

**EL NÚMERO DE ROTACIÓN DE UNA
CURVA CERRADA**

REINALDO PÉREZ BERNAL

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2004**

EL NÚMERO DE ROTACIÓN DE UNA CURVA CERRADA

REINALDO PÉREZ BERNAL

Monografía presentada como requisito para optar al
título de Licenciado en Matemáticas

Director

MARLIO PAREDES GUTIÉRREZ

Doctor en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2004

TITLE: THE ROTATION NUMBER OF A CLOSED CURVE¹

AUTHOR: REINALDO PEREZ BERNAL²

KEY WORDS: Curves in the plane Curvature of a curve Differential geometry
Rotation Number Topology

DESCRIPTION:

This monograph is a consultation material for mathematicians that they want to know some interesting results about the curves in the plane and it taking account the applicability in some topology them.

This work consists of three interesting chapter: introduction about plane curves, the rotation number of a closed curve, applicability. In the first chapter appear the curve concepts, tangent vector, reparametrizacion, bow length, field of vectors, curvature of a curve and as a important part is the fundamental theorem of the plane curves. Where it show us that the curvature function define the curve.

The second chapter has the concepts of angle oriented and the rotation number of a plane curve with its different properties. Furthermore in the section of the angles properties oriented, we must to have present the congruencies theme that it is studied in the curse of numbers theory.

And in the third chapter shows some interesting applications of the rotation number concept in the continue functions of disc in the plane and in the Brower theorem; and this compasses a great topological content that it must are studied carefully for understand it so well.

¹Monograph.

²Faculty of Sciences, School of Mathematics, Marlio Paredes, Ph. D. in Mathematics.

TÍTULO: EL NÚMERO DE ROTACIÓN DE UNA CURVA CERRADA³

AUTOR: REINALDO PÉREZ BERNAL⁴

PALABRAS CLAVES: Curvas en el plano Curvatura de una curva Geometría diferencial Número de rotación Topología.

DESCRIPCIÓN:

La presente monografía es un material de consulta para matemáticos que quiera saber algunos resultados interesantes, sobre las curvas en el plano teniendo en cuenta su aplicabilidad en algunos temas topológicos.

Este trabajo consta de tres capítulos interesantes: Preliminares sobre curvas planas, el número de rotación de una curva cerrada, aplicaciones. En el primer capítulo se presentan las definiciones de curva, vector tangente, reparametrización, longitud de arco, campo de vectores, la curvatura de una curva y un resultado muy esencial es el teorema fundamental de las curvas planas, donde nos demuestra de cierta forma, que la función curvatura determina una curva.

El segundo capítulo contiene las respectivas definiciones de ángulo orientado y del número de rotación de una curva cerrada con sus diferentes propiedades. Además en la sección de ángulos orientados se debe tener muy presente el tema de congruencias que es estudiado en el curso de teoría de números.

Por último el tercer capítulo muestra algunas aplicaciones interesantes del concepto del número de rotación en las funciones continuas del disco en el plano y el teorema de Brower; los cuales abarcan un gran contenido topológico, que debe ser cuidadosamente estudiado para una mayor comprensión del tema.

³Monografía

⁴Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas. Marlio Paredes, Ph.D. en Matemáticas

A mis padres y mis hermanos

Agradecimientos

Expreso mi más sincero agradecimiento a aquellas personas que dedicaron un instante de su vida para brindar su apoyo incondicional y sus conocimientos; factores importantes que influyeron para los logros obtenidos en mi vida y en este trabajo.

A Dios, mi fuente de sabiduría y fé.

A mis padres, por dedicarme toda su vida para la buena formación de mi vida.

A mis hermanos, por los momentos de felicidad que compartimos.

A mi querida novia, por el amor incondicional que me ha brindado.

Al profesor Marlio Paredes, por su gran confianza, su amistad, sus valiosos conocimientos para la orientación y desarrollo de esta monografía.

Índice general

INTRODUCCIÓN	1
1. Preliminares sobre curvas planas	2
1.1. Curvas	2
1.1.1. algunas curvas	4
1.1.2. Curvas periódicas	6
1.1.3. Curvas simples	6
1.1.4. Curvas simples cerradas	7
1.2. Curvas suaves	8
1.3. Vector tangente	9
1.4. Reparametrización	10
1.5. Longitud de arco	11
1.6. Campo de vectores a lo largo de una curva	15
1.7. Curvatura y fórmulas de Frenet	17
1.8. Teorema fundamental de las curvas planas	22
1.9. Forma canónica local	24
2. El número de rotación de una curva cerrada	26
2.1. Ángulo orientado	26

- 2.2. Propiedades del ángulo orientado 27
- 2.3. El número de rotación de una curva cerrada 32
- 2.4. Propiedades del número de rotación 38
- 2.5. Cálculo del número de rotación y del número de intersección 48

- 3. Aplicaciones 59**

 - 3.1. Funciones Continuas del Disco en el Plano 59
 - 3.2. Teorema de Brower 65

- Bibliografía 67**

Introducción

Una de las nociones más utilizadas dentro de cualquier ciencia es, sin lugar a dudas, la noción de curva, ya que intuitivamente ella aparece representada por medio de gráficas que ilustran datos estadísticos, trayectorias de una partícula, conjuntos de puntos en el plano, dibujos, líneas, etc.

Es por eso que en este trabajo nos preocuparemos por estudiar algunos resultados interesantes de geometría y topología referentes a las curvas planas; de manera consecuente lo que realmente nos interesa estudiar es el número de rotación de una curva cerrada. Para esto es necesario abarcar un buen contenido de cálculo y geometría diferencial, los cuales encontraremos en el primer capítulo, donde exploramos el concepto de curvatura de una curva plana, mostrando que ella determina la curva.

En el segundo capítulo iremos a estudiar las curvas cerradas en el plano desde un punto de vista global, enfatizando el número de rotación de una curva y algunas de sus propiedades.

En el tercer capítulo utilizamos la noción del número de rotación de una curva para obtener algunas aplicaciones, como lo es el teorema fundamental del álgebra y el teorema de Brouwer.

Esta monografía se desarrolló dentro del proyecto de investigación: GEOMETRÍA DE VARIETADES HOMOGÉNEAS ASOCIADAS A GRUPOS SEMISIMPLES COMPLEJOS, financiado por Colciencias.

Capítulo 1

Preliminares sobre curvas planas

1.1. Curvas

Intuitivamente podemos imaginar una curva en el plano como la trayectoria de un punto en movimiento o una deformación continua de un intervalo, (ver Figura 1.1).

De la misma manera inspirándonos en la Geometría Analítica, podríamos considerar una curva en \mathbb{R}^2 como un conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que satisfagan una ecuación $F(x, y) = 0$, donde F es una función de dos variables (Ver Figura 1.2).

En Geometría Diferencial consideramos una curva como la trayectoria continua del movimiento de una partícula sobre el plano, donde un punto $\alpha(t)$ representa la posición de una partícula con movimiento continuo, cuando t varía en un intervalo $[a, b]$ y el conjunto $C = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [a, b]\}$ es el recorrido de α .

Como es sabido, el concepto de curva ha sufrido diversas modificaciones. Para evitar casos complejos en este trabajo, definiremos formalmente lo que es una curva.

Definición 1.1. Una **curva continua** en \mathbb{R}^2 es una aplicación continua $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$

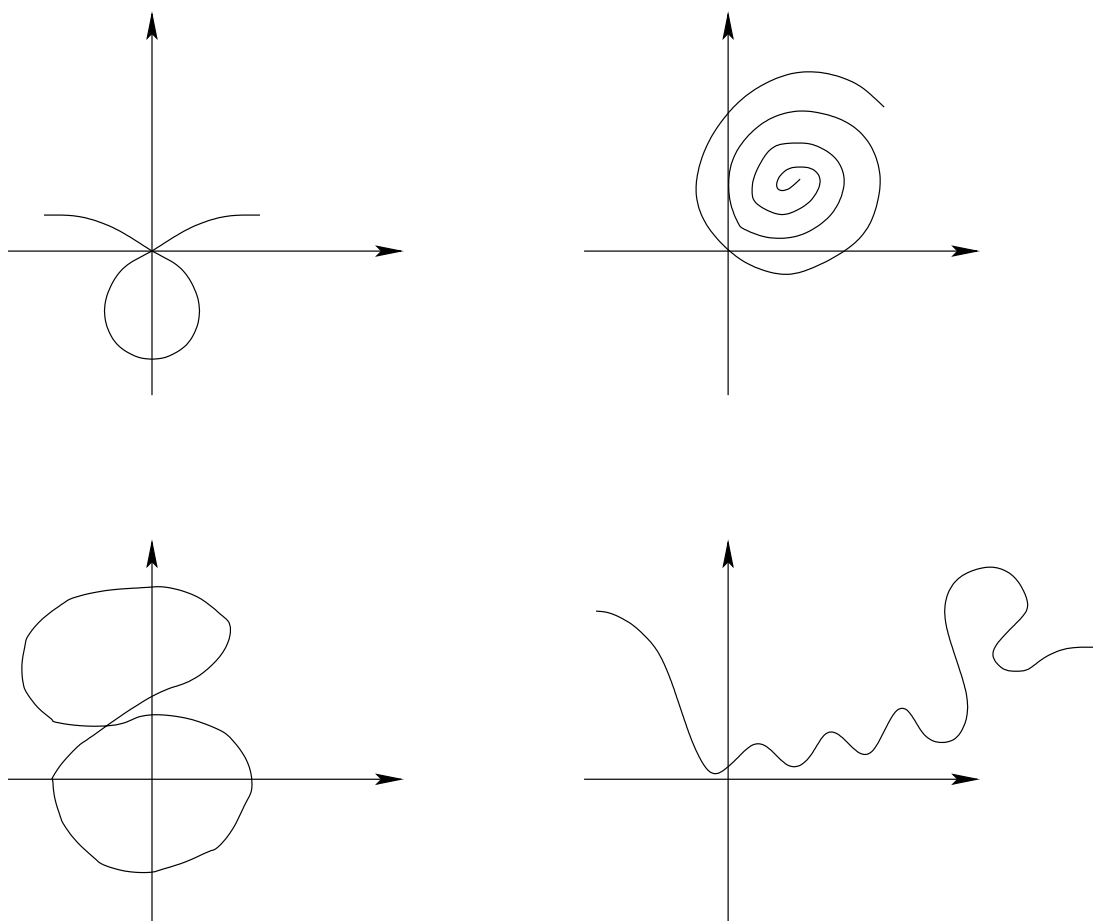


Figura 1.1: Curvas.

definida en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$; donde α está dado por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ y es continua si cada función coordenada $x, y: I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

El conjunto imagen C de la aplicación α esta dado por

$$C = \{\alpha(t) = (x(t), y(t)); t \in I\}.$$

De esta manera $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es llamada la representación paramétrica de α y denominaremos a t el parámetro de la curva α .

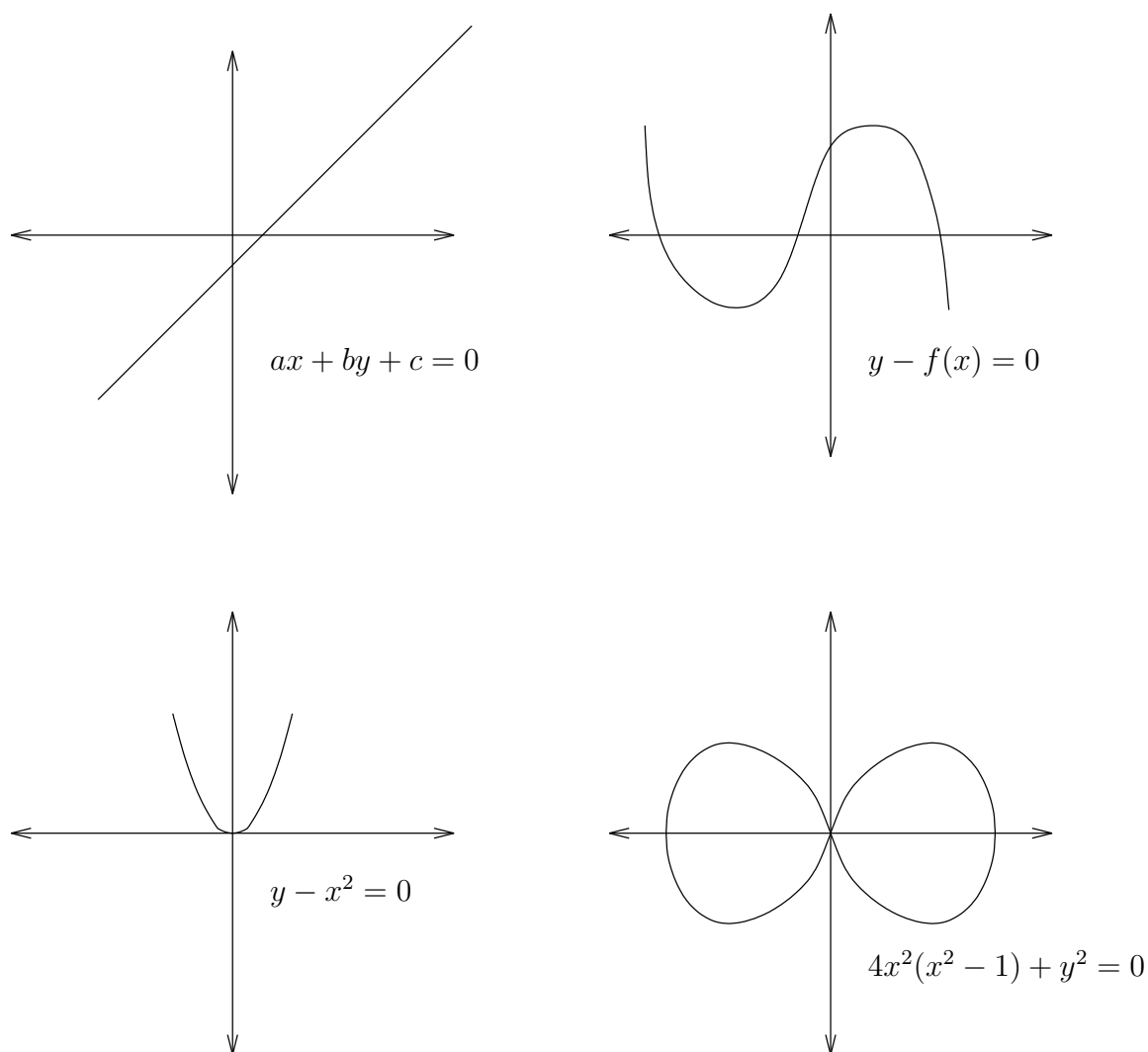


Figura 1.2: Curvas

1.1.1. algunas curvas

Definición 1.2. Si la curva α esta definida en el intervalo $I = [a, b]$ y $\alpha(a) = \alpha(b)$ en C diremos que α es una **curva cerrada**. (Ver Figura 1.3).

Ejemplo 1.1. La circunferencia con centro en $O = (0, 0)$ y radio R ; $S_R(O)$ es la curva continua cerrada α , definida por $\alpha(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. (Ver Figura 1.3).

De manera más general la circunferencia $S_R((a, b))$ es la curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada

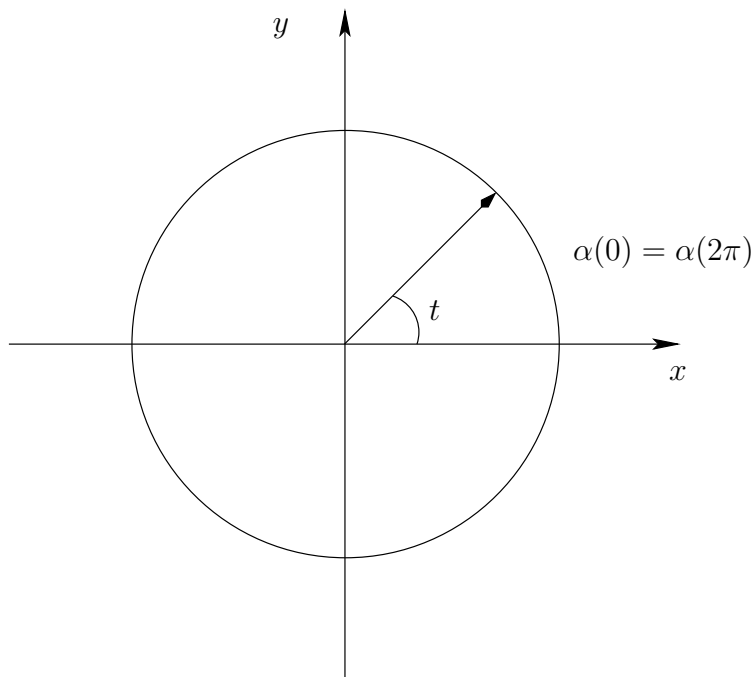


Figura 1.3: Circunferencia

por $\alpha(t) = (a + R \cos(t), b + R \sin(t))$. Observemos que cuando t recorre la recta real, $\alpha(t)$ se mueve sobre $S_{\mathbb{R}}((a, b))$ en sentido antihorario un número infinito de veces

Ejemplo 1.2. La elipse es la curva continua cerrada definida por

$$\begin{aligned} \alpha: [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t)), \text{ con } a, b > 0. \end{aligned}$$

(Ver Figura 1.4).

Si tomamos las funciones $x = a \cos(t)$ y $y = b \sin(t)$ y hacemos una serie de operaciones nos damos cuenta que obtenemos la ecuación geométrica de la elipse.

En efecto sea $x = a \cos(t)$ y $y = b \sin(t)$ y elevándolos al cuadrado obtenemos $x^2 = a^2 \cos^2(t)$ y $y^2 = b^2 \sin^2(t)$. Entonces igualando las ecuaciones obtenemos

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

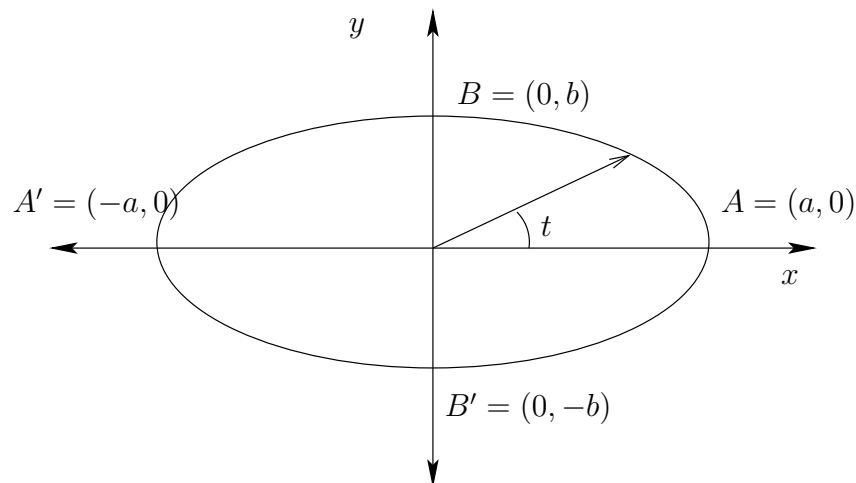


Figura 1.4: Elipse

Por tanto tenemos

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

1.1.2. Curvas periódicas

Una curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ se dice que es **periódica** si existe un número real $l > 0$ tal que $\alpha(t + l) = \alpha(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. El menor valor l_0 para el cual se cumple la ecuación anterior se llama el período de α . Es claro que la curva periódica α está completamente determinada por su restricción a un intervalo de la forma $[t_0, t_0 + l_0]$. (Ver Figura 1.5).

Ejemplo 1.3. La curva definida por $\alpha(t) = (t, \sin t)$ es una curva periódica con período $l_0 = 2\pi$.

1.1.3. Curvas simples

Definición 1.3. Una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ se dice que es **simple** si α es inyectiva (Ver Figura 1.6).

Ejemplo 1.4. La curva definida por $\alpha(t) = (t^2, t^3)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, es simple.

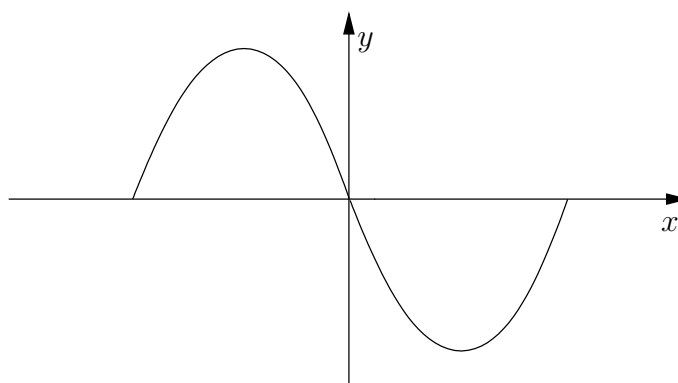


Figura 1.5: $\text{sen}(x)$

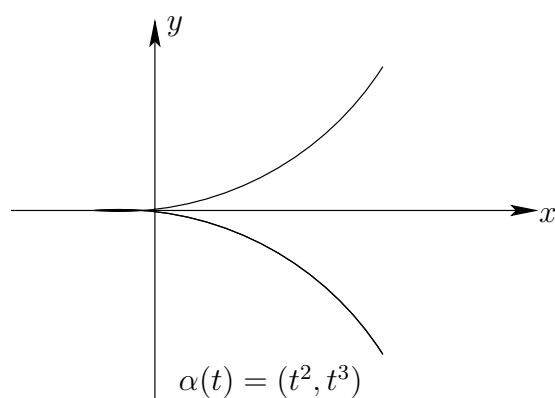


Figura 1.6: Curva simple

1.1.4. Curvas simples cerradas

Definición 1.4. La curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se dice que es **cerrada y simple** si $\alpha(t) \neq \alpha(s)$, para todo $t \neq s \in [a, b]$ y $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Las curvas simples cerradas también se acostumbran llamar curvas de Jordan (Ver Figura 1.7).

Ejemplo 1.5. *La circunferencia y la elipse son ejemplos de curvas simples cerradas.*

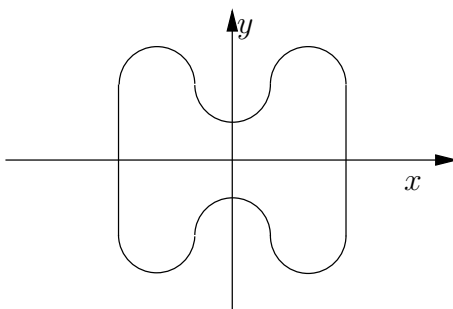


Figura 1.7: Curva Jordan

1.2. Curvas suaves

Definición 1.5. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Decimos que α es una **curva suave** si y solo si cada función coordenada $x, y: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞ o equivalentemente $x, y: I \rightarrow \mathbb{R}$ son infinitamente diferenciables (Ver Figuras 1.8 y 1.9).

En este caso también decimos que α es una curva parametrizada suave o un camino y llamamos a t el parámetro.

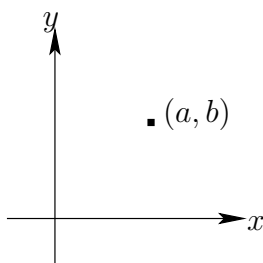


Figura 1.8: Curva conestánte

Ejemplo 1.6. La curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (a, b)$ es llamada la curva conestánte y es una curva suave.

Ejemplo 1.7. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = P + t(P - Q) = (a_0 + t(a_1 - a_0), b_0 + t(b_1 - b_0))$ con $P = (a_0, b_0) \neq Q = (a_1, b_1)$, la recta determinada por los puntos P y Q es una curva suave.

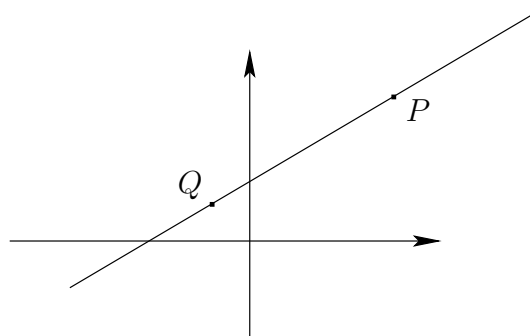


Figura 1.9: Recta

1.3. Vector tangente

Mediante la representación paramétrica de α no solo se obtiene la curva como un conjunto de puntos, sino que estos puntos quedan con su orientación determinada. La dirección de una curva, corresponde a la orientación de sus tangentes.

Definición 1.6. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. El **vector tangente** o **vector velocidad** de α en $t_0 \in I$ está dado por $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ (Ver Figura 1.10).

Cuando $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$ dicho vector apunta en la dirección de la recta tangente a la curva α en el punto $\alpha(t_0)$.

La velocidad escalar de α en $t_0 \in I$ es dada por la norma del vector velocidad $\alpha'(t_0)$, esto es

$$\|\alpha'(t_0)\| = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}.$$

Definición 1.7. Decimos que una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es **regular** en $t_0 \in I$ si $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$ o equivalentemente si $\|\alpha'(t_0)\| \neq 0$.

Definición 1.8. La curva α es **regular en I** si es regular para todo $t \in I$.

Si α es una curva regular entonces el vector tangente $\alpha'(t)$ apunta en la dirección tangente a la curva α en el punto $\alpha(t)$. Podemos entonces definir la **recta tangente**

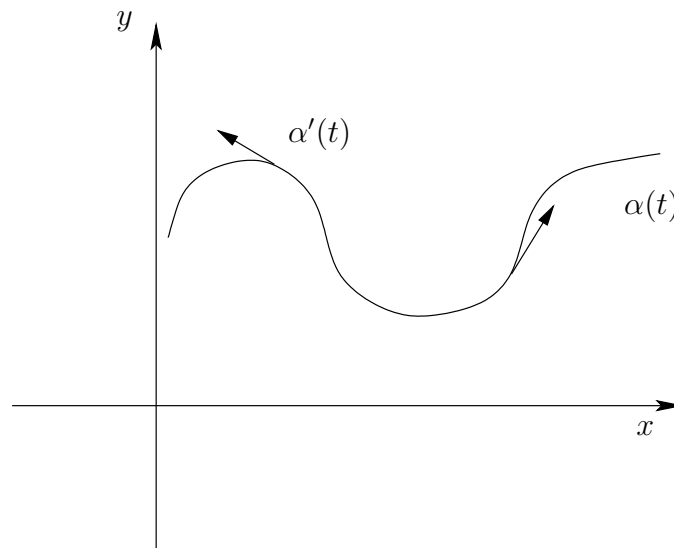


Figura 1.10: Vector tangente

a la curva regular α en el punto $\alpha(t)$ por

$$r_t(u) = \alpha(t) + u\alpha'(t),$$

donde $u \in \mathbb{R}$.

1.4. Reparametrización

Definición 1.9. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ y sea $h: J \rightarrow I$ una función de clase C^∞ . Podemos considerar una nueva curva $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\beta(t) = (\alpha \circ h)(t) = \alpha(h(t)).$$

La curva β es por tanto una **curva parametrizada** de clase C^∞ . Decimos que la nueva curva β es una **reparametrización** de α .

Aplicando la regla de la cadena tenemos que el vector tangente de β en $t \in I$ está dado por

$$\beta'(t) = \alpha'(h(t))h'(t) = (x'(h(t))h'(t), y'(h(t))h'(t)).$$

La velocidad escalar de β entonces es dada por

$$\|\beta'(t)\| = \|\alpha'(h(t))\| \|h'(t)\|.$$

1.5. Longitud de arco

Supongamos que la curva α está definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y tomamos una partición arbitraria del intervalo, o sea $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$. La sumatoria $\sum_{i=1}^m \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$ representa la suma de las longitudes de los segmentos de recta que une $\alpha(t_{i-1})$ y $\alpha(t_i)$ para cada $i = 1, \dots, m$ (Ver Figura 1.11).

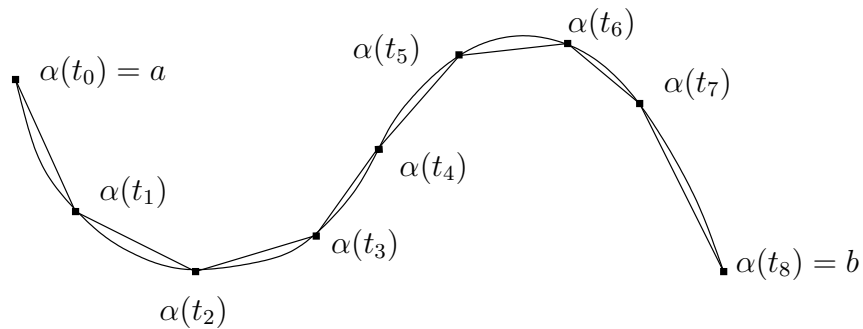


Figura 1.11: Longitud de arco

Entre más fina sea la partición, la suma de las longitudes de los segmentos de recta se aproxima mejor a la longitud de la curva. De manera que el límite de la sumatoria cuando el máximo de las diferencias $t_i - t_{i-1}$ tiende a cero, está dado por la integral

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Definición 1.10. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. La función $L_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t \sqrt{(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2} d\xi,$$

con $t_0 \in I$ es denominada **longitud de arco**.

Observamos que si α es regular en I entonces la función L_α es de clase C^∞ .

Para $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in I$, llamamos longitud de arco de α entre los puntos t_1 y t_2 al número

$$\begin{aligned} L(\alpha|_{[t_1, t_2]}) &= L_\alpha(t_2) - L_\alpha(t_1) \\ &= \int_{t_0}^{t_2} \|\alpha'(\xi)\| d\xi - \int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(\xi)\| d\xi \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha'(\xi)\| d\xi. \end{aligned}$$

Nótese que la definición de longitud de arco no depende de la escogencia del punto $t_0 \in I$. Si consideramos otro punto $s_0 \in I$ y definimos

$$\overline{L}_\alpha(t) = \int_{s_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi,$$

entonces

$$L_{\alpha(t)} - \overline{L}_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi - \int_{s_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^{s_0} \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$

Es decir que la función longitud de arco de α está determinada de forma única a menos de una conestánete.

Definición 1.11. Diremos que una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está **parametrizada por longitud de arco** si el parámetro t es, a menos de una conestánete, igual a $L_\alpha(t)$, esto es

$$L_\alpha(t) = t + C.$$

Obsérvese que si $\|\alpha'(t)\| = 1$, para todo $t \in I$, entonces

$$L_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_{t_0}^t d\xi = t - t_0.$$

De donde se concluye que α está parametrizada por la longitud de arco.

Recíprocamente si

$$L_\alpha(t) = t + C$$

tenemos que $\|\alpha'(t)\| = L'_\alpha(t) = 1$. Es decir que hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 1.1. *Una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada por longitud de arco si y solo si $\|\alpha'(t)\| = 1$.*

Ejemplo 1.8. *Considere la circunferencia de radio R parametrizada por $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$. Luego*

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} = \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = R,$$

entonces tomando $t_0 = 0$ tenemos que

$$L_\alpha(t) = \int_0^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \int_0^t R d\xi = Rt.$$

En particular si consideramos la restricción de α al intervalo $[0, 2\pi]$, $\alpha|_{[0, 2\pi]}$, la longitud de α es $2\pi R$. Si damos k vueltas alrededor del origen, es decir si tomamos $\alpha|_{[0, 2k\pi]}$, tenemos que la longitud de α es $2k\pi R$.

Teorema 1.1. *Toda curva regular $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ puede ser reparametrizada por longitud de arco. De forma más precisa, fijando $t_0 \in I$, existe una biyección $h: J \rightarrow I$ del intervalo J en el intervalo I de clase C^∞ , con $0 \in J$ y $h(0) = t_0$, tal que la curva $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$ satisface que $\|\beta'(s)\| = 1$, para todo $s \in J$.*

Demostración. Puesto que α es regular, la función longitud de arco satisface

$$L'_\alpha(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$$

luego L_α es estrictamente creciente y por tanto inyectiva. Debido a la continuidad de L_α , tenemos que $L_\alpha(I)$ debe ser igual a algún intervalo J , por consiguiente L_α tiene inversa diferenciable. O sea

$$L_\alpha^{-1} = h: J \rightarrow I \tag{1.1}$$

y como $L_\alpha(t_0) = 0 \in J$ y $h(0) = t_0$, luego vamos a probar que β definida por $\beta(s) = \alpha \circ h(s)$ está parametrizada por la longitud de arco. Como $h = L_\alpha^{-1}$, entonces

$$h'(s) = \frac{1}{L'_\alpha(h(s))} = \frac{1}{\|\alpha'(h(s))\|}.$$

Luego,

$$\beta'(s) = [(\alpha \circ h)(s)]' = \alpha'(h(s))h'(s).$$

Por tanto,

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))h'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \|h'(s)\| = 1.$$

□

Ejemplo 1.9. Sea α la curva dada por

$$\alpha(t) = (e^{-t} \cos(t), e^{-t} \sin(t)), t \in \mathbb{R}.$$

La gráfica de la curva α describe una espiral tal que

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{(-e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t))^2 + (-e^{-t} \sin(t) + e^{-t} \cos(t))^2}, \\ &= \sqrt{(e^{-2t} \cos^2(t) + 2e^{-2t} \cos(t) \sin(t) + e^{-2t} \sin^2(t)) - 2e^{-2t} \cos(t) \sin(t) + e^{-2t} \cos^2(t)}, \\ &= \sqrt{2e^{-2t} \cos^2(t) + 2e^{-2t} \sin^2(t)}, \\ &= \sqrt{2e^{-2t} (\cos^2(t) + \sin^2(t))} \\ &= \sqrt{2}e^{-t}. \end{aligned}$$

y

$$L_\alpha(t) = \int_0^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi = \sqrt{2}(1 - e^{-t}),$$

en particular

$$L_\alpha^{-1}(s) = -\ln(1 - s/\sqrt{2}).$$

Por tanto una reparametrización por longitud de arco de α es dada por

$$\beta(s) = (1 - s/\sqrt{2})(\cos \ln(1 - s/\sqrt{2}), \sin \ln(1 - s/\sqrt{2})),$$

donde

$$\beta: [0, \sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

1.6. Campo de vectores a lo largo de una curva

Intuitivamente un campo de vectores $X(t)$ a lo largo de una curva parametrizada $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación que para todo $t \in I$ asocia un vector con origen en $\alpha(t)$ (Ver Figura 1.12).

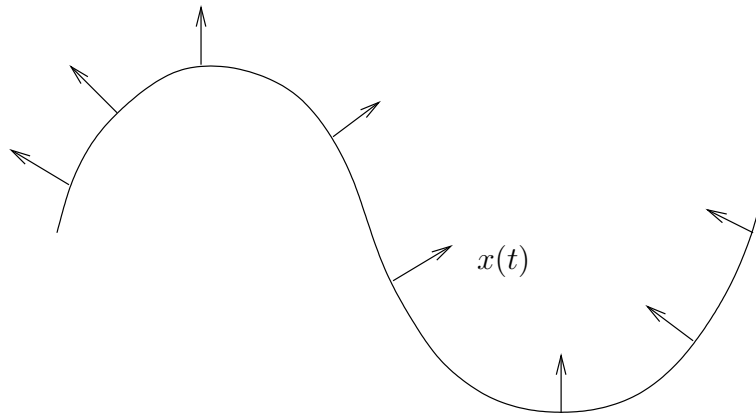


Figura 1.12: Campo de vectores $X(t)$ a lo largo de α

Definición 1.12. Un **campo de vectores de clase C^r** a lo largo de α es una aplicación $X: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^r . Geométricamente, el campo de vectores X es dado, en cada punto $\alpha(t)$, por el vector de extremos $\alpha(t)$ y $X(t)$.

Si $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es una curva parametrizada regular entonces $T(t) = (x'(t), y'(t))$ es un campo de clase C^∞ a lo largo de α . T es llamado el **campo tangente**.

En el caso que α está parametrizada por longitud de arco, T es un campo unitario, esto es $\|T(t)\| = 1$. Entonces el campo $N(t) = (-y'(t), x'(t))$ es también un campo de clase C^∞ a lo largo de la curva α . Observemos que para todo $t \in I$

$$\langle T(t), N(t) \rangle = -x'(t)y'(t) + y'(t)x'(t) = 0,$$

es decir que N y T son campos perpendiculares. N es llamado el **campo normal**.

Dados dos campos X y Y de clase C^r a lo largo de α y una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^r podemos definir $X + Y$ y fX por

$$(X + Y)(t) = X(t) + Y(t)$$

y

$$(fX)(t) = f(t)X(t),$$

los cuales también serán campos de clase C^r a lo largo de α .

Si $X(t) = (X_1(t), X_2(t))$ es un campo de clase C^r con $r > 0$ definimos la derivada de X por

$$X'(t) = (X'_1(t), X'_2(t)).$$

En este caso X' es un campo de clase C^{r-1} a lo largo de α y cumple las siguientes propiedades

1. $(X + Y)' = X' + Y'$,
2. $(fX)' = f'X + fX'$,
3. $\langle X, Y \rangle' = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle$.

Proposición 1.2. *Si $\|X\|$ es conestánate entonces $X'(t)$ es perpendicular a $X(t)$, para todo $t \in I$, esto es*

$$\langle X, X' \rangle = 0.$$

Demostración. Como $\|X\|$ es conestánate entonces $\langle X, X \rangle = K$, con K conestánate.

Derivando esta ecuación obtenemos

$$\langle X, X \rangle' = \langle X', X \rangle + \langle X, X' \rangle = 0,$$

de donde se tiene que

$$2\langle X, X' \rangle = 0 \quad \implies \quad \langle X, X' \rangle = 0.$$

□

Proposición 1.3. Si X y Y son perpendiculares, para todo $t \in I$, entonces

$$\langle X', Y \rangle = -\langle X, Y' \rangle.$$

Demostración. Como X y Y son perpendiculares entonces

$$\langle X, Y \rangle = 0.$$

Derivando esta ecuación obtenemos

$$\langle X, Y \rangle' = \langle X', Y \rangle + \langle X, Y' \rangle = 0,$$

entonces

$$\langle X', Y \rangle = -\langle X, Y' \rangle.$$

□

1.7. Curvatura y fórmulas de Frenet

Consideramos ahora curvas $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizadas por longitud de arco, $\alpha(s) = (x(s), y(s))$. En este caso $\alpha'(s) \neq 0$, entonces está bien definido el campo $T(s) = ((x'(s), y'(s)))$ de vectores tangentes a lo largo de α , los cuales además son unitarios. $T(s)$ es llamado el vector tangente a la curva α en el punto $\alpha(s)$.

También podemos definir el campo N a lo largo de α de tal forma que, para todo $s \in I$, el par $\{T, N\}$ forman una base positiva de \mathbb{R}^2 . Esto es, existe una rotación del plano que lleva el vector $(1, 0) \in T(s)$ y el vector $(0, 1) \in N(s)$, para cada $s \in I$. Así, el campo

$$N(s) = (-y'(s), x'(s))$$

es un **campo normal y unitario** (es decir cada vector $N(s)$ es unitario) a lo largo de α de clase C^∞ . La aplicación que a cada $s \in I$ le asocia $N(s)$ es llamada **campo vectorial normal a la curva** α . Para cada $s \in I$, $N(s)$ es llamado **vector normal a la curva** α en $\alpha(s)$.

Definición 1.13. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada por longitud de arco. Entonces la base $\{T(s), N(s)\}$ es llamada **referencial de Frenet** de α .

Como $\|T\| = 1$ entonces tenemos que $T'(s)$ y $T(s)$ son perpendiculares. Como T y N generan a \mathbb{R}^2 , tenemos que para cada $s \in I$, $T'(s)$ es paralelo a $N(s)$. Esto significa que existe una función k , tal que

$$T'(s) = k(s)N(s), \quad s \in I. \quad (1.2)$$

Definición 1.14. La función k definida por la última ecuación la llamaremos **curvatura** de α . $k(s)$ es llamada la curvatura de α en el punto $\alpha(s)$, $s \in I$.

Obsérvese que

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = -\langle N'(s), T(s) \rangle.$$

Por lo tanto, $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞ , cuando α es de clase C^∞ .

Geoméricamente como $\|T(s)\| = 1$ y $|k(s)| = \|T'(s)\|$ la función curvatura es una medida de la variación de la dirección de T . Por tanto, $k(s)$ mide la variación de cambio de dirección de la recta tangente a α en $\alpha(s)$.

La curvatura entonces es una medida de cuanto una curva deja de ser una recta. En general se dice que una línea recta no se dobla y que dados dos círculos concéntricos “el círculo interior” se dobla más que el exterior. Esto sugiere pensar en la recta como un círculo “degenerado” de radio ∞ , así el inverso de su radio mide razonablemente cuanto se está doblando esta recta: cero. (Ver Figura 1.13).

Proposición 1.4. *La curvatura de una curva regular α es idénticamente cero si y solo si la gráfica de α está contenida en una recta.*

Demostración. \Rightarrow) Supongamos $k(s) \equiv 0$, entonces $0 = |k(s)| = \|T'(s)\|$. Por tanto, $T'(s) = (0, 0)$. Como T está definida en un intervalo I podemos concluir que $T(s)$ es un vector constante V_0 . Esto implica que

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \int_{s_0}^s T(\xi) d\xi = \alpha(s_0) + V_0(s - s_0). \quad (1.3)$$

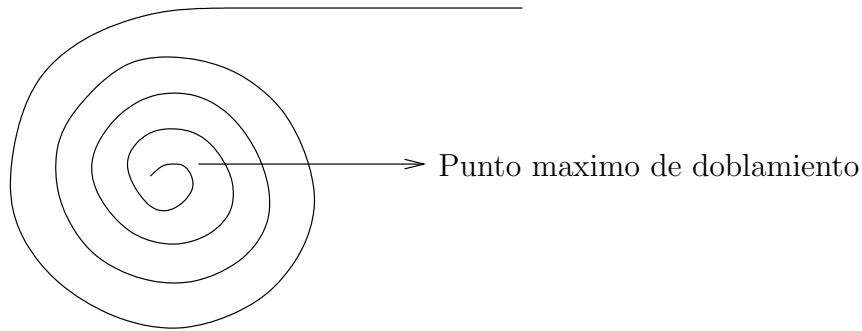


Figura 1.13: Grado de doblamiento de una curva

de donde se sigue que la gráfica de α está contenida en la recta que pasa por el punto $\alpha(s_0)$ y es paralela al vector V_0 .

\Leftrightarrow) Si la gráfica de α está contenida en una recta y α está parametrizada por longitud de arco entonces tenemos que

$$\alpha(s) = P_0 + sV_0, \quad \text{con } \|V_0\| = 1. \quad (1.4)$$

Luego $T(s) = V_0$ y por tanto $T'(s) = (0, 0)$. Por tanto, concluimos que $k(s) = 0$. \square

Ahora veamos que sucede con la variación del campo N . Como $\|N(s)\| = 1$, obtenemos que $N'(s)$ es perpendicular a $N(s)$ y por tanto paralelo a $T(s)$. Si $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ entonces la ecuación (1.2) se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (x''(s), y''(s)) &= k(s)(-y'(s), x'(s)), \\ &= (-k(s)y'(s), k(s)x'(s)). \end{aligned}$$

De donde concluimos que

$$\begin{aligned} x''(s) &= -k(s)y'(s), \\ y''(s) &= k(s)x'(s). \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} N'(s) &= (-y''(s), x''(s)) = (-k(s)x'(s), -k(s)y'(s)), \\ &= -k(s)(x'(s), y'(s)) = -k(s)T(s). \end{aligned}$$

Es decir, hemos probado que los campos T y N satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s), \\ N'(s) = -k(s)T(s). \end{cases} \quad (1.5)$$

Las ecuaciones de este sistema son llamadas **Ecuaciones de Frenet** de la curva α .

Definimos ahora la curvatura de una curva regular no necesariamente parametrizada por longitud de arco. Recordemos que toda curva admite una reparametrización por longitud de arco.

Definición 1.15. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva parametrizada y regular y sea $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ una reparametrización por longitud de arco de α . Definimos la **curvatura de α en $t \in I$** por la curvatura de β en el punto $s \in J$, tal que $\beta(s) = \alpha(t)$.

Proposición 1.5. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Entonces la curvatura de α en $t \in I$ es dada por la expresión

$$k(s) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}} \quad (1.6)$$

Demostración. Sea $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^2$ una reparametrización positiva de α por longitud de arco, entonces si escribimos $\beta(s(t)) = \alpha(t) = (x(t), y(t))$ y la derivamos obtenemos

$$(x'(t), y'(t)) = \alpha'(t) = \frac{d\beta}{ds} s'(t). \quad (1.7)$$

Derivando nuevamente obtenemos

$$(x''(t), y''(t)) = \alpha''(t) = \frac{d^2\beta}{ds^2} s'(t) + \frac{d\beta}{ds} s''(t). \quad (1.8)$$

Usando la ecuación (1.7) y el hecho de que $s'(t) > 0$ tenemos que $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ y por lo tanto

$$s''(t) = \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|}. \quad (1.9)$$

Entonces,

$$T(s(t)) = \frac{d\beta}{ds}(s(t)) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} (x'(t), y'(t))$$

y

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds}(s(t)) &= \frac{d^2\beta}{ds^2}(s(t)) = \frac{1}{(s'(t))^2} [\alpha''(t) - T(s(t))s'(t)] \\ &= \frac{1}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} [(x''(t), y''(t)) - T(s(t))s''(t)]. \end{aligned}$$

Por la definición de campo normal tenemos

$$N(s(t)) = \frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} (-y'(t), x'(t)). \quad (1.10)$$

De la ecuación de la curvatura de α tenemos que

$$k(s(t)) = \left\langle \frac{dT}{ds}((s'(t), N(t))), \right\rangle, \quad (1.11)$$

y sustituyendo las expresiones de $\frac{dT}{ds}$ y N en la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} k(s(t)) &= \left\langle \frac{1}{(x')^2 + (y')^2} [(x'', y'') - T(s(t))s''(t)], \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} (-y', x') \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{x'^2 + y'^2} \left((x'', y'') - \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} s''(t) \right), \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} (-y', x') \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{(x'', y'')}{(x')^2 + (y')^2} - \frac{(s''(t)x', s''(t)y')}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}, \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}(x'', y'') - (s''(t)x', s''(t)y')}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}, \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}x'', \sqrt{(x')^2 + (y')^2}y'') - (s''(t)x', s''(t)y')}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}, \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}x'' - s''(t)x', \sqrt{(x')^2 + (y')^2}y'' - s''(t)y')}{\sqrt{((x')^2 + (y')^2)^3}}, \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \left\langle \frac{(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}x'' - s''(t)x', \sqrt{(x')^2 + (y')^2}y'' - s''(t)y')}{(x')^2 + (y')^2}, (-y', x') \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \left\langle \frac{(\sqrt{(x')^2 + (y')^2}x'' - s''(t)x')(-y') + (\sqrt{(x')^2 + (y')^2}y'' - s''(t)y')(x')}{((x')^2 + (y')^2)}, \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \left\langle \frac{-\sqrt{(x')^2 + (y')^2}x''y' + s''(t)x'y' + (\sqrt{(x')^2 + (y')^2}y''x' - s''(t)y'x')}{((x')^2 + (y')^2)}, \right\rangle. \end{aligned}$$

Sabemos que $s''(t)x'y' - s''(t)y'x' = 0$ porque N y T son ortogonales. Por tanto obtenemos

$$\begin{aligned} k(s(t)) &= \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \left\langle \frac{-\sqrt{(x')^2 + (y')^2} x''y' + \sqrt{(x')^2 + (y')^2} y''x'}{(x')^2 + (y')^2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \left(\frac{-x''y' + y''x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) \\ &= \frac{-x''y' + y''x'}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

□

1.8. Teorema fundamental de las curvas planas

Nuestro objetivo es demostrar que, de cierta forma, la función curvatura determina la curva. Este hecho es demostrado por el siguiente resultado

Teorema 1.2. *Sea $k: I \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ . Dados $t_0 \in I, P = (P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2$ y $V_0 = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2$, con $\|V_0\| = 1$, existe una única curva parametrizada por longitud de arco $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que la curvatura en cada punto $\alpha(t)$ es dada por $k(t)$, $\alpha(t_0) = P$ y $\alpha'(t_0) = V_0$.*

Demostración. Supongamos que α , definida por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, es una curva parametrizada por longitud de arco y posee curvatura k . Las ecuaciones de Frenet, implican que las funciones x e y satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x''(s) &= -k(s)y'(s), \\ y''(s) &= k(s)x'(s), \end{aligned}$$

con condiciones iniciales dadas por $x(t_0) = P_1$, $y(t_0) = P_2$, $x'(t_0) = V_1$ e $y'(t_0) = V_2$. El sistema anterior tiene una primera integral dada por

$$\begin{aligned} x'(s) &= \cos \left(\int_{s_0}^s k(\xi) d\xi + a \right), \\ y'(s) &= \text{sen} \left(\int_{s_0}^s k(\xi) d\xi + a \right), \end{aligned} \tag{1.12}$$

donde a está determinada por las relaciones

$$\cos a = V_1 \quad \text{y} \quad \text{sen } a = V_2.$$

Integrando las ecuaciones (1.12) obtenemos

$$\begin{aligned} x(s) &= P_1 + \int_{s_0}^s \cos \left(\int_{s_0}^{\tau} k(\xi) d\xi + a \right) d\tau, \\ y(s) &= P_2 + \int_{s_0}^s \text{sen} \left(\int_{s_0}^{\tau} k(\xi) d\xi + a \right) d\tau. \end{aligned}$$

Es fácil verificar que una curva dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ satisface las condiciones del teorema.

Probemos ahora la unicidad de tal curva. Supongamos que existen dos curvas, definidas por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ y $\beta(s) = (u(s), v(s))$ con las condiciones del teorema. Por las ecuaciones de Frenet para α y β tenemos que las funciones

$$\begin{aligned} f(s) &= x'(s) - u'(s), \\ g(s) &= y'(s) - v'(s), \end{aligned}$$

satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} f'(s) &= -k(s)g(s), \\ g'(s) &= k(s)f(s). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\frac{1}{2}(f^2 + g^2)'(s) = f(s)f'(s) + g(s)g'(s) = 0,$$

luego $(f^2 + g^2)$ es una función conestante y como es nula en $s = s_0$ tenemos que $(f^2 + g^2)(s) \equiv 0$. Por tanto, $f(s) = g(s) = 0$ y así concluimos que

$$\alpha'(s) = \beta'(s), \quad \forall s \in I.$$

Ahora, usando el hecho de que $\alpha(s_0) = \beta(s_0) = P_0$, obtenemos que $\alpha(s) \equiv \beta(s)$.

□

Como corolario del teorema anterior tenemos el siguiente resultado el cual nos dice que la curvatura determina una curva a menos de su posición en el plano.

Corolario 1.1. *Dos curvas $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizadas por longitud de arco con la misma función de curvatura $k: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ son congruentes, esto es, existe una rotación $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y una traslación por un vector $b \in \mathbb{R}^2$ tal que para todo $s \in I$*

$$\beta(s) = (A \circ \alpha)(s) + b.$$

1.9. Forma canónica local

Veremos aquí que la curvatura es una medida de cuanto una curva difiere de la recta tangente para puntos próximos al punto estudiado. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular parametrizada por longitud de arco. Considerando una aproximación por el polinomio de Taylor de cada coordenada de α tenemos

$$\begin{aligned} x(s) &= x(s_0) + (s - s_0)x'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}x''(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!}x'''(s_0) + r_1(s), \\ y(s) &= y(s_0) + (s - s_0)y'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}y''(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!}y'''(s_0) + r_2(s). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Por las ecuaciones de Frenet, obtenemos que

$$\begin{aligned} (x'''(s_0), y'''(s_0)) &= \alpha'''(s_0) = (k(s)N(s))'|_{s=s_0} \\ &= k'(s_0)N(s_0) + k(s_0)N'(s_0) \\ &= k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha(s_0) + (s - s_0)T(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}k(s_0)N(s_0) + \\ &+ \frac{(s - s_0)^3}{3!}[k'(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0)] + R(s), \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\|R(s)\|}{(s - s_0)^3} = 0.$$

La ecuación (1.14) demuestra que $k(s_0)$ determina cuanto $\alpha(s)$ difiere de la recta tangente a la curva α en s_0 , para puntos cercanos a $\alpha(s_0)$. De hecho, $\alpha(s)$ difiere de la recta tangente por el factor

$$\frac{(s-s_0)^2}{2}k(s_0)N(s_0) + \frac{(s-s_0)^3}{3!} [k(s_0)N(s_0) - k^2(s_0)T(s_0)] + R(s),$$

para puntos cercanos de s_0 .

Escojamos un sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 de tal forma que $\alpha(s_0) = (0, 0)$ y que la base canónica sea $(T(s_0), N(s_0))$, esto es, $T(s_0) = (1, 0)$ y $N(s_0) = (0, 1)$. Si en relación a esta base una curva α está dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, la ecuación (1.14) nos dice que

$$\begin{cases} x(s) = (s-s_0) - k^2(s_0)\frac{(s-s_0)^3}{3!} + R_1(s), \\ y(s) = k(s_0)\frac{(s-s_0)^2}{2!} + k'(s_0)\frac{(s-s_0)^3}{3!} + R_2(s). \end{cases} \quad (1.15)$$

La representación (1.15) es llamada forma canónica local de α y describe el comportamiento de cualquier curva regular en una vecindad de un punto $\alpha(s_0)$. En particular, nos dice que si $k(s_0) \neq 0$ entonces la gráfica de α está a un lado de la recta tangente a α en s_0 .

Capítulo 2

El número de rotación de una curva cerrada

En este capítulo, analizaremos curvas cerradas planas desde el punto de vista global, enfatizando sobre el número de rotación de una curva, el cual tendrá un papel importante en las aplicaciones geométricas y topológicas.

2.1. Ángulo orientado

Sean V y W dos vectores no nulos en \mathbb{R}^2 . La **medida del ángulo entre** V y W , denotada por $\angle(V, W)$, es dada de forma única por $\angle(V, W) \in [0, \pi]$ con

$$\cos(\angle(V, W)) = \frac{\langle V, W \rangle}{\|V\| \|W\|} = \left\langle \frac{V}{\|V\|}, \frac{W}{\|W\|} \right\rangle.$$

De la definición anterior vemos que la noción de ángulo puede ser generalizada fácilmente para espacios vectoriales con producto interno.

La noción de ángulo orientado entre V y W que introduciremos a continuación es más refinada, sin embargo, ésta sólo es una característica del espacio Euclidiano bidimensional \mathbb{R}^2 . La razón para esto es que en \mathbb{R}^2 dado un vector $V = (V_1, V_2) \neq$

$(0, 0,)$, podemos asociarle el vector

$$V^\perp = (-V_2, V_1), \quad (2.1)$$

tal que el par $\{V, V^\perp\}$ es una base de \mathbb{R}^2 con la misma orientación de la base canónica $\{e_1, e_2\}$ en el sentido de que, si hacemos una rotación de modo que e_1 es enviado en el vector $\frac{V}{\|V\|}$, entonces e_2 necesariamente es enviado en $\frac{V^\perp}{\|V^\perp\|}$. Esto está relacionado con el hecho de que, en el plano \mathbb{R}^2 , es natural hablar de rotaciones en los sentidos horario y antihorario las cuales no pueden ser definidas, por ejemplo, en \mathbb{R}^3 .

Definición 2.1. Dados dos vectores V y W no nulos de \mathbb{R}^2 , la **medida del ángulo orientado** (o simplemente el ángulo orientado) de V a W , $\angle(V, W)$, es dada por

$$\angle(V, W) = \begin{cases} \angle(V, W), & \text{si } \langle V^\perp, W \rangle \geq 0, \\ -\angle(V, W), & \text{si } \langle V^\perp, W \rangle < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Obsérvese que $\angle(V, W) \in (-\pi, \pi]$. De hecho, tenemos que

$$|\angle(V, W)| = \angle(V, W)$$

y por tanto $-\pi \leq \angle(V, W) \leq \pi$. Para verificar que $\angle(V, W) > -\pi$, observemos que si $\angle(V, W) = \pi$ entonces $\langle V^\perp, W \rangle = 0$ y consecuentemente, $\angle(V, W) = \pi$ (Ver Figura 2.1).

La definición de $\angle(V, W)$ es tal que, si fijamos V y dejamos que W varíe en el sentido antihorario para la posición en la dirección de $-V$ entonces $\angle(V, W)$ decrece continuamente desde π (incluido) hasta $-\pi$ (excluido). Luego la función que a cada $W \neq (0, 0)$ le asocia $\angle(V, W)$ es discontinua y tiene un salto de 2π , exactamente, cuando W atraviesa la semirecta determinada por $-V$.

2.2. Propiedades del ángulo orientado

Las proposiciones que presentamos a continuación nos dan las principales propiedades del ángulo orientado $\angle(V, W)$.

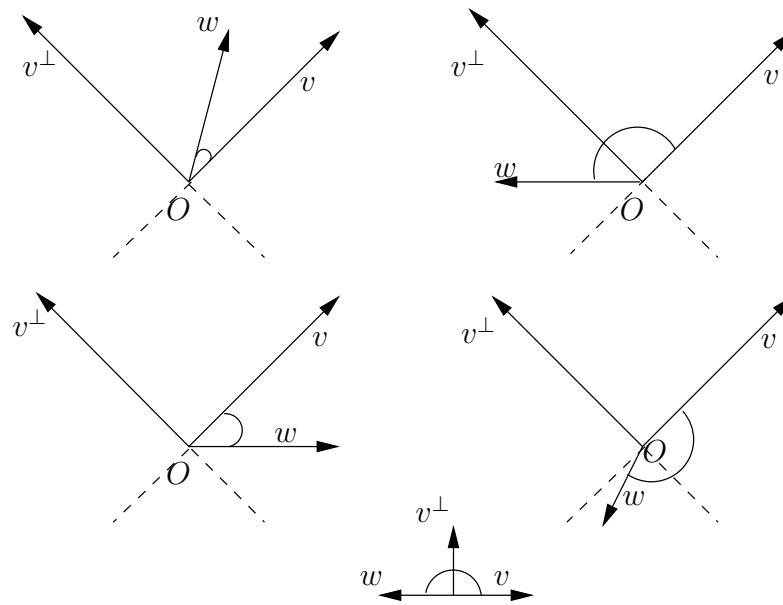


Figura 2.1: Ángulo orientado

Proposición 2.1. Si $\angle(V, W) \neq \pi$ entonces

$$\angle(V, W) = -\angle(W, V).$$

Sin embargo, si $\angle(V, W) = \pi$ entonces

$$\angle(V, W) = \angle(W, V) = \pi.$$

Demostración. La demostración es inmediata de la definición de $\angle(V, W)$. \square

Proposición 2.2. Las siguientes ecuaciones son verdaderas para cualquier par de vectores no nulos V y W en \mathbb{R}^2

$$\cos(\angle(V, W)) = \frac{\langle V, W \rangle}{\|V\| \|W\|}, \quad \text{sen}(\angle(V, W)) = \frac{\langle V^\perp, W \rangle}{\|V\| \|W\|}.$$

Demostración. La primera ecuación resulta de la definición de $\angle(V, W)$ observando que $\cos \theta = \cos(-\theta)$. Para la segunda, notemos que

$$\left(\frac{\langle V, W \rangle}{\|V\| \|W\|} \right)^2 + \left(\frac{\langle V^\perp, W \rangle}{\|V\| \|W\|} \right)^2 = 1.$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen}(\angle(V, W)) = \pm \left(\frac{\langle V^\perp, W \rangle}{\|V\| \|W\|} \right)$$

y el signo positivo es consecuencia de la definición de $\angle(V, W)$. \square

Proposición 2.3. Sean $V, W \in \mathbb{R}^2$, tales que $\angle(V, W) \neq \pi$. Si $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión cualquiera en \mathbb{R}^2 , tal que $W_n \neq (0, 0), \forall n \in \mathbb{N}$ y que satisface que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = W \neq (0, 0),$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \angle(V, W_n) = \angle(V, W).$$

Demostración. Tenemos que $b_n = \angle(V, W_n)$ es una sucesión limitada en el intervalo $(-\pi, \pi]$ entonces por el teorema de Bolzano–Weierstrass ella posee una subsucesión (b_{n_k}) que converge a un punto $b_0 \in [-\pi, \pi]$. Usando la continuidad de las funciones seno, coseno y producto interno, obtenemos

$$\cos b_0 = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \cos b_{n_k} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{\langle V, W_{n_k} \rangle}{\|V\| \|W_{n_k}\|} = \frac{\langle V, W \rangle}{\|V\| \|W\|} = \cos(\angle(V, W)),$$

$$\operatorname{sen} b_0 = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \operatorname{sen} b_{n_k} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{\langle V^\perp, W_{n_k} \rangle}{\|V\| \|W_{n_k}\|} = \frac{\langle V^\perp, W \rangle}{\|V\| \|W\|} = \operatorname{sen}(\angle(V, W)).$$

De donde se concluye que $b_0 = \angle(V, W)$. \square

Corolario 2.1. Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva continua que no pasa por el origen $(0, 0)$. Sea $a \in \mathbb{R}^2$, con $a \neq (0, 0)$, tal que $\angle(a, \alpha(t)) \neq \pi$, para todo $t \in I$. Entonces una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(t) = \angle(a, \alpha(t))$$

es una función continua (Ver Figura 2.2).

Para enunciar la propiedad aditiva de $\angle(V, W)$, introducimos la siguiente notación: decimos que x es congruente a y módulo 2π y escribimos

$$x \equiv y \pmod{2\pi},$$

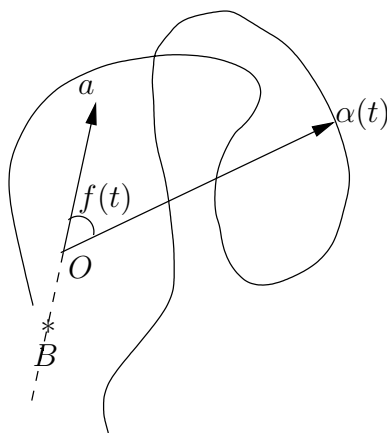


Figura 2.2: Como la gráfica de α no interseca la semirecta \overline{OB} , la función $f(t) = \angle(a, \alpha(t))$ es continua

si la diferencia $x - y$ es un múltiplo entero de 2π , esto es, $\frac{x - y}{2\pi} \in \mathbb{Z}$. Observemos que las relaciones

$$\cos x = \cos y \quad \text{y} \quad \text{sen } x = \text{sen } y$$

se verifican si y solamente si $x \equiv y \pmod{2\pi}$.

Ahora podemos presentar la relación de aditividad de $\angle(V, W)$.

Proposición 2.4. *Sean U, V y W vectores no nulos de \mathbb{R}^2 . Entonces*

$$\angle(U, V) + \angle(V, W) \equiv \angle(U, W) \pmod{2\pi} \quad (2.3)$$

Demostración. Es suficiente probar que

$$\cos(\angle(U, V) + \angle(V, W)) = \cos(\angle(U, W)) \quad (2.4)$$

y

$$\text{sen}(\angle(U, V) + \angle(V, W)) = \text{sen}(\angle(U, W)). \quad (2.5)$$

Usando la expresión del coseno de la suma de dos ángulos, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \cos(\angle(U, V) + \angle(V, W)) &= \cos(\angle(U, V))\cos(\angle(V, W)) - \sin(\angle(U, V))\sin(\angle(V, W)), \\
 &= \left\langle \frac{U}{\|U\|}, \frac{V}{\|V\|} \right\rangle \left\langle \frac{V}{\|V\|}, \frac{W}{\|W\|} \right\rangle - \left\langle \frac{U^\perp}{\|U\|}, \frac{V}{\|V\|} \right\rangle \left\langle \frac{V^\perp}{\|V\|}, \frac{W}{\|W\|} \right\rangle, \\
 &= \left\langle \frac{U}{\|U\|}, \frac{V}{\|V\|} \right\rangle \left\langle \frac{V}{\|V\|}, \frac{W}{\|W\|} \right\rangle + \left\langle \frac{U}{\|U\|}, \frac{V^\perp}{\|V\|} \right\rangle \left\langle \frac{V^\perp}{\|V\|}, \frac{W}{\|W\|} \right\rangle, \\
 &= \left\langle \frac{U}{\|U\|}, \frac{W}{\|W\|} \right\rangle, \\
 &= \cos(\angle(U, W)),
 \end{aligned}$$

donde usamos $\langle U^\perp, V \rangle = -\langle U, V^\perp \rangle$. Para probar la ecuación (2.5) se procede de forma análoga, utilizándose la expresión del seno de la suma de dos ángulos (Ver Figura 2.3). \square

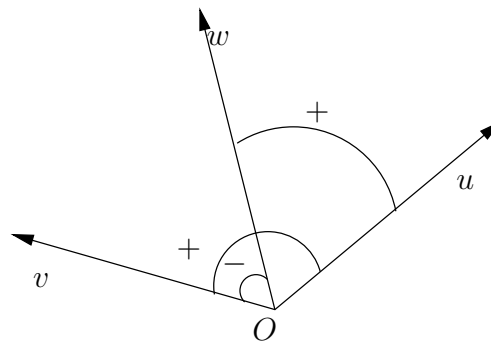


Figura 2.3: Propiedad de aditividad de $\angle(U, W)$

Observación 2.1. *Obsérvese que en la ecuación (2.3) no es posible sustituir la equivalencia módulo 2π por igualdad, como se muestra en la Figura 2.4). Además, (2.3) no se verifica si usamos la medida del ángulo no orientado.*

Usando inducción obtenemos el siguiente resultado como consecuencia de la proposición anterior

Corolario 2.2. *Si U_1, \dots, U_n son vectores no nulos de \mathbb{R}^2 , entonces*

$$\angle(U_1, U_2) + \angle(U_2, U_3) + \dots + \angle(U_{n-1}, U_n) \equiv \angle(U_1, U_n) \pmod{2\pi} \quad (2.6)$$

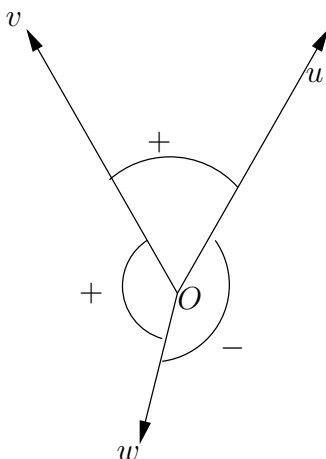


Figura 2.4: Ilustración de la observación 2.1

2.3. El número de rotación de una curva cerrada

Teorema 2.1. *Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva continua, y sea P_0 un punto que no pertenece a la gráfica de α . Entonces existe una función continua $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\varphi(t) = \angle(\alpha(a) - P_0, \alpha(t) - P_0) \pmod{2\pi},$$

para todo $t \in [a, b]$. Además, si ψ es otra función como la anterior, entonces φ y ψ difieren por un múltiplo de 2π , esto es

$$\varphi(t) = \psi(t) + 2k\pi$$

para todo $t \in [a, b]$ y para algún $k \in \mathbb{Z}$ fijo. En particular, existe una única función φ tal que $\varphi(a) = 0$.

Demostración. Probemos inicialmente la segunda parte del teorema. Por hipótesis tenemos que

$$\varphi(t) \equiv \psi(t) \pmod{2\pi},$$

esto es,

$$\frac{\varphi(t) - \psi(t)}{2\pi} \in \mathbb{Z},$$

para todo $t \in [a, b]$.

Como $\frac{\varphi - \psi}{2\pi}$ es una función continua y asume valores en \mathbb{Z} entonces debe ser una conestánate k . Por tanto

$$\varphi(t) = \psi(t) + 2k\pi.$$

Esto implica que φ está unívocamente determinada, si $\varphi(a) = 0$. Ahora vamos a probar la existencia de una función φ tal que $\varphi(a) = 0$. Para esto, sean

$$h(t) = \alpha(t) - P_0 \quad \text{y} \quad V_0 = \alpha(a) - P_0 = h(a).$$

Por hipótesis, $h(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$. Por tanto, tenemos que está bien definido el ángulo orientado entre V_0 y $h(t)$, $\angle(V_0, h(t))$, para todo $t \in I$. Escogemos una partición (ver observación 2.2)

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

del intervalo $[a, b]$ de modo que

$$\varphi_k(t) = \angle(h(t_k), h(t)) < \pi,$$

para todo $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n-1$. Por el Corolario 2.1, tenemos que las funciones φ_k son continuas en $[t_k, t_{k+1}]$. Vamos a definir la función φ , pegando las funciones φ_k de la siguiente manera

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0(t), & \text{si } t \in [t_0, t_1]; \\ \varphi_k(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i(t_{i+1}), & \text{si } t \in [t_k, t_{k+1}], k = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Puesto que $\varphi_k(t_k) = 0$, tenemos que φ está bien definida y

$$\lim_{t \rightarrow t_k^-} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} \varphi(t) = \varphi(t_k).$$

Es decir que φ es una función continua. Por el corolario 2.2 obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left(\sum_{i=1}^{k-1} \angle(h(t_i), h(t_{i+1})) \right) + \angle(h(t_k), h(t)) \\ &= \angle(h(t_0), h(t)) \pmod{2\pi} \\ &= \angle(V_0, h(t)) \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba del teorema. □

Observación 2.2. Para demostrar la existencia de particiones como las usadas en la prueba del teorema anterior, observemos inicialmente que una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es de hecho uniformemente continua en ese intervalo. Considerando la función h definida antes tenemos que como P_0 no está sobre la gráfica de α , la función f , dada por $f(t) = \frac{h(t)}{\|h(t)\|} = (u(t), v(t))$, está bien definida, las funciones u, v son uniformemente continuas en $[a, b]$ y satisfacen $u^2(t) + v^2(t) = 1$. Por tanto, dado $\epsilon = 1$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} |u(t) - u(s)| &< 1, \\ |v(t) - v(s)| &< 1, \end{aligned}$$

si $t, s \in [a, b]$, con $|t - s| < \delta$. Esto implica que

$$\angle(h(s), h(t)) = \angle(f(s), f(t)) < \pi, \quad (2.7)$$

si $0 < s - t < \delta$. En caso contrario tendríamos

$$\frac{h(t)}{\|h(t)\|} = -\frac{h(s)}{\|h(s)\|},$$

o equivalentemente,

$$u(t) = -u(s) \quad y \quad v(t) = -v(s),$$

lo que implica

$$|u(t) - u(s)| = 2|u(t)| < 1 \quad y \quad |v(t) - v(s)| = 2|v(t)| < 1.$$

Por tanto obtenemos que

$$4 = 4u^2(t) + 4v^2(t) < 2,$$

lo cual es una contradicción. Así cualquier partición del intervalo $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, tal que $t_{i+1} - t_i < \delta$ satisface la ecuación (2.7), lo cual concluye la demostración.

Definición 2.2. La función φ , dada por el teorema 2.1, depende del punto P_0 . Llamamos a φ la **función angular** de α con respecto al punto P_0 .

Observe que si $t, s \in [a, b]$, entonces la función angular φ satisface

$$\varphi(s) - \varphi(t) = \angle(\alpha(s) - P_0, \alpha(t) - P_0) \pmod{2\pi}.$$

Además, si t, s están suficientemente próximos; por ejemplo, $|t - s| < \delta$, con δ escogido como en la observación 2.2, tenemos que

$$\varphi(s) - \varphi(t) = \angle(\alpha(s) - P_0, \alpha(t) - P_0).$$

La última observación es consecuencia del hecho de que fijado s , la función g definida por

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}[\varphi(t) - \varphi(s) - \angle(\alpha(t) - P_0, \alpha(s) - P_0)],$$

es continua si $|t - s| < \delta$, $g(t) \in \mathbb{Z}$ y $g(s) = 0$.

Sea $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una reparametrización positiva de $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, esto es, existe una biyección creciente y continua $\sigma: [c, d] \rightarrow [a, b]$, tal que $\beta(t) = \alpha \circ \sigma(t)$. Así, si φ es una función angular para α en relación a P_0 entonces la función $\tilde{\varphi}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(\sigma(t)) - \varphi(\sigma(c)), \quad (2.8)$$

es una función angular para β , con $\tilde{\varphi}(c) = 0$. De hecho

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma(s)) &= \angle(\alpha(a) - P_0, \alpha(\sigma(s)) - P_0) \\ &= \angle(\alpha(a) - P_0, \alpha(\sigma(c)) - P_0) + \angle(\alpha(\sigma(c)) - P_0, \alpha(\sigma(s)) - P_0) \\ &= \varphi(\sigma(s)) + \angle(\beta(c) - P_0, \beta(s) - P_0). \end{aligned}$$

El resultado siguiente nos da una expresión para la función angular de la curva α si ella es una curva diferenciable.

Proposición 2.5. *Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable y sea $P_0 \in \mathbb{R}^2$ un punto que no está sobre la gráfica de α . Entonces la función $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por*

$$\varphi(t) = \int_a^t \frac{\langle (\alpha(\xi) - P_0)^\perp, \alpha'(\xi) \rangle}{\|\alpha(\xi) - P_0\|^2} d\xi, \quad (2.9)$$

es una función angular de la curva α , con relación a P_0 .

Demostración. Obsérvese que, si consideramos una curva $\beta(t) = \alpha(t) - P_0$, tenemos que la función angular para α , con relación a P_0 , será una función angular para β , con relación a $(0, 0)$. Podemos entonces suponer, sin pérdida de generalidad, que $P_0 = (0, 0)$.

Notemos que si consideramos la curva γ , definida por $\gamma(t) = \frac{\alpha(t)}{\|\alpha(t)\|}$, tenemos que α y γ poseen la misma función angular. Además,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \alpha^\perp(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha(t)\|^2} &= \frac{\langle \gamma^\perp(t), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma(t)\|} \\ &= \frac{\gamma^\perp(t)(t), \|\alpha(t)\|' \gamma(t) + \|\alpha(t)\| \gamma'(t)}{\|\alpha(t)\|} \\ &= \langle \gamma^\perp(t), \gamma'(t) \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto debemos probar (2.9) en el caso en que $P_0 = (0, 0)$ y $\|\alpha(t)\| = 1$, esto es,

$$\varphi(t) = \int_a^t \langle \alpha^\perp(\xi), \alpha'(\xi) \rangle d\xi. \quad (2.10)$$

Inicialmente vamos a demostrar que la función angular φ es de clase C^1 . Como $\|\alpha(t) = 1\|$ y φ es una función angular en relación al origen, tenemos

$$\begin{aligned} \cos \varphi(t) &= \langle \alpha(a), \alpha(t) \rangle, \\ \text{sen } \varphi(t) &= \langle \alpha^\perp(a), \alpha(t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Puesto que, para t suficientemente próximo de $t_0 \in [a, b]$, las funciones seno y coseno son estrictamente monótonas y, por tanto, poseen inversas diferenciables, concluimos que φ es de clase $C^1([a, b])$. Entonces derivando las ecuaciones (2.10) obtenemos

$$\begin{aligned} -\varphi'(t) \text{sen } \varphi(t) &= \langle \alpha(a), \alpha'(t) \rangle, \\ \varphi'(t) \cos \varphi(t) &= \langle \alpha^\perp(a), \alpha'(t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Combinando las ecuaciones (2.11) y (2.12) vemos que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) \text{sen}^2 \varphi(t) &= -\langle \alpha(a), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha^\perp(a), \alpha(t) \rangle, \\ \varphi'(t) \cos^2 \varphi(t) &= \langle \alpha^\perp(a), \alpha'(t) \rangle \langle \alpha(a), \alpha(t) \rangle. \end{aligned}$$

Luego, como $\alpha(t)$ y $\alpha^\perp(t)$ son ortonormales

$$\langle \alpha^\perp(a), \alpha(t) \rangle = -\langle \alpha(a), \alpha^\perp(t) \rangle$$

y

$$\langle \alpha^\perp(a), \alpha^\perp(t) \rangle = -\langle \alpha(a), \alpha(t) \rangle.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -\langle \alpha(a), \alpha^\perp(t) \rangle \langle \alpha^\perp(a), \alpha(t) \rangle + \langle \alpha^\perp(a), \alpha^\perp(t) \rangle \langle \alpha(a), \alpha(t) \rangle \\ &= \langle \alpha'(t), \alpha^\perp(t) \rangle, \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. \square

Ahora, estamos listos para definir el número de rotación de una curva cerrada en el plano en relación a un punto P_0 , que no pertenece a la curva. Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(a) = \alpha(b)$, una curva cerrada y continua y sea P_0 un punto que está fuera de la gráfica de α . Sea φ una función angular de α con relación a P_0 , con $\varphi(a) = 0$. Como $\alpha(a) = \alpha(b)$, tenemos que

$$\varphi(b) = \angle(\alpha(a) - P_0, \alpha(b) - P_0) = 0 \pmod{2\pi}.$$

Definición 2.3. El número

$$W(\alpha, P_0) = \frac{1}{2\pi} \varphi(b) \in \mathbb{Z},$$

es llamado el **número de rotación** de α en relación a P_0 .

Intuitivamente, el número de rotación $W(\alpha, P_0)$ mide el número algebraico de vueltas que el vector posición V , relativo al punto P_0 , dado por $V(t) = \alpha(t) - P_0$, da alrededor de P_0 , cuando t varía entre $t = a$ y $t = b$. Toda la discusión desarrollada en este capítulo, hasta ahora fue para precisar esta idea. Si α es una curva de clase C^1 entonces por (2.9)

$$W(\alpha, P_0) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\langle (\alpha(\xi) - P_0)^\perp, \alpha'(\xi) \rangle}{\|\alpha(\xi) - P_0\|^2} d\xi. \quad (2.13)$$

Sorprendentemente el miembro derecho de esta ecuación es siempre un número entero.

Ejemplo 2.1. Para $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, consideremos la circunferencia con centro en el punto $P_0 \in \mathbb{R}^2$ y radio R dada por la parametrización $\alpha_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\alpha_n(t) = P_0 + (R \cos nt, R \operatorname{sen} nt).$$

Por la ecuación (2.9) tenemos

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{\langle (-R \operatorname{sen} n\xi, R \cos n\xi), (-nR \operatorname{sen} n\xi, nR \cos n\xi) \rangle}{R^2} d\xi.$$

Luego $\varphi(t) = nt$. Por lo tanto,

$$W(\alpha_n, P_0) = n.$$

Obsérvese que cuando $n = 0$, la curva definida por $\alpha_0(t) = P_0$ es una curva constante y

$$W(\alpha_0, P_1) = 0,$$

si $P_1 \neq P_0$.

El ejemplo anterior demuestra que cualquier $n \in \mathbb{Z}$ se puede obtener como el número de rotación de una curva plana.

Ejemplo 2.2. La Figura 2.5 indica el número de rotación de cada una de las curvas en relación a los puntos marcados con $*$.

2.4. Propiedades del número de rotación

La primera propiedad del número de rotación de una curva que vamos a demostrar nos dice que, el número de rotación de α en relación a puntos suficientemente diestántes de α , es nulo.

Proposición 2.6. Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada y continua. Entonces existe $R > 0$ tal que para todo $P \in \mathbb{R}^2$, con $\|P\| \geq R$,

$$W(\alpha, P) = 0.$$

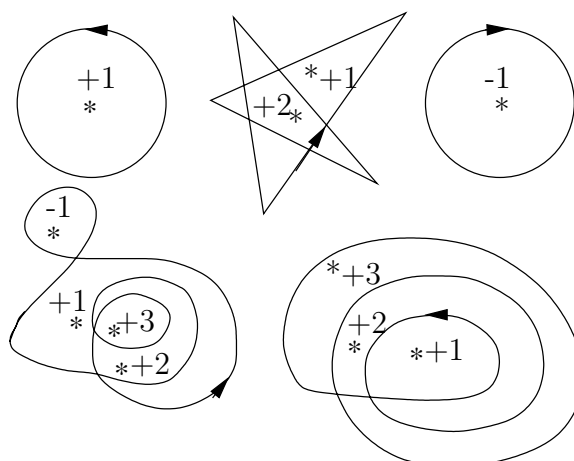


Figura 2.5: Ejemplos del número de rotación de una curva

Demostración. Como $\|\alpha(t)\|$ es una función continua en $[a, b]$ entonces alcanza un valor máximo R_0 en $[a, b]$. Tomemos $R > R_0$ y observemos que si $P \in \mathbb{R}^2$, con $\|P\| \geq R$, la gráfica de α está completamente contenida en el semiplano que contiene el origen y es determinado por la recta perpendicular a \overline{OP} y que pasa por P . Entonces la función angular de α , $\varphi(t)$, con $\varphi(a) = 0$, satisface (ver Figura 2.6)

$$\varphi(t) = \angle(\alpha(a) - P, \alpha(t) - P) < \pi, \quad \forall t \in [a, b].$$

Luego

$$\varphi(b) = 0,$$

y consecuentemente,

$$W(\alpha, P) = 0,$$

lo que concluye la demostración. □

La siguiente proposición nos dice como cambia el número de rotación de la curva α cuando consideramos reparametrizaciones de α .

Proposición 2.7. *Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada y continua y sea $P \in \mathbb{R}^2$ un punto que no está sobre la gráfica de α . Considere una función continua*

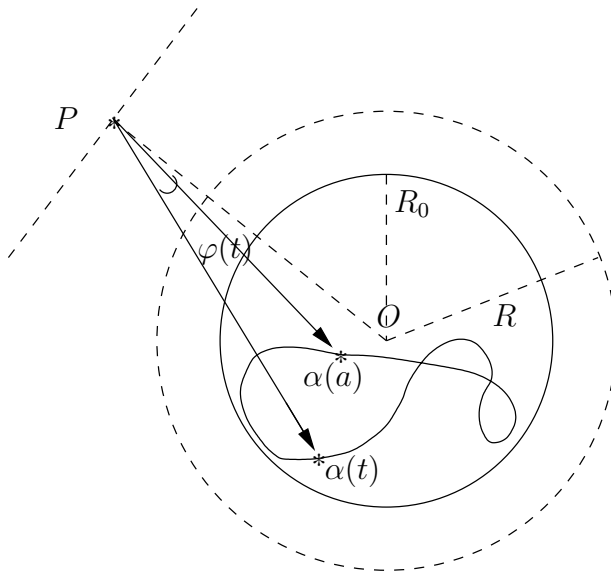


Figura 2.6: Figura 2.6

$\sigma: [c, d] \rightarrow [a, b]$, con $\sigma(c) = a$ y $\sigma(d) = b$. Entonces la reparametrización de α , $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\beta(t) = \alpha \circ \sigma(t)$, es una curva cerrada, continua y su número de rotación coincide con un número de rotación de α , esto es,

$$W(\beta, P) = W(\alpha \circ \sigma, P) = W(\alpha, P).$$

Demostración. Usando la expresión de la función angular de una reparametrización, ecuación (2.8) tenemos que

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(\sigma(t)) - \varphi(\sigma(c)) = \varphi(\sigma(t)).$$

Luego, $\tilde{\varphi} = 0$ y por tanto

$$W(\beta, P) = W(\alpha \circ \sigma, P) = \frac{1}{2\pi} \tilde{\varphi}(d) = \frac{1}{2\pi} \varphi(b) = W(\alpha, P).$$

□

Observación 2.3. Si σ revierte la orientación de α , esto es, si $\sigma(c) = b$ y $\sigma(d) = a$, entonces

$$W(\beta, P) = W(\alpha \circ \sigma, P) = -W(\alpha, P).$$

De hecho,

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(\sigma(t)) - \varphi(\sigma(c)) = \varphi(\sigma(t)) - \varphi(b)$$

y $\tilde{\varphi}(c) = 0$. Por tanto,

$$W(\beta, P) = \frac{1}{2\pi}[\tilde{\varphi}(d) - \tilde{\varphi}(c)] = \frac{1}{2\pi}[\varphi(\sigma(d)) - \varphi(b)] = -\frac{1}{2\pi}\varphi(b) = -W(\alpha, P).$$

Obsérvese que, como $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada ($\alpha(a) = \alpha(b)$), podemos considerar el número de rotación de α en relación a otro punto inicial/final. Para eso consideremos la curva

$$\bar{\alpha}: [a, 2b - a] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

dada por

$$\bar{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{si } a \leq t \leq b, \\ \alpha(t - (b - a)), & \text{si } b \leq t \leq 2b - a. \end{cases}$$

Claramente la curva $\bar{\alpha}$ es continua. Si α fuera cerrada y de clase C^k , esto es, si para todo $1 \leq m \leq k$,

$$\frac{d^m \alpha}{dt^m}(a) = \frac{d^m \alpha}{dt^m}(b),$$

entonces $\bar{\alpha}$ es de clase C^k . Observemos que, por definición, para todo $s \in [a, b]$, tenemos

$$\bar{\alpha}(s) = \bar{\alpha}(s + (b - a)).$$

Definamos la curva $\alpha_s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\alpha_s(t) = \bar{\alpha}(t + s - a),$$

entonces α_s describe la misma curva que α , sin embargo su punto inicial/final es $\alpha(s)$. Tenemos que $\alpha_a(t) = \alpha_b(t) = \alpha(t)$, para todo $t \in [a, b]$, sin embargo, si $a < s < b$, α_s no es una reparametrización de α .

Estudiemos ahora la dependencia de $W(\alpha, P)$ en relación al punto inicial/final de α . Considerando la construcción anterior, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.8. Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada y $P \in \mathbb{R}^2$ un punto que no está sobre la gráfica de α . Entonces, para todo $s \in [a, b]$,

$$W(\alpha, P) = W(\alpha_s, P).$$

En particular, $W(\alpha, P)$ no depende del punto inicial/final de α .

Demostración. Con la notación anterior, sean φ y $\bar{\varphi}$ funciones angulares para α y $\bar{\alpha}$ en relación al punto P , con $\varphi(a) = \bar{\varphi}(a) = 0$. Entonces,

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{si } a \leq t \leq b, \\ \varphi(b) + \varphi(t - (b - a)), & \text{si } b \leq t \leq 2b - a. \end{cases}$$

Puesto que α_s es una reparametrización de $\bar{\alpha}|_{[s, b+s]}$, entonces la función angular de α_s en relación a P , φ_s , que satisface $\varphi_s(a) = 0$ está dada por

$$\varphi_s(t) = \bar{\varphi}(t + s - a) - \bar{\varphi}(s).$$

Luego, para los números de rotación obtenemos

$$\begin{aligned} W(\alpha_s, P) &= \frac{1}{2\pi} \varphi_s(b) = \frac{1}{2\pi} (\bar{\varphi}(s + (b - a)) - \bar{\varphi}(s)) \\ &= \frac{1}{2\pi} (\varphi(b) + \varphi(s) - \varphi(s)) = W(\alpha, P). \end{aligned}$$

Por tanto, $W(\alpha_s, P)$ no depende de s y concluimos la demostración. \square

Consideremos ahora dos curvas continuas $\alpha_1, \alpha_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tales que $\alpha_1(b) = \alpha_2(a)$. Definimos una nueva curva continua $\alpha_1 * \alpha_2$ por (ver Figura 2.7)

$$\alpha_1 * \alpha_2(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t - a), & \text{si } a \leq t \leq \frac{a+b}{2}, \\ \alpha_2(2t - b), & \text{si } \frac{a+b}{2} \leq t \leq b. \end{cases}$$

Geoméricamente, significa que usamos la primera mitad del intervalo $[a, b]$ para parametrizar α_1 y la segunda mitad para parametrizar α_2 . La condición $\alpha_1(b) = \alpha_2(a)$ implica que $\alpha_1 * \alpha_2$ es continua en $[a, b]$. Observemos que, en general $\alpha_2 * \alpha_1$ no

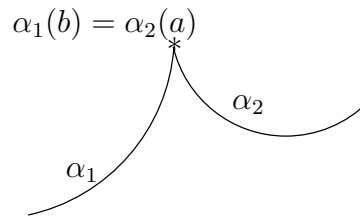


Figura 2.7: Gráfica de la curva $\alpha_1 * \alpha_2$

está definida. Suponga ahora que las curvas $\alpha_1, \alpha_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ son curvas cerradas y continuas con $\alpha_1(a) = \alpha_1(b) = \alpha_2(a) = \alpha_2(b)$. En este caso $\alpha_1 * \alpha_2$ y $\alpha_2 * \alpha_1$ están bien definidas y son curvas cerradas y continuas (ver Figura 2.8).

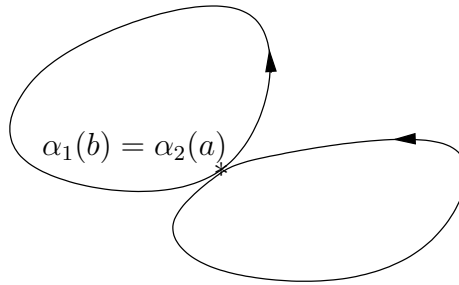


Figura 2.8: $\alpha_1 * \alpha_2$

La siguiente proposición nos da la propiedad de aditividad del número de rotación en relación a la operación $*$.

Proposición 2.9. Sean $\alpha_1, \alpha_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas cerradas y continuas con $\alpha_1(b) = \alpha_2(a)$. Sea P un punto que no está sobre la gráfica de $\alpha_1 * \alpha_2$. Entonces

$$W(\alpha_1 * \alpha_2, P) = W(\alpha_1, P) + W(\alpha_2, P)$$

Demostración. Sean φ_1, φ_2 y φ las funciones angulares con respecto a P de las curvas de α_1, α_2 y $\alpha_1 * \alpha_2$ respectivamente y supongamos que $\varphi_1(a) = \varphi_2(b) = \varphi(a) = 0$. Entonces tenemos que

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(2t - a), & \text{si } a \leq t \leq \frac{a+b}{2}, \\ \varphi_1(b) + \varphi_2(2t - b), & \text{si } \frac{a+b}{2} \leq t \leq b. \end{cases}$$

Por tanto

$$W(\alpha_1 * \alpha_2, P) = \frac{1}{2\pi} \varphi(b) = \frac{1}{2\pi} (\varphi_1(b) + \varphi_2(b)) = W(\alpha_1, P) + W(\alpha_2, P).$$

□

En las condiciones de la proposición anterior, $\alpha_1 * \alpha_2$ y $\alpha_2 * \alpha_1$ están bien definidas. Esas curvas son, en general, distintas. Como

$$W(\alpha_2 * \alpha_1, P) = W(\alpha_2, P) + W(\alpha_1, P) = W(\alpha_1 * \alpha_2, P)$$

los números de rotación de $\alpha_1 * \alpha_2$ y $\alpha_2 * \alpha_1$ coinciden.

Ejemplo 2.3. Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada y continua y sea P un punto que no está sobre la gráfica de α . Consideraremos la curva $\alpha^-: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha^-(t) = \alpha(b + a - t).$$

α^- recorre la misma gráfica de α con una orientación contraria a la de α . Entonces

$$W(\alpha * \alpha^-, P) = W(\alpha, P) + W(\alpha^-, P) = W(\alpha, P) - W(\alpha, P) = 0.$$

Intuitivamente es claro que el número de rotación $W(\alpha, P)$ de una curva cerrada y continua $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, en relación a un punto P que no está sobre su gráfica, no cambia si movemos “ligeramente” α o P . Para hacer claridad sobre esta afirmación, vamos a introducir la noción de deformación continua de una curva en \mathbb{R}^2 , ver Figura 2.9.

Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva en \mathbb{R}^2 y sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo tal que $0 \in J$. Una **deformación** (o familia a un parámetro) de α es una aplicación continua $H: J \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$H(0, t) = \alpha(t), \quad \forall t \in I.$$

La continuidad de H significa que fijados $\zeta_0 \in J$ y $t_0 \in I$, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|H(\zeta, t) - H(\zeta_0, t_0)\| < \epsilon,$$

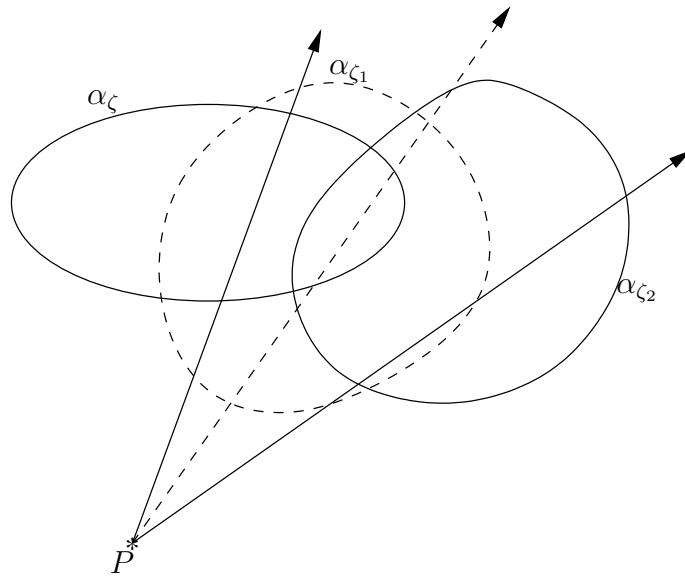


Figura 2.9: Las curvas $\alpha_\zeta, \alpha_{\zeta_1}, \alpha_{\zeta_2}$ poseen el mismo número de rotación en relación al punto P

si $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ y $|t - t_0| < \delta$, esto es,

$$\lim_{(\zeta, t) \rightarrow (\zeta_0, t_0)} H(\zeta, t) = H(\zeta_0, t_0).$$

Luego, para cada $\zeta \in J$, una curva $\alpha_\zeta: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha_{\zeta(t)} = H(\zeta, t),$$

es continua en \mathbb{R}^2 y es llamada curva de deformación. Vamos a usar indistintamente las funciones H y α_ζ para denotar una deformación curva de la curva α .

Ejemplo 2.4. La aplicación $H: \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$H(\zeta, t) = e^{\zeta}(\cos t, \sin t),$$

es una deformación continua de una circunferencia de radio uno. Las curvas de la deformación son circunferencias concéntricas.

Ejemplo 2.5. La aplicación $H: [0, 1] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $H(\zeta, t) = \zeta(\cos t, \sin t)$, es una deformación de la curva constante α , dada por $\alpha(t) = (0, 0)$. Las curvas de deformación son círculos concéntricos.

Ejemplo 2.6. La aplicación $H: [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $H(\zeta, t) = t(\cos \zeta, \sin \zeta)$ es una deformación continua del segmento

$$\{(t, 0) : t \in [-1, 1]\}.$$

Las curvas de deformación son segmentos de recta que pasan por el origen.

Sea α_ζ , $\zeta \in J$, una deformación de una curva cerrada $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que para todo $\zeta \in J$, $\alpha_\zeta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada. Sea P un punto que no está sobre ninguna curva de deformación. En este caso están bien definidas las funciones angulares φ_ζ de cada curva α_ζ en relación al punto P , con $\varphi_\zeta(a) = 0$. Aquí una pregunta natural es si las funciones φ_ζ varían continuamente con ζ , la respuesta a esta pregunta es dada por el siguiente resultado.

Proposición 2.10. Sea $\alpha_\zeta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\zeta \in J$ una deformación continua de curvas cerradas y sea $P(\zeta)$ una curva continua tal que para cada $\zeta \in J$, el punto $P_\zeta = P(\zeta)$ no está sobre α_ζ . Denote por φ_ζ , la función angular de la curva α_ζ , la cual depende del parámetro t , en relación al punto P_ζ , con $\varphi_\zeta(a) = 0$. Entonces φ_ζ depende continuamente de ζ y t . En particular, para todo $t \in [a, b]$ fijo, la función que a cada ζ asocia $\varphi_\zeta(t)$ es una función continua en J .

Demostración. Fijamos $\zeta_0 \in J$ y vamos a demostrar inicialmente que existe $\delta > 0$ tal que

$$\angle(\alpha_\zeta(t) - P_\zeta, \alpha_\zeta(s) - P_\zeta) < \pi, \quad (2.14)$$

si $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ y $|t - s| < \delta$. Note que, si definimos

$$\nu_\zeta(t) = \frac{\alpha_\zeta(t) - P_\zeta}{\|\alpha_\zeta(t) - P_\zeta\|},$$

la ecuación (2.14) es equivalente a

$$\langle \nu_\zeta(t), \nu_\zeta(s) \rangle \neq -1. \quad (2.15)$$

Supongamos, por contradicción, que (2.15) no es verdadera. En ese caso, existen sucesiones ζ_n en J y t_n, s_n en $[a, b]$, tales que

$$|\zeta_n - \zeta_0| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y

$$|t_n - s_n| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con

$$\langle \nu_{\zeta_n}(t_n), \nu_{\zeta_n}(s_n) \rangle = -1.$$

Entonces tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta_0$. Además, como las sucesiones t_n y s_n están definidas en un intervalo cerrado y acotado podemos suponer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = t_0 \in [a, b]$$

Por hipótesis, $\alpha_{\zeta(t)}$ depende continuamente de ζ y t , entonces

$$-1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu_{\zeta_n}(t_n), \nu_{\zeta_n}(s_n) \rangle = \langle \nu_{\zeta_0}(t_0), \nu_{\zeta_0}(s_0) \rangle = 1,$$

lo cual es una contradicción. Luego (2.14) es verdadera.

Consideremos ahora una partición de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, tal que $t_{k+1} - t_k < \delta$ para todo $k = 0, 1, \dots, n$. Si $|\zeta - \zeta_0| < \delta$, entonces, por (2.14)

$$\varphi_{\zeta(t)} = \sum_{i=0}^{k-1} \angle(\nu_{\zeta}(t_i), \nu_{\zeta}(t_{i+1})) + \angle(\nu_{\zeta}(t_k), \nu_{\zeta}(t)),$$

para $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, es una suma de funciones continuas, con lo cual queda demostrada la proposición. \square

El siguiente teorema garantiza que el número de rotación de las curvas de una deformación es conestante.

Teorema 2.2. *Sea $\alpha_{\zeta}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\zeta \in J$ una deformación continua de curvas cerradas y sea P una curva continua tal que para cada $\zeta \in J$, el punto $P_{\zeta} = P(\zeta)$ no está sobre la gráfica de α_{ζ} . Entonces el número de rotación $W(\alpha_{\zeta}, P_{\zeta})$ no depende de ζ , esto es, W es una función conestante en relación a ζ .*

Demostración. Por la proposición (2.10) la función W dada por

$$W(\alpha_\zeta, P_\zeta) = \frac{1}{2\pi} \varphi_\zeta(b)$$

es continua como función de ζ . Puesto que la función W asume valores enteros y está definida en un intervalo, se sigue que W es una función conestante. \square

2.5. Cálculo del número de rotación y del número de intersección

En esta sección, vamos a ver varios métodos para el cálculo del número de rotación de una curva cerrada en el plano. Como consecuencia, vamos a demostrar que el número de rotación es conestante en cada componente conexa del complemento de la gráfica de una curva cerrada.

Inicialmente vemos como el número de rotación $W(\alpha, P)$ de una curva cerrada en relación a P varía, cuando P recorre una curva que interseca la curva de α . En este estudio vamos a restringirnos a rayos partiendo de P , esto es, una semirecta con origen en P . Veremos que ese caso es suficiente para las principales aplicaciones geométricas y mucho mas simples de demostrar.

Introduciremos la noción de “número de intersecciones” entre una curva continua $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ y un rayo r con origen P en la dirección de un vector unitario V_0 . Tenemos que r puede ser parametrizado por $r: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $r(s) = P + sV_0$. Suponga que α interseca el rayo r para algún $\bar{t} \in (a, b)$. En tal caso, $\alpha(\bar{t}) = r(\bar{s})$, para algún $\bar{s} \in (0, \infty)$. Decimos que esa intersección es transversal si para todo t suficientemente cercano a \bar{t} , $\alpha(t)$ está contenida en uno de los semiplanos abiertos determinados por la recta que contiene r . De forma mas precisa, existe $\delta > 0$, tal que, en el intervalo $[\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta]$ la función continua f dada por

$$f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(\bar{t}), V_0^\perp \rangle,$$

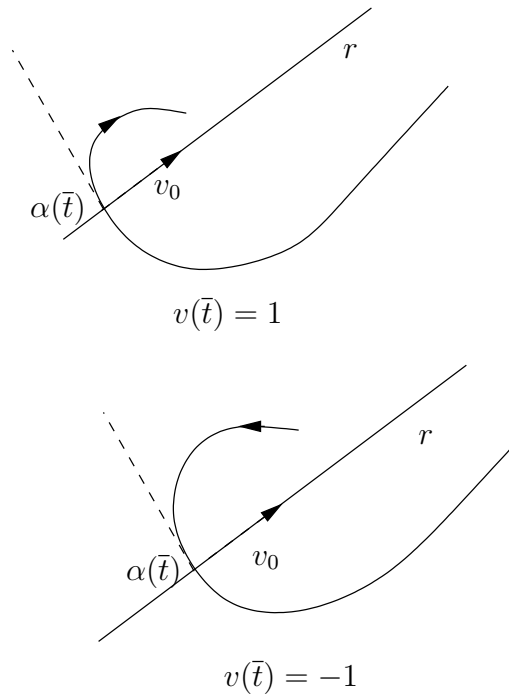


Figura 2.10: Número de intersecciones

se anula solo en $t = \bar{t}$ y cambia de signo en ese punto. En caso de intersecciones transversales, vamos a definir el número de intersecciones $v(\bar{t})$ de α y r en \bar{t} por

$$v(\bar{t}) = \text{signo}(\langle \alpha(t) - \alpha(\bar{t}), V_0^\perp \rangle) = \frac{\langle \alpha(t) - \alpha(\bar{t}), V_0^\perp \rangle}{|\alpha(t) - \alpha(\bar{t}), V_0^\perp|},$$

si $0 < t - \bar{t} < \delta$. Si la curva $\alpha(t)$ intersecta el rayo r en $\alpha(\bar{t})$ de derecha a izquierda, en relación a la dirección V_0 , cuando t crece, tenemos que $v(\bar{t}) = 1$. Si cambiamos el sentido de la intersección, entonces $v(\bar{t}) = -1$ (ver Figura 2.10). De forma mas precisa, escoja el sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 de tal forma que el origen sea $\alpha(\bar{t})$ y el eje Ox tenga la dirección y sentido del vector V_0 . En relación a ese sistema de coordenadas considere la curva α , dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Obtenemos, por ejemplo, que $v(\bar{t}) = 1$, si $y(t) < 0$ para $t < \bar{t}$ y $y(t) > 0$ para $t > \bar{t}$, cuando t está suficientemente cercano a \bar{t} (ver Figura 2.10).

Usando la definición anterior, se sigue inmediatamente que

$$v(\bar{t}) = -\text{signo}(\langle \alpha(t) - \alpha(\bar{t}), V_0^\perp \rangle),$$

si $0 < \bar{t} - t \leq \delta$ (ver Figura 2.11).

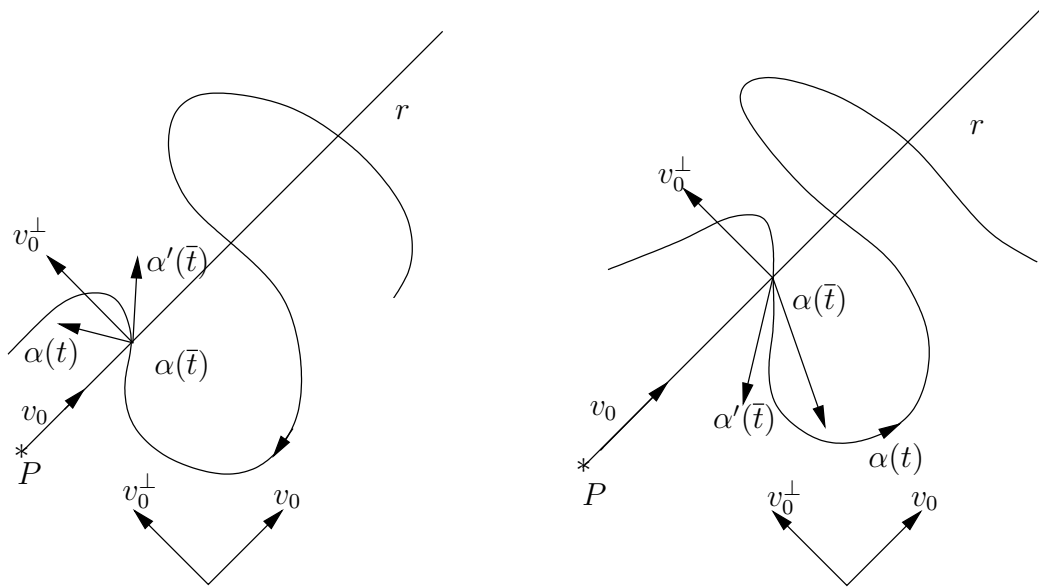


Figura 2.11: Número de intersecciones

Si la curva α es de clase C^1 en una vecindad de \bar{t} y $\langle \alpha'(t), V_0^\perp \rangle \neq 0$ entonces α interseca el rayo r transversalmente en \bar{t} y tenemos que

$$v(\bar{t}) = \text{signo}(\langle \alpha'(\bar{t}), V_0^\perp \rangle).$$

De hecho, como $f(t) = \langle \alpha(t) - \alpha(\bar{t}), V_0^\perp \rangle$ es de clase C^1 y por tanto $f'(t) = \langle \alpha'(t), V_0^\perp \rangle$ es continua en una vecindad de \bar{t} , tenemos que la hipótesis sobre $\alpha'(\bar{t})$ implica que $f'(t) \neq 0$ en algún intervalo $[\bar{t} - \epsilon, \bar{t} + \epsilon]$. Luego f es estrictamente monótona en ese intervalo y

$$\text{signo}(f(t)) = \text{signo}(f'(t)), \quad \text{para } 0 < t - \bar{t} \leq \epsilon.$$

Observemos que la transversalidad de la intersección de α y r en \bar{t} implica apenas que, para t suficientemente cercano a \bar{t} , la curva α no interseca el rayo r . La Figura 2.12 ilustra varias situaciones, incluyendo puntos de intersección múltiples ($(\alpha(t_1) = \alpha(t_2) \in r((0, \infty)), \text{ con } t_1 \neq t_2 \text{ y } t_1, t_2 \in (a, b))$).

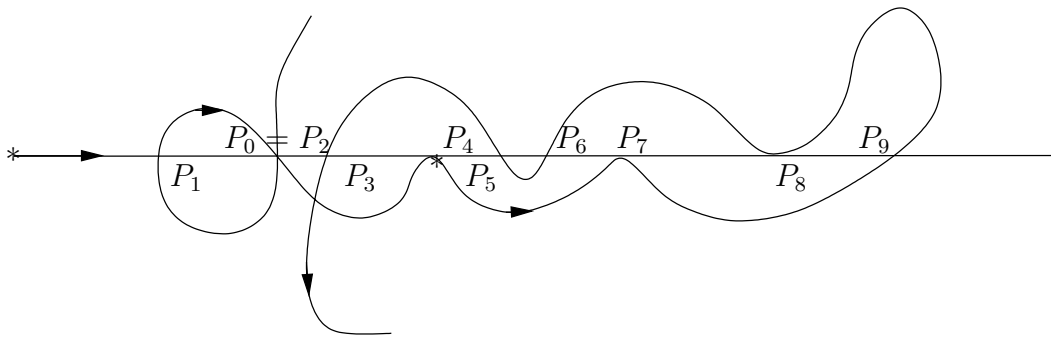


Figura 2.12: P_4 , P_7 y P_8 no son puntos de intersección transversal. El número de intersecciones en P_1 , P_7 y P_9 es igual a 1 mientras que en los otros puntos este número es igual a -1

Si la curva α interseca a r en \bar{t} , pero no transversalmente, entonces α puede intersecar a r un número infinito de veces en toda vecindad de \bar{t} . Por ejemplo, considere la curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} \left(t, t^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{t} \right) \right), & \text{si } t \neq 0, \\ (0, 0), & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

En relación al rayo $r(s) = (-1 + s, 0)$, $s \geq 0$, tenemos que α interseca a r en $t = 0$, pero tal intersección no es transversal. El número de intersección entre α y r en $(0, 0)$ no está definido.

Supongamos ahora que $\alpha(t_0) \in r$, para algún $t_0 \in (a, b)$ y que $\alpha(t) \notin r$, si t está suficientemente próximo a t_0 , $t \neq t_0$. En ese caso, decimos que la intersección de α con r en t_0 es aislada. Si $\alpha(t_0)$ es una intersección aislada de α con r , pero no transversal, podemos definir el número de intersección $v(t_0)$ de α en relación a r como $v(t_0) = 0$. Obsérvese que la intersección no ser transversal significa, que la gráfica de α está localmente de un lado del rayo r . Esa intersección es, en cierto sentido, no esencial puesto que podemos hacerla desaparecer después de una pequeña deformación de α o de r . Nótese que esto no es posible si $v(t_0) = \pm 1$. Varios de los resultados que mostraremos serán válidos aun si la hipótesis de intersección transversal es sustituida por intersección aislada.

Veremos que el número de intersecciones, entre una curva cerrada α y un rayo r mide el salto de $W(\alpha, P)$, cuando P se mueve a lo largo de r .

Para un mayor entendimiento en la demostración de la siguiente proposición debemos tener presente la definición de **homotopía**.

Definición 2.4.

Proposición 2.11. *Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada continua y sea $r: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ un rayo dado por $r(s) = P + sV_0$. Supongamos que α interseca a r transversalmente en $t_0 \in (a, b)$, esto es, $q = \alpha(t_0) = r(s_0)$ para algún $s_0 > 0$ y $\alpha(t) \neq q$ para todo $t \neq t_0$. Si $0 \leq s_* < s_0 < s^*$ son tales que $r(s)$ no pertenece a la gráfica de α para todo $s \in [s_*, s^*]$, $s \neq s_0$ entonces*

$$W(\alpha, r(s_*)) - W(\alpha, r(s^*)) = v(t_0).$$

Demostración. Como una intersección en t_0 es transversal podemos escoger $a < t_* < t_0 < t^* < b$ de modo que $\langle \alpha(t) - q, V_0^\perp \rangle \neq 0$, para todo $t \in [t_*, t^*]$, $t \neq t_0$, esto es, $\alpha(t) \notin r([0, \infty))$, para todo $t \in [t_*, t^*]$, $t \neq t_0$. Vamos a considerar dos curvas cerradas y continuas $\alpha_*, \alpha^*: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por (ver Figura 2.13)

$$\alpha_*(t) = \begin{cases} \frac{t_0 - t}{t_0 - t_*} \alpha(t_*) + \frac{t - t_*}{t_0 - t_*} r(s_*), & \text{si } t_* \leq t \leq t_0, \\ \frac{t^* - t}{t^* - t_0} r(s_*) + \frac{t - t_0}{t^* - t_0} \alpha(t^*), & \text{si } t_0 \leq t \leq t^*, \\ \alpha(t), & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} \frac{t_0 - t}{t_0 - t_*} \alpha(t_*) + \frac{t - t_*}{t_0 - t_*} r(s^*), & \text{si } t_* \leq t \leq t_0, \\ \frac{t^* - t}{t^* - t_0} r(s_*) + \frac{t - t_0}{t^* - t_0} \alpha(t^*), & \text{si } t_0 \leq t \leq t^*, \\ \alpha(t), & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

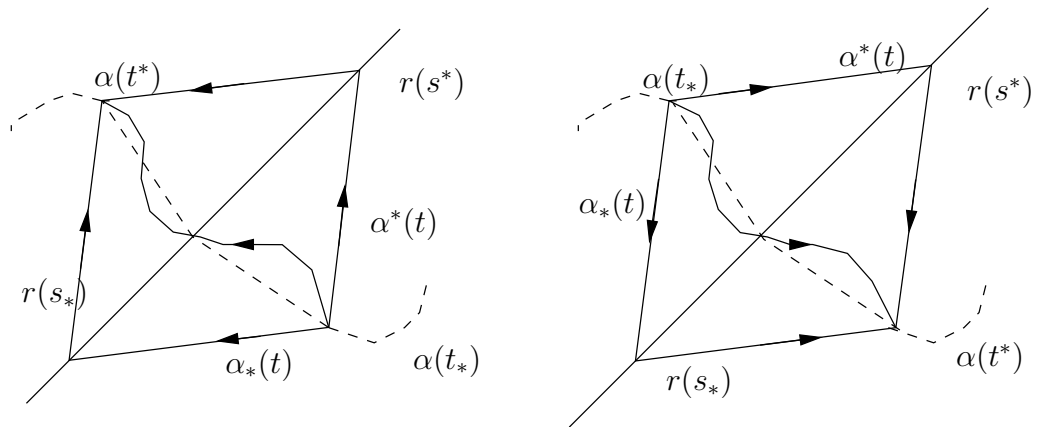


Figura 2.13: Curvas α_* y α^*

Observamos que α_* y α^* difieren de α apenas en el intervalo $[t_*, t^*]$, donde α es sustituida por dos segmentos de recta con extremos en $r(s_*)$, y $r(s^*)$, respectivamente. Ahora, α^* y α_* son homotópicas en $\mathbb{R}^2 - \{r(s^*)\}$ con deformación dada, por ejemplo, por

$$\alpha_\zeta(t) = (1 - \zeta)\alpha(t) + \zeta\alpha_*(t), \quad 0 \leq \zeta \leq 1.$$

Entonces

$$W(\alpha, r(s^*)) = W(\alpha_*, r(s^*)).$$

Por otro lado, podemos trasladar continuamente $r(s^*)$ hasta q , sin intersectar α_* .

Por tanto por el teorema 2.2

$$W(\alpha_*, r(s^*)) = W(\alpha_*, q).$$

Usando el mismo argumento para α , α^* y $r(s_*)$, obtenemos

$$W(\alpha, r(s_*)) = W(\alpha^*, q).$$

Entonces tenemos que

$$W(\alpha, r(s_*)) - W(\alpha, r(s^*)) = W(\alpha^*, q) - W(\alpha_*, q). \quad (2.16)$$

Veamos que el miembro derecho de (2.16) no depende del comportamiento global de α_* y de α^* y que es igual al número de intersección $v(t_0)$ de α y r en t_0 , que es

un invariante local. Para eso, sea $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ una partición de $[a, b]$ tal que $t_{\lambda-1} = t_*$, $t_\lambda = t_0$ y $t_{\lambda+1} = t^*$, y suficientemente fina de modo que

$$\angle(\alpha_*(t_i) - q, \alpha_*(t_{i+1}) - q) < \pi,$$

y

$$\angle(\alpha^*(t_i) - q, \alpha_*(t_{i+1}) - q) < \pi.$$

Por tanto tenemos que

$$W(\alpha_*, q) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \angle(\alpha_*(t_i) - q, \alpha_*(t_{i+1}) - q),$$

y

$$W(\alpha^*, q) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n-1} \angle(\alpha^*(t_i) - q, \alpha^*(t_{i+1}) - q).$$

Como α_* y α^* coinciden con α , excepto, posiblemente, en el intervalo $[t_{\lambda-1}, t_{\lambda+1}]$, tenemos que casi todos los términos de la diferencia $W(\alpha^*, q) - W(\alpha_*, q)$ se cancelan y, por consiguiente

$$\begin{aligned} W(\alpha^*, q) - W(\alpha_*, q) &= \frac{1}{2\pi} [\angle(\alpha^*(t_{\lambda-1}) - q, \alpha^*(t_\lambda) - q) + \angle(\alpha^*(t_\lambda) - q, \alpha^*(t_{\lambda+1}) - q) \\ &\quad - \angle(\alpha_*(t_{\lambda-1}) - q, \alpha_*(t_\lambda) - q) - \angle(\alpha_*(t_\lambda) - q, \alpha_*(t_{\lambda+1}) - q)] \\ &= -\frac{1}{2\pi} [\angle(\alpha(t_*) - q, r(s^*) - q) + \angle(r(s^*) - q, \alpha(t^*) - q) \\ &\quad - \angle(\alpha(t_*) - q, r(s_*) - q) - \angle(r(s_*) - q, \alpha(t^*) - q)]. \end{aligned}$$

Usando la proposición 2.1 podemos reagrupar esos cuatro ángulos para obtener

$$\begin{aligned} W(\alpha^*, q) - W(\alpha_*, q) &= \frac{1}{2\pi} [\angle(\alpha(t_*) - q, r(s^*) - q) + \angle(r(s^*) - q, \alpha(t^*) - q) \\ &\quad + \angle(\alpha(t^*) - q, r(s_*) - q) + \angle(r(s_*) - q, \alpha(t_*) - q)] \end{aligned} \tag{2.17}$$

Observemos que por la proposición 2.6, la suma de los cuatro ángulos del lado derecho de la ecuación anterior es igual a $\angle(\alpha(t_*) - q, \alpha(t_*) - q) \bmod 2\pi = 0 \bmod 2\pi$. Usando ahora las definiciones de número de intersecciones y ángulo orientado, tenemos que los cuatro ángulos que aparecen en el lado derecho de la ecuación (2.17) pertenecen al intervalo $(0, \pi)$, si $v(t_0) = 1$. Tales ángulos pertenecen al intervalo $(-\pi, 0)$, si $v(t_0) = -1$. Así, tenemos que

$$\angle(\alpha(t_*) - q, r(s^*) - q) + \angle(r(s^*) - q, \alpha(t^*) - q) + \angle(\alpha(t^*) - q, r(s_*) - q) + \angle(r(s_*) - q, \alpha(t_*) - q) = 2\pi,$$

si $v(t_0) = 1$ y

$$\angle(\alpha(t_*)-q, r(s^*)-q) + \angle(r(s^*)-q, \alpha(t^*)-q) + \angle(\alpha(t^*)-q, r(s_*)-q) + \angle(r(s_*)-q, \alpha(t_*)-q) = -2\pi,$$

si $v(t_0) = -1$. De donde concluimos que

$$W(\alpha^*, q) - W(\alpha_*, q) = v(t_0).$$

Usando el resultado anterior y la ecuación (2.16) se complementa la demostración. \square

El próximo resultado, que es una consecuencia directa de la proposición anterior, nos dá un método para el cálculo del número de rotación $W(\alpha, P)$ a través de un proceso simple de conteo.

Teorema 2.3. (*Fórmula del número de intersecciones*)

Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada continua y sea P un punto por el que no pasa α . Sea $r: [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un rayo con origen en P , $r(s) = P + sV_0$. Suponga que α interseca a r en un número finito de puntos $t_1, \dots, t_k \in (a, b)$ y que todas esas intersecciones sean transversales. Entonces

$$W(\alpha, P) = \sum_{i=1}^k v(t_i) \quad (2.18)$$

Demostración. Para cada $i = 1, \dots, k$ sea $s_i \in (0, \infty)$, tal que $\alpha(t_i) = r(s_i)$. Observemos que la igualdad $s_i = s_j$ para $i \neq j$ significa que α posee intersección múltiple con r . Vamos inicialmente a “remover” todas las intersecciones múltiples. Suponga que, por ejemplo, $s_1 = s_2$. Escoja $s^* > 0$, con $s^* \neq s_i$, para todo i . Construyamos una curva cerrada $\alpha^*: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, exactamente como en la demostración de la proposición anterior, que coincide con α fuera de un intervalo pequeño $[t_*, t^*]$, con centro t_1 y que hace un desvío en una vecindad de $\alpha(t_1)$, usando dos segmentos de recta con vértices en $r(s^*)$ (ver Figura 2.14).

Como antes

$$W(\alpha, P) = W(\alpha^*, P),$$

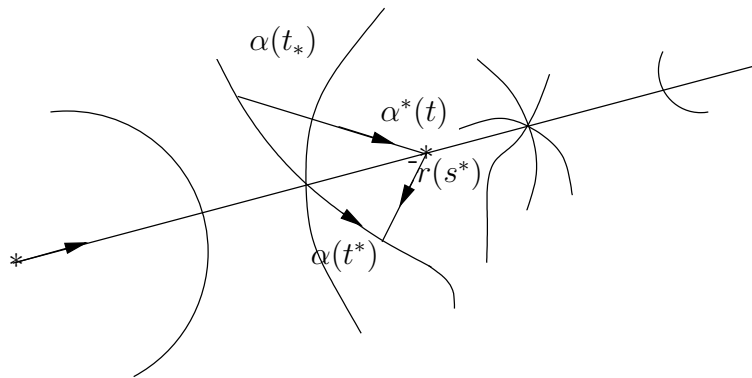


Figura 2.14:

puesto que α y α^* son homotópicas en $\mathbb{R}^2 - \{P\}$. Además, por construcción, los números de intersección $v(t_1)$ de α y $v^*(t_1)$ de α^* son iguales. Por tanto, si el teorema es válido para α^* también será válido para α . Tenemos que el número de intersecciones múltiples de α^* es igual al número de intersecciones múltiples de α menos una unidad. Luego, repitiendo ese proceso, después de un número finito de pasos obtenemos una curva que posee apenas intersecciones simples con el rayo r en los puntos t_1, \dots, t_k con el mismo número de rotación y los mismos números de intersecciones que la curva α . Por tanto, es suficiente demostrar la fórmula del número de intersección en el caso de que los s_i son distintos.

Reordenando, si es necesario, podemos suponer que

$$0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k.$$

Observemos que los t_i no están necesariamente ordenados. Escojamos $\sigma_i \in [0, \infty)$ de manera que

$$0 = \sigma_0 < s_1 < \sigma_1 < s_2 < \dots < \sigma_{k-1} < s_k < \sigma_k.$$

Sea $P_i = r(\sigma_i)$, por la proposición anterior, para todo $i = 1, \dots, k$ tenemos

$$W(\alpha, P_{i-1}) - W(\alpha, P_i) = v(t_i).$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^k v(t_i) = \sum_{i=1}^k [W(\alpha, P_{i-1}) - W(\alpha, P_i)] = W(\alpha, P_0) - W(\alpha, P_k).$$

Como la curva α no intersecta al radio $r|_{[\sigma_k, \infty)}$, tenemos que $W(\alpha, P_k) = 0$, luego

$$W(\alpha, P) = W(\alpha, P_0) = \sum_{i=1}^k v(t_i),$$

lo que concluye la demostración. \square

La fórmula del número de intersecciones tiene una hermosa y sorprendente consecuencia: El miembro derecho de la ecuación (2.18) no depende de la elección del rayo partiendo del punto P a pesar de que el número de puntos de intersección de α con un rayo partiendo de P puede variar considerablemente cuando variamos la dirección V_0 del rayo (ver Figura 2.15).

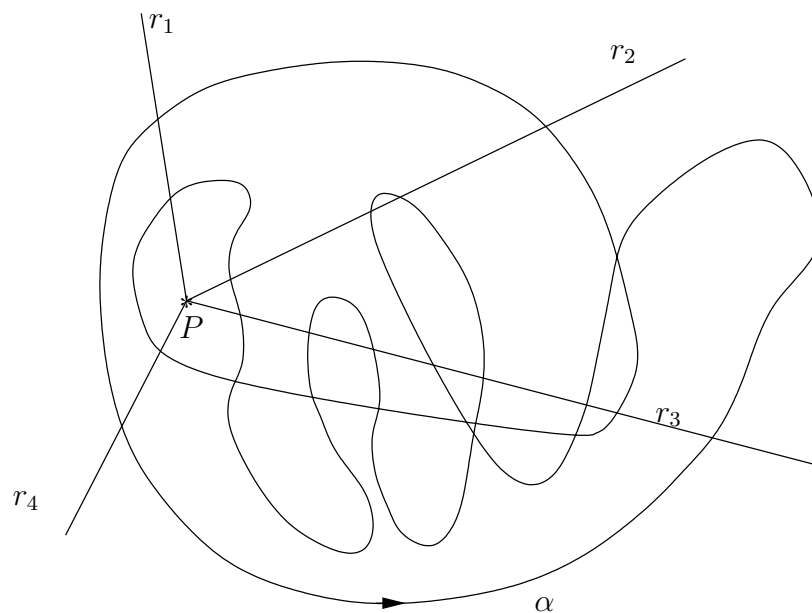


Figura 2.15:

Supongamos que la curva $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada y de clase C^1 y sea P un punto que no está sobre la curva α . Es posible demostrar que, para cada

vector unitario $V_0 \in \mathbb{R}^2$, existe un vector unitario V , suficientemente cercano a V_0 para el cual el rayo $r(s) = P + sV$ intersecta la gráfica de α en un número finito de puntos t_1, \dots, t_k . En este caso usando la ecuación (2.13), la fórmula del número de intersecciones en relación al rayo r puede ser escrita como

$$\sum_{i=1}^k v(t_i) = W(\alpha, P) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\langle (\alpha(t) - P)^\perp, \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha(t) - P\|^2} dt.$$

Capítulo 3

Aplicaciones

En este capítulo presentamos algunas aplicaciones del concepto de número de rotación.

Antes de iniciar vamos a introducir el concepto de homotopía entre caminos. Decimos que $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ son caminos homotópicos si existe una aplicación continua $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned}H(0, t) &= \alpha(t), H(1, t) = \beta(t), \\H(s, 0) &= \alpha(0) = \beta(0), \\H(s, 1) &= \alpha(1) = \beta(1),\end{aligned}$$

para cualquier $s, t \in [0, 1]$.

3.1. Funciones Continuas del Disco en el Plano

El teorema de Bolzano o teorema del valor intermedio para funciones continuas en la recta dice que si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$. En otras palabras, el teorema de Bolzano garantiza que la ecuación

$$f(t) = 0$$

tiene solución en el intervalo $[a, b]$, bajo ciertas condiciones en la frontera del dominio de f . ¿Será que, en algún sentido, este teorema puede ser generalizado para funciones $F: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$? La primera aplicación que veremos será una generalización de este teorema en el caso de funciones definidas en un disco en \mathbb{R}^2 .

Sea $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq r\}$ el disco con centro en $(0, 0)$ y radio r y sea $S_r = \partial D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| = r\}$ su frontera. Consideremos una curva continua $\alpha_r: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha_r(t) = (r \cos 2\pi t, r \sin 2\pi t)$. Obsérvese que la curva α_r recorre a S_r una sola vez en sentido antihorario.

Consideremos ahora una función continua $F: D_r \rightarrow \mathbb{R}^2$. Queremos obtener condiciones sobre el comportamiento de F en la frontera de D_r de tal forma que la ecuación

$$F(P) = (0, 0),$$

tenga solución en D_r . La función F está asociada a la curva $\alpha_F: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha_F(t) = (F \circ \alpha_r)(t)$, la cual es cerrada y continua. En realidad, α_F es una restricción de F a S_r . Si $(0, 0)$ está sobre la gráfica de α_F es claro que la ecuación anterior tiene solución en D_r . Supongamos entonces que α_F no pasa por el punto $(0, 0)$. Tenemos entonces el siguiente resultado, que generaliza el teorema de Bolzano.

Teorema 3.1. *Con la anotación anterior, si $W(\alpha_F, (0, 0)) \neq 0$ entonces existe $(x_0, y_0) \in D_r$, tal que*

$$F(x_0, y_0) = (0, 0).$$

Demostración. Hacemos la demostración por contradicción. Suponga que $(0, 0)$ no pertenece a $F(D_r)$. Construyamos una homotopía H entre α_F y la curva constante β dada por $\beta(t) = F(0, 0)$. Sea $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$H(\zeta, t) = F(r\zeta \cos 2\pi t, r\zeta \sin 2\pi t).$$

Claramente,

1. H es continua;

2. $H(1, t) = \alpha_F(t), \forall t \in [0, 1];$
3. $H(0, t) = F(0, 0) = \beta(t), \forall t \in [0, 1];$
4. $H(\zeta, 0) = F(r\zeta, 0) = H(\zeta, 1).$

Luego H es una homotopía entre α_F y β en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, puesto que $(0, 0) \notin F(D_r)$. Además, los números de rotación de α_F y β en relación al punto $(0, 0)$ están bien definidos. Por tanto, como esas curvas son homotópicas, tenemos que

$$W(\alpha_F, (0, 0)) = W(\beta, (0, 0)).$$

Ahora, como β es una curva conestánate, $W(\beta, (0, 0)) = 0$, por tanto,

$$W(\alpha_F, (0, 0)) = 0,$$

lo que contradice la hipótesis. □

Como aplicación del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *(Teorema Fundamental del álgebra) Todo polinomio de grado $n \geq 1$ sobre el cuerpo de los números complejos \mathbb{C} posee raíz en \mathbb{C}*

Demostración. Sea $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio, dado por

$$F(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad n \geq 1.$$

Vamos a considerar $F|_{D_r}$ la restricción de F al disco D_r , donde $r = 2 + \sum_{i=1}^n \|a_i\|$. Sea α_r dada por $\alpha_r(t) = (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t))$ una parametrización de la circunferencia de radio r con centro en el origen. Mostraremos que la curva α_F , dada por $\alpha_F(t) = (F \circ \alpha_r)(t)$, tiene número de rotación no nulo en relación al punto $(0, 0)$. En ese caso, por el teorema anterior, existe z_0 que pertenece a D_r , tal que $F(z_0) = (0, 0)$ y por tanto quedaría demostrado el teorema. Para calcular el número de rotación de α_F en relación a $(0, 0)$ vamos a considerar

la función auxiliar $\zeta_n: D_r \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, dada por $\zeta_n(z) = z^n$. Observemos que $(\zeta_n \circ \alpha_r)(t) = \zeta_n(r)e^{2\pi it} = r^n e^{2\pi nit}$. Luego

$$W(\zeta_n \circ \alpha_r, (0, 0)) = n.$$

Ahora, Nótese que para todo $t \in [0, 1]$, si consideramos $z = re^{it}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\alpha_F(t) - (\zeta_n \circ \alpha_r)(t)\| &= \|F(re^{it}) - \zeta_n(re^{it})\|, \\ &= \|a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n\|, \\ &\leq \|a_1\| \|z^{n-1}\| + \dots + \|a_{n-1}\| \|z\| + \|a_n\|, \\ &\leq \|a_1\| r^{n-1} + \dots + \|a_{n-1}\| r + \|a_n\|, \\ &\leq r^{n-1} (\|a_1\| + \dots + \|a_{n-1}\| + \|a_n\|), \\ &< r^n = \|\zeta_n \circ \alpha_r(t)\|. \end{aligned}$$

Ahora usando el teorema de Rouché, obtenemos que

$$W(\alpha_F, (0, 0)) = W(\zeta_n \circ \alpha_r, (0, 0)) = n > 0.$$

Por tanto la ecuación $F(z) = (0, 0)$ posee raíz en $D_r \subset \mathbb{C}$. \square

Para la próxima aplicación del teorema (3.1), vamos a introducir una noción de función impar para funciones definidas en subconjuntos de \mathbb{R}^n . Decimos que $U \subset \mathbb{R}^n$ es simétrico en relación al punto $(0, \dots, 0)$ si y solamente si para todo $P \in U$, $-P \in U$.

Definición 3.1. Sea $U \in \mathbb{R}^n$ un conjunto simétrico con relación a $(0, \dots, 0)$. Una función continua $f: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ es impar si

$$f(P) = -f(-P), \quad \forall P \in U.$$

Dada una curva cerrada $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, y dado P un punto que no está sobre α , podemos escoger un sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 de modo que $P = (0, 0)$ y $\alpha(a) = (A, 0)$, $A > 0$. La curva α está asociada, de modo único, a una aplicación continua $\bar{\alpha}: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \quad t \in [0, 1].$$

Definición 3.2. Decimos que α es una curva cerrada e impar, si la curva $\bar{\alpha}$ es impar.

Lema 3.1. Sea $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada impar, con $\alpha(t) \neq (0, 0)$, para todo $t \in [0, 1]$. Entonces su número de rotación con relación a $(0, 0)$ es un número impar.

Demostración. Sea φ una función angular para α tal que $\varphi(0) = 0$. Por ser α una curva cerrada e impar, tenemos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que, para todo $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

$$\varphi(t) = \varphi\left(t + \frac{1}{2}\right) - (2k + 1)\pi.$$

Luego

$$W(\alpha, (0, 0)) = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi} = 2k + 1.$$

□

Consideremos, la esfera unitaria $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en \mathbb{R}^3 . Observemos que toda función continua impar $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se anula en, por lo menos, un punto de \mathbb{S}^2 . De hecho, como \mathbb{S}^2 es conexo, $f(\mathbb{S}^2)$ es un intervalo y como f es impar este intervalo se reduce a $\{0\}$ o contiene puntos positivos y negativos. Luego existe $x_0 \in \mathbb{S}^2$, tal que $f(x_0) = 0$. El siguiente resultado es una generalización de este hecho.

Teorema 3.3. (Teorema de Borsuk) Sean $F, G: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas impares definidas en la esfera unitaria \mathbb{S}^2 . Entonces existe $P_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que (ver Figura 3.1)

$$F(P_0) = G(P_0) = 0.$$

Demostración. Sea la función $h: D_1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por (ver Figura 3.1)

$$h(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}),$$

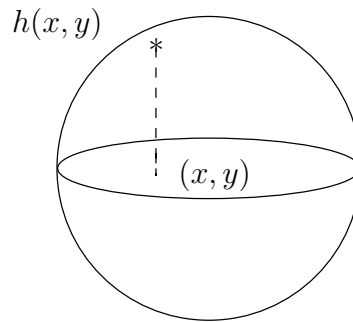


Figura 3.1:

la cual es un homeomorfismo de D_1 sobre la semiesfera

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z \geq 0\}.$$

Definamos la función $f: D_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$f(x, y) = (F(h(x, y)), G(h(x, y))).$$

Si $(0, 0) \in f(D_1)$, no hay nada que demostrar. Supongamos que $(0, 0) \notin f(D_1)$, en este caso está bien definido el número de rotación de la curva $\alpha(t) = (f \circ \alpha_1)(t)$ en relación a $(0, 0)$, donde $\alpha_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Como F y G son funciones impares, la curva cerrada α es impar y por el lema 3.1 tenemos que $W(\alpha(0, 0))$ es impar. Por tanto,

$$W(\alpha, (0, 0)) \neq 0.$$

El teorema 3.1 implica que existe $q_0 \in D_1$, tal que $f(q_0) = (0, 0)$. Ahora, usando la definición de f , tenemos que $F(h(q_0)) = 0 = G(h(q_0))$, lo que concluye la prueba. \square

Corolario 3.1. *No existe ninguna función continua e inyectiva definida en la esfera \mathbb{S}^2 y con valores en \mathbb{R}^2 .*

Demostración. Supongamos que $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función continua sobre \mathbb{S}^2 . Vamos a probar que existe $P \in \mathbb{S}^2$, tal que $f(P) = f(-P)$ y por tanto f no

es inyectiva. Supongamos que $f(q) = (f_1(q), f_2(q))$, $q \in \mathbb{S}^2$, entonces las funciones $f_1, f_2: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas en \mathbb{S}^2 . Consideremos las funciones $F_1, F_2: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} F_1(q) &= f_1(q) - f_1(-q), \\ F_2(q) &= f_2(q) - f_2(-q). \end{aligned}$$

Como estas funciones son continuas e impares tenemos, por el teorema de Borsuk, que existe $P \in \mathbb{S}^2$, tal que $F_1(P) = F_2(P) = (0, 0)$. Luego para P , $f(P) = (f_1(P), f_2(P)) = (f_1(-P), f_2(-P)) = f(-P)$. \square

3.2. Teorema de Brower

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y m respectivamente. Un resultado bien conocido del Álgebra lineal dice que V y W son isomorfos si y solamente si $n = m$. Este hecho es conocido como invarianza algebraica de la dimensión. El equivalente topológico de este resultado es el teorema de Brower.

Teorema 3.4. (*Teorema de Brower*) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ dos conjuntos abiertos no vacíos. Si existe un homeomorfismo $h: \Omega \rightarrow \Gamma$, entonces $n = m$.

Vamos a demostrar el teorema anterior solo en los casos $m = 1$ y $m = 2$, el último caso es una aplicación a la teoría del número de rotación de una curva cerrada.

Demostración del caso $m = 1$. Sea $P \in \Omega$. Como Ω es abierto en \mathbb{R}^n , existe $r > 0$, tal que la bola con centro en P y radio r , $B_r(P)$, esta contenida en Ω . Como $B_r(P)$ es conexo y h es un homeomorfismo, $h(B_r(P))$ es un conjunto conexo abierto de \mathbb{R} y por tanto es un intervalo abierto, el cual llamaremos (a, b) . Sea $c \in (a, b)$ y sea $Q \in B_r(P)$ tal que $h(Q) = c$. Por tanto, tenemos que $(a, b) - \{c\}$ es un conjunto no conexo de Γ , y nuevamente, por ser h un homeomorfismo tenemos que $B_r(P) - \{Q\}$

no es conexo, lo que solo es posible cuando $n = 1$.

□

Demostración del caso $m = 2$. Por el caso anterior, podemos suponer que $n \geq 2$. Sea $P \in \Omega$ y sea $r > 0$ tal que la clausura de la bola con centro en P y radio r , $\overline{B_r(P)}$, esté contenida en Ω . Luego la frontera de $\overline{B_r(P)}$, $\partial\overline{B_r(P)}$, es una esfera de dimensión $n - 1$ en \mathbb{R}^n . Observemos que la restricción de h a esta esfera es aun una función inyectiva. Si $n - 1 \geq 2$, tenemos que $\partial\overline{B_r(P)}$ contiene una esfera bidimensional Σ . Por tanto la restricción de h a Σ es una función inyectiva y continua de Σ en \mathbb{R}^2 , lo que contradice el corolario 3.1.

□

Bibliografía

- [1] H. Alencar y W. Santos, Geometria das curvas planas, XII Escola de Geometria, Goiânia, Brasil, 2002.
- [2] P. V. ARAUJO, Geometria diferencial, Colección Matemática Universitaria, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1988.
- [3] A. C. ASPERTI Y F. MERCURI, Toplogía e Geometria das curvas planas, 13^o Coloquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1981.
- [4] M. P. DO CARMO, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, New York, 1976.
- [5] E. L. LIMA, Curso de Análise, Vol. I, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1979.
- [6] E. L. LIMA, Curso de Análise, Vol. II, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.