

**CONTROLADOR LQR PARA UN PROTOTIPO REAL DE PÉNDULO
INVERTIDO**

**AIDA ZARAY AMARÍS DE ARCO
MARIA TORCOROMA BENAVIDES ROBLES**



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2016**

**CONTROLADOR LQR PARA UN PROTOTIPO REAL DE PÉNDULO
INVERTIDO**

**AIDA ZARAY AMARÍS DE ARCO
MARIA TORCOROMA BENAVIDES ROBLES**

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
ingeniero electrónico**

**Director
RICARDO ALZATE CASTAÑO,
PhD. Computer Science and Automation**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA**

2016

DEDICATORIAS

A mi familia, en especial a mis padres Janeth y Adaulfo y a mi hermanito David que han sido el motor de mi vida, los promotores de este sueño y de quienes siempre he recibido su apoyo incondicional y me han guiado con su amor en este proceso.

A mi novio Carlos y a su familia, Doña Clara, Don Joaquín y Doña Arminda por su amor y apoyo incondicional.

A mi amiga y compañera de proyecto Torquito, por estos años de amistad, por todo su apoyo, y paciencia.

A todos mis amigos quienes me brindaron su amistad, me apoyaron y con quienes compartí este proceso. De cada uno me llevo grandes enseñanzas y magnificas experiencias.

Finalmente, a Max mi gato, por acompañarme en las noches largas y arduas de trabajo.

AIDA AMARÍS DE ARCO

Dedico este trabajo a mi familia, quien siempre creyó en mí, y quien me recordó que hasta las cosas malas ocurren por una buena razón.

MARIA BENAVIDES ROBLES

AGRADECIMIENTOS

Agradezco primeramente a Dios quien me permitió emprender este camino y me guío con su amor llenándome de sabiduría para culminar con éxito esta etapa.

A la Universidad Industrial de Santander y a la escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y Telecomunicaciones por permitirme crecer profesionalmente.

A nuestro director Ph.D. Ricardo Alzate Castaño por brindarnos su tiempo, apoyo, dedicación, experiencia y por guiarnos con paciencia durante este proceso.

Al Profesor y Amigo el Dr. Iván Amaya por habernos brindado su apoyo, colaboración y asesoría lo cual fue de vital importancia para la realización de este trabajo de grado.

Al Señor Jesús Hernando Benavides quien con su creatividad y experiencia nos ayudó con la construcción del prototipo de péndulo invertido, lo cual nos permitió desarrollar en su totalidad el presente trabajo de grado.

A Liliana y a Jairo quienes siempre estuvieron de manera muy amable, facilitándonos todos los implementos necesarios para realizar pruebas.

A todos los profesores y compañeros quienes desde su experiencia de una u otra forma nos aportaron con su conocimiento.

AIDA AMARÍS DE ARCO

AGRADECIMIENTOS

A nuestro director y amigo, Doctor Ricardo Alzate, quien con paciencia escuchó las malas respuesta y valoró las acertadas. Gracias por compartir con nosotros su conocimiento y llevarnos por un camino de nuevas experiencias...

Gracias a mi familia por animarme a continuar. Incluso aquellos días en que no tenía fuerza, se convirtieron en la mía...

A las personas que, de cerca y de lejos, nos acompañaron de alguna forma en este caminar; que escucharon las malas noticias y siempre nos dieron una voz de aliento. Aunque fue difícil, también fue divertido. Porque a veces los fracasos inundan los proyectos con agua, o crean combustiones espontáneas, enseñándonos las formas incorrectas de hacer algo...

Quiero dar gracias especiales a Jesús Hernando Benavides, quien con su talento unió nuestras ideas para darle forma a un sueño...

Al doctor Iván Amaya por ser apoyo moral, académico y buena fuente de ideas.

Por enseñarnos el lado positivo del bullying, que puede ser fuente de energía limpia y amigable con el ambiente. También por las galletas en los días largos de trabajo.

MARIA BENAVIDES ROBLES

CONTENIDO

	Pag.
INTRODUCCIÓN	17
1. PLANTEAMIENTO Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	20
1.1. OBJETIVOS	20
1.1.1 Objetivo general. Implementar una estrategia de control cuadrático lineal LQR sobre un prototipo de péndulo invertido.	20
1.1.2. Objetivos específicos	21
2. OPTIMALIDAD DE UN PÉNDULO INVERTIDO	22
2.1. SISTEMA DE PÉNDULO INVERTIDO	22
2.1.1. Aplicaciones para un péndulo invertido.....	23
2.2. ESTABILIDAD DE UN SISTEMA DINÁMICO	24
2.3. OPTIMALIDAD Y CONTROL ÓPTIMO.....	26
2.3.1. Ilustración del concepto de optimalidad.	26
2.3.2. Control óptimo cuadrático	29
2.3.3. Ilustración del control LQR.....	31
2.4. PROTOTIPO DE PÉNDULO EN LABORATORIO	34
2.4.1. Dispositivo de actuación..	35
2.4.2. Dispositivo de sensado del carro	36
2.4.3. Dispositivo de sensado del del vástago..	37
2.4.4. Dispositivo de control.....	38
2.4.5. Sistema final implementado.	43
3. MODELADO MATEMÁTICO E IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS	45
3.1. MODELO PARA PÉNDULO INVERTIDO	45
3.1.1. Movimiento rotacional del vástago.....	45
3.1.2. Movimiento traslacional del carro.....	47

3.2. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS	48
3.2.1. Parámetros del movimiento traslacional del carro.	49
3.2.2. Parámetros del movimiento rotacional del vástago.....	52
3.3. CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADOS	54
3.3.1. Representación en espacio de estados del sistema.:	55
3.3.2. Cálculo de ganancia de realimentación de estados.....	56
3.3.3. Cálculo para ganancia óptima de control LQR.....	59
4. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DEL CONTROL	63
4.1. MARCO EXPERIMENTAL	63
5. CONCLUSIONES	68
6. RECOMENDACIONES.....	71
6.1. TRABAJO FUTURO	71
REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍA	73
BIBLIOGRAFÍA	78
ANEXOS.....	83

LISTA DE FIGURAS

	Pag.
Figura 1. Péndulo invertido traslacional	22
Figura 2. Sistema de transporte unipersonal	24
Figura 3. Sistema para ilustración de optimalidad	26
Figura 4. Ilustración para medida de optimalidad	28
Figura 5. Ilustración respuesta LQR	32
Figura 6. Ilustración esfuerzo control LQR.....	33
Figura 7. Ilustración para medida de optimalidad LQR	34
Figura 8. Diagrama de bloques para prototipo de laboratorio	35
Figura 9. Driver de motor	36
Figura 10. Acople mecánico entre encoder y motor.....	37
Figura 11. Vástago del péndulo	37
Figura 12. Acople entre vástago y potenciómetro lineal	38
Figura 13. Dispositivo de control empleado	39
Figura 14. Esquema general para algoritmo de control	40
Figura 15. Ilustración para interfaz de captura de datos	43
Figura 16. Ilustración de captura experimental para posición del vástago.....	44
Figura 17. Prototipo de laboratorio implementado	44
Figura 18. Diagrama de cuerpo libre para rotación del vástago	46
Figura 19. Diagrama de cuerpo libre para movimiento del carro	48
Figura 20. Validación para posición de traslación.....	51
Figura 21. Validación para velocidad de traslación.....	52
Figura 22. Validación para posición de rotación	53
Figura 23. Validación para velocidad de rotación	54
Figura 24. Simulación sistema regulado por realimentación de estados	58
Figura 25. Simulación sistema regulado por control LQR.....	61

Figura 26. Cálculo para índice de desempeño	62
Figura 27. Sistema regulado por realimentación de estados experimental.....	64
Figura 28. Sistema regulado por control LQR experimental	65
Figura 29. Sistema regulado por realimentación de estados sintonizada	66
Figura 30. Cálculo para índice de desempeño experimental	67

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Características del L298N.....	35
Tabla 2. Características Arduino MEGA	39
Tabla 3. Parámetros de traslación identificados para $u = 200$	50
Tabla 4. Parámetros de traslación definitivos y equivalencias.....	50
Tabla 5. Parámetros de rotación.....	53

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO A – IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS EN MATLAB.....	83
ANEXO B – FUNCIÓN ODE45 DE MATLAB.....	88
ANEXO C. CÓDIGOS DE SIMULACIÓN Y EJECUCIÓN.....	91

RESUMEN

TÍTULO: CONTROLADOR LQR PARA UN PROTOTIPO REAL DE PÉNDULO INVERTIDO*.

AUTORES: AIDA ZARAY AMARIS DE ARCO, MARIA TORCOROMA BENAVIDES ROBLES**.

PALABRAS CLAVE: Control LQR, Índice de Desempeño Cuadrático, Implementación Hardware, Péndulo Invertido Traslacional, Microcontrolador Arduino.

DESCRIPCIÓN:

El presente proyecto de grado aborda el diseño y la implementación, por simulación y en hardware, para una estrategia de control LQR (Linear Quadratic Regulator) que regula hacia el equilibrio en el origen, en otras palabras, hacia cero, el estado de un sistema de péndulo invertido traslacional. Se realiza la adecuación e instrumentación de un mecanismo de traslación acoplado a un vástago. Posterior a esto se obtienen las ecuaciones dinámicas que determinan el modelo matemático del sistema y se desarrollan rutinas experimentales y numéricas para determinar el conjunto de parámetros que mejor se ajustan al comportamiento del modelo. Con esta información se procede a realizar el cálculo y simulación para la ganancia de realimentación de estados óptima (LQR) que regula el sistema hacia el equilibrio, minimizando un índice de desempeño cuadrático. Finalmente, se realizan pruebas en laboratorio sobre el prototipo construido, permitiendo observar un comportamiento oscilante alrededor de la condición deseada de equilibrio como consecuencia de fenómenos de saturación asociados a problemas de escalado de señales en los algoritmos de proceso de datos y limitaciones físicas del mismo (ejecutados en un Microcontrolador Arduino de 8 bits). Como trabajo complementario se incluye el rediseño de los algoritmos de control a partir de un sistema embebido apropiado para explotar los recursos del hardware de proceso disponible.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ingenierías Físico-mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.
Director: Ricardo Alzate Castaño, Ph.D.

ABSTRACT

TITLE: LQR CONTROLLER FOR A REAL PROTOTYPE OF INVERTED PENDULUM*.

AUTHORS: AIDA ZARAY AMARIS DE ARCO, MARIA TORCOROMA BENAVIDES ROBLES**.

KEY WORDS: LQR Controller, Quadratic Performance Index, Hardware Implementation, Translational Inverted Pendulum, Arduino Microcontroller.

DESCRIPTION:

This work presents the design and implementation in both, software and hardware, of a linear quadratic regulator (LQR) controller, whose objective is to balance a translational inverted pendulum. Balance is achieved at the origin (i.e. when the shaft is standing upright). A translational mechanism, coupled to a rotating shaft, has been conditioned and instrumented. Furthermore, equations for the dynamics of the system are derived in the following way: a free body analysis is carried out for each component separately (i.e. shaft and car), and then merged together to derive a single model. Parameter identification is performed through experimental and numerical routines. Using the above, optimal state-feedback gains are calculated and simulated via minimization of a quadratic performance index. Finally, experiments carried out on the prototype, showed oscillations around the desired equilibrium values (i.e. around zero). This is due to saturation phenomena when scaling data signals and because of physical limitations of the system (8 bit Arduino Microcontroller). Thus, and even though simulations evidenced a performance gain by using the LQR controller, it was not possible to validate this claim experimentally. Future work should focus on a careful redesign of signal processing routines to better exploit the capabilities of the embedded system.

* Degree work

** Physico-Mechanical Engineering Faculty. School of Electrical Engineering. Supervisor: Ricardo Alzate Castaño, Ph.D.

INTRODUCCIÓN

El siglo XXI es indiscutiblemente la era de la innovación. Múltiples adelantos tecnológicos permiten al ser humano hacer más viable su existencia en el planeta, impactando campos como las comunicaciones, el transporte, la agricultura, la vivienda, la salud y el medioambiente. Todo esto crea una necesidad para las entidades dedicadas a la formación de nuevos profesionales en áreas de aplicación y generación de tecnología, por mantener un contacto permanente con soluciones de vanguardia. En particular, los campos de la automatización y el control han crecido vertiginosamente en la última década, incorporando herramientas como las comunicaciones inalámbricas, el internet o los sistemas embebidos, para llevar a cabo su fin en entornos de aplicación cada vez más complejos, en tópicos de alto interés y con multiplicidad de aplicaciones como son las redes inteligentes (Smart Grids), las ciudades inteligentes (Smart Cities) o los sistemas autónomos de transporte.

En este contexto, existen compañías como: Siemens AG, Rockwell Automation, Honeywell, ABB y Scheider Electric, entre otras, reconocidas por el desarrollo de tecnologías aplicables en entornos industriales. Sin embargo, el costo para estos equipos es consistente con el sector productivo sobre el cual se emplean, como pueden ser la industria de alimentos, Oil & Gas, minería, metalmecánica, etc., haciendo que a pesar de contarse con programas que otorgan descuentos especiales para universidades, sea en general considerablemente alto el gasto que debe asumir una entidad educativa para acceder a dichas tecnologías, bien sea por adquisición o actualización de equipos, efecto que se magnifica en latitudes latinoamericanas y otras regiones del denominado “tercer mundo”. Como consecuencia de ello, se han desarrollado algunas iniciativas que buscan la creación de laboratorios de bajo costo para universidades. En particular, es

conveniente hacer referencia al trabajo del profesor Kevin Passino en la Universidad Estatal de Ohio - Estados Unidos, a través de su programa weLAB: Low-Cost Engineering Laboratory Project (<https://welab.engineering.osu.edu/>). Otras opciones incluyen laboratorios virtuales como en [1, 2] aportando recursos para formación a distancia, junto con soluciones modulares de bajo costo [3] y propósito general, basadas por ejemplo en arquitecturas LEGO [4, 5].

Al respecto, la Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones (E3T) de la Universidad Industrial de Santander dispone de un espacio (aula 209 – edificio 27: Laboratorio de Alta Tensión) destinado para la realización de actividades prácticas en las asignaturas afines al Control y a la Instrumentación Electrónica. Actualmente el laboratorio cuenta con tres plantas, que se han adecuado con los recursos disponibles, para realizar tareas de análisis y control en: un sistema de péndulo invertido traslacional [6], un sistema de tanques en cascada [7] y un motor de corriente alterna [8]. Otros trabajos desarrollados en afinidad con el laboratorio incluyen “Planeación, diseño y realización del laboratorio de instrumentación electrónica para la E3T” [9], “Sistema de gestión para un prototipo de sistema SCADA en el laboratorio de instrumentación electrónica de la E3T” [10] y “Diseño del proyecto para implementación de una sala TIA (totally integrated automation) y adaptación de un proceso industrial para desarrollo de prácticas de entrenamiento en las áreas de instrumentación, automatización y control” [11].

De otro lado, debido al aumento de la complejidad que presentan los sistemas actuales en ingeniería se hace necesaria la elección de técnicas de análisis y diseño, que permitan obtener mejores aproximaciones de los modelos y que faciliten el desarrollo de controladores que respondan mejor a las exigencias propuestas. Entre los sistemas que se han estudiado en la aplicación de nuevas técnicas de control sobresale el péndulo invertido debido a que es un sistema inestable y las ecuaciones que modelan su comportamiento son no-lineales [12].

Algunas aplicaciones del péndulo están relacionadas con medios de transporte personal como el Segway, y sensores sísmicos como el expuesto en [13]. Los métodos tradicionales de control en el dominio de la frecuencia no aportan información sobre la dinámica interna del sistema [14]. Para suplir estas falencias existen otras herramientas que hacen parte de la teoría de control moderno entre las que se encuentra el diseño de controladores mediante métodos en el espacio de estados. De los trabajos que se han realizado alrededor de este tema sobresalen a nivel de estrategias de control: [14] debido a que hace una comparación de diferentes estrategias de control clásico y moderno tales como controlador proporcional, integral y derivativo (PID), realimentación de estados y regulador cuadrático lineal (LQR) sobre un péndulo invertido rotatorio; [15] presenta una implementación de control moderna mediante el posicionamiento de polos con ayuda del método de Ackermann. A nivel nacional [16] presenta el modelo por medio de dinámicas de Lagrange y el control se basa en las técnicas de realimentación de estados tipo regulador y servomecanismo. Entre los trabajos realizados en la Universidad Industrial de Santander [17] expone la obtención del modelo, el diseño y construcción de un banco de laboratorio de péndulo invertido; [18] retoma el estudio del péndulo invertido y muestra el diseño y la implementación del sistema controlado mediante lógica difusa; [6] reacondiciona la capacidad funcional del prototipo experimental y realiza sobre el mismo un control por realimentación de estados empleando un microcontrolador de 8 bits. En particular, el presente proyecto de grado propone un trabajo complementario para los desarrollos presentados en [6], buscando mejorar el desempeño del sistema controlado empleando la técnica LQR.

1. PLANTEAMIENTO Y DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

La adecuación de una infraestructura para la realización de prácticas de laboratorio en el área de control y automatización representa costos elevados, si se piensa en desarrollos con equipos de envergadura industrial. Como alternativa, es posible proponer la construcción de bancos de laboratorio individuales que permitan ejemplificar, a escala, problemas encontrados en la industria, con un costo inferior y que posteriormente puedan ser replicados, constituyendo a su vez una manera didáctica de enfrentar al estudiante con problemáticas del mundo real. En este caso específico, a través de la implementación de un prototipo de laboratorio se busca responder a inquietudes como: ¿Qué es el control LQR? ¿Es posible aplicar dicha técnica sobre un péndulo invertido? ¿Cómo se deben configurar los elementos de sensado, actuación y control en un sistema para implementar experimentalmente un control LQR?

El presente proyecto de grado busca realizar aportes hacia la formación de recurso humano en uso de técnicas avanzadas de control, incrementando la capacidad potencial de la E3T y el grupo de investigación CEMOS en el área de supervisión experta, automatización y control, con base en los objetivos propuestos a continuación.

1.1. OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo general. Implementar una estrategia de control cuadrático lineal LQR sobre un prototipo de péndulo invertido.

1.1.2 Objetivos específicos

- Calcular los parámetros para un controlador del tipo LQR, aplicado en la regulación del estado en un péndulo invertido traslacional.
- Analizar el comportamiento del sistema controlado empleando herramientas de simulación
- Sintetizar circuitalmente la estrategia de control propuesta
- Validar el desempeño del sistema controlado a partir de pruebas sobre un prototipo de laboratorio.

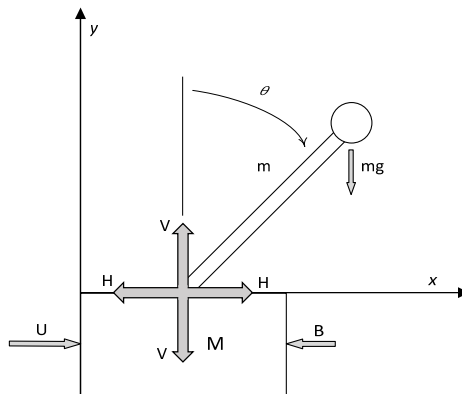
2. OPTIMALIDAD DE UN PÉNDULO INVERTIDO

El presente Capítulo define y describe un sistema de péndulo invertido desde una perspectiva general a partir de aplicaciones. Posteriormente, aborda las bases conceptuales de la optimización y el control óptimo, para justificar su aplicación en el caso de estudio considerado. Finalmente, se realiza una descripción del prototipo de laboratorio implementado para verificar las acciones de control ilustradas en Capítulos posteriores.

2.1. SISTEMA DE PÉNDULO INVERTIDO

Un sistema de péndulo invertido es esencialmente una simplificación del movimiento rotacional de una partícula, para la cual la posición deseada es un equilibrio inestable influenciado por la acción de la gravedad. Existe un caso particular donde este movimiento de rotación depende de manera directa en la traslación de su eje. A este sistema se le denomina péndulo invertido traslacional y es ilustrado en la Figura. 1.

Figura 1. Péndulo invertido traslacional



De esta manera, la dinámica del sistema queda descrita en todo instante a partir del valor de ángulo θ , buscando mantener la partícula en una posición perpendicular con respecto al plano de referencia horizontal.

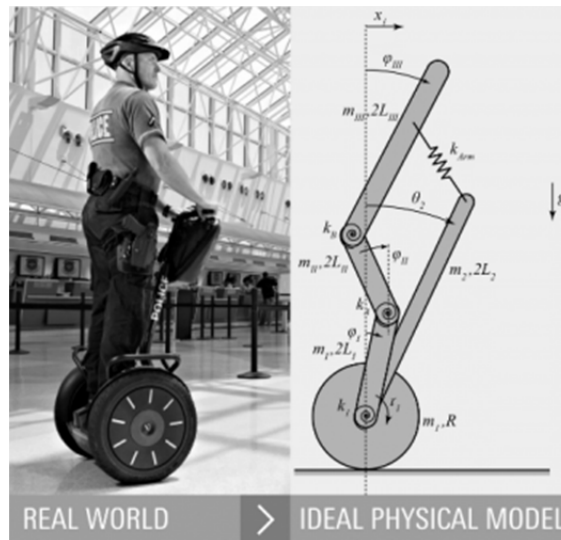
Existen muchos problemas de ingeniería que pueden ser modelados y estudiados como un sistema de péndulo invertido, haciendo relevante el análisis para esta clase particular de modelo.

2.1.1. Aplicaciones para un péndulo invertido. El problema fundamental que se resuelve con un péndulo invertido es conservar la posición de equilibrio angular, a pesar de la acción de perturbaciones y los efectos de la fuerza de gravedad. Esta situación se presenta en multiplicidad de aplicaciones cotidianas, permitiendo mencionar como ejemplos:

- La comprensión de la marcha humana, a través de lo cual es posible estudiar la distribución en el espacio del cuerpo y las fuerzas que participan en procesos de locomoción. La información obtenida presenta utilidad en tareas de rehabilitación, desarrollo de prótesis ortopédicas y avances tecnológicos a nivel de robótica bípeda [19].
- Las trayectorias de vuelo en aviones y otros vehículos de transporte aéreo, donde las coordenadas en las direcciones del movimiento pueden estudiarse como cuerpos rotativos afectados por la acción de la gravedad. En la actualidad se destacan, además de los desarrollos comerciales en tecnología aeroespacial, soluciones a nivel de vehículos aéreos no tripulados (o drones) aplicados en tareas de vigilancia e inspección remota, con posibilidad de uso en otros medios de propagación como pueden ser el agua o el espacio sideral [20, 21, 22].

- Prototipos de transporte unipersonal como el Segway (ver Figura. 2), en los cuales el balance del cuerpo permite maniobrar y controlar la velocidad de desplazamiento del vehículo. Este tipo de tecnologías buscan atender la demanda mundial por constituir medios de transporte seguros, eficientes y amigables con el medio ambiente [23].

Figura 2. Sistema de transporte unipersonal



Fuente: Wikipedia.org

2.2. ESTABILIDAD DE UN SISTEMA DINÁMICO

La estabilidad de un sistema puede definirse de manera simple en términos de su energía. Así, un sistema es estable si para un estímulo (o entrada) limitado responde de manera limitada. En caso contrario se considera inestable. Esto es lo que tradicionalmente se conoce como BIBO (bounded-input-bounded-output) estabilidad.

Desde un punto de vista más general, Alexander Lyapunov sugirió el siguiente teorema para definir la estabilidad de los sistemas dinámicos [24]:

Teorema de estabilidad de Lyapunov

Suponga un sistema dinámico:

$$\dot{x} = f(x, t),$$

donde f es un campo vectorial continuo, pero no necesariamente lineal del vector de estados x y tal que:

$$f(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0},$$

para todo $t \geq t_0$; es decir, el sistema posee un equilibrio en el origen. Dicho equilibrio es uniforme y asintóticamente estable en general, si existe una función escalar $V(x, t)$ que tenga primeras derivadas parciales continuas y satisfaga las siguientes condiciones:

1. $V(x, t)$ es definida positiva
2. $\dot{V}(x, t)$ es semidefinida negativa
3. $\dot{V}(\phi(t; x_0, t_0), t)$ no se desvanece idénticamente en $t \geq t_0$ para cualquier t_0 y $x_0 \neq \mathbf{0}$, en donde $\phi(t; x_0, t_0)$ representa la trayectoria o solución que empieza a partir de x_0 en t_0 .

La versión de este teorema para sistemas lineales es la siguiente [24]:

Considere el sistema descrito mediante:

$$\dot{x} = Ax,$$

donde x es un vector de estado (de dimensión n) y A es una matriz de coeficientes constantes no singular de $n \times n$. Una condición necesaria y suficiente para que el estado de equilibrio $x = \mathbf{0}$ sea asintóticamente estable en general, es que dada cualquier matriz Q hermitiana (o simétrica real) definida positiva (es decir tal que todos sus autovalores sean positivos, también denotada como $Q > 0$), exista una matriz P hermitiana (o simétrica real) definida positiva, tal que

$$A^T P + P A = -Q.$$

La función escalar $x^T P x$ es una función de Lyapunov para este sistema.

2.3. OPTIMALIDAD Y CONTROL ÓPTIMO

Para medir el desempeño de una determinada labor se debe establecer un marco de referencia. Esto permite definir cuándo dicho desempeño es bueno y cuándo no lo es, además de admitir situaciones intermedias y más aún extremas.

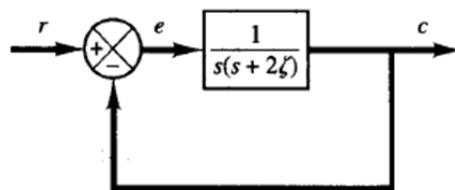
Existe un caso particular para el cuál la medida desempeño se asocia con un valor mínimo (o máximo). Si esta medida (o índice) de desempeño depende de cierto parámetro, fijo o variable, su determinación explícita constituye un problema de optimización.

Problemas de optimización comúnmente documentados en la literatura incluyen entre otros, índices de desempeño como el tiempo mínimo, el error mínimo o el esfuerzo mínimo [25].

2.3.1. Ilustración del concepto de optimalidad. Para ilustrar la optimalidad, se considera el problema (tomado de [24, p. 918]) de calcular, para el sistema de la Figura. 3, el factor de amortiguamiento relativo $\zeta > 0$ que minimiza el índice de desempeño:

$$J = \int_{0+}^{\infty} (e^2 + \mu \dot{e}^2) dt; \quad \mu > 0 \quad (1)$$

Figura 3. Sistema para ilustración de optimalidad



Fuente: K. Ogata. Ingeniería de control moderna. PEARSON EDUCATION.1998.

Para ello, se reescribe (1) de la forma:

$$J = \int_{0+}^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} dt \quad (2)$$

donde:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Operando las ecuaciones del diagrama de bloques es posible obtener:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Así, definiendo:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} = - \frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}),$$

siendo $\mathbf{P} > 0$, es posible determinar la siguiente solución analítica para J :

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} = -\mathbf{x}^T(\infty) \mathbf{P} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$$

Por tanto, dado que los valores característicos de \mathbf{A} en (3) tienen parte real negativa, ante una entrada escalón se cumple lo siguiente:

$$\mathbf{x}(\infty) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}(0+) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Asimismo, a partir de los resultados formulados en la Sección 2.2, la estabilidad del sistema implica:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q},$$

expresión que puede resolverse para \mathbf{P} , obteniendo:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1+\mu}{4\zeta} \end{bmatrix}.$$

El índice de desempeño J se obtiene mediante

$$J = \left(\zeta + \frac{1 + \mu}{4\zeta} \right) x_1^2(0+) + x_1(0+)x_2(0+) + \frac{1 + \mu}{4\zeta} x_2^2(0+)$$

Con estos resultados el índice de desempeño puede formularse como:

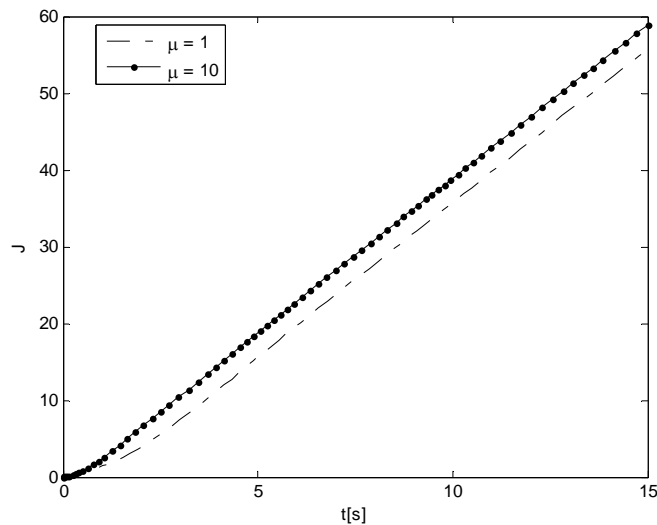
$$J = \left(\zeta + \frac{1 + \mu}{4\zeta} \right),$$

y por tanto, su mínimo valor al respecto del parámetro ζ se calcula a partir del teorema fundamental del cálculo (es decir, igualando a cero su derivada con respecto al parámetro), permitiendo obtener:

$$\zeta = \frac{\sqrt{1 + \mu}}{2}. \quad (4)$$

La Figura. 4 presenta simulaciones para la aproximación numérica de J en (2) ante dos valores de la constante μ . En el primer caso se calcula a partir de (4) el valor de μ óptimo para $\zeta = 0.7071$ (obteniendo $\mu = 1$). Posteriormente se superpone el cálculo para un valor diferente, permitiendo verificar que para este nuevo valor de μ el índice de desempeño no es un mínimo.

Figura 4. Ilustración para medida de optimalidad



2.3.2. Control óptimo cuadrático. El concepto de optimalidad puede extenderse a problemas de control óptimo cuando el parámetro de optimalidad involucra el esfuerzo de control u . Dentro de las muchas posibles formas de formular y resolver un problema de control óptimo, se considerará el caso particular de un sistema lineal sometido a control por realimentación de estados, para minimizar un índice de desempeño cuadrático de la forma:

$$J = \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (5)$$

siendo $Q \geq 0$ y $R > 0$ matrices hermitianas (matriz cuadrada con elementos complejos, igual a su transpuesta conjugada) o simétricas reales, que determinan respectivamente, el peso del vector de estados x y el vector de señales de control u .

Siendo $u = -Kx$ (control por realimentación de estados) el problema de control óptimo en este caso consiste en determinar la matriz K que minimiza J en (5) ante una selección establecida para Q y R .

La solución para este problema fue propuesta por Rudolf Emil Kalman a través del denominado regulador óptimo cuadrático, más conocido por su sigla en inglés como LQR (Linear-Quadratic Regulator). En este resultado se supone un sistema lineal y de tiempo invariante de la forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (6)$$

que bajo la acción de un control por realimentación de estados $u = -Kx$ puede ser reescrito como:

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x. \quad (7)$$

La función de costo (5) puede ser alternativamente formulado en el modo siguiente:

$$J = \int_0^T \mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt.$$

Por tanto, considerando:

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}),$$

siendo $\mathbf{P} > 0$, es posible calcular:

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^T [(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})] \mathbf{x},$$

de donde la igualdad:

$$-(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T \mathbf{R} \mathbf{K}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}), \quad (8)$$

debe satisfacerse para autovalores negativos de $(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})$ en (7), a partir de las condiciones de estabilidad establecidas en la Sección 2.2.

Procedimientos algebraicos [24] permiten obtener la siguiente expresión para la matriz de ganancia de realimentación de estados que minimiza el índice de desempeño cuadrático J en (5):

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}, \quad (9)$$

que reemplazada en (8) genera:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0, \quad (10)$$

conocida como la ecuación matricial reducida de Riccati.

El procedimiento de diseño del controlador LQR se resume como sigue:

- Dados $\mathbf{Q} \geq 0$ y $\mathbf{R} > 0$ se resuelve (10) para \mathbf{P} con datos del sistema (6);

- Si $P > 0$, existe una realimentación de estado óptima para el sistema con ganancia K calculada a partir de (9), que minimiza el índice de desempeño cuadrático en (5).

2.3.3. Ilustración del control LQR. El ejemplo de la Sección 2.3.1 será retomado en este apartado para ilustrar el cálculo del control LQR. En este caso se determinará la forzante óptima:

$$r = -Kx,$$

que permite minimizar el índice de desempeño:

$$J = \int_0^T (x^T Q x + r^T R r) dt, \quad (11)$$

siendo $Q \geq 0$ y R un escalar positivo. De esta manera, asumiendo como vector de estados:

$$x = \begin{bmatrix} c \\ \dot{c} \end{bmatrix},$$

el sistema puede ser escrito en la forma (6) como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r.$$

Por tanto, para $\zeta > 0$ el sistema es estable (los autovalores de la matriz A son negativos) y así, seleccionando:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$

que satisface $Q > 0$ para $\mu > 0$, es posible resolver (10) para:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix},$$

obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

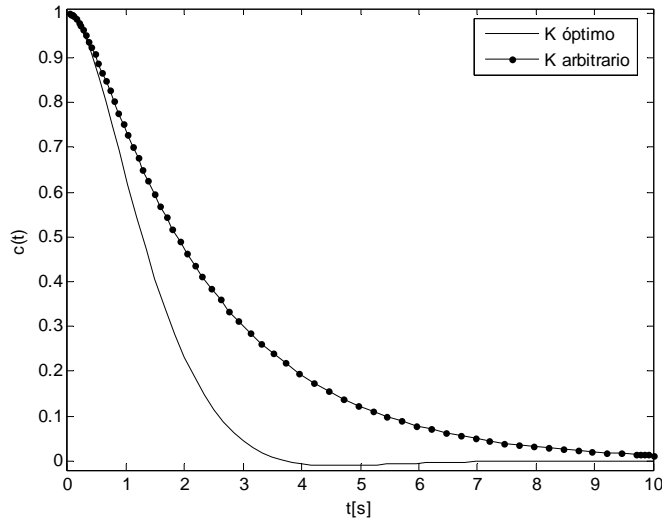
$$\begin{aligned} -p_{12}^2 - 2p_{12} + 1 &= 0 \\ p_{11} - p_{22} - p_{12}p_{22} - 2p_{12}\zeta &= 0 \\ 2p_{12} + \mu - 4p_{22}\zeta - p_{22}^2 &= 0, \end{aligned}$$

tras asumir $R = 1$. Seleccionando un factor deseado de $\zeta = 0.7071$ y $\mu = 1$ es posible resolver (9) para K como:

$$K = [0.414214 \quad 0.542482]. \quad (12)$$

En la Figura. 5 se observa la respuesta $c(t)$ del sistema regulado LQR. Para efectos de comparación, se realiza la simulación en MATLAB para dos diferentes valores de la ganancia de realimentación de estados K : el óptimo dado en (12) y un valor arbitrario no óptimo.

Figura 5. Ilustración respuesta LQR



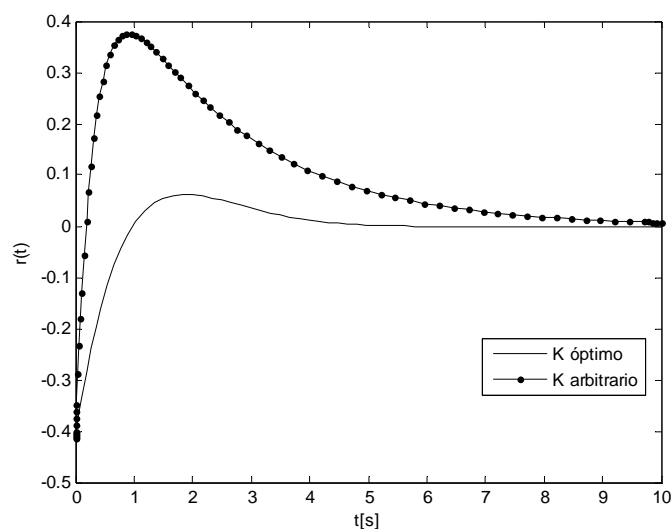
Como se observa, la respuesta óptima converge más rápidamente al valor de equilibrio en cero. Algo similar ocurre en la dinámica del comando de control $r(t)$ visualizado en la Figura. 6, donde el sobreimpulso es mayor para la ganancia no

óptima. Finalmente, el índice de desempeño en la Figura. 7 confirma un menor valor para J en (11) a partir de los cálculos propuestos.

En este punto es importante mencionar que el diseño de un regulador LQR se realiza con base en la minimización del costo J a partir de la penalización efectuada sobre el vector de estado y el esfuerzo de control, mediante elecciones apropiadas para las matrices Q y R . En términos prácticos, una aplicación como la presentada para el sistema de transporte unipersonal permitiría viajar una mayor distancia con la misma batería a través de una regulación óptima del torque entregado por los motores eléctricos del sistema, ante variaciones en la inclinación del terreno, por ejemplo.

La estabilidad del sistema regulado LQR está garantizada, con un margen de fase de al menos 60° y un margen de ganancia tendiente a infinito [26]. Por esta razón para su diseño no se proporciona información acerca de la localización de los polos deseados, como sí ocurre en un diseño de realimentación de estados tradicional.

Figura 6. Ilustración esfuerzo control LQR

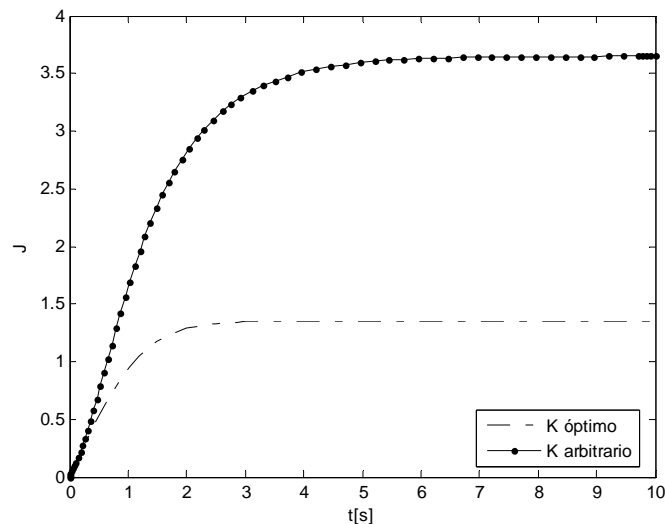


2.4. PROTOTIPO DE PÉNDULO EN LABORATORIO

Con el objetivo de verificar experimentalmente el efecto de un control LQR, se realizó la construcción y el acondicionamiento para un prototipo simple de péndulo invertido traslacional.

Como punto de partida, se intentó continuar con los desarrollos propuestos en [6]. Sin embargo, el estado actual de las tarjetas electrónicas empleadas para dicho proyecto no brindó las condiciones necesarias para una apropiada operación del sistema, justificando (por tiempos y costos) la necesidad de construir un nuevo prototipo.

Figura 7. Ilustración para medida de optimalidad LQR



Para ello, la solución más viable correspondió con la adecuación de un mecanismo de impresora en desuso. En particular, se aprovechó el movimiento traslacional del cartucho de tinta en un riel distribuido a lo largo del dispositivo.

La Figura. 8 presenta un diagrama de bloques general para el sistema constituido en laboratorio. A continuación se realiza una descripción puntual para cada etapa considerada.

2.4.1. Dispositivo de actuación. La forzante del sistema corresponde con el torque ejercido por un motor de 18 VDC, incorporado como parte del mecanismo del riel del cartucho de tinta. Para facilitar la utilización de dispositivos estándar, se optó por no emplear la circuitería original de la impresora, debido a lo poco accesible de esta. De esta manera, el gobierno del motor fue realizado a través de una tarjeta comercial de referencia DRIV-L298N con características mostradas en la Tabla 1, e ilustrada en la Figura. 9.

Figura 8. Diagrama de bloques para prototipo de laboratorio

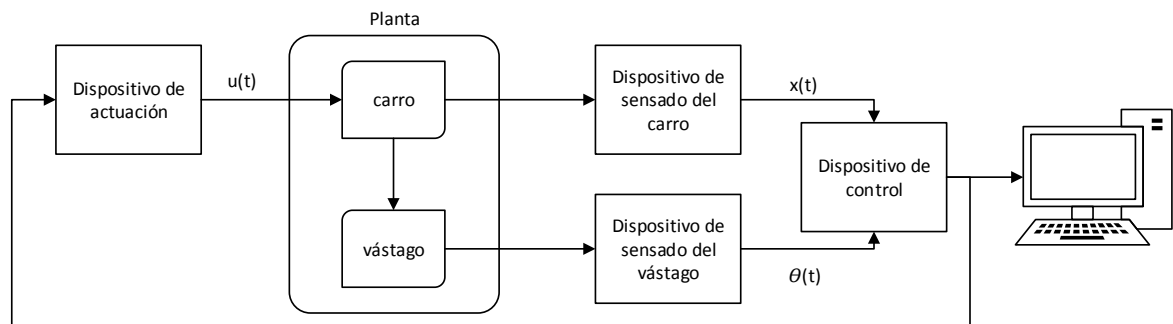


Tabla 1. Características del L298N

Voltaje de alimentación	12 [V]
Máxima corriente (por canal)	2 [A]
Salidas	2 motores DC
Voltaje de habilitación	5 [V]
Umbral de nivel bajo	0 a 1.5 [V]
Umbral de nivel alto	2.3 a 5 [V]
Máxima frecuencia de entrada (PWM)	40 [kHz]

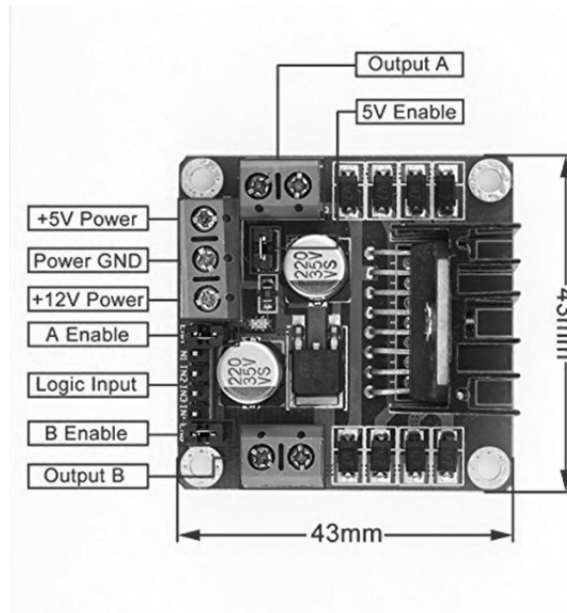
Fuente: www.st.com

2.4.2. Dispositivo de sensado del carro. La posición de traslación del carro (cartucho de tinta) fue obtenida a partir de los pulsos digitales entregados por un encoder incremental de referencia KY-040, con resolución de 30° por pulso (para 12 pulsos por revolución). Dicho dispositivo fue acoplado al eje del motor de la manera mostrada en la Figura. 10, en modo tal que pudiera registrarse un desplazamiento x medido en metros para cada movimiento a lo largo del riel, siguiendo la conversión siguiente:

$$x = n \frac{x}{T},$$

donde n es el conteo de pulsos del encoder desde una posición inicial, X es la longitud del riel (correspondiente con 19 cm) y T es la cantidad máxima de pulsos detectada en un recorrido completo (539 en total). Para disminuir el ruido en la señal entregada por el encoder se implementó un filtro digital con un ARDUINO UNO.

Figura 9. Driver de motor



Fuente: www.xcluma.com

2.4.3. Dispositivo de sensado del del vástago. Como vástago (o barra del péndulo) se empleó una vara de madera de longitud 19.5 cm y 4 mm de diámetro, acoplada en su extremo libre a un terminal de aluminio en forma de cilindro (ver Figura. 11) de masa 12 g .

Figura 10. Acople mecánico entre encoder y motor

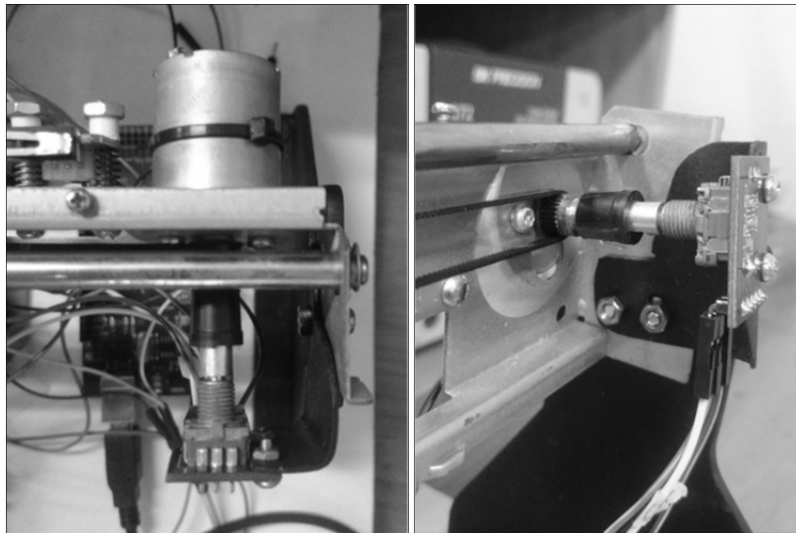


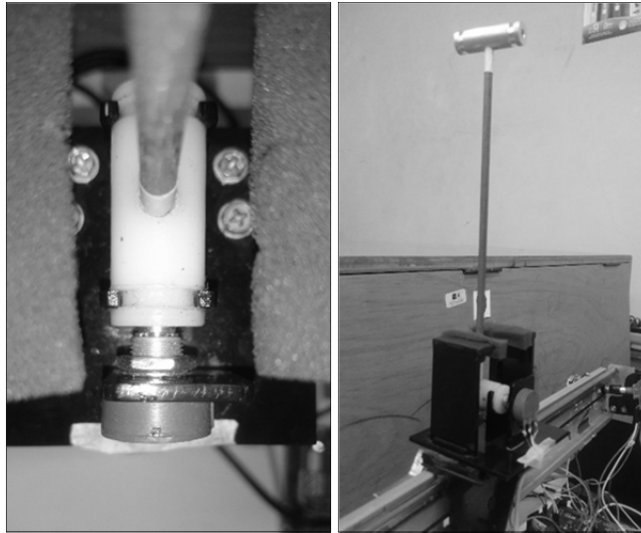
Figura 11. Vástago del péndulo



El otro extremo del vástago fue acoplado al eje de un potenciómetro lineal de $10\text{ k}\Omega$ y una vuelta, actuando como sensor del ángulo de rotación. Dicho potenciómetro forma parte de un circuito divisor de tensión, ajustado a niveles DC

para posterior proceso de datos. La Figura. 12 ilustra el acople entre el vástago y el potenciómetro lineal sobre el carro del péndulo.

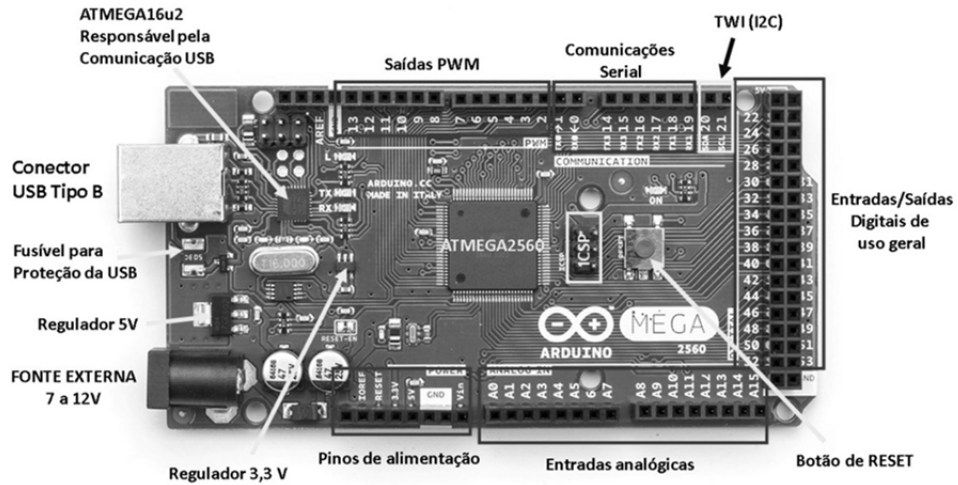
Figura 12. Acople entre vástago y potenciómetro lineal



2.4.4. Dispositivo de control. Para realizar el procesado de datos y las tareas de decisión (algoritmos de control), se empleó una tarjeta de desarrollo ARDUINO MEGA basada en el microcontrolador ATmega2560 de 8 bits. La Figura. 13 permite apreciar una imagen del dispositivo cuyas características principales se describen en la Tabla 2.

La interacción con el dispositivo (ver Figura. 8), se realiza a través de las entradas analógicas a partir de las cuales se reciben las señales de los sensores de posición del carro y ángulo del vástago del péndulo. La salida hacia el módulo de actuación, corresponde con una señal modulada en ancho de pulso (PWM), configurada para una frecuencia de 111 Hz. También se producen señales digitales para controlar el sentido de giro.

Figura 13. Dispositivo de control empleado



Fuente: www.embarcados.com.br

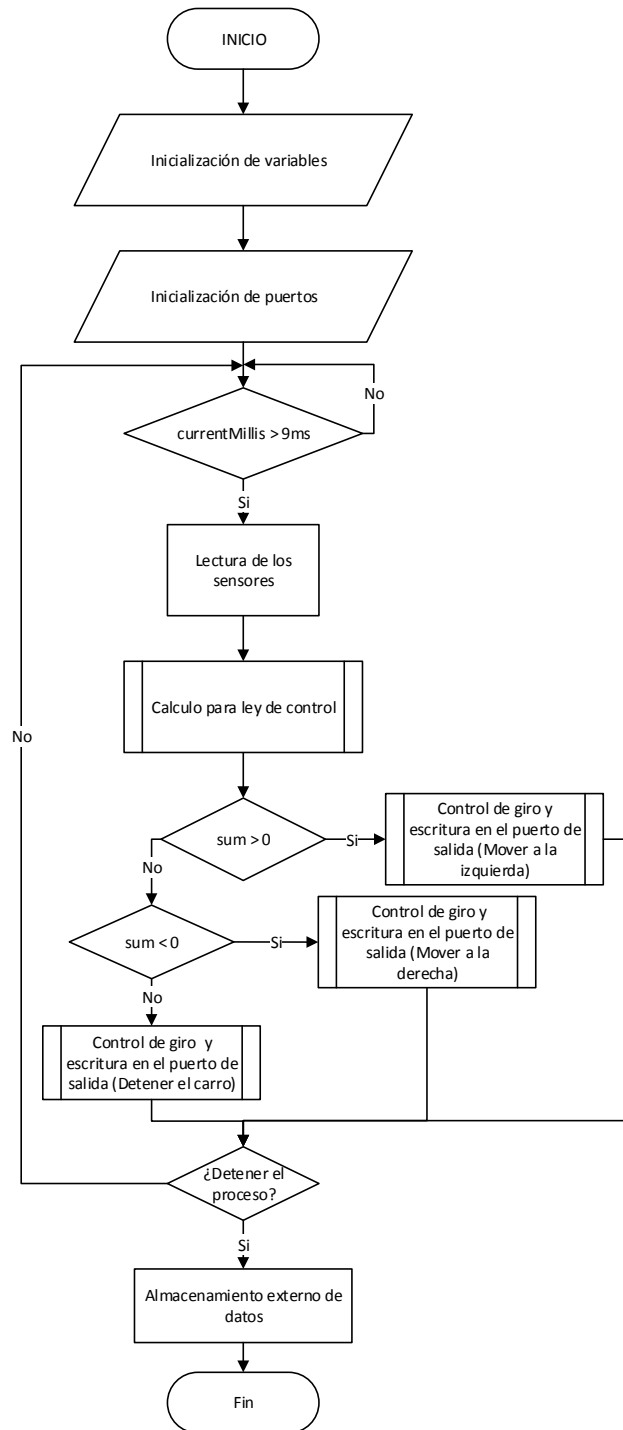
Tabla 2. Características Arduino MEGA

Voltaje de operación	5 V
Voltaje de entrada (recomendado)	7 - 12 V
Voltaje de entrada (limites)	6 - 20 V
Pines E/S Digitales	54 (15 con salida PWM)
Entradas analógicas	16
Corriente en DC E/S	40 mA
Memoria Flash	256 kB
Frecuencia Reloj	16 MHz

Fuente: www.arduino.cc

La rutina general para el algoritmo de decisión se presenta en el diagrama de flujos de la Figura. 14. Detalles particulares para cada etapa del algoritmo se presentan a continuación:

Figura 14. Esquema general para algoritmo de control



- **Inicialización de variables.** Asignación para ganancia de realimentación de estados $K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$; Variables para puertos de entrada: *izquierdo* = 18,

derecho = 19; Variables para puertos de salida: *motor1pin* = 7, *motor2pin* = 6, *enable* = 8; Variables para almacenar tiempo: *currentMillis* y *previousMillis*; Variable para almacenamiento de datos: *impActual*.

- **Inicialización de puertos.** Los principales puertos de entrada del sistema son: los pulsos digitales del encoder (pin 3 y pin 4); la señal de voltaje analógico que mide la posición del vástago (pin A1) y las señales digitales de los finales de carrera (*izquierdo*, *derecho*). Asimismo, como salidas se tienen: la señal PWM que se aplica al driver de motor (*u*); los pines digitales para dirección de giro (*motor1pin*, *motor2pin*) y el pin de habilitación (*enable*).
- **Lectura de sensores.** La medida de posición del carro se realiza a través de la variable *posicionActual* correspondiente con un conteo de pulsos desde los puertos 3 y 4. Posteriormente esta lectura es convertida a *cm* según explicado en la Sección 2.4.2. La medida de posición del vástago se realiza a través de la variable de tipo flotante denominada “*a*”. Esta lectura es procesada mediante una operación de promedio aritmético y el resultado convertido a grados sexagesimales. Las posiciones del carro y del vástago se almacenan en las variables *posicionPasada* y *posicionPasadaA*, respectivamente. Las velocidades lineal del carro y angular del vástago se calculan mediante el cociente entre dos lecturas sucesivas dividido por una unidad de muestreo, siendo almacenadas en las variables *velocidad* y *velocidadA*, respectivamente. Para verificar un apropiado muestreo de datos se seleccionó un retardo ajustado experimentalmente de 9 *ms*, empleando la función *micros(.)*, la cual almacena el conteo de tiempo en la variable *currentMillis*. A su vez, la variable *previousMillis* se encarga de almacenar el tiempo pasado. A partir de ello se realiza la diferencia entre los dos valores para determinar si ya han transcurrido 9 *ms*.

- **Cálculo para ley de control.** El tipo de control considerado en el presente trabajo de grado corresponde con la realimentación de estados definida en la Sección 2.3.2 y es calculada mediante el producto entre el vector de ganancias K y las lecturas de sensores y sus correspondientes derivadas. El resultado se almacena en una variable de tipo flotante denominada sum .
- **Control de giro y escritura en puerto de salida.** El signo de sum determina el sentido de giro. Si es positivo se escribe como combinación (motor1pin, motor2pin) = $(u, 0)$. En caso contrario la combinación cambia a $(0, u)$. Posteriormente, la magnitud de sum (correspondiente con la señal denominada u) se envía como ciclo útil de señal PWM a través de la función $analogWrite(.)$ a través de los puertos 6 y 7. Es conveniente mencionar que a nivel experimental el rango de ciclo útil para u correspondió con $[160, 255]$, evitando regiones de zona muerta y saturación.
- **Almacenamiento externo de datos.** Los procedimientos de lectura de sensores, cálculo para ley de control y control de giro se realizan de manera cíclica cada 9 ms. Cada vez que se completa un nuevo ciclo, la información contenida en las variables $posicionActual$, $velocidad$, $posicionactualA$, y $velocidadA$ son transferidas a una nueva variable del tipo string denominada $impActual$ y distribuida en una trama del modo siguiente:

$$posicionActual = velocidad = posicionactualA = velocidadA \backslash n,$$

considerando el símbolo “=” como operador de concatenación (seleccionado por los Autores). La escritura en puerto de salida se realiza una sola vez, cuando el usuario decida terminar el experimento. En el momento en que se activa el final del algoritmo (a través de un pulsador externo conectado al pin 24), la información contenida en $impActual$ es transferida a un PC a través de puerto serial (configurado a 9600 baudios), siendo desplegada en su pantalla

para posterior almacenamiento y análisis. La Figura. 15 muestra una captura de datos de ejemplo. Es importante mencionar que la capacidad de almacenamiento de datos ofrecida por el ARDUINO MEGA se limita a 256 kB, lo cual representa aproximadamente 2.6 s de captura de datos experimentales. Asimismo, la señal correspondiente con el esfuerzo de control u enviada al módulo de actuación PWM, no se exporta, sino que se reconstruye externamente a partir de la información del vector de estado del sistema, a causa de la limitada capacidad de almacenamiento. Para efectos de ilustración respecto a las formas de onda experimentales adquiridas, la Figura. 16 muestra el comportamiento en el tiempo para la posición angular del vástago, almacenada en la variable *posicionactualA*.

Figura 15. Ilustración para interfaz de captura de datos



2.4.5. Sistema final implementado. Finalmente, la Figura. 17 presenta el sistema implementado en laboratorio para el prototipo de péndulo invertido traslacional, de manera conforme a la descripción previamente mostrada en la Figura. 8.

Figura 16. Ilustración de captura experimental para posición del vástago

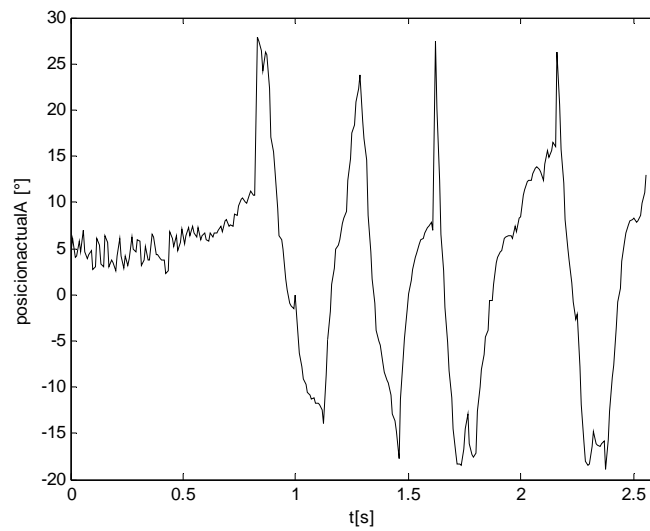
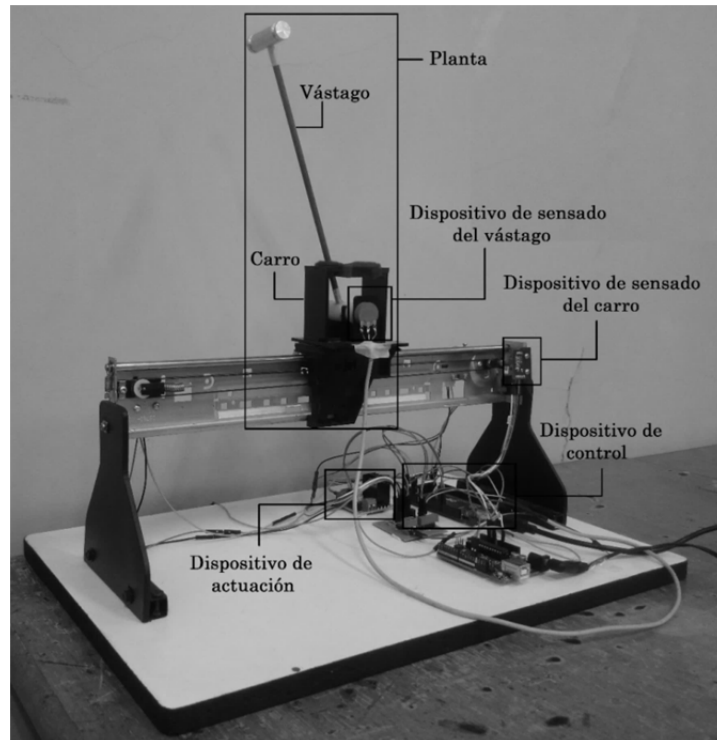


Figura 17. Prototipo de laboratorio implementado



3. MODELADO MATEMÁTICO E IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS

Posterior a definir las bases conceptuales del presente proyecto de grado, este Capítulo aborda el modelamiento matemático y la identificación de parámetros correspondientes para el sistema de péndulo invertido implementado en laboratorio. A partir de esta información, se procede a realizar el cálculo y la simulación para leyes de control por realimentación de estados y óptimo LQR, para efectuar regulación de los estados del sistema hacia cero. Las predicciones teóricas presentadas serán resultados preliminares a ser verificados en laboratorio en un Capítulo próximo.

3.1. MODELO PARA PÉNDULO INVERTIDO

Como ya mencionado en la Sección 2.1, un sistema de péndulo invertido traslacional puede entenderse como la combinación del movimiento traslacional del carro (cuya dinámica imprime una fuerza de torsión) y el movimiento rotacional del vástago alrededor de su eje (ver Figura. 1).

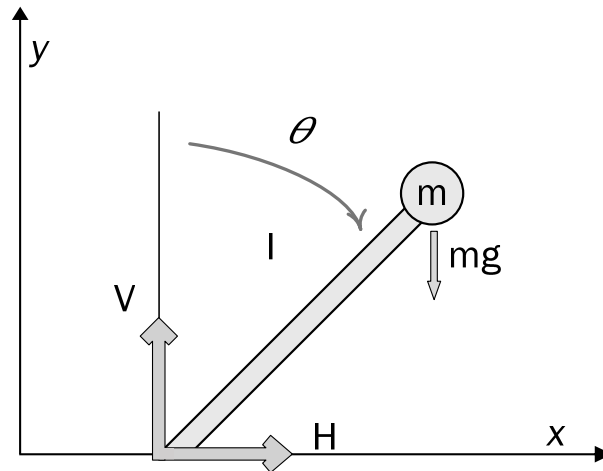
3.1.1. Movimiento rotacional del vástago. En la Figura. 18 se presenta el diagrama de cuerpo libre para el movimiento rotacional del vástago, sin fricción viscosa ni fuerza elástica. A partir de ello, la segunda ley de Newton de rotación puede formularse como:

$$J\ddot{\theta} = l(V \sin \theta - H \cos \theta), \quad (13)$$

siendo J el momento de inercia del vástago y l su longitud. Asimismo, V y H son, respectivamente, las componentes vertical y horizontal de la fuerza experimentada por el vástago en un plano perpendicular a su eje de rotación. El signo negativo

para H en la expresión, se debe a la convención utilizada en el sentido para esta fuerza que contribuye a un decremento del ángulo de rotación θ .

Figura 18. Diagrama de cuerpo libre para rotación del vástago



A partir del diagrama de cuerpo libre (Figura. 18) es posible escribir:

$$\frac{md^2}{dt^2}(x + l \sin \theta) = H \quad (14)$$

$$\frac{md^2}{dt^2}(l \cos \theta) + mg = V \quad (15)$$

donde m representa la masa del centro de gravedad del vástago y x el desplazamiento horizontal del centro de masa del carro.

Tomando en consideración pequeños desplazamientos angulares alrededor de la condición angular de equilibrio (péndulo erguido), es posible asumir:

$$\sin \theta \approx \theta; \cos \theta \approx 1$$

y por tanto, las expresiones (13)-(15) pueden ser reescritas como:

$$J\ddot{\theta} = l(V\theta - H) \quad (16)$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H \quad (17)$$

$$mg = V \quad (18)$$

Así, reemplazando (17) y (18) en (16) se obtiene:

$$J\ddot{\theta} = mgl\theta - lm(\ddot{x} + l\ddot{\theta}).$$

Dicha expresión puede a su vez ser reescrita como:

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} - mgl\theta = -lm\ddot{x}, \quad (19)$$

representando un movimiento forzado sin fricción viscosa, cuya forzante depende de la dinámica del carro, formulada como sigue.

3.1.2. Movimiento traslacional del carro. La Figura. 19 ilustra el diagrama de cuerpo libre para la dinámica del carro. A partir de ello, es posible formular la segunda ley de Newton del movimiento de traslación mediante:

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = U - H, \quad (20)$$

donde M representa el centro de masa del carro, b es el coeficiente de fricción viscosa, k es la constante de elasticidad, H es la componente horizontal de fuerza ejercida por el vástago al carro y U la forzante externa aplicada por el motor que impulsa el movimiento. La fuerza de fricción viscosa y elástica de resorte, representan oposición al movimiento de la masa y se denotan como B en la Figura. 19.

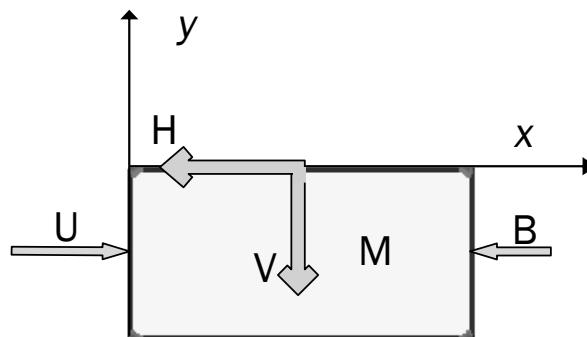
Por tanto, reemplazando (17) en (20) se obtiene:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + b\dot{x} + kx + m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) &= U \\ (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + kx &= U - ml\ddot{\theta}, \end{aligned} \quad (21)$$

representando un movimiento amortiguado, con forzante dependiente de la dinámica del vástago.

Las ecuaciones (19) y (21) constituyen el modelo dinámico del sistema de péndulo invertido traslacional.

Figura 19. Diagrama de cuerpo libre para movimiento del carro



3.2. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS

Una vez formuladas las ecuaciones que modelan la dinámica del sistema, es necesario determinar valores apropiados de sus parámetros de manera tal que sea posible replicar tanto como sea posible, el comportamiento del sistema físico real implementado en laboratorio.

Por tanto, se realizaron capturas para datos del sistema experimental empleando las configuraciones ilustradas en la Sección 2.4, permitiendo determinar valores de parámetro según explicado a continuación.

3.2.1. Parámetros del movimiento traslacional del carro. Inicialmente, se realizó un procedimiento de captura de datos para el movimiento traslacional del carro (solo, sin el vástago acoplado; es decir para $\theta = 0$) correspondiente con la medición del desplazamiento x a lo largo del riel, ante un valor constante del ciclo útil para la señal PWM de actuación u del motor dentro de su intervalo admisible. Posteriormente los registros de entrada y salida fueron procesados empleando la herramienta de identificación (IDENT) de MATLAB, ajustando los parámetros al siguiente modelo de función de transferencia de segundo orden:

$$H(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{K_p}{(1+T_{p1}s)(1+T_{p2}s)} = \frac{\left(\frac{K_p}{T_{p1}T_{p2}}\right)}{s^2 + \left(\frac{T_{p1}+T_{p2}}{T_{p1}T_{p2}}\right)s + \left(\frac{1}{T_{p1}T_{p2}}\right)}, \quad (22)$$

consistente con (21). El procedimiento realizado en IDENT es detallado en el Anexo A.

Es conveniente mencionar que fue necesario incorporar condiciones iniciales para los parámetros en el procedimiento de identificación, con el fin de mejorar el porcentaje de aproximación. Dichas condiciones iniciales fueron tomadas a partir de otro modelo de segundo orden, que si bien no encajaba con la descripción de (21), permitió lograr un buen ajuste para estos parámetros de inicio.

La Tabla 3 presenta resultados de estimación para tres repeticiones de $u = 200$, como valor medio del intervalo admisible en la señal de entrada. A partir de ello, se verifica un alto porcentaje de aproximación adicional a una tendencia en los valores calculados. En la Tabla 4, se incluyen como valores definitivos al promedio de dichos cálculos con correspondientes equivalencias respecto a la notación del modelo (21).

Tabla 3. Parámetros de traslación identificados para $u = 200$

Prueba	K_p	T_{p1}	T_{p2}	% ajuste
1	3117.8	3.2525×10^{-4}	2.1814×10^6	95.38
2	3117.8	3.2525×10^{-4}	2.1449×10^6	90.86
3	3117.8	3.2525×10^{-4}	1.9638×10^6	95.07

Tabla 4. Parámetros de traslación definitivos y equivalencias

Parámetro	Valor
K_p	3117.8
T_{p1}	3.2525×10^{-4}
T_{p2}	2.0967×10^6
k	$3.2073 \times 10^{-4} \text{ kg / s}^2$
b	$6.7249 \times 10^2 \text{ kg / s}$
M	0.2187 kg

En particular, considerando condiciones iniciales cero y una influencia nula del vástago en el experimento ($\theta = 0$ y $m = 0$), es posible determinar la siguiente función de transferencia a partir de (21):

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 M + b s + k} = \frac{\left(\frac{1}{M}\right)}{s^2 + \left(\frac{b}{M}\right)s + \left(\frac{k}{M}\right)}, \quad (23)$$

expresión que permite obtener las siguientes relaciones mediante igualación de coeficientes con (22):

$$k = \frac{1}{K_p}; \quad b = \frac{T_{p1} + T_{p2}}{K_p}; \quad M = \frac{T_{p1} T_{p2}}{K_p},$$

correspondientes con las equivalencias de la Tabla 4.

Las Figuras. 20 y 21 ilustran los gráficos de validación para la respuesta temporal del sistema en términos de su posición $x(t)$ y velocidad $\dot{x}(t)$ de traslación, respectivamente.

Para realizar las simulaciones del modelo (21) con los parámetros de la Tabla 4, se empleó la herramienta para solución numérica de ecuaciones diferenciales ODE de MATLAB. En particular, se empleó la función *ode45(.)* seleccionando como variables de estado (ver Anexo B) a la posición y a la velocidad del carro y como entrada un valor constante $u = 200$.

La validación de la posición (Figura. 20) muestra una réplica consistente entre los datos experimentales y las simulaciones, afectada por ruidos de medida. Dicho efecto se ve magnificado en la lectura de velocidad (Figura. 21), que debe ser filtrada a través de un promedio de 10 muestras, permitiendo suavizar los datos sensados a un valor medio consistente con las simulaciones del modelo identificado.

Figura 20. Validación para posición de traslación

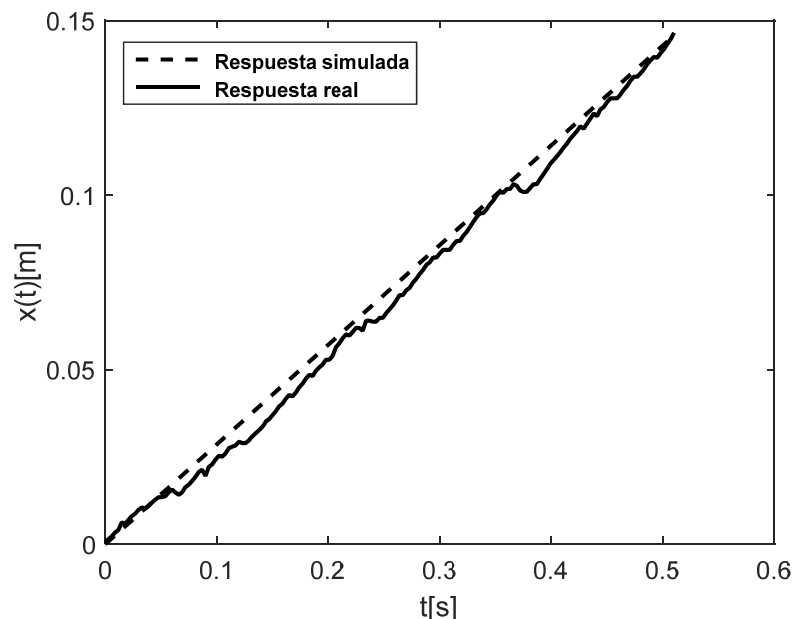
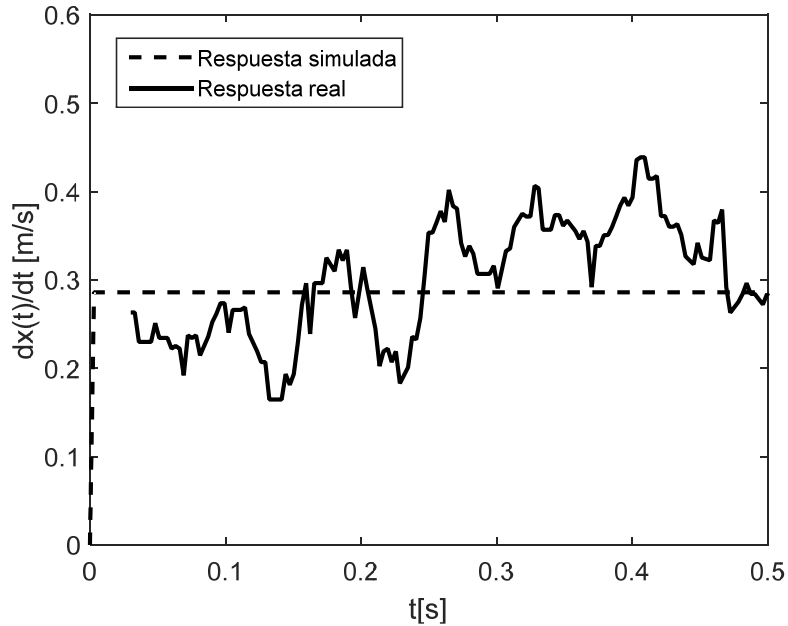


Figura 21. Validación para velocidad de traslación



3.2.2. Parámetros del movimiento rotacional del vástago. Los parámetros de (19) que describen la dinámica de rotación, incluyen cantidades conocidas como la constante de gravitación universal g y otras fácilmente medibles como la longitud l y la masa m del vástago (ver Tabla 5). Por tanto, el único parámetro desconocido corresponde con el momento de inercia J .

Para determinar este valor, se realizó un ajuste de curvas manual entre un registro de ángulo experimental para el péndulo en caída libre (con el carro detenido) y los datos generados por el modelo (19) sin forzante, para valores de parámetros conocidos y para valores tentativos de J . De esta manera, a partir de un procedimiento de ensayo y error fue posible obtener el valor final para J incluido en la Tabla 5 y los resultados de aproximación ilustrados en las Figuras. 22 y 23, respectivamente para la posición y velocidad angulares del vástago.

Tabla 5. Parámetros de rotación

Parámetro	Valor
g	9.8 m / s^2
l	0.195 m
m	0.014 kg
J	$3.5 \times 10^{-5} \text{ kg m}^2$

Figura 22. Validación para posición de rotación

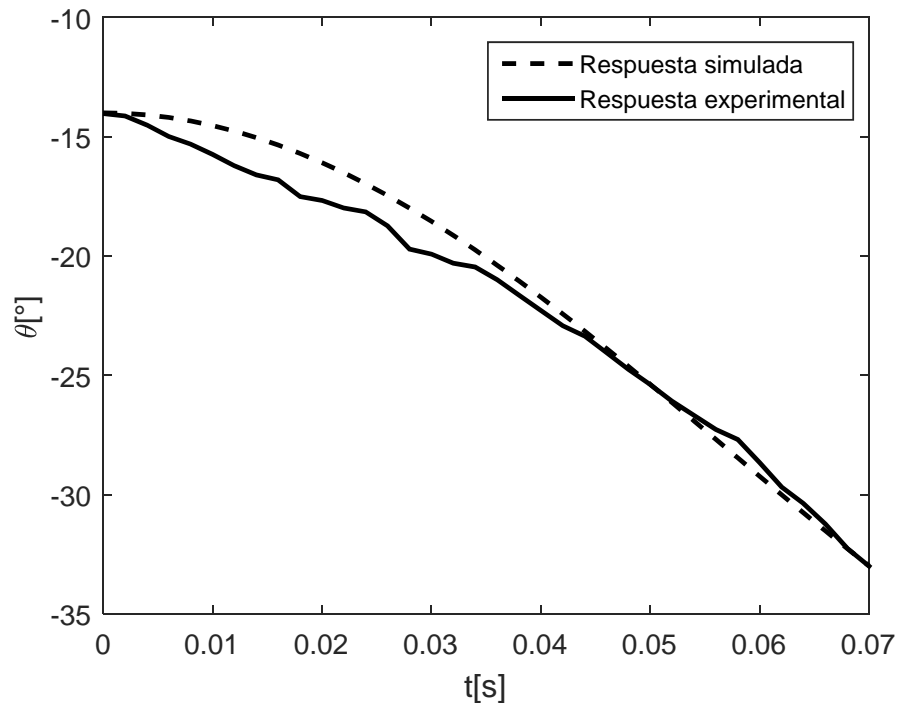
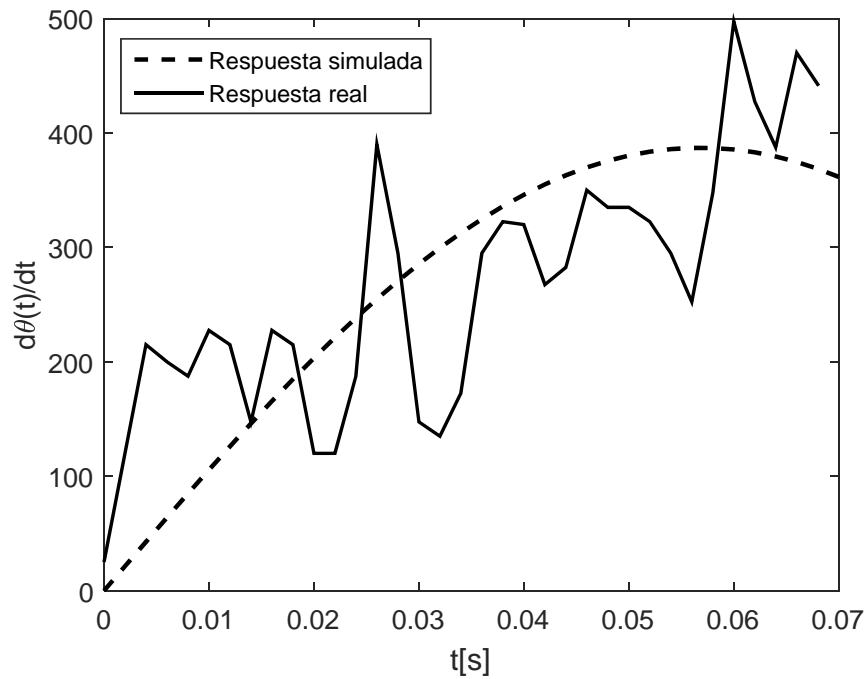


Figura 23. Validación para velocidad de rotación



3.3. CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADOS

El estado de un sistema, se define como el conjunto más pequeño de variables cuyo conocimiento permite determinar de manera exacta, el comportamiento de un sistema en un instante dado [24]. En su forma lineal de tiempo invariante, la dinámica de un sistema en el espacio de estados se representa a partir de su ecuación de estado (ver (6)).

Asimismo, la propiedad de controlabilidad de un sistema puede definirse como su capacidad para ser llevado de una condición inicial arbitraria a una condición final deseada, en un tiempo finito a través de un esfuerzo de control. Dicha propiedad se verifica en un sistema LTI a partir del rango de la matriz de controlabilidad [24]:

$$M = [A \ AB \ \dots \ A^{n-1}B], \quad (24)$$

siendo el sistema de estado completamente controlable, si el rango de M es completo (equivalentemente, si su determinante es diferente de cero).

Por tanto, para un sistema LTI que verifica la propiedad de controlabilidad completa del estado es posible calcular una ley de control:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (25)$$

para \mathbf{K} representando un vector de ganancias que ponderan los estados realimentados. Tras reemplazar (25) en la ecuación de estado se obtiene la ecuación (7), correspondiente con un sistema homogéneo (no forzado) que converge al reposo si los valores propios de la matriz:

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK}, \quad (26)$$

son estables (es decir, poseen parte real negativa). Por tanto, siendo \mathbf{A} y \mathbf{B} cantidades fijas en el sistema original, el grado de libertad que ajusta la dinámica del sistema controlado está en los valores del vector de ganancia \mathbf{K} , constituyendo el parámetro de control.

3.3.1. Representación en espacio de estados del sistema. Seleccionando como variables de estado a la posición $\theta(t)$ y velocidad $\dot{\theta}(t)$ angulares del vástago, al igual que a la posición $x(t)$ y velocidad $\dot{x}(t)$ traslacionales del carro; es decir:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

es posible escribir a partir de (19) y (21) la siguiente forma matricial, correspondiente con la ecuación de estado para el sistema de péndulo invertido traslacional:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(J+ml^2)k}{D} & \frac{(J+ml^2)b}{D} & \frac{(ml)^2g}{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mlk}{D} & \frac{-mlb}{D} & \frac{-(M+m)mlg}{D} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-(J+ml^2)}{D} \\ 0 \\ \frac{ml}{D} \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (29)$$

siendo:

$$D = m^2l^2 - (M + m)(J + ml^2).$$

3.3.2. Cálculo de ganancia de realimentación de estados. Reemplazando en (29) los parámetros identificados, se observa que los valores propios de la matriz A (calculados empleando la función `eig(.)` de MATLAB) no son todos de magnitud real negativa. Esto refleja el carácter inestable del sistema en lazo abierto.

Por tanto, es misión fundamental del controlador a ser diseñado realizar estabilización (regulación) del estado del sistema hacia cero. Para ello, se verifica la controlabilidad completa del estado empleando la instrucción:

```
>> rank(ctrb(A,B))
```

en la ventana de comandos de MATLAB, para determinar el rango (`rank(.)`) de la matriz de controlabilidad (`ctrb(.)`) del sistema en espacio de estados, definido en términos de las matrices A y B .

A partir de ello se verifica que el rango es 4 y por tanto el sistema de estado completamente controlable, garantizando la existencia de una matriz K de ganancia de realimentación de estados, que estabiliza el sistema.

Para calcular K se empleó la función `acker(.)` de MATLAB, ejecutando la instrucción:

```
>> acker (A,B,P)
```

en la ventana de comandos, siendo P un vector que almacena las raíces del polinomio característico deseado para el sistema controlado.

La selección de las raíces en P se realizó de manera tal que existiera una dinámica dominante de primer orden, con el objetivo de obtener una respuesta sobreamortiguada y con tiempo de establecimiento de alrededor de 1 s (siendo el tiempo de establecimiento aproximadamente cuatro constantes de tiempo y siendo la constante de tiempo el inverso de un polo dominante real). Por tanto, a partir de una elección arbitraria para los tres polos remanentes (conservando la dominancia del polo real) se constituye el vector de polos deseados:

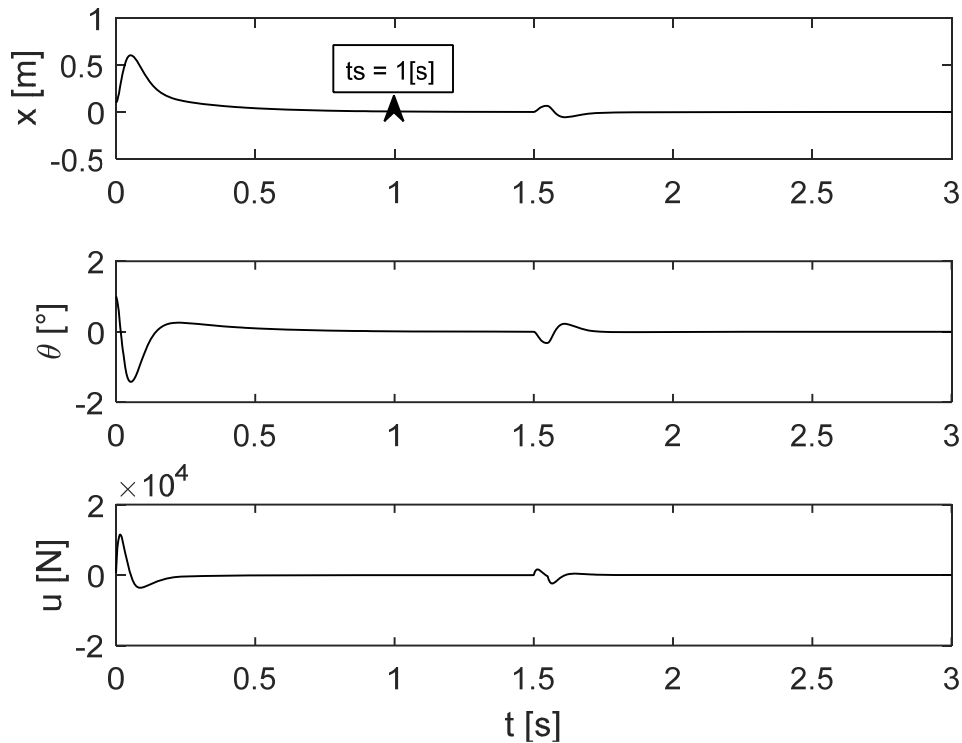
$$P = [-4 \quad -40 \quad -40 \quad -40],$$

mismo que permite calcular como ganancia de realimentación de estados al vector siguiente:

$$K = [-1240.3 \quad -1102.8 \quad -510.8 \quad -89.7] \quad (30)$$

En la Figura. 24 se observan resultados de simulación para el sistema regulado en el espacio de estados, obtenidos empleando la función `ode45(.)` de MATLAB (ver Anexo B) para integrar numéricamente el sistema definido en (29).

Figura 24. Simulación sistema regulado por realimentación de estados



El escenario de simulación propuesto asigna como condiciones iniciales: $x(0) = 10 \text{ cm}$ y $\theta(0) = 1^\circ$, con las derivadas correspondientes en cero. De esta manera, se observa cómo las trayectorias de posición traslacional del carro y angular del péndulo se regulan hacia cero, con tiempo de establecimiento cercano al definido por el polo dominante deseado, $t_s = 1[\text{s}]$.

El esfuerzo de control es significativo al inicio de la curva, pero también tiende a cero de manera rápida como consecuencia de la regulación hacia el valor de equilibrio en el vector de estado.

Para $t = 1.5 \text{ s}$, el sistema se encuentra en estado estacionario y por tanto se aplica una perturbación de tipo impulsivo en la forzante de entrada de valor

$\delta u(t) = 100 \text{ N}$, con duración de 50 ms y que representa una alteración momentánea para el movimiento del carro ocasionada por un agente externo al sistema. Se observa una capacidad del sistema regulado para regresar rápidamente a la condición deseada de equilibrio, verificando la estabilidad para el lazo de control.

Los valores de sobre impulso obtenidos en la simulación para $x(t)$ y $u(t)$ superan los límites de realización experimental (por efectos de saturación). Sin embargo, en el estado estacionario se espera que el modelo atienda a las restricciones de linealidad asumidas en las formulaciones matemáticas y por tanto permita dar predicciones para el sistema controlado similares al comportamiento del prototipo experimental real, a ser abordado en el Capítulo siguiente.

3.3.3. Cálculo para ganancia óptima de control LQR. Retomando los resultados introducidos en la Sección 2.3.2 y en particular, los referidos a la ecuación (5), se observa que la elección para una ganancia de realimentación de estados óptima es posible a través de una elección apropiada para las matrices de ponderación Q y R .

La determinación para dichas matrices fue realizada de manera tal que fuera posible obtener no solamente una reducción en los niveles de señal, sino también una respuesta dinámica conforme con los requerimientos prácticos del sistema. A partir de ello, diferentes ensayos permitieron definir:

$$Q = \begin{bmatrix} 50000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R = [0.01], \quad (31)$$

como la mejor combinación de valores para obtener los resultados esperados de optimización. De estos se observa una ponderación mayor sobre el estado

correspondiente a la posición del carro $x(t)$ y por tanto, una mayor incidencia de su magnitud en el cálculo del índice de desempeño J . Una situación contraria se verifica para $u(t)$, cuyo peso prácticamente anula la influencia de los valores de amplitud en el esfuerzo de control para la determinación del valor óptimo.

Ahora bien, con los valores para Q y R así definidos, el cálculo para K óptimo se realiza a través de la función `lqr(.)` de MATLAB, ejecutando la instrucción:

```
>> lqr (A,B,Q,R)
```

en la ventana de comandos, permitiendo obtener:

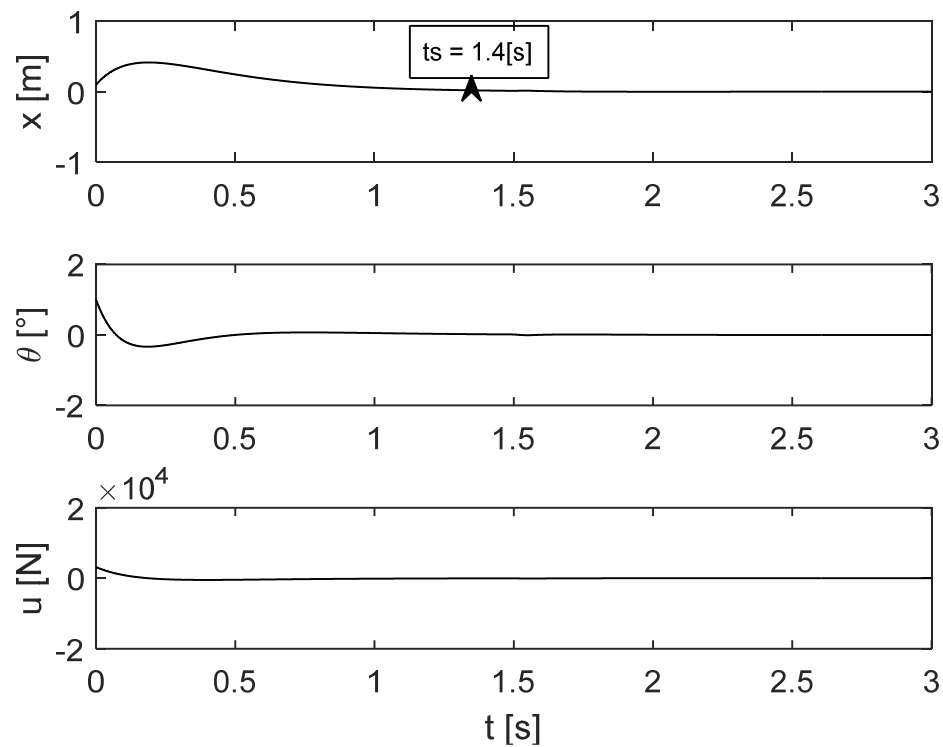
$$K_{opt} = [-2236.1 \quad -2051.7 \quad -2935.3 \quad -427.55] \quad (32)$$

La Figura. 25 presenta los resultados de simulación para el sistema regulado mediante realimentación de estados, empleando la ganancia óptima. De estos resultados se observa una inminente reducción en las amplitudes para los estados del sistema y el esfuerzo de control. El primer caso (reducción de nivel de amplitud en los estados) es consecuencia de la ponderación realizada tras la elección de la matriz Q . El segundo caso (reducción de nivel de amplitud en la señal de control) es consecuencia del anterior, ya que un menor vector de estados ponderado por K_{opt} , genera un menor esfuerzo de control.

En cuanto al tiempo de establecimiento en las respuestas, se observa que el sistema no alcanza tan rápido la condición de equilibrio como sucedió con la realimentación de estados no óptima de la Figura. 24, sin embargo los tiempos de respuesta para el caso óptimo no son lejanos de los valores deseados en términos de una respuesta real del sistema experimental, siendo por tanto viables (útiles) en la práctica.

En términos de respuesta a perturbaciones se observa una incidencia menor para el sistema óptimo que su contraparte de ganancia tradicional, que puede explicarse en términos de una ligera insensibilidad ocasionada por los bajos niveles de amplitud de las señales del sistema y por tanto, una reacción menos agresiva ante cambios repentinos como los ocasionados por una perturbación.

Figura 25. Simulación sistema regulado por control LQR

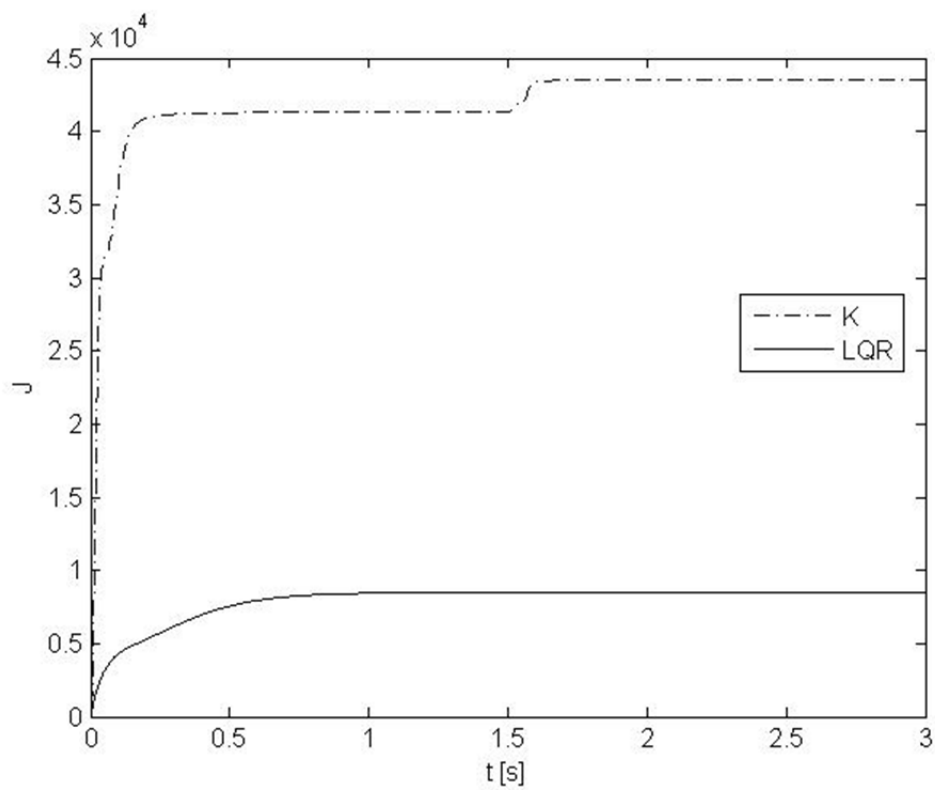


Finalmente, la Figura. 26 presenta el cálculo del índice de desempeño J definido en (5), empleando el vector de estado x y el vector de señal de control u , obtenidos mediante simulación para los dos casos presentados de regulación por realimentación de estados tradicional y óptima LQR. A partir de estos resultados se confirma la optimalidad de la técnica LQR en términos de la minimización del

índice J , al igual que una menor sensibilidad al efecto de la perturbación aplicada en $t = 1.5$ s.

A partir de esto se verifica, que el control LQR es más eficiente desde el punto de vista energético (esfuerzo de control), en cuanto a que requiere de una menor energía para llevar el estado del sistema a la condición deseada de equilibrio.

Figura 26. Cálculo para índice de desempeño



4. VERIFICACIÓN EXPERIMENTAL DEL CONTROL

El procedimiento de modelado e identificación de parámetros presentado en el Capítulo anterior, permitió realizar el cálculo para la ganancia de realimentación de estados que resuelve la regulación del estado del sistema hacia la condición de equilibrio, mostrando resultados de simulación que confirman la condición de optimalidad para la técnica LQR. Como complemento, se presenta a continuación la verificación experimental para dichas predicciones ejecutadas en el prototipo de laboratorio construido para el sistema de péndulo invertido traslacional.

4.1. MARCO EXPERIMENTAL

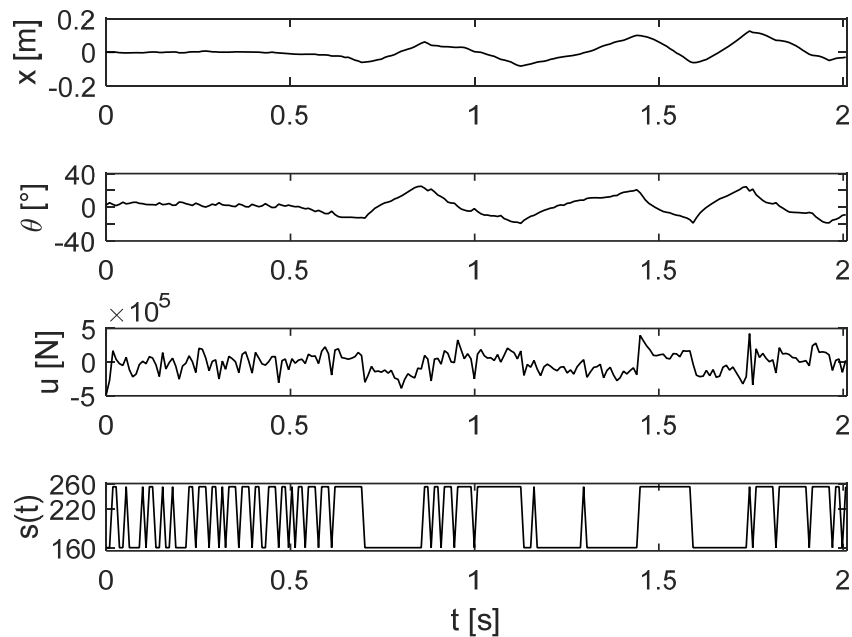
Tomando como base los desarrollos presentados en la Sección 2.4, y en particular, citando la configuración algorítmica ilustrada en la Figura. 14 como parte de la descripción del dispositivo de control del sistema de péndulo invertido traslacional constituido en laboratorio, se realizó la programación del microcontrolador Arduino para ejecutar la ley de control por realimentación de estados utilizando las ganancias calculadas en las Secciones 3.3.2 y 3.3.3.

Las condiciones de operación del sistema parten de una posición inicial para el carro en la parte central del riel, con el vástago erguido.

Los registros de señal capturados empleando la ganancia de realimentación de estados K calculada en (30) se presentan en la Figura. 27. A partir de ello, se observa una respuesta oscilatoria por parte de las posiciones traslacional del carro $x(t)$ y angular del vástago $\theta(t)$, alrededor de la posición de equilibrio en el origen.

Se observa también un comportamiento errático por parte de la señal de control $u(t)$ calculada por el microcontrolador Arduino, la cual alcanza niveles de amplitud similares a los obtenidos para los resultados de simulación presentados en la Figura. 24, mismos que sin embargo en la práctica se limitan al intervalo admisible del dispositivo actuador (ver Sección 2.4.4) y que por tanto generan la señal efectiva de control denotada como $s(t)$ en la Figura. 27. Como puede observarse, esta señal de control efectiva es un tren de pulsos del tipo encendido-apagado como consecuencia del efecto de saturación, que generan un efecto similar en el comportamiento de la señal PWM aplicada al motor que impulsa el movimiento del carro, explicando la oscilación experimentada en la práctica.

Figura 27. Sistema regulado por realimentación de estados experimental

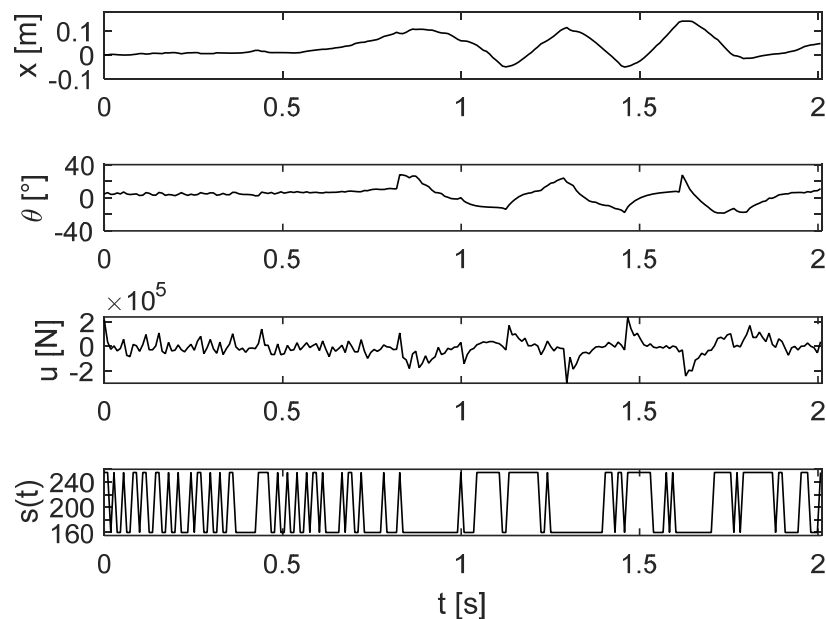


En este punto es conveniente aclarar, que a pesar que el microcontrolador Arduino es un procesador de 8 bits, es posible definir variables para efectuar cálculos a mayor resolución como es el caso de los registros de señal calculados para $u(t)$, los cuales son efectuados mediante múltiples instrucciones de 8 bits. Es por esto

que la señal aplicada como entrada efectiva al módulo de PWM debe restringirse a los valores que, por limitaciones estructurales del procesador, no pueden superar en magnitud $2^8 = 256$.

La Figura. 28 presenta resultados similares para el caso de la ganancia óptima K_{opt} calculada en (32). De estos resultados no es posible observar una diferencia cualitativa, ni mucho menos cuantitativa, que permita verificar la optimalidad del control para este conjunto de ganancias de realimentación de estado, manifestando el mismo comportamiento oscilatorio con esfuerzo de control saturado evidenciado para la ganancia calculada por el método convencional.

Figura 28. Sistema regulado por control LQR experimental

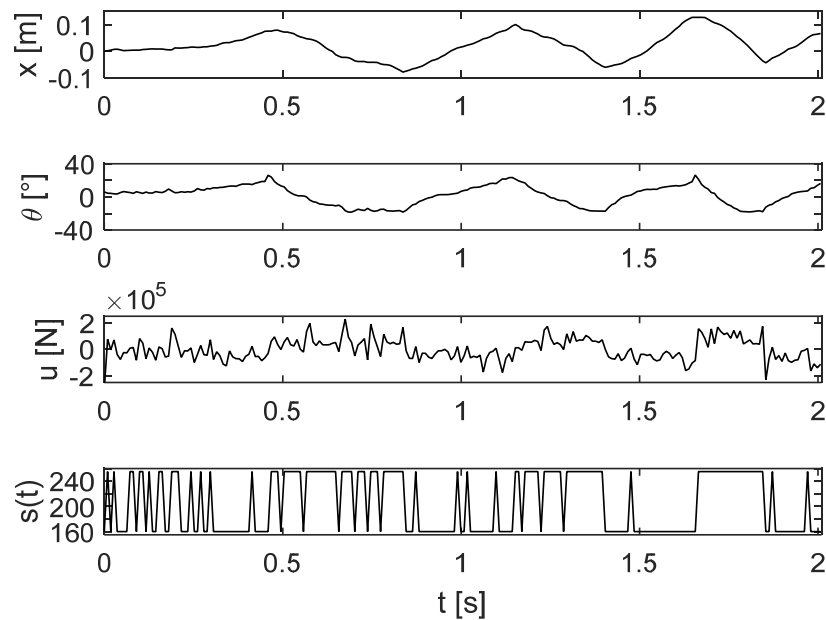


Por tanto, se optó por realizar un ajuste fino manual para los valores calculados en (32), obteniendo los resultados presentados a continuación:

$$K_{fino} = [-536.1 \quad -1351.7 \quad -2650.3 \quad -415.5] \quad (33)$$

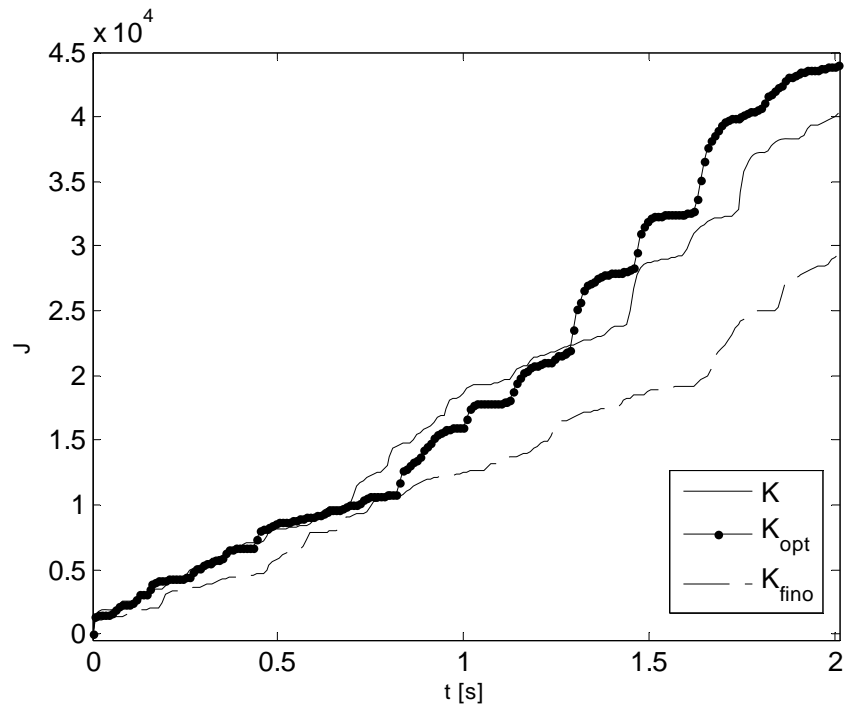
con respuesta temporal mostrada en la Figura. 29, que sin embargo no presenta características dinámicas muy diferentes a los casos anteriormente verificados.

Figura 29. Sistema regulado por realimentación de estados sintonizada



Finalmente, en un intento por determinar el gasto energético del esfuerzo de control de modo similar a los resultados presentados en la Figura. 26, se realizó el cálculo para el índice de desempeño J definido en (5) empleando el vector de estado $x(t)$ y el vector de señal de control efectivo $s(t)$ obtenidos experimentalmente para los tres casos considerados. El resultado para dicho cálculo se muestra en la Figura. 30, verificando que las tres respuestas presentan niveles de señal comparables y que por tanto, no es posible identificar una diferencia en el desempeño dinámico y/o energético, para las ganancias de control empleadas en desarrollo de las pruebas de laboratorio.

Figura 30. Cálculo para índice de desempeño experimental



5. CONCLUSIONES

Con base en los procedimientos desarrollados y los resultados obtenidos en el presente trabajo de grado, es posible enunciar la siguiente conclusión general:

- Se implementó una estrategia de control cuadrático lineal LQR sobre un prototipo de péndulo invertido, a partir de la construcción e instrumentación de un mecanismo de posición traslacional acoplado a un vástago, con posterior estudio numérico de su modelo matemático y parámetros de sistema y control, e implementación computacional experimental en laboratorio para la estrategia de regulación del vector de estados.

De manera más puntual:

- Se calcularon los parámetros para un controlador del tipo LQR, aplicado en la regulación del estado en un péndulo invertido traslacional. Inicialmente, se establecieron las bases conceptuales para el control óptimo cuadrático (LQR) según abordado en la Sección 2.3, donde se definió la solución para la ecuación algebraica de Riccati que minimiza un índice de desempeño cuadrático en términos de los pesos asignados al vector de estado y a la entrada de control. Posteriormente, se abordó el procedimiento de modelado e identificación de parámetros para un sistema de péndulo invertido traslacional, con resultados presentados en las Secciones 3.1 y 3.2. A partir de estos desarrollos, fue posible formular y calcular el vector de ganancias de realimentación de estados para el modelo del sistema de péndulo invertido, en los casos óptimo y convencional, según presentado en la Sección 3.3.

- Se analizó el comportamiento del sistema controlado empleando herramientas de simulación. En particular, se realizó integración numérica para las ecuaciones (19) y (21) que describen la dinámica del modelo matemático del sistema, utilizando el paquete de herramientas para la solución de ecuaciones diferenciales ODE de MATLAB. A partir de ello, se observó la estabilización del vector de estado hacia valores de equilibrio en el origen, con comportamiento dinámico consistente con la posición de los polos deseados determinados por una ganancia de realimentación (Sección 3.3.2). De manera complementaria, se ejecutó el mismo escenario de simulación para el caso de una ganancia de realimentación de estados óptima, permitiendo verificar una reducción en los valores de amplitud tanto del vector de estados como del esfuerzo de control, atendiendo a características transitorias que si bien no fueron tan exactas como las requeridas a partir de los polos deseados en la realimentación de estados convencional, presentaron un desempeño aceptable en el contexto del problema práctico estudiado. Dichos resultados (presentados en la Sección 3.3.3) fueron complementados por el cálculo para el índice de desempeño, ilustrando en la Figura. 26 el rendimiento comparativo desde un punto de vista energético entre las técnicas de realimentación de estados convencional y óptima LQR, confirmando las ventajas en reducción de costo de la última.
- Se implementó en un microcontrolador la estrategia de control propuesta. Tal y como se presentó en la Sección 2.4, fue necesario construir e instrumentar un prototipo de laboratorio para el sistema de péndulo invertido traslacional. De manera más puntual, en la Sección 2.4.4 y en el flujograma ilustrado en la Figura. 14, se abordó la configuración para la rutina de proceso de toma de decisiones en el sistema experimental, lo cual corresponde a la síntesis circuital del algoritmo de control. El dispositivo de proceso empleado correspondió con un microcontrolador Arduino de 8 bits, lo cual limitó a $2^8 = 256$ la resolución de los datos procesados. En términos algorítmicos, una realimentación de estados corresponde con una simple suma de productos.

Otras rutinas fueron implementadas en el código para calcular y filtrar (por promedio) las señales de velocidad traslacional y rotacional, a partir de las medidas correspondientes de posición.

- Se validó el desempeño del sistema controlado a partir de pruebas sobre un prototipo de laboratorio. El Capítulo 4 realizó una réplica experimental en el prototipo de péndulo invertido para el escenario de simulación numérica presentado en la Sección 3.3. A partir de ello se observó un comportamiento oscilante alrededor de los valores de equilibrio en el origen, que sin embargo no se amortigua y presenta características de saturación en el comando de control. Lo anterior se verificó para las ganancias calculadas de realimentación de estados convencional y óptima, al igual que para los valores obtenidos a partir de una sintonización manual. Niveles de amplitud de estado y control, similares para los diferentes casos, permitieron concluir a partir del cálculo para el índice de desempeño mostrado en la Figura. 30, que no es posible visualizar la optimalidad de la ley LQR bajo las condiciones experimentales propuestas, dejando abierto un escenario de mejora a nivel de hardware y proceso de datos.

6. RECOMENDACIONES

Las condiciones operacionales del sistema experimental dependen fuertemente del voltaje de alimentación seleccionado. Se recomienda mantener dicho valor para todas las pruebas constante en 12 VDC.

La calibración en la lectura para la posición del vástago es sensible al acople mecánico del potenciómetro empleado como dispositivo de transducción. Por tanto, se recomienda revisar periódicamente las características operativas para esta señal, debido a que los movimientos mecánicos y las vibraciones producidas por el sistema pueden causar alteraciones y por ende cambios en los valores sensados (alteración de escalas).

Para operar el prototipo de péndulo invertido traslacional, se recomienda seguir la siguiente secuencia de pasos: 1) Conectar alimentación del prototipo; 2) Conectar alimentación de Arduino UNO; 3) Conectar Arduino MEGA al PC a través del puerto USB; 4) Posicionar el carro en la posición central del riel y el vástago erguido; 5) Ejecutar el monitor serial de ARDUINO; 6) Cargar el código de rutina y ejecutar el programa; 7) Presionar botón de parada (rojo en tarjeta auxiliar) para imprimir datos y detener el movimiento del sistema.

6.1. TRABAJO FUTURO

A partir de los resultados experimentales obtenidos, es claro que el trabajo complementario al presente proyecto de grado debe enfocarse hacia una mejora ostensible en el procesamiento de datos del lazo de control. Particularmente, se debe manejar un mejor escalado en los niveles de amplitud de señal y un rediseño

de las rutinas computacionales para mejorar los tiempos de proceso. Para ello será necesario realizar una caracterización minuciosa del dispositivo de actuación y de los rangos de señal entregados por los sensores empleados, complementados por el diseño de un apropiado sistema embebido, basado en interrupciones de hardware, que explote al máximo el potencial del dispositivo de proceso disponible.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍA

[1] J. SANCHEZ, F. MORILLA, S. DORMIDO, J. ARANDA y P. RUIPEREZ. Virtual and remote control labs using Java: a qualitative approach. En Control Systems, IEEE. Vol. 22, N° 2 (Abr., 2002), p. ISSN 1066-033X.

[2] S. GARCIA NIETO, M. MARTÍNEZ, Á. LLOSÁ y J. SANCHIS. Estrategias de enseñanza a distancia sobre control no-lineal aplicada al péndulo invertido. En Informacion Tecnológica. Vol. 18. N° 5(2007) p. ISSN 0718-0764.

[3] E. MISAWA, M. ARRINGTON y T. LEDGERWOOD. Rotational inverted pendulum: a new control experiment. En American Control Conference, Proceedings of the 1995, IEEE (Jun., 1995) p. ISBN 0-7803-2445-5.

[4] D. HERRERA ALFONSO. Implementación y puesta en marcha de una plataforma de prácticas de control con arquitectura Lego. Bogotá, 2010. Trabajo de grado (Magister en Ingeniería -Automatización Industrial) Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería. Posgrado en Automatización Industrial. Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica.

[5] S. MOOR, P. PIERGIOVANNI y M. METZGER. Process control kits: a hardware and software resource: conferencia 35. En Frontiers in Education, 2005. FIE '05. Proceedings 35th Annual Conference (2005: Indianápolis). DOI: 10.1109/FIE.2005.1611916.

[6] L. V. HERRERA SEPÚLVEDA y U. A. MELO PINZÓN. Control en el espacio de estados para un prototipo real de péndulo invertido. Bucaramanga, 2013. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de

Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

[7] E. GOMEZ ARIAS, C. Y. PEÑARANDA y W. R. SILVA. Instrumentación y control de nivel para un sistema de tanques acoplados en el laboratorio de control e instrumentación de la E3T-UIS. Bucaramanga, 2014. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico e Ingeniero Electricista). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

[8] S. F. MUÑOZ SUÁREZ, D. F. GUARÍN MANTILLA y G. R. SARMIENTO CRUZ. Instrumentación y control de velocidad para un motor de corriente alterna en el laboratorio de control e instrumentación de la E3T-UIS. Bucaramanga, 2013. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico e Ingeniero Electricista). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

[9] D. F. NOVOA DÍAZ y J. A. PRADA MEJÍA. Planeación, diseño y realización del laboratorio de instrumentación electrónica para la E3T. Bucaramanga, 2001. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

[10] D. H. RAMIREZ VEGA y E. E. TORRES SÁNCHEZ. Sistema de gestión para un prototipo de sistema SCADA en el laboratorio de instrumentación de electrónica de la E3T. Bucaramanga, 2007. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

[11] L. Y. NEIRA DUARTE y R. I. PRADA MEDINA. Diseño del proyecto para implementación de una sala TIA (Totally Integrated Automation) y adaptación de un proceso industrial para desarrollo de prácticas de entrenamiento en las áreas de instrumentación, automatización y control. Bucaramanga, 2008. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

[12] J. J. E. SLOTINE y W. LI. Applied nonlinear control. Prentice-Hall International Editions. 1991. p. 461.

[13] M. ROHMANUDDIN, E. M. BUDI y R. PURNAMA. Design of horizontal seismic sensor with spherical inverted pendulum and magnetic levitation: conferencia 2. En Instrumentation, Control and Automation (ICA). International Conference on. (2011 : Indonesia). ISBN: 978-1-4577-1460-3.

[14] M. AKHTARUZZAMAN y A. A. SHAFIE. Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods, comparative assessment and result analysis. En Mechatronics and Automation (ICMA), 2010 International Conference on. (2010 : China). DOI: 10.1109/ICMA.2010.5589450.

[15] A. RYBOVIC, M. PRIECINSKY y M. PASKALA. Control of the inverted pendulum using state feedback control. ELEKTRO (2012: Mayo:) p. ISBN: 978-1-4673-1179-3.

[16] C. SANABRIA y Ó. HERNÁNDEZ. Control de un péndulo invertido simple por métodos de realimentación de estados. En Tecnura. Vol. 13. N° 25 (Agt., 2009). p. ISSN: 0123-921X.

[17] G. E. FIGUEREDO ROJAS y O. R. RONDÓN AZUERO. Péndulo invertido controlado por un sistema de lógica difusa (primera parte). Bucaramanga, 1997. Trabajo de grado (Ingeniero Mecánico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica.

[18] Ó. J. ORTÍZ y É. A. MARÍN. Control mediante lógica Fuzzy de un péndulo invertido. Bucaramanga, 2005. Trabajo de grado (Ingeniero Mecánico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica.

[19] L. LENGUAS, C. MARÍN y J. GONZÁLEZ. Modelo de la marcha bípeda humana usando modelica. En *Visión Electrónica*. Vol. 7. No. 2 (Oct., 2013); p. ISSN 1909-9746 e-ISSN 2248-4728.

[20] E. J. VERA ROZO. Validación experimental del modelo de dos ejes de un avión a escala. Bucaramanga, 2012. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

[21] T. ESPINOZA, R. PARADA, A. DZUL y G. CORDERO. (2015: Cuernavaca, Morelos, México) Control por saturaciones anidadas y modos deslizantes aplicado a un UAV de ala fija: Congreso Nacional de Control Automático, AMCA, 2015. 6 p.

[22] J. CORREA , R. VÁSQUEZ, J. RAMÍREZ MACÍAS , E. TABORDA, C. ZULUAGA, N. POSADA y J. LONDOÑO. Una arquitectura para el diseño conceptual de vehículos para exploración subacuática. En *Ingeniería y Ciencia*. Vol 11. No. 21(En, 2015) p ISSN:1794-9165 ISSN-e: 2256-4314.

[23] Á. ROMERO, A. MARÍN y J. JIMÉNEZ. Sistema de monitoreo y control para un robot autobalanceado sobre dos ruedas modelado en 3D. En Revista U.D.C.A Actualidad & Divulgación Científica Vol 17. No. 2 (Dic. 2014) p. ISSN 0123-4226.

[24] K. Ogata. Ingeniería de control moderna. PEARSON EDUCATION.1998.

[25] D. A. ESTEBAN MÉNDEZ y J. SÁNCHEZ CARVAJALINO. Análisis de optimalidad para un control conmutado aplicado en un convertidor de potencia. Bucaramanga, 2015. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Fisico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

[26] A. Medvedev. Continuous Least-Squares Observers with Applications. En IEEE Transactions on Automatic control. Vol 41. No 10 (Oct. 1996).

[27] L. Ljung. System Identification: Theory for the User. PRENTICE HALL. New Jersey. 1987

BIBLIOGRAFÍA

A. MEDVEDEV. Continuous Least-Squares Observers with Applications. En IEEE Transactions on Automatic control. Vol 41. No 10 (Oct. 1996).

Á. ROMERO, A. MARÍN y J. JIMÉNEZ. Sistema de monitoreo y control para un robot autobalanceado sobre dos ruedas modelado en 3D. En Revista U.D.C.A Actualidad & Divulgación Científica Vol 17. No. 2 (Dic. 2014) p. ISSN 0123-4226.

A. RYBOVIC, M. PRIECINSKY y M. PASKALA. Control of the inverted pendulum using state feedback control. ELEKTRO (2012: Mayo:) p. ISBN: 978-1-4673-1179-3.

C. SANABRIA y Ó. HERNÁNDEZ. Control de un péndulo invertido simple por métodos de realimentación de estados. En Tecnura. Vol. 13. N° 25 (Agt., 2009). p. ISSN: 0123-921X.

D. A. ESTEBAN MÉNDEZ y J. SÁNCHEZ CARVAJALINO. Análisis de optimalidad para un control conmutado aplicado en un convertidor de potencia. Bucaramanga, 2015. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

D. F. NOVOA DÍAZ y J. A. PRADA MEJÍA. Planeación, diseño y realización del laboratorio de instrumentación electrónica para la E3T. Bucaramanga, 2001. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

D. H. RAMIREZ VEGA y E. E. TORRES SÁNCHEZ. Sistema de gestión para un prototipo de sistema SCADA en el laboratorio de instrumentación de electrónica de la E3T. Bucaramanga, 2007. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

D. HERRERA ALFONSO. Implementación y puesta en marcha de una plataforma de prácticas de control con arquitectura Lego. Bogotá, 2010. Trabajo de grado (Magister en Ingeniería -Automatización Industrial) Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ingeniería. Posgrado en Automatización Industrial. Departamento de Ingeniería Eléctrica y Electrónica.

E. GOMEZ ARIAS, C. Y. PEÑARANDA y W. R. SILVA. Instrumentación y control de nivel para un sistema de tanques acoplados en el laboratorio de control e instrumentación de la E3T-UIS. Bucaramanga, 2014. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico e Ingeniero Electricista). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

E. J. VERA ROZO. Validación experimental del modelo de dos ejes de un avión a escala. Bucaramanga, 2012. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

E. MISAWA, M. ARRINGTON y T. LEDGERWOOD. Rotational inverted pendulum: a new control experiment. En American Control Conference, Proceedings of the 1995, IEEE (Jun., 1995) p. ISBN 0-7803-2445-5.

G. E. FIGUEREDO ROJAS y O. R. RONDÓN AZUERO. Péndulo invertido controlado por un sistema de lógica difusa (primera parte). Bucaramanga, 1997.

Trabajo de grado (Ingeniero Mecánico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica.

J. CORREA , R. VÁSQUEZ, J. RAMÍREZ MACÍAS , E. TABORDA, C. ZULUAGA, N. POSADA y J. LONDOÑO. Una arquitectura para el diseño conceptual de vehículos para exploración subacuática. En Ingeniería y Ciencia. Vol 11. No. 21(En, 2015) p ISSN:1794-9165 ISSN-e: 2256-4314.

J. J. E. SLOTINE y W. LI. Applied nonlinear control. Prentice-Hall International Editions. 1991. p. 461.

J. SANCHEZ, F. MORILLA, S. DORMIDO, J. ARANDA y P. RUIPEREZ. Virtual and remote control labs using Java: a qualitative approach. En Control Systems, IEEE. Vol. 22, Nº 2 (Abr., 2002), p. ISSN 1066-033X.

K. Ogata. Ingeniería de control moderna. PEARSON EDUCATION.1998.

L. LENGUAS, C. MARÍN y J. GONZÁLEZ. Modelo de la marcha bípeda humana usando modelica. En Visión Electrónica. Vol. 7. No. 2 (Oct., 2013); p. ISSN 1909-9746 e-ISSN 2248-4728.

L. LJUNG. System Identification: Theory for the User. PRENTICE HALL. New Jersey. 1987

L. V. HERRERA SEPÚLVEDA y U. A. MELO PINZÓN. Control en el espacio de estados para un prototipo real de péndulo invertido. Bucaramanga, 2013. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

L. Y. NEIRA DUARTE y R. I. PRADA MEDINA. Diseño del proyecto para implementación de una sala TIA (Totally Integrated Automation) y adaptación de un proceso industrial para desarrollo de prácticas de entrenamiento en las áreas de instrumentación, automatización y control. Bucaramanga, 2008. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

M. AKHTARUZZAMAN y A. A. SHAFIE. Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods, comparative assessment and result analysis. En Mechatronics and Automation (ICMA), 2010 International Conference on. (2010 : China). DOI: 10.1109/ICMA.2010.5589450.

M. ROHMANUDDIN, E. M. BUDI y R. PURNAMA. Design of horizontal seismic sensor with spherical inverted pendulum and magnetic levitation: conferencia 2. En Instrumentation, Control and Automation (ICA). International Conference on. (2011 : Indonesia). ISBN: 978-1-4577-1460-3.

Ó. J. ORTÍZ y É. A. MARÍN. Control mediante lógica Fuzzy de un péndulo invertido. Bucaramanga, 2005. Trabajo de grado (Ingeniero Mecánico). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Mecánica.

S. F. MUÑOZ SUÁREZ, D. F. GUARÍN MANTILLA y G. R. SARMIENTO CRUZ. Instrumentación y control de velocidad para un motor de corriente alterna en el laboratorio de control e instrumentación de la E3T-UIS. Bucaramanga, 2013. Trabajo de grado (Ingeniero Electrónico e Ingeniero Electricista). Universidad Industrial de Santander. Facultad de Ingeniería Físico-Mecánicas. Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.

S. GARCIA NIETO, M. MARTÍNEZ, Á. LLOSÁ y J. SANCHIS. Estrategias de enseñanza a distancia sobre control no-lineal aplicada al péndulo invertido. En *Informacion Tecnológica*. Vol. 18. Nº 5(2007) p. ISSN 0718-0764.

S. MOOR, P. PIERGIOVANNI y M. METZGER. Process control kits: a hardware and software resource: conferencia 35. En *Frontiers in Education*, 2005. FIE '05. Proceedings 35th Annual Conference (2005: Indianápolis). DOI: 10.1109/FIE.2005.1611916.

T. ESPINOZA, R. PARADA, A. DZUL y G. CORDERO. (2015: Cuernavaca, Morelos, México) Control por saturaciones anidadas y modos deslizantes aplicado a un UAV de ala fija: Congreso Nacional de Control Automático, AMCA, 2015. 6 p.

ANEXOS

ANEXO A – IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS EN MATLAB

El objetivo de las técnicas de identificación, es obtener los parámetros de un modelo que mejor se ajustan a las condiciones de operación de un sistema de referencia. El proceso de identificación de parámetros puede ser: de caja negra, cuando sólo se tiene información de las señales de entrada y salida del sistema o de caja gris, cuando se posee algún tipo de información adicional acerca de la estructura y/o de los parámetros del modelo.

Reglas estadísticas juegan un papel muy importante en procesos de identificación de parámetros. La señal aplicada como entrada debe excitar la mayor cantidad de componentes del sistema, de manera tal que las señales de salida sean ricas en términos de información dinámica [27].

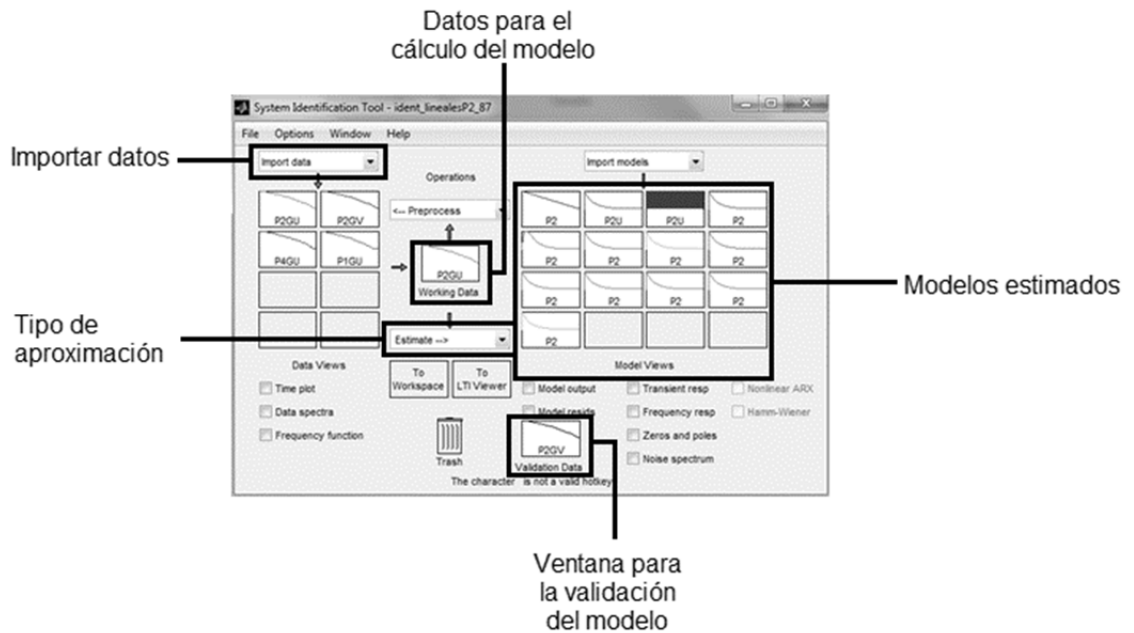
MATLAB posee una herramienta de cálculo numérico que facilita tareas de identificación de parámetros en modelos de sistemas determinísticos, a través de información de los conjuntos de datos de entrada y salida e inferencias respecto a la estructura paramétrica de modelos, según descrito a continuación:

A.1. HERRAMIENTA DE IDENTIFICACIÓN

El *System Identification Toolbox* (o simplemente IDENT) de MATLAB, es un paquete de herramientas de usuario que permite realizar identificación de parámetros en modelos. La Figura. A.1 ilustra la interfaz para interactuar con dicha herramienta, a la cual se accede digitando la siguiente línea en la ventana de comandos:

```
>> ident
```

Figura A.1. Interfaz de usuario IDENT



Para proceder a la identificación del modelo, inicialmente deben cargarse los datos de entrada y salida empleando la secuencia de opciones: *Import data* -> *Time domain data* (ver Figura. A.2), asignando en los campos “Workspace Variable -> Input; Output”, respectivamente, los nombres de variables de entrada y salida almacenados en el espacio de trabajo de MATLAB. Asimismo, se asigna un nombre al conjunto de datos importado y se definen los tiempos de muestreo y de inicio.

A manera de ilustración, se presentarán los cálculos obtenidos para una entrada constante de ciclo útil $u = 200$ y su correspondiente respuesta de posición para el recorrido del carro, según mostrado en la Figura. A.3.

Figura A.2. Ventana para importación de datos

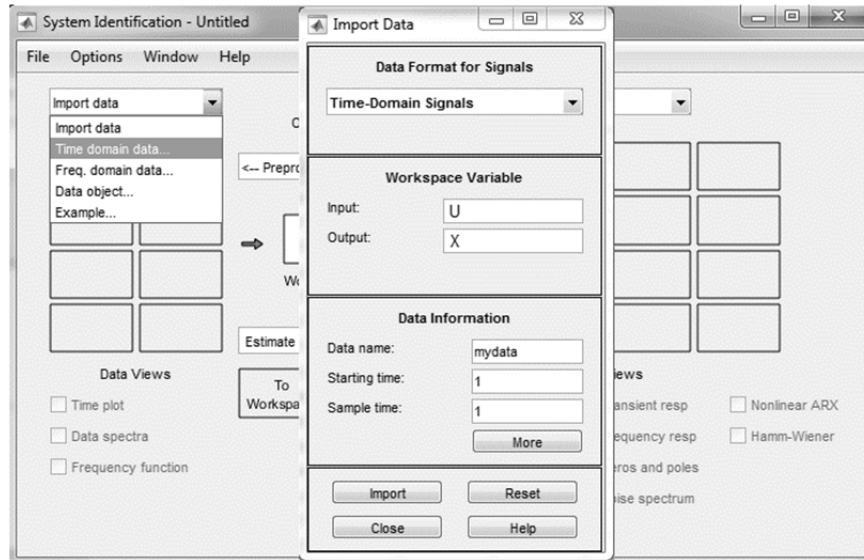
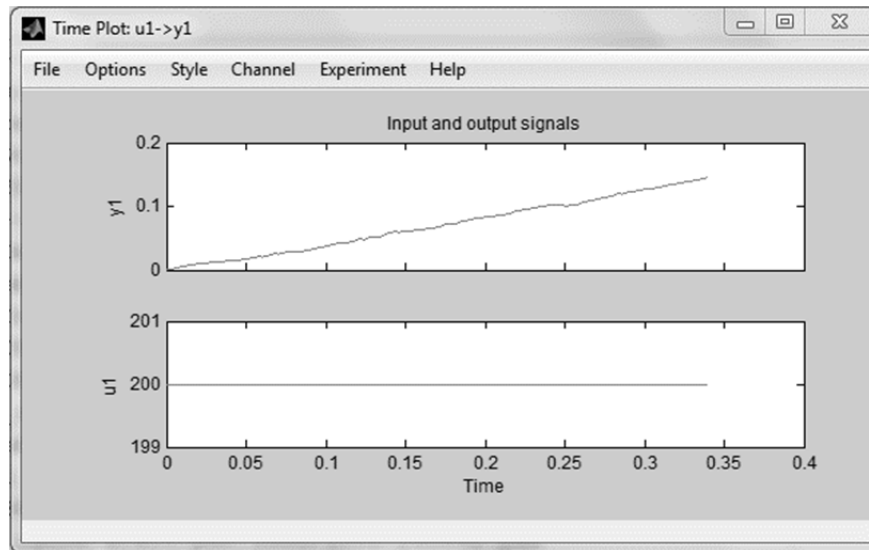


Figura A.3. Ilustración datos de entrada y salida IDENT



Posterior a la carga de datos, se procede con la selección para el tipo de aproximación a través de la secuencia de opciones: *Estimate* -> *Process Models* (ver Figura A.4). Aquí es donde se introducen las condiciones iniciales y se especifican detalles como la cantidad de polos y el tipo de aproximación a ser utilizado.

Para el caso de ejemplo, se seleccionó el modelo mostrado en la ecuación (22) correspondiente con una función de transferencia de dos polos reales, sin retardo y con ganancia constante.

Las condiciones iniciales empleadas para mejorar el ajuste, fueron seleccionadas como mostrado en la Tabla A.1. Dichas condiciones iniciales fueron asignadas a través de ensayo y error mediante un proceso iterativo, buscando una aproximación aceptable para los datos.

Figura A.4. Selección para modelo de proceso

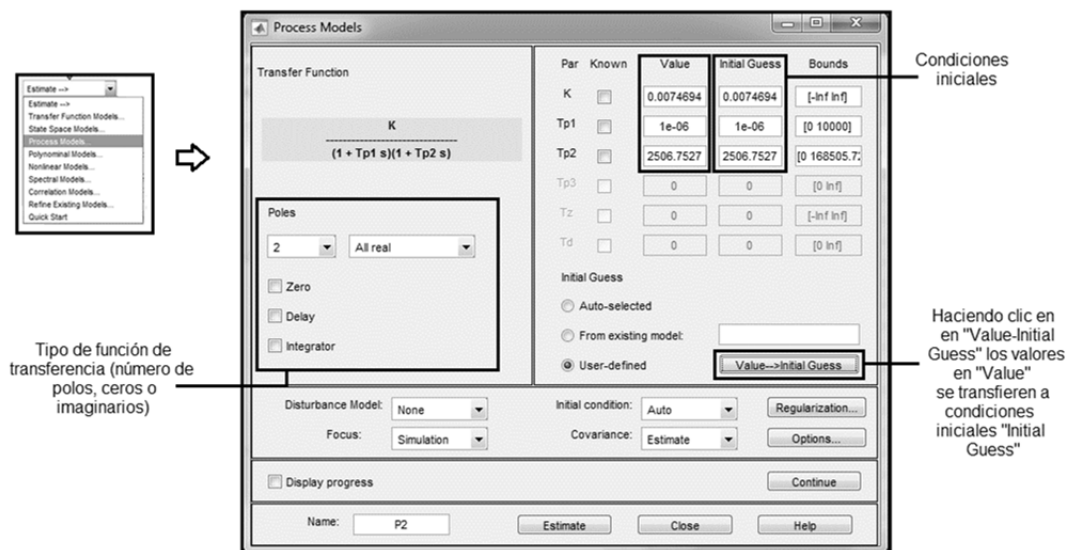


Tabla A.1. Condiciones iniciales en parámetros de estimación

K_p	T_{p1}	T_{p2}
525.21	1×10^6	1.6851×10^6

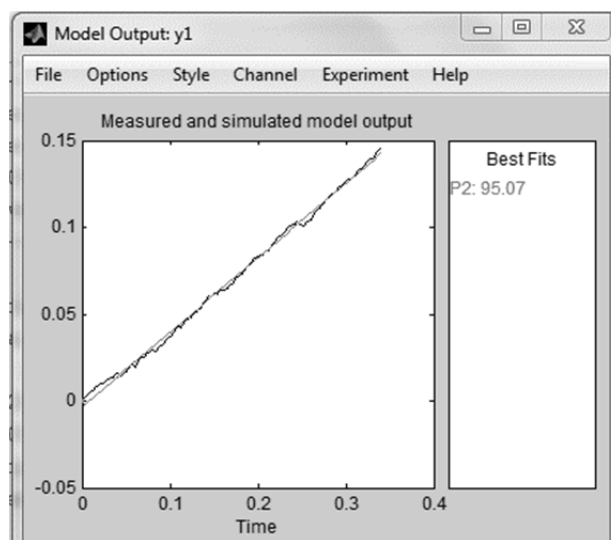
De esta manera, procediendo con la opción: *Estimate*, fue posible obtener los parámetros finales y el porcentaje de aproximación del modelo mostrados en la Tabla A.2, con correspondiente visualización en la Figura. A.5 del error de estimación obtenido siguiendo la secuencia de opciones: *Model Views -> Model output*.

Procedimientos similares permitieron obtener otros valores de parámetros estimados contenidos en la Tabla 3.

Tabla A.2. Parámetros calculados y porcentaje de aproximación

K_p	T_{p1}	T_{p2}	% de ajuste
3117.8	3.2525×10^{-4}	1.9638×10^6	95.07

Figura A.5. Validación de modelo



ANEXO B – FUNCIÓN ODE45 DE MATLAB

Para obtener información del comportamiento (evolución temporal) de las variables del sistema de péndulo invertido traslacional, se realizaron procedimientos de resolución numérica de las ecuaciones dinámicas del modelo matemático correspondiente, empleando integración numérica en MATLAB a través del paquete de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias ODE.

En particular, se empleó la función *ode45*. Dicha función, está basada en un algoritmo de tipo Runge-Kutta desarrollado a partir del método de Euler mejorado. La función recibe tres parámetros esenciales: $f(t)$ dentro de un *script* en el que se define la ecuación diferencial acompañado por un símbolo @, el vector de límites de tiempo $[t_0 \ t_f]$ y el vector de condiciones iniciales y_0 . En otras palabras el prototipo básico para usar *ode45* es el siguiente:

$$[t, y] = \text{ode45}(@f(t), [t_0 \ t_f], y_0);$$

En este caso la solución numérica se almacenará en el vector y para cada uno de los instantes de tiempo presentes en el vector t .

La función *ode45*, resuelve ecuaciones del tipo $\dot{y} = f(t, y)$, por tanto si se desea resolver ecuaciones de orden superior estas deben escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

A manera de ejemplo, se ilustrará la forma de resolver la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \tag{B.1}$$

donde $\mu > 0$ es un parámetro escalar. Por tanto, definiendo

$$y_1 = x; \quad y_2 = \dot{x}, \quad (\text{B.2})$$

la expresión (B.2) puede ser reescrita como

$$\dot{y}_2 = \mu(1 - y_1^2) y_2 + y_1$$

es decir, transformando la ecuación diferencial original de segundo orden y una variable, en una ecuación diferencial equivalente de primer orden y dos variables.

Así entonces, es posible construir el vector

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

cuya dinámica viene representada por

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} f_1(t, y) \\ f_2(t, y) \end{bmatrix}$$

Siendo

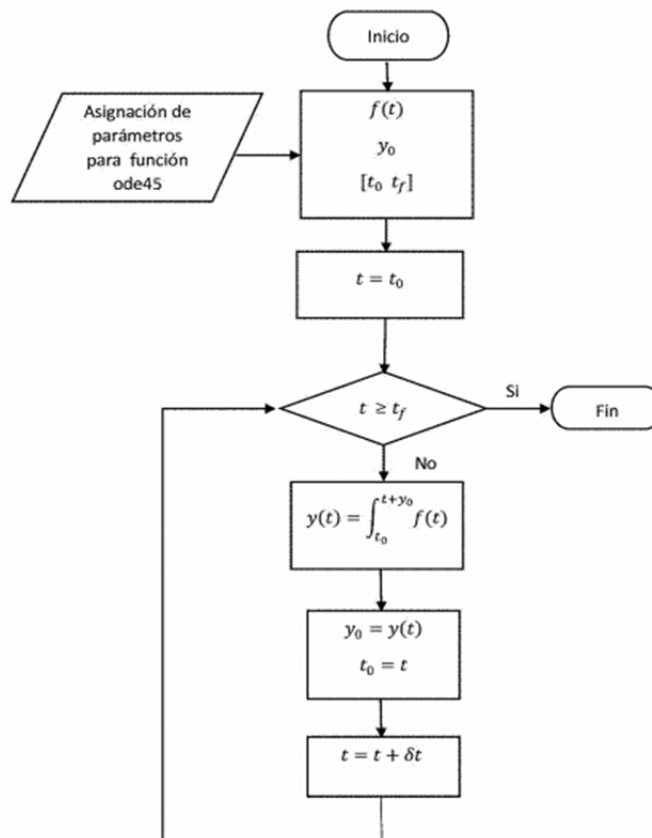
$$f_1(t, y) = y_2; \quad f_2(t, y) = \mu(1 - y_1^2) y_2 + y_1$$

De esta manera, evaluar la expresión (B.1) permite obtener una matriz de salida y con filas representando los vectores solución para y_1 e y_2 como función de t .

En la Figura. B.1 se ilustra el diagrama de flujo del algoritmo empleado para hallar la solución de una ecuación diferencial mediante integración numérica empleando la función ode45 de MATLAB.

Inicialmente, se deben asignar los parámetros definidos en la ecuación (B.1). Posteriormente, un bucle interno hace llamado iterativo a la función $f(t)$ evaluada para valores de tiempo entre t_0 y t_f a partir de las condiciones iniciales y_0 . Para cada ciclo la condición inicial se recalcula siendo la condición final del ciclo anterior. El tiempo se incrementa en un tamaño de paso δt de forma adaptativa, si no se especifica lo contrario. Tras alcanzarse el tiempo final t_f , el bucle interno termina y entrega como resultado el vector de puntos de la trayectoria solución $y(t)$ al igual que el vector de tiempos t .

Figura B.1: Diagrama de flujo para algoritmo de integración numérica



ANEXO C. CÓDIGOS DE SIMULACIÓN Y EJECUCIÓN