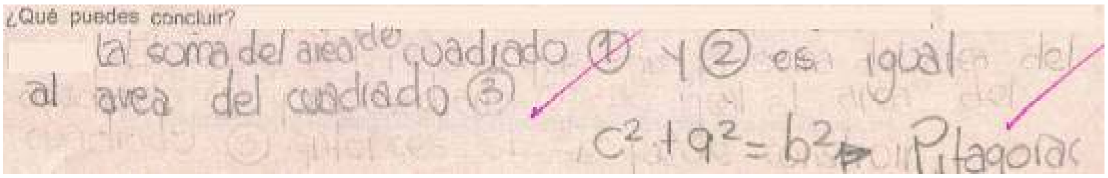


Primera pregunta



Segunda pregunta

Aunque Diana haya determinado correctamente las áreas de los cuadrados, vemos a partir de la respuesta dada a la segunda pregunta, que la comprensión que tiene del mismo no es tan clara como parece, pues aun habiendo hallado el área de los cuadrados no pudo explicar con sus propias palabras la relación existente entre éstas y las longitudes de los lados sobre los cuales fueron construidos. Sin embargo, al hablar con ella durante el desarrollo de la actividad, pudimos notar lo contrario, pues al hacerle las preguntas en forma directa nos explicó claramente las conclusiones a las que había llegado al analizar la situación. Al escuchar los argumentos con los que respondía a las preguntas vimos que la fuente de su error no era el que ignorara la relación existente entre éstas, sino que por el contrario este se debía, a que la forma en que habíamos planteado la pregunta no era la más acertada. Ejemplo de ello, es la respuesta dada a la última pregunta en la cual a partir del análisis de la relación entre las áreas de los cuadrados pudo reconocer el Teorema de Pitágoras.


¿Qué puedes concluir?
la soma del area de cuadrado 1 y 2 es igual al area del cuadrado 3
$c^2+a^2=b^2$ → Pitagoras

Esta situación fue una de las tantas que nos hizo reflexionar acerca de las dificultades que el "no saber escribir"[8] ocasionan en los procesos de aprendizaje de los educandos, así como en los procesos de enseñanza del maestro, quien al reconocer que en la hoja de una evaluación o en el desarrollo de un taller no se pueden evidenciar las fortalezas y debilidades de sus educandos, debe empezar a buscar y a diseñar estrategias para ello. Aunque esto no quiere decir que "su papel se limita a ser un facilitador de actividades. Si bien debe respetar la actividad y creatividad de los alumnos, también debe intervenir con sus orientaciones, explicaciones y ejemplos ilustrativos cuando así se requiera… debe seleccionar el momento oportuno de su intervención, de tal manera que ésta no sustituya el trabajo de los alumnos ni obstaculice su proceso de aprendizaje" (De Bengoechea & Moreno, 2005).

✓ *Actividad de refuerzo de "Semejanza y congruencia de triángulos, y razones trigonométricas"*

Esta cuarta actividad de refuerzo fue realizada los días:

- ✓ Octubre 21 de 2006 con los grupos A y B, y

[8] Para efectos de esta investigación definiremos el "no saber escribir" como la dificultad que tiene el ser humano para expresar en forma escrita y con sentido sus ideas o pensamientos.

- ✓ Octubre 30 de 2006 con el grupo C.

La actividad se inició con una corta socialización acerca de la tarea dejada en la sesión anterior, consultar lo que significa que dos figuras sean: semejantes, y congruentes. Sin embargo, al escuchar las pocas intervenciones que hicieron los chicos, notamos que solo algunos de ellos habían realizado la consulta, razón por la cual tuvimos que intervenir para dirigir la discusión.

Veamos primero las definiciones que se construyeron a partir de los aportes recibidos por los educandos.

- ✓ "Dos figuras son congruentes si son iguales en todos los aspectos; es decir, si tienen la misma forma y el mismo tamaño".
- ✓ "Dos figuras son semejantes si se diferencian solo por el tamaño, y todas sus partes guardan la misma proporción".

Figura 21. Trabajando figuras semejantes

Aunque las definiciones construidas no abarcaron todas las características que poseen esta clase de figuras, vemos que el intento por construirlas estuvo muy cerca de las verdaderas, razón por la cual fueron complementadas más adelante durante el desarrollo del taller.

El objetivo que teníamos al realizar la socialización era que el educando "recordara" estos conceptos y reconociera cuando dos figuras son semejantes o congruentes. Para ello realizamos una actividad en la que el educando debía construir a partir del tangram -que ellos mismos elaboraron -

figuras que cumplieran con estas propiedades, con el fin de que al observarlas pudieran complementar las definiciones que construyeron al inicio del taller.

Veamos algunas de las construcciones que hicieron.

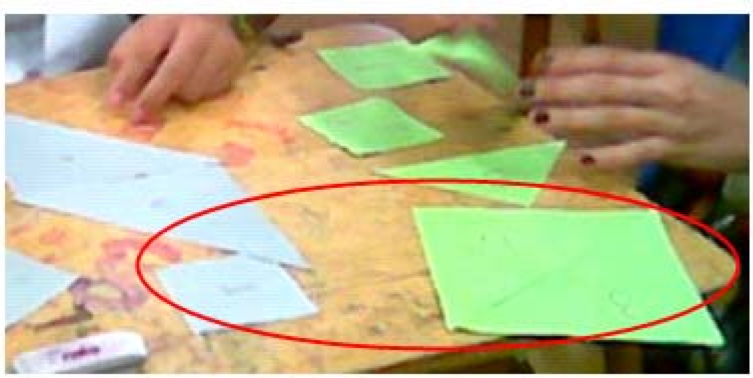
- ✓ *Figuras Congruentes*

Figura 22. Figuras congruentes

Dos figuras son congruentes cuando es posible hacerlas coincidir al superponerlas; es decir, cuando los lados y ángulos correspondientes sean iguales.

- ✓ *Figuras Semejantes*

Figura 23. Figuras semejantes



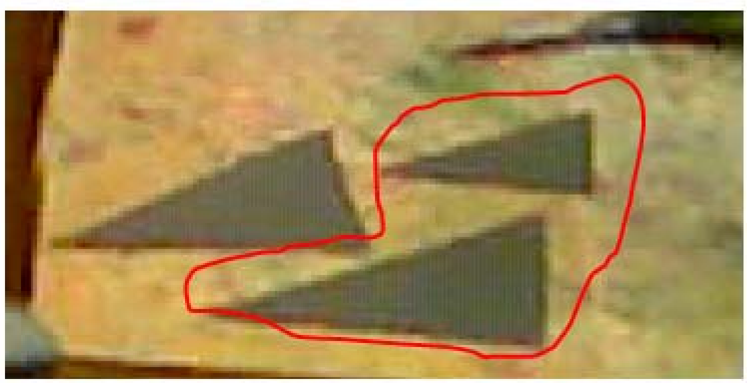
Dos figuras son semejantes si cumplen con las siguientes condiciones:

a. *Proporcionalidad de segmentos:* Entre dos figuras semejantes, los pares de segmentos correspondientes son proporcionales. La razón de proporcionalidad K se llama razón de semejanza,
b. *Igualdad de ángulos:* Entre dos figuras semejantes, los ángulos correspondientes son iguales.

Terminada la exploración con las figuras tomamos una de las parejas semejantes para recordar, a partir de ellas, algunas de las razones estudiadas durante las clases.

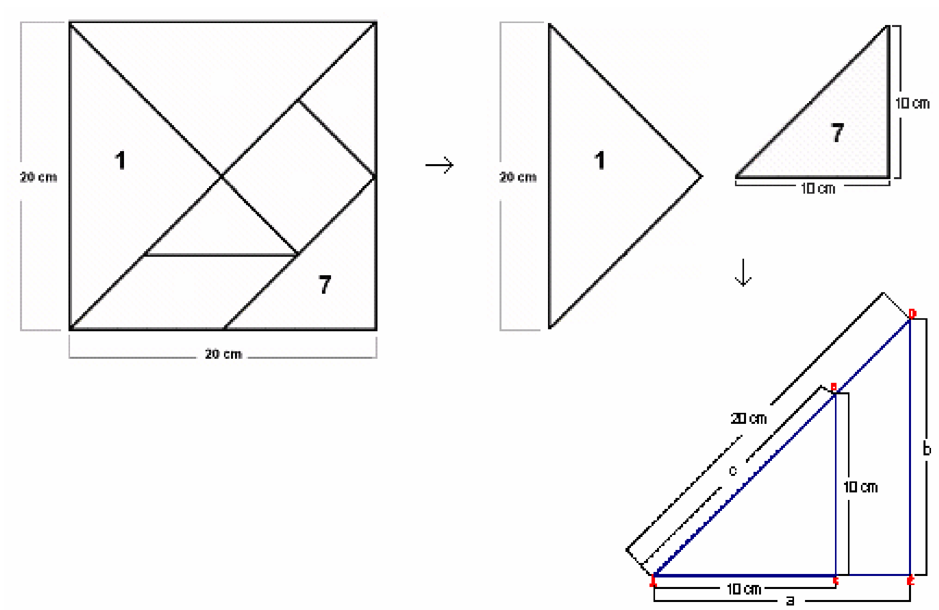
La pareja que tomamos fue la siguiente:

Figura 24. Pareja semejante



Debido a que a partir de ellas buscábamos recordar las razones que se podían establecer entre las longitudes de cada uno de sus lados, iniciamos identificando las que estaban preestablecidas.

La identificación se hizo de la siguiente manera:



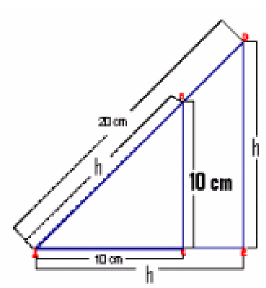
A primera vista se puede concluir que:

Al superponer los triángulos notamos que al ser sus ángulos iguales se guarda una proporcionalidad entre las longitudes de sus lados, razón por la cual se dicen son semejantes.

$a = b$, pues el triángulo uno es isósceles (esto lo reconocieron durante la elaboración y manipulación del Tangram) y que,
$c = b$ (Lo reconocieron al sobreponer las figuras).

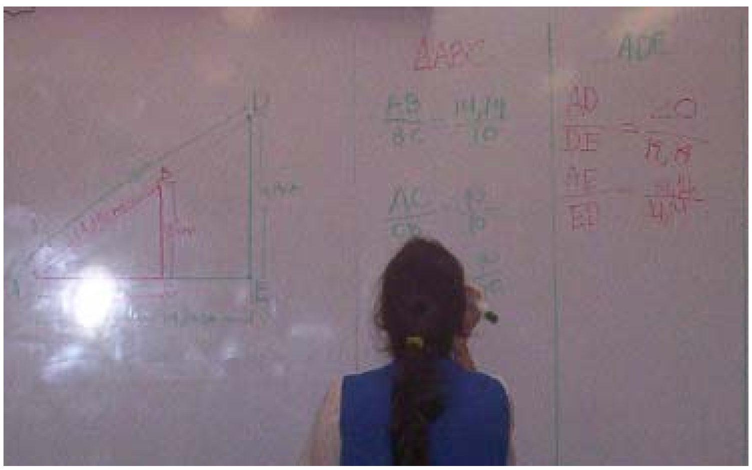
A partir de esto, y tomando como base la definición de semejanza de triángulos se plantearon las siguientes igualdades.

$$\frac{h}{10cm} = \frac{20cm}{h} = \frac{h}{\mathbf{10cm}}$$



De donde se obtuvo que $h = \sqrt{200}cm \approx 14{,}14cm$. Sin embargo, el procedimiento que se llevó a cabo para hallar este valor no fue tan sencillo para los chicos como nosotros esperábamos, pues tuvimos que orientarlos durante todo el desarrollo a través de una discusión en la que se enfrentaban los presaberes propios, con los del grupo y con nuestros cuestionamientos.

Figura 25. Socialización Nº 3



Al hallar las longitudes de cada uno de los lados de los triángulos les pidió que escribieran, en el tablero, a partir de un ángulo dado, los diferentes cocientes que se podían establecer entre ellos (esto se hizo aparte para cada triángulo), con el fin de que recordaran los nombres que cada uno de éstos recibían (las razones trigonométricas), y asimismo reflexionaran sobre la siguiente inquietud: *¿De qué depende el valor de una razón trigonométrica?*

Grata sorpresa la que nos llevamos cuando una de las chicas dijo: "…El valor de una razón trigonométrica depende únicamente del ángulo, las medidas de los lados no afectan en nada su valor…" (Andrea González, Grupo C).

La razón de ello, es que todos los triángulos rectángulos que tienen igual medida de $\angle$A son semejantes.

Ésta sin lugar a dudas, era la conclusión a la que esperábamos llegaran los educandos después de analizar los resultados obtenidos al comparar los cocientes de las longitudes de los lados correspondientes del par de triángulos.

Aunque el proceso para llegar a éste no fue del todo sencillo vimos como el uso del material, el tangram, se convirtió en una pieza fundamental para su desarrollo. Asimismo, a partir de las manipulaciones y de las propias construcciones que los chicos hicieron con éste, pudimos reconocer como a medida que experimentaban con ella iban aclarando muchas de las dudas que se presentaron al iniciar la actividad. Notamos que al manipular las figuras podían reconocer características comunes en ellas que difícilmente hubiesen podido identificar sin el. De allí vemos la importancia que tiene en la enseñanza y en el mismo aprendizaje, el diseño de situaciones en las que el educando tenga la posibilidad de construir, por si mismo, sus propios conocimientos, que son los que permanecen allí, en su estructura cognitiva, pues adquieren un verdadero significado.

✓ *Actividad de refuerzo de "Los teoremas del seno y del coseno".*

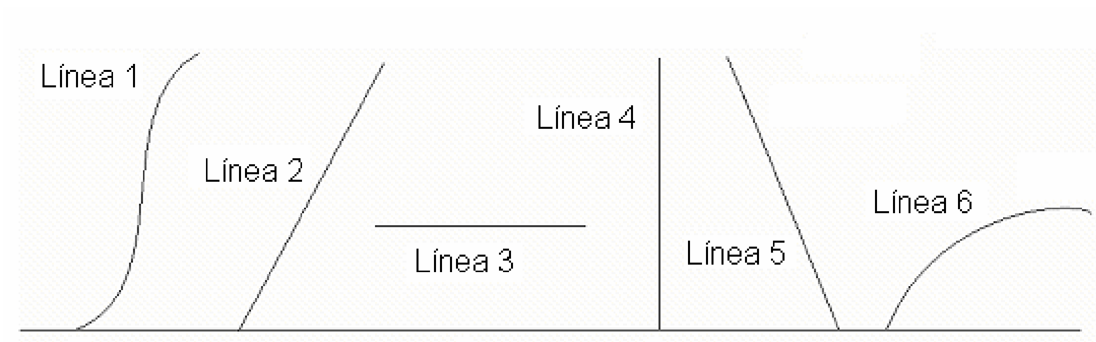
Esta quinta actividad de refuerzo fue realizada los días:

- ✓ Octubre 28 de 2006 con los grupos A y B, y
- ✓ Noviembre 7 de 2006 con el grupo C.

La actividad se inició con el planteamiento de la pregunta: *¿Qué es una línea oblicua?*

Lo hicimos de esta manera porque a partir de ella y de unas cuantas más, esperábamos construir la definición de triángulo oblicuángulo, puesto que es la clase de triángulo a la que se aplican los teoremas del seno y del coseno. Sin embargo, ninguno de los educandos supo darnos una respuesta, y debido a esto decidimos dibujar en el tablero diferentes líneas con el fin de que ellos pudieran determinar cuáles lo eran, e igualmente reconocieran las características que éstas poseían.

Las líneas que dibujamos fueron:



Al ver los dibujos la mayoría de los educandos señalaron a la línea 1 como la representación de una línea oblicua, aunque cuando les preguntamos acerca del porque de su selección percibimos que no tenían idea sobre ello, y que su elección la habían hecho por simple “suposición”. Debido a eso, decidimos generar una discusión en la que se reflexionara sobre las características de todas las líneas dibujadas para así determinar las de las líneas oblicuas. Esta discusión inició a partir de un comentario que nosotros realizamos con el fin de que sirviera como “pista” para llegar a la definición; el comentario fue: “las líneas oblicuas son líneas rectas”.

Basándose en este comentario empezaron a discutir sus ideas con nosotros y con los demás educandos, realizando un rápido análisis de las características de cada una de las líneas con respecto a la horizontal, esto último lo hicieron por sugerencia nuestra. Algunas de las reflexiones hechas fueron:

- ✓ Educandos (E): *"Como las líneas oblicuas son líneas rectas, entonces la uno y la seis no pueden ser… porque son curvas".*
- ✓ (E): *"La cuarta línea tampoco es oblicua, porque es…vertical"*

- Viviana Andrea (V): ¿Y geométricamente como se llaman esas líneas?
- (E): *"Eh,…perpendiculares"*

- ✓ (E): *¡Entonces, la tercera no es oblicua, porque si la cuarta es perpendicular, la tercera es paralela!*
- ✓ (E): *¡Sólo quedan la dos y la cinco!*

-(V): Entonces, ¿cuál es la línea oblicua?

- ✓ (E): *"La dos es una línea inclinada"*

- Mandius (M): ¿Y la cinco?
- (E): *"También, pero para el otro lado".*

A partir de este momento, el ritmo de la discusión cambió, el silencio se hacía cada vez mayor y fue debido a ello que decidimos darles una nueva pista: "las dos líneas, la dos y la cinco, son líneas oblicuas, con respecto a la horizontal". Luego les pedimos que identificaran las características de estas dos líneas con el fin de que construyeran la definición. Veamos algunas de las características que identificaron los educandos.

- ✓ *"Las líneas oblicuas son líneas rectas inclinadas".*
- ✓ *"Su inclinación es menor de 90º".*
- ✓ *"Su inclinación es mayor de 90º".*
- ✓ *"Su inclinación no es de 90º, porque sino sería perpendicular".*

Estas características fueron resumidas así, "*en el plano cartesiano, una línea oblicua es cualquier recta o segmento de recta que no sea ni horizontal ni vertical*" (Bolívar, 1999).

Definida línea oblicua les pedimos a los chicos que construyeran, basándose en ésta, lo que ellos creían era un triángulo oblicuángulo. Algunas de las construcciones que realizaron fueron:

Figura 26. Triángulo oblicuángulo Nº 1

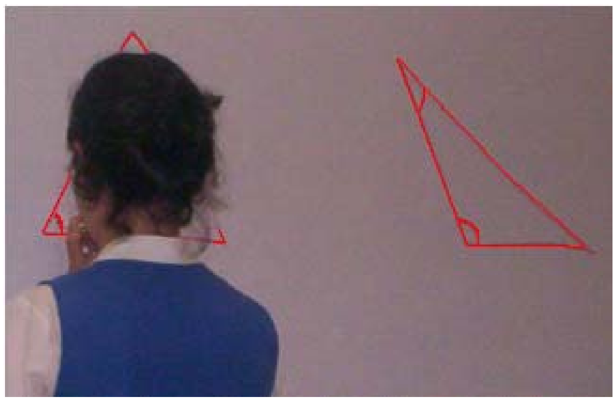
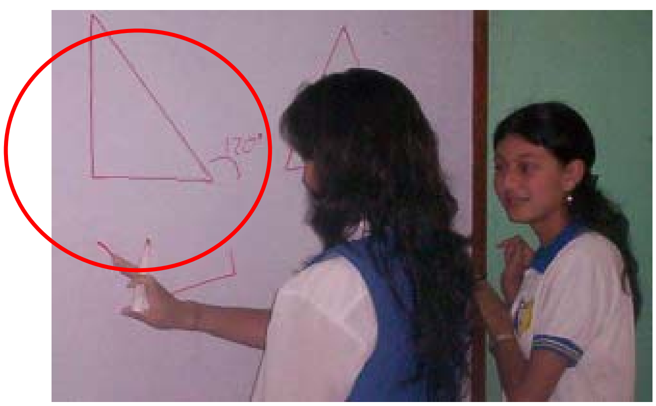
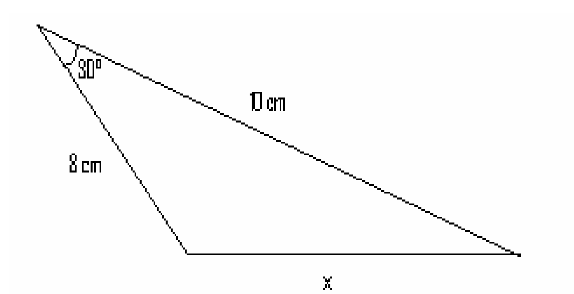


Figura 26. Triángulo oblicuángulo Nº 2



Sin embargo, estos triángulos no se construyeron inmediatamente sino que fueron el resultado de una corta discusión que se generó entre ellos. Aunque inicialmente la mayoría de los triángulos fueron rectángulos.

Apoyándonos en una de las construcciones plantemos el siguiente interrogante:



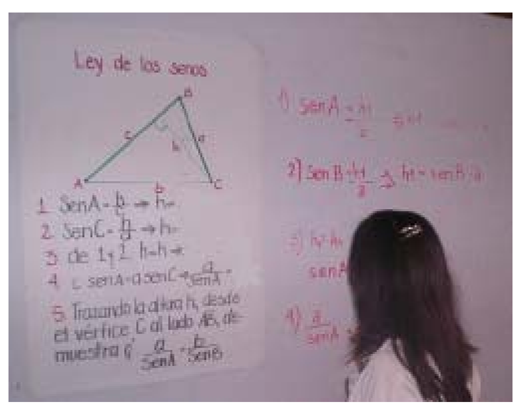
Con las herramientas que poseemos hasta ahora (teorema *de Pitágoras y razones trigonométricas), ¿es posible determinar la longitud x?*

A lo que rápidamente contestaron "sí, con el Teorema de Pitágoras". Al escuchar esta respuesta, y aprovechando la situación, les pedimos que plantearan la ecuación correspondiente. Sin embargo, cuando fueron a aplicar el teorema notaron que "el triángulo no tenía hipotenusa"; esto lo descubrieron cuando vieron que no había un ángulo recto con el cual relacionarla, y por consiguiente, advirtieron que no se podía hallar el valor de la incógnita. En este momento les recordamos que el Teorema de Pitágoras solo se podía aplicar para triángulos rectángulos y que para esta clase de triángulos, los oblicuángulos, existían otros teoremas.

> *¡Ah, sí…con los teoremas del seno y del coseno!, contestaron en voz alta la mayoría de los educandos.*

Para recordar los teoremas realizamos, de la siguiente manera, las respectivas deducciones a partir del triángulo ABD.

Figura 27. Ley de los senos



En una cartelera (como se puede ver abajo en la imagen) se les mostró paso a paso la forma como se debía realizar la deducción de los Teoremas, ésta iba acompañada de su respectiva representación, como se puede ver en la foto, pues el objetivo era que al completar los espacios dejados en blanco con los datos obtenidos al analizarlas los chicos pudieran comprender más fácilmente el porque de los mismos.

Este trabajo lo desarrollaron en parejas durante un tiempo aproximado de 15 minutos para cada teorema. Luego se realizó una socialización en la que uno de los educandos exponía a sus demás compañeros explicando los pasos seguidos en la demostración. Durante la socialización pudimos observar que la mayoría de los chicos presentaban dificultad tanto para resolver ecuaciones, como para seguir indicaciones, pues aunque las demostraciones se hacían paso a paso, ellos no lograban comprender el porque de la secuencia lógica que se estaba desarrollando. Por ello nuestra orientación en este momento se hizo imprescindible.

Una vez socializadas las demostraciones proseguimos a desarrollar algunos de los ejercicios que los educandos llevaron a la actividad y que habían sido dados por el profesor como repaso para la evaluación de recuperación.

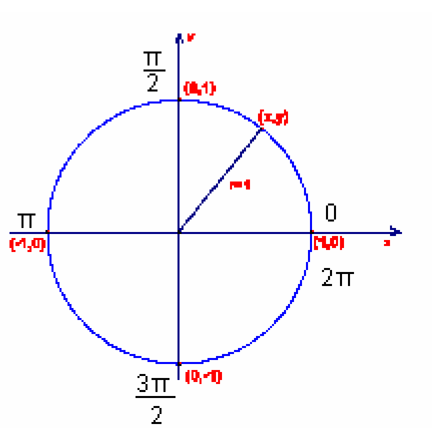
Aunque la realización de las demostraciones fue un proceso que causó muy poco interés en los chicos y asimismo muy poca trascendencia en sus procesos de aprendizaje, notamos como la guía y orientación del maestro permitió que los chicos se fueran familiarizando con esta clase de procesos, que aunque en la etapa en la que se encuentran no tienen mucha importancia, si la tendrán cuando inicien la etapa del desarrollo cognitivo de las operaciones concretas.

✓ *Actividad de refuerzo de la "Representación gráfica de las funciones trigonométricas seno y coseno, e Identidades trigonométricas básicas (pitagóricas)".*

La aplicación de esta actividad se realizó en dos sesiones con los Grupo A y B los días 4 y 18 de noviembre de 2006, y en una sesión (solo la primera parte) con el Grupo C, el día 20 de noviembre.

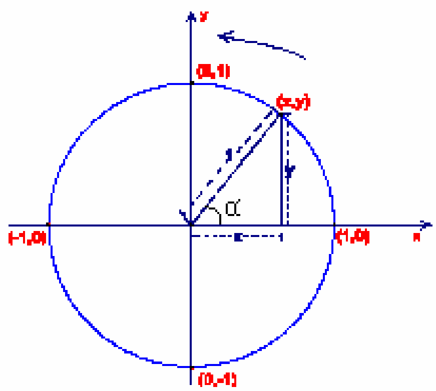
La actividad se inició con la elaboración del círculo trigonométrico, esto se hizo con el fin de que los educandos recordaran algunas de sus características. Lo que buscábamos era que al basarse en ellas pudieran relacionar a las funciones trigonométricas, seno y coseno, con la variación que sufren las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo inscrito en ella, con uno de sus vértices en el centro, al mover en sentido contrario a las manecillas del reloj uno de los puntos (x, y) que se encuentran sobre la circunferencia. El análisis realizado para determinar esta relación fue el siguiente:

1. Solo con el círculo trigonométrico.



- La longitud del radio del círculo trigonométrico es de una unidad.
- Los puntos de corte con los ejes son: (1,0), (0,1), (-1,0) y (0, -1).

2. Cuando se inscribió el triángulo rectángulo en el círculo trigonométrico.



- El punto sobre la circunferencia -que es uno de los vértices- se denomina (x, y).
- Se plantean las razones trigonométricas, seno y coseno, tomando como referencia el ángulo (α) que se forma en el origen.

$$sen\,\alpha = \frac{y}{1} \Rightarrow sen\,\alpha = y$$

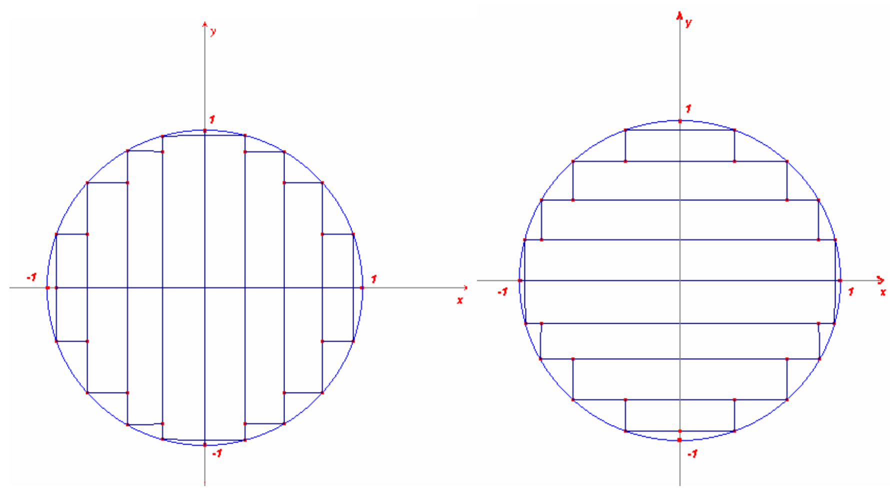
$$\cos\alpha = \frac{x}{1} \Rightarrow \cos\alpha = x$$

En donde podemos observar que la función seno está relacionada con la variación que sufre la longitud del cateto opuesto (y) al mover el punto (x, y), mientras que la función coseno se relaciona con la del cateto adyacente (x). Esto último fue tomado como base para la construcción de las gráficas de las funciones trigonométrica seno y coseno que era la segunda parte de la actividad. No obstante, antes de iniciar con ella, hicimos el siguiente comentario con el fin de dar claridad al resultado obtenido anteriormente.

“Al construir la gráfica de la función seno debemos tener en cuenta la variación de y a medida que nos movemos en el círculo trigonométrico en sentido contrario a las manecillas del reloj, y partiendo del punto (1,0).

Igualmente, se debe hacer para el coseno, pero esta vez teniendo en cuenta la variación de x".

Esta actividad fue desarrollada con el siguiente material.

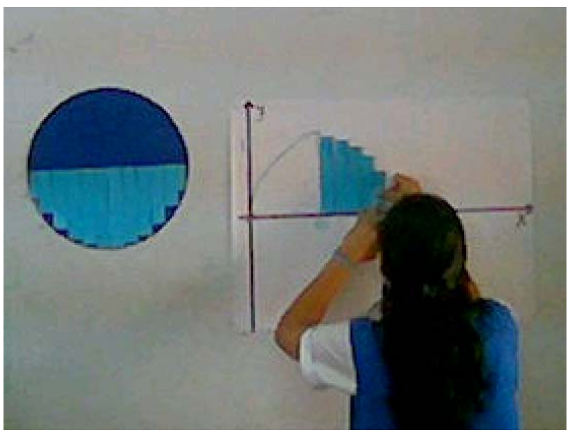


El diseño de esta actividad fue realizado por nosotros después de estudiar varios tipos de software para la construcción de las funciones trigonométricas, pues no podíamos hacer uso de ellos debido a que no teníamos los recursos necesarios para tal efecto, como son los computadores, lo que nos "obligó" a buscar una estrategia que nos permitiera llevar a cabo la actividad sin hacer uso de las herramientas tecnológicas.

La estrategia que implementamos fue la realización de un material en cartulina que podría ser manipulado fácilmente por los chicos. Y como "no hay mal que por bien no venga", debido a ello la actividad terminó convirtiéndose en una experiencia significativa para los educandos, quienes en su mayoría manifestaron haber comprendido mejor el tema a partir de la manipulación del material y asimismo la demostraron en el desarrollo del taller. Sin embargo, con esto no queremos decir que "por el mero hecho de que los educandos manejan objetos concretos puedan realizar abstracciones; aunque la utilización de dicho material favorezca el proceso para llegar a ellas la abstracción solo comienza a producirse cuando llega a captar el sentido de las manipulaciones que hace” (Piaget citado por Martínez, s.f.).

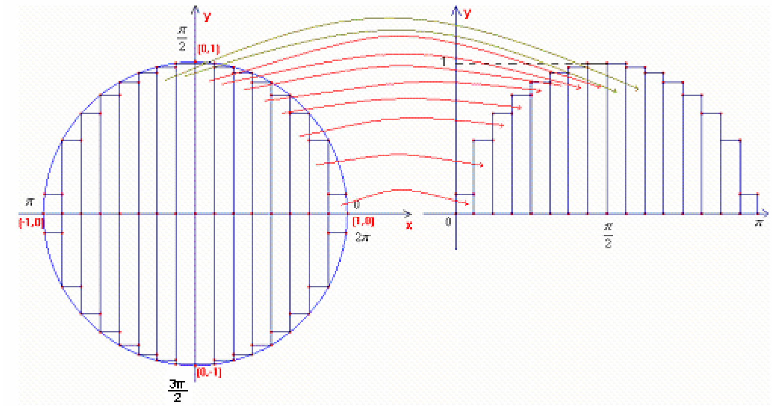
El material diseñado consintió en dos círculos trigonométricos que se encuentran divididos en pequeños rectángulos de base constante y altura variada, estando en posición vertical los rectángulos sobrepuestos en el circulo trigonométrico que se usa para construir la función seno, y en posición horizontal los de la función coseno.

Figura 28. Construcción de la función seno



El objetivo de la actividad era que el educando fuera construyendo la gráfica de la función a medida que iba ubicando en el plano cartesiano los rectángulos, teniendo en cuenta los puntos de corte con los ejes, para ubicar los ceros, los máximos y los mínimos en la gráfica, y asimismo para analizar variación de la longitud correspondiente, x para el coseno y y para el seno, a medida que se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj. Así:

- ✓ *Representación gráfica de la función seno en el intervalo de 0 a π.*



✓ *Representación gráfica de la función coseno en el intervalo de 0 a* $\frac{\pi}{2}$.

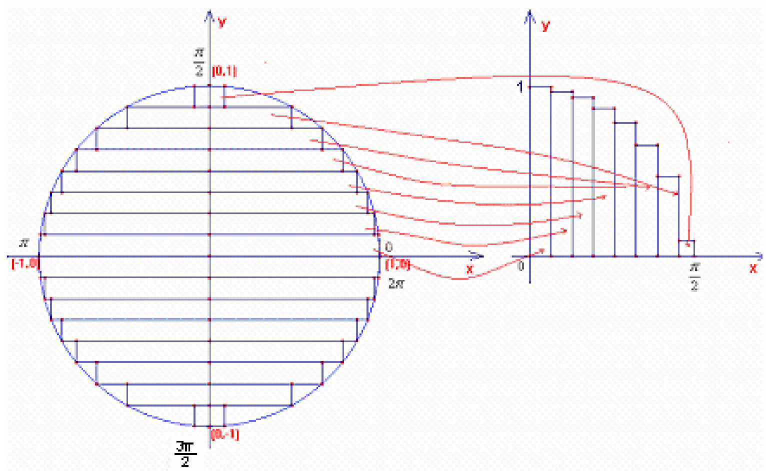
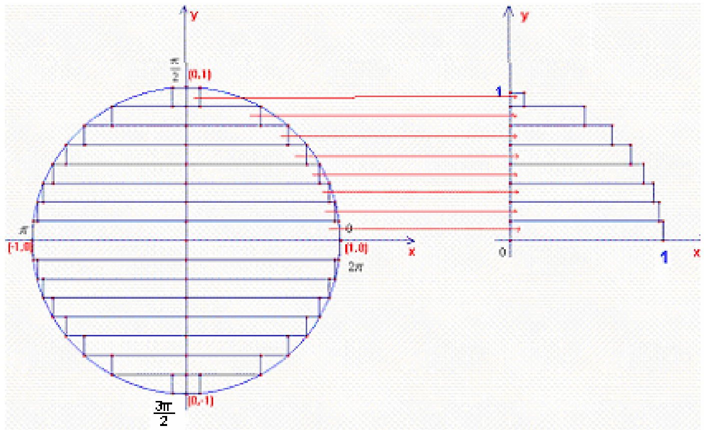


Figura 29. Construcción de la función coseno.

Durante la construcción de la función coseno fue importante aclarar que debido a que ésta se relaciona con la longitud *x*, la cual disminuye en el intervalo de uno a cero (en el primer cuadrante), se deben girar los rectángulos y poner en posición vertical en el plano. Pues en el primer grupo -Grupo A- cometieron el error de ponerlos horizontalmente, y debido a ello obtuvieron la siguiente gráfica:



Al observar la gráfica y reconocer el error que estaban cometiendo los educandos decidimos detener inmediatamente la actividad y de esta manera evitar que se produjeran confusiones, para lo cual realizamos algunas preguntas con el objetivo de que reflexionaran sobre las características de la función que estaban construyendo, como el dominio, recorrido, ceros, y el punto de corte con el eje *y.* Asimismo, les pedimos que observaran detenidamente el círculo trigonométrico, para que reconocieran la variación de *x* en cada uno de los cuadrantes a medida que se movían en la circunferencia, debido a que fue esta variación la que relacionamos a la función, en la primera actividad.

Después de una larga discusión en la que la mayoría de los educandos defendieron esta construcción, la incorrecta, con el argumento de que lo habían hecho siguiendo el mismo criterio que se había tenido en cuenta para la construcción de la función seno, pudimos convencerlos de lo contrario al guiar el siguiente análisis.

Al observar el círculo trigonométrico podemos ver que la longitud de la base del primer rectángulo es de una unidad, la cual coincide con la longitud que en el primer movimiento de la construcción alcanzó la onda, pues es claro que la suma de las alturas de los rectángulos, que son iguales, es también de una unidad por el hecho de que al igual que x_1 este es un radio del círculo trigonométrico. Dicho de otra forma,

$$x_1 = y_1 + y_2 + \ldots + y_8 = 1, \text{ donde } y_1 = y_2 = \ldots = y_8$$

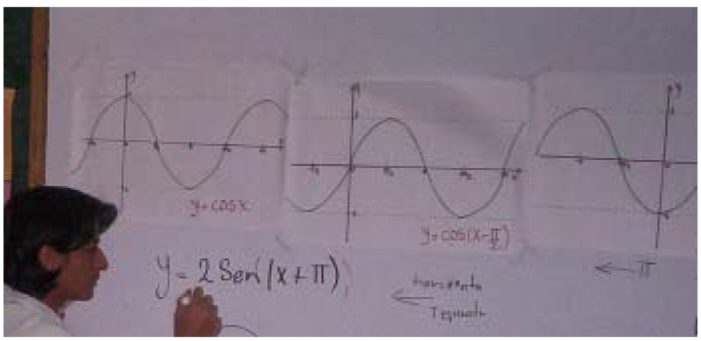
Ahora bien, ¿cuál será la longitud de la base del segundo rectángulo; es decir, de x_2? Aunque en el círculo no podemos ver con exactitud esta longitud sí es claro que es un poco menor que la de x_1. Sin embargo, al observar la construcción de la función, vemos que la diferencia entre estas no es mucho mayor, es de un y_i $i = 1,2,\ldots 8$. Esta diferencia solo pudo ser completamente advertida al comparar ellos mismos, haciendo uso del material, las longitudes de la base del segundo rectángulo y la suma de las longitudes de las alturas de los siete primeros rectángulos.

Terminadas las construcciones de las funciones empezamos a analizar cada una de las gráficas con el fin de responder a las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuántas veces se repite la curva en la recta real?
- ✓ ¿Cada cuánto se repite?... entonces, ¿cuál es el periodo de la función?
- ✓ ¿Cuál son los valores máximos y mínimos que puede alcanzar la función?... entonces, ¿cuál es el dominio y el recorrido de la función?
- ✓ ¿En qué puntos la gráfica de la función se interseca con el eje *x*? ¿y en cuáles con el eje *y*?
- ✓ ¿Cuál es la amplitud de la función?

Las respuestas que obtuvimos fueron en general satisfactorias, aunque observamos algunas dificultades en cuanto a la determinación de los puntos como parejas ordenadas, y a la determinación de la amplitud, puesto que no la relacionan con el valor absoluto del valor máximo, ya fuera positivo o negativo, que alcanza la onda, sino con el recorrido de la función; sin embargo, después de la intervención de algunos educandos que sí recordaban los conceptos pudimos seguir con el actividad. Esto nos muestra como el trabajo en grupo puede ayudar a que “los alumnos aprenden a depender de sí mismos y uno de otro, y menos del profesor, para solucionar problemas, pues cuando se han debatido y compartido las ideas, la comprensión conceptual es más profunda y duradera” (Barberà, 1997).

Figura 30. Transformaciones de las funciones seno y coseno.



Luego realizamos este mismo análisis con otras tres gráficas y sus respectivas ecuaciones, una de la función original y las otras dos de la misma función pero con alguna transformación, ya fuera en la amplitud, el periodo, la traslación (verticales u horizontales) o en la reflexión. Nuestro objetivo era que el educando a partir de la comparación de la función original y de las otras dos, pudiera reconocer la transformación que ésta sufre al ser efectuada alguna operación sobre ella. Como por ejemplo:

$D:\Re$

$R:[-1,1]$

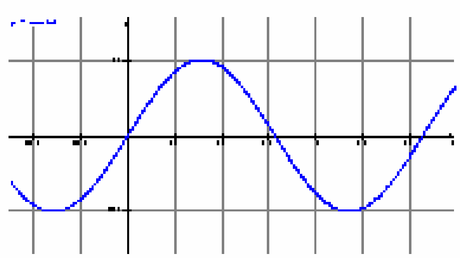
$Máximos:\left(\pi/2,1\right)$

$Mínimos:\left(3\pi/2,-1\right)$

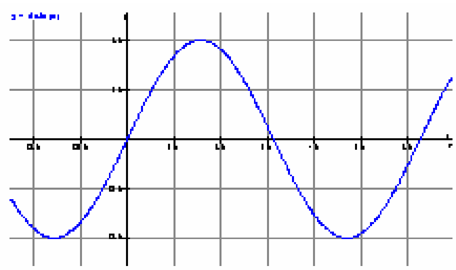
$Ceros:(0,0),(\pi,0),(2\pi,0)$

$Amplitud:1$

$Periodo:2\pi$



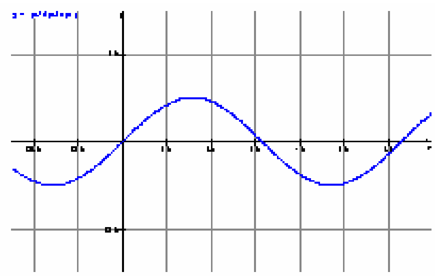
$y = sen x$



$y = 2senx$

$D : \Re$
$R : [-2,2]$
$Máximos : \left(\pi/_2, 2\right)$
$Mínimos : \left(3\pi/_2, -2\right)$
$Ceros : (0,0), (\pi,0), (2\pi,0)$
$Amplitud : 2$
$Periodo : 2\pi$

$D : \Re$
$R : \left[-1/_2, 1/_2\right]$
$Máximos : \left(\pi/_2, 1/_2\right)$
$Mínimos : \left(3\pi/_2, -1/_2\right)$
$Ceros : (0,0), (\pi,0), (2\pi,0)$
$Amplitud : 1/_2$
$Periodo : 2\pi$

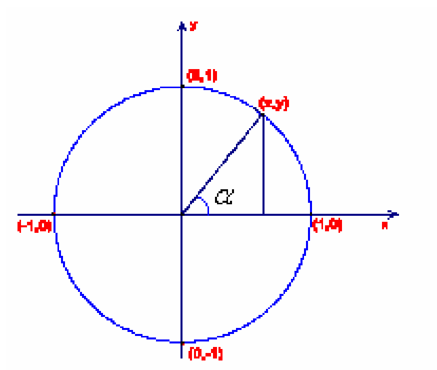


$y = \frac{1}{2}senx$

Al realizar el análisis de las tres gráficas, y en especial al observar su recorrido, la mayoría de los educandos notaron que cuando se multiplicaba a la función era éste, el recorrido, lo único que variaba. Pues vieron que al multiplicarla por un número mayor que uno su recorrido aumentaba, mientras que cuando la multiplicaban por un número menor que uno, pero mayor que cero, ésta se reducía. La variación producida en el recorrido de una función terminó siendo para nosotros el punto de partida para hablar del concepto de amplitud y asimismo de puntos extremos, máximos y mínimos.

Realizado el análisis de todas las transformaciones, empezamos a trabajar nuevamente con el círculo trigonométrico, pero esta vez con el fin de determinar las identidades trigonométricas básicas (pitagóricas), realizándose las siguientes deducciones:

- ✓ Como en la actividad anterior habíamos obtenido que:



$seno\,\alpha = y$, $\cos\alpha = x$ y $r = 1$.

Entonces iniciamos determinando a partir de ellas, las otras razones trigonométricas que nos hacían falta, y que son las identidades fundamentales. Así:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{sen\alpha}$$

Como lo que buscábamos era determinar las identidades pitagóricas, entonces aplicamos el Teorema de Pitágoras al triángulo inscrito en el círculo trigonométrico, tomando como base las identidades anteriores.

La identidad que obtuvimos fue:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (\cos\alpha)^2 + (sen\,\alpha)^2 = (1)^2 \Rightarrow \cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$$

Luego tomamos la identidad anterior y la dividimos entre $\cos^2\alpha \neq 0$ y el $sen^2\alpha \neq 0$, para hallar dos nuevas identidades.

$$\cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \left(\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1)^2 + (\tan\alpha)^2 = (\sec\alpha)^2 \Rightarrow 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$

De igual manera, se hizo para hallar $\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$, pero dividiendo por $sen^2\alpha \neq 0$.

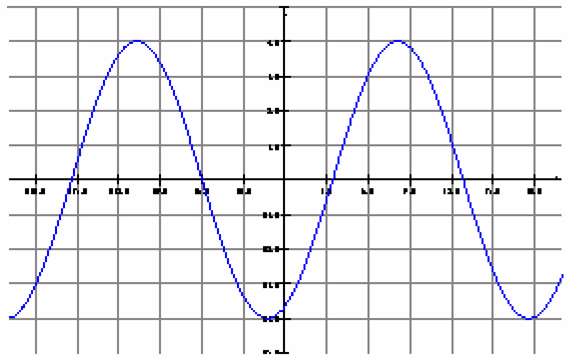
Una vez terminado el repaso, proseguimos a realizar el siguiente taller (para mayor claridad ver anexo seis).

Figura 31. Actividad de Refuerzo Nº 6

ACTIVIDAD DE REFUERZO N° 6
REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES (SENO Y COSENO)
IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS BASICAS (PITAGORICAS)

NOMBRE: ______________________________________ GRADO: ___________________

- Observa la siguiente gráfica y responde las preguntas de la 1 a la 4



Escoje solo una de las respuestas

1. *La ecuación de la función trigonométrica es:*

a. $y = -4\cos(3x + 2)$ b. $y = -4\cos\left(\frac{1}{3}x + 2\right)$

c. $y = -4\cos(3x) + 2$ d. $y = 4\cos\left(\frac{1}{3}x + 2\right)$

e. Ninguna de las anteriores

2. El periodo de la función es:

a. 6π b. 2π c. -6π d. $\frac{2}{3}\pi$ e. Ninguna de las anteriores

3. La amplitud de la función es:

a. -4 b. 8 c. 4 d. -8 e. Ninguna de las anteriores

4. El dominio y el recorrido de la función es:

a. $D: (-\infty,\infty), R: [-4,4]$ b. $D: [0,2\pi], R: [4,-4]$

c. $D: (-\infty,\infty), R: (-4,4)$ d. $D: [-\infty,\infty], R: [-4,4]$

e. Ninguna de las anteriores

5. Represente gráficamente la siguiente función $y = -2\cos(2x) + 1$

Determine:

a. *Dominio:*
b. *Recorrido:*
c. *Periodo*
d. *Amplitud*

6. Demuestre que cada una de las siguientes igualdades es una identidad:

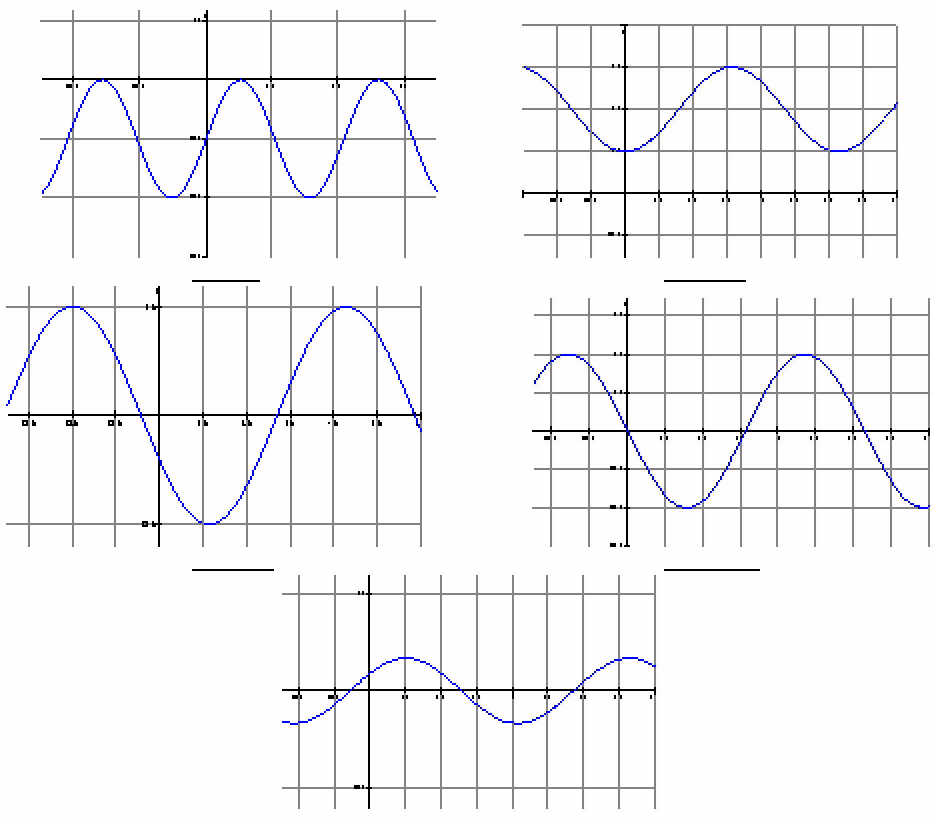
a. $(sen\,\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2sen\,\theta\cos\theta$

b. $\dfrac{\tan\theta + \tan\theta \cdot \cot^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cot\theta$

7. Determine la gráfica que le corresponde a cada una de las funciones dadas (la escala es de una unidad)

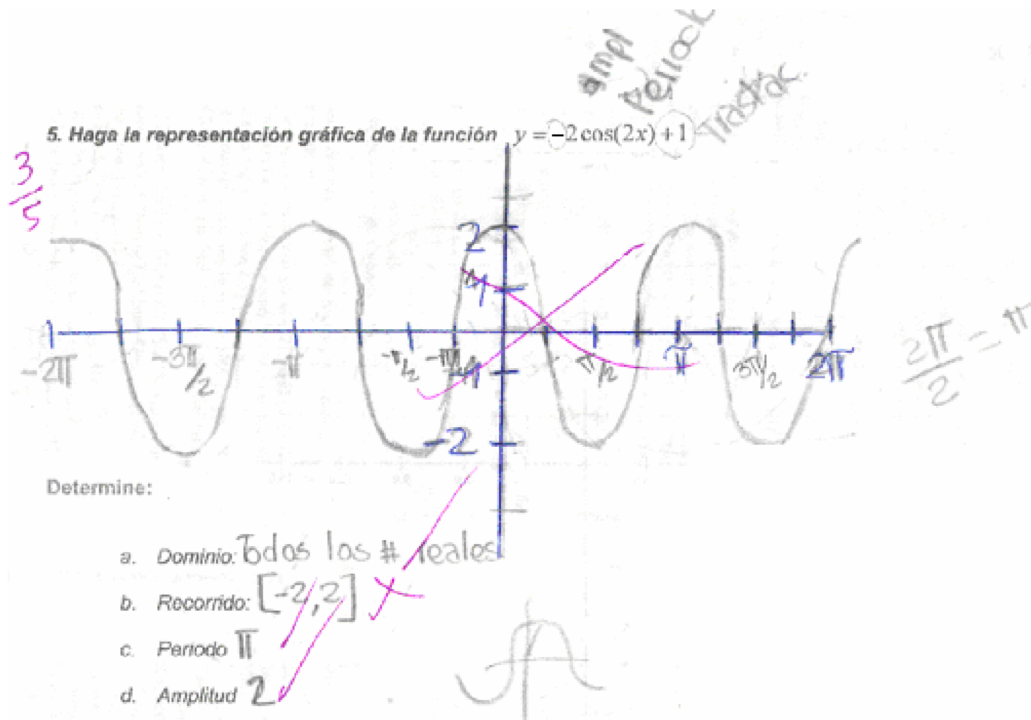
a. $y = -\cos x + 2$ b. $y = sen\,3x - 1$ c. $y = -2senx$

d. $y = \dfrac{1}{3}\cos(x-1)$ e. $y = \cos(x+2)$



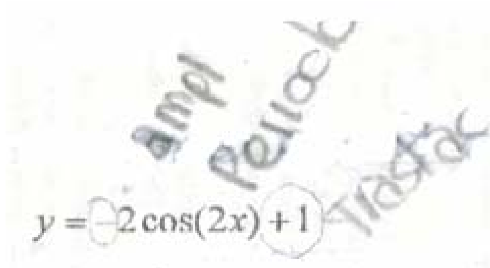
Para este taller se plantearon cuatro situaciones en las cuales se trabajaron los conceptos repasados, representación gráfica de las funciones trigonométricas seno y coseno, e identidades trigonométricas básicas (pitagóricas). Para lo cual se plantearon dos clases de preguntas, abiertas y de selección múltiple con única respuesta. Aunque el taller fue desarrollado en parejas, cada uno de los educandos plasmó el trabajo realizado en forma individual.

Veamos las respuestas dadas por Diana Rocío a la segunda situación.



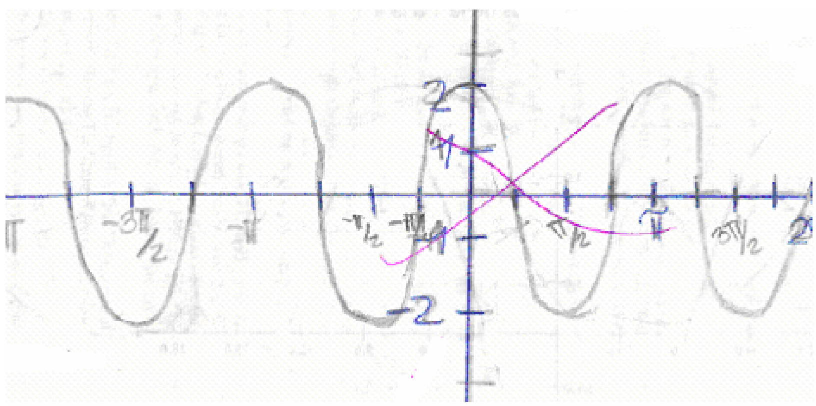
Al observar el trabajo realizado por Diana la primera impresión que nos llevamos era que el tema aún no era claro para ella, pues la gráfica que había hecho de la función no era la correcta; sin embargo, al observar detenidamente notamos todo lo contrario, que Diana aun teniendo algunas dificultades presentaba claridad en varios aspectos del mismo, los cuales evidenciamos al observar que ella:

- *Reconoce la transformación correspondiente que una función sufre cuando se realiza una operación sobre ella.*



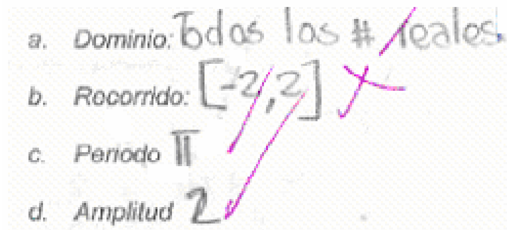
No obstante, al ver la imagen notamos que la única transformación que no reconoció fue la reflexión.

- *Intenta aplicar las transformaciones que reconoce.*



Como podemos ver, Diana solamente le aplicó a la función $\cos x$ dos de las tres transformaciones que reconoció. La primera en cuanto a la amplitud, aumentándola de una unidad a dos, y la segunda en cuanto al periodo, disminuyéndolo de 2π a π. Sin embargo, vemos que Diana aun habiendo reconocido la transformación que el adicionarle uno produce a la función no trasladó la gráfica, mostrándonos que tal vez esto ocurrió por descuido, y no porque no haya tenido la capacidad de hacerlo.

- *Interpreta correctamente la gráfica de una función, reconociendo las características que te permiten analizar su comportamiento.*



a. Dominio: Todos los # reales

b. Recorrido: [-2,2]

c. Periodo π

d. Amplitud 2

Aquí podemos ver, que aunque la representación grafica de la función es incorrecta, Diana sabe reconocer las características principales de cualquier función, como son su dominio, recorrido, periodo y amplitud.

Debido a que este taller se desarrolló en la última sesión, el día 18 de noviembre de 2006, no tuvimos la oportunidad de aclarar las dudas que tenían los educandos, como lo habíamos hecho en las actividades anteriores, sino que esta vez les pedimos que trabajaran cooperativamente con sus compañeros, con el fin de que pudieran ir resolviendo juntos las dificultades que se le iban presentando a medida que lo desarrollaban. Lo único que pudimos hacer fue resumir en el tablero las conclusiones a las que habían llegado durante el desarrollo del taller, y asimismo, contestar en forma general a las inquietudes que se presentaban.

Aunque la solución del trabajo realizado nos hubiese permitido reconocer más fácilmente las fortalezas y debilidades individuales, notamos que los aportes recibidos de sus demás compañeros enriquecieron enormemente los procesos de aprendizaje de cada uno de los que en éste trabajaron.

Talleres creativos como actividades de refuerzo para las aplicaciones de las funciones trigonométricas

Los talleres creativos que desarrollamos como actividades de refuerzo para las aplicaciones de las funciones trigonométricas fueron aplicados del 3 al 17 de marzo de 2007; sin embargo, en esta ocasión el trabajo solo se realizó con un grupo de 15 educandos, quienes habían participado en las actividades de refuerzo realizadas durante al año anterior y voluntariamente decidieron participar de éstas. El horario establecido para los talleres fue los días sábados de 9 a 11 a.m.

La metodología llevada a cabo para la realización de los talleres creativos se basa en la resolución de problemas como una herramienta a partir de la cual es posible promover el desarrollo de los procesos cognitivos de los educandos a partir del planteamiento de situaciones construidas tomando como base las características propias de los chicos, que fueron reconocidas en las actividades diagnósticas. Cada taller elaborado como actividad de refuerzo busca que el educando sea quien a partir del desarrollo de las situaciones evoque, y asimismo, refuerce los conceptos necesarios para tal efecto.

✓ *Taller creativo como actividad de refuerzo para "Las razones trigonométricas".*

El primer taller creativo realizado como actividad de refuerzo fue aplicado el día 3 de marzo de 2007. En éste planteamos tres situaciones con las cuales buscábamos que los educandos, a partir del reconocimiento de las razones trigonométricas como el cociente entre las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo, pudieran desarrollar situaciones en cuya solución se pudieran aplicar.

Veamos a continuación el taller creativo diseñado como actividad de refuerzo para las Razones trigonométricas (para mayor claridad ver anexo siete).

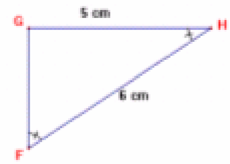
Figura 32. Taller Creativo

TALLER CREATIVO COMO ACTIVIDAD DE REFUERZO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

NOMBRES: ______________________________ FECHA: ____________________

1. Complete la tabla basándose en el triángulo FGH (siendo $\angle GFH = \alpha$ y $\angle GHF = \beta$) y determine la longitud del lado FG.

ANGULO	NOMBRE DE LA RAZÓN TRIGONOMETRICA	RAZÓN
α	Tangente	
β	Coseno	
β		$\frac{5}{3,32}$
α		$\frac{6}{5}$
α	Seno	
β	Secante	
α		$\frac{6}{3,32}$
β	Cosecante	
β	Seno	$\frac{3,32}{}$
α	Cotangente	
α		$\frac{3,32}{6}$
β	Tangente	$\frac{}{5}$

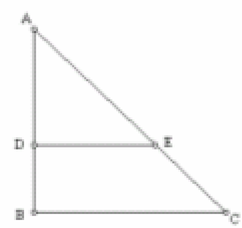


2. Encuentre la medida del segmento AC conociendo que:

$$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

La medida del ángulo EDA es de 90°

$|\overline{AD}|$=2cm, $|\overline{DE}|$=3cm y $|\overline{BC}|$=18cm



3. Diana, una estudiante de la Escuela Normal se encuentra en el Aeropuerto Palonegro de Bucaramanga esperando a sus padres quienes vienen de la ciudad de Medellín después de unas cortas vacaciones. Durante su espera frente a la torre de control (a aproximadamente 200m de la base) observó que un objeto descendía de la parte superior, aunque después de unos minutos pudo reconocer que éste no era un objeto sino un miembro de la Defensa Civil que estaba realizando un simulacro. Sorprendida por lo que acababa de ver se preguntó para sí ¿cuál será la altura desde la que el hombre desciende?, ¡pues la torre es realmente alta!

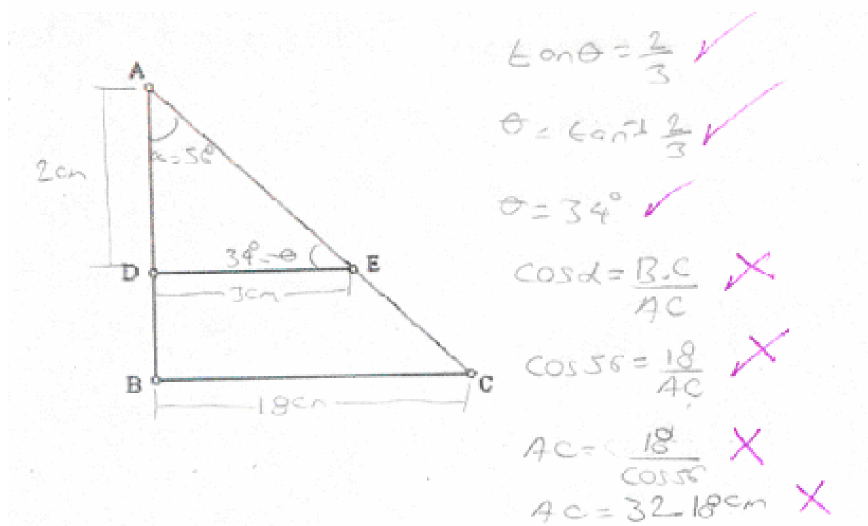
Ayúdale a Diana a contestar la pregunta, suponiendo que comenzó a ver el simulacro con un ángulo de elevación de 30° y sabiendo que su estatura es de aproximadamente 1.80m.

Veamos el trabajo realizado por Sergio en la segunda situación y el proceso seguido por María Alexandra durante el desarrollo de la primera.

- ✓ *Sergio*

Encuentre la medida del segmento AC conociendo que:

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, la medida del ángulo EDA es de 90°, $|\overline{AD}|$=2cm, $|\overline{DE}|$=3cm y $|\overline{BC}|$=18cm



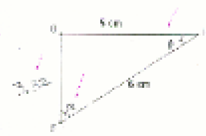
Al observar el trabajo realizado por Sergio podemos ver dos cosas, la primera que aún reconociendo una razón trigonométrica como la relación existente entre las longitudes de dos de los lados de un triángulo rectángulo, presenta dificultad cuando tiene que determinarla para ángulos diferentes. En la solución podemos observar que determina correctamente la $\tan\theta$, estableciéndola como la relación existente entre el cateto opuesto y el cateto adyacente a este ángulo; sin embargo, cuando determina el $\cos\alpha$, vemos que al plantear la relación no tiene en cuenta que los lados que en ésta se relacionan, el cateto adyacente e hipotenusa, pero especialmente el cateto adyacente, no es el mismo que el de la tangente, pues corresponden a ángulos diferentes.

Debido a que lo segundo que pudimos notar era que reconocía a α y a θ como ángulos diferentes y asimismo determinaba su valor correctamente fue que decidimos plantearle algunos ejercicios en los cuales pudiera determinar las razones trigonométricas tomando como referencia diferentes ángulos, similares a los que se hicieron en la primera situación del taller.

- ✓ *María Alexandra*

En la primera situación (ver imagen) podemos observar que María Alexandra reconoce las razones trigonométricas establecidas para el triángulo FGH, mostrándonos que el concepto de razón, como el cociente entre las longitudes de dos de los lados de un triangulo rectángulo es claro aún cuando se le pide que las establezca tomando como referencia dos ángulos diferentes. Siendo este último uno de los inconvenientes que comúnmente se presenta durante la enseñanza de este tema.

ÁNGULO	NOMBRE DE LA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA	RAZÓN	
α	Tangente	$\frac{5}{1}$	X 5/3,32
β	Coseno	$\frac{5}{6}$	✓
β	cotangente	$\frac{5}{3,32}$	✓
α	Cosecante	$\frac{6}{5}$	✓
α	Seno	$\frac{5}{6}$	✓
β	Secante	$\frac{6}{5}$	✓
α	secante	$\frac{6}{3,32}$	✓
β	Cosecante	$\frac{6}{5}$	X 6/3,32
β	Seno	$\frac{3,32}{6}$	✓
α	Cotangente	$\frac{3,32}{5}$	✓
α	coseno	$\frac{3,32}{6}$	✓
β	Tangente	$\frac{6}{5}$	X $\frac{3,32}{5}$



$c^2 + c^2 = h^2$
$5cm^2 + C^2 = 6cm^2$
$C^2 = 6cm^2 - 5cm^2$
$C^2 = 36cm^2 - 25cm^2$
$C^2 = 11cm^2$
$\sqrt{C^2} = \sqrt{11}\,cm$
$C = 3,31\ cm$

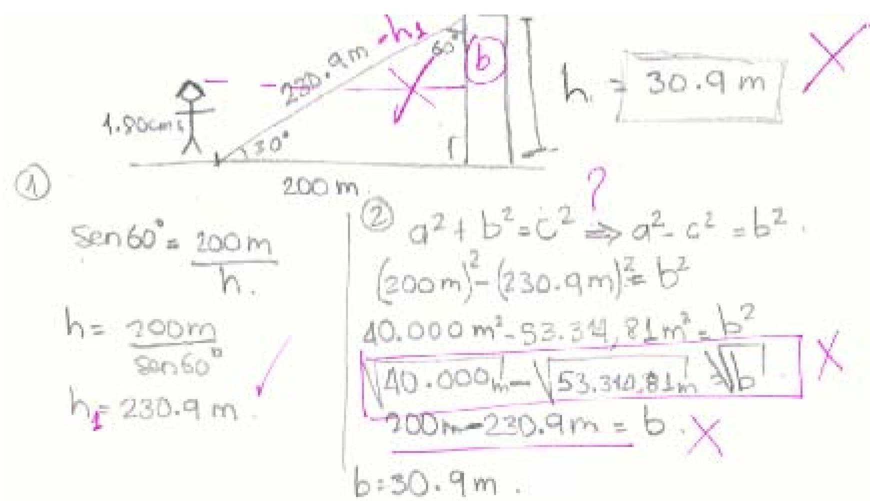
$$c^2 + c^2 = h^2$$
$$5cm^2 + C^2 = 6cm^2$$
$$C^2 = 6cm^2 - 5cm^2$$
$$C^2 = 36cm^2 - 25cm^2$$
$$C^2 = 11cm^2$$
$$\sqrt{C^2} = \sqrt{11}\,cm$$
$$C = 3,31\ cm$$

Al observar el procedimiento seguido para determinar la longitud del lado del triángulo $\overline{FG}$, para cuya solución se hace necesario aplicar uno de teoremas abordados durante las actividades de refuerzo, el Teorema de Pitágoras, vimos que cometió un error que comúnmente se presenta cuando éste se escribe, como es el nombrar a los catetos por la misma letra sin tener en cuenta que se está haciendo referencia a dos lados diferentes del triángulo rectángulo. Sin embargo, vemos que al aplicar el teorema a la situación reconoce a cada c como un cateto diferente al otro, lo que nos muestra que aunque no haya memorizado la “formula” si ha logrado una buena comprensión del mismo, que es lo realmente importante.

Figura 33. Error de María

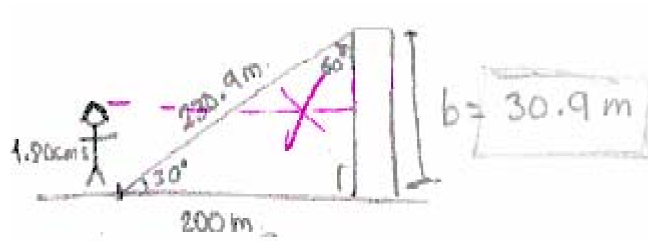
Con el fin de mostrarle a María Alexandra su error le pedimos que observara detenidamente la ecuación escrita como Teorema de Pitágoras y la información dada en la situación, a partir de cuya comparación buscábamos reconociera que esta ecuación es el ejemplo de una caso especial, y no la del teorema en general, siendo ésta válida únicamente para triángulos rectángulos isósceles.

Ahora bien, para observar el avance que María Alexandra logró analizaremos el trabajo realizado en la tercera situación, en la cual se aplican las razones trigonométricas a una situación de la vida cotidiana. Veámosla a continuación.



Como podemos observar en la solución dada por María Alexandra hay muchos aspectos por analizar como:

- ✓ La representación gráfica que realiza de la situación nos muestra que ésta no fue interpretada de manera correcta, pues al no tener en cuenta que el ángulo de elevación con el que Diana observa al hombre es la medida de la inclinación que se produce cuando sube su cabeza para observar la parte superior de la torre, con respecto a la horizontal, determina de manera equivocada la altura de la torre al prescindir en su análisis de la altura de la niña.



- ✓ Sin embargo, vemos que la aplicación de la razón trigonométrica (seno) al igual que el despeje de la incógnita (h) fue realizado correctamente.

$$\operatorname{Sen} 60° = \frac{200\,m}{h}$$
$$h = \frac{200\,m}{\operatorname{Sen} 60°}$$
$$h = 230.9\,m$$

- ✓ Contrario a lo sucedido en la primera situación, vemos aquí que María Alexandra expresa correctamente el Teorema de Pitágoras, mostrando claridad en su aplicación, aunque el nombre dado a la hipotenusa en ésta (c) no corresponde con el nombre asignado anteriormente (h); sin embargo, este es un error común que se presenta cuando se está iniciando el trabajo con cantidades desconocidas, para lo cual le pedimos que revisara nuevamente la representación de la situación y el proceso de solución que sobre ésta había realizado .

② $a^2 + b^2 = c^2 \overset{?}{\Rightarrow} a^2 - c^2 = b^2$

$(200m)^2 - (230.9m)^2 = b^2$

$40.000\,m^2 - 53.314{,}81\,m^2 = b^2$

$\boxed{\sqrt{40.000\,m^2} - \sqrt{53.314{,}81\,m^2} = \sqrt{b^2}}$ X

$200m - 230.9m = b$ X

$b = 30.9m$

Asimismo, pudimos observar varios vacíos en despeje de ecuaciones, operaciones entre números enteros y propiedades de los radicales, los cuales fueron abordados por nosotros de forma personal al finalizar el taller. Para ello planteamos algunos ejercicios, con cantidades más pequeñas, con el fin de que a partir de éstas pudieran aclarar sus dudas.

Aunque a partir de los talleres no pudimos llenar todos los vacíos cognitivos que María Alexandra presentaba, si bien pudimos notar que los avances en cuanto a sus procesos de aprendizaje mejoraron de manera significativa durante el desarrollo de las actividades.

- ✓ *Taller creativo como actividad de refuerzo de "Los teoremas del seno y del coseno".*

Este segundo taller creativo realizado como actividad de refuerzo fue aplicado el día 10 de marzo de 2007. En éste se plantearon tres situaciones.

Figura 34. Taller creativo como actividad

La primera actividad tenía como objetivo que el educando aprendiera a reconocer los casos en los cuales los teoremas podían ser aplicados, mientras que con las siguientes se buscaba que a partir de su aplicación, el educando observara la importancia de éstos en la resolución de situaciones de su contexto.

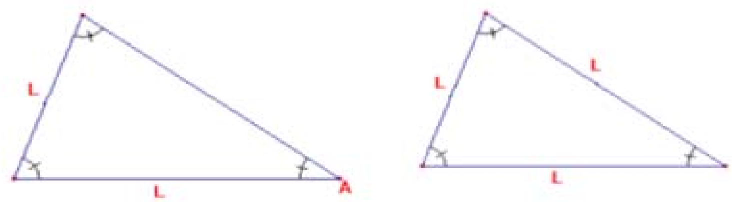
A continuación se presenta el taller creativo diseñado como actividad de refuerzo para los teoremas del seno y del coseno (para mayor claridad ver anexo ocho).

Figura 35. Taller de los teoremas seno y coseno

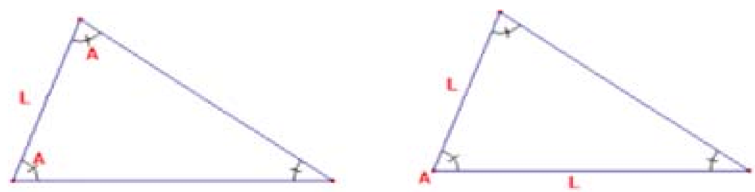
TALLER CREATIVO COMO ACTIVIDAD DE REFUERZO DE LOS TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO

NOMBRES: ______________________________ FECHA: ________________

1. Observe los datos dados en cada triangulo (***L**: longitud del lado,* ***A**: medida del ángulo*) ¿Qué teorema se puede aplicar en cada uno de ellos para determinar las medidas que hacen falta?



______________________ ______________________



______________________ ______________________

2. Durante una caminata por el bosque unas estudiantes del grado décimo de la Escuela Normal Superior Bucaramanga observaron que frente a la portería había un árbol de mango que estaba bastante inclinado. Ellas se asustaron al ver que este se podía caer sobre la rotonda (salón de música), e inmediatamente corrieron hacia la portería para avisarle al celador, quién al escucharlos les dijo:

- Yo ya me había dado cuenta y estoy pensando en amarrar un lazo desde aquí (un gancho clavado en el piso) hasta la parte superior del tronco del árbol para que no se caiga; pero, aun no he podido decirle nada a la rectora, pues no sé cuantos metros de lazo voy a necesitar.

Luego les preguntó:

- ¿Ustedes me podrían ayudar a calcular cuántos metros de lazo se deben comprar para amarrar el árbol? Ellas dijeron que con mucho gusto. Sin embargo, debían primero tomar algunas medidas.

Al escucharlas él les dijo:

- Yo tome algunas medidas antes que ustedes llegarán.
  La altura del tronco es de aproximadamente 3,5 m.
  Y su inclinación con respecto a la horizontal es de aproximadamente 100° (en el sentido de las manecillas del reloj); además, su distancia a la portería es de aproximadamente es de 600cm.

Ayude a los estudiantes a determinar la cantidad de lazo que se necesita para sostener el árbol.

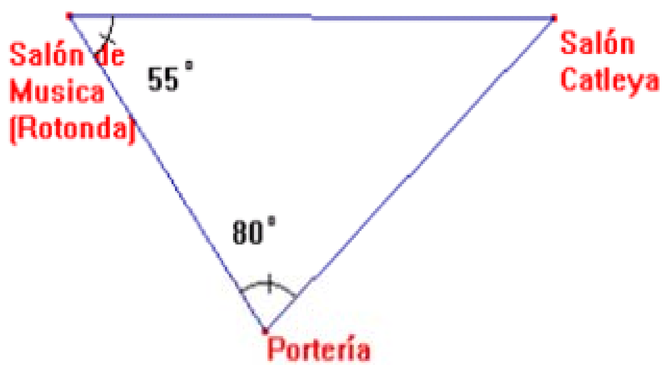
- ¿Qué necesita calcular?, ¿cómo lo puede calcular?
- Determine el ángulo al cual queda inclinado el lazo al ser amarrado al tronco del árbol.

3. En la clase de Educación Física el profesor le pide a tres estudiantes que se ubiquen en tres sitios diferentes del colegio para apostar una carrera.

Los estudiantes se ubicaron de la siguiente manera:

- Carolina: en el salón Catleya,
- Juan: en la portería de la 27 y
- Diana: en el salón de música.

Igualmente les pide a otros tres (estudiantes) que se ubiquen en esos mismos lugares con el fin de enmarcar la pista por la cual se hará la competencia para que ninguno haga trampa. El profesor les da unos lazos de 18 m para que la encierren y un mapa en el cual se muestran los ángulos de las curvas del recorrido (estos fueron calculados por él basándose en los planos del colegio).



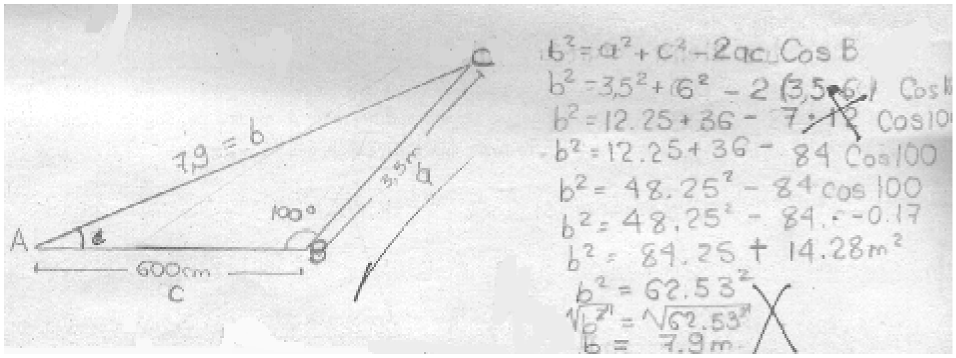
El lazo que se usa del salón de música a la portería no tiene que ser cortado ni añadido, mientras que los otros dos sí. Los estudiantes que participan en la competencia tienen que salir del lugar seleccionado y pasar por los otros dos hasta llegar nuevamente a su punto de partida siguiendo el movimiento de las manecillas del reloj.

- ¿Cuál es la medida del ángulo que se forma con los lazos en el Salón Catleya?
- ¿Cuál es la distancia que hay del salón de música al Catleya? ¿Cuánto lazo se tuvo que añadir o quitar?
- ¿Cuál es la distancia que hay del salón Catleya a la portería? ¿Cuánto lazo se tuvo que añadir o quitar?
- ¿Cuántos metros recorren en total los estudiantes?
- ¿Quién cree que tiene mayor posibilidad de ganar? ¿Por qué?

Veamos el trabajo realizado por Luz Elena y Diana Rocío.

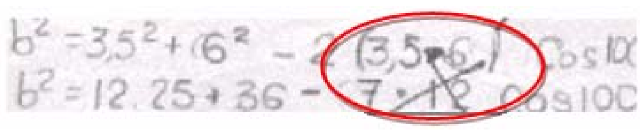
- ✓ *Luz Elena (segunda situación)*

Figura 35. Solución de luz Elena



Como podemos ver, Luz Elena realiza una buena representación de la situación, así como una correcta selección y aplicación del teorema; sin embargo, a la hora de realizar las operaciones observamos un error, que aunque “para ella parece insignificante”, notamos la indujo a una respuesta equivocada.

Esta clase de error



se ve con frecuencia en la mayoría de los estudiantes; sin embargo, más que mostrarnos la poca aprehensión que han hecho de éste, nos permite ver cuan errónea ha sido la forma como se ha estado enseñando, pues es obvio que más que un dato para memorizar, las propiedades de los números reales exigen ser presentadas con la importancia que se merecen, pues sobre ellas es que se construye todo una teoría.

La presentación de situaciones como ésta son la que nos permiten constatar, una vez más, como el reconocimiento de los presaberes es una actividad que debido a sus aportes al proceso de aprendizaje se debe realizar al iniciar la enseñando de cualquier tema.

Con el fin de mostrarle a Luz Elena el error realizado en la operación, multiplicación entre números reales, le pedimos que leyera la ecuación y que con sus palabras tratara de describirla, pues al observar la clase del profesor habíamos notado que esta estrategia, la de describir expresiones, es bastante significativa para aquellos educandos que como ella presentan dificultad en la construcción de expresiones matemáticas. La descripción que Luz Elena realizó de la ecuación, *"…el cuadrado de 6, menos el doble del producto entre 3,5 y 6…"*

Al escuchar la descripción pudimos reconocer que para Luz Elena la operación era clara, aunque en el taller hubiésemos notado lo contrario; sin embargo, en ese momento no le dijimos si estaba bien o mal sino que en lugar de ello decidimos plantearle algunas preguntas con el fin de que llegara por sí misma a la solución correcta al analizar sus cuestionamientos. Veamos las preguntas y las respectivas respuestas dadas por Luz Elena.

- *Luz Elena (L):* "El doble del producto entre 3,5 y 6".
- *Mandius (M):* ¿Y eso fue lo que hiciste, doblaste el producto?
- *(L):* ¡…no! Yo multipliqué por 2 a cada uno de los números, y los nuevos resultados lo volví a multiplicar.
- *(M)*: Entonces, ¿cómo estuvo tu respuesta?
- *(L):* ¡Mal!
- (M*):* ¿por qué?

- *(L):* Porque yo no hallé el doble del producto, lo que hice fue hallar el producto entre los dobles de cada uno de los números que estaban en el paréntesis.

- *(M):* Y entonces, ¿cómo se escribiría ésta?

-*(L):* Así, $2 \times (3{,}5 \times 6)$

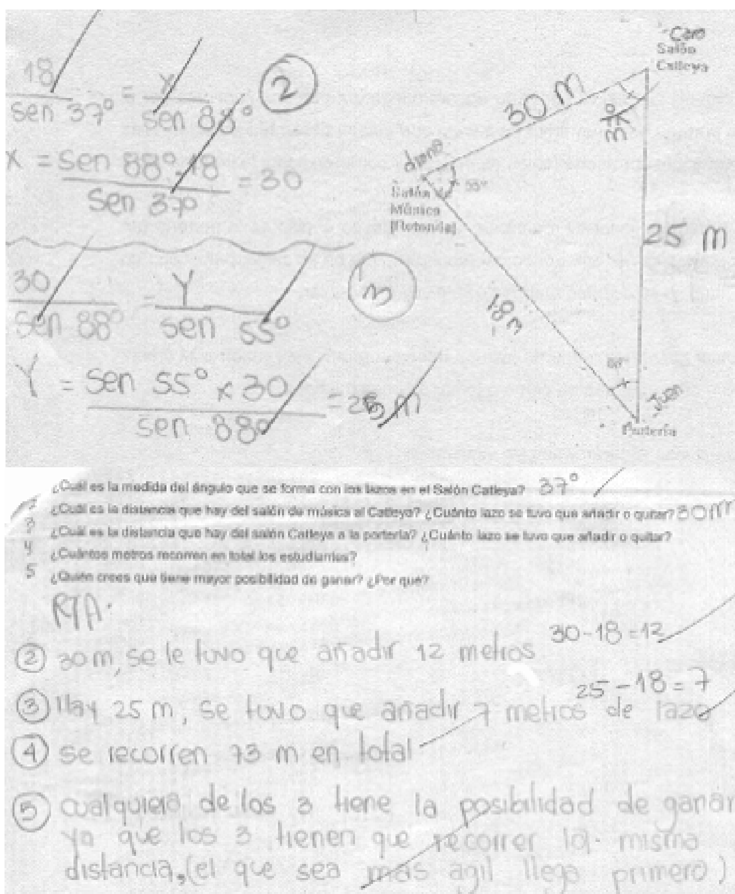
-*(M)*: Explícame qué escribiste

-*(L):* El doble (porque lo multipliqué por dos) del producto entre 3,5 y 6

Como podemos ver al final Luz Elena logró, a partir del análisis de la situación reconocer el error que había cometido al realizar la operación.

✓ *Diana Rocío (tercera situación).*

Figura 37. Destrezas de Diana Rocío



La solución que Diana hizo fue excelente en comparación a las realizadas en otros talleres. El análisis e interpretación que hizo de la situación nos deja percibir la apropiación que logró del tema. Pues vemos que no solo hace una buena aplicación de los conceptos reforzados, sino que además interpreta de una manera correcta los resultados que a partir de ellos obtiene. Sin embargo, el aspecto más importante que podemos observar al leer las respuestas dadas a cada una de las preguntas es el mejoramiento de sus procesos reflexivos e interpretativos.

La actividad diagnóstica final

Como actividad diagnóstica final elaboramos un último taller creativo, que fue aplicado el día 17 de marzo de 2007 en una sesión de aproximadamente una hora. El desarrollo del taller se hizo individualmente debido a que nuestro objetivo era reconocer qué tan claros habían quedado para los chicos los conceptos reforzados, para ello diseñamos dos situaciones en las que aplicamos los temas abordados en estos, las aplicaciones de las funciones trigonométricas.

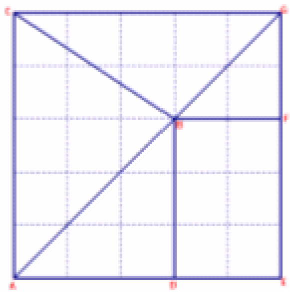
A continuación veremos el taller diseñado para esta actividad (para mayor claridad ver anexo nueve).

Figura 38. Actividad diagnóstica final

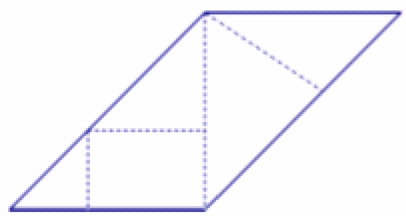
TALLER CREATIVO COMO ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA FINAL

NOMBRE: ______________________________________ FECHA: ___________________

1. La profesora de artes de la Escuela Normal Superior de Bucaramanga les da a los estudiantes de décimo una hoja cuadrada de 10x10cm, y les pide realizar el siguiente diseño:



Estas cinco piezas serán usadas para formar la siguiente figura (ubique cada una de las piezas en la figura anterior):



(Antes de comenzar les pide que ubiquen los ejes x e y, tomando como centro el vértice A; es decir, con coordenadas (0,0)).

Luego les hace las siguientes preguntas (ayuda a contestarlas):

a. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de cada uno de los vértices (A, B,...G)?
b. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los lados del triángulo ABC?
d. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos del triángulo CBG?

2. Durante la final del campeonato de interclases de baloncesto que se jugó en la ENS se "enfrentaron a muerte" los grados 10-2 y 11-1. En el cuarto tiempo los equipos se encontraban empatados, pero quedando cinco segundos para finalizar el partido uno de los jugadores de 11-1 cometió una falta sobre Carlos que le otorgó un tiro libre a su equipo (10-2), lanzamiento con el cual su equipo obtuvo la victoria.

El momento en el cual Carlos lanzó el balón fue tomado por el profesor de matemáticas como base para el planteamiento de una situación problema que dejó como ejercicio de tarea. La situación que les planteó fue la siguiente:

> Suponiendo que los ojos de Carlos estaban a 1,72 m del piso, y sabiendo que la línea de tiro libre está a 4,57 m del centro del borde de la canasta. Determine el ángulo de elevación de sus ojos al centro del borde (Recuerde que el borde está a 3m del suelo).

Ayúdales a los estudiantes de décimo a resolver la situación.

Veamos el trabajo realizado por Luz Elena en el ítem c, de la primera situación y por Sergio en la segunda situación.

- ✓ *Luz Elena*

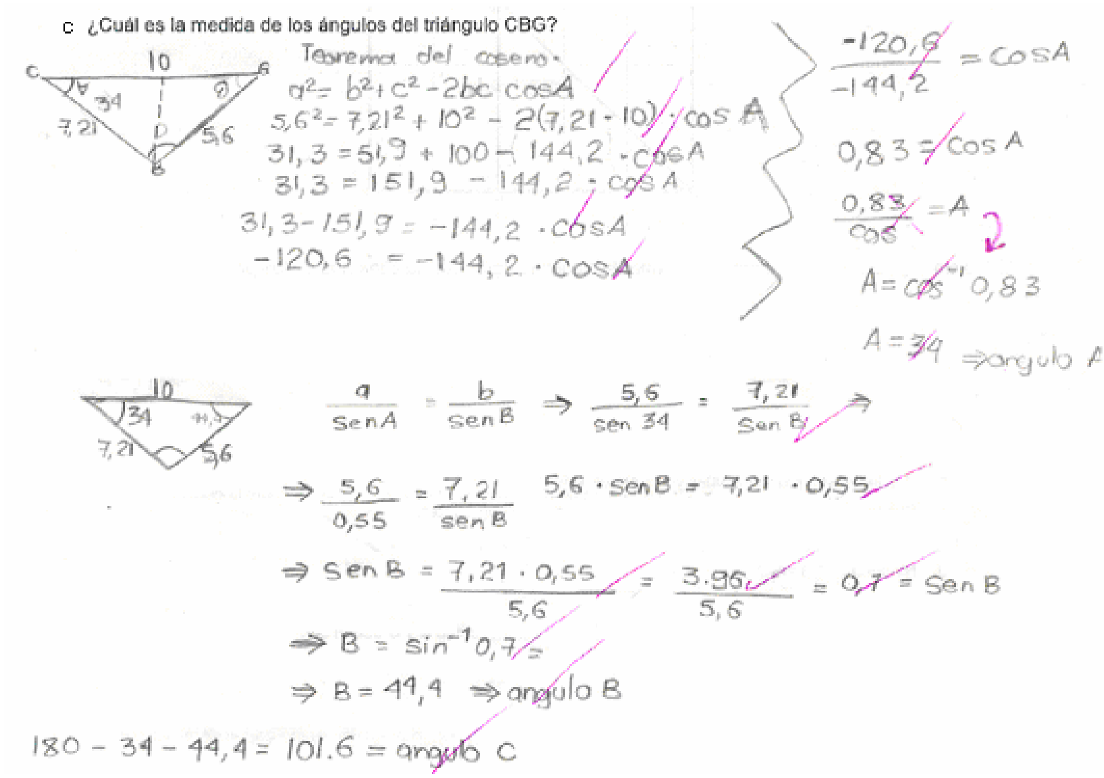
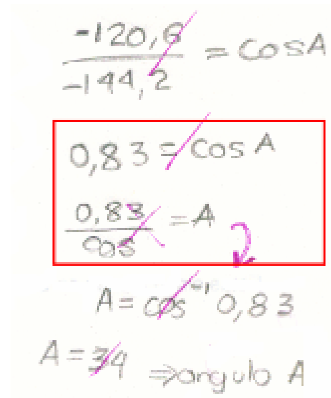


Figura 39. Ideas de Luz Elena

Al observar la solución dada por Luz Elena a la situación podemos ver que tiene claridad en la mayoría de los temas que para tal efecto se aplican, como son la resolución de ecuaciones, los teoremas del seno y del coseno, y el teorema relativo a la suma de los ángulos internos de un triángulo.

Sin embargo, al observar el proceso seguido para determinar la medida del ángulo A, vemos que despeja éste pasando al $\cos(¿?)$ a dividir al otro lado de la igualdad sin percatarse del error que estaba cometiendo, y luego "mágicamente" lo invierte para hallar el $\cos^{-1}(0{,}83)$.



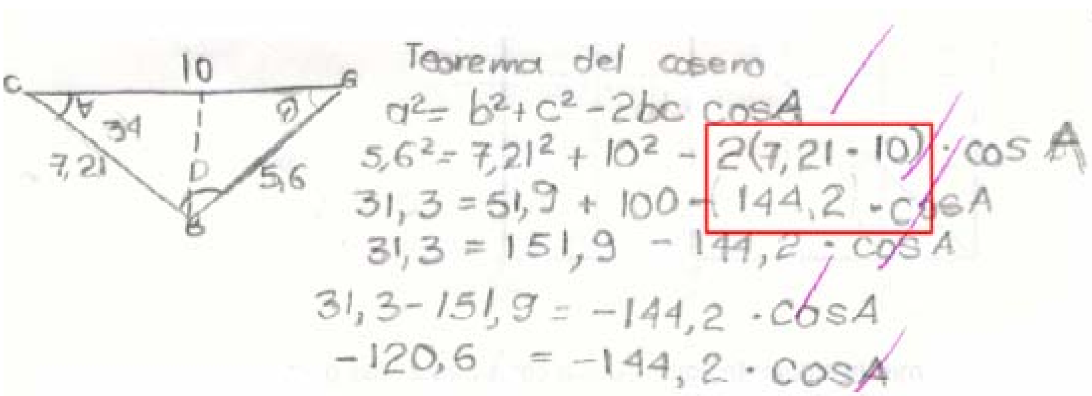
Al hablar con ella sobre el porque de la operación que realizó, nos dijo:

> Yo lo pasé a dividir porque es que se me olvidó cómo se hace…, y como siempre que uno quiere pasar algo que está multiplicando al otro lado de la ecuación, lo que hace es pasarlo a dividir, pues pensé que también se podía hacer con el coseno…

Este comentario nos hizo reflexionar, una vez más sobre las consecuencias que el aprendizaje memorístico ocasiona en el desarrollo de los procesos cognitivos de los educandos. En el caso de Luz Elena podemos ver cómo el haber memorizado los "trucos" para despejar variables (como el pasar al otra lado a dividir si está multiplicando), sin tener en cuenta lo que esto conlleva, (que no es el pasar a dividir sino el aplicarle el inverso multiplicativo a ambos lados de la igualdad para que ésta se mantenga) hizo que originara concepciones erróneas en su pensamiento.

Para tratar de cambiar la concepción que Luz Elena tenía, tuvimos que explicarle primero que todo, que el *coseno* no es un número que multiplica a A, sino que ella es una función que depende de A, y además, que si "la función ($\cos A$) la pasáramos al otro lado a dividir", lo que estaríamos haciendo es multiplicar por la $\sec A\left(=\dfrac{1}{\cos A}\right)$ al valor que está al otro lado de la igualdad. Este último comentario fue el que mayor significado tuvo para ella, pues al reconocer que la función $\cos^{-1} A$ no es lo mismo que $\dfrac{1}{\cos A}$ pudo entender el porque de su error.

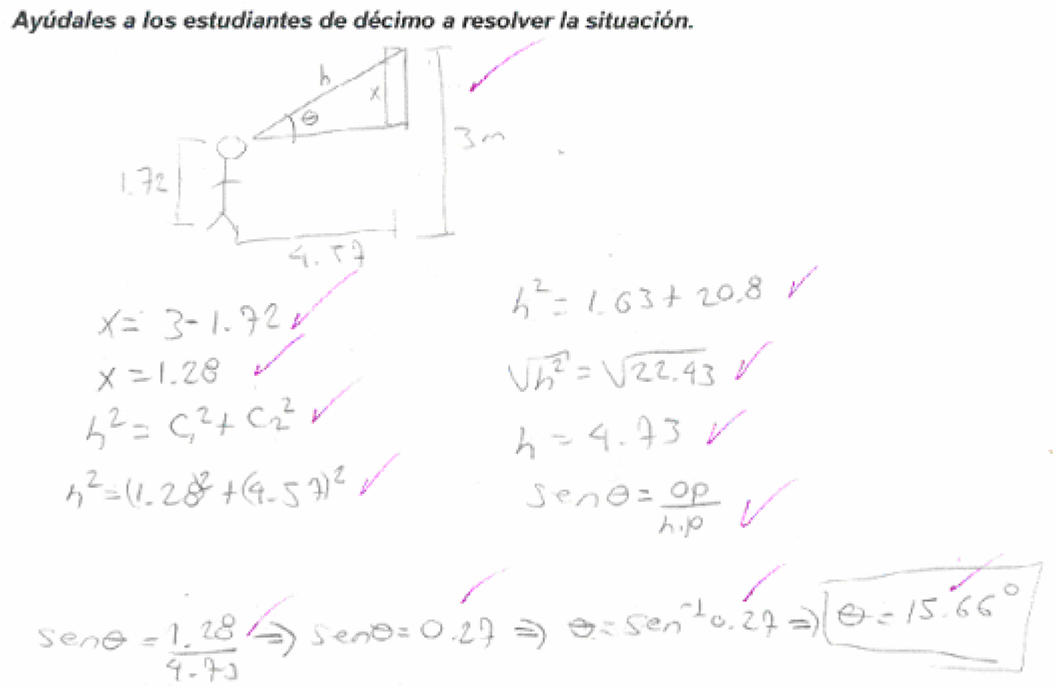
En esta primera parte analizamos el proceso seguido por Luz Elena para determinar la medida del ángulo A. Sin embargo, para hallar la medida de B realizó este otro proceso, veámoslo a continuación.



Como podemos observar Luz Elena aplica igualmente de forma correcta el teorema del coseno, aunque para nosotros lo más importante al ver este proceso es el avance que muestra en cuanto a la multiplicación de números reales, que había sido una dificultad presentada durante el desarrollo del taller creativo realizado como actividad de refuerzo para los teoremas del seno y del coseno.

- ✓ *Sergio (segunda situación).*

Figura 40. Ideas de Sergio



Al igual que Luz Elena en el trabajo realizado por Sergio podemos observar un avance importante, pues en éste vemos como aplica de forma correcta varios de los temas que se trabajaron durante las actividades, como son el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas mostrándonos con ello la ventaja que su implementación trae a los procesos de aprendizaje.

Aunque el observar la solución no permite ver los procesos que se llevaron a cabo para llegar a el, vimos como Sergio durante su desarrollo, que no fue del todo fácil, enfrentó nuestros cuestionamientos reflexionando acerca de la situación y pudo concluir de la manera correcta, incluso cuando al principio descartó algunos datos, como la altura del chico.

Debido a que las actividades de refuerzo realizadas durante el año anterior fueron reconocidas por el maestro como actividades complementarias, tuvimos la oportunidad de emitir juicios del trabajo realizado por cada uno de los educandos participantes. Sin embargo, los resultados obtenidos en los talleres de aplicación no fue el único criterio que tuvimos en cuenta a la hora de evaluarlos, su participación, trabajo durante las actividades, actitud e interés frente a las mismas hicieron parte de estos, pues "aunque la evaluación debe incluir la adquisición de informaciones, importa más el ejercicio de competencias o formas de actuación que puedan ser nombradas como características del pensamiento matemático en general, y lógico en particular, además de las actitudes de los estudiantes. Con este punto de vista interesa observar los cambios de los alumnos desde sus estados iniciales de conocimiento y actuación (evaluación diagnóstica), pasando por el análisis de los comportamientos y logros durante los procesos de enseñanza-aprendizaje (evaluación formativa) hasta llegar a algún estado final transitorio (evaluación sumativa). En todos los casos la evaluación deberá ser secuencial" (Lineamientos Curriculares, 1998, p.84).

CLAVES PARA LA CONSTRUCCIÓN DE ACTIVIDADES DE REFUERZO SIGNIFICATIVAS…

Durante los procesos de diseño y aplicación de las actividades de refuerzo tuvimos la oportunidad de reconocer varios elementos que se convierten en piezas claves e indispensables dentro del proceso de construcción de la investigación. Las claves a las que nos referimos emergieron tanto de las observaciones de la experiencia vivida como de las reflexiones del proceso, ellas son:

✓ *Las actividades diagnósticas para identificar las dificultades y características del grupo.*

> En nuestras clases los profesores necesitamos escuchar lo que los estudiantes comprenden, lo que ellos saben, lo que ellos piensan sobre las matemáticas y sobre su aprendizaje, escuchar las preguntas que hacen y las que no hacen…, para conocer cómo van sus procesos de razonamiento, de resolución de problemas…, para orientar el uso del lenguaje matemático y ayudarlos a desarrollar su habilidad para comunicar matemáticas. (Lineamientos Curriculares, 1998, p.75)

Al hablar sobre actividades diagnósticas no nos referimos únicamente a las pruebas escritas que algunos maestros realizan a sus educandos con el fin de evaluar los presaberes necesarios para la enseñanza de un nuevo concepto, también estamos haciendo referencia a aquellas actividades que como la observación y el diálogo nos permiten reconocer otros elementos que de igual manera intervienen en su proceso de aprendizaje y son características específicas de cada uno de ellos.

Para emprender el proceso de diseño de las actividades de refuerzo planteamos a los educandos una pregunta abierta, el día 31 de agosto de 2006, con la que buscábamos que fueran ellos mismos quienes reconocieran los conceptos en los que presentaban mayor dificultad. Al analizar las respuestas dadas por los chicos pudimos notar que el realizar la pregunta en forma directa no nos permite obtener la información verdadera, razón por la cual vimos la necesidad de crear otras actividades diagnósticas como complemento de esta prueba escrita.

Veamos algunas de las respuestas dadas por los educandos.


• ¿En qué tema crees necesitar refuerzo? Creo que necesito refuerzo en la mayoria de los temas vistas.

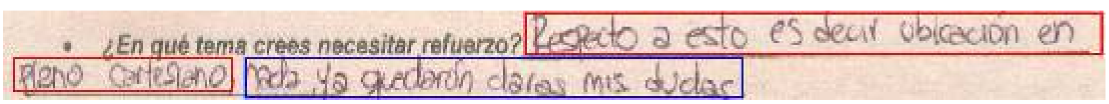
Luz Elena

La respuesta dada por Luz Elena nos muestra cómo el simple resultado de una prueba hace que el educando emita juicios sobre la calidad de su aprendizaje, omitiendo la significatividad de los procesos que desarrolló para llegar a él. Al hablar con ella nos expresaba que se sentía inconforme con los resultados obtenidos en las evaluaciones, pues la mayoría de ellas las había aprobado en Aceptable[9], siendo éste el motivo principal por el cual veía la necesidad de participar en las actividades de refuerzo. Sin embargo, durante el desarrollo de las actividades notamos que posee habilidad para la matemática, y que por tanto, los vacíos cognitivos que cree tener no son más que el reflejo de la inseguridad que le producen los resultados de las evaluaciones.

[9] Aceptable (A) es uno de los juicios valorativos expuestos en el decreto 0230 (MEN, 2002)

La inseguridad que percibimos en Luz Elena y en algunos otros educandos evidencian la incongruencia que hay entre la forma como se enseña y aquella como se evalúa, lo que nos muestra que "no podemos seguir evaluando a nuestros alumnos basándonos exclusivamente en la puntuación de sus exámenes" (González, Martín & Ortega, 1997, p.55). "Evaluar es hacer una valoración global del proceso de aprendizaje del alumno y para ello es necesario utilizar diversos instrumentos; el examen puede ser uno de ellos, ha sido el único durante mucho tiempo y por ello goza de un prestigio casi indiscutible entre profesores, alumnos y sociedad en general… Sin embargo, es necesario hacerlo más cotidiano en el aula, más corto, menos solemne para provocar menos temor en los alumnos, bajarlo de su pedestal y utilizarlo sobre todo como un recurso para que el alumno ponga de manifiesto sus errores y carencias, y entonces puede rectificar y mejorar". (Mollà, 1997, p. 81)

Caso contrario a lo que sucedió con Luz Elena, es el de María Alexandra, a quien al realizarle la misma pregunta contestó:


- ¿En qué tema crees necesitar refuerzo? Respecto a esto es decir ubicación en plano cartesiano nada ya quedarón claras mis dudas

María Alexandra

Como podemos observar la respuesta dada por María Alexandra no es clara, pues primero expresa tener dificultad en el tema y luego, sin ningún motivo, dice haber aclarado sus dudas. Sin embargo, durante el desarrollo de las actividades de refuerzo pudimos observar que debido a que posee grandes vacíos cognitivos en el área de matemáticas su rendimiento se ha visto afectado enormemente durante los últimos años, razón que ella misma comentó en una de las conversaciones que tuvimos tiempo después de la prueba.

La situación presentada con María Alexandra fue una de las tantas que nos impulsaron a realizar otras actividades para poder reconocer las necesidades de los educandos con quienes emprenderíamos nuestra experiencia.

Debido a ello la actividad diagnóstica que realizamos al principio…

Figura 41. Prueba escrita

Prueba escrita[10]

…fue complementada con otras dos actividades,

Figura 42. Observación.

la observación y…

[10] La prueba escrita a la que nos referimos es la actividad diagnóstica inicial presentada en el capítulo *La Experiencia*.

Figura 43. Diálogo.

…el diálogo.

Las características que identificamos a partir de las actividades diagnósticas son la base sobre la cual construimos las actividades de refuerzo; es decir, los fundamentos del proceso seguido para la elaboración de los talleres creativos, los elementos que utilizamos para su desarrollo… y hasta la misma forma en que dirigimos nuestra atención hacia el grupo, que son algunos aspectos que hemos venido desarrollando durante el trabajo. Asimismo nos permitió constatar que los procesos de aprendizaje difieren de acuerdo a las características del educando, y que el tenerlas en cuenta durante el diseño de cualquier actividad se convierte en un factor importante dentro de sus procesos de enseñanza y aprendizaje.

Figura 44. Desarrollo cognitivo

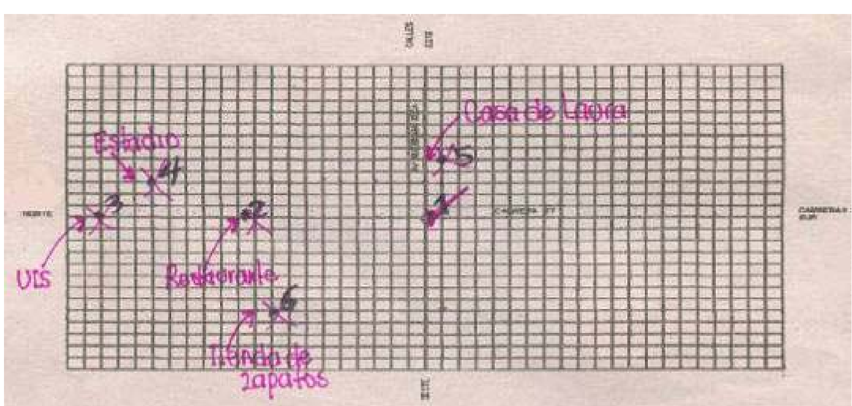
Al igual que Gutiérrez (2003) creemos que aunque "las diferencias individuales, sociales y contextuales generen avances más lentos o más rápidos en los educandos, siempre será posible mejorar su desarrollo cognitivo si se interviene en forma adecuada".

Ejemplo de ello es el caso de Sergio, a quien tuvimos que prestarle mucha atención durante el desarrollo de las actividades, diseñando estrategias que nos permitieran contrarrestar los inconvenientes que su falta de concentración -la cual fue reconocida a partir de las actividades diagnósticas- producían en su aprendizaje, como fueron el realizarle preguntas periódicamente acerca del trabajo que está llevando a cabo y el permitirle mostrar los resultados del mismo a sus demás compañeros. Creemos que de no haber intervenido de esta manera tal vez Sergio se habría convertido para nosotros en un "estudiante problema" en lugar de un "estudiante con gran potencial".

A continuación mostraremos algunas de las situaciones desarrollados por Sergio durante las actividades de refuerzo; en ellas podremos reconocer el avance al cual nos referíamos anteriormente.

Al realizar la actividad diagnóstica inicial notamos que Sergio no ubicó correctamente los lugares que se mencionan en la situación (ver imagen); sin embargo, a partir de ella no podemos deducir si presenta o no dificultad para ubicar puntos en el plano, pues vemos que fue el localizar en forma incorrecta el Restaurante, que es el segundo lugar que visita Laura y su novio Miguel, lo que produjo que todos los otros lugares fueran situados una cuadra antes, ocasionando igualmente una ubicación incorrecta.

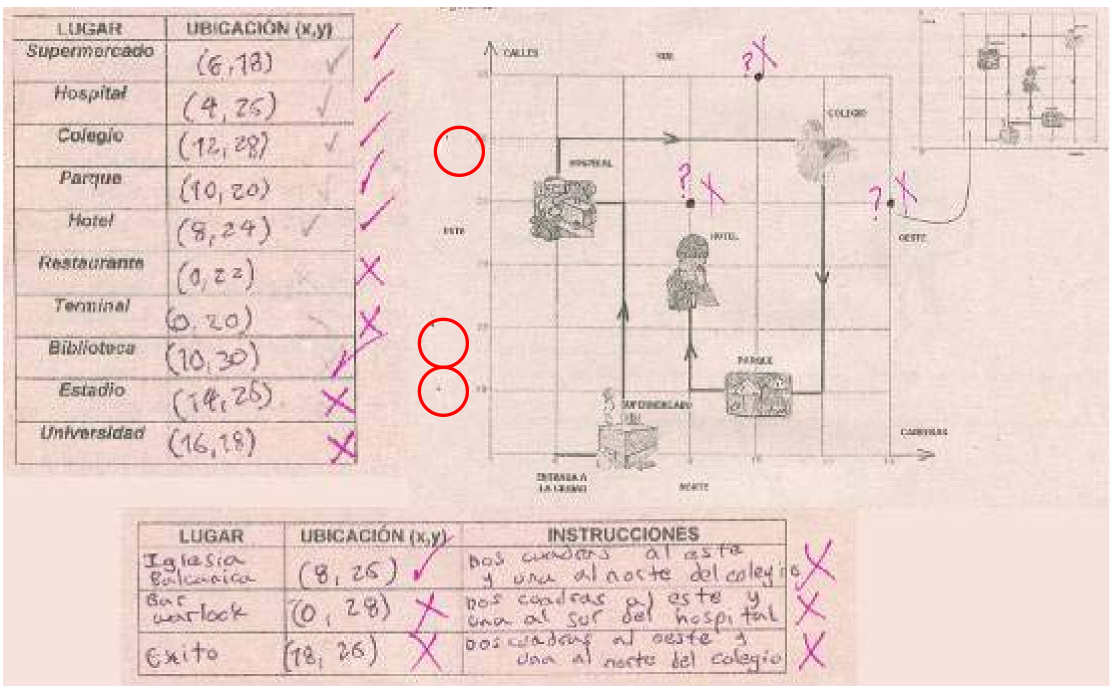
Figura 45. Ubicación de Sergio



No obstante, al observar el trabajo que Sergio realizó en la primera actividad de refuerzo, notamos que sí presenta dificultad para ubicar puntos en el plano; sin embargo, la razón de ello fue algo que tanto nosotros como él solo pudimos advertir al socializar los resultados del taller.

Veamos en que consistió la dificultad presentada por Sergio.

Figura 46. Dificultad de Sergio.



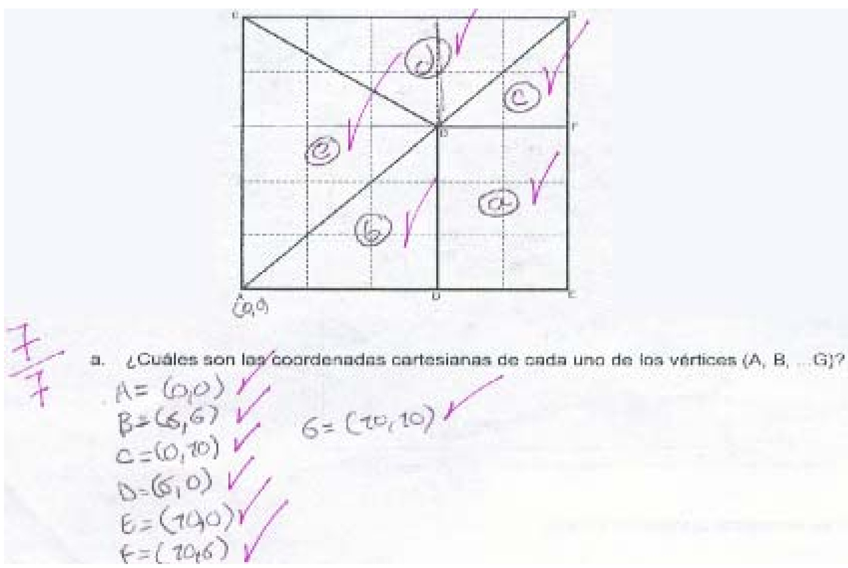
LUGAR	UBICACIÓN (x,y)
Supermercado	(6,18)
Hospital	(4,26)
Colegio	(12,28)
Parque	(10,20)
Hotel	(8,24)
Restaurante	(0,22)
Terminal	(0,20)
Biblioteca	(10,30)
Estadio	(14,26)
Universidad	(16,18)

LUGAR	UBICACIÓN (x,y)	INSTRUCCIONES
Iglesia Balcanica	(8, 26)	Dos cuadras al este y una al norte del colegio
Bar warlock	(0, 28)	Dos cuadras al este y una al sur del hospital
Exito	(18, 26)	Dos cuadras al oeste y una al norte del colegio

A primera vista el trabajo realizado por Sergio nos parece Aceptable, pues aunque no ubicó correctamente la totalidad de los lugares, vemos que para él es claro el que un punto se asocie con un par ordenado; sin embargo, al analizar detalladamente los errores cometidos, en especial los de las instrucciones y los señalados con rojo, notamos que esto se debió a que no tuvo en cuenta algunas características del mapa de la ciudad, como la escala en la que fue diseñado (2:1) y el espacio que ocupa en el plano mayor $E = \{(x, y) \in R^2 / 2 \leq x \leq 4 \wedge 18 \leq y \leq 30\}$. Aunque el pasar por alto características como éstas es común cuando se lee una gráfica, vemos que es algo que ocurre más por descuido que por propia ignorancia, siendo la primera la razón manifestada por Sergio durante la socialización de su trabajo.

En la última actividad podemos ver cómo Sergio, después de haber reconocido las dificultades que se dan a causa de su falta de concentración, muestra avances significativos en su proceso de aprendizaje, mostrando una actitud de mayor disposición en comparación a la reflejada en las actividades anteriores. A continuación, veremos la prueba del avance logrado por Sergio:

Figura 47. Avance de Sergio



En general lo que creemos es que cuando nosotros como maestros nos ponemos en la tarea de observar los aspectos que caracterizan a cada uno de nuestros educandos, en cuanto a sus cualidades cognitivas, afectivas, entre otras, logrando establecer diálogos directos e indirectos con ellos tenemos la posibilidad de reconocer algunos de los elementos que perturban su ambiente de aprendizaje, que son difíciles de reconocer a través de las pruebas escritas, y que en algunas ocasiones son los responsables de las dificultades que se presentan durante la enseñanza; entre ellas, la falta de interés por la materia y por ende al aprendizaje en general. Sin embargo, no queremos decir que las pruebas escritas se deben dejar de realizar, sino que en lugar de ello "se deben convertir en un instrumento de evaluación con el que aparte de verificar los contenidos meramente conceptuales que han sido asimilados por nuestros alumnos, permitan determinar, entre otras cosas, las dificultades de enseñanza y aprendizaje para así posteriormente ejercer una acción integradora" (González, Martín & Ortega 1997, p.55).

La mayoría de las dificultades que identificamos giran precisamente alrededor de uno de esos elementos: la falta de interés que los educandos presentan frente al estudio de la matemática, pues la consideran como una asignatura aburrida, difícil e incomprensible; sin embargo, en el transcurso de la experiencia notamos que la razón de ello se debe a la forma como el maestro tradicionalmente ha presentado los conceptos y no a "…que estemos enseñado a los jóvenes las cosas más aburridas…" como dice De Guzmán (2002).

Durante nuestra experiencia también pudimos observar que aunque el profesor trataba de innovar su práctica diseñando actividades apoyadas en el uso de diferentes herramientas (tecnológicas, de laboratorio, etc.) no lograba causar en sus educandos el interés que esperaba, debido a que las situaciones no presentaban mayor interés para ellos. Un ejemplo de las herramientas tecnológicas utilizadas por el maestro en el aula de clase son las calculadoras, a partir de las cuales diseñaba situaciones de la vida cotidiana con cuya experimentación buscaba motivar a los educandos mostrándoles la aplicación que tienen en éstas los conceptos matemáticos. Sin embargo, vimos que la razón principal por la cual se produce el desinterés por aprender en los educandos, es que las situaciones planteadas no responden a las inquietudes que tienen en el momento de su aplicación, pues aunque para el maestro los conceptos que emplea en las situaciones tienen una gran importancia en la vida del hombre, para ellos el desconocimiento de los mismos no afecta en nada su desarrollo cognitivo; ejemplo de ello es el de comprobar[11] que 100ºC es la temperatura a la cual hierve el agua.

A partir de esta actividad el profesor buscaba que los educandos analizaran la variación de la temperatura a través del tiempo, y que luego la plasmaran haciendo el bosquejo de una gráfica en la cual se pudiera vislumbrar este comportamiento. Sin embargo, la participación de los educandos durante su desarrollo fue poca; la razón de ello, el resultado de varios aspectos como fueron (*a.*) la carencia de material (fogones, termómetros, vasos de precipitado, etc.) y (*b.*) el presentarla a manera de consulta, en lugar de crear una experiencia de laboratorio en la que pudieran determinarla a partir de la experimentación, siendo este último proceso, el de construir a partir de la experiencia realmente importante en el aprendizaje de las matemáticas, pues le permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de ésta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa" (Lineamientos Curriculares, 1998, p.80).

Igualmente, en algunas de las conversaciones que tuvimos con los educandos manifestaron que al principio, en el grado octavo, cuando empezaron a trabajar con las calculadoras las clases eran bastante entretenidas; no obstante, cuando se convirtió en la herramienta implementada en la mayoría de las clases su uso les empezó a aburrir, debido a que no eran combinadas con otras actividades o herramientas.

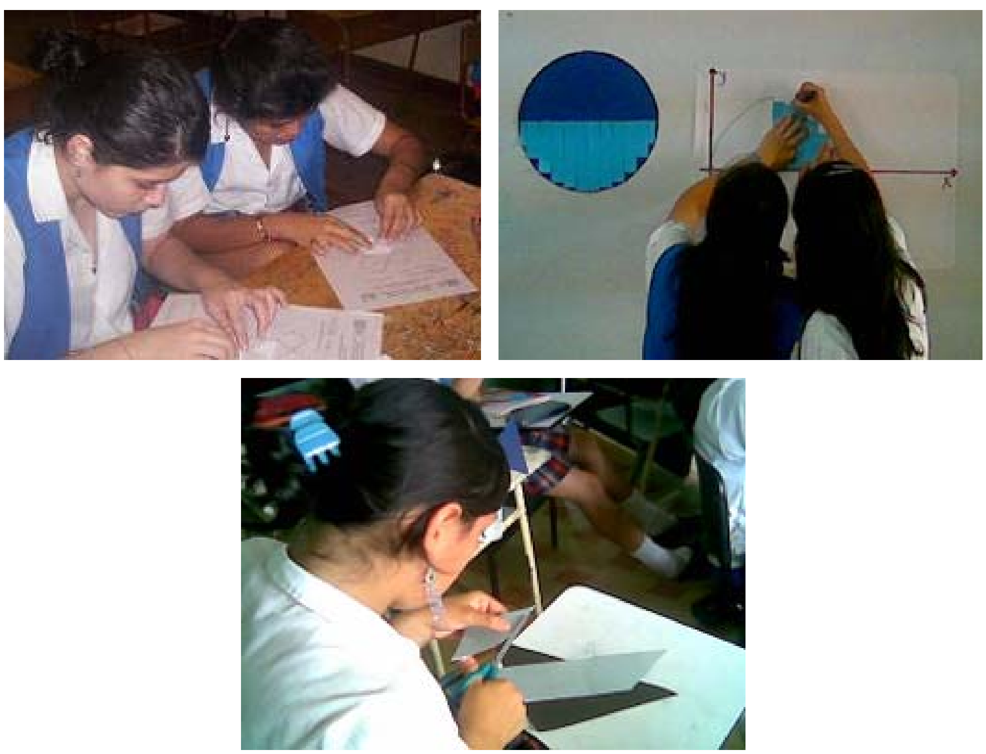
> "Trabajar con las calculadoras es chévere, pero… ¡es que ya es un cuento muy trillado!" (Diana Rocío, agosto 25 de 2006).

[11] Hablamos de comprobar, porque en la clase anterior el profesor les dejó como tarea consultar sobre el punto de ebullición del agua.

Este comentario fue con frecuencia la respuesta dada por los educandos cuando les preguntábamos acerca del gusto que sentían al trabajar con esta herramienta (la calculadora), siendo uno de los motivos a partir de los cuales empezamos a reflexionar acerca de la forma en que se deben usar las diferentes herramientas.

El uso desmesurado de cualquier herramienta cansa al educando y a su vez desmotiva a quienes en algún momento ven en ella un instrumento de apoyo para su aprendizaje, pues se convierten en un utensilio más de su formación tradicional. Debido a ello vimos la necesidad de utilizar material concreto que pudiera ser construido y manipulado por ellos mismos, como el círculo trigonométrico implementado para la construcción de las funciones seno y coseno, la representación del teorema de Pitágoras y el Tangram.

Figura 48. Representaciones gráficas.



Asimismo, cuando les preguntamos a los chicos acerca de la forma como les gusta que se realicen las diferentes actividades, escuchamos comentarios que debido a su contenido lograron captar nuestra atención, dándonos al mismo tiempo la oportunidad de conocer lo que la mayoría de ellos quieren y esperan al aprender. Veamos uno de esos comentarios que a nuestro modo de ver, hacen enriquecer la práctica del maestro.

Figura 49. Actividades de los estudiantes Nº 1

Según usted, y basándose en lo que ha observado facilita su aprendizaje, conteste: ¿cómo debe diseñar el maestro las actividades que lleva a la clase?

* 100% ludicas! Concidero que de esta forma, y Pasando los ejercisios a Actividades rutinarias, es Mas Sencillo de comprender, y + aún A quienes aprenden de forma Kinestesica, ...como Yo.

María Alexandra, marzo 17 de 2007

La respuesta dada por María Alexandra nos deja ver, como lo dijimos anteriormente, aspectos que a partir de una prueba escrita son imposibles de reconocer, como es su capacidad de expresar y argumentar aquello que piensa. Aquí notamos que para ella una actividad es significativa cuando puede manipular objetos que le permiten construir su propio conocimiento, pues se describe como una persona kinestésica[12], es decir, aquella que aprende mejor tocando, moviéndose, procesando información a través de sensaciones corporales. Asimismo hace hincapié en los aportes que el planteamiento de situaciones basadas en los elementos de su contexto hace en sus procesos de aprendizaje, demostrándonos de ésta manera que las

[12] Para Gardner citado por Baute; La Grave; Vélez (s.f) kinestésica o corporal es una de las ocho inteligencias que el ser humano posee. Ésta está vinculada con la capacidad para controlar nuestro cuerpo en actividades físicas coordinadas como la deportiva, la danza, las habilidades manuales, entre otras. A través de la inteligencia Kinestésica corporal adquirimos información que, por efecto del movimiento y la vivencia, se convierte en aprendizaje significativo.

actividades de refuerzo que diseñamos van por el camino correcto, el de la búsqueda de aprendizaje significativo.

A lo mencionado cabe agregar que, aunque el maestro se esfuerce en diseñar actividades diferentes a las tradicionales, éstas dejan de ser significativas para los educandos si no son creadas teniendo en cuenta los elementos motivacionales reconocidos durante la interacción con ellos, y asimismo si con el tiempo se convierten en "actividades tradicionales[13]"; de allí la importancia de las actividades diagnósticas.

✓ *El seguimiento de las actividades para la retroalimentación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.*

Las actividades diagnósticas nos permiten identificar las dificultades y características de los educandos; pero, ¿será que el reconocimiento de ellas nos garantiza la superación de sus dificultades? A partir de nuestra experiencia vimos que no, pues aunque a través de las actividades diagnósticas reconocimos algunos de los elementos que influyen es sus procesos de aprendizaje, y asimismo, aunque diseñamos actividades basándonos en los elementos de su contexto, pudimos notar que sólo al realizar un seguimiento minucioso del trabajo desarrollado por cada uno ellos se pueden reconocer sus avances y sus dificultades, los cuales permitirán la construcción de un aprendizaje sólido en el área de matemáticas.

[13] Al decir que se convierte en actividades tradicionales nos referimos al hecho de convertir a las actividades que en algún momento implementamos en forma innovadora en nuestra práctica, en actividades que con el tiempo se desarrollan a diario y bajo una misma estructura.

El proceso de seguimiento que realizamos durante las actividades de refuerzo implicó un estudio individual de los educandos por parte de nosotros, que consistió en la sistematización de la información que la experiencia nos arrojó, como son los archivos de las guías de refuerzo, los talleres creativos, las entrevistas, etc.; así como las reflexiones y observaciones registradas en el diario pedagógico.

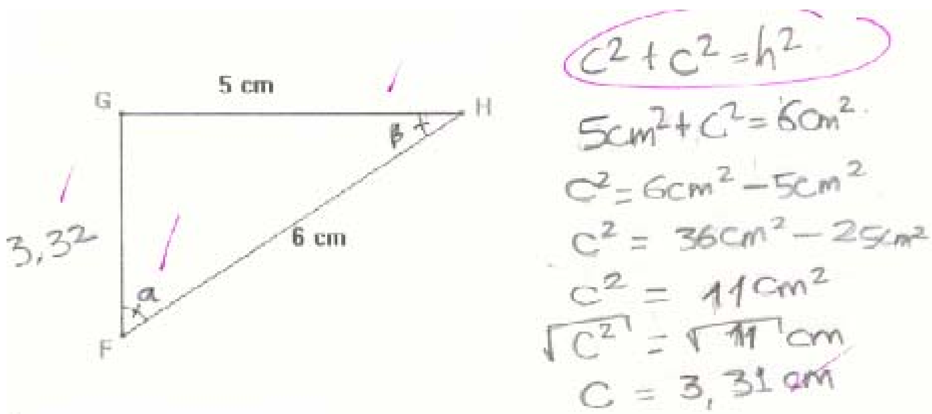
En este proceso pudimos observar que para que a partir del reconocimiento de los avances y las dificultades se logre hacer una retroalimentación de los procesos de enseñanza y aprendizaje se debe analizar esta información a diario, durante y después de la clase, y no al final del periodo cuando se tenga que asignar un juicio valorativo al trabajo realizado por los educandos.

Por ende, al evaluar el trabajo de los chicos durante las actividades de refuerzo tuvimos en cuenta no solo los resultados obtenidos en las mismas sino también todos los procesos que observamos y vivenciamos durante su seguimiento. Lo hicimos de ésta manera porque al reconocer a la evaluación como proceso integral notamos que asimismo ésta exigía que se convirtiera en un proceso sistemático y continuo que fácilmente se puede apoyar en dichas observaciones, y además, porque al igual que Pérez (1996) la consideramos "como una ventana a través de la cual se puede observar el rumbo que están tomando los procesos, o el estado en que se encuentran dichos procesos".

Los rumbos que tomaron los procesos desarrollados por los educandos se evidenciaron claramente en las actividades de refuerzo; hubo para quienes el camino fue hacia el aprendizaje, como es el caso de Sergio, durante la ubicación de puntos en el plano, y otros quienes como María Alexandra, no obtuvieron mayores progresos en su aprendizaje, como se puede observar a continuación.

Como lo vimos anteriormente en el capítulo *La Experiencia,* durante el desarrollo de la primera situación del taller creativo diseñado como actividad de refuerzo para las razones trigonométricas vimos que María Alexandra cometió un error al escribir el Teorema de Pitágoras.

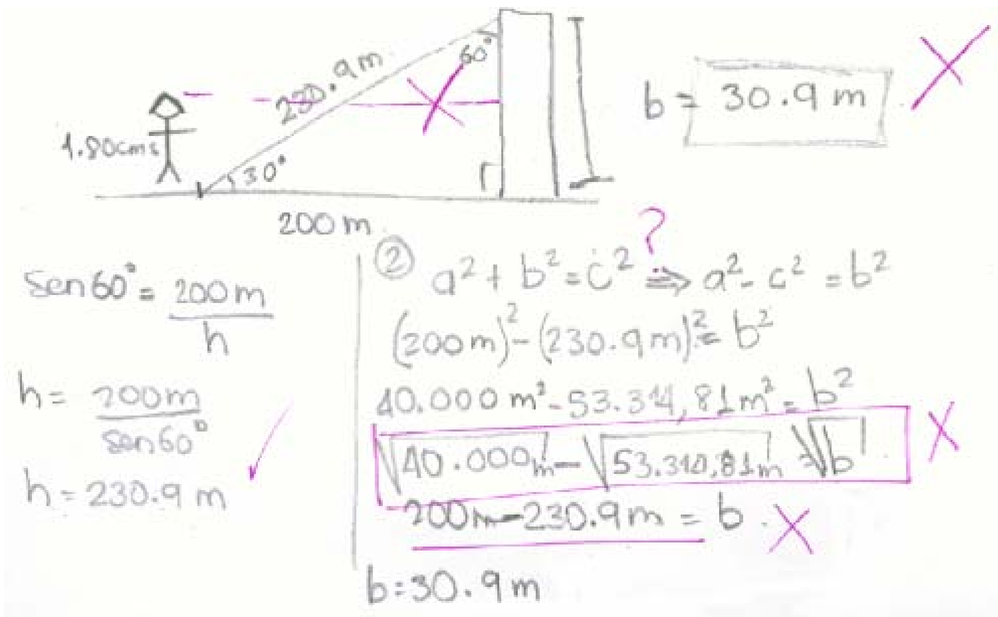
Figura 50. Actividades de los estudiantes Nº 2



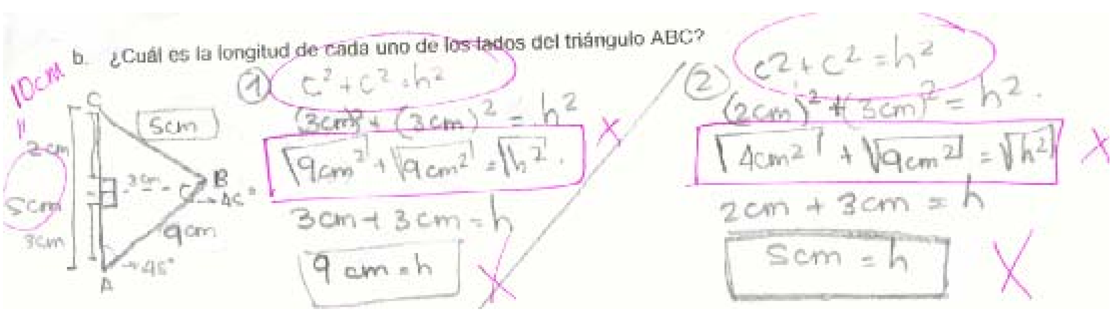
Taller creativo Nº 1, primera situación.

En la imagen observamos que aún habiendo aplicado correctamente el teorema a la situación, María Alexandra no comprende la importancia que este tiene como propiedad de los triángulos rectángulos, pues al expresarla como $c^2 + c^2 = h^2$ solo está retomando uno de los casos en los cuales éste se aplica, el de los triángulos rectángulos isósceles, y no los casos en general, como es realmente. Sin embargo, a este error no le vamos a dar mayor trascendencia pues ya ha sido analizada anteriormente.

La dificultad a la que nos referimos en este momento es a la de las operaciones con radicales, que aun siendo un tema trabajado desde los primeros años de la básica secundaria sigue siendo para ella un vació cognitivo grande que como hemos podido observar a dificultado enormemente sus procesos de aprendizaje. En las siguientes imágenes podemos ver con claridad la forma como erróneamente aplica las propiedades.



Taller *creativo Nº 1, tercera situación.*



Actividad diagnóstica final, ítem b, primera situación.

Aunque el seguimiento que hicimos del proceso llevado a cabo por María Alexandra no nos permita ver grandes progresos en sus dificultades, vemos que sí hubo avances significativos en otros aspectos, que muy seguramente con un poco más de trabajo se den, como son el cambio mostrado en su actitud frente a la clase, el mejoramiento de sus procesos interpretativos y reflexivos, así como en su capacidad de expresión (escrita), entre otras.

Esto no quiere decir que únicamente por ello María Alexandra debe ser aprobada o que en general las evaluaciones se deban hacer únicamente basándose en los esfuerzos hechos por los educandos. Aunque su reconocimiento los motiva, se hace necesario “evaluar continuamente el comportamiento que muestra su trabajo cotidiano: su actitud, su dedicación, su interés, su participación…y su inventiva o tendencia a buscar nuevos métodos o respuestas para las situaciones” (Lineamientos curriculares, 1998, p.85).Todos estos aspectos fueron los que tuvimos en cuenta para realizar la evaluación de los educandos al finalizar las actividades de refuerzo.

Con el seguimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje, no sólo se busca tener la información suficiente para evaluar los procesos de los educandos, sino también, para determinar el ritmo al cual estos se pueden ir dando.

Durante el seguimiento al trabajo de los chicos, observamos que el diseñar una actividad antes de terminar con la anterior es imposible, pues es conveniente que las necesidades que surgen en la que finaliza sean abordados en la que posteriormente se va a aplicar, debido a la continuidad que el mismo proceso de refuerzo exige.

Aunque el proceso de refuerzo se puede ver afectado, como lo dijimos anteriormente, por la metodología implementada al construir las actividades, vemos que este es el único aspecto relevante para el proceso. Uno de los aspectos que mayor influencia tiene sobre este es la disposición que frente al trabajo muestran los educandos, como principales beneficiados, los maestros, quienes a partir de las actividades buscan mejorar la calidad de su práctica la cual se ve reflejada en el desarrollo cognitivo de estos, y los padres de familia, quienes al velar por el bienestar de sus hijos están siempre en la búsqueda de opciones que le permiten mejorar su aprendizaje.

Esto último lo decimos porque de no haber sido por la colaboración prestada por los padres desde el inicio de las actividades de refuerzo, el desarrollo de estas no habría podido darse de la manera significativa como lo fue para los educandos, quienes al contar con su total respaldo y aprobación pudieron asistir a ella sin ninguna dificultad, incluso al ser realizada durante el fin de semana. Asimismo, porque desde sus casas apoyaron el proceso recordándoles los compromisos adquiridos al decidir participar de las actividades, como fueron la realización de las consultas de los temas a trabajar durante los talleres creativos.

A partir de nuestra experiencia, pudimos observar que cuando al educando se le reconocen sus avances o habilidades, y asimismo se le hable de sus dificultades, muestra una actitud menos apática que cuando solo se enfatiza sobre lo que “aún deben mejorar”.

REFLEXIONES

Las reflexiones que presentamos a continuación son el resultado de la experiencia que vivimos con los educandos durante el desarrollo de las actividades de refuerzo que a partir de las cuales tratamos de responder al interrogante que nos planteamos al iniciar esta investigación, **¿Cómo pueden los talleres creativos convertirse en actividades de refuerzo significativas para los educandos de décimo grado?**

- ✓ Los talleres creativos diseñados como actividades de refuerzo se convierten en una herramienta a partir de la cual el maestro puede intervenir en forma directa en los procesos de aprendizaje de sus educandos, pues al hacerlo puede ver con mayor claridad las fortalezas y las dificultades que ha desarrollado a medida que estas se trabajan.
- ✓ Los talleres creativos permiten que el educando reconozca las aplicaciones que los conceptos matemáticos tienen en las diferentes situaciones que viven en su cotidianidad.
- ✓ Los talleres creativos, fomentan un aprendizaje autónomo en los educandos quienes al enfrentarse a situaciones problémicas se ven obligados a diseñar estrategias de solución que aun siendo las usuales fomente un aprendizaje más significativo que aquel que se da cuando es el maestro quien guía personalmente el proceso.
- ✓ A partir de los talleres creativos se buscan reforzar los conceptos enseñados al inicio de cada clase y que aún después de ello no han sido aprendidos de manera significativa por parte de los educandos.

- ✓ Las actividades de refuerzo facilitan los procesos de aprendizaje de los educandos a partir del uso de material manipulable, pues permiten que los educandos puedan construir los conceptos, comprender y generalizar algoritmos más fácilmente que cuando se trabaja sin ellos.
- ✓ Los talleres creativos requieren de un conocimiento amplio por parte del maestro de los diferentes aspectos que intervienen en los procesos de aprendizaje de sus educandos, que al ser diferentes para cada uno de ellos exigen ser tratados de forma particular.
- ✓ El seguimiento a los procesos de aprendizaje de los educandos es una herramienta importante para el descubrimiento de los avances y dificultades que a partir de las actividades se pueden dar.
- ✓ Las actividades diagnósticas son parte esencial dentro del proceso de construcción de las actividades de refuerzo al convertirse en fuentes de información de las dificultades y características en el aprendizaje de los educandos.
- ✓ El acompañamiento del maestro es un factor importante dentro de cualquier actividad, pues es a partir de este que se pueden ir reconociendo los vacíos que aun tienen los educandos, y que antes de que se conviertan en obstáculos se pueden trabajar.
- ✓ El trabajo en equipo permite consolidar no solo las bases de las relaciones entre los educandos sino también el fortalecimiento de sus procesos cognitivos, pues al permitirle compartir con los demás las reflexiones y los procesos que ha desarrollado durante el aprendizaje de los mismos se abran para ellos grandes posibilidades de mejoramiento.
- ✓ Aunque en algunos de los estudiantes se reflejan avances en sus procesos de aprendizaje, también es posible ver casos en los cuales estos nos sean tan visibles e incluso no se den, para ello recomendamos un mayor seguimiento y un trabajo más personalizado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUSUBEL D; HANESIAN H; NOVAK J. (1989). Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. Trillas, México.

BARAJAS A. (1999*).* La motivación y su incidencia en el aprendizaje de las matemáticas. Tesis de pregrado de Licenciatura en Matemáticas. Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia.

BARBERÀ E. (1997). "Carpetas para evaluar las matemáticas*". Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*. *Evaluación.* Graò Educación de Serveis Pedagògies. Nº11, Pág. 38.

BAUTE R, LA GRAVE I, VÉLEZ M. (s.f). I*nteligencias Múltiples.* Recuperado el 11 de junio de 2007 de http://www.proyectoespiga.com/inteligencias_multiples.php

BOGDAN R; BIKLEN S. (1991). Investigación cualitativa en educación. Colección ciencias de la educación, porto editora, Portugal.

BOLIVAR V. (1999). *Elementos de geometría básica a través de un ambiente multimedia.* Recuperado el 15 de marzo de 2007 de http://www.monografias.com/trabajos16/geometria-multimedia/geometria-multimedia.shtml

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN (2006). *Instrucción nº 7/2006 de la Dirección General de Calidad y Equidad Educativa.* Recuperado el 31 de enero de 2007, de http://www.edu.juntaex.es/dgcyee/normativa/pdf/Ins7_06ref.pdf

DE BENGOECHEA N, MORENO F. (2005). *El papel del maestro en la enseñanza de las matemáticas.* Recuperado el 11 de abril de 2007 de http://miayudante.upn.mx/sugerencia.html?rgrado=2&rconsul=2&sug=LM215102046

DE GUZMÁN M. (2002). *El desafío de la matemática en el nuevo milenio.* Recuperado el 11 de diciembre de 2006 de http://www2.udec.cl/panorama/p436/p12.htm

GARDNER H. (1998). *Inteligencias múltiples*: La teoría en la práctica. Paidos, Barcelona.

GONZÁLEZ S; MARTÍN C; ORTEGA T. (1997). *Propuesta y análisis de una prueba de evaluación.* Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas. *Evaluación.* Graò Educación de Serveis Pedagògies. Nº11, Pág. 55.

GUTIERREZ O. (2003). *Fundamentos psicopedagógicos de los enfoques y estrategias centrados en el aprendizaje en el nivel de educación superior.* Recuperado el 23 de mayo de 2007 de http://www.uacam.mx/macad.nsf/4a24042bd57e05c980256509003e0809/73c5cc4fbd0792c586256e7f0004a495/$FILE/eymeca1.pdf

MARTINEZ A. (s.f.). *El material didáctico en la enseñanza de las matemáticas.* Recuperado el 20 de enero de 2007 de http://www.arrakis.es/~antmarti/ensena.htm

McKEWEN C. (1998). *Teorías del desarrollo intelectual: Vygotski y Ausubel*, Módulo 3. FAMDI, Bogotá, Colombia.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2002). *Decreto 0230.* Recuperado el 9 de diciembre de 2006, de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-103106_archivo_pdf.pdf

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998). *Lineamientos curriculares* Matemáticas. Editorial magisterio. Bogotá, Colombia.

MOLLÀ A. (1997). "Una experiencia de formación del profesorado en evaluación en el área de matemáticas". *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas. Evaluación*. Graò Educación de Serveis Pedagògies*. Nº11, Pág.81.*

ORTIZ A. (2005). *Formulación de logros e indicadores de logro: Desarrollo de la capacidad de actuar, sentir y pensar.* Recuperado el 23 de febrero de 2007 de http://www.monografias.com/trabajos26/logros-indicadores/logros-indicadores.shtml

PARADA H. (1996). *Propuesta metodológica para elevar el nivel de logros en el área de matemáticas mediante actividades de recuperación.* Tesis de especialización en Educación Matemática. Universidad Industrial de Santander. Sede Málaga, Santander, Colombia.

PARADA S. (2005). *La producción de textos: una alternativa para evaluar en matemáticas.* Tesis de especialización en Educación Matemática. Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia.

PÉREZ M. (1996). *La evaluación de procesos: herramientas del aula.* Colección Mesa Redonda. *Evaluación escolar: ¿resultados o procesos? Investigación, reflexión y análisis crítico.* Editorial Magisterio, Pág. 15.

ROBLES A. (2004). *Estrategias para el trabajo colaborativo en los cursos y talleres en línea.* Recuperado el 18 de enero de 2007, de http://e-formadores.redescolar.ilce.edu.mx/revista/no3_04/Trabajo%20colaborativo.pdf

STAKE R. (1999). *Investigación con estudio de casos.* (Roc Filella, Trads). Madrid, España: Morata. (Trabajo original publicado en 1998).

ANEXOS

ANEXO 1

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE BUCARAMANGA

Bucaramanga, mayo 5 de 2007

Señores
PADRES DE FAMILIA
E.S.M.

Reciban un cordial saludo:

*Como es de su conocimiento, durante los últimos meses del año anterior su hija **Luz Elena García Pabón** participó en las actividades de refuerzo que nosotros realizamos los días sábados en la institución.*

*Debido a la significatividad que observamos de las actividades de refuerzo en el proceso de aprendizaje, decidimos realizar nuestra investigación tomando como base esta experiencia, y a su hija como una de las protagonistas. La investigación tiene como nombre **"Uso de talleres creativos alrededor de las Aplicaciones de las funciones trigonométricas como actividades de refuerzo para educandos de décimo grado".***

Por medio de la presente queremos solicitarles formalmente su autorización para que Luz Elena sea parte de nuestro grupo de investigación, e igualmente podamos presentarla con su nombre propio en la presentación de los resultados, así como los talleres, fotos, entre otros. Asimismo, les permitan participar de los talleres creativos que se realizaran durante el presente año, con el fin de complementar el trabajo realizado hasta el momento.

Cordialmente,

VIVIANA ANDREA PARADA ALMEIDA
Estudiante Lic. en Matemáticas

MANDIUS CARVAJALINO ORTIZ
Estudiante Lic. en Matemáticas

*Autorizo la participación de nuestra hija **Luz Elena García Pabón** en la investigación **"Uso de talleres creativos alrededor de las Aplicaciones de las funciones trigonométricas como actividades de refuerzo para educandos de décimo grado".***

Firma del padre

Luz Marina Pabón A.
Firma de la madre

Autorizo la participación de nuestro hijo **Sergio Ricardo León Quijano** *en la investigación* ***"Uso de talleres creativos alrededor de las Aplicaciones de las funciones trigonométricas como actividades de refuerzo para educandos de décimo grado".***

______________________	______________________
Firma del padre	*Firma de la madre*

Autorizo la participación de nuestra hija **Diana Rocio Rueda Carreño** *en la investigación* ***"Uso de talleres creativos alrededor de las Aplicaciones de las funciones trigonométricas como actividades de refuerzo para educandos de décimo grado".***

______________________	Marle Rocío Carreño
Firma del padre	*Firma de la madre*

Autorizo la participación de nuestra hija **Maria Alexandra Cabeza Hernández** *en la investigación* ***"Uso de talleres creativos alrededor de las Aplicaciones de las funciones trigonométricas como actividades de refuerzo para educandos de décimo grado".***

______________________	______________________
Firma del padre	*Firma de la madre*

ANEXO 2

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
SERVICIO SOCIAL Y TRABAJO DE GRADO I
ESCUELA NORMAL SUPERIOR DE BUCARAMANGA

NOMBRE: ________________________________ GRADO: _________________
FECHA: ___________________________

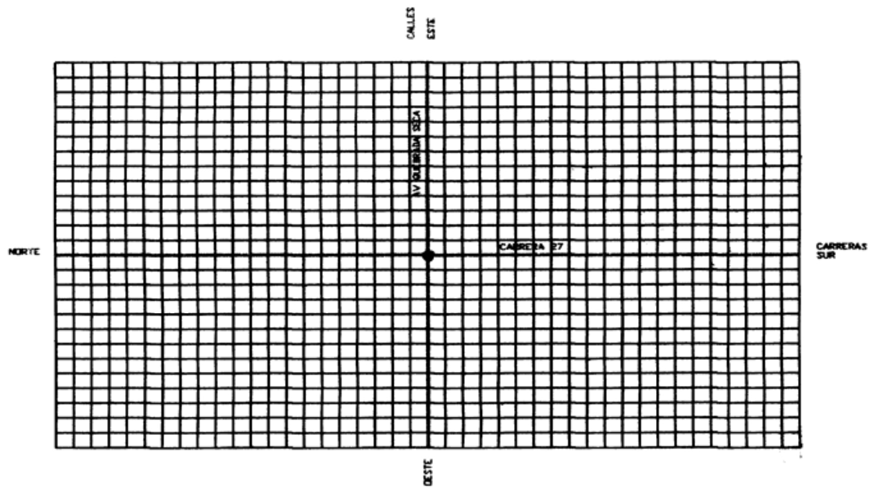
TEMA: Ubicación de puntos en el plano cartesiano.
OBJETIVO: Realizar una prueba diagnóstica para determinar la necesidad de actividades de refuerzo.

- ***Lea el siguiente texto y realice la actividad propuesta al final.***

Miguel es un joven que viene de Bogotá a visitar a su novia Laura que estudia en la Escuela Normal. Como no conoce Bucaramanga su novia le da algunas indicaciones para llegar al colegio, y después lo guía hacia el restaurante "El Hipopótamo" donde van a almorzar. Luego del almuerzo Miguel le pide que lo lleve a la UIS, pues ha escuchado que es muy bonita. Después de recorrer la Universidad Laura le dice a Miguel que la acompañe al Estadio al curso de natación. Una vez terminado el curso se dirigen a la casa de Laura (en la Aurora) pues sus padres lo invitaron a cenar. Pasada la tarde Miguel invita a Laura a San Francisco, debido a que desea darle un regalo antes de irse.

- ***Ubique en el plano cartesiano cada uno de los lugares que Miguel visitó con su novia Laura, y determine la correspondiente pareja ordenada.***

1 .Escuela Normal: ubicado en la carrera 27 con Avenida quebrada seca (calle 29).
2. Restaurante "El Hipopótamo": ubicado a 11 cuadras al norte de la Escuela Normal.
3. UIS: ubicada a 9 cuadras al norte del Restaurante El Hipopótamo.
4. Estadio: ubicado a 3 cuadras al sur y 3 cuadras al este de la UIS.
5. Casa de Laura: ubicada a 18 cuadras al sur y 2 al este del estadio.
6. Tienda de zapatos: ubicada 13 cuadras al oeste y 10 al norte de la casa de Laura.



¿En qué tema cree necesitar refuerzo?__________________________________.

ANEXO 3

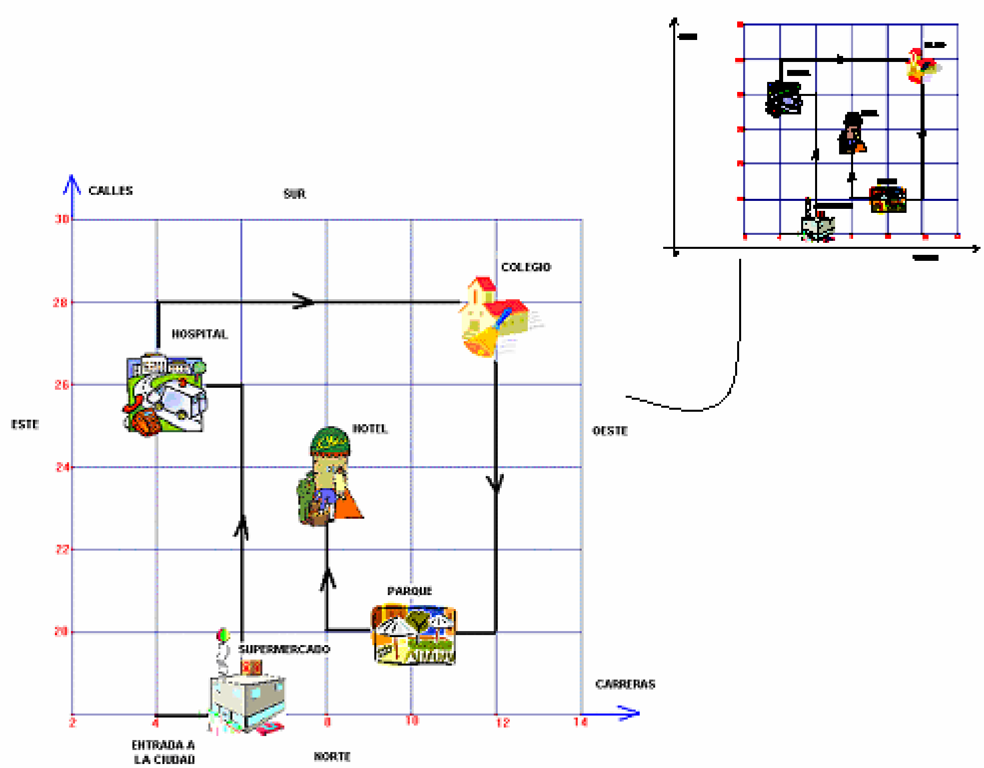
ACTIVIDAD DE REFUERZO Nº1
UBICACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO

NOMBRE: ___________________________________ GRADO: ___________________

- **Lea el siguiente texto**

MAPA DE LA CIUDAD DE_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_____________ llegó a la ciudad de _ _ _ _ _ _ _ _ _ (que no conocía) en la cual hablaban un idioma diferente. Como no podía comunicarse con nadie tuvo que caminar toda la ciudad para poder conocerla, pero mientras lo hacía iba diseñando un mapa en el cual ubicaba algunos lugares importantes. El mapa que diseñó fue el siguiente:



Su recorrido terminó cuando encontró el Hotel, debido a que ya era muy tarde y solo deseaba descansar. Al día siguiente, cuando bajó a desayunar, se encontró con un abuelito que hablaba su mismo idioma. Así que aprovechó para conversar con él y preguntarle por algunos lugares que aun no había conocido. Pero como el abuelito era ciego, le preguntó qué lugares había conocido, para de esta forma poder darle las indicaciones de los otros. __________ le contó que había conocido el supermercado, el hospital, el colegio, el parque, y por supuesto, el hotel; pero que deseaba conocer la biblioteca, el estadio, el terminal, la universidad y algún restaurante.

Al terminar de escucharlo(a) el abuelito le dio las siguientes indicaciones:

- ✓ La universidad se encuentra a seis cuadras al norte y cuatro al oeste del hotel.
- ✓ El restaurante se encuentra a tres cuadras al este y dos al sur del supermercado.
- ✓ El terminal está ubicado a tres cuadras al norte y una al oeste del hospital.
- ✓ El estadio está ubicado a dos cuadras al oeste y tres cuadras al sur del parque.
- ✓ La biblioteca se encuentra dos cuadras al este y dos al sur del colegio.

- **Complete el mapa de la ciudad de _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _.**

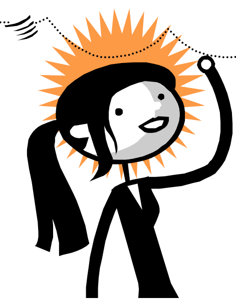
____________ quiere terminar su mapa, ayúdalo(a) a ubicar los lugares y a determinar las direcciones que le hacen falta.

- ✓ Determine las coordenadas de los lugares que ____________visitó.
- ✓ Ubique (en el mapa) siguiendo las instrucciones del abuelito los lugares que ______________ desea conocer.
- ✓ Determine las coordenadas de los lugares que acabas de ubicar en el mapa.
- ✓ Cuando ya tengas todos los datos, completa la siguiente tabla:

LUGAR	UBICACIÓN (x, y)
Supermercado	
Hospital	
Colegio	
Parque	
Hotel	
Restaurante	
Terminal	
Biblioteca	
Estadio	
Universidad	

Recuerde que:

- ✓ Los lugares se representan en un mapa (plano) como puntos.
- ✓ Además, los puntos están asociados con un par ordenado (a, b), donde la primera componente, a, está relacionada con el eje x (carreras), y se le denomina abscisa del punto, mientras que la segunda componente, b, se relaciona con el eje y (calles), y se le denomina ordenada del punto.
- ✓ La abscisa y la ordenada corresponden a las coordenadas del punto y pueden tener un valor positivo o negativo.



- **¿Qué lugares hacen falta?**

✓ Ubique en el mapa y determine las coordenadas de tres lugares le hagan falta a la ciudad de _ _ _ _ _.

✓ Si quieres enviar a sus amigos a ese lugar, especifique la dirección, escríbala en la siguiente tabla:

LUGAR	UBICACIÓN (x, y)	INSTRUCCIONES

ANEXO 4

ACTIVIDAD DE REFUERZO Nº 2

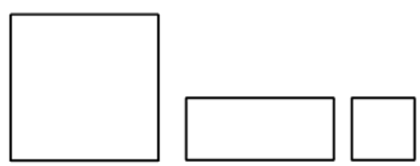
FACTORIZACIÓN Y, ÁREAS Y PERÍMETROS DE FIGURAS PLANAS

NOMBRE: ________________________________ GRADO: _________________

REGLETAS DE FACTORIZACIÓN

- ***MATERIAL***

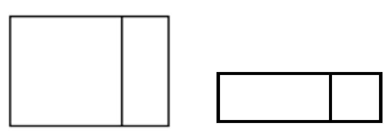
Cada juego consta de tres tipos de piezas de diferentes colores (las amarillas y azules: representan a los números positivos; y las rojas y negras: representan a los números negativos) correspondientes a los monomios x^2, x, 1.



x^2 x 1

- ***INSTRUCCIONES***
  - ✓ Siempre debes hacer coincidir los lados iguales de las figuras vecinas y sin sobreponer regletas.

  Por ejemplo:



  - ✓ Cuando vayas a restar debes colocar las regletas (del mismo tipo de pieza) que representan números negativos sobre las regletas que representan números positivos.
  - ✓ Estas parejas (la misma pieza pero de colores diferentes) serán tomadas como nulas; es decir, como el cero (0).

- ***ACTIVIDAD***

Teniendo en cuenta las instrucciones dadas realiza los siguientes ejercicios:

1. Deduce el área y el perímetro de cada una de las figuras teniendo en cuenta que la regleta rectangular no cuadrada tiene como lado menor una unidad y lado mayor x unidades.

REGLETA	BASE	ALTURA	ÁREA	PERÍMETRO
Cuadrado grande azul				
Cuadrado pequeño amarillo ó café				
Rectángulo azul ó verde				

2. ¿Cuántos rectángulos puedes formar con 8 rectángulos unidad? Realiza los dibujos y determina el área de cada uno de ellos.

¿Qué puedes concluir de los resultados de las áreas de los rectángulos anteriores?

____

____

3. Tomando las regletas azules (cuantas quieras) forma tres rectángulos diferentes (usa para cada rectángulo piezas diferentes), llena la siguiente tabla y contesta las siguientes preguntas:

REPRESENTACIÓN GRÁFICA	BASE	ALTURA	ÁREA	PERÍMETRO

- ✓ ¿Cuántas piezas de cada tipo usaste en cada uno de los rectángulos?
- ✓ Compara el resultado anterior con el obtenido en la tabla (área). ¿Qué puedes concluir?

____

____

✓ ¿Cuántas piezas de cada tipo usaste en total para construir los tres rectángulos?

Describe el proceso que seguiste para dar respuesta a esta pregunta.

___

___

✓ Si ahora quitamos las piezas del segundo rectángulo, ¿cuántas piezas de cada tipo quedan?

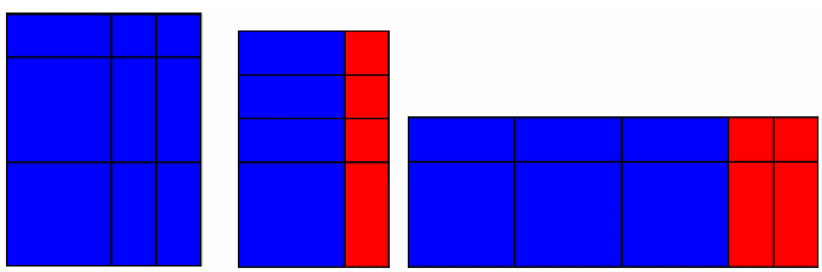
Describe el proceso que seguiste para dar respuesta a esta pregunta.

___

___

Ahora quita las piezas que usaste en el primer rectángulo, ¿cuántas piezas de cada tipo quedan?

4. Halla el área de las siguientes figuras y expresalas como un producto



5. Con las regletas construye los rectángulos respectivos a cada expresión, determina sus dimensiones (base y altura).

✓ $x^2 + 2x + 1$

✓ $3x^2 + 4x + 1$

✓ $x^2 + 3x - 4$

6. Resuelve las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuál es el área del cuadrado de lado $(x+2)$?
- ✓ ¿Cuál es el área del rectángulo de base $(x+3)$ y altura $(x-3)$?
- ✓ ¿Cuál es el área del cuadrado de lado $(x-1)$?

7. Encuentra el resultado equivalente a las expresiones de la columna de la izquierda

$3x^2+x-2=$	$(x-2)^2$
$x^2+8x+7=$	$(x+1)(3x-2)$
$(x^2+3x-2)+(2x^2-x+1)=$	$3x^2-2x+2$
$x^2-4x+4=$	$3x^2+2x-1$
$(3x^2+2x-1)-(4x-3)=$	$(x+1)(x+7)$

8. En la Escuela Normal Superior de Bucaramanga se está estudiando la posibilidad de construir una cancha de fútbol para los estudiantes de bachillerato. La rectora investiga en Internet (en la página de la FIFA) acerca de las características de ésta, pues desea saber si el área con la que cuenta para realizar el proyecto es suficiente. Lo que encontró en la página fue lo siguiente:

- ✓ *Los terrenos reglamentarios de fútbol deben ser rectangulares, de 90m de largo y 46m de ancho como mínimo. Los tiros de esquina tienen una longitud de 1m por lado. Además, la distancia mínima de cada corner al centro del campo es igual a la distancia entre los tiros de esquina que están en los lados más cortos de la cancha (ver dibujo abajo).*

Una vez encontrada esta información la rectora les pide a los estudiantes de décimo lo siguiente:

- ✓ Diseñen (con las regletas) una cancha que cumpla con estas características

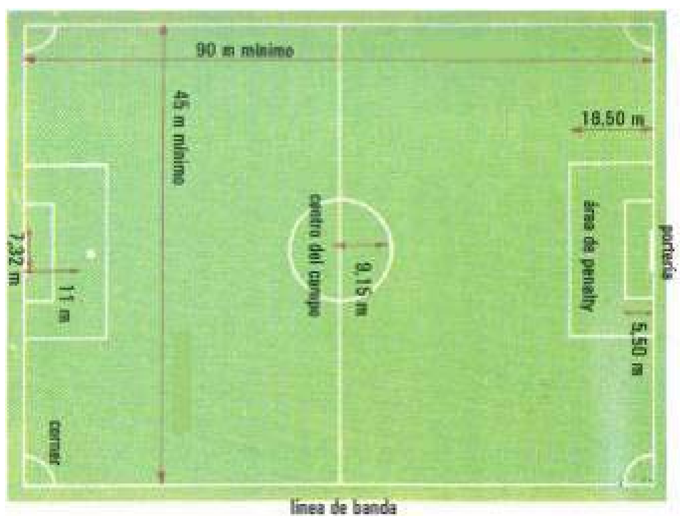
Basándose en este diseño contesta las siguientes preguntas.

- ✓ ¿Cuáles son las dimensiones (base, altura) de la cancha?

- ✓ ¿Es suficiente el terreno con el que se dispone para el proyecto ($A = 4x^2 + 6x + 6$)? Sí ó no, justifica tu respuesta.

Ahora a la rectora se le ocurrió la idea de construir alrededor de la cancha una pista de atletismo; esta pista tiene un metro de ancho.

- ✓ ¿Cuántos metros de malla necesitas para encerrar la cancha (no olvides que es el campo de juego y la pista de atletismo)?
- ✓ ¿Cuánto dinero necesitas para encerrar la cancha si cada metro de malla cuesta $15.000?



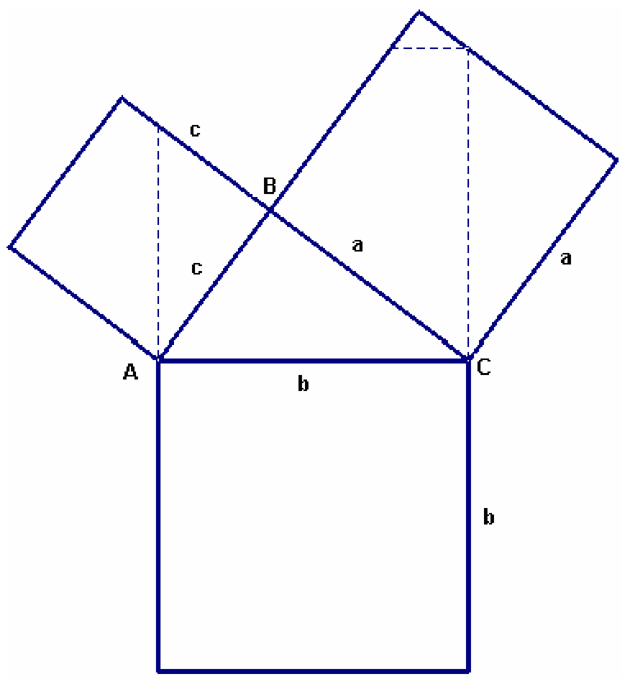
ANEXO 5

ACTIVIDAD DE REFUERZO Nº 3

TEOREMA DE PITÁGORAS

NOMBRES: ______________________________________ GRADO: ____________________

1. Observe detenidamente la siguiente figura:



"Como puedes ver, en cada lado del triángulo ABC se construyen cuadrados cuyos lados tienen la misma longitud que el lado del triángulo sobre el que se construyeron".

Recorte los dos cuadrados pequeños y trate de construir el cuadrado grande, ¿es posible construirlo?

- ✓ ¿Cuál es el área de cada uno de los cuadrados?
- ✓ ¿Qué relación existe entre las áreas de los cuadrados y las longitudes de los lados del triángulo?

¿Qué se puede concluir?

ANEXO 6

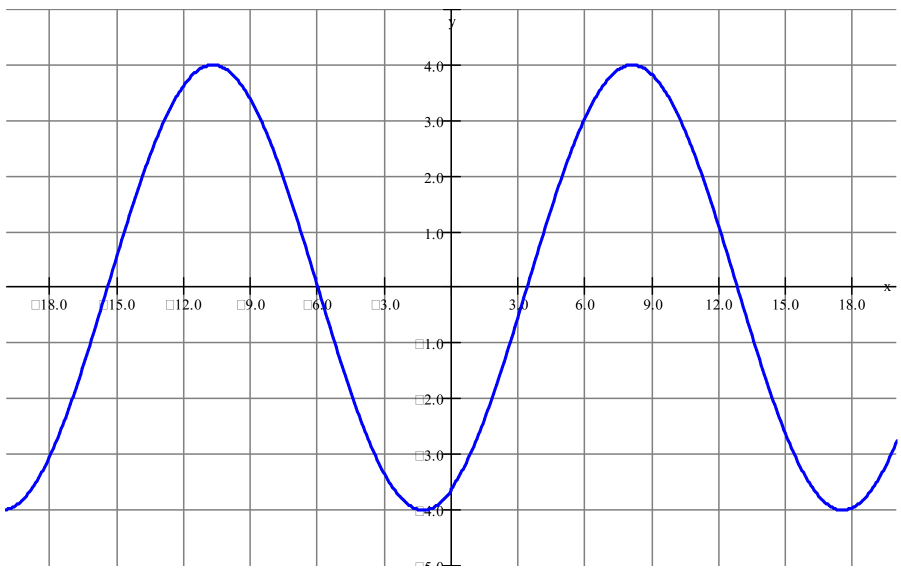
ACTIVIDAD DE REFUERZO Nº 6

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES (SENO Y COSENO)

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS (PITAGÓRICAS)

NOMBRE: ___________________________________ GRADO: __________________

❖ Observa la siguiente gráfica y responda las preguntas de la 1 a la 4



Escoja solo una de las respuestas

1. La ecuación de la función trigonométrica es:

a. $y = -4\cos(3x+2)$

b. $y = -4\cos\left(\frac{1}{3}x+2\right)$

c. $y = -4\cos(3x)+2$

d. $y = 4\cos\left(\frac{1}{3}x+2\right)$

e. Ninguna de las anteriores

2. El periodo de la función es:

a. 6π b. 2π c. -6π d. $\frac{2}{3}\pi$ e. Ninguna de las anteriores

3. La amplitud de la función es:

a. -4 b. 8 c. 4 d. -8 e. Ninguna de las anteriores

4. El dominio y el recorrido de la función es:

a. $D:(-\infty,\infty), R:[-4,4]$ b. $D:[0,2\pi], R:[4,-4]$

c. $D:(-\infty,\infty), R:(-4,4)$ d. $D:[-\infty,\infty], R:[-4,4]$

e. Ninguna de las anteriores

5. Represente gráficamente la siguiente función $y=-2\cos(2x)+1$

Determine:

a. Dominio:

b. Recorrido:

c. Periodo

d. Amplitud

6. Demuestre que cada una de las siguientes igualdades es una identidad:

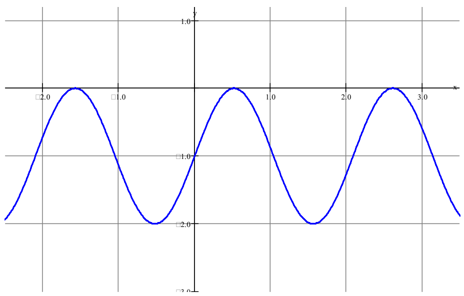
a. $(sen\theta+\cos\theta)^2 = 1+2sen\theta\cos\theta$

b. $\dfrac{\tan\theta+\tan\theta\cdot\cot^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cot\theta$

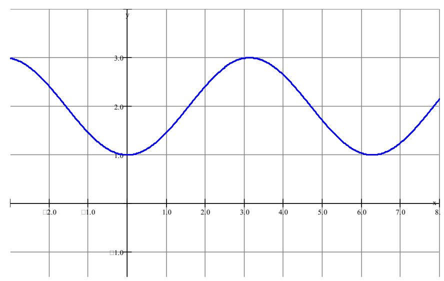
7. Determine la gráfica que le corresponde a cada una de las funciones dadas (la escala es de una unidad)

a. $y = -\cos x + 2$ b. $y = sen3x - 1$ c. $y = -2senx$

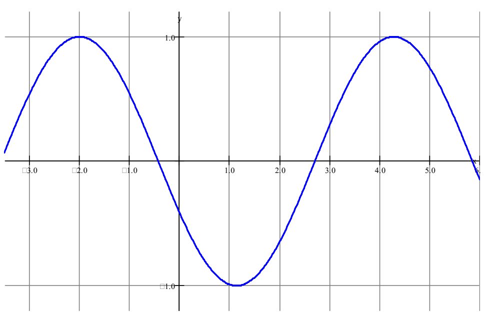
d. $y = \frac{1}{3}\cos(x-1)$ e. $y = \cos(x+2)$



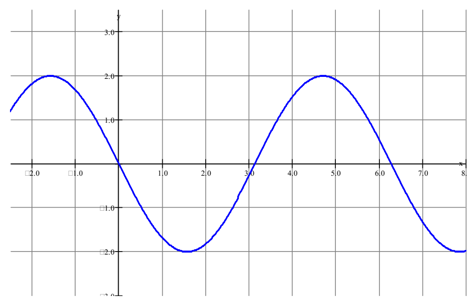
______



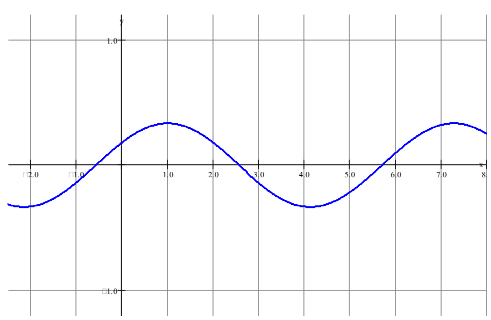
______



______



______



______

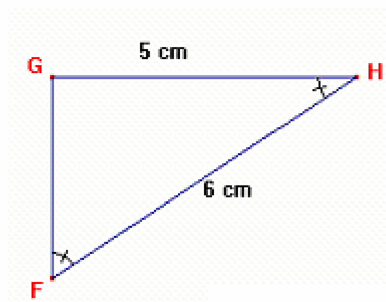
ANEXO 7

TALLER CREATIVO COMO ACTIVIDAD DE REFUERZO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

NOMBRES: ________________________________ FECHA: _______________________

1. Complete la tabla basándose en el triángulo FGH (siendo $\angle GFH = \alpha$ y $\angle GHF = \beta$) y determine la longitud del lado FG.

ÁNGULO	NOMBRE DE LA RAZÓN TRIGONOMETRICA	RAZÓN
α	Tangente	
β	Coseno	
β		$\frac{5}{3{,}32}$
α		$\frac{6}{5}$
α	Seno	
β	Secante	
α		$\frac{6}{3{,}32}$
β	Cosecante	
β	Seno	$\frac{3{,}32}{\ }$
α	Cotangente	
α		$\frac{3{,}32}{6}$
β	Tangente	$\frac{\ }{5}$

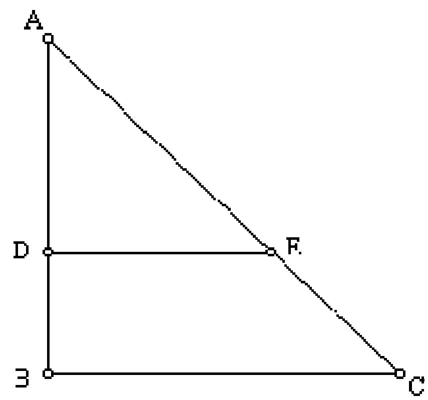


2. Encuentre la medida del segmento AC conociendo que:

$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

La medida del ángulo EDA es de 90º

$|\overline{AD}|$=2cm, $|\overline{DE}|$=3cm y $|\overline{BC}|$=18cm



3. Diana, una estudiante de la Escuela Normal se encuentra en el Aeropuerto Palonegro de Bucaramanga esperando a sus padres quienes vienen de la ciudad de Medellín después de unas cortas vacaciones. Durante su espera frente a la torre de control (a aproximadamente 200m de la base) observó que un objeto descendía de la parte superior, aunque después de unos minutos pudo reconocer que éste no era un objeto sino un miembro de la Defensa Civil que estaba realizando un simulacro. Sorprendida por lo que acababa de ver se preguntó para sí ¿cuál será la altura desde la que el hombre desciende?, ¡pues la torre es realmente alta!

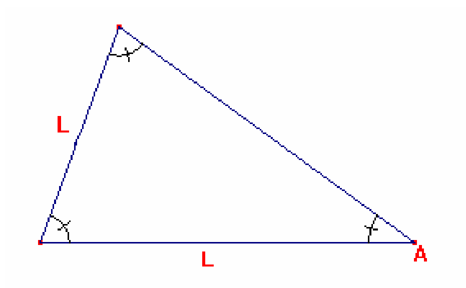
Ayúdale a Diana a contestar la pregunta, suponiendo que comenzó a ver el simulacro con un ángulo de elevación de 30º y sabiendo que su estatura es de aproximadamente 1.80m.

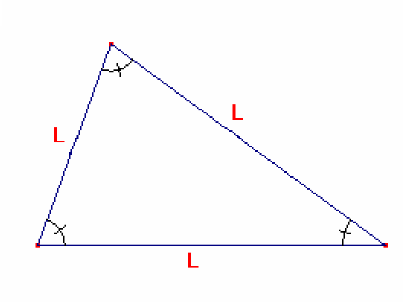
ANEXO 8

TALLER CREATIVO COMO ACTIVDAD DE REFUERZO DE LOS TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO

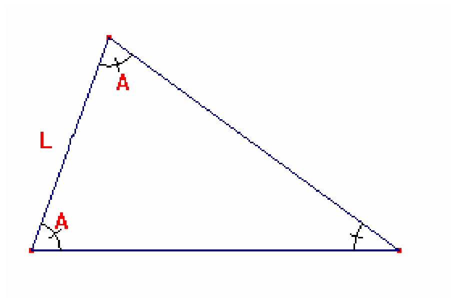
NOMBRES: ________________________________ FECHA: __________________

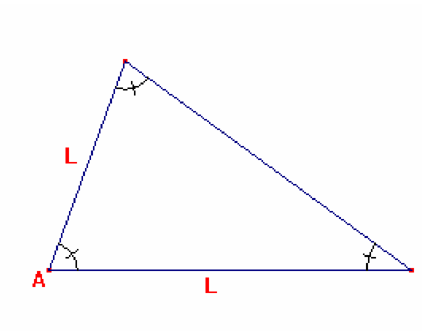
1. Observe los datos dados en cada triangulo (***L***: *longitud del lado,* ***A***: *medida del ángulo*) ¿Qué teorema se puede aplicar en cada uno de ellos para determinar las medidas que hacen falta?





_________________________ _________________________





_________________________ _________________________

2. Durante una caminata por el bosque unas estudiantes del grado décimo de la Escuela Normal Superior Bucaramanga observaron que frente a la portería había un árbol de mango que estaba bastante inclinado. Ellas se asustaron al ver que este se podía caer sobre la rotonda (salón de música), e inmediatamente corrieron hacia la portería para avisarle al celador, quién al escucharlos les dijo:

- Yo ya me había dado cuenta y estoy pensando en amarrar un lazo desde aquí (un gancho clavado en el piso) hasta la parte superior del tronco del árbol para que no se caiga; pero, aun no he podido decirle nada a la rectora, pues no sé cuantos metros de lazo voy a necesitar.

Luego les preguntó:

- ¿Ustedes me podrían ayudar a calcular cuántos metros de lazo se deben comprar para amarrar el árbol? Ellas dijeron que con mucho gusto. Sin embargo, debían primero tomar algunas medidas.

Al escucharlas él les dijo:

- Yo tome algunas medidas antes que ustedes llegarán.
  La altura del tronco es de aproximadamente 3,5 m.
  Y su inclinación con respecto a la horizontal es de aproximadamente 100º (en el sentido de las manecillas del reloj); además, su distancia a la portería es de aproximadamente es de 600cm.

Ayude a los estudiantes a determinar la cantidad de lazo que se necesita para sostener el árbol.

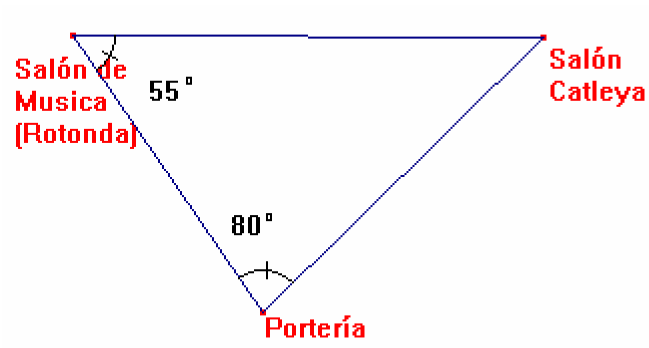
- ¿Qué necesita calcular?, ¿cómo lo puede calcular?
- Determine el ángulo al cual queda inclinado el lazo al ser amarrado al tronco del árbol.

3. En la clase de Educación Física el profesor le pide a tres estudiantes que se ubiquen en tres sitios diferentes del colegio para apostar una carrera.

Los estudiantes se ubicaron de la siguiente manera:

- Carolina: en el salón Catleya,
- Juan: en la portería de la 27 y
- Diana: en el salón de música.

Igualmente les pide a otros tres (estudiantes) que se ubiquen en esos mismos lugares con el fin de enmarcar la pista por la cual se hará la competencia para que ninguno haga trampa. El profesor les da unos lazos de 18 m para que la encierren y un mapa en el cual se muestran los ángulos de las curvas del recorrido (estos fueron calculados por él basándose en los planos del colegio).



El lazo que se usa del salón de música a la portería no tiene que ser cortado ni añadido, mientras que los otros dos sí. Los estudiantes que participan en la competencia tienen que salir del lugar seleccionado y pasar por los otros dos hasta llegar nuevamente a su punto de partida siguiendo el movimiento de las manecillas del reloj.

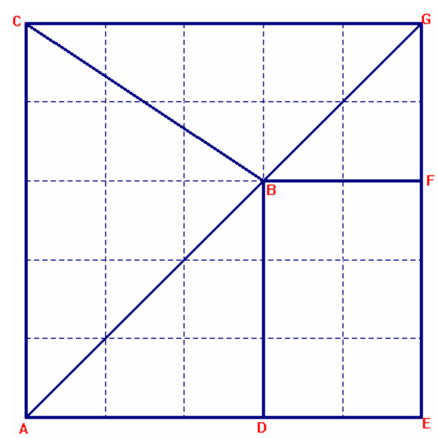
- ¿Cuál es la medida del ángulo que se forma con los lazos en el Salón Catleya?
- ¿Cuál es la distancia que hay del salón de música al Catleya? ¿Cuánto lazo se tuvo que añadir o quitar?
- ¿Cuál es la distancia que hay del salón Catleya a la portería? ¿Cuánto lazo se tuvo que añadir o quitar?
- ¿Cuántos metros recorren en total los estudiantes?
- ¿Quién cree que tiene mayor posibilidad de ganar? ¿Por qué?

ANEXO 9

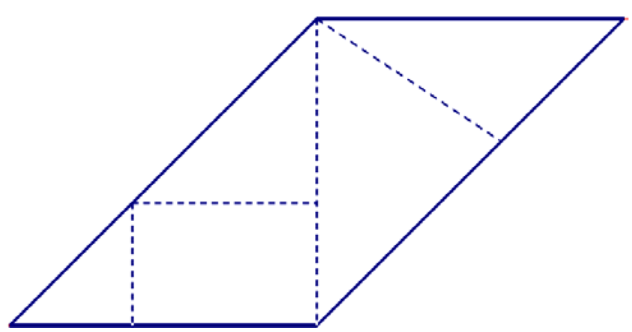
TALLER CREATIVO COMO ACTIVIDAD DIAGNÓSTICA FINAL

NOMBRE: ___________________________________ FECHA: __________________

1. La profesora de artes de la Escuela Normal Superior de Bucaramanga les da a los estudiantes de décimo una hoja cuadrada de 10x10cm, y les pide realizar el siguiente diseño:



Estas cinco piezas serán usadas para formar la siguiente figura (ubique cada una de las piezas en la figura anterior):



(Antes de comenzar les pide que ubiquen los ejes x e y, tomando como centro el vértice A; es decir, con coordenadas (0,0)).

Luego les hace las siguientes preguntas (ayuda a contestarlas):

a. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de cada uno de los vértices (A, B,...G)?

b. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los lados del triángulo ABC?

d. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos del triángulo CBG?

2. Durante la final del campeonato de interclases de baloncesto que se jugó en la ENS se "enfrentaron a muerte" los grados 10-2 y 11-1. En el cuarto tiempo los equipos se encontraban empatados, pero quedando cinco segundos para finalizar el partido uno de los jugadores de 11-1 cometió una falta sobre Carlos que le otorgó un tiro libre a su equipo (10-2), lanzamiento con el cual su equipo obtuvo la victoria.

El momento en el cual Carlos lanzó el balón fue tomado por el profesor de matemáticas como base para el planteamiento de una situación problema que dejó como ejercicio de tarea. La situación que les planteó fue la siguiente:

> Suponiendo que los ojos de Carlos estaban a 1,72 m del piso, y sabiendo que la línea de tiro libre está a 4,57 m del centro del borde de la canasta. Determine el ángulo de elevación de sus ojos al centro del borde (Recuerde que el borde está a 3m del suelo).

Ayúdales a los estudiantes de décimo a resolver la situación.