

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Desarrollo de una metodología de Análisis Modal Operacional (OMA), para determinar los rangos de estabilidad dinámica de un rotor flexible tipo Jeffcott con velocidad variable, basada en las técnicas en el dominio del tiempo NExT y ERA.

Fabian Rodolfo Nova Agudelo

Trabajo de Grado para Optar por el Título de Magister en Ingeniería Mecánica

Director

Heller Guillermo Sánchez Acevedo

PhD. Ingeniería Mecánica Aplicada y Computacional

Universidad Industrial de Santander

Facultada de Ingenierías Físico-Mecánicas

Escuela de Ingeniería Mecánica

Maestría en Ingeniería Mecánica

Bucaramanga

2022

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Dedicatoria**

A Dios por brindar salud y armonía en mi familia, en mi hogar y darme la fortaleza de seguir siempre adelante.

A mi prometida Dalya Julieth Galvis Parada, que siempre me brindó su amor y apoyo para el desarrollo de esta tesis, estuvo conmigo en los momentos de luz y en los momentos en que el camino se hizo largo, me tomó de su mano y me ayudó a afrontar los obstáculos para llegar a esta meta.

A mis Papás Rodolfo Nova Merchan y Raquel Cristina Agudelo Rueda, por los valores y la educación que me inculcaron desde pequeño y que hoy por hoy han hecho de mi un gran profesional. Por sus consejos y su apoyo incondicional, que siempre está cuando más lo he necesitado.

A mi hermana Nury Caterin Nova Agudelo, que siempre me ha animado y ha estado conmigo, me ha demostrado que es la persona más fuerte que conozco y su fortaleza me contagia en superarme cada día.

A los demás miembros de mi familia y amigos por su cariño y momentos de alegría, que son fuente de energía, pasión y amor por lo que se hace.

**Agradecimientos**

Al Profesor Heller Guillermo Sánchez Acevedo, por su confianza, amistad y orientación en el desarrollo del proyecto de investigación.

A los profesores de la Escuela de Ingeniería Mecánica, por ser guías en este proceso de aprendizaje.

A la Universidad Industrial de Santander, por permitirme hacer parte importante de la institución.

## Lista de Contenido

Introducción.....	16
1. Objetivos .....	19
1.1.    Objetivo general .....	19
1.2.    Objetivos específicos.....	19
2. Metodología de trabajo.....	20
2.1.    Capítulo 1 .....	20
2.2.    Capítulo 2 .....	20
2.3.    Capítulo 3 .....	20
3. Modelo físico del sistema.....	22
3.1.    Condiciones operativas del banco de ensayos.....	23
4. Capítulo 1: modelado CAD (Computer Aided Design) y Análisis Modal Experimental (EMA, Experimental Modal Analysis) .....	25
4.1.    Modelo numérico del sistema desarrollado en SolidWorks (Software CAD) .....	25
4.1.1. Simulación del rotor en condición de suspensión libre-libre .....	26
4.1.2. Simulación del rotor en condición de empotramiento.....	27
4.1.3. Análisis de resultados de las simulaciones en SolidWorks .....	28
4.2.    Análisis Modal Experimental (EMA, Experimental Modal Analysis) .....	28
4.2.1. Implementación del EMA en el sistema de estudio del trabajo de investigación	29
4.2.2. Análisis y resultados del EMA .....	31

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

4.3.	Comparación, ajuste y validación de software CAD vs EMA .....	32
5.	Capítulo 2: Análisis Modal Operacional (OMA, Operational Modal Analysis).....	33
5.1.	Marco conceptual y referencial del OMA.....	33
5.1.1.	Métodos que permiten implementar un Análisis Modal Operacional, OMA.....	34
5.1.1.1.	Métodos no paramétricos en el dominio de la frecuencia. ....	34
5.1.1.2.	Métodos paramétricos en el dominio del tiempo.....	35
5.1.2.	Aplicaciones del OMA .....	37
5.2.	Metodología del Análisis Modal Operacional basado en las técnicas NExT-ERA .	38
5.2.1.	Metodología de la técnica NExT.....	38
5.2.1.1	Método Welch .....	41
5.2.1.2.	Consideración de la no correlación de la entrada con la salida y solución de la ecuación de movimiento.....	42
5.2.2.	Metodología de la técnica ERA a partir de la señal en vibración libre obtenida en el NExT.....	43
5.2.2.1	Espacio de estados .....	44
5.2.2.2.	Funciones de respuesta al impulso y los parámetros de Markov .....	44
5.2.2.3	Construcción de las matrices de Hankel $H(0)$ y $H(1)$ .....	46
5.2.2.4	Descomposición en valores singulares (SVD, Singular Value Decomposition) para la matriz $H(0)$ . ....	48
5.2.2.6	Obtención de los parámetros modales del sistema a partir de la matriz dinámica de estados “A”.....	49

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

5.3. Implementación de la metodología de las técnicas NExT-ERA en el objeto de estudio.....	51
5.3.1. Proceso de adquisición de datos para la implementación de la técnica OMA .....	51
5.3.1.1 Caso de estudio # 1: Mediciones vibratorias con acelerómetros uniaxiales ubicados a lo largo del rotor, en estado estático.....	51
5.3.1.2 Caso de estudio # 2: Mediciones vibratorias con acelerómetros uniaxiales en los dos (2) puntos de apoyo del sistema (cojinetes hidrodinámicos) en estado operativo.	53
5.3.1.3 Caso de estudio # 3: Medición vibratoria con acelerómetros uniaxiales ubicados a lo largo del rotor, en estado estático y un solo golpe aleatorio. ....	56
5.3.2. Aplicación del Eigensystem Realization Algorithm (ERA) y resultados finales del OMA.....	57
5.3.2.1 Resultados OMA para el caso # 1: sistema en condición estático.....	57
5.3.2.2 Resultados OMA para el caso # 2: sistema en condición de operación .....	59
5.3.2.3 Resultados OMA para el caso # 3: sistema en estado estático y un solo golpe aleatorio.....	60
5.4. Comparación, ajuste y validación de las técnicas OMA utilizadas vs los resultados obtenidos en SolidWorks .....	62
5.4.1. Ajuste de las columnas de las matrices de Hankel .....	62
5.4.2. Ajuste de las filas de las matrices de Hankel.....	62
5.4.3. Orden y estabilización del ERA .....	64
5.4.4. Comparación y validación de resultados OMA vs SolidWorks .....	64

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

6.	Capítulo 3: modelo numérico del sistema .....	67
6.1.	Marco conceptual y referencial del rotor flexible tipo Jeffcott .....	67
6.1.1.	Desbalance .....	68
6.1.2.	Desalineamiento .....	68
6.1.3.	Efecto giroscópico .....	69
6.1.4.	Resonancia.....	69
6.1.5.	Inestabilidad rotodinámica .....	69
6.2.	Desarrollo e implementación del modelo numérico del rotor flexible tipo Jeffcott	71
6.2.1.	Establecimiento de las matrices de los elementos .....	72
6.2.2.	Establecimiento de las matrices globales del elemento.....	75
6.2.3.	Ensamble matricial .....	76
6.2.4.	Ensamble de matrices de los componentes adyacentes al rotor .....	77
6.2.4.1	Disco central. ....	78
6.2.4.2	Soportes: Cojinetes, piñón y acople al motor. ....	79
6.2.5.	Cálculo de la matriz de estado “A” y solución al problema de valores y vectores propios.....	80
6.2.6.	Determinación de los parámetros modales del sistema mediante el desarrollo del modelo numérico.....	82
6.3.	Comparación y validación del modelo numérico del sistema vs OMA .....	83
6.4.	Análisis dinámico del sistema a partir del modelo numérico.....	84

	8
NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT	
6.4.1. Diagrama de Campbell del sistema .....	85
6.4.2. Diagrama de inestabilidad dinámica del sistema.....	87
7. Conclusiones .....	89
8. Recomendaciones.....	91
9. Líneas Futuras .....	92
Referencias bibliográficas .....	93

**Lista de Figuras**

Figura 1 Diagrama de flujo de la metodología desarrollada .....	21
Figura 2 Banco de ensayos para el desarrollo del proyecto de investigación .....	22
Figura 3 Espectro de frecuencia crítico del sistema, donde se evidencian las condiciones operativas óptimas para el estudio.....	24
Figura 4 Modelo del rotor en SolidWorks.....	26
Figura 5 Simulación del sistema en SolidWorks.....	27
Figura 6 Análisis Modal Experimental (EMA), en el banco de ensayos .....	30
Figura 7 Dos señales aleatorias que van a ser multiplicadas y promediadas, mediante el desfase de una de ellas.....	40
Figura 8 Obtención de la señal en vibración libre, mediante la correlación cruzada promediada de dos señales aleatorias .....	41
Figura 9 Ensayo OMA en condiciones estáticas del rotor.....	52
Figura 10 Registro de aceleración de los datos obtenidos para el ensayo de OMA en condición estática .....	52
Figura 11 Resultado de aplicar NExT a los datos vibratorios del caso # 1 .....	53
Figura 12 Ensayo OMA en condiciones de operación del rotor.....	54
Figura 13 Registro de aceleración de los datos obtenidos para el ensayo de OMA en condición de operación.....	55
Figura 14 Figura 14 Resultado de aplicar NExT a los datos vibratorios del caso # 2.....	56
Figura 15 Registro de aceleración de los datos obtenidos de aplicar un golpe sobre el objeto en estudio, en condición estática .....	57

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Figura 16 Formas modales (vectores propios) obtenidos del ERA para el sistema en estudio.....	59
Figura 17 Formas modales (vectores propios) obtenidos del ERA para el caso # 3 .....	61
Figura 18 Determinación del rango de datos para la fabricación de las filas en la matriz de Hankel, a partir de la función de correlación cruzada de las señales en el dominio del tiempo	63
Figura 19 Rotor flexible tipo Jeffcott .....	68
Figura 20 Esquema del elemento de línea tipo viga.....	72
Figura 21 Discretización del sistema en elementos.....	76
Figura 22 Ensamble global de las matrices de cada elemento .....	77
Figura 23 Esquema del aporte de rigidez y amortiguamiento de los soportes al rotor.....	78
Figura 24 Frecuencias naturales y modos de vibración del sistema.....	83
Figura 25 Diagrama de Campbell del sistema en estudio .....	85
Figura 26 Diagrama de inestabilidad dinámica del sistema en estudio .....	87
Figura 27 Banco de ensayos, objeto de estudio para el desarrollo del trabajo de investigación.....	103
Figura 28 Dimensiones del disco central del rotor.....	104
Figura 29 Dimensionamiento de los muñones del cojinete hidrodinámico .....	105
Figura 30 Distribución de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en el cojinete hidrodinámico.....	108
Figura 31 Dimensiones del piñón.....	109
Figura 32 Interpretación del comportamiento de la rigidez de la cadena sobre el sistema .....	109
Figura 33 Dimensiones de acople del eje al motor.....	111
Figura 34 Interpretación del comportamiento de la rigidez del acople al motor sobre el sistema.....	111

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Figura 35 Motor del banco de ensayos .....	112
Figura 36 Variador de frecuencia del banco de ensayos .....	113
Figura 37 Primer modo de flexión del rotor en condición de suspensión libre-libre .....	114
Figura 38 Segundo modo de flexión del rotor en condición de suspensión libre-libre .....	115
Figura 39 Tercer modo de flexión del rotor en condición de suspensión libre-libre.....	115
Figura 40 Cuarto modo de flexión del rotor en condición de suspensión libre-libre .....	115
Figura 41 Primer modo de flexión del rotor en condición de empotramiento .....	117
Figura 42 Segundo modo de flexión del rotor en condición de empotramiento .....	117
Figura 43 Tercer modo de flexión del rotor en condición de empotramiento .....	118
Figura 44 Cuarto modo de flexión del rotor en condición de empotramiento .....	118
Figura 45 Quinto modo de flexión del rotor en condición de empotramiento .....	119
Figura 46 Modulo analizador de datos vibratorios .....	120
Figura 47 Excitador dinámico. Hammer .....	121
Figura 48 Acelerómetro uniaxial .....	122

### Lista de Tablas

Tabla 1 Frecuencias obtenidas en condición de suspensión libre-libre, bajo la simulación en SolidWorks.....	27
Tabla 2 Frecuencias obtenidas en condición de apoyo, bajo la simulación en SolidWorks.....	28
Tabla 3 <i>Frecuencias naturales obtenidas del EMA en el rotor y la comparación de dichos resultados con la simulación en SolidWorks en condición de apoyo</i> .....	32
Tabla 4 Resultados OMA para el sistema en condición estática.....	58
Tabla 5 Resultados OMA para el sistema en condición de operación .....	60
Tabla 6 Resultados OMA para el sistema en condición estática con un solo golpe de excitación (un pulso).....	61
Tabla 7 Contrastación de los resultados del OMA en condición estático vs la simulación de SolidWorks en condición de apoyo .....	65
Tabla 8 Contrastación de los resultados del OMA en condición de operación vs la simulación de SolidWorks en condición de apoyo .....	66
Tabla 9 Contrastación de los resultados del OMA en condición estático y un solo golpe de excitación vs la simulación de SolidWorks en condición de apoyo.....	66
Tabla 10 Contrastación de los resultados del modelo numérico vs el OMA. ....	84

**Lista de Apéndices**

Apéndice A. Características físico-mecánicas de los componentes del banco de ensayos .....	103
Apéndice B. Simulación del sistema en estudio bajo el software CAD SolidWorks.....	114
Apéndice C. Sensórica utilizada en los ensayos del trabajo de investigación.....	120

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Resumen**

**Título:** Desarrollo de una metodología de Análisis Modal Operacional (OMA), para determinar los rangos de estabilidad dinámica de un rotor flexible tipo Jeffcott con velocidad variable, basada en las técnicas en el dominio del tiempo NExT y ERA\*

**Autor:** Fabian Rodolfo Nova Agudelo\*\*

**Palabras Clave:** Análisis Modal Operacional, OMA, rotor Jeffcott, estabilidad dinámica, diagrama de Campbell, EMA, valores propios, vectores propios, NExT, ERA.

**Descripción:** La presente tesis de maestría describe el desarrollo e implementación de dos técnicas de Análisis Modal Operacional (OMA, Operational Modal Analysis) en el dominio del tiempo NExT-ERA, para la identificación de los parámetros modales de un banco de ensayos de un rotor flexible tipo Jeffcott a escala de laboratorio. Estos parámetros modales son usados como base comparativa experimental para validar los resultados del desarrollo de un modelo numérico del rotor que identifica los rangos de velocidades críticas y de inestabilidad dinámica del sistema. La tesis se presenta como una extrapolación de OMA, que es usualmente desarrollado en la identificación de frecuencias naturales de estructuras civiles, a una herramienta de contrastación y validación de resultados de modelos numéricos de sistemas rotodinámicos.

---

\*Tesis de maestría.

\*\* Facultad de Ingeniería Mecánica. Escuela de Ingeniería mecánica. Director: Heller Guillermo Sánchez Acevedo. Doctor en Ingeniería.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Abstract**

**Title:** Development of a methodology of operational modal analysis (OMA) to determine the range of dynamic stability of a Jeffcott flexible rotor with variable speed; methodology based on the NeXT and ERA techniques.\*

**Author:** Fabian Rodolfo Nova Agudelo<sup>1</sup>

**Keywords:** Operational modal analysis, OMA, Jeffcott rotor, dynamic stability, Campbell diagram, EMA, eigenvalue, eigenvector, NeXT, ERA.

**Description:** This thesis describes the development and implementation of two operational modal analysis techniques with NeXT and ERA\* in order to identify the modal parameters of a Jeffcott flexible rotor. These modal parameters are used as an experimental comparative base to validate the results of the development of a numerical model of the rotor that identifies the ranges of critical speed and dynamic instability of the system. Also, this thesis extrapolates OMA from a tool that is usually developed in the identification of natural frequencies of structures to a tool that shows the contrast and validation of results of numeric models of rotodynamic systems.

---

\* Thesis.

<sup>1</sup> Facultad de Ingeniería Mecánica. Escuela de Ingeniería mecánica. Director: Heller Guillermo Sánchez Acevedo. Doctor en Ingeniería.

## Introducción

La actualidad industrial e ingenieril ha permitido el desarrollo de modelos numéricos que posibilitan mejorar los diseños y determinar el comportamiento de los sistemas. Algunos de estos modelos han sido enfocados en la obtención y análisis de los parámetros modales (frecuencias naturales, modos de vibración y coeficientes de amortiguamiento), que permiten tener un conocimiento dinámico y vibratorio de estructuras tanto civiles como mecánicas. La literatura muestra algunos ejemplos donde la ingeniería civil y mecánica han desarrollado modelos numéricos para determinar el comportamiento dinámico de sistemas que les conciernen.

En la ingeniería civil se observan ejemplos como el caso de R. Karoumi, donde desarrolló un método para modelar puentes a través del análisis de elementos finitos no lineales (Karoumi, 1999) o lo reportado por H. Sánchez Acevedo, donde utilizó técnicas de análisis modal para desarrollar una metodología que permitiera detectar los fallos en estructuras metálicas con enfoque industrial en (Sánchez et al., 2014), (Sánchez et al., 2017)

Por otro lado, la ingeniería mecánica ha desarrollado modelos numéricos que estudian el comportamiento dinámico de barcos (Hageman & Drummen, 2019), (Qiankun & Gangyi, 2011), motocicletas (Balaguru et al., 2019), (Jelani et al., 2019) e identifican daños y monitorean la salud de los sistemas mecánicos (Doebbling et al., 1996). Así como también, se han desarrollado modelos numéricos con el objeto de mejorar los diseños ingenieriles, donde se analizan aspectos como la fatiga (Aenlle et al., 2006), el desgaste (Tong et al., 2012) y detección de grietas en elementos rotativos; por ejemplo, P. Saavedra, presenta un análisis teórico de un eje con una grieta transversal y analiza la influencia de la grieta en las vibraciones transversales y longitudinales de un rotor sencillo perfectamente balanceado (Baquedano et al., 2011).

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

En el campo de la ingeniería mecánica, las turbomáquinas son un ejemplo de sistemas mecánicos que requieren un análisis particular por los fenómenos físicos intrínsecos u ocasionales (influenciados por otros factores) que presenta. El efecto giroscópico es uno de estos fenómenos intrínsecos e importante de estos sistemas, tal como lo enuncia y lo incluye R. R. Donato en su modelo numérico de un rotor, donde demuestra la influencia de este fenómeno en las frecuencias naturales pares, que se separan conforme se aumenta la velocidad angular (Donato, 2010). Por otro lado, se encuentran los fenómenos producto de efectos vibratorios o fallas en el sistema que ocasionan problemas en las turbomáquinas y como tal deben ser analizados. El efecto al desbalance y la inestabilidad dinámica, son algunos ejemplos de estos fenómenos físicos ocasionales, donde este último será parte concluyente del presente trabajo de investigación y que ha sido objeto de estudio en otros trabajos como el de L. Cui, donde analiza la relación de la rigidez y la velocidad de rotación sobre la estabilidad y la bifurcación del movimiento periódico del sistema rotor-cojinete (Cui & Zheng, 2014) o el de J. A. Vázquez (Vázquez et al., 2001), donde realiza un estudio experimental de los efectos de la flexibilidad del soporte de los cojinetes sobre la estabilidad del rotor y la respuesta al desequilibrio.

Considerando la fuerza productiva de las turbomáquinas, E Chatelet enuncia la importancia del uso de modelos numéricos e identificación de parámetros modales que permitan comprender y determinar su comportamiento dinámico, con el objetivo de evitar condiciones de resonancia e inestabilidad en la operación y que se asegure la vida útil de las máquinas (Chatelet et al., 2005).

Sin embargo, no solo basta con desarrollar un modelo numérico para un sistema o equipo en específico, éste debe ser validado por metodologías que entreguen la información experimental del sistema, mediante la comparación de resultados teóricos-experimentales (Tarpø et al., 2020). Una

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

de estas metodologías es el Análisis Modal Experimental (EMA, Experimental Modal Analysis), donde se adquieren las Funciones de Respuesta en Frecuencia (FRF) de un componente en estudio a través de la excitación de una fuerza controlada; por ende y para el desarrollo de esta técnica, se debe apartar el equipo en un ambiente ideal de laboratorio, lo que a nivel operativo puede afectar la producción y acarrear pérdidas económicas (F. Nova & Reina, 2017).

En vista de ello y teniendo en cuenta la importancia de los modelos numéricos y ensayos modales experimentales para equipos rotativos como las turbomáquinas, el presente trabajo de investigación exhibe el desarrollo de una técnica de Análisis Modal Operacional (OMA, Operational Modal Analysis) con el objeto de contrastar y validar las frecuencias naturales obtenidas del desarrollo de un modelo numérico de un rotor flexible tipo Jeffcott (cuyo comportamiento dinámico se asemeja al campo de las turbomáquinas) y detectar los rangos de inestabilidad dinámica del rotor, sin la necesidad de parar y desmontar el sistema.

## 1. Objetivos

### 1.1. Objetivo general

Desarrollar e implementar una metodología OMA, a partir de las técnicas en el dominio del tiempo NExT y ERA, que permitan determinar los parámetros modales de un rotor flexible tipo Jeffcott de sección uniforme, a escala de laboratorio, y los rangos de las velocidades críticas operativas del rotor.

### 1.2. Objetivos específicos

- Implementar un modelo numérico de un rotor flexible tipo Jeffcott, de sección uniforme, apoyado sobre cojinetes hidrodinámicos, a escala de laboratorio.
- Implementar las técnicas de Análisis Modal Operacional (OMA) en el dominio del tiempo, NExT y ERA, para la caracterización modal de un rotor flexible tipo Jeffcott apoyado sobre cojinetes hidrodinámicos, de sección uniforme y a escala de laboratorio.
- Ajustar y validar el modelo numérico implementado para la identificación de los parámetros modales del rotor tipo Jeffcott, a través de un método de comparación y correlación modal y soportado en un método de expansión modal.
- Determinar la estabilidad dinámica del rotor flexible tipo Jeffcott, a partir de la identificación de los rangos de las velocidades críticas operativas del rotor.

## **2. Metodología de trabajo**

Para el desarrollo del proyecto de investigación, se establece una metodología fundamentada en el desarrollo de tres capítulos los cuales la secuencia de resultados de cada uno de ellos, es la apertura al capítulo siguiente. Esta distribución de capítulos viene dada de la siguiente forma:

### **2.1. Capítulo 1**

Se desarrollan los ensayos teóricos-experimentales que permiten tener una base comparativa teórica para los resultados a obtener en el capítulo 2.

### **2.2. Capítulo 2**

Tanto el capítulo dos, como el capítulo tres son los capítulos fundamentales y sobre los cuales se centra el trabajo de investigación. Este capítulo tiene como foco el desarrollo de las técnicas de Análisis Modal Operacional (OMA, Operational Modal Analysis) en el dominio del tiempo NExT (Natural Excitation Technique) y ERA (Eigensystem Realization Algorithm), para contrastar, ajustar y validar los resultados de un modelo numérico desarrollado en el capítulo 3.

### **2.3. Capítulo 3**

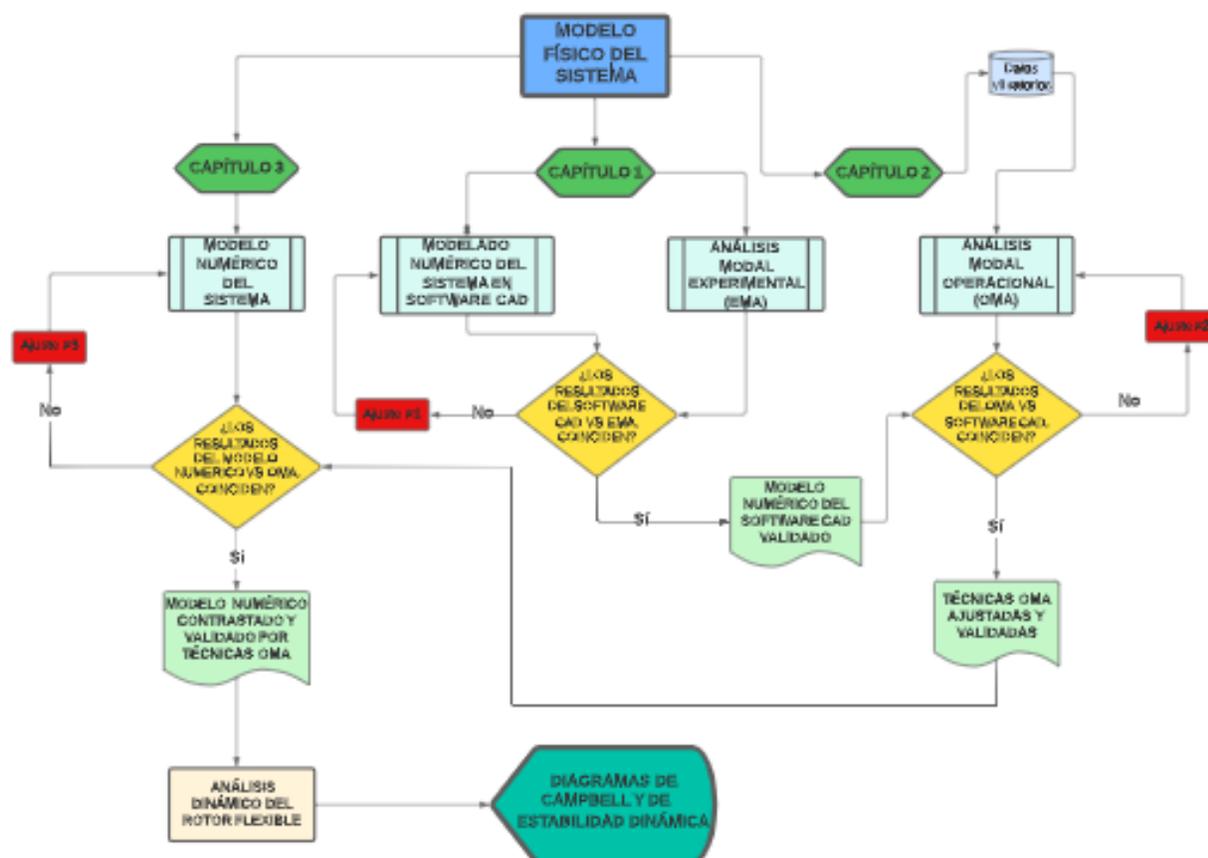
Este capítulo se centra en el desarrollo del modelo numérico del banco de ensayos en estudio, el cual es un rotor flexible tipo Jeffcott apoyado sobre cojinetes hidrodinámicos. Con este modelo numérico se determinan los valores propios del sistema que son contrastados con los obtenidos en las técnicas OMA del capítulo 2. Una vez se valida el modelo numérico a partir de los resultados OMA, se determinan los rangos de las velocidades críticas operativas del rotor con sus respectivos diagramas de Campbell y de inestabilidad del sistema.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

La anterior se evidencia en la Figura 1, la cual es un diagrama de flujo que determina el procedimiento para llegar a los resultados esperados (diagramas de Campbell y de estabilidad del sistema).

**Figura 1**

*Diagrama de flujo de la metodología desarrollada*



## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

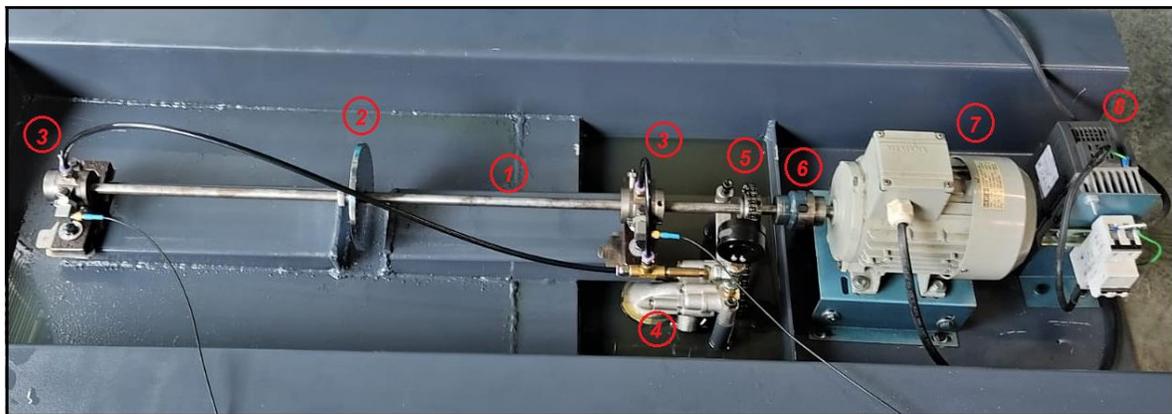
**3. Modelo físico del sistema**

El modelo físico del sistema es el elemento principal (objeto de estudio) del trabajo de investigación y sobre el cual se fundamentan tres capítulos que contienen los ensayos y desarrollos numéricos que conllevan a los resultados esperados.

Este modelo físico es un banco de ensayos a escala de laboratorio que cumple con las condiciones de un rotor flexible tipo Jeffcott (Carbajal et al., 2014), apoyado sobre dos cojinetes hidrodinámicos y que se encuentra ubicado en el laboratorio de vibraciones de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Industrial de Santander. Dicho banco de ensayos se presenta en la Figura 2.

**Figura 2**

*Banco de ensayos para el desarrollo del proyecto de investigación*



Este banco de ensayos y según se observa en la Figura 2, contiene los siguientes componentes:

- 1) Eje
- 2) Disco

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

- 3) Cojinetes hidrodinámicos
- 4) Bomba de impulso para el aceite del cojinete
- 5) Sistema de transmisión de potencia para la bomba
- 6) Acople motor
- 7) Motor
- 8) Variador de frecuencia e interruptor

En el Apéndice A, se describen cada uno de estos componentes con su respectiva información técnica, geométrica y caracterización dinámica.

### **3.1. Condiciones operativas del banco de ensayos**

Para el desarrollo del proyecto, es importante constatar que el banco de ensayos se encuentre en condiciones óptimas de medición, es por ello que se realizó un análisis de vibraciones mecánicas en el sistema, con el fin de validar problemas de desalineamiento, desbalance, pandeo del rotor, entre otros, que puedan alterar los datos vibratorios fundamentales para el desarrollo de los ensayos y técnicas modales.

El análisis vibratorio consta en ubicar los acelerómetros en los apoyos del rotor y operarlo a una velocidad constante (1200 rpm). Con los datos obtenidos por los acelerómetros, se integran y se procesan mediante la Transformada de Fourier, con el propósito de evaluar el comportamiento del sistema en el dominio de la frecuencia y a partir de espectro de frecuencias, determinar el estado operativo del sistema.

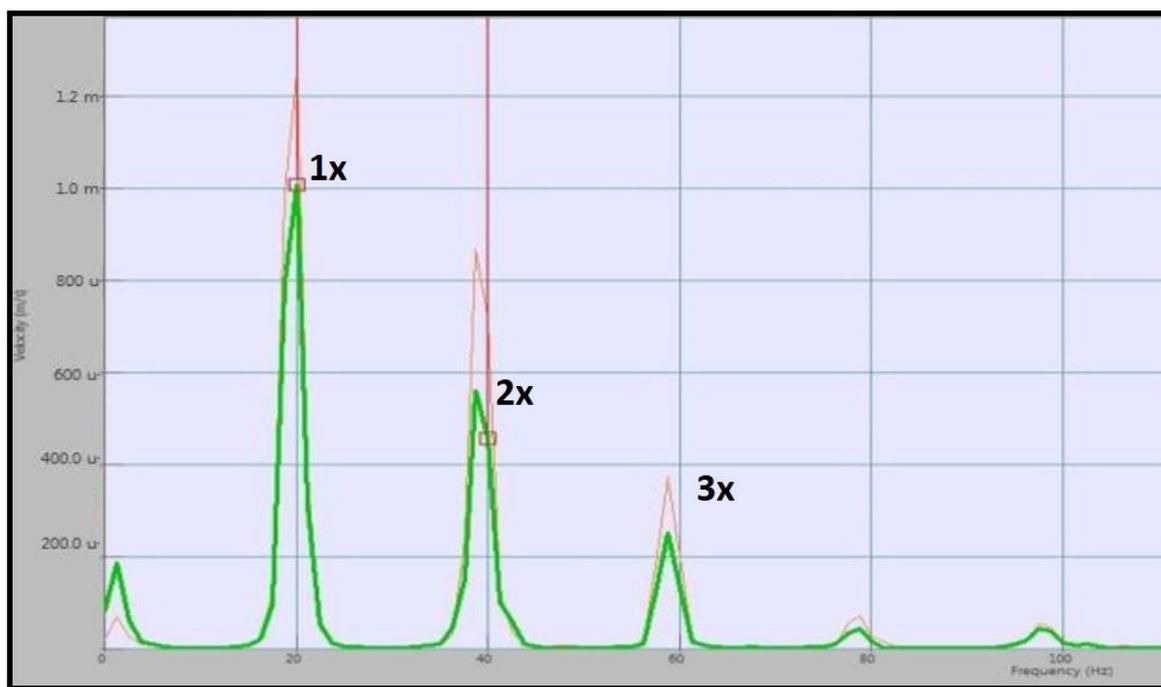
Durante la puesta en marcha del banco de ensayos se adecuó el alineamiento y se rectificó el eje con el objetivo de evitar pandeos sobre el rotor. En la Figura 3, se observa el espectro de frecuencia obtenido una vez hecho las adecuaciones previamente mencionadas. Con el espectro de frecuencia

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

final y con la ayuda de la norma ISO 10816-2014 (ISO/TC 108/SC 2, 2014), se evaluó la severidad y el estado de fallo del sistema.

**Figura 3**

*Espectro de frecuencia del sistema, donde se evidencian las condiciones operativas óptimas para el estudio.*



El espectro de frecuencia que se evidencia en la Figura 3, es aquel que una vez finalizada las adecuaciones (pandeo y alineamiento), contiene los datos de vibración más altos [1X=1mm/s], tanto para las mediciones radiales como axiales y dada la ISO 10816, el sistema cumple con los parámetros operativos con condiciones de una máquina nueva o reacondicionada.

#### **4. Capítulo 1: modelado CAD (Computer Aided Design) y Análisis Modal Experimental (EMA, Experimental Modal Analysis)**

##### **4.1. Modelo numérico del sistema desarrollado en SolidWorks (Software CAD)**

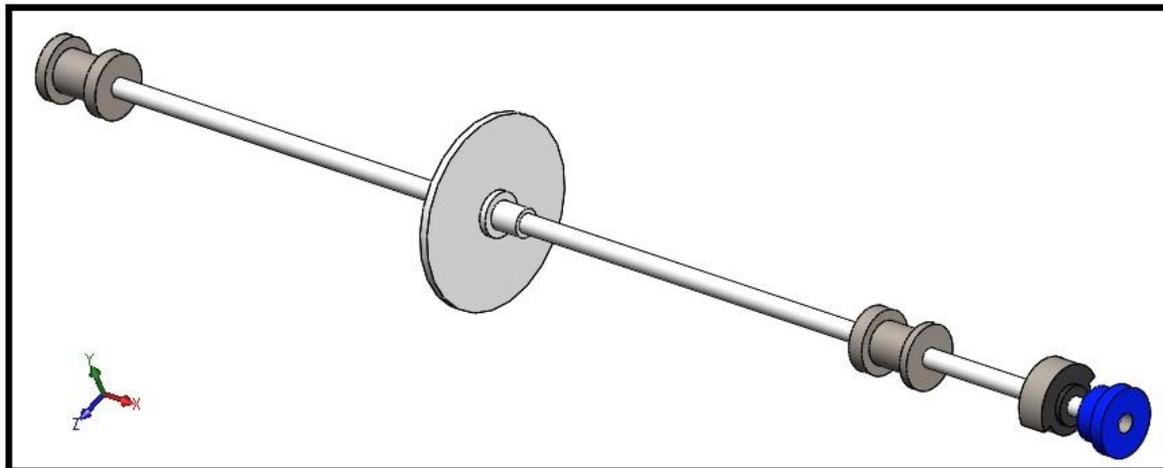
Con el objeto de tener una base teórica de los resultados del sistema (modelo físico), se modela el rotor y el sistema completo en un software que permite realizar un análisis de elementos finitos y conocer a priori las características dinámicas del sistema.

Este modelo, permite identificar las frecuencias y formas modales del sistema en estudio. De esta manera, se tiene una noción de cuáles son los puntos estratégicos (evitando nodos de vibración) del rotor. Conocer estratégicamente estos puntos, posibilita ubicar la sensórica en lugares de mayor contenido energético que alimenten en mejor medida los datos vibratorios para los ensayos experimentales.

Con la ayuda de SolidWorks y con los datos físico-mecánicos del banco de ensayos, se modeló el sistema con los componentes principales que serán objeto de estudio, dicho modelo se evidencia en la Figura 4.

**Figura 4**

*Modelo del rotor en SolidWorks*



Una vez desarrollado el modelo en SolidWorks, se dispone a hacer la evaluación modal del sistema, con la ayuda del complemento “Simulación, estudio de frecuencia” del Software. En esta simulación se configura las condiciones de contorno del sistema y el tipo de malla, que para el caso de estudio se utilizó una malla basada en curvatura de combinado, con elementos triangulares de 7 mm de tamaño.

La evaluación del sistema, consta de dos escenarios que se describen a continuación:

#### **4.1.1. Simulación del rotor en condición de suspensión libre-libre**

Esta simulación tiene como objeto encontrar las formas modales y frecuencias naturales del sistema sin ningún tipo de empotramiento o rigidez externa, solo se tiene en cuenta los aportes de masa del disco, de los muñones del cojinete, del piñón y del acople del motor al eje. Los resultados encontrados en esta simulación se presentan en la Tabla 1.

**Tabla 1**

*Frecuencias obtenidas en condición de suspensión libre-libre, bajo la simulación en SolidWorks*

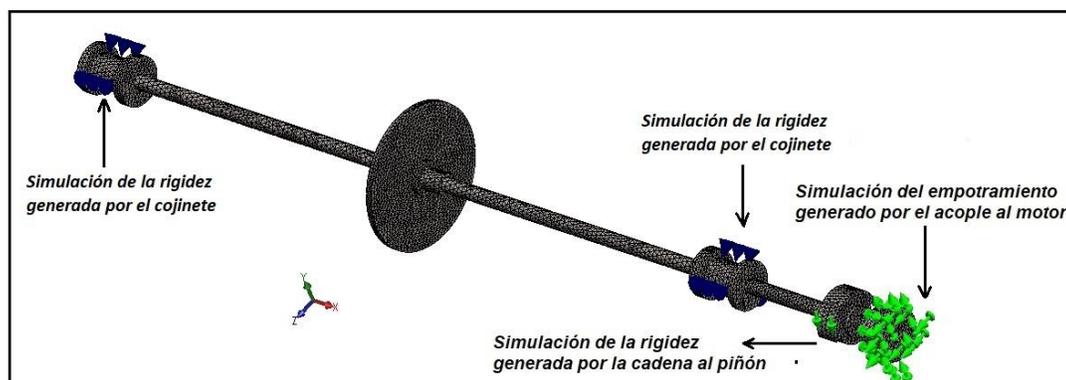
Modo	Frecuencias naturales [Hz]
1	40,83
2	131,89
3	290,47
4	476,06

#### 4.1.2. Simulación del rotor en condición de empotramiento

Esta simulación tiene como objeto encontrar las formas modales y frecuencias naturales del sistema, tal como se presenta en el banco de ensayos, es decir con los aportes de rigidez dados por los cojinetes hidrodinámicos, la cadena de transmisión de potencia a la bomba de los cojinetes y la condición de empotramiento dada por el acople al motor. El modelo para la simulación realizada en SolidWorks, se presenta en la Figura 5. Los resultados encontrados en esta simulación se presentan en la Tabla 2.

**Figura 5**

*Simulación del sistema en SolidWorks*



**Tabla 2**

*Frecuencias obtenidas en condición de apoyo, bajo la simulación en SolidWorks*

<b>Modo</b>	<b>Frecuencias naturales[Hz]</b>
<b>1</b>	52,12
<b>2</b>	260,24
<b>3</b>	477,70
<b>4</b>	764,29
<b>5</b>	1112,2

#### **4.1.3. Análisis de resultados de las simulaciones en SolidWorks**

Como primera medida, es importante resaltar que los resultados de los modos de vibración de cada una de las simulaciones se encuentran en el Apéndice B. Ahora bien, con respecto a los resultados obtenidos, se evidencia un aumento (en promedio) del 62,5% de las frecuencias naturales en condición apoyado con respecto al libre-libre. Este aumento viene establecido por el aporte de rigidez que dan los cojinetes, la cadena y el acople al rotor; y es esta última simulación la que determina el comportamiento real del sistema.

Una vez desarrollado y obtenido los resultados del modelo numérico en SolidWorks, son contrastados con el EMA a fin de validar el modelo numérico desarrollado.

#### **4.2. Análisis Modal Experimental (EMA, Experimental Modal Analysis)**

En la aplicabilidad de estudios modales, el EMA es comúnmente utilizado para contrastar resultados teóricos, validar procesos y desarrollos numéricos de sistemas. En este ensayo, se somete un elemento en estudio a una fuerza de excitación controlada y determinada, en la que se mide la

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

respuesta para formular un modelo analítico que describa su comportamiento dinámico (Chopra & Upper, 2001).

La relación entre la fuerza de excitación (variable de entrada,  $Y(s)$ ), y la respuesta del sistema (variable de salida,  $X(s)$ ), viene determinada por la función de transferencia  $H(s)$ , tal como se evidencia en la Ecuación 1. En este sentido, para el EMA, las dos variables (entradas y salidas) son conocidas y medibles por medio de transductores; facilitando así, el proceso analítico de la identificación modal.

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \quad (1)$$

La ingeniería civil y mecánica, son áreas del conocimiento que han dado buen uso de esta técnica, reportándose trabajos como el de Ashkan Eslaminejad, Mariusz Ziejewski y Ghodrat Karami, donde detectaron los parámetros modales de un cascarón semiesférico, que contenía un fluido incomprensible y a presión, con el objetivo de analizar la influencia de la amortiguación de los fluidos en la compresibilidad de las frecuencias naturales y formas modales (Eslaminejad et al., 2019). También se ha visto desarrollada en la caracterización de tendones de vigas, con el fin de conocer la variación de las frecuencias naturales de la viga, de acuerdo con la tensión aplicada, la masa del tendón y el efecto que este elemento estructural puede influir en los modos de vibración de flexión y torsión (Ondra & Titurus, 2019) o la caracterización dinámica de componentes de una máquina rotativa, como lo son las hélices de un rotor (Teter & Gawryluk, 2016), (Alonso et al., 2019).

### **4.2.1. Implementación del EMA en el sistema de estudio del trabajo de investigación**

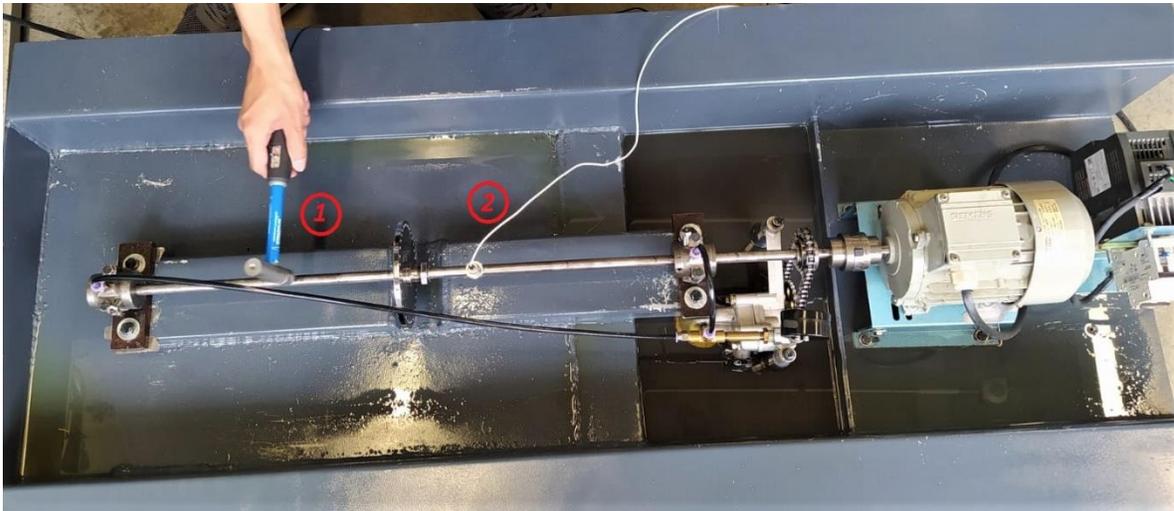
Con el objetivo de obtener los parámetros modales del rotor de forma experimental y poder tener una base comparativa y de ajuste al modelo realizado en SolidWorks, se desarrolla un EMA

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

al sistema en condiciones de apoyo. En la Figura 6, se evidencia el proceso de excitación y medición vibratoria del sistema, para el desarrollo del EMA.

### Figura 6

*Análisis Modal Experimental (EMA), en el banco de ensayos.*



Como se puede observar en la Figura 6, se utilizan dos transductores que permitirán obtener la función de transferencia  $H(s)$  (dada la Ecuación 1). De esta manera, la entrada del sistema  $Y(s)$ , estará establecida por el transductor 1, mientras que la señal de salida  $X(s)$ , serán los datos vibratorios obtenidos por el transductor 2. Los transductores utilizados son los siguientes:

- 1) **Excitador Dinámico:** Hammer modelo Dytran DYNAPULSE 5850 B configurado con una sensibilidad de 10.8 mv/Lbf
- 2) **Sensor de aceleración:** uniaxial de referencia 3056B2 de la empresa DYTRAN Instruments Inc, con sensibilidad de 100,44 mv/g. El acelerómetro cuenta con una base magnética para fijarse sobre el eje (superficie de medición). La ubicación de este acelerómetro es estratégica con el fin de obtener el mayor contenido energético de las

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

formas modales del rotor, esta ubicación está basada en las formas modales del sistema que se obtuvieron en la simulación señalada en el ítem 4.1.2. y expuesta en el Apéndice B.

Por otro lado, el sistema de adquisición de datos está compuesto no solo por los transductores que se evidencian en la Figura 6, sino también por los siguientes componentes:

- 3) **Tarjeta de adquisición de datos:** Módulo analizador de vibraciones Ref: OR-35-Freq-8 de la empresa OROS con capacidad de 8 canales de entrada y un ancho de banda de hasta 20 kHz.
- 4) **Software:** Software NV Gate V. 10.0 utilizando el Módulo Modal.

Además, en el Apéndice C se encuentran los equipos de adquisición utilizados para cada uno de los ensayos propuestos en el proyecto.

### **4.2.2. *Análisis y resultados del EMA***

Con los datos generados por el Hammer y los medidos por el acelerómetro, se realiza el procesamiento de la información a través del módulo modal. Allí, se encuentra la FRF (Función de Respuesta en Frecuencia), la cual es la función de transferencia del sistema  $[H(s)]$  y como tal, aquella que expone los resultados de este ensayo. Así pues, los resultados obtenidos en el EMA y la comparación con los obtenidos en SolidWorks se evidencian en la Tabla 3.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Tabla 3**

*Frecuencias naturales obtenidas del EMA en el rotor y la comparación de dichos resultados con la simulación en SolidWorks en condición de apoyo*

<b>Modo</b>	<b>Frecuencias naturales de SolidWorks [Hz]</b>	<b>Frecuencias naturales del EMA [Hz]</b>	<b>Porcentaje de error SW vs el EMA</b>
<b>1</b>	52,12	52,29	0,33 %
<b>2</b>	260,24	253,73	2,57 %
<b>3</b>	477,70	418,89	14,04 %
<b>4</b>	764,29	791,88	3,48 %
<b>5</b>	1112,2	1109,58	0,24 %

**4.3. Comparación, ajuste y validación de software CAD vs EMA**

Con la caracterización dinámica del rotor y del sistema a partir del EMA, se ajustan y se validan los resultados del modelo numérico en SolidWorks; estos resultados configuran la base comparativa de los resultados obtenidos en el OMA.

Con el objetivo de tener bases comparativas ajustadas, se validan los resultados de la simulación siempre y cuando sus dos primeras frecuencias naturales tengan un porcentaje de error con respecto al EMA menor a un 5%.

Teniendo en cuenta lo presentado en la Tabla 3, se evidencia un promedio de 4,7% del porcentaje de error, para las 5 primeras frecuencias naturales del sistema entre el EMA y la simulación del rotor en condición de apoyo. Además de ello, y teniendo en cuenta lo señalado

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

anteriormente, el porcentaje de error para las dos primeras frecuencias naturales es menor del 5%, lo que valida el modelo desarrollado en SolidWorks como base teórica comparativa para el OMA.

### 5. Capítulo 2: Análisis Modal Operacional (OMA, Operational Modal Analysis)

#### 5.1. Marco conceptual y referencial del OMA

A diferencia del EMA, en el OMA se desconoce y no es medible la entrada del sistema  $Y(s)$ ; esto debido a que no se utiliza sensorica para excitar los sistemas, en cuyas aplicaciones (principalmente civiles), no es recomendable por los efectos estructurales o por el costo de inversión de dichos transductores. Habida cuenta de ello, para obtener la función de transferencia  $H(s)$  en el OMA, se desarrolla una relación entre las salidas del sistema  $X(s)$ . La variable de entrada al sistema es una referencia de la salida, que es obtenida a partir de la medición de datos estocásticos producto de la vibración ambiental (generada por el tránsito de vehículos, vientos, ruidos ambientales, etc). La relación de datos estocásticos se evidencia en la Ecuación 2 y es sobre esta relación y de un algoritmo computacional, que se identifican los parámetros modales del sistema.

$$H(s) = \frac{X(s)}{Xref(s)} \quad (2)$$

Masjedian M.H y Keshmiri M en una revisión sobre las aplicaciones e investigaciones de dicha técnica (Masjedian & Keshmiri, 2009) mencionan que “el OMA ha venido generando atracción en la ingeniería civil, mecánica y aeroespacial, desde principios de 1990”. Ellos, al igual que Gómez Ivan, Maldonado Esperanza y Chio Cho Gustavo (Araujo et al., 2010) resaltan las ventajas del OMA contra el EMA en cuanto a:

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

- La adquisición de datos experimentales a partir de señales ambientales, son menos costosas que las adquiridas en un laboratorio con elementos excitadores que necesitan un ambiente controlado y simulación de condiciones límite.
- La información vibratoria del sistema se adquiere sin la interrupción operativa del sistema.
- La identificación modal a partir de fuerzas aleatorias aplicadas en distintos puntos de la estructura, reproduce en mejor medida el comportamiento real del sistema.
- Caracterización dinámica de todo el sistema, pues permite obtener la información del sistema en conjunto; por lo que no es necesario un desmontaje del equipo.
- Facilita la identificación modal en estructuras de mayor tamaño y complejidad estructural.
- Dada su aplicación mediante el monitoreo continuo del sistema, permite extrapolar dicha información a un mantenimiento basado en condición, evaluando y controlando la vida útil del sistema.

### **5.1.1. Métodos que permiten implementar un Análisis Modal Operacional, OMA**

El OMA demuestra su versatilidad en distintas técnicas que con el paso del tiempo se han venido desarrollando, algunas de ellas son:

**5.1.1.1. Métodos no paramétricos en el dominio de la frecuencia.** La finalidad de estos métodos es identificar la distribución tiempo-frecuencia de una señal y procesar dichos datos con base en la Transformada Discreta de Fourier (DTF). Usualmente son técnicas de menor grado de complejidad computacional y, por ende, las primeras en utilizarse. Algunas de estas técnicas son las siguientes:

#### **I. Peak Picking (PP)**

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

El Peak Picking, según lo expresa Rojas Ramón en su tesis (Díaz & Barrera, 2006.), es de las técnicas más sencillas al momento de identificar los parámetros modales de los sistemas, ya que enfoca su desarrollo en la obtención de las funciones de densidad espectral de potencia (PSD). Al graficar dichas funciones se puede visualizar picos a determinadas frecuencias, que están relacionados con las frecuencias naturales del sistema en estudio; siendo estos, los picos con mayor contenido energético del sistema.

### **II. Descomposición de dominio de frecuencia (FDD, Frequency Domain Decomposition)**

Es una técnica en mejora del PP; allí, se descomponen las matrices de las funciones de densidad espectral y por medio de una Descomposición en Valores Singulares (SVD, Singular Value Decomposition), se depuran los espectros generados computacionalmente (Maliar et al., 2019). En este método, los valores singulares mayores representan los modos dominantes, mientras que los demás picos que se observen en la PSD y con menor amplitud, representan ruido o modos débiles ocultos en los dominantes.

**5.1.1.2. Métodos paramétricos en el dominio del tiempo.** Son métodos de mayor requerimiento computacional y, por ende, proveen una mayor exactitud en la determinación de los parámetros modales. Las aproximaciones paramétricas son identificadas por medio de correlaciones (covarianzas) de la salida o directamente de la serie temporal (F. Nova & Reina, 2017). Algunos de ellos son:

### **III. Natural Excitation Technique (NExT)**

El objetivo principal de esta técnica es calcular las funciones de autocorrelación y correlación cruzada que representa la repuesta de vibración libre del sistema. Una vez obtenidas estas

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

funciones, se trabajan bajo la misma configuración que las funciones de respuesta al impulso (Iii et al., 1993).

En esta técnica, al igual que en la mayoría de técnicas OMA, es muy importante la localización y orientación de los puntos de medición y sobre todo del punto de medición de referencia (señal de entrada en la función de transferencia), de modo que los modos relevantes puedan ser captados. Es decir, el acelerómetro de referencia hay que ubicarlo en un punto que no sea un nodo de vibración (Rodríguez Súnico, 2005).

### **IV. Eigensystem Realization Algorithm (ERA)**

Es un complemento del NExT, con el objetivo de obtener los modos de vibración asociados a las frecuencias naturales calculadas. En esta técnica, se hace un análisis de los parámetros del sistema en función de la matriz de Hankel de los datos de respuesta libre (Pappa et al., 1992).

Una vez se tengan estructuradas las dos matrices de Hankel necesarias para obtener los parámetros modales del sistema, se realiza una Descomposición en Valores Singulares (SVD, Singular value decomposition) sobre dichas matrices; esto permite obtener el sistema de ecuaciones necesario para despejar la matriz que contiene la información dinámica del sistema (Caicedo et al., 2004).

### **V. Stochastic Subspace Identification (SSI)**

Es una de las técnicas más robustas computacionalmente y su enfoque principal es los datos temporales obtenidos experimentalmente; que, a diferencia de otras técnicas de dominio en el tiempo, no convierte dichos datos en espectros y covarianzas (Rodríguez Súnico, 2005).

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

El SSI esencialmente estima un modelo de espacio de estado a partir de una secuencia de correlación de salida, utilizando técnicas de álgebra lineal; el modelo espacial es el que determina los parámetros modales del sistema (Reynders et al., 2016).

### **5.1.2. Aplicaciones del OMA**

Dadas las ventajas previamente expuestas y el enfoque computacional que se expone en los métodos OMA, se evidencia la viabilidad de esta técnica para distintas aplicaciones y análisis vibratorios de los equipos industriales.

En el marco de este método de identificación modal, la mayoría de sus estudios se reportan en la ingeniería civil, ya sea en la caracterización modal de puentes (Hu et al., 2012), (Gentile & Gallino, 2008), (Yan & Ren, 2013), edificios (Park & Oh, 2018), (Acunzo et al., 2018), estadios (Cigada et al., 2008), (Magalhães et al., 2008), (Peeters et al., 2007), barandales de protección en estructuras civiles (González et al., 2013) o en la inspección y determinación de daño de dichas estructuras civiles como lo reportado por S. Rahmatalla (Rahmatalla et al., 2014), donde utilizó la técnica OMA para validar la previsibilidad de un modelo FEM desarrollado para identificar las áreas de alto estrés de un puente.

En cuanto a la aplicación en la ingeniería mecánica, se han registrado estudios en bancos de ensayos como el reportado por H. Sánchez, F. Nova y O. A González (Sanchez et al., 2019), donde se identificaron las dos primeras frecuencias naturales de un rotor en estado de operación con el uso la técnica OMA en el dominio de la frecuencia, Peak Picking y F. Nova, H. Sánchez y D. Villegas validaron esta técnica en (F. R. Nova et al., 2020) al aplicarla en ejes de distintos materiales (fibras de carbono en una matriz epóxica).

También se reportan casos en estudios más industriales como en generadores eléctricos (Lafleur & Vu, s. f.), caracterización modal en hélices tanto de helicópteros (Rizo-Patron & Sirohi, 2017),

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

como de rotores flexibles (Uehara & Sirohi, 2019); en la determinación de frecuencias resonantes de una máquina agrícola para corte combinado (Ebrahimi et al., 2013), en la determinación del nivel de estabilidad de corte de un torno (Kim & Ahmadi, 2019), e incluso en la caracterización de ruedas de vehículos (Palanivelu et al., 2015). Además, la técnica OMA ha tomado gran fuerza en los últimos años en el estudio de turbinas de viento, con el fin de monitorear y caracterizar dinámicamente la estructura (Devriendt et al., 2014), (Oliveira et al., 2014) o identificar los parámetros modales de sus respectivas hélices. Demostrando así, su gran versatilidad en aplicaciones industriales.

### 5.2. Metodología del Análisis Modal Operacional basado en las técnicas NExT-ERA

De acuerdo a la metodología y el objeto del proyecto a desarrollar, se trabaja con dos técnicas en el dominio del tiempo en la que una (ERA) es complemento de la otra (NExT).

#### 5.2.1. Metodología de la técnica NExT

El desarrollo de esta técnica consiste en el procesamiento de las señales de entrada. Este procesamiento está fundamentado en 3 procesos principales para el tratamiento de señales aleatorias o estocásticas, los cuales son los siguientes:

- 1) **Valor esperado  $[E[x(t)]]$ :** Con las señales obtenidas del sistema en estudio ( $x_k$ ), se hace una media de los valores (N) aleatorios. Esta media está determinada según la Ecuación 3. Es importante resaltar que se debe trabajar con resultados promedios, ya que estos caracterizan los valores representativos o “esperados” del sistema.

$$\mu_x = E[x(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t) \quad (3)$$

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

- 2) **Autocorrelación:** con el objetivo de encontrar los patrones repetitivos del espectro de las señales aleatorias (obtenidas del sistema en estudio) y en cuyo caso estos patrones repetitivos correspondan al comportamiento dinámico natural de sistema (esto entendiéndose que es un sistema libre de señales que alteran sus propiedades dinámicas, como lo pueden ser los fallos mecánicos del mismo), se desarrolla la autocorrelación de cada uno de las señales del sistema y se promedian.

Básicamente esta autocorrelación toma cada señal aleatoria ( $x_k$ ) y la multiplica por sí misma desfasada un “ $\tau$ ” en un tiempo “ $t$ ”, “para luego ser promediada (proceso del ítem 1); siendo este resultado una convolución de dicha multiplicación. El desarrollo de este proceso se fundamenta en la Ecuación 4.

$$R_{XX}(t, t + \tau) = E[x(t) \cdot x(t + \tau)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t) \cdot x_k(t + \tau) \quad (4)$$

- 3) **Correlación cruzada:** una vez hecho la autocorrelación de cada una de las señales obtenidas, se realiza una correlación, pero ya no entre las mismas señales, si no entre una señal característica tomada como referencia ( $y_k$ ); esta señal es valorada según el comportamiento del sistema simulado en SolidWorks.

Una vez adquirida la correlación cruzada de las señales obtenidas del sistema, se logra una señal en vibración libre que engloba el comportamiento del sistema como un proceso determinístico y no aleatorio; y es esta señal la que es tratada bajo el algoritmo ERA.

Esta correlación cruzada, que viene siendo la señal base del ERA, viene determinada por la Ecuación 5.

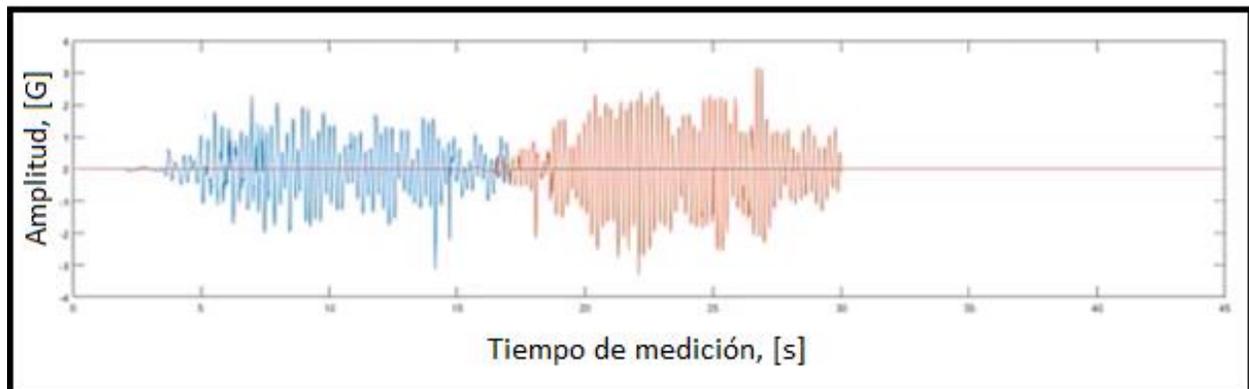
## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[x(t) \cdot y(t + \tau)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t) \cdot y_k(t + \tau) \quad (5)$$

Lo anterior se esboza en las Figura 7 y 8, donde en la Figura 7 se evidencian dos señales aleatorias que serán multiplicadas entre sí. La señal “roja” será la señal de referencia y la señal “azul” será aquella que se desfasa un “ $\tau$ ” a lo largo del tiempo “ $t$ ”. De esta manera, se obtendrá una señal correlacionada entre dos señales, cuya convolución resulta en una señal en vibración libre que se evidencia en la Figura 8.

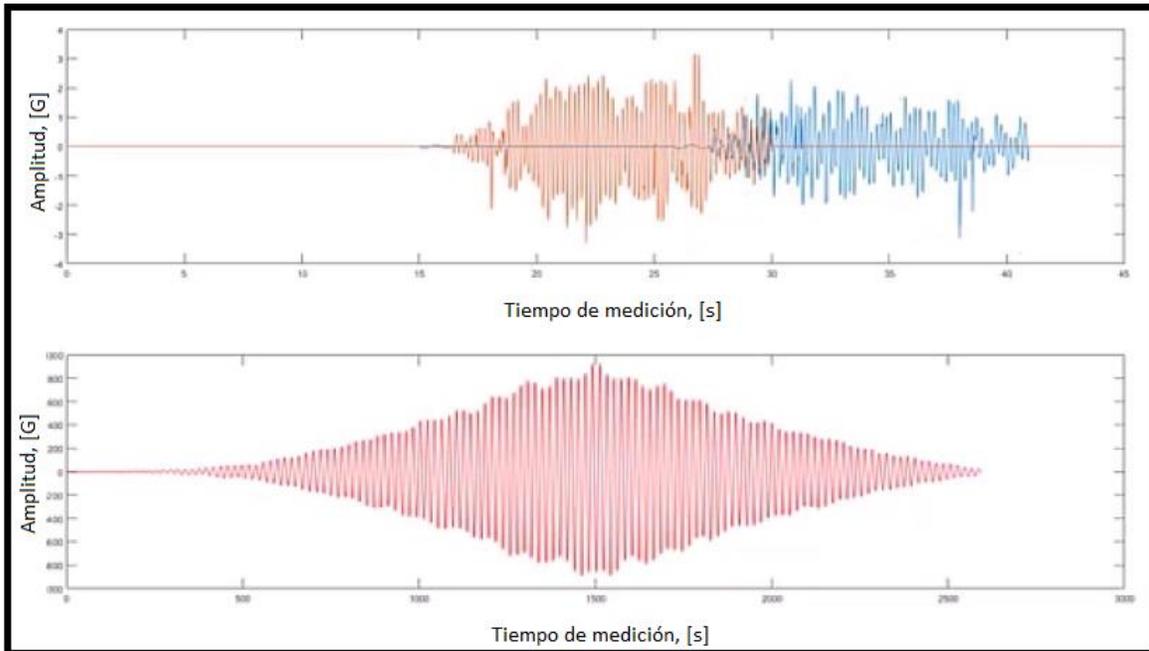
**Figura 7**

*Dos señales aleatorias que van a ser multiplicadas y promediadas, mediante el desfase de una de ellas.*



**Figura 8**

*Obtención de la señal en vibración libre, mediante la correlación cruzada promediada de dos señales aleatorias.*



**5.2.1.1 Método Welch.** Lo descrito anteriormente en las correlaciones y autocorrelaciones, se puede desarrollar de manera simplificada y práctica para fines de programación en MatLab, mediante un procedimiento que involucra la Transformada Discreta de Fourier (DFT, Discrete Fourier Transform), ya que esta es una herramienta utilizada en el procesamiento de señales digitales.

Peter Welch en (Welch, 1967), describe este proceso y la estimación de  $[R_{XY}(t, t + \tau)]$ , mediante la transformada inversa del espectro cruzado de densidad de potencia  $[R_{XY}(n)]$ .

De este modo, mediante la obtención del espectro cruzado de densidad de potencia  $[S_{XY}(f)]$  (para las señales  $\hat{X}^*$  y  $\hat{Y}$ ), por el método de Welch (Welch, 1967) y descrito en la Ecuación 6,

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

se obtendrá  $[R_{XY}(n)]$  dada la Ecuación 7 y es este valor el que conlleva a la señal en vibración libre que se trabaja en él ERA y que hereda las propiedades dinámicas del sistema en estudio.

$$S_{XY}(f) = \frac{1}{T} \cdot \hat{X}^*(f) \cdot \hat{Y}(f) \quad (6)$$

$$R_{XY}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_{XY}(f) e^{\frac{j2\pi nk}{N}} \quad (7)$$

**5.2.1.2. Consideración de la no correlación de la entrada con la salida y solución de la ecuación de movimiento.** Considerando la dinámica de una estructura que se representa en la Ecuación 8, la cual está compuesta de una entrada  $[F(t)]$ , estocástica (aleatoria o ruido blanco), la matriz de masa  $[M]$ , rigidez  $[K]$  y amortiguamiento  $[C]$ ; una respuesta  $[X_i(t)]$  o vector de desplazamientos en un tiempo  $(t)$ . Para el desarrollo del ERA es imperativo que el sistema se despliegue bajo un comportamiento en vibración libre; es decir, un  $F(t)=0$ .

$$M\ddot{X}_i(t) + C\dot{X}_i(t) + KX_i(t) = F(t) \quad (8)$$

Para que el sistema trabaje en vibración libre ( $F(t)=0$ ), los datos de entrada no pueden estar correlacionados con los datos de salida del sistema. Si esto no ocurriera, los datos que surjan de un  $F(t)$  diferente de "0", aportarían ruido e interferencia con la obtención de los parámetros modales del sistema basado en el NExT-ERA.

Lo anterior se especifica de la siguiente manera:

Dada la ecuación de movimiento del sistema, se le aplica los procesos de NExT (descritos en 5.2.1.), donde se multiplica el vector de salida  $[X_i(t)]$ , por una señal de salida de referencia  $[\ddot{X}_j(t + \tau)]$  desfasada un " $\tau$ ", a lo largo del tiempo " $t$ ", tal como se evidencia en la Ecuación 9

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

y a su vez se promedia dicha correlación cruzada (ver Ecuación 10), para obtener la señal en vibración libre, debido a que la fuerza o señal de entrada  $[F(t)]$  será 0.

$$M[\ddot{X}_i(t)\ddot{X}_j(t + \tau)] + C[\dot{X}_i(t)\dot{X}_j(t + \tau)] + K[X_i(t)X_j(t + \tau)] = F(t)\ddot{X}_j(t + \tau) \quad (9)$$

$$M E[\ddot{X}_i(t)\ddot{X}_j(t + \tau)] + C E[\dot{X}_i(t)\dot{X}_j(t + \tau)] + K E[X_i(t)X_j(t + \tau)] = E[F(t)\ddot{X}_j(t + \tau)] \quad (10)$$

La única forma de que la señal de entrada  $[F(t)]$  sea cero, es si el “valor esperado” del producto de dos señales no estén correlacionadas. Tal como se evidencia en la Ecuación 11.

$$E[F(t)\ddot{X}_j(t + \tau)] = 0 \quad (11)$$

En consecuencia, la ecuación del movimiento del sistema no es resuelta para  $[X_i(t)]$ , sino para  $[R_{\ddot{X}_i\ddot{X}_j}(\tau)]$ , en “ $\tau$ ”, como se observa en la Ecuación 12 y es este vector de salidas el que contiene las características dinámicas del sistema, tal como lo describe J.M Caicedo en (Caicedo et al., 2004) y como se exhibe en la Ecuación 13.

$$M\ddot{R}_{\ddot{X}_i\ddot{X}_j}(\tau) + C\dot{R}_{\ddot{X}_i\ddot{X}_j}(\tau) + KR_{\ddot{X}_i\ddot{X}_j}(\tau) = 0 \quad [\tau > 0] \quad (12)$$

Solucionando la ecuación diferencial homogénea del sistema para  $[R_{\ddot{X}_i\ddot{X}_j}(\tau)]$ , se tiene:

$$R_{\ddot{X}_i\ddot{X}_j}(\tau) = \sum_{k=1}^n [A^k e^{(-\xi^k \omega_n^k \tau)} \cdot \cos(\omega_d^k \tau) + B^k \cdot e^{(-\xi^k \omega_n^k \tau)} \cdot \sin(\omega_d^k \tau)] \quad (13)$$

### 5.2.2. Metodología de la técnica ERA a partir de la señal en vibración libre obtenida en el NExT

El algoritmo ERA toma la señal en vibración libre  $[R_{XY}(n)]$  desarrollada en el NExT y construye un sistema de espacio de estados en el que los parámetros modales de la estructura pueden ser identificados.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**5.2.2.1 Espacio de estados.** Para el desarrollo del ERA se usa una metodología que representa el comportamiento de un sistema mecánico enfocado al control del mismo. Teniendo en cuenta la Ecuación 8, que representa la ecuación de movimiento del sistema, existe una representación en espacio de estados, tal que simule el comportamiento de un sistema físico mediante la descripción de entradas, salidas y variables de estados, que están relacionadas a partir de ecuaciones diferenciales. Esta representación viene dada en las Ecuaciones 14 y 15.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (14)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (15)$$

*En donde:*

- ✓  $\dot{x}(t)$  y  $x(t)$ , son vectores de estado
- ✓  $y(t)$ , el vector de salidas
- ✓  $u(t)$ , el vector de entradas
- ✓  $B$ , la matriz de entrada
- ✓  $C$ , la matriz de salida
- ✓  $A$ , la matriz de estados, la cual contiene la información dinámica del sistema y como tal es el objeto de estudio.

**5.2.2.2. Funciones de respuesta al impulso y los parámetros de Markov.** Tal como se describió en el 5.1.1.2 numeral III, una vez modelado el sistema (a partir de espacio de estados), las funciones resultantes del mismo se trabajan como funciones de respuesta al impulso. Estas funciones, permiten representar el comportamiento del sistema de una manera más práctica, ya que se está trabajando con entradas que pueden ser interpretadas como impulsos sobre el sistema.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Por ejemplo, para desarrollar el OMA en el sistema de estudio (banco de ensayos) se dan uno o varios golpes aleatorios, con algún objeto, al componente de estudio (rotor). Dichos golpes hacen una alteración sobre el rotor y es este quien dispersa dicha energía a través de múltiples reflexiones. La entrada (el golpe,  $n$ ) representa un delta de Dirac  $\delta_g[n]$  y la salida (respuesta del rotor al golpe) se representa como  $y[n]$ , siendo esta la disipación de la energía a lo largo del rotor. Es por ello, que si se conoce  $y[n]$  para cada punto del rotor o del sistema, se conocerá la respuesta de todo el sistema a los impulsos generados a lo largo de un tiempo  $t$  y de esta manera caracterizar dinámicamente el elemento de estudio.

Habida cuenta de ello, el espacio de estados representado en las Ecuaciones 14 y 15, se desarrolla con base en las funciones de respuesta al impulso, teniendo en cuenta lo siguiente:

Partiendo de un estado inicial de la función de impulso donde  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 0$  y entendiéndose que  $\dot{x}(n) = x(n + 1)$  (característica de la derivada), se tienen distintos valores de  $x$ , tales que:

$$x(1) = Ax(0) + B\delta_g(0)$$

$$x(1) = B\delta_g(0) \quad ; \quad \delta_g(0) = 1 \text{ (característica de la función de impulso)}$$

$$x(1) = B$$

$$y(1) = Cx(1)$$

$$y(1) = \mathbf{CB}$$

$$x(2) = Ax(1) + B\delta_g(1) \quad ; \quad \delta_g(1) = 0 \text{ (característica de la función de impulso)}$$

$$x(2) = AB$$

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

$$y(2) = Cx(2)$$

$$y(2) = CAB$$

$$x(3) = Ax(2) + B\delta_g(2) \quad ; \delta_g(2) = 0 \text{ (característica de la función de impulso)}$$

$$x(3) = A^2B$$

$$y(3) = Cx(3)$$

$$y(3) = CA^2B$$

⋮

$$y(n) = CA^{n-1}B, \quad n > 0 \tag{16}$$

La anterior secuencia, que se presenta en la Ecuación 16, se conoce como *parámetros de Markov* (Smith, 2007.) y es una secuencia útil para describir la ecuación del movimiento del sistema (representada en espacio de estados) con entradas aleatorias, fundamentadas en las funciones de respuesta al impulso.

Es por ello, que es de vital importancia realizar un NExT antes del ERA, ya que, como es de notar, el ERA fundamenta el sistema en las funciones impulso, por consiguiente, la información a procesar en el ERA *debe tener estas características y es la función en vibración libre quien simula la entrada (como un impulso) al sistema a desarrollar en el ERA.*

**5.2.2.3 Construcción de las matrices de Hankel H(0) y H(1).** Una vez obtenida la señal de respuesta del sistema  $R_{\ddot{x}_i \ddot{x}_j}(\tau)$  en vibración libre, los datos obtenidos en dicha señal se ubican de acuerdo a un arreglo matricial determinado por la matriz de Hankel que se evidencia en la Ecuación 17.

$$H(k) = \begin{bmatrix} y(k+1) & y(k+2) & y(k+3) & \dots & y(k+m) \\ y(k+2) & y(k+3) & y(k+4) & \dots & y(k+m+1) \\ y(k+3) & y(k+4) & y(k+5) & \dots & y(k+m+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y(k+n) & y(k+n+1) & y(k+n+2) & \dots & y(k+m+n) \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (17)$$

Dicho arreglo matricial es utilizado para la solución de problemas de identificación de sistemas y/o problemas de realización de sistemas (System Realization Algorithm), con una secuencia de datos de salida de un modelo de espacio de estados con parámetros de Markov (Fazel et al., 2013).

En virtud de lo señalado, se construyen dos matrices de Hankel  $H(0)$  y  $H(1)$ , según la secuencia de parámetros de Markov, y obtener un sistema de matrices que permitan extraer la matriz “A” que contiene la información dinámica del sistema. Así, en las Ecuación 18 y 19, se pueden observar las dos matrices de Hankel a desarrollar.

$$H(0) = \begin{bmatrix} CB & CAB & CA^2B & \dots & CA^nB \\ CAB & CA^2B & CA^3B & \dots & CA^{n+1}B \\ CA^2B & CA^3B & CA^4B & \dots & CA^{n+2}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^nB & CA^{n+1}B & CA^{n+2}B & \dots & CA^{n+k}B \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$H(1) = \begin{bmatrix} CAB & CA^2B & CA^3B & \dots & CA^{n+1}B \\ CA^2B & CA^3B & CA^4B & \dots & CA^{n+2}B \\ CA^3B & CA^4B & CA^5B & \dots & CA^{n+3}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{n+1}B & CA^{n+2}B & CA^{n+3}B & \dots & CA^{n+k+1}B \end{bmatrix} \quad (19)$$

Como se puede notar, la matriz  $H(1)$  está desfasada una posición con respecto a la matriz  $H(0)$ ; este desfase permitirá extraer la matriz “A” (objeto de estudio). Tanto la matriz  $H(0)$

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

como la matriz  $H(1)$ , se pueden expresar como una separación de matrices que se rige bajo las Ecuaciones 20 y 21.

$$H(0) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^n \end{bmatrix} [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^nB] \quad (20)$$

$$H(1) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^n \end{bmatrix} A [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^nB] \quad (21)$$

#### 5.2.2.4 Descomposición en valores singulares (SVD, Singular Value Decomposition)

**para la matriz  $H(0)$ .** Una vez se ha obtenido el sistema de ecuaciones matriciales que se evidencia en las Ecuaciones 20 y 21, se realiza una separación experimental sobre la matriz  $H(0)$ . Esto se hace al aplicar la operación de SVD, donde se descompone  $H(0)$  en una multiplicación de tres matrices:  $U_{(m \times n)}$  (ortogonal),  $S_{(n \times n)}$  (diagonal) y  $V_{(n \times n)}$  (ortogonal) (Wall et al., 2003). Luego, se aprovechan estas tres matrices para *convertir*  $H(0)$  en la multiplicación de dos (P y Q), tal como se evidencia en las ecuaciones 22, 23, 24 y 25:

$$H(0) = U \cdot S \cdot V^T = (U \cdot \sqrt{S})(\sqrt{S} \cdot V^T) \quad (22)$$

$$P = (U \cdot \sqrt{S}) \quad (23)$$

$$Q = (\sqrt{S} \cdot V^T) \quad (24)$$

$$H(0) = PQ \quad (25)$$

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**5.2.2.5 Obtención de la matriz dinámica de estados “A”.** De acuerdo a la Ecuación 21 y con base en lo desarrollado en el numeral anterior, se establece la Ecuación 26, que se expresa a continuación:

$$H(1) = P \cdot A \cdot Q \quad (26)$$

Habiendo ya obtenido las matrices P y Q, expresado en la Ecuación 25, en función de la Ecuación 20; se despeja la matriz dinámica A dada la Ecuación 27:

$$A = P^{-1}H(1)Q^{-1} \quad (27)$$

**5.2.2.6 Obtención de los parámetros modales del sistema a partir de la matriz dinámica de estados “A”.** Con la matriz que contiene la información dinámica del sistema “A”, calculada en la etapa anterior, se formula y se desarrolla el problema de valores y vectores propios, representado en la Ecuación 28 y que se describe por Juang y Pappa en (Juang & Pappa, 1985).

$$Av = \lambda v \quad (28)$$

Donde,  $\lambda$  representa los valores propios (frecuencias naturales) y  $v$  los vectores propios (modos de vibración), de la matriz A.

Los valores propios del sistema se definen como un número complejo, tal como se exhibe en la Ecuación 29.

$$\lambda = a + bi \quad (29)$$

Si se aplica logaritmo a lado y lado de la Ecuación 29, y se utiliza la definición del logaritmo complejo, se tiene:

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

$$\log(\lambda) = \log(a + bi) = \ln(\sqrt{a^2 + b^2}) + \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)i \quad (30)$$

Dado que se está trabajando con mediciones experimentales y por ende se tiene la frecuencia de muestreo de la medición  $F_s$ , se multiplica la Ecuación 30 por  $F_s$ , así:

$$\log(\lambda) * F_s = [\ln(\sqrt{a^2 + b^2})] * F_s + [\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)i] * F_s \quad (31)$$

Por consiguiente, en la Ecuación 31 se denota que la parte real es igual a  $[\ln(\sqrt{a^2 + b^2}) * F_s]$ , mientras que la parte imaginaria es igual a  $[\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) * F_s]$ . De esta manera y teniendo en cuenta las ecuaciones previamente descritas en el documento; Juang y Pappa definen los parámetros modales de la siguiente manera (Juang & Pappa, 1985):

**1) Frecuencias operacionales:**

$$f = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) * F_s}{2\pi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (32)$$

**2) Modos de vibración:**

$$\phi = P * v \quad ; \quad (33)$$

*Donde P se describe en la Ecuación 27*

**3) Coeficientes de amortiguamiento:**

$$\xi = -\frac{\ln(\sqrt{a^2 + b^2}) * F_s}{|\log(\lambda) * F_s|} \quad (34)$$

### 5.3. Implementación de la metodología de las técnicas NExT-ERA en el objeto de estudio

Con la teoría expuesta en los ítems anteriores, se desarrolla y se implementa un algoritmo basado en las técnicas de dominio del tiempo NExT-ERA en el banco de ensayos (objeto de estudio), con el objetivo de determinar los parámetros modales del rotor. De este modo, para la consecución del OMA, se trabaja de la siguiente manera:

#### 5.3.1. *Proceso de adquisición de datos para la implementación de la técnica OMA*

Para la adquisición de datos y desarrollo de las técnicas OMA se trabaja con tres casos de estudios, los cuales son analizados y evaluados con el objetivo de validar la técnica OMA implementada. La frecuencia de muestreo utilizada para los tres casos de estudio fue de 2560 Hz, lo que permite evidenciar frecuencias naturales en el rango de 0 Hz a 1280 Hz (según el teorema de Nyquist, (*Análisis de señales en geofísica*, s. f.)), el cual es un rango ideal para detectar y comparar las 5 primeras frecuencias naturales exhibidas en la Tabla 3.

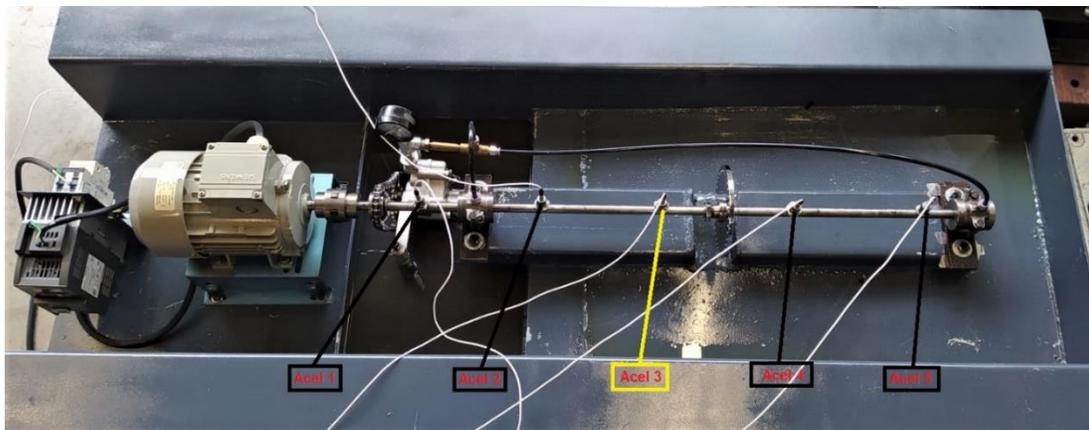
**5.3.1.1 Caso de estudio # 1: Mediciones vibratorias con acelerómetros uniaxiales ubicados a lo largo del rotor, en estado estático.** Desarrollar un EMA sobre una estructura civil genera una alta complejidad en su excitación artificial, debido al costo de la sensorica y el daño estructural que puede acarrear dichas excitaciones.

En ese sentido, el OMA nace como una solución de identificación de los parámetros modales de estructuras civiles. Para el trabajo en estudio, se interpreta y se extrapola el sistema o el banco de ensayos como una estructura civil, ubicando 5 acelerómetros uniaxiales a lo largo del rotor y generando excitaciones aleatorias y/o estocásticas con golpes sobre el banco de ensayos con un periodo de 10 minutos. En la Figura 9, se evidencia el escenario de medición para este caso de estudio.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Figura 9**

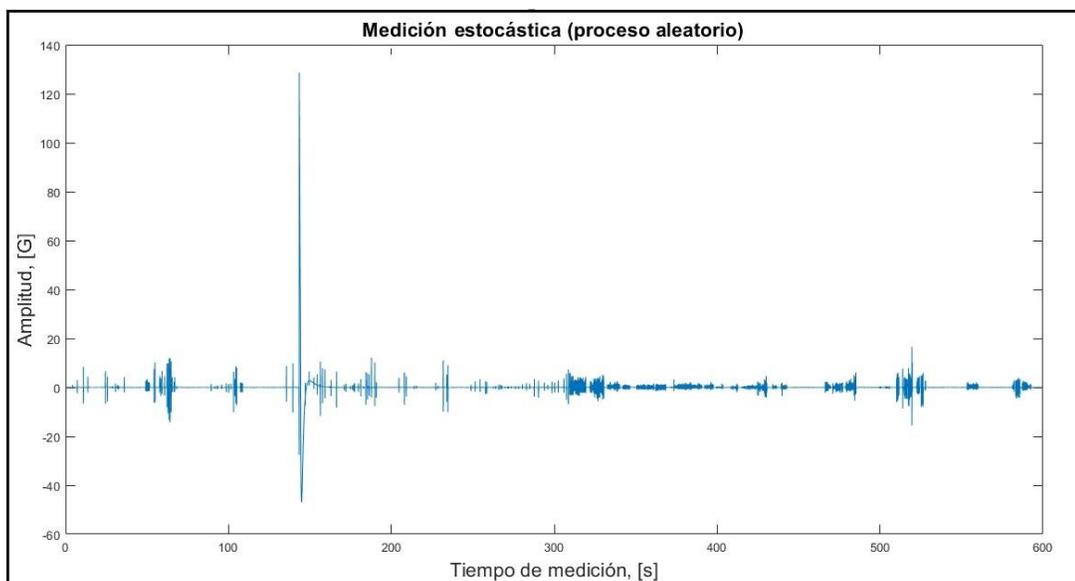
*Ensayo OMA en condiciones estáticas del rotor*



Las mediciones vibratorias obtenidas en este ensayo se evidencian en la Figura 10, mientras que en la Figura 11, se expone la gráfica en vibración libre obtenida en el NExT, bajo este caso de estudio.

**Figura 10**

*Registro de aceleración de los datos obtenidos para el ensayo de OMA en condición estática*

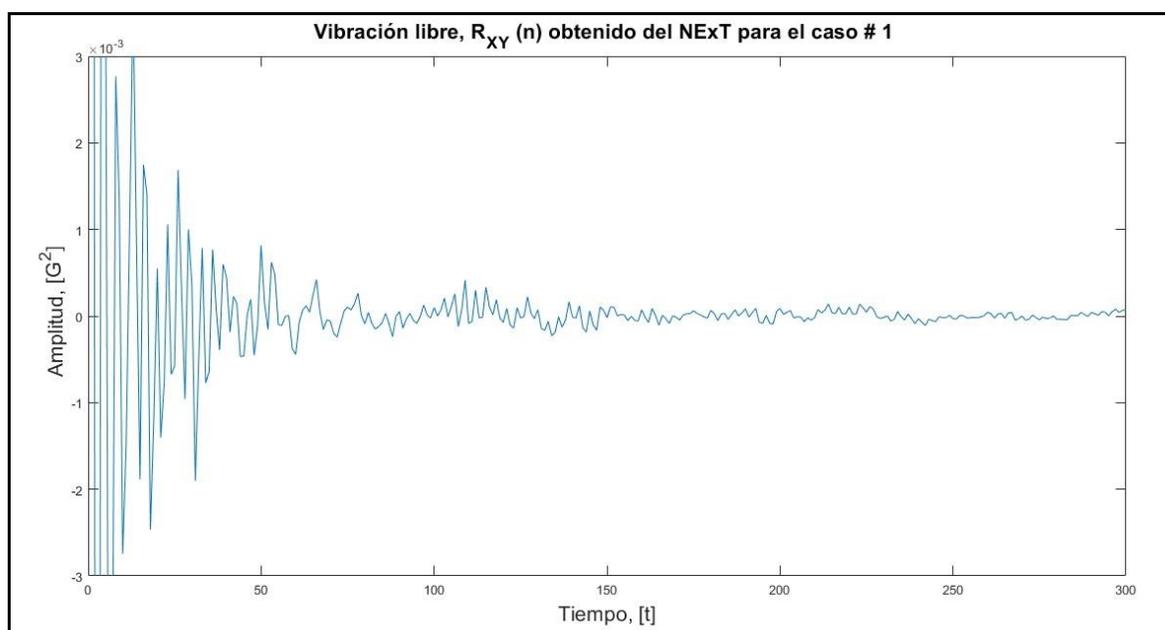


## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Para el desarrollo del NExT y generar la correlación cruzada entre las señales y una señal de referencia, se seleccionó la ubicación del Acelerómetro # 3 como sensor de referencia, ya que es en este punto donde se encuentra el mayor contenido energético, según las formas modales obtenidas en la simulación de software CAD SolidWorks.

**Figura 11**

*Resultado de aplicar NExT a los datos vibratorios del caso # 1*



**5.3.1.2 Caso de estudio # 2: Mediciones vibratorias con acelerómetros uniaxiales en los dos (2) puntos de apoyo del sistema (cojinetes hidrodinámicos) en estado operativo.** Puesto que el objeto de estudio es un rotor, se evalúa la adquisición de datos y resultados OMA del sistema en condición de operación (velocidad constante a 20 Hz), esto debido a que el sistema final no es una estructura civil, sino un sistema mecánico. En este sentido se utilizan las técnicas OMA en condiciones no óptimas y para las cuales nos fueron desarrolladas, intentando encontrar una correlación de datos que permita validar dicha técnica en escenarios mecánicos

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

operativos (armónicos y no estocásticos). La Figura 12 presenta el ensayo realizado donde se obtienen datos de vibración del rotor en sus dos puntos de apoyo.

### Figura 12

*Ensayo OMA en condiciones de operación del rotor*



Desarrollar el NExT bajo estas condiciones tiene varias desventajas las cuales se listan a continuación:

- 1) El NExT requiere que las señales de entrada no estén correlacionadas con las señales de salida. Dado que el motor genera una señal armónica, esta señal tendrá un comportamiento similar a la respuesta del sistema a dicha excitación; por ende  $R_{XY}(n)$ , estará alterada por el ruido aportado del resultado de la convolución de la correlación cruzada entre la entrada y la salida del ensayo.
- 2) Tanto para el NExT como para las demás técnicas OMA, es importante que los puntos de medición no estén ubicados en nodos de vibración; si bien los soportes no son un nodo vibratorio, dado que la holgura del rodamiento y el contenido de aceite del mismo genera una transmisión de energía al rotor, esta es mínima comparada con las mediciones directas

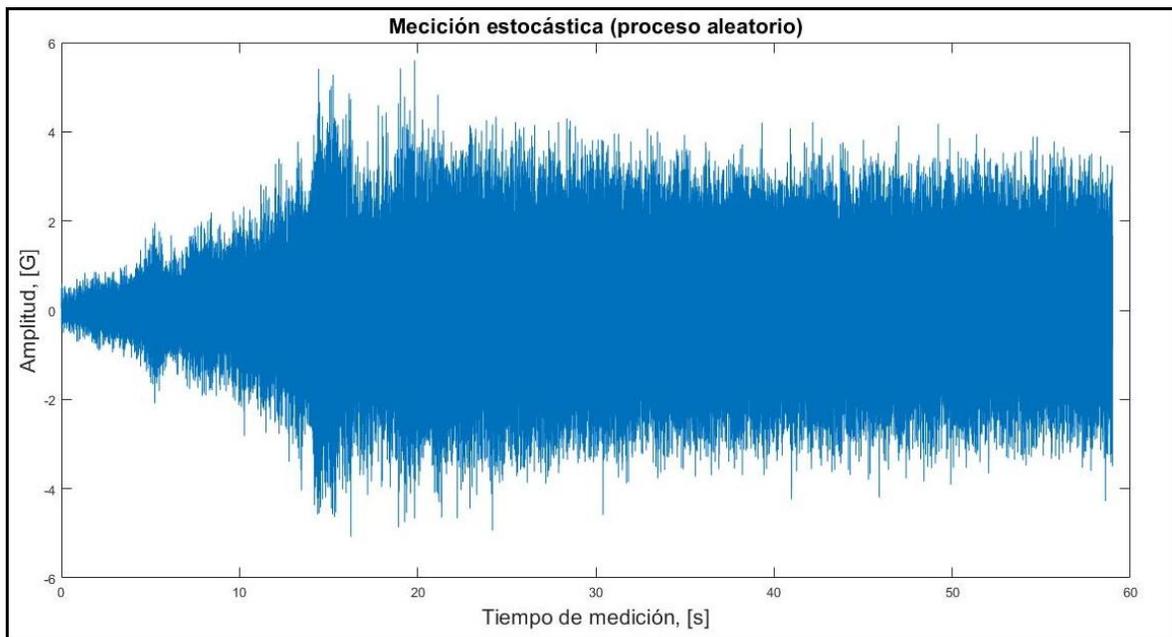
## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

en el eje; es decir, un ensayo bajo esta modalidad genera dificultades dado que las amplitudes de vibración son menores que en otros puntos.

A pesar de lo anterior, se obtienen medias vibratorias que se exponen en la Figura 13 y que al ser procesados por el Algoritmo NExT, se obtiene la señal en vibración libre que se muestra en la Figura 14.

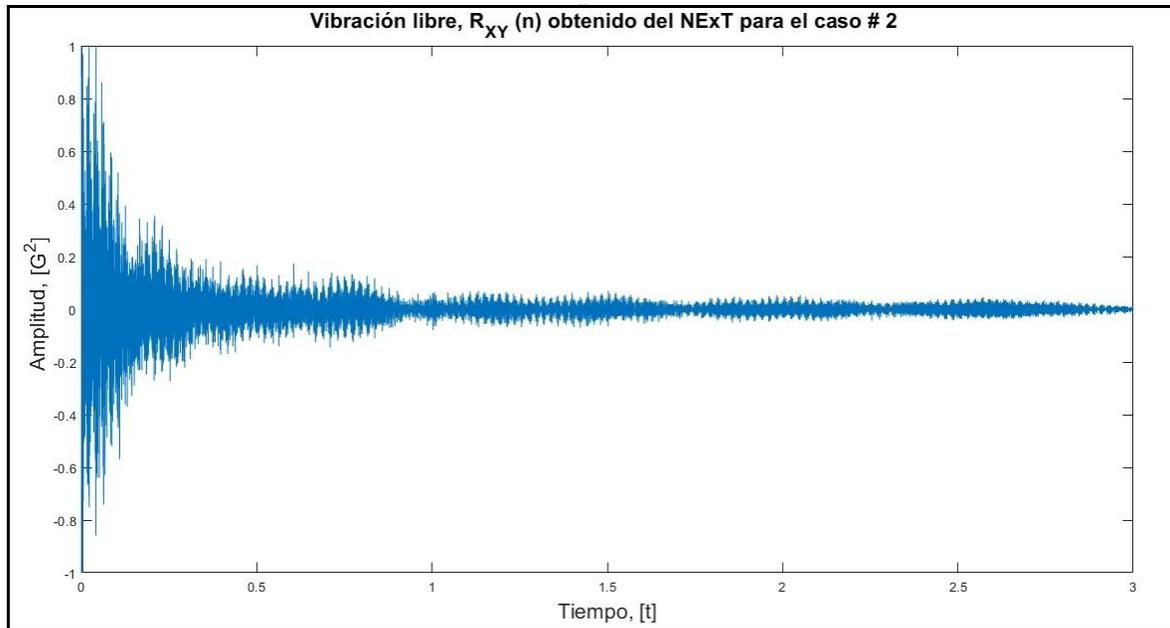
**Figura 13**

*Registro de aceleración de los datos obtenidos para el ensayo de OMA en condición de operación*



**Figura 14**

*Resultado de aplicar NExT a los datos vibratorios del caso # 2*

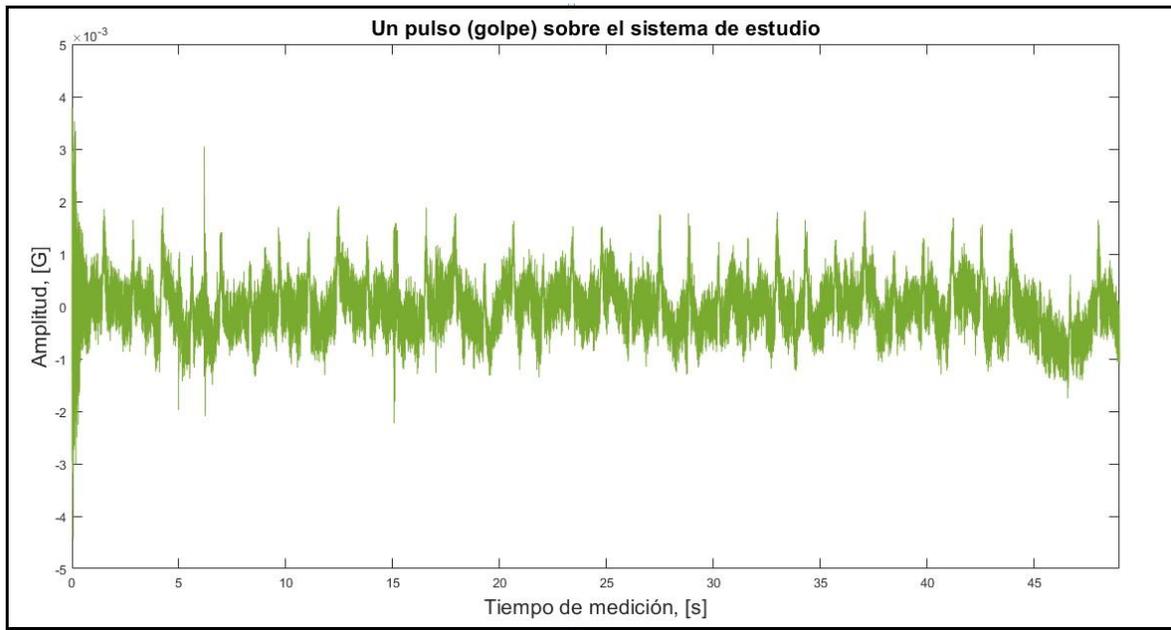


**5.3.1.3 Caso de estudio # 3: Medición vibratoria con acelerómetros uniaxiales ubicados a lo largo del rotor, en estado estático y un solo golpe aleatorio.** Entendiendo la utilidad del NExT, de tomar todas las señales estocásticas obtenidas por los acelerómetros y convertirlas en una señal en vibración libre. Se desarrolla un ensayo que posiblemente pueda permitirse saltarse el proceso del NExT y procesar los datos directamente en el ERA.

Habida cuenta de ello, se ubican los sensores tal como se presentó en la Figura 9 y se les aplica un solo golpe aleatorio (un pulso), con una duración de 50 segundos. La Figura 15, expone el resultado de la medición de dicho ensayo.

**Figura 15**

*Registro de aceleración de los datos obtenidos de aplicar un golpe sobre el objeto en estudio, en condición estática.*



Como se puede notar el comportamiento vibratorio de este pulso, se asemeja al de la vibración libre obtenidos en los ensayos anteriores y expuestos en las Figuras 11 y 14.

### **5.3.2. Aplicación del Eigensystem Realization Algorithm (ERA) y resultados finales del OMA**

Con las señales obtenidas en vibración libre para cada uno de los tres casos, se procede a implementar la metodología del ERA señalada en el ítem 5.2.2 y es aquí donde se arman las matrices de Hankel y se obtiene la matriz dinámica “A” que da como resultado (a través de problema de valores y vectores propios) los parámetros modales del sistema.

En consecuencia, los resultados para los tres casos de estudio son los siguientes:

**5.3.2.1 Resultados OMA para el caso # 1: sistema en condición estático.** Las frecuencias naturales y los coeficientes de amortiguamiento encontrados en el OMA para el banco de

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

ensayos en condición estática y con 5 sensores ubicados a lo largo del rotor, se muestran en la Tabla 4.

**Tabla 4**

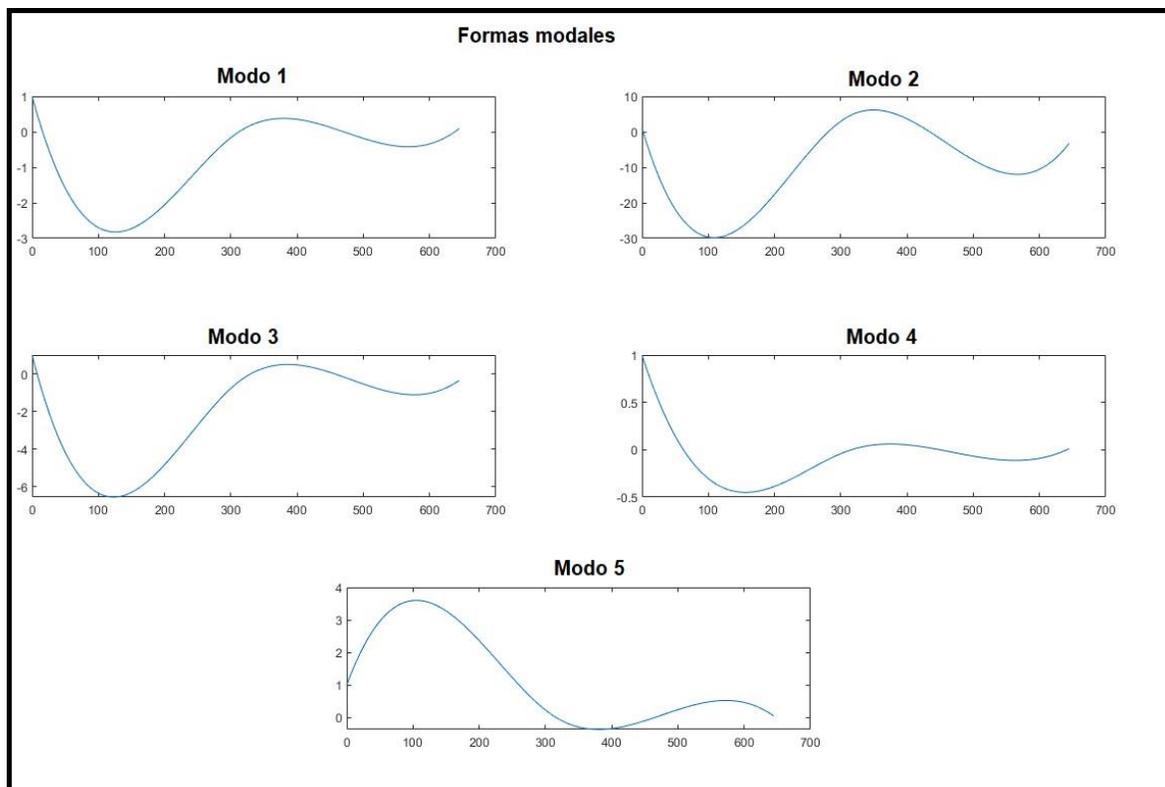
*Resultados OMA para el sistema en condición estática*

<b>Modo</b>	<b>Frecuencias naturales [Hz]</b>	<b>Coefficientes de amortiguamiento [%]</b>
<b>1</b>	48,47	29,11
<b>2</b>	250,27	10,85
<b>3</b>	402,63	10,30
<b>4</b>	626,06	11,17
<b>5</b>	1091,6	2,81

Para la obtención de las formas modales del sistema a partir del OMA, se obtiene la relación del desplazamiento de los 5 puntos de medición con respecto al punto de referencia (acelerómetro #3) y se grafica dicho desplazamiento; la Figura 16 evidencia el comportamiento de los modos de vibrar para el caso de estudio.

**Figura 16**

*Formas modales (vectores propios) obtenidos del ERA para el sistema en estudio*



**5.3.2.2 Resultados OMA para el caso # 2: sistema en condición de operación.** Las frecuencias naturales y los coeficientes de amortiguamiento encontrados en el OMA para el banco de ensayos en condición de operación y con 2 sensores ubicados en los soportes del rotor, se muestran en la Tabla 5. La identificación de las formas modales para este caso de estudio no es posible, ya que no se puede desarrollar una curva con dos puntos de medida.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Tabla 5***Resultados OMA para el sistema en condición de operación*

<b>Modo</b>	<b>Frecuencias naturales [Hz]</b>	<b>Coefficientes de amortiguamiento [%]</b>
<b>2</b>	269,68	-4,8
<b>3</b>	410,93	95,4
<b>4</b>	690,1	2,54
<b>5</b>	819,34	0,82

**5.3.2.3 Resultados OMA para el caso # 3: sistema en estado estático y un solo golpe aleatorio.** Las frecuencias naturales y los coeficientes de amortiguamiento encontrados en el OMA para el banco de ensayos en condición estática, con 5 sensores ubicados a lo largo del rotor y un solo golpe de excitación (un pulso), se muestran en la Tabla 6.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Tabla 6**

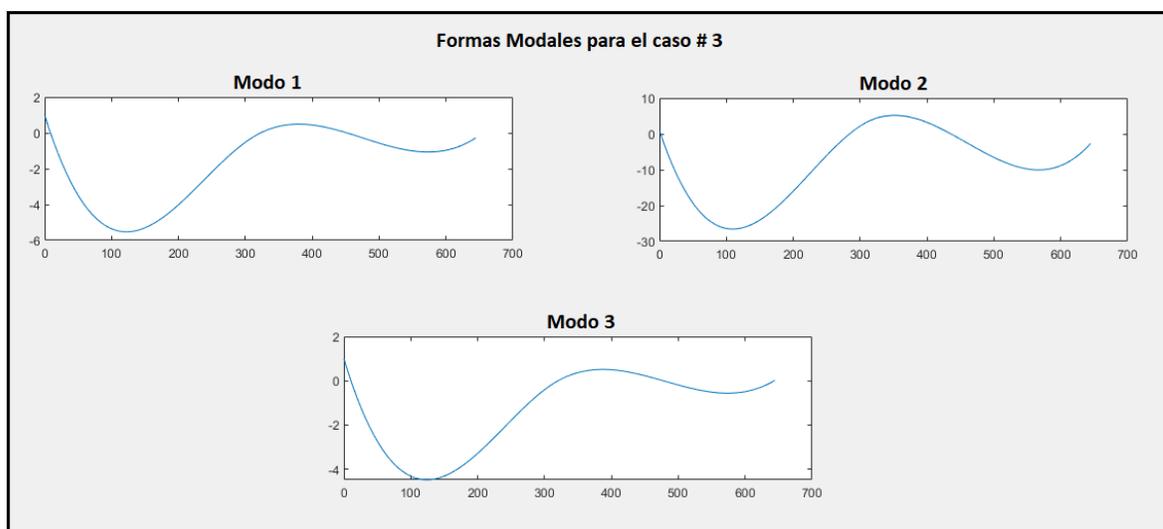
*Resultados OMA para el sistema en condición estática con un solo golpe de excitación (un pulso)*

Modo	Frecuencias naturales [Hz]	Coefficientes de amortiguamiento [%]
1	46,64	10,095
2	247,18	11,18
3	405,22	9,67

La obtención de las formas modales de este caso se desarrolla bajo la misma modalidad del ítem 5.3.2.1. La Figura 17 evidencia el comportamiento de los modos de vibrar para el caso de estudio.

**Figura 17**

*Formas modales (vectores propios) obtenidos del ERA para el caso # 3*



## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**5.4. Comparación, ajuste y validación de las técnicas OMA utilizadas vs los resultados obtenidos en SolidWorks**

Como primera medida, es importante señalar que los resultados expuestos en los numerales 5.3.2.1, 5.3.2.2 y 5.3.2.3, ya se encuentran ajustados con base en los resultados obtenidos en la Tabla 2 (modelo teórico en SolidWorks); estos resultados fueron claves no solo para ajustar el OMA sino también para tener una noción, estar familiarizado con la dinámica del sistema y determinar el número de frecuencias a calcular y comparar con el ERA (5 modos).

El procedimiento de ajuste y estabilización que se describe a continuación fue basado en el desarrollo de J.M Caicedo en (Caicedo et al., 2004), donde se señala que el ajuste del ERA se fundamenta principalmente en modificar el tamaño de las matrices de Hankel; de las cuales, el número de filas y columnas son los parámetros principales a modificar.

**5.4.1. Ajuste de las columnas de las matrices de Hankel**

Según J. M. Caicedo, “una regla general para el número de columnas de la matriz de Hankel es usar cuatro veces el número de modos esperados (el doble del número de polos esperados o del orden de la matriz). Es decir que para nuestro caso de estudio es ideal tener alrededor de 20 columnas para las matrices de Hankel.

Para el caso de estudio del presente proyecto, se trabajaron con **28 columnas**, puesto que con este número fueron los datos de frecuencias naturales que menor porcentaje de error dieron en la comparación con la simulación del software CAD (ver Tabla 7, 8 y 9).

**5.4.2. Ajuste de las filas de las matrices de Hankel**

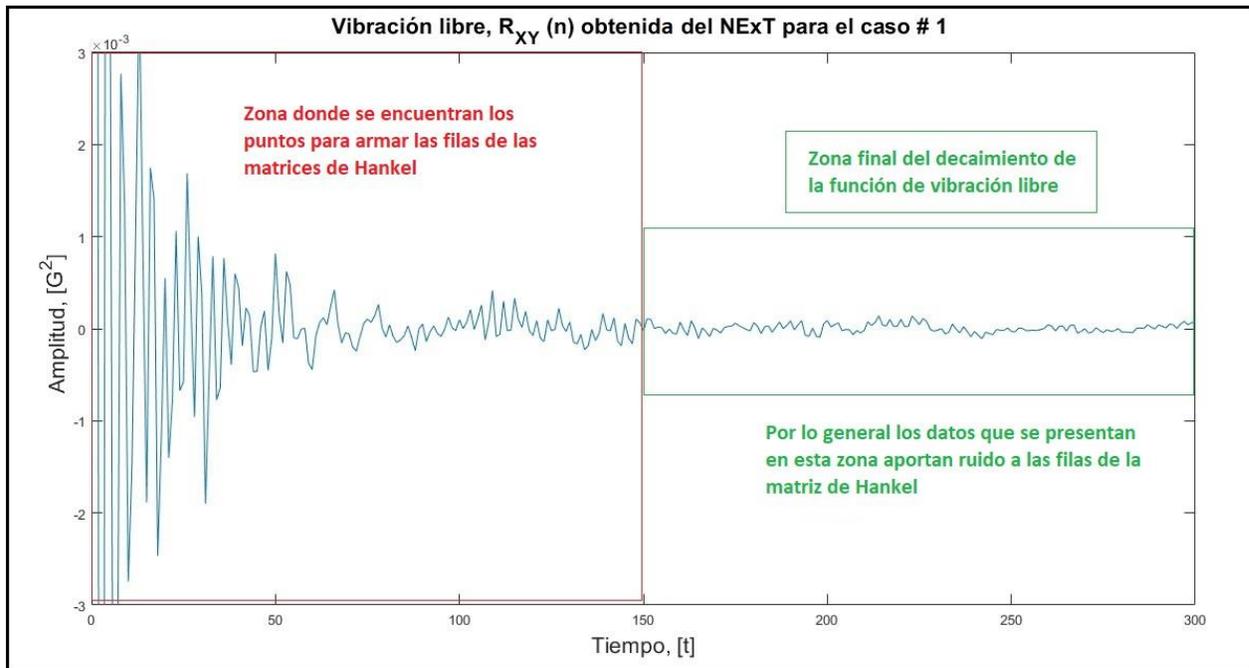
El número de filas es un conjunto basado en el número de puntos disponibles en la función de densidad de espectro cruzado, teniendo como objetivo utilizar tantos puntos como sean posible de

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

la función  $[R_{XY}(n)]$ , sin incluir señales ruidosas que por lo general se encuentran al final de la función; lo anterior se especifica en la Figura 18.

### Figura 18

*Determinación del rango de datos para la fabricación de las filas en la matriz de Hankel, a partir de la función de correlación cruzada de las señales en el dominio del tiempo.*



A partir de la Figura 18, se puede evidenciar que los datos en el intervalo de  $[0 - 150]$  segundos serán, probablemente, los más útiles para el desarrollo de las filas en la matriz de Hankel.

Para el caso de estudio del presente proyecto se utilizaron los datos en el intervalo de  **$[0 - 200]$  segundos**, que permitieron obtener el menor porcentaje de error en la comparación con los resultados de la simulación en SolidWorks.

### 5.4.3. Orden y estabilización del ERA

El número de polos (orden de la matriz de Hankel) obtenidos de la cantidad de columnas para la matriz de Hankel, es determinado por la Ecuación 35. Este orden varió con respecto a lo propuesto por J.M Caicedo (10 polos, para 20 Columnas de la matriz de Hankel), ya que se utilizó un algoritmo de estabilización fundamentado en los trabajos realizados por Diego Giraldo y el Profesor Johanning Marulanda de la Universidad del Valle (*Cali, Colombia, Agosto de 2009*), que identificó el orden o número de polos ideales para los resultados esperados (Simulación de SolidWorks), dadas las iteraciones realizadas variando el acelerómetro de referencia de los datos obtenidos.

$$\text{Numero de columnas (matriz de Hankel)} = \text{orden} * 2 \tag{35}$$

$$\text{Orden} = \frac{28}{2} = 14 \ ;$$

### 5.4.4. Comparación y validación de resultados OMA vs SolidWorks

Utilizando los resultados del software CAD ajustado y validado, se comparan, se ajustan y se validan las técnicas OMA utilizadas para la obtención de las frecuencias naturales y modos de vibrar del sistema (rotor flexible). Dichos resultados son base comparativa para el modelo numérico del sistema, el cual es el medio para la obtención de los resultados finales del proyecto.

Los resultados del OMA son válidos siempre y cuando el porcentaje de error para las dos primeras frecuencias naturales (objeto de interés) en estudio, tengan un valor menor del 10% respecto a la simulación CAD, tal como lo describe Marius Tarpo en (Tarpø et al., 2020), con el fin de evaluar un comportamiento general (real-experimental) del sistema.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

En la Tabla 7, 8 y 9, se evidencia el porcentaje de error de los resultados de las frecuencias naturales, obtenidas por el OMA (una vez hecho el ajuste) para los tres casos de mediciones vibratorias, con respecto a los resultados de las frecuencias naturales obtenidas del modelo desarrollado en SolidWorks ajustado y validado por un EMA.

**Tabla 7**

*Contrastación de los resultados del OMA en condición estático vs la simulación de SolidWorks en condición de apoyo*

<b>Modo</b>	<b>Frecuencias naturales obtenidas por el OMA en condición estático [Hz]</b>	<b>Frecuencias naturales obtenidas en la simulación de SolidWorks en condición de apoyo [Hz]</b>	<b>Porcentaje de error del OMA estático vs la simulación de SW en condición de apoyo</b>
<b>1</b>	48,47	52,12	7,00 %
<b>2</b>	250,27	260,24	3,83 %
<b>3</b>	402,63	477,70	15,71 %
<b>4</b>	626,06	764,29	18,09 %
<b>5</b>	1091,6	1112,20	1,85 %

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Tabla 8**

*Contrastación de los resultados del OMA en condición de operación vs la simulación de SolidWorks en condición de apoyo*

<b>Modo</b>	<b>Frecuencias naturales obtenidas por el OMA en condición de operación [Hz]</b>	<b>Frecuencias naturales obtenidas en la simulación de SolidWorks en condición de apoyo [Hz]</b>	<b>Porcentaje de error del OMA en operación vs la simulación de SW en condición de apoyo</b>
<b>2</b>	269,68	260,24	3,63 %
<b>3</b>	410,93	477,70	13,98 %
<b>4</b>	690,08	764,29	9,71 %
<b>5</b>	819,34	1112,2	26,33 %

**Tabla 9**

*Contrastación de los resultados del OMA en condición estático y un solo golpe de excitación vs la simulación de SolidWorks en condición de apoyo*

<b>Modo</b>	<b>Frecuencias naturales obtenidas por el OMA en condición de operación [Hz]</b>	<b>Frecuencias naturales obtenidas en la simulación de SolidWorks en condición de apoyo [Hz]</b>	<b>Porcentaje de error del OMA en operación vs la simulación de SW en condición de apoyo</b>
-------------	--	--	--

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

<b>1</b>	46,64	54,12	10,52 %
<b>2</b>	247,18	260,24	5,02 %
<b>3</b>	405,22	477,70	15,17 %

Según lo descrito anteriormente, y teniendo en cuenta los porcentajes de error presentados en la Tabla 7, los resultados obtenidos en la Tabla 4 son viables y son la base comparativa para los resultados del modelo numérico.

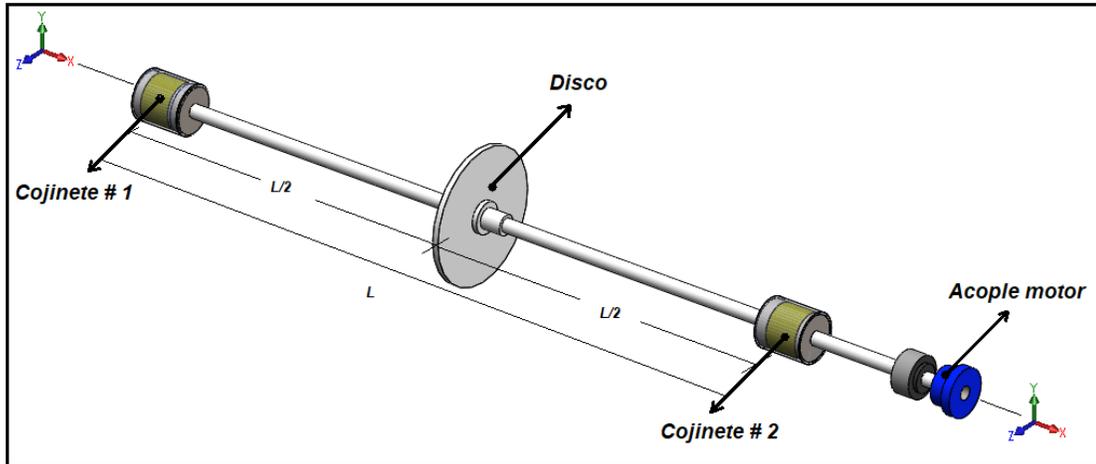
En cuanto a los resultados obtenidos en la Tabla 5 y 6, del caso # 2 y # 3 de estudio, no serán viables para ser base comparativa del modelo numérico. Sin embargo, los resultados obtenidos en estos ensayos son valerosos dadas sus condiciones de medición.

## 6. Capítulo 3: modelo numérico del sistema

El modelo numérico del sistema se basa en el desarrollo de un algoritmo que permita determinar los parámetros modales (frecuencias naturales, modos de vibración y coeficientes de amortiguamiento), diagramas de Campbell y de estabilidad dinámica de un rotor flexible tipo Jeffcott, mediante el desarrollo y solución del problema de valores y vectores propios (Martinez, 2008). Este problema, fue expuesto en la Ecuación 28.

### 6.1. Marco conceptual y referencial del rotor flexible tipo Jeffcott

El rotor tipo Jeffcott, que se muestra en la Figura 19, es un sistema que simula fenómenos físicos intrínsecos u ocasionales que pueden presentarse en una turbomáquina.

**Figura 19***Rotor flexible tipo Jeffcott*

Algunos de estos fenómenos y los cuales son objeto de estudio en el modelo numérico desarrollado, son los siguientes:

### 6.1.1. *Desbalance*

Básicamente este fenómeno se presenta cuando el centro de masa del rotor y su centro de rotación no coinciden. En el momento que se genera la rotación, se presentan fuerzas centrífugas que pueden ocasionar una flexión en el eje en la dirección de la excentricidad del rotor, lo que ocasiona un whirling o cabeceo (Acevedo & Pinto, 2018).

### 6.1.2. *Desalineamiento*

El desalineamiento es uno de los problemas más frecuentes en las turbomáquinas, que ocasiona fallos graves y fractura de rotores. Este fenómeno se presenta cuando los ejes de los componentes de la máquina rotatoria (cojinetes, eje, acoples) no se encuentran colineales (Ruiz, 2006).

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

### **6.1.3. Efecto giroscópico**

Los sistemas en rotación quedan expuestos a fuerzas que dependen de su velocidad, como es el caso de las fuerzas inerciales (fuerzas de Coriolis y giroscópicas). Las fuerzas giroscópicas, que además dependen de la velocidad lineal del rotor, son de especial interés porque conducen a la pérdida de reciprocidad en las ecuaciones de movimiento de estructuras rotatorias (Pedro et al., 2012).

En términos generales, el efecto giroscópico es aquel que permite que un cuerpo que gire alrededor de su eje de simetría y se mueva en un sentido perpendicular de la dirección de la fuerza aplicada (Rita, 2007).

### **6.1.4. Resonancia**

La resonancia en un sistema rotodinámico se presenta cuando la velocidad de operación del rotor es igual a la frecuencia natural amortiguada del sistema ( $\omega_d$ ). El operar el sistema dentro de este efecto de resonancia, genera sucesos catastróficos sobre la turbomáquina, ya que los niveles de vibración son muy altos, lo que ocasiona fatiga sobre el rotor.

Es por ello, que es imperativo identificar los valores de estas velocidades críticas y determinar en qué rangos no se debe operar la turbomáquina. Por consiguiente, se utiliza el Diagrama de Campbell, donde se grafica las respectivas frecuencias naturales amortiguadas ( $\omega_d$ ), en función de las velocidades de operación del sistema (rpm).

### **6.1.5. Inestabilidad rotodinámica**

Durante el diseño de turbomáquinas, es imperativo el control de altas velocidades y la disipación de las vibraciones forzadas, las cuales se presentan principalmente por el fenómeno de desbalance, pero además de este, se tiene una condición a la que se le conoce como inestabilidad dinámica

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

(Ruiz, 2006), la cual es objeto de estudio de este trabajo de investigación y que se caracteriza por vibraciones de alta amplitud que incrementan bruscamente con el aumento de la velocidad del rotor.

Matemáticamente se puede expresar la inestabilidad rotodinámica como la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales que se caracteriza por un valor propio complejo con parte real positiva, tal como se evidencia en la Ecuación 36.

$$S = \xi\omega_n \pm j\omega_d \quad (36)$$

*Donde,*

$\omega_n =$  *Frecuencia natural no amortiguada*

$\omega_d =$  *Frecuencia natural amortiguada*

$\xi =$  *Coefficiente de amortiguamiento*

En esta ecuación, la parte real ( $\xi\omega_n$ ), esta dada por el factor de crecimiento o decaimiento de la solución del sistema, mientras que la parte imaginaria ( $j\omega_d$ ) define la frecuencia natural amortiguada de la solución del sistema rotodinámico.

Si  $\xi\omega_n > 0$ , el movimiento de la perturbación crece exponencialmente con el tiempo y se dice que el sistema o la zona de operación, es inestable. Si embargo, si  $\xi\omega_n < 0$ , se dice que el sistema es estable. De esta manera, se interpreta que el umbral de estabilidad del sistema vendrá dado en la zona donde  $\xi\omega_n = 0$  (Agnieszka, 2005).

## 6.2. Desarrollo e implementación del modelo numérico del rotor flexible tipo Jeffcott

El sistema expuesto en la Figura 19, es aquel en el que se desarrolla el modelo numérico. Este sistema está compuesto por un rotor rígido simétrico (eje), un disco en el centro del sistema, dos cojinetes hidrodinámicos que soportan el rotor, un acople al motor y un piñón que permite la transmisión de potencia a la bomba de impulsión de aceite a los cojinetes. Cada uno de estos componentes (cuyas características físico-mecánicas se presentan en el Apéndice A), generan un aporte en masa, rigidez y amortiguamiento al rotor, que es tenido en cuenta para el desarrollo matemático del mismo.

Para el planteamiento matemático del rotor, se consideró que el rotor trabaja como un cuerpo elástico aproximándolo a una viga simplemente apoyada y a la cual se le involucran factores como: efectos giroscópicos, inercia rotatoria, fenómenos anisotrópicos dados por los cojinetes y amortiguamiento interno. Dicho planteamiento se fundamenta en la teoría de vigas de Timoshenko (Rouch & Kao, 1979) y en el modelo desarrollado por Heller G. Sánchez A. en (Sanchez, 2010), donde a partir de las funciones de energías y funciones de disipación de Rayleigh generadas para un disco, se obtiene la ecuación de movimiento del sistema mediante el Método de Elementos Finitos (MEF), (ver Ecuación 37).

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [G]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (37)$$

Donde, [M], [C], [G], [K], corresponden respectivamente a las matrices de masa, amortiguamiento, giroscópica y rigidez de cada elemento del sistema, {q} el vector de coordenadas generalizadas de los elementos y {F} la fuerza de entrada al sistema.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

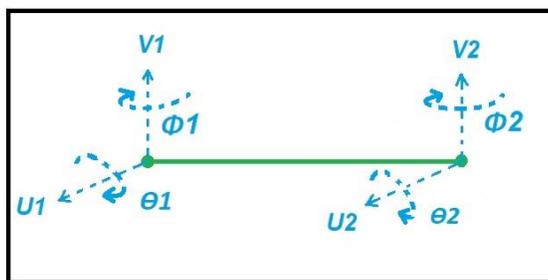
### 6.2.1. Establecimiento de las matrices de los elementos

El establecimiento de las matrices de los elementos se hace mediante el Método Elementos Finitos (MEF), el cual divide un dominio en subdominios en los que se definen ciertas ecuaciones integrales, que representa el comportamiento físico-teórico del sistema (Burnett, 1987). Es decir, de un elemento general (rotor) se discretizan elementos simples y de fácil estudio, los cuales una vez solucionados, son ensamblados en una matriz global que representa la totalidad del sistema.

El número finito de elementos a utilizar depende de la complejidad del sistema a solucionar y dicho número debe estar supeditado a la convergencia de los valores de las frecuencias naturales en estudio, tal como lo explica Felipe Acevedo y Sebastián Pinto en (Acevedo & Pinto, 2018). De esta manera y teniendo en cuenta lo anterior, para el proyecto en estudio se utilizaron 47 elementos de viga. Cada elemento está compuesto por 8 grados de libertad y 2 nodos (4 grados de libertad por nodo), evidenciados en la Figura 20. Los grados de libertad del elemento son los longitudinales [ $U$  y  $V$ ] y las angulares [ $\theta$  y  $\phi$ ]. Los desplazamientos axiales y torsionales son despreciados, puesto que el análisis y comportamiento del sistema se trabaja a partir de vibraciones radiales, entendiéndose que el sistema se encuentra sin ningún tipo de falla mecánica como desalineamiento, desbalance o pandeo que genere dichos desplazamientos.

**Figura 20**

*Esquema del elemento de línea tipo viga*



## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

El elemento de línea expuesto en la Figura 20, tiene una representación vectorial de sus desplazamientos angulares y longitudinales determinada por la Ecuación 38.

$$q = [U_1 \ V_1 \ \theta_1 \ \phi_1 \ U_2 \ V_2 \ \theta_2 \ \phi_2] \quad (38)$$

Así pues, y con el objetivo de describir el comportamiento dinámico de cada elemento determinado por la Ecuación 38, se procede a obtener las matrices de cada elemento, mediante el uso de las funciones de forma, tal como lo plantea y lo describe Friswell Michael (Friswell et al., 2010).

Las Ecuaciones 39, 40, 41, 42, 43, son las matrices que describen el comportamiento de cada elemento, las cuales dan lugar al ensamble de las matrices globales del sistema.

### 1) Matriz de rigidez elástica:

$$k_e = \frac{EI}{L^3} * \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L & -12 & 0 & 0 & 6L \\ 0 & 12 & -6L & 0 & 0 & -12 & -6L & 0 \\ 0 & -6L & 4L^2 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 4L^2 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ -12 & 0 & 0 & -6L & 12 & 0 & 0 & -6L \\ 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 12 & 6L & 0 \\ 0 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 6L & 4L^2 & 0 \\ 6L & 0 & 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Donde,

$E =$  Módulo Young del material del elemento

$L =$  Longitud del elemento

$I =$  Momento de inercia del elemento, el cual se define así:

$$I = \frac{\pi * \left(\frac{de}{2}\right)^4}{4} ; de = \text{Diámetro del elemento rotor}$$

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**2) Matriz de rigidez de amortiguamiento interno**

$$k_{ai} = \frac{EI}{L^3} * \begin{bmatrix} 0 & 12 & -6L & 0 & 0 & -12 & -6L & 0 \\ -12 & 0 & 0 & -6L & 12 & 0 & 0 & -6L \\ 6L & 0 & 0 & 4L^2 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ 0 & 6L & -4L^2 & 0 & 0 & -6L & -2L^2 & 0 \\ 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 12 & 6L & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 6L & -12 & 0 & 0 & 6L \\ 6L & 0 & 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 0 & 4L^2 \\ 0 & 6L & -2L^2 & 0 & 0 & -6L & -4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

**3) Matriz de masa**

$$M_e = \frac{\rho_e * A_e * L}{840} * \begin{bmatrix} 312 & 0 & 0 & 44L & 108 & 0 & 0 & -26L \\ 0 & 312 & -44L & 0 & 0 & 108 & 26L & 0 \\ 0 & -44L & 8L^2 & 0 & 0 & -26L & -6L^2 & 0 \\ 44L & 0 & 0 & 8L^2 & 26L & 0 & 0 & -6L^2 \\ 108 & 0 & 0 & 26L & 312 & 0 & 0 & -44L \\ 0 & 108 & -26L & 0 & 0 & 312 & 44L & 0 \\ 0 & 26L & -6L^2 & 0 & 0 & 44L & 8L^2 & 0 \\ -26L & 0 & 0 & -6L^2 & -44L & 0 & 0 & 8L^2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Donde,

$\rho_e =$  Densidad del elemento

$A_e =$  Área transversal del elemento

**4) Matriz de inercia rotacional**

$$M_{ir} = \frac{\rho_e * I}{30 * L} * \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 & -3L & 0 & 0 & -L^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 0 & -L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (42)$$

**5) Matriz de efecto giroscópico**

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

$$Cg = \frac{\rho_e * I}{15 * L} * \begin{bmatrix} 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & 3L & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 3L & -36 & 0 & 0 & 3L \\ -3L & 0 & 0 & -4L^2 & 3L & 0 & 0 & L^2 \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & 0 & 3L & -L^2 & 0 \\ 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & -36 & -3L & 0 \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & 0 & -3L \\ -3L & 0 & 0 & L^2 & 3L & 0 & 0 & -4L^2 \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

**6.2.2. Establecimiento de las matrices globales del elemento**

El planteamiento de las matrices globales del elemento está determinado por Friswell Michael (Friswell et al., 2010) y viene dado por las Ecuaciones 44, 45, 46.

**6) Matriz de masa global**

$$[M] = [Me] + [Mir] \quad (44)$$

**7) Matriz de amortiguamiento global**

$$[C] = \beta * [ke] + [Cg] * \omega \quad (45)$$

La matriz de amortiguamiento global está representada por la matriz de masa y rigidez, lo que se conoce como matriz de amortiguamiento de Rayleigh (Naranjo et al., 2013); dichas matrices están multiplicadas por unas constantes cuyos valores son basados en recomendaciones experimentales y en las características físico-mecánicas del sistema. La Ecuación 45.1, exhibe la representación mencionada.

$$[Ce] = \alpha * [M] + \beta * [K] \quad (45.1)$$

Para el caso de estudio  $\alpha = 0$  (dado que el material del rotor es isotrópico) y  $\beta = 1.35 \times 10^{-5}$  (recomendación experimental).

**8) Matriz de rigidez global**

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

$$[K] = [ke] + \beta * [kai] * \omega \quad (46)$$

Por lo anterior, la ecuación global del sistema está determinada según la Ecuación 47.

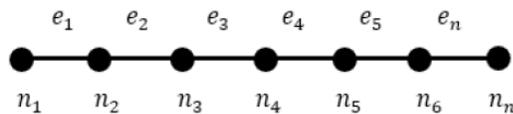
$$([Me] + [Mir])\{\ddot{x}\} + (\beta * [ke] + [Cg] * \omega)\{\dot{x}\} + ([ke] + \beta * [kai] * \omega)\{x\} = \{F\} \quad (47)$$

### 6.2.3. *Ensamble matricial*

Puesto que el modelo numérico desarrollado está compuesto por 47 elementos, cada sistema de ecuaciones (las matrices) de cada elemento, deben ser ensambladas en una ecuación general del sistema (matrices globales). En otras palabras, cada elemento en particular está unido con los demás elementos por medio de nodos, conformando un elemento de viga global que se evidencia en la Figura 21.

**Figura 21**

*Discretización del sistema en elementos*

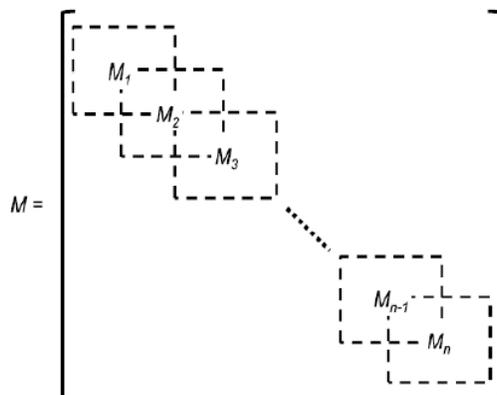


*Nota.* El gráfico representa el elemento de viga global construido a partir de subelementos de viga de ensamble para la matriz de masa global. Tomado de ACEVEDO. Felipe, PINTO. Sebastián. Modelamiento, diseño y construcción de un banco de pruebas para el estudio de la fuerza de desbalance en rotores flexibles teniendo en cuenta el efecto giroscópico. 2018. p. 41

Considerando lo anterior, cada matriz de cada elemento se acopla en la matriz global del sistema tal y como se evidencia en la Figura 22.

**Figura 22**

*Ensamble global de las matrices de cada elemento*



*Nota.* El gráfico representa el proceso de ensamblaje para la matriz de masa global. Tomado de YOON, Se Young, ZONGLI, Lin, y ALLAIRE Paul. Control of Surge in Centrifugal Compressors by Active Magnetic Bearings. En: Springer. 2013. p. 55

Una vez acoplada cada matriz de los elementos en las respectivas matrices globales del sistema (rotor), se añaden las matrices de masa, rigidez, amortiguamiento y giroscópica de los componentes adyacentes al rotor, según corresponda.

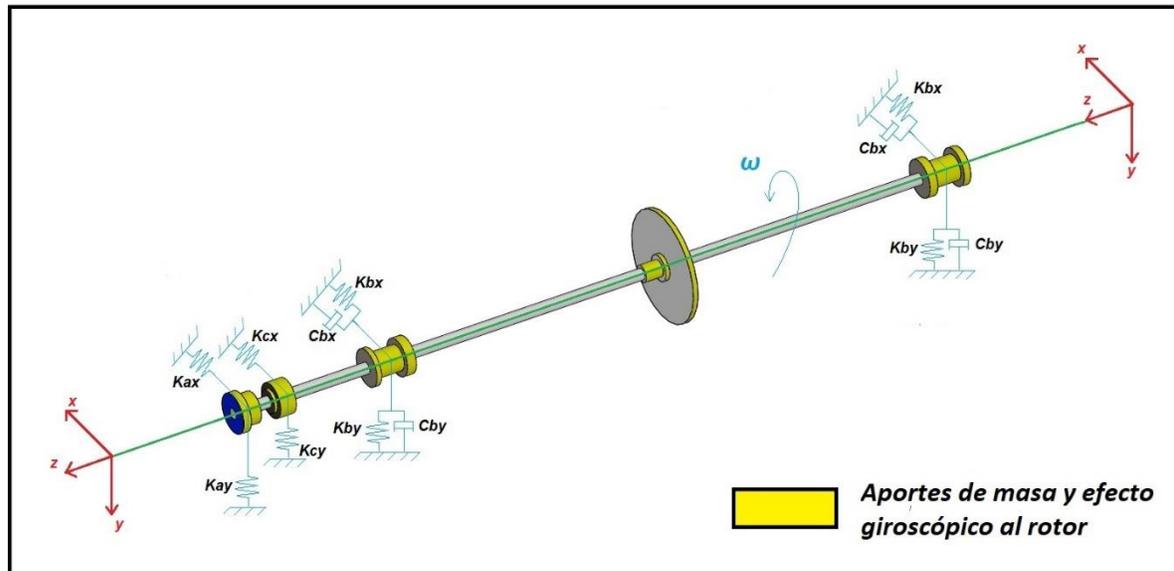
#### **6.2.4. Ensamble de matrices de los componentes adyacentes al rotor**

El ensamblaje de componentes adyacentes al rotor está determinado por las características físico-mecánicas que cada uno aporta al sistema. La Figura 23, representa el aporte en rigidez, masa y amortiguamiento de cada componente, dichos aportes se manifiestan en matrices que son agregadas al nodo correspondiente de la matriz global, según sea la ubicación del componente.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Figura 23**

Esquema del aporte de rigidez y amortiguamiento de los soportes al rotor



**6.2.4.1 Disco central.** El disco central genera un aporte en la matriz global de masa y giroscópica en el nodo correspondiente a su ubicación, como cada nodo tiene 4 grados de libertad, las matrices de cada componente son de 4x4. Las matrices del disco se especifican en las Ecuaciones 48 y 49.

$$M_{discos} = \begin{bmatrix} md & 0 & 0 & 0 \\ 0 & md & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Jdd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Jdd \end{bmatrix} \quad (48)$$

Donde,

$md$  = Masa del disco determinada por su geometría y material

$Jdd$  = Inercia de masa del disco determinada por la Ecuación 48.1

(48.1)

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

$$J_{dd} = 0.5I_{pd} + \frac{md * e^2}{12}$$

$e =$  Espesor del disco

$I_{pd} =$  Inercia polar del disco determinada por la Ecuación 48.2

$$I_{pd} = \frac{md}{2} * \frac{D_d^2 + D_e^2}{4} \quad (48.2)$$

$D_d =$  Diámetro del disco

$D_e =$  Diámetro del eje

$$G_{discos} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{pd} \\ 0 & 0 & -I_{pd} & 0 \end{bmatrix} * \omega \quad (49)$$

Donde,

$\omega =$  Velocidad angular del rotor

La Ecuación 49 representa la matriz giroscópica y es la responsable de generar el efecto giroscópico en el sistema, es decir que este fenómeno es inducido por la inclusión del disco en el rotor flexible. Dado que la matriz giroscópica está en función de la velocidad de giro del rotor, las frecuencias naturales del sistema se ven influenciadas por la velocidad del rotor y sus valores varían en la medida que dicha velocidad aumente. El diagrama de Campbell de la Figura 25, exhibe este fenómeno.

**6.2.4.2 Soportes: Cojinetes, piñón y acople al motor.** Para incorporar las matrices asociadas a los soportes en las matrices globales del rotor, se aplica la misma metodología que con el disco central.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

En los cojinetes se genera un aporte en la matriz de rigidez y amortiguamiento, mientras que el piñón y el acople al motor genera un aporte solo en la matriz global de rigidez. Las matrices que involucran estos soportes, son determinadas en las Ecuaciones 50, 50.1 y 51.

Por otro lado, se aprecia que los muñones de cada cojinete, el acople y el piñón (que son representados como discos), generan un aporte en la matriz global de masa y giroscópica bajo el mismo proceso que el disco central y que están discriminados según la ubicación y geometría de cada disco en el rotor.

$$K_{cojinetes} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & 0 & 0 \\ K_{yx} & K_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$K_{soportes} = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (50.1)$$

$$C_{cojinetes} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & 0 & 0 \\ C_{yx} & C_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Los valores de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento  $K_{xx}$ ,  $K_{yx}$ ,  $K_{xy}$ ,  $K_{yy}$ ,  $C_{xx}$ ,  $C_{yx}$ ,  $C_{xy}$  y  $C_{yy}$ , para cada uno de los componentes en estudio (acople, piñón y cojinetes) son calculados a partir de lo especificado en el Apéndice A.

### 6.2.5. Cálculo de la matriz de estado "A" y solución al problema de valores y vectores propios

Con el objetivo de determinar la matriz de estado "A", a partir de la ecuación global (ver Ecuación 47) y entendiendo el sistema sin ningún tipo de falla o fuerza externa que actúe sobre el

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

(vibración libre), se multiplica la Ecuación 47 por el inverso de la masa  $[M]^{-1}$  y se obtiene una representación global que se rige según la Ecuación 52:

$$\{\ddot{x}\} + [M]^{-1} * [C]\{\dot{x}\} + [M]^{-1} * [K]\{x\} = 0 \quad (52)$$

Donde,

$$[M] = [Me] + [Mir]$$

$$[C] = \beta * [ke] + [Cg] * \omega$$

$$[K] = [ke] + \beta * [kai] * \omega$$

Para dar facilidad en el proceso algebraico se realiza un cambio de variable de la siguiente manera:

$$\{x\} = y1 \quad (53)$$

$$\{\dot{x}\} = y2 \quad (54)$$

A partir de las Ecuaciones 52, 53 y 54, se conforma un sistema de espacio de estados, que está determinado según la Ecuación 55.

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Donde  $I$  es la matriz identidad,  $0$  es una matriz de ceros. La Ecuación 55 se puede interpretar según la Ecuación 56, así:

$$\dot{y} = Ay \quad (56)$$

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Teniendo que la solución para los vectores de estado  $(y, \dot{y})$  es de la forma  $y = ve^{\lambda t}$ ,  $\dot{y} = \lambda ve^{\lambda t}$  y partiendo de la Ecuación 56, se tiene la representación del problema de valores y vectores propios expresado en el ítem 5.3.2.6 y determinado por la Ecuación 28:

$$Av = \lambda v \quad (28)$$

Donde,

$A$

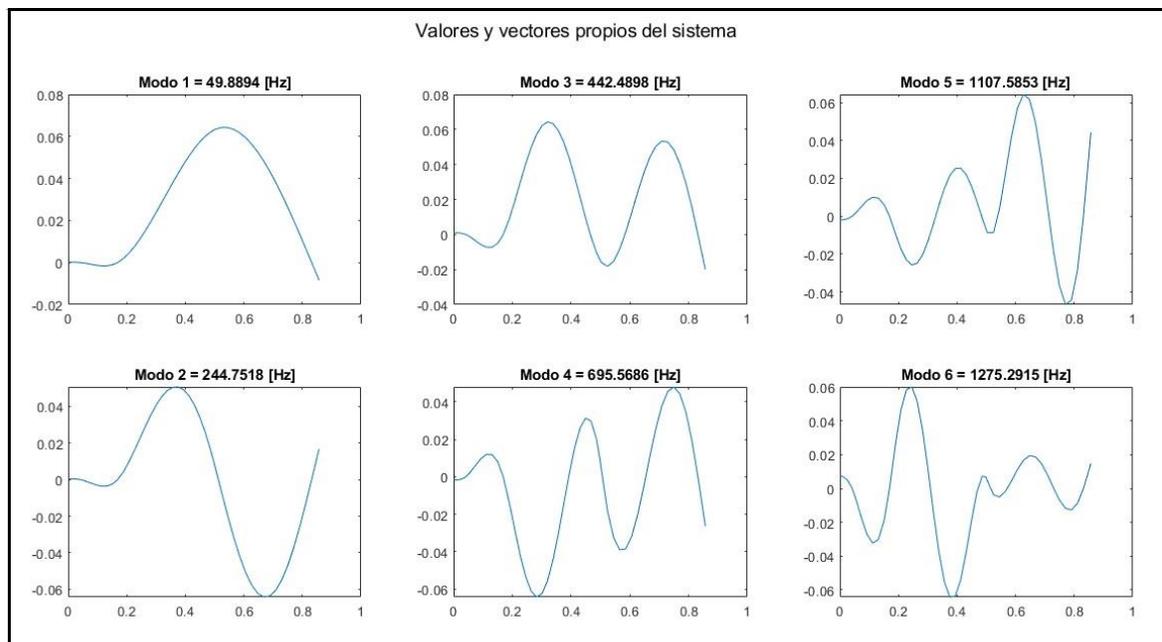
= Matriz de estado que contiene la información dinámica del sistema

$\lambda$  = Valores propios del sistema

$v$  = Vectores propios del sistema

### **6.2.6. Determinación de los parámetros modales del sistema mediante el desarrollo del modelo numérico**

A partir del problema planteado en la Ecuación 28, se determinan las frecuencias naturales (valores propios) y los modos de vibración (vectores propios) del sistema en estudio a 0 RPM (sistema estático). Dicha solución se presenta en la Figura 24.

**Figura 24***Frecuencias naturales y modos de vibración del sistema*

### 6.3. Comparación y validación del modelo numérico del sistema vs OMA

Los resultados expuestos en la Figura 24, en cuanto a los valores propios, son comparados con la Tabla 4 (resultados del ensayo OMA validado) a fin de determinar los porcentajes de error y validar el modelo numérico del sistema desarrollado. De esta manera, la comparación de dichos resultados se presenta en la Tabla 10.

**Tabla 10**

*Contrastación de los resultados del modelo numérico vs el OMA.*

<b>Modo</b>	<b>Frecuencias naturales obtenidas por el modelo numérico en condición estática [Hz]</b>	<b>Frecuencias naturales obtenidas por el OMA en condición estática [Hz]</b>	<b>Porcentaje de error del modelo numérico vs el OMA</b>
<b>1</b>	49,89	48,47	2,93%
<b>2</b>	244,75	250,27	2,21%
<b>3</b>	442,49	402,63	9,90%
<b>4</b>	695,57	626,06	11,10%
<b>5</b>	1107,58	1091,6	1,46%

Puesto que para las dos primeras frecuencias naturales se presenta un porcentaje de error menor al 3%, las cuales representan un rango de interés en el trabajo de investigación, además de que el promedio de error entre las 5 primeras frecuencias naturales es del 6% y teniendo en cuenta lo desarrollado por Marius Tarpo en la validación de modelos numéricos a partir de OMA (Tarpø et al., 2020), se valida el modelo numérico desarrollado, en función de la contrastación teórico-experimental de los valores propios calculados con el modelo numérico vs la técnica OMA (NExT-ERA) desarrollada.

#### **6.4. Análisis dinámico del sistema a partir del modelo numérico**

El análisis dinámico de este apartado y el objeto principal del trabajo de investigación se fundamenta en la obtención del diagrama de Campbell y de inestabilidad dinámica del sistema,

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

puesto que con ellos se determinan las velocidades críticas para las cuales el sistema entra en resonancia y es dinámicamente inestable.

Partiendo de lo anterior, el análisis dinámico tiene como base la solución de los valores propios del sistema ( $\lambda$ ) y que generalmente está dado por la Ecuación 36, expresada en el ítem 6.1.5.

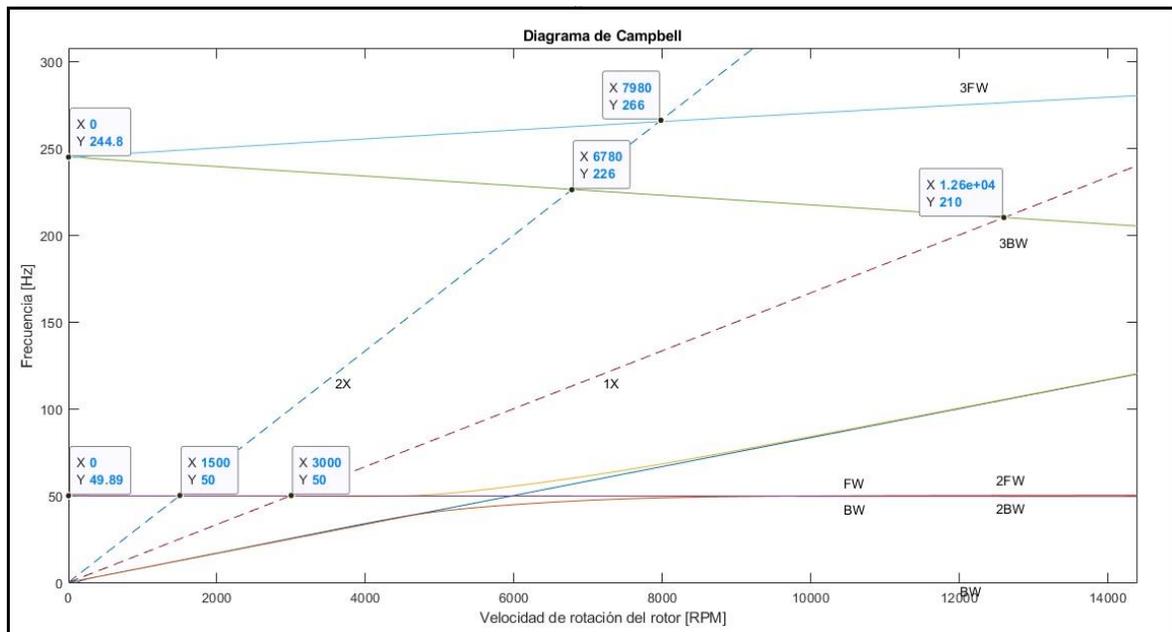
$$S = \xi\omega_n \pm j\omega_d \quad (36)$$

### 6.4.1. Diagrama de Campbell del sistema

Corresponde al valor numérico de la parte imaginaria ( $\omega_d$ , para un  $j^2 = -1$ ), que es la frecuencia natural amortiguada del sistema, de la Ecuación 36. Dicho valor es el eje de las ordenadas del diagrama y está en función de la velocidad de giro del rotor.

**Figura 25**

*Diagrama de Campbell del sistema en estudio*



## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

En la Figura 25, la línea  $1x$  corresponde a la velocidad operativa del rotor (equivalente a la excitación síncrona por desbalance), y como se puede observar, los valores de frecuencias naturales van cambiando conforme aumenta la velocidad del rotor. Los puntos donde las curvas cortan con esta línea corresponden a las velocidades críticas del sistema (frecuencias naturales) y por las cuales, el rotor no debe ser operado en estas velocidades ya que se generará una condición de resonancia en el sistema.

Para el modo de vibración 2 es notable la condición particular debido al efecto giroscópico que el disco central induce sobre el rotor. Las frecuencias backward y forward presentan una abertura pronunciada conforme aumenta la velocidad de giro. Por ejemplo, para la velocidad de giro de 12600 rpm el valor del segundo modo no es de 244,75 Hz (a 0 rpm), si no de 210 Hz, para este caso el cabeceo que describe el rotor tiene la dirección contraria a su velocidad de giro; el segundo modo para la velocidad de rotación correspondiente al forward no es apreciable en la Figura 25; sin embargo, este fenómeno ocurre cuando el giro de cabeceo del rotor tiene la misma dirección que el giro del eje.

Para el caso en que el rotor presentará una falla por desalineamiento, donde el segundo armónico del sistema ( $2x$ ) prevalece sobre el primer armónico ( $1x$ ), las velocidades críticas del sistema son desplazadas hacia la izquierda y son aquellas donde las curvas de los modos corten con la línea  $2x$  del diagrama de Campbell. Es decir, si se presenta este fenómeno, el segundo modo de vibración está 6780 rpm con un valor de 226 Hz.

Por otro lado, las curvas que se sitúan debajo de la línea  $1x$ , corresponden a los modos de vibración generados por el cojinete hidrodinámico y estos son excitados siempre y cuando los

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

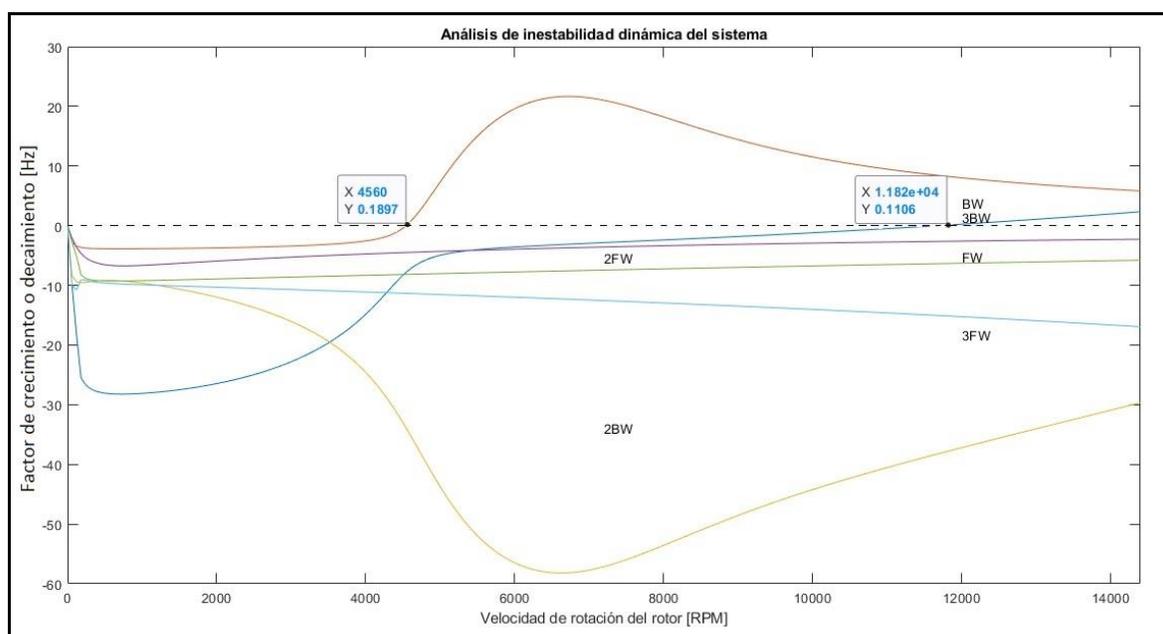
subarmónicos del sistema prevalezcan sobre el armónico principal. Este caso puede darse si el sistema presenta algún tipo de holgura excesiva en los cojinetes o desajustes mecánicos.

### 6.4.2. Diagrama de inestabilidad dinámica del sistema

Corresponde a la parte real  $\xi \omega_n$  (factor de crecimiento o decaimiento) de la Ecuación 36 y al igual que el diagrama de Campbell, esta gráfica está en función de la velocidad de rotación del rotor.

**Figura 26**

*Diagrama de inestabilidad dinámica del sistema en estudio*



En la Figura 26, la línea punteada en el valor de 0 Hz para el factor de crecimiento o decaimiento corresponde al umbral de estabilidad del sistema. Los valores situados en la zona por debajo de esta línea corresponden a aquellos modos y velocidades críticas que conforman un sistema estable, mientras que los valores situados por encima, corresponden a la zona de inestabilidad dinámica del sistema y es la zona para la cual el sistema de estudio no debe ser operado, puesto que allí se

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

produce un incremento repentino en la amplitud de vibración del sistema, que puede ocasionar niveles destructivos.

Por consiguiente, el sistema en estudio no puede ser operado para velocidades por encima de 4560 rpm. Si bien, en el diagrama de Campbell las velocidades críticas del sistema no se presentan en un rango aproximado de 3100 a 12500 (siempre y cuando el sistema no presente ninguna falla como desalineamiento, holguras o soldaduras), el diagrama de estabilidad evidencia una zona inestable para velocidades por encima de 4560 rpm, producto de un modo de vibración asociado al cojinete hidrodinámico.

## 7. Conclusiones

- ❖ Se valida la aplicación de las técnicas OMA en el dominio del tiempo NExT-ERA para la identificación de los parámetros modales (frecuencias naturales, coeficientes de amortiguamiento y modos de vibración) de un rotor flexible tipo Jeffcott a escala de laboratorio, con un porcentaje de error menor al 7% para las dos primeras frecuencias naturales.
- ❖ Con los resultados obtenidos en el ensayo OMA a partir de una excitación generada por un pulso sobre el rotor, se destaca la aplicación de la técnica OMA en el dominio del tiempo ERA para la identificación de los parámetros modales (frecuencias naturales, coeficientes de amortiguamiento y modos de vibración) de un rotor flexible tipo Jeffcott con un porcentaje de error menor al 10,52% para las dos primeras frecuencia naturales del sistema.
- ❖ La influencia de las señales armónicas generadas por la operación de la máquina, que tienen una alta correlación con la respuesta del sistema, aportan ruido en la identificación de los parámetros modales del sistema. No obstante, se identificaron frecuencias naturales del sistema con porcentajes de error menor al 10%, bajo esta modalidad de ensayo.
- ❖ El modelo numérico validado permite el estudio de la respuesta dinámica del rotor tipo flexible tipo Jeffcott a escala de laboratorio y a través de este, se obtuvo los diagramas de Campbell y los análisis de estabilidad, que permiten establecer las velocidad críticas del sistema.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

- ❖ Si bien se han podido establecer las frecuencias naturales, las formas modales y los coeficientes de amortiguamiento del sistema, se evidencia que al aumentar el número de puntos de medida del sistema y que estos no correspondan a nodos de vibración, se describen y se identifican con mayor claridad las formas modales generadas por el sistema para sus diferentes frecuencias naturales.
- ❖ Según los resultados obtenidos en el diagrama de Campbell el sistema puede operar a velocidades en el rango de 3100 rpm a 12500 rpm, pero el diagrama de inestabilidad desestima este rango limitando la operación del sistema en estudio solo hasta velocidades menores a 4560 rpm, velocidades iguales o por encima de este valor generan altos niveles vibratorios en el sistema que ocasionarán daños catastróficos.
- ❖ Los cojinetes hidrodinámicos generan un impacto notable en el sistema, expresado en la inestabilidad dinámica. Esto se evidencia en el diagrama de inestabilidad, puesto que los modos de vibración ocasionados por estos componentes son los responsables de la inestabilidad dinámica que se presenta en el sistema para velocidades por encima de 4560 rpm.
- ❖ En el diagrama de Campbell se evidencia la influencia del efecto giroscópico generado por el disco central en el rotor, en la duplicidad de las frecuencias naturales del sistema (frecuencias backward y forward) aumentando las velocidades críticas a tener en cuenta en el sistema.

## 8. Recomendaciones

- ❖ Desarrollar las técnicas OMA en el dominio del tiempo NExT-ERA a partir de mediciones con el uso de proximitores para adquirir información en operación de distintos puntos del eje, y generar una curva de estabilización de resultados con respecto a los puntos de medición en partes no rotativas (soportes).
- ❖ Implementar algoritmos que permitan la validación sistemática del modelo numérico desarrollado para el rotor flexible tipo Jeffcott, con respecto a las variables objetivo del OMA, de esta manera obtener modelos numéricos aún más precisos
- ❖ En los casos de estudio desarrollados, se evidencia diferencias en los coeficientes de amortiguamiento calculados para los tres casos de estudio del OMA, se recomienda continuar los estudios para refinar la valoración del coeficiente de amortiguamiento de sistemas, donde las mediciones a comprar se hagan en tiempos y condiciones diferentes.

## 9. Líneas Futuras

- ❖ Escalar el trabajo desarrollado en una turbomáquina real y no en un sistema de laboratorio a fin de valorar las técnicas y modelos numéricos desarrollados en ambientes operativos reales y no escala de laboratorio.

**Referencias bibliográficas**

Acevedo, L. F. A., & Pinto, J. S. P. (2018). MODELAMIENTO, DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE UN BANCO DE PRUEBAS PARA EL ESTUDIO DE LA FUERZA DE DESBALANCE EN ROTORES FLEXIBLES TENIENDO EN CUENTA EL EFECTO GIROSCÓPICO. 194.

Acunzo, G., Fiorini, N., Mori, F., & Spina, D. (2018). Modal mass estimation from ambient vibrations measurement: A method for civil buildings. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 98, 580-593. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.05.014>

Aenlle, M. L., Brincker, R., Canteli, A. F., & García, L. M. V. (2006). MEJORA DE LA FIABILIDAD EN EL DIMENSIONAMIENTO A FATIGA UTILIZANDO ANÁLISIS MODAL. 7.

Agnieszka, A. (2005). *Rotordynamics*. 1085.

Alonso, R., Albizuri, J., & Esparza, J. (2019). Application of model updating techniques to turbomachinery rotor components. *Advances in Mechanical Engineering*, 11(7), 168781401986394. <https://doi.org/10.1177/1687814019863941>

Araujo, I. G., Rondón, E. M., & Cho, G. C. (s. f.). Pruebas de Vibración Ambiental en Puentes Ambient Vibrations Testing on Bridges. 14.

Balaguru, S., Natarajan, E., Ramesh, S., & Muthuvijayan, B. (2019). Structural and modal Analysis of Scooter Frame for Design Improvement. *Materials Today: Proceedings*, 16, 1106-1116. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.05.202>

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Baquedano, D., Saavedra, P., & Juan, L. (2011). Modelo numérico para el estudio dinámico de un rotor con eje agrietado. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*; Vol.: 12 Núm.: 2.

Burnett, D. S. (1987). *Finite Element Analysis From Concepts To Applications* (1.<sup>a</sup> ed.).

Caicedo, J. M., Dyke, S. J., & Johnson, E. A. (2004). Natural Excitation Technique and Eigensystem Realization Algorithm for Phase I of the IASC-ASCE Benchmark Problem: Simulated Data. *Journal of Engineering Mechanics*, 130(1), 49-60. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2004\)130:1\(49\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2004)130:1(49))

Carbajal, F., Navarro, G., & Montiel, M. (2014). Control Activo de Vibraciones en un Rotor Tipo Jeffcott con Velocidad Variable Usando una Suspensión Electromecánica . *Science Direct*, 11(3), 295-303. <http://dx.doi.org/10.1016/j.riai.2014.05.002>

Chatelet, E., D'Ambrosio, F., & Jacquet-Richardet, G. (2005b). Toward global modelling approaches for dynamic analyses of rotating assemblies of turbomachines. *Journal of Sound and Vibration*, 282(1-2), 163-178. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.02.035>

Chopra, A., & Upper, S. (2001). Book Review: *Dynamics of Structures, Theory and Applications in Earthquake*. 17(3), 2.

Cigada, A., Caprioli, A., Redaelli, M., & Vanali, M. (2008). Vibration Testing at Meazza Stadium: Reliability of Operational Modal Analysis to Health Monitoring Purposes. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 22(4), 228-237. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0887-3828\(2008\)22:4\(228\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0887-3828(2008)22:4(228))

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Cui, L., & Zheng, J. (2014). Nonlinear vibration and stability analysis of a flexible rotor supported on angular contact ball bearings. *Journal of Vibration and Control*, 20(12), 1767-1782. <https://doi.org/10.1177/1077546312474679>

Devriendt, C., Magalhães, F., Weijtjens, W., De Sitter, G., Cunha, Á., & Guillaume, P. (2014). Structural health monitoring of offshore wind turbines using automated operational modal analysis. *Structural Health Monitoring*, 13(6), 644-659. <https://doi.org/10.1177/1475921714556568>

Díaz, R. R., & Barrera, P. G. (s. f.). Detección de fallos en estructuras mediante la medida de la variación de sus propiedades dinámicas. 164.

Doebling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M. B., & Shevitz, D. W. (1996). Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: A literature review (LA--13070-MS, 249299; p. LA--13070-MS, 249299). <https://doi.org/10.2172/249299>

Donato, R. R. (2010). ANÁLISIS ARMÓNICO DE UN ROTOR NO SIMETRICO INCLUYENDO EL EFECTO GIROSCÓPICO CON MEF. 7.

Ebrahimi, R., Esfahanian, M., & Ziaei-Rad, S. (2013). Vibration modeling and modification of cutting platform in a harvest combine by means of operational modal analysis (OMA). *Measurement*, 46(10), 3959-3967. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2013.07.037>

Eslaminejad, A., Ziejewski, M., & Karami, G. (2019). An experimental–numerical modal analysis for the study of shell-fluid interactions in a clamped hemispherical shell. *Applied Acoustics*, 152, 110-117. <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2019.03.029>

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Fazel, M., Pong, T. K., Sun, D., & Tseng, P. (2013). Hankel Matrix Rank Minimization with Applications to System Identification and Realization. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 34(3), 946-977. <https://doi.org/10.1137/110853996>

Frecuencia digital, frecuencia de Nyquist y Teorema del muestreo. (s. f.).

Friswell, M. I., Penny, J. E. T., Garvey, S. D., & Lees, A. W. (2010). *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511780509>

Gentile, C., & Gallino, N. (2008). Ambient vibration testing and structural evaluation of an historic suspension footbridge. *Advances in Engineering Software*, 39(4), 356-366. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2007.01.001>

González, M. N., Cobo, A., & Fuente, J. V. (2013). Obtención de modelos de cálculo de sistemas provisionales de protección de borde mediante la técnica de Análisis Modal Operacional. *Informes de la Construcción*, 65(529), 99-106. <https://doi.org/10.3989/ic.11.133>

Hageman, R. B., & Drummen, I. (2019). Modal analysis for the global flexural response of ships. *Marine Structures*, 63, 318-332. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2018.09.012>

Hu, W.-H., Moutinho, C., Caetano, E., Magalhães, F., & Cunha, Á. (2012). Continuous dynamic monitoring of a lively footbridge for serviceability assessment and damage detection. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 33, 38-55. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2012.05.012>

Iii, G. H. J., Carrie, T. G., & Lauffer, J. P. (s. f.). *The Natural Excitation Technique (NExT) for Modal Parameter Extraction From Operating Wind Turbines*. 47.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

ISO/TC 108/SC 2. (2014). ISO 10816-8:2014 Mechanical vibration—Evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts—Part 8: Reciprocating compressor systems. <https://www.iso.org/standard/56782.html>

Jelani, K. M., Razip, M. H. M., Nazri, N. A., Sani, M. S. M., & Yasar, M. (2019). Dynamics investigation on motorcycle chassis based on Finite Element (FE) modelling and updating. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 469, 012103. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/469/1/012103>

Juang, J.-N., & Pappa, R. S. (1985). An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction. Aerospace Engineer, Structural Dynamics Branch, 8(5), 9.

Karoumi, R. (1999). Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges. Computers and Structures, 16.

Kim, S., & Ahmadi, K. (2019). Estimation of vibration stability in turning using operational modal analysis. Mechanical Systems and Signal Processing, 130, 315-332. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.04.057>

Lafleur, F., & Vu, V. H. (s. f.). CASE STUDY OF OPERATIONAL MODAL ANALYSIS (OMA) OF A LARGE HYDROELECTRIC GENERATOR. 11.

Magalhães, F., Caetano, E., & Cunha, Á. (2008). Operational modal analysis and finite element model correlation of the Braga Stadium suspended roof. Engineering Structures, 30(6), 1688-1698. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.11.010>

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Maliar, L., Kuchárová, D., & Daniel, Ľ. (2019). Operational Modal Analysis of the Laboratory Steel Truss Structure. *Transportation Research Procedia*, 40, 800-807.  
<https://doi.org/10.1016/j.trpro.2019.07.113>

Martinez, J. M. R. (s. f.). *A´lgebra Lineal XXVIII: Eigenvalores y Eigenvectores*. 6.

Masjedian, M. H., & Keshmiri, M. (2009). A Review on Operational Modal Analysis Researches: Classification of Methods and Applications. 10.

Naranjo, V. I. M., Bernardin, A. O., & Plaza, R. B. (s. f.). DETERMINACIÓN DE COEFICIENTES DE AMORTIGUACIÓN Y RIGIDEZ DE UN DESCANSO HIDRODINÁMICO. 95.

Nova, F. R., Sanchez, H. G., & Villegas, D. F. (2020). Evaluation of the modal parameters of two shafts, one manufactured with a composite materiales and the other manufactured with structural Steel, through the implementation of a technique of Operational Modal Analysis (OMA). *Respuestas Journal of Engineering Sciences*, 25(2), 78-88.  
<https://doi.org/10.22463/0122820X.2188>

Nova, F., & Reina, C. (2017). METODOLOGIA PARA LA IMPLEMENTACION DE LA TECNICA DE ANALISIS MODAL OPERACIONAL (OMA), EN LA CARACTERIZACION DE LOS PARAMETROS MODALES DE UN EJE DE TRANSMISION DE POTENCIA DE UN BANCO DE ENSAYOS DEL LABORATORIO DE VIBRACIONES MECANICAS.  
[http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/pags/cat/popup/pa\\_detalle\\_matbib.jsp?parametros=180625|20|1|4](http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/pags/cat/popup/pa_detalle_matbib.jsp?parametros=180625|20|1|4)

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Oliveira, G., Magalhães, F., Cunha, Á., & Caetano, E. (2014). Implementation of a Dynamic Monitoring System on a Wind Turbine. 8.

Ondra, V., & Titurus, B. (2019). Theoretical and experimental modal analysis of a beam-tendon system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 132, 55-71. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2019.06.016>

Palanivelu, S., Narasimha Rao, K. V., & Ramarathnam, K. K. (2015). Determination of rolling tyre modal parameters using Finite Element techniques and Operational Modal Analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 64-65, 385-402. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2015.04.006>

Pappa, R., Elliott, K., & Schenk, A. (1992, abril 16). A consistent-mode indicator for the eigensystem realization algorithm. Dynamics Specialists Conference. Dynamics Specialists Conference, Dallas, TX, U.S.A. <https://doi.org/10.2514/6.1992-2136>

Park, H. S., & Oh, B. K. (2018). Real-time structural health monitoring of a supertall building under construction based on visual modal identification strategy. *Automation in Construction*, 85, 273-289. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2017.10.025>

Pedro, C. A., Enrique, G. W., & Dariusz, S. W. (2012). CARACTERIZACIÓN MODAL DE ROTORES USANDO MODELOS DE RESPUESTA. 9.

Peeters, B., Van der Auweraer, H., Vanhollenbeke, F., & Guillaume, P. (2007). Operational Modal Analysis for Estimating the Dynamic Properties of a Stadium Structure during a Football Game. *Shock and Vibration*, 14(4), 283-303. <https://doi.org/10.1155/2007/531739>

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Qiankun, J., & Gangyi, D. (2011). A finite element analysis of ship sections subjected to underwater explosion. *International Journal of Impact Engineering*, 38(7), 558-566. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2010.11.005>

Rahmatalla, S., Hudson, K., Liu, Y., & Eun, H.-C. (2014). Finite element modal analysis and vibration-waveforms in health inspection of old bridges. *Finite Elements in Analysis and Design*, 78, 40-46. <https://doi.org/10.1016/j.finel.2013.09.006>

Reynders, E., Maes, K., Lombaert, G., & De Roeck, G. (2016). Uncertainty quantification in operational modal analysis with stochastic subspace identification: Validation and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 66-67, 13-30. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2015.04.018>

Rita, M. (s. f.). Colegio Konrad Lorenz, Luján de Cuyo, Mendoza Pofesor Guía: LUQUEZ, Edgardo Guillermo. 6.

Rizo-Patron, S., & Sirohi, J. (2017). Operational Modal Analysis of a Helicopter Rotor Blade Using Digital Image Correlation. *Experimental Mechanics*, 57(3), 367-375. <https://doi.org/10.1007/s11340-016-0230-6>

Rodríguez Súnico, M. (2005). Análisis Modal Operacional: Teoría y Práctica. Escuela Superior de Ingenieros de Sevilla.

Rouch, K. E., & Kao, J.-S. (1979). A tapered beam finite element for rotor dynamics analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 66(1), 119-140. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(79\)90607-2](https://doi.org/10.1016/0022-460X(79)90607-2)

Ruiz, R. A. L. (2006). EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DINÁMICA EN SISTEMAS ROTOR-CHUMACERA CON Y SIN DESALINEAMIENTO. 231.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Sanchez, H. G. (2010). Modelo Analítico Para el Estudio de la Torsión en Rotores Flexibles. *UIS Ingenierías*, 9(9), 69-76.

Sánchez, H. G. A., Marulanda, D. M. C., & Florez, E. G. (2014). Application of Vibration Based Damage Identification Techniques on Metallic Structures. *Advanced Materials Research*, 875-877, 875-879. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.875-877.875>

Sanchez, H. G., Nova, F. R., & Gonzalez-Estrada, O. A. (2019). Implementation of the Operational Modal Analysis technique in a power transmission shaft. *Journal of Physics: Conference Series*, 1247(1), 012032. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1247/1/012032>

Smith, J. (s. f.). Markov Parameters. Introduction to Digital Filters with Audio Applications. [https://ccrma.stanford.edu/~jos/fp/Markov\\_Parameters.html#:~:text=successive%20input%20vectors%2C%20each%20providing,one%20of%20the%20input%20components.&text=are%20known%20as%20the%20Markov%20parameters%20of%20the%20state%2Dspace%20model.&text=is%20the%20inverse%20z%20transform,transfer%2Dfunction%20of%20the%20system.](https://ccrma.stanford.edu/~jos/fp/Markov_Parameters.html#:~:text=successive%20input%20vectors%2C%20each%20providing,one%20of%20the%20input%20components.&text=are%20known%20as%20the%20Markov%20parameters%20of%20the%20state%2Dspace%20model.&text=is%20the%20inverse%20z%20transform,transfer%2Dfunction%20of%20the%20system.)

Tarpø, M., Nabuco, B., Georgakis, C., & Brincker, R. (2020). Expansion of experimental mode shape from operational modal analysis and virtual sensing for fatigue analysis using the modal expansion method. *International Journal of Fatigue*, 130, 105280. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2019.105280>

Teter, A., & Gawryluk, J. (2016). Experimental modal analysis of a rotor with active composite blades. *Composite Structures*, 153, 451-467. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.06.013>

Tong, G., Jin, X., & Road, C. (2012). Study on the Simulation of Radial Tire Wear Characteristics. 11(8), 11.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Uehara, D., & Sirohi, J. (2019). Full-field optical deformation measurement and operational modal analysis of a flexible rotor blade. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 133, 106265. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106265>

Universidad Industrial de Santander, Sánchez Acevedo, H. G., Uscátegui, J., Universidad Industrial de Santander, Gómez, S., & Industrias Hermes Acevedo Muñoz, Colombia. (2017). Metodología para la detección de fallas en una estructura entramada metálica empleando las técnicas de análisis modal y PSO. *Revista UIS Ingenierías*, 16(2), 43-50. <https://doi.org/10.18273/revuin.v16n2-2017004>

Vázquez, J. A., Barrett, L. E., & Flack, R. D. (2001). A Flexible Rotor on Flexible Bearing Supports: Stability and Unbalance Response. *Journal of Vibration and Acoustics*, 123(2), 137-144. <https://doi.org/10.1115/1.1355244>

Wall, M. E., Rechtsteiner, A., & Rocha, L. M. (2003). Singular Value Decomposition and Principal Component Analysis. En D. P. Berrar, W. Dubitzky, & M. Granzow (Eds.), *A Practical Approach to Microarray Data Analysis* (pp. 91-109). Kluwer Academic Publishers. [https://doi.org/10.1007/0-306-47815-3\\_5](https://doi.org/10.1007/0-306-47815-3_5)

Welch, P. D. (1967). The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms. *IEEE TRANSACTIONS ON AUDIO AND ELECTROACOUSTICS*, 15(2), 4.

Yan, W.-J., & Ren, W.-X. (2013). Use of Continuous-Wavelet Transmissibility for Structural Operational Modal Analysis. *Journal of Structural Engineering*, 139(9), 1444-1456. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0000711](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000711).

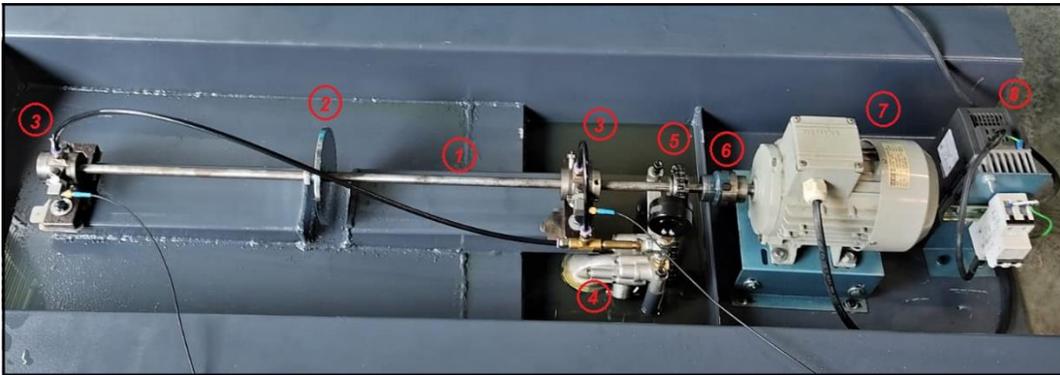
## Apéndices

### Apéndice A. Características físico-mecánicas de los componentes del banco de ensayos

El banco de ensayos sobre el cual se fundamentó el trabajo de investigación, se encuentra ubicado en el laboratorio de Vibraciones Mecánicas de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad Industrial de Santander. Dicho banco de ensayos, que se evidencia en la Figura 27, lo conforman los siguientes componentes:

#### Figura 27

*Banco de ensayos, objeto de estudio para el desarrollo del trabajo de investigación*



#### 1. Eje

Un eje de acero estructural, que tiene las siguientes características:

- ✓ Diámetro: 0,0127 m
- ✓ Longitud: 0,857 m
- ✓ Densidad:  $7850 \frac{kg}{m^3}$

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

- ✓ Módulo de Young: 210 GPa
- ✓ Módulo de cizalladura: 81,7 GPa
- ✓ Coeficiente de Poisson: 0,285

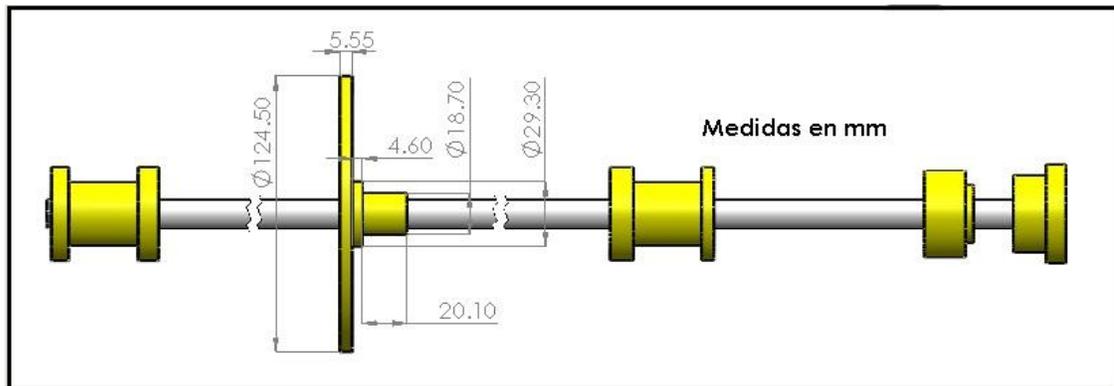
### 2. Disco central

Un disco central en acero estructural, cuyas dimensiones se presentan en la Figura 28 y que tiene las siguientes características físico mecánicas:

- ✓ Diámetro: 0,1245 m
- ✓ Espesor: 0.00555 m
- ✓ Densidad:  $7850 \frac{kg}{m^3}$
- ✓ Módulo de Young: 210 GPa
- ✓ Módulo de cizalladura: 81,7 GPa
- ✓ Coeficiente de Poisson: 0,285

**Figura 28**

*Dimensiones del disco central del rotor*



### 3. Cojinetes hidrodinámicos:

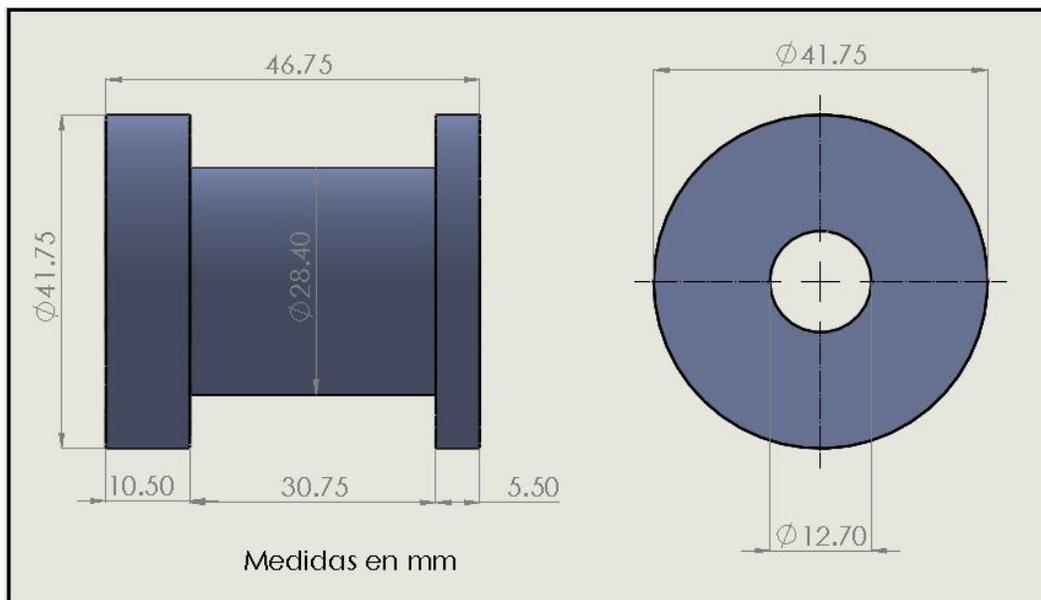
## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Los cojinetes son componentes indispensables en el rotor tipo Jeffcott y en cualquier maquinaria rotativa; es por ello, que es de vital importancia caracterizarlos e identificar sus propiedades dinámicas, ya que son base fundamental para el desarrollo del modelo numérico.

En el banco de ensayos se presentan dos cojinetes hidrodinámicos de dos lóbulos con relación longitud-diámetro es de 1,0471. La holgura vertical y horizontal entre los muñones y los cojinetes es aproximadamente igual, por lo tanto, el cojinete se asume como cilíndrico para facilitar los cálculos. Las dimensiones asociadas a estos muñones se presentan en la Figura 29.

### Figura 29

*Dimensionamiento de los muñones del cojinete hidrodinámico.*



Para obtener las matrices de rigidez y amortiguamiento que inciden en el rotor flexible, se asume una relación linealmente dependiente entre la fuerza que actúa sobre la película del lubricante y el desplazamiento del muñón del rotor. A su vez, se desprecia la influencia de la temperatura sobre la dinámica del lubricante en el cojinete.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Estas matrices de rigidez y amortiguamiento para los cojinetes hidrodinámicos están determinadas por las Ecuaciones 57 y 58, respectivamente.

$$\mathbf{K}_{cojinetes} = \frac{f}{c} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Donde,

$f$  = Es la fuerza ejercida por el peso del rotor sobre los cojinetes

$c$  = La holgura o juego radial entre los muñones y los cojinetes

$\Omega$  = Velocidad de rotación del rotor en [rad/s ]

$$\mathbf{C}_{cojinetes} = \frac{f}{c\Omega} \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Las variables  $k_{xx}$ ,  $k_{yx}$ ,  $k_{xy}$ ,  $k_{yy}$ ,  $C_{xx}$ ,  $C_{yx}$ ,  $C_{xy}$ , y  $C_{yy}$ , corresponden a los coeficientes de rigidez y amortiguamiento y sus valores están determinados por las Ecuaciones 59, 60, 61, 62, 63, 64, y 65.

$$k_{xx} = 4 \times h_0 \times (\pi^2(2 - \varepsilon^2) + 16\varepsilon^2) \quad (59)$$

$$k_{xy} = h_0 \times \frac{\pi(\pi^2(1 - \varepsilon^2)^2 + 16\varepsilon^4)}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (60)$$

$$k_{yx} = -h_0 \times \frac{\pi(\pi^2(1 - \varepsilon^2)(1 + 2\varepsilon^2) + 32\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2))}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (61)$$

$$k_{yy} = 4 \times h_0 \times \left( \pi^2(1 + 2\varepsilon^2) + \frac{32\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)} \right) \quad (62)$$

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

$$C_{xx} = h_0 \times \frac{2\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}(\pi^2(1+2\varepsilon^2) - 16\varepsilon^2)}{\varepsilon} \quad (63)$$

$$C_{xy} = C_{yx} = -8 \times h_0 \times (\pi^2(1+2\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2) \quad (64)$$

$$C_{yy} = h_0 \times \frac{2\pi(\pi^2(1-\varepsilon^2)^2 + 48\varepsilon^2)}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad (65)$$

*Donde,*

$\varepsilon =$  *Relación de excentricidad del cojinete*

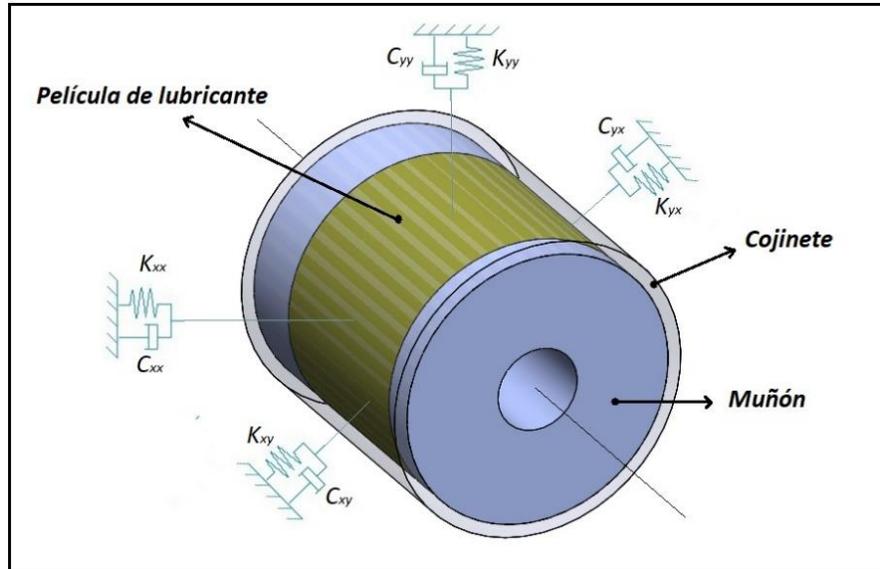
$$h_0 = \frac{1}{(\pi^2(1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (59.1)$$

El desarrollo presentado anteriormente para determinar las matrices de rigidez y amortiguamiento de los cojinetes y sus respectivos coeficientes, es tomado a partir de lo desarrollado por Friswell Michael en (Friswell et al., 2010).

Finalmente, la Figura 30 representa la distribución de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en el cojinete hidrodinámico.

**Figura 30**

*Distribución de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento en el cojinete hidrodinámico.*



#### 4. Bomba de impulso para el aceite del cojinete

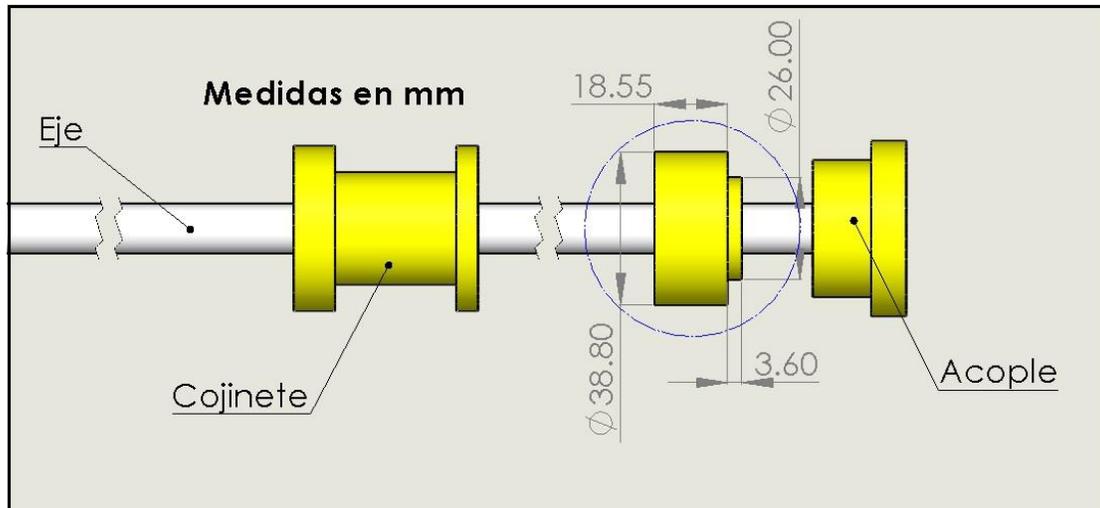
No se cuenta con información técnica de la bomba, pero dicha información no es influyente con el desarrollo del proyecto.

#### 5. Sistema de transmisión de potencia para la bomba

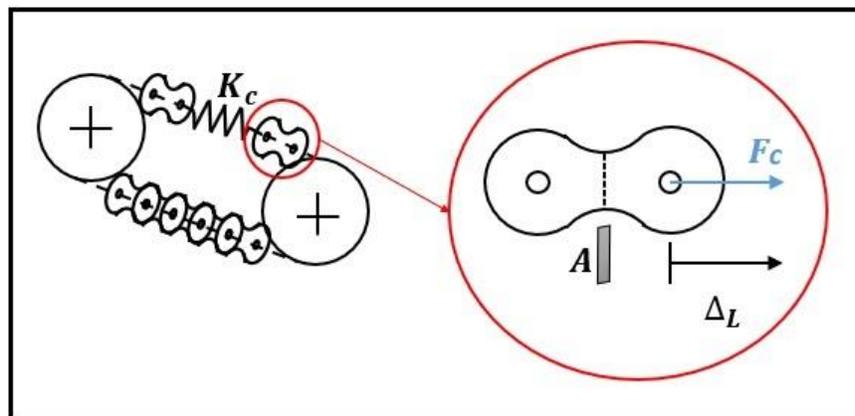
El sistema de transmisión de potencia para la bomba que impulsa el lubricante de los cojinetes, está compuesto por un piñón y una cadena, los cuales son los elementos adyacentes al rotor y que son tenidos en cuenta para el desarrollo del modelo numérico.

Para efectos de facilidad de cálculos, el piñón es asemejado a un disco, cuyas dimensiones son especificadas en la Figura 31.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Figura 31***Dimensiones del piñón*

Debido a la tensión que genera la cadena sobre el piñón y por consiguiente sobre el rotor, este componente aporta una rigidez sobre el sistema. Esta rigidez es determinada a partir del análisis expresado en la Figura 32.

**Figura 32***Interpretación del comportamiento de la rigidez de la cadena sobre el sistema.*

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Partiendo de la Figura 32, y asumiendo que la fuerza de tensión de la cadena “ $F_c$ ” está determinada por la Ley de Hook, se tiene la Ecuación a:

$$F_c = K_c * \Delta_L \quad (a)$$

Asumiendo el comportamiento del eslabón como elástico lineal en función del esfuerzo y la deformación unitaria, se tiene la Ecuación b.

La Ecuación b, se asume como el coeficiente de rigidez de la cadena sobre el rotor. Además, el valor de este coeficiente de rigidez es asumido por igual en los 2 grados de libertad del nodo, los cuales son ubicados en la posición del piñón sobre el rotor y es sumado a la matriz de rigidez global del sistema.

$$K_c = \frac{EA}{L} \quad (b)$$

*Donde,*

$$E = \text{Módulo de young del eslabon de la cadena} = 200 \text{ GPa}$$

$$A = \text{Área transversal del eslabón de la cadena} = 5 \text{ mm}^2$$

$$L = \text{Longitud del eslabón de la cadena} = 12,7 \text{ mm}$$

### 6. Acople motor

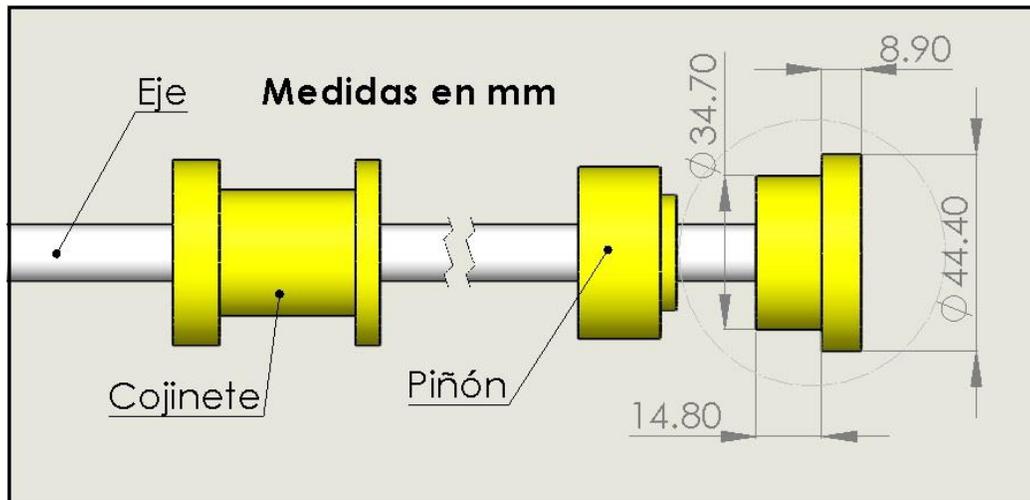
Al igual que para la cadena y el piñón, el acople del eje al motor no solo genera un aporte en la matriz global de masa y efecto giroscópico del sistema, sino que también, en el nodo donde se ubica dicho acople sobre el rotor, se adiciona una matriz de coeficientes de rigidez por el acople, sobre la matriz global de rigidez del sistema.

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Del mismo modo que en el piñón y para efectos de facilidad en los cálculos, se asume el valor de rigidez igual para los 2 grados de libertad del nodo y se interpreta el acople como la unión de dos discos. La Figura 33, exhibe las dimensiones de dicho acople.

**Figura 33**

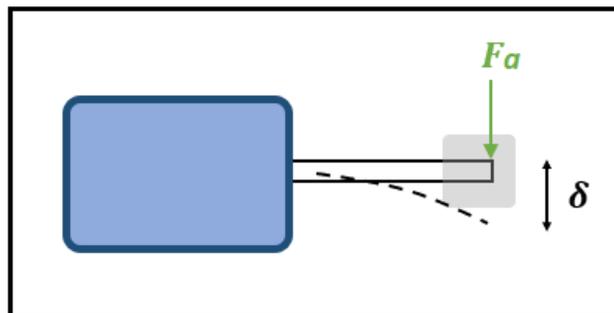
*Dimensiones de acople del eje al motor.*



Para el caso del acople al motor, se asume la rigidez como un sistema de empotramiento en voladizo, tal y como se muestra en la Figura 34.

**Figura 34**

*Interpretación del comportamiento de la rigidez del acople al motor sobre el sistema.*



## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

Habida cuenta de ello, el valor del coeficiente de rigidez está determinado por el desarrollo de las Ecuaciones c, d, e, donde esta última corresponde a la Ecuación que establece el coeficiente de rigidez del acople sobre el rotor.

$$Fa = \delta Ka \quad (c)$$

$$\delta = \frac{Fa * L^3}{3 * E * I} \quad (d)$$

$$Ka = \frac{3 * E * I}{L^3} \quad (e)$$

Donde,

$E =$  Módulo de young del eslabon de la cadena = 205 GPa

$I =$  Momento de inercia del eje del motor

$L =$  Longitud del eje del motor = 42,5 mm

### 7. Motor

El banco de ensayos cuenta con un motor trifásico SIEMENS de dos polos con una potencia nominal de 0.75 HP.

#### Figura 35

*Motor del banco de ensayos.*



## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**8. Variador de frecuencia e interruptor**

El variador de frecuencia que componen el banco de ensayos es un SIEMENS Sinamics V20 6SL3210 con una potencia de salida de 1 HP.

**Figura 36**

*Variador de frecuencia del banco de ensayos*



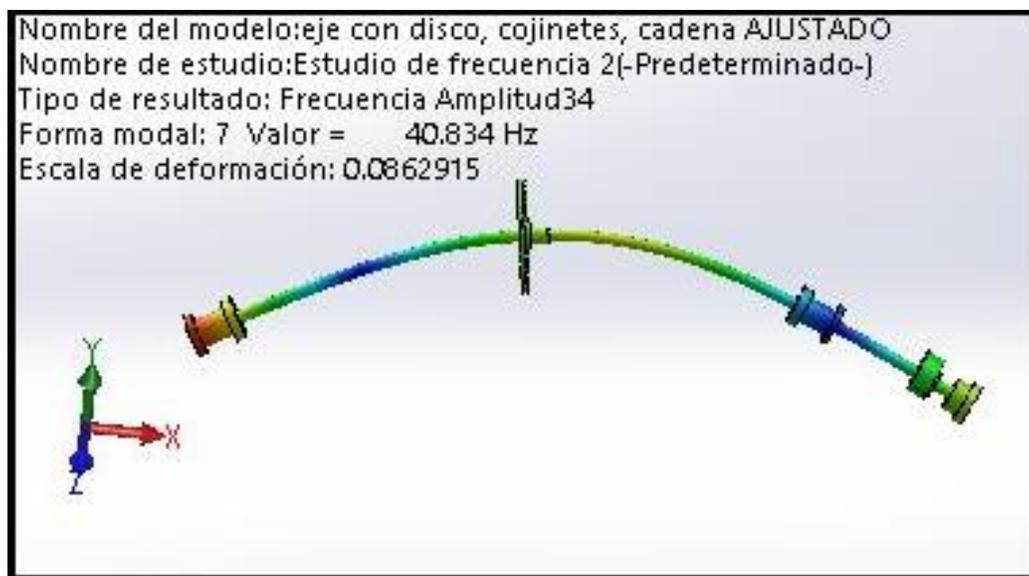
**Apéndice B. Simulación del sistema en estudio bajo el software CAD SolidWorks****1. Resultados de la simulación en condición de suspensión libre-libre del rotor**

Con el objetivo de analizar la influencia de la rigidez de los soportes sobre las frecuencias naturales del rotor, se desarrolla una simulación del rotor en condición de suspensión libre-libre. Si bien, esta simulación no denota el comportamiento real del sistema, si describe las frecuencias naturales del rotor para las cuales fue construido.

Es importante señalar que el rotor está compuesto por el eje, el disco central, los muñones del cojinete, el piñón y el acople al motor. Estos componentes son interpretados como un todo, ya que están unidos por medio de pernos lo que hace que se desprecie las holguras que se puedan generar entre el eje y los componentes adyacentes.

**Figura 37**

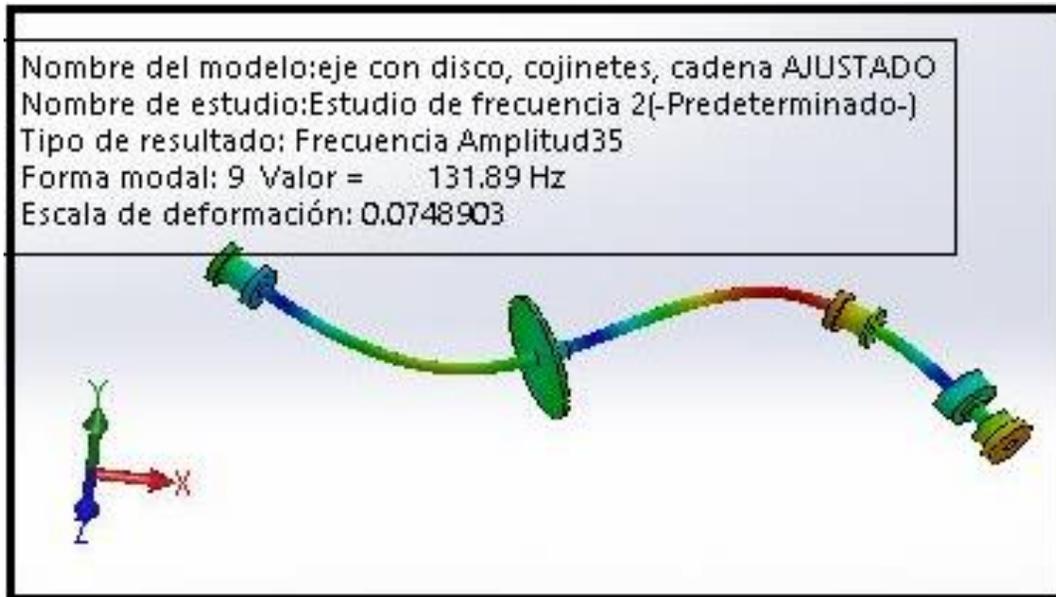
*Primer modo de flexión del rotor en condición de suspensión libre-libre*



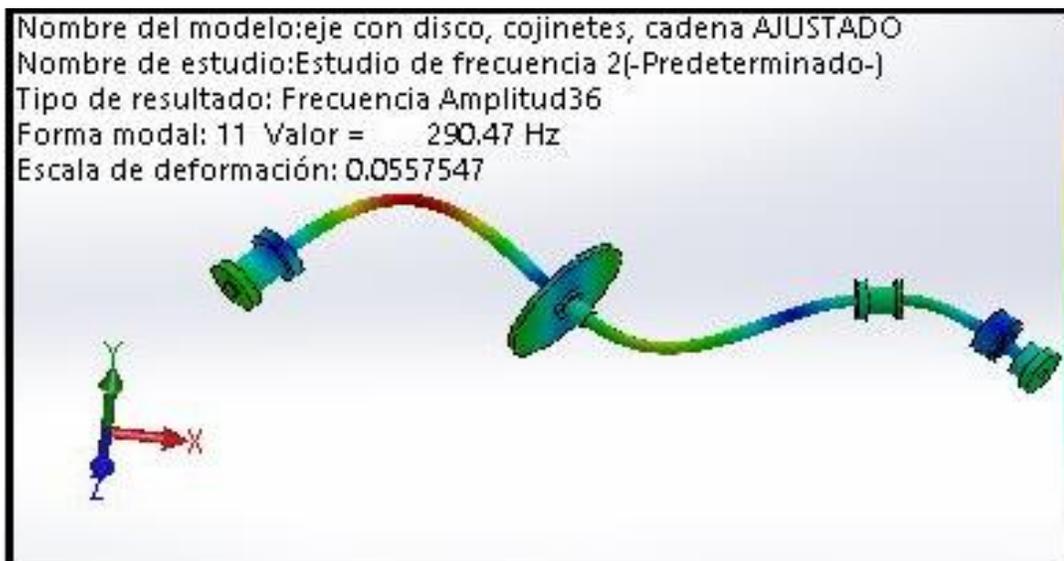
## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Figura 38**

*Segundo modo de flexión del rotor en condición de suspensión libre-libre*

**Figura 39**

*Tercer modo de flexión del rotor en condición de suspensión libre-libre*

**Figura 40**

*Cuarto modo de flexión del rotor en condición de suspensión libre-libre*

## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT



## 2. Resultados de la simulación en condición de empotramiento del rotor

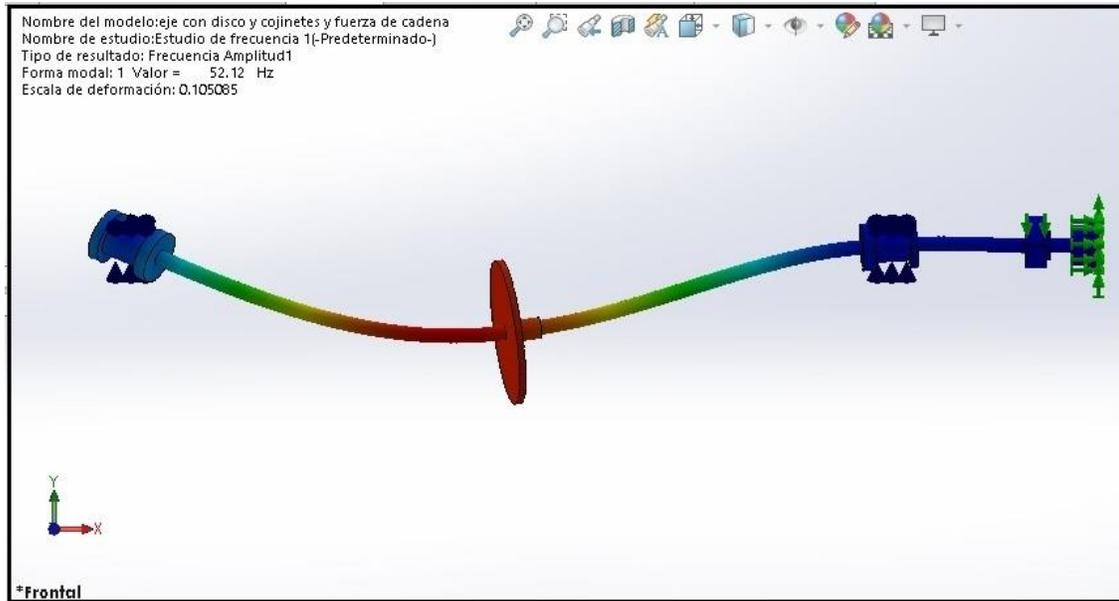
Esta simulación corresponde al comportamiento real del sistema. Los resultados presentes en esta simulación son la base teórica de comparación con los resultados del desarrollo e implementación de la técnica OMA (NExT-ERA).

Con la ayuda de esta situación, se tiene un conocimiento previo del comportamiento vibratorio del sistema y a su vez, dadas las formas modales presentes en las Figuras 41, 42, 43, 44 y 45, se identifica el punto estratégico para obtener la mayor cantidad de energía vibratoria del sistema. Este punto es al lado derecho del disco central (hacia la zona del motor).

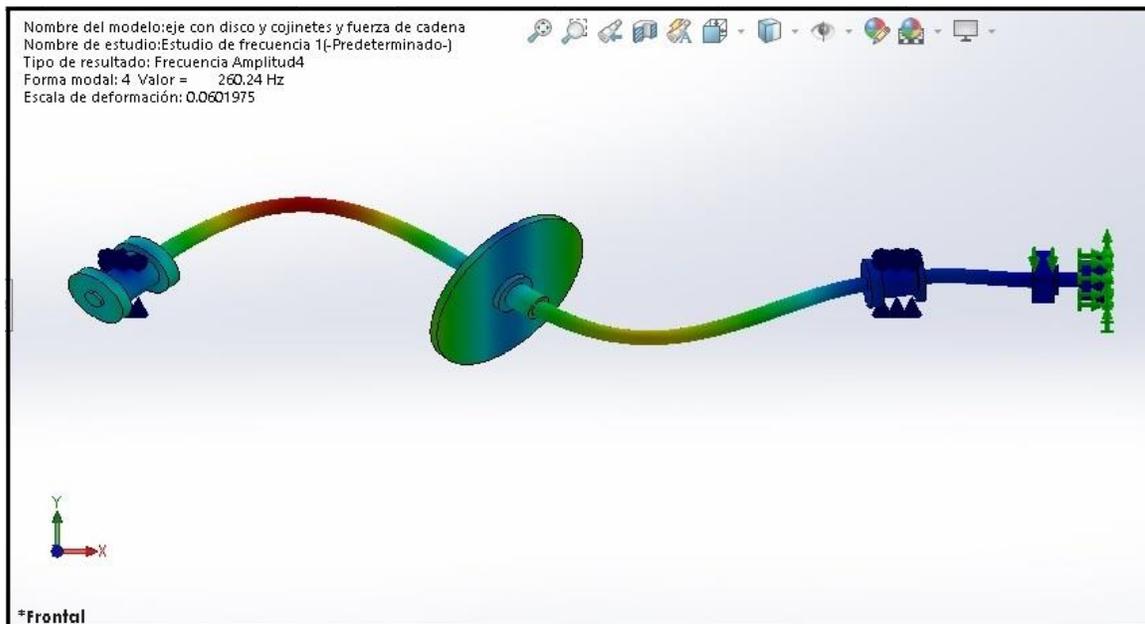
## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Figura 41**

*Primer modo de flexión del rotor en condición de empotramiento*

**Figura 42**

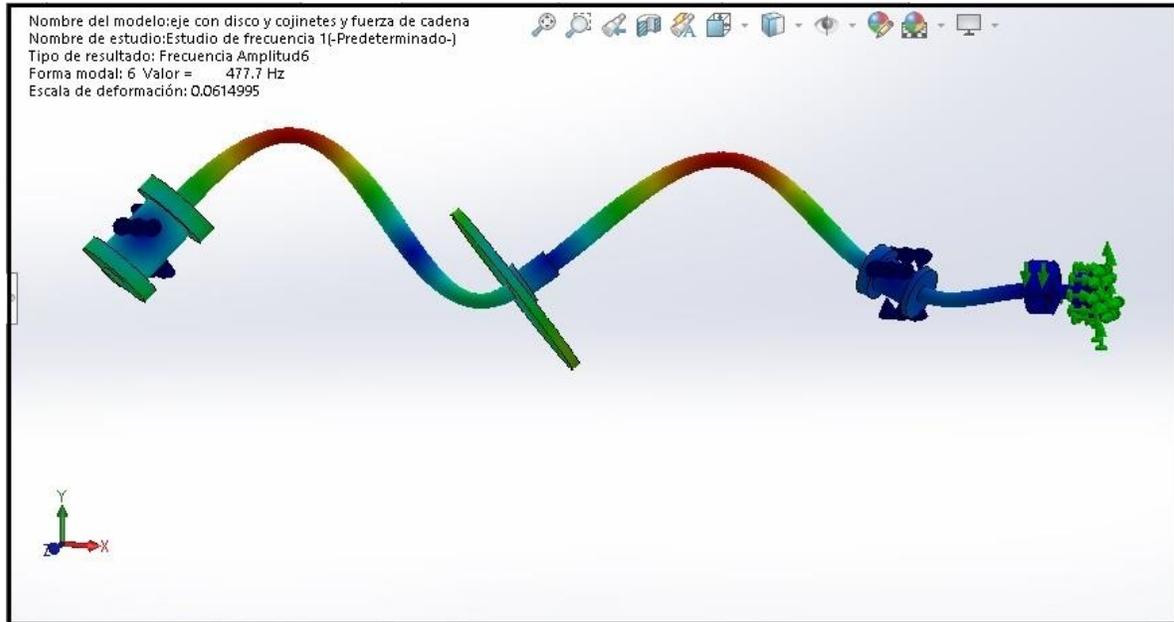
*Segundo modo de flexión del rotor en condición de empotramiento*



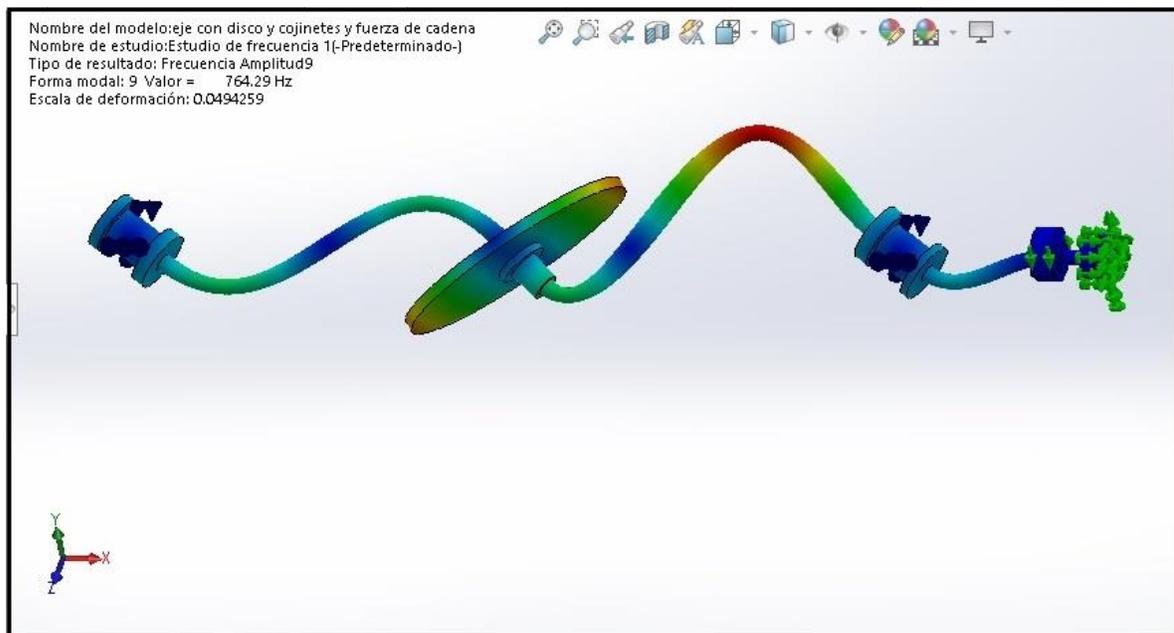
## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Figura 43**

*Tercer modo de flexión del rotor en condición de empotramiento*

**Figura 44**

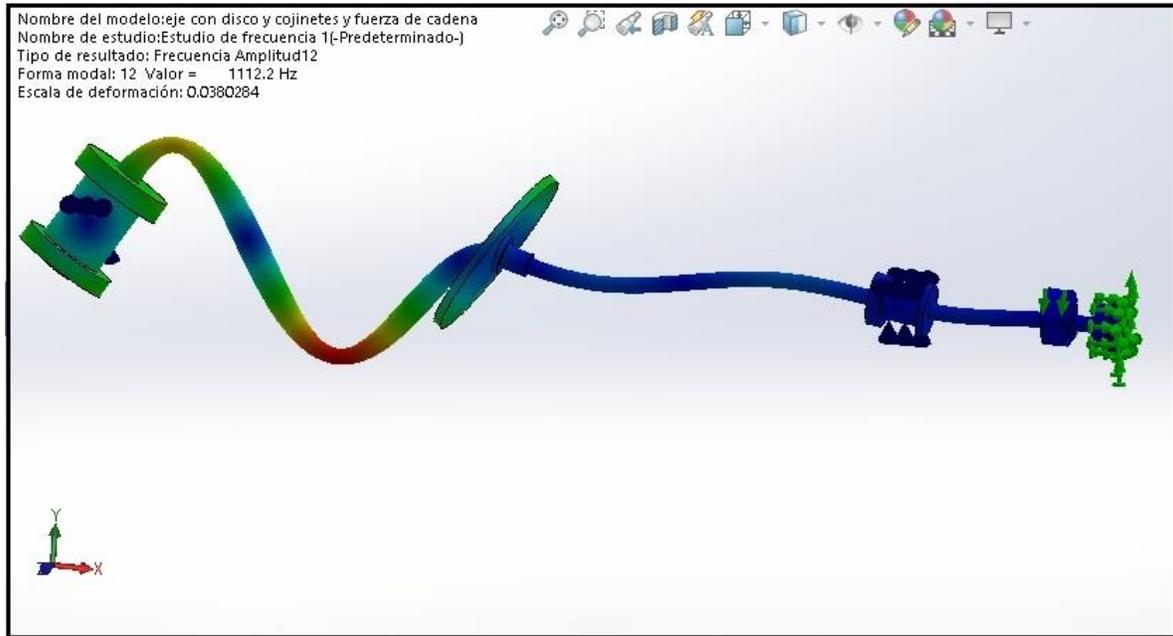
*Cuarto modo de flexión del rotor en condición de empotramiento*



## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Figura 45**

*Quinto modo de flexión del rotor en condición de empotramiento*



### Apéndice C. Sensórica utilizada en los ensayos del trabajo de investigación

Para el desarrollo de los ensayos experimentales, tanto para el Análisis Modal operacional (OMA) como para el Análisis Modal Experimental (EMA), se usaron los siguientes sensores, equipos y módulos de adquisición de datos.

#### 1. Equipo de adquisición de datos

En la Figura 46, se exhibe el equipo encargado de almacenar los datos adquiridos por los sensores, el cual es un Módulo Analizador de vibraciones Ref: OR-35-Freq-8 de la Empresa OROS, con capacidad de 8 canales de entrada y un ancho de banda hasta 20kHz. Dicho Módulo, tiene integrado un software el cual permite la visualización de resultados. Este software es el NV Gate V. 10.0 con el Módulo de Modal.

#### Figura 46

*Módulo analizador de datos vibratorios*



## NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

### 2. Transductor #1. Excitador dinámico

En la Figura 47, se presenta el Hammer modelo Dytran DYNAPULSE 5850 B, configurado con una sensibilidad de 10,8mv/Lbf, el cual es el encargado de generar la información de entrada para el EMA.

#### Figura 47

*Excitador dinámico. Hammer*



### 3. Transductor #2. Sensor de medición de aceleración

Para el desarrollo de los ensayos, tanto EMA como OMA se trabajó con un total de 5 acelerómetros uniaxiales de modelo 3224B de la empresa DYTRAN Instruments Inc. Estos acelerómetros varían en sus sensibilidades, las cuales eran: 100,44 mV/g; 97,59 mV/g; mV/g, 99,71 mV/g; 98,58 mV/g y 11,51 mV/g. La estructura de estos acelerómetros se muestra en la Figura 48.

NEXT-ERA EN UN ROTOR FLEXIBLE TIPO JEFFCOTT

**Figura 48**

*Acelerómetro uniaxial*

