

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN, EN GRADO  
QUINTO, MEDIANTE LA INMERSIÓN Y MANIPULACIÓN DE  
POLICUBOS

DELFA BARRERA DUARTE  
JENY PAOLA NIÑO GARZÓN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2008

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN, EN GRADO  
QUINTO, MEDIANTE LA INMERSIÓN Y MANIPULACIÓN DE  
POLICUBOS

DELFA BARRERA DUARTE  
JENY PAOLA NIÑO GARZÓN

Trabajo de grado para optar al Título de  
Licenciada en Matemáticas

Director:  
LIC. JORGE NORIEGA GUARÍN

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2008

## **AGRADECIMIENTOS**

*Principalmente a Dios, por darnos  
fortaleza y por guiar nuestros  
pasos en la realización de este trabajo.*

*A nuestras familias por su  
amor y apoyo incondicional.*

*Al profesor Jorge Noriega, por su  
colaboración y orientación que  
contribuyeron a la elaboración  
de nuestro proyecto.*

*A mis padres y hermanos porque sin  
su amor y apoyo incondicional,  
no habría sido posible  
realizar esta meta.*

*Jeny Paola Niño G.*

*A mi papá,  
A mis hermanas:  
Doris, Yolanda, Hinelda,  
Por brindarme su amor, confianza y apoyo incondicional.*

*A la memoria de mi mamá,  
quien deseó más que nadie, que sus hijas  
realizaran una carrera profesional.*

*Delfa Barrera Duarte*

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN .....	1
Objetivos .....	3
Capítulo 1. Marco teórico .....	4
1.1 Fundamentación histórica .....	6
1.2. Teoría de Piaget .....	9
1.2.1. Hemisferio derecho .....	12
1.2.2. Hemisferio izquierdo.....	12
1.3. Lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias en matemáticas .....	14
1.3.1. Lineamientos curriculares.....	14
1.3.2. Estándares básicos de competencias en matemáticas .....	14
1.4. Descripción de los participantes de la experiencia .....	20
Capítulo 2. Prueba diagnóstica .....	22
2.1. Reflexiones finales .....	25
Capítulo 3. Jugando y aprendiendo con los polígonos .....	28
3.1. Reflexiones finales .....	34
Capítulo 4. La inmersión y el volumen como espacio desplazado .....	37
4.1. Reflexiones finales .....	44
Capítulo 5. Comparando volúmenes .....	47
5.1. Reflexiones finales .....	51
Conclusiones.....	54
Recomendaciones.....	56
Glosario .....	57
Bibliografía .....	58
Anexos .....	60

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Construcción hecha con policubos por un grupo de estudiantes.....	31
Figura 2. Construcción hecha con policubos por un grupo de estudiantes.....	31
Figura 3. El nuevo nivel del agua luego de la inmersión.....	42
Figura 4. El peso no influye en el volumen.....	43

## LISTA DE ANEXOS

Anexo 1. Parte dos de la “prueba diagnóstico” resuelta por Santiago.....	61
Anexo 2. Parte dos de la guía “Jugando y aprendiendo con los policubos” resuelta por Santiago.....	62
Anexo 3. Parte dos de la guía “Jugando y aprendiendo con los policubos” resuelta por Yolima.....	63
Anexo 4. Parte dos de la guía “Jugando y aprendiendo con los policubos” resuelta por Harbey.....	64
Anexo 5. Parte uno de la guía “La inmersión y el espacio ocupado” resuelta por Yolima.....	65
Anexo 6. Parte uno de la guía “Comparando volúmenes” resuelta por Harbey.....	66
Anexo 7. Parte uno de la guía “Comparando volúmenes” resuelta por Santiago.....	67
Anexo 8 Parte uno de la guía “Comparando volúmenes” resuelta por Karen.....	68
Anexo 9 Parte uno de la guía “Comparando volúmenes” resuelta por Yolima.....	69

Anexo 10. Parte dos de la guía “Comparando volúmenes” resuelta por Harbey  
.....70

Anexo 11 Parte dos de la guía “Comparando volúmenes” resuelta por Iván  
.....71

**TÍTULO:** LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE VOLUMEN, EN GRADO QUINTO, MEDIANTE LA INMERSIÓN Y MANIPULACIÓN DE POLICUBOS\*

**AUTOR(AS):** BARRERA DUARTE, Delfa  
NIÑO GARZÓN, Jeny Paola\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Geometría, Volumen, Material Didáctico, Inmersión.

### RESUMEN

Para la realización de este trabajo se usaron algunas estrategias metodológicas específicas enfocadas esencialmente hacia la construcción del concepto de volumen en niños de grado quinto, mediante el uso de policubos y la inmersión, promoviendo la observación directa y la manipulación de material didáctico, a su vez, permitiendo desarrollar especialmente el pensamiento espacial y métrico en los estudiantes.

La experiencia se llevó a cabo en un grupo de 39 estudiantes de grado quinto, del colegio Liceo Patria, institución pública de la ciudad de Bucaramanga; sin embargo, para el análisis cualitativo, se hizo estudio de casos tomando la información de cinco niños, a partir de las guías desarrolladas, y de las discusiones con y entre estudiantes, realizadas en el aula de clase.

Las actividades se iniciaron haciendo construcciones de figuras con policubos, en las cuales los estudiantes lograban identificar fácilmente las tres dimensiones a través de transformaciones de romper y rehacer; siguiendo con actividades de vaciar para comparar contenidos, es decir, relacionando la cantidad de espacio que ocupan dos o más cajas con el número de policubos que caben en cada una de ellas, y luego se utiliza la inmersión de cuerpos irregulares para ver el espacio ocupado como la cantidad de agua desplazada; partiendo con actividades de moldear para construir figuras de igual volumen, pasando a cuerpos con distinta forma y tamaño, culminando con objetos de igual forma y tamaño pero diferente peso permitiendo evidenciar que el peso no influye en el volumen.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Licenciatura en Matemáticas. Director Lic. Jorge Noriega Guarín

**TITLE:** THE CONSTRUCTION OF THE VOLUME CONCEPT, IN DEGREE FIFTH,  
BY MEANS OF THE IMMERSION AND MANIPULATION OF POLICUBOS\*

**AUTHORESSES:** BARRERA DUARTE, Delfa  
NIÑO GARZÓN, Jeny Paola\*\*

**KEY WORDS:** Geometry, Volume, Didactic Material, Immersion.

### SUMMARY

For the accomplishment of this work some specific methodological strategies were used focused essentially towards the construction of the volume concept, in children of degree fifth, by means of the use of policubos and the immersion, promoting the direct observation and the manipulation of didactic material, as well, allowing to specially develop the space and metric thought in the students.

The experience was carried out in a group of 39 students degree fifth, the school Liceo Patria, public institution of the city of Bucaramanga; nevertheless, for the qualitative analysis, study was done of cases taking the information from five children, from the developed guides, and of the discussions with and between students, made in the class classroom.

The activities was started doing constructions of figures with policubos, in which the students reached to identify easily the three dimensions throught the transformations to break and remake, following with activities to empty to compare contents, its means relationanding the quantity of space to occupate two or more boxe with the number of policubos that fit in each one of them and, after it use the inmersion of irregular bodies to see the occupate space such as the quality of displaced water; starting with activities molding to build figures of same volume, passing to bodies with different form and size, finishing with objects with the same form and size but different height permitting to show that the height doesn't affect in the volume.

---

\* Grade work

\*\* Faculty of Sciences. Licenciante in Mathematics. Director Lic. Jorge Noriega Guarín

## INTRODUCCIÓN

Históricamente se dice que las matemáticas comenzaron gracias a la geometría; los inicios de esta, de acuerdo con la mayoría de versiones, fueron en Egipto a partir de los continuos desbordamientos del río Nilo que borraba los límites territoriales obligando a los habitantes a reconstruir los linderos que formarían las mismas porciones de tierra que correspondía a cada uno.

A pesar de la influencia de la geometría en el desarrollo de las matemáticas, esta no ha sido valorada como tal y, de algún modo, relegada del programa para enseñanza de las matemáticas en los distintos niveles de la educación básica, negando el desarrollo del pensamiento espacial en los estudiantes entendido este como “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construye y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” (Lineamientos Curriculares, Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998, pág. 56) y por ende, desconociendo las matemáticas desde el punto de vista geométrico; es así como se deben explorar alternativas didácticas en la educación matemática, que sean mediadoras en la apropiación de procesos y conocimientos básicos, donde según los lineamientos curriculares, la geometría constituye una importante fuente de modelación y un campo por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial; desde esta perspectiva los énfasis en el hacer matemático escolar estarían en aspectos como: el desarrollo de la percepción espacial y de las intuiciones sobre las figuras bidimensionales y tridimensionales, la comprensión y uso de las propiedades de las figuras y las interrelaciones entre ellas, así como el efecto que ejerce sobre ellas las diferentes transformaciones, el reconocimiento de propiedades, relaciones e

invariantes a partir de la observación de regularidades que conduzca al establecimiento de conjeturas y generalizaciones.

Esta propuesta surge desde el interés de las autoras por plantear una estrategia metodológica que sea mediadora en el proceso enseñanza-aprendizaje de la geometría y que permita a los estudiantes la construcción de sus propios conceptos, en particular el de volumen; llevando a cuestionar si **¿Es posible la construcción del concepto de volumen, en grado quinto, mediante la inmersión y la manipulación de policubos?**

Siendo la construcción del concepto de volumen el objetivo primordial de esta propuesta educativa a través de la inmersión y la manipulación de policubos, se trató de inducir a los niños de quinto grado a aprehender el concepto de volumen, por ser este uno de los temas que los mismos docentes señalan como un contenido difícil de enseñar y de aprender; en general, es en la enseñanza de la geometría, en donde los docentes presentan mayor apatía ya sea por su escasa capacitación en la misma o por el miedo a enfrentarse a un cambio del modelo tradicional; a juicio de Freudenthal (1983) el volumen es un tema que a primera vista parece no tener demasiadas complicaciones, pero en realidad se trata de un concepto de mucha complejidad.

## **OBJETIVOS**

### **OBJETIVO GENERAL**

Construir el concepto de volumen, con niños de quinto grado, haciendo uso de policubos y la inmersión de objetos.

### **OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Hacer un diagnóstico a los niños de quinto grado sobre la capacidad de estimación de longitud y área.
- Usar los policubos como herramienta para la construcción del concepto de volumen.
- Construir el concepto de volumen a partir de la inmersión de objetos.
- Comparar volúmenes teniendo en cuenta formas y tamaños.
- Reconocer que el peso de un objeto no influye en su volumen.



# Capítulo 1

## Marco Teórico

*“La geometría es aprehender el espacio...  
ese espacio en el que vive, respira, y se mueve el niño.  
El espacio que el niño debe aprender a conocer, explorar y  
conquistar, para poder vivir,  
respirar y moverse en él”*

Freudenthal

En este capítulo se habla sobre algunos elementos que se consideraron claves en el desarrollo de esta monografía, haciéndose necesario partir de una revisión histórica del concepto de volumen desde su surgimiento hasta algunas investigaciones de aula recientes, con el fin de describir ciertas ideas que permitan observar los diferentes enfoques y dificultades de este concepto.

En la siguiente sección se hace mención de aportes psicológicos desde el punto de vista de Piaget con respecto al desarrollo cognitivo de los estudiantes; a la vez se hace referencia al espacio y el lenguaje que forman parte del desarrollo y comunicación de ideas matemáticas, ligados a las actividades de diferentes mitades del cerebro.

Resulta necesario incluir en este capítulo, sección 3, los planes o programas de estudio en matemáticas para la educación en grado quinto, conocidos como Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, en particular los relacionados con el pensamiento espacial y métrico, propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), ya que estos “...constituyen uno de los parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado a su paso por el sistema educativo...” (MEN, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, 2006, pág. 9). En esta misma sección se establece la importancia de la implementación del material didáctico en las aulas de clase.

Por último y no menos importante, en la sección 4 se habla del lugar y de los participantes que hicieron posible esta experiencia, haciendo una breve descripción de sus gustos o dificultades en las matemáticas.

## 1.1 FUNDAMENTACIÓN HISTÓRICA

Para hablar del concepto de volumen es importante hacer una revisión histórica, con el propósito de describir el desarrollo de las ideas matemáticas relacionadas con este concepto y así tener una visión de la evolución del mismo a lo largo de la historia.

Los principales aportes de los egipcios se encuentran en papiros, el de Rhind que es un rollo de 6 metros de largo por 75 centímetros de ancho y fue escrito alrededor del año 1650 a.C. por el escribano Ahmes, contiene 87 problemas, actualmente se encuentra en el Museo Británico en Londres. El papiro de Moscú, también conocido como papiro Golesmichev, contiene 25 problemas entre los cuales se ven las reglas para el área de las figuras planas más simples, así como problemas relativos a la construcción de pirámides; por ejemplo uno de ellos parece representar un trapecio, pero cálculos asociados indican que se trata de un método para hallar el volumen de una pirámide truncada.

La obtención del volumen de un cilindro aparece como la necesidad de calcular la capacidad de un contenedor de granos; para ello los egipcios lo hacían de dos maneras diferentes, a veces, calculaban el volumen con una fórmula que permitía obtener el resultado directamente en unidades de volumen de granos; en otras, calculaban el volumen usando la fórmula del área de la base por la altura y al final hacían la transformación de las unidades obtenidas a las de capacidad. Existe una controversia en cuanto a si los egipcios conocían la fórmula para obtener el volumen de una pirámide truncada o conocían un procedimiento particular para obtener dicho cálculo.

Uno de los principales personajes que estudió cómo medir el volumen de los cuerpos y en especial el de los irregulares fue Arquímedes (287-212 a.C.), a

quien se le atribuye el principio el cual lleva su nombre y que surgió debido a una petición hecha por Hierón, en ese entonces rey de Siracusa (ver esta historia en el capítulo 4, pág. 37), cuyo enunciado es el siguiente:

*“Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje vertical y hacia arriba igual al peso del fluido desalojado”.*<sup>1</sup>

Ya para el siglo III d.C., los chinos conocían la fórmula para calcular el volumen de una pirámide truncada y la habían demostrado por un medio puramente geométrico, que consistía en dividir la pirámide en un paralelepípedo central, cuatro pirámides cuadrangulares rectas y cuatro prismas triangulares.

Los escritos de Arquímedes que datan de 250 a.C., donde utiliza el método de exhaustión, inspiran a Kepler y Galileo alrededor de 1554, quienes dedican algunos de sus estudios al cálculo del volumen de sólidos de rotación de superficies; Kepler obtuvo la fórmula para el volumen de una esfera al considerarla compuesta por pirámides con vértices en el centro y bases infinitesimalmente cercanas a la superficie. “Kepler se propuso comparar la capacidad de los toneles para vino entonces en uso, para la cual estudió la capacidad de numerosos cuerpos de rotación obtenidos haciendo girar circunferencias o elipses o arcos de esas curvas alrededor de ejes paralelos a los ejes de las mismas. Describe y denomina, generalmente con nombres derivados de frutas, mas de 90 cuerpos” entre ellos tenemos “el volumen del limón”

A finales del siglo XV Bonaventura Cavalieri en su libro: *Geometria indivisibilibus continuorum*, muestra su método para obtener volúmenes el cual consiste en medir mediante lo que el llama los indivisibles. La idea de Cavalieri era la de considerar todos los planos paralelos a la base que cortan al cuerpo, en consecuencia se forman sólidos infinitamente delgados.

---

<sup>1</sup> Tomado de: <http://es.wikipedia.org/wiki/Arqu%C3%ADmedes>

Fermat, Roberval y Torricelli, a mediados del siglo XVII, partiendo de la teoría de los infinitesimales, concentran sus cálculos para obtener áreas, volúmenes y centros de gravedad. Algo sorprendente en aquella época, es el trabajo publicado en 1643 por Torricelli: *De solido hiperbolico acuto*; en donde se encuentra el cálculo del volumen que resulta finito de un sólido de revolución de extensión infinita.

Años más tarde, con la aparición de Newton (1642-1727) y de Leibniz (1646-1716), considerados por historiadores como los inventores del cálculo, surge la historia del concepto de volumen relacionada con la de concepto de integral; aunque estos “personajes” no fueron los primeros en resolver los problemas clásicos del cálculo, como obtener la cuadratura de curvas y tangentes, ni en darse cuenta que ambos procesos son inversos, si fueron los primeros en reconocer la importancia de este hecho. La integral estaba ligada con varios problemas, algunos de los cuales se refieren a la obtención de longitudes de arco, áreas de regiones en superficies y volúmenes de cuerpos.

Además de hacer un breve recorrido en la historia del concepto de volumen es importante mencionar y describir como se hace a continuación, los estudios realizados por otras personas que a pesar de no hacer referencia de manera puntual a la construcción de dicho concepto, constituyeron un punto de referencia para la realización de este trabajo, dichos estudios son:

- Figuras Geométricas: Relación entre su medida y su dimensión; monografía presentada por Claudia Liliana Rodríguez M., como requisito para optar al título de Especialista en Educación Matemática y dirigida por la Ph.D. Diana Jaramillo en Bucaramanga en el año 2004. Esta monografía se basó en una estrategia didáctica promoviendo la manipulación de material didáctico como son los cubos de madera entre otros, posibilitando a los estudiantes establecer relaciones entre medidas de las figuras – perímetro, área y volumen - con su dimensión.

- Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de volumen del cilindro, esfera, cono, cubo y pirámide a niños de sexto grado; monografía presentada por Claudia Caballero Camacho, como requisito para optar al título de Licenciada en Matemáticas y dirigida por Sterling Castañeda en Bucaramanga en el año 2002. Esta monografía se basó en el concepto de volumen de un sólido o cuerpo geométrico y obtener equivalencia entre el volumen del cilindro, con el de la esfera y el del cono y el volumen del cubo con el de la pirámide usando situaciones didácticas.
- El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto volumen y de su enseñanza; tesis presentada por Mariana Luisa Sáiz Roldán, como requisito para obtener el título de Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa y dirigida por la Doctora Olimpia Figueras Mourut de M. en México, D.F. en el año 2002. Esta tesis hace referencia a las concepciones de los profesores y su influencia en el aprendizaje de sus alumnos y a su vez, sobre los procesos de aprendizaje y de enseñanza del concepto matemático de volumen.

## **1.2. TEORIA DE PIAGET**

Las implicaciones del pensamiento piagetiano en el aprendizaje inciden en la concepción constructivista del mismo. Entre los principios de dicho pensamiento, sobre el aprendizaje se encuentran:

- La interacción social favorece el aprendizaje.
- La experiencia física supone una toma de conciencia de la realidad que facilita la solución de problemas e impulsa el aprendizaje.

- Las experiencias de aprendizaje deben estructurarse de manera que se privilegie la cooperación, la colaboración y el intercambio de puntos de vista en la búsqueda conjunta del conocimiento (aprendizaje interactivo).

La teoría de Piaget descubre los estadios de desarrollo cognitivo desde la infancia a la adolescencia dividiéndolos en cuatro periodos<sup>2</sup> (sensoriomotor, preoperacional, operaciones concretas y operaciones formales) definiéndolos como cambios en el desarrollo cognitivo del ser humano, relacionados con la forma en que este entiende el mundo que lo rodea.

- *Periodo Sensoriomotor* (0-2 años): En este periodo los bebés entienden el mundo a través de su interacción con él. Sus acciones motoras reflejan los esquemas sensoriomotores, patrones generalizados de acciones para entender el mundo como el reflejo de succión. Gradualmente los esquemas se van diferenciando entre si e integrando en otros esquemas, hasta que al final de este periodo los bebés ya pueden formar representaciones mentales de la realidad externa.
- *Periodo preoperacional* (2-7 años): En este periodo los niños pueden utilizar representaciones (imágenes mentales, dibujos, palabras, gestos) más que solo acciones motoras para pensar sobre los objetos y los acontecimientos. El pensamiento es ahora mas rápido, mas flexible y eficiente y mas compartido socialmente. El pensamiento está limitado por el egocentrismo, la focalización en los estados perceptivos, el apoyo en las apariencias más que en las realidades subyacentes, y por la rigidez (falta de reversibilidad).
- *Periodo de operaciones Concretas* (7-11 años): En este periodo los niños adquieren operaciones - sistemas de acciones mentales internas que subyacen al pensamiento lógico. Estas operaciones reversibles y

---

<sup>2</sup> <http://www.monografias.com/trabajos18/geometria/geometria.shtml#reseña>

organizadas permiten a los niños superar las limitaciones del pensamiento preoperacional. Se adquieren en este periodo conceptos como el de conservación, inclusión de clases y adopción de perspectiva. Las operaciones concretas pueden aplicarse solo a objetos concretos-presentes o mentalmente representados.

- *Periodo de operaciones Formales* (11-15 años): En este periodo las operaciones mentales pueden aplicarse a lo posible e hipotético, además de lo real al futuro así como al presente y a afirmaciones o proposiciones puramente verbales o lógicas. Los adolescentes adquieren el pensamiento científico, con su razonamiento hipotético-deductivo, y el razonamiento lógico con su razonamiento interproposicional. Pueden entender ya conceptos muy abstractos.

Piaget sostenía que los niños que se encuentran en estadio de operaciones concretas o inferior no pueden manejar con significación símbolos que no se hallen firmemente relacionados con acciones físicas, sean estas reales o imaginarias. Hacia los 16 años de edad, la mayoría de los jóvenes no parecen haber trascendido aún el estadio de operaciones concretas. Por consiguiente, es posible que estos jóvenes y en particular los rezagados dependan de conceptos espaciales para comprender algo en cualquiera de las áreas de las matemáticas.

Siguiendo la teoría de Piaget se puede afirmar que los niños participantes de la experiencia (sección 1.4) se encuentran en el periodo de operaciones concretas permitiendo de este modo el uso de material didáctico, donde los estudiantes al manipular dicho material lograrán desarrollar aspectos del aprendizaje de las matemáticas las cuales pueden hallarse ligados a las actividades de diferentes mitades del cerebro.

Sharma (1979) basado en una reseña bibliográfica clasifica las actividades que desempeñan cada uno de los hemisferios, donde las funciones lingüísticas están a cargo del hemisferio izquierdo y el pensamiento espacial del hemisferio derecho.

#### 1.2.1. *Hemisferio derecho*<sup>3</sup>

- El hemisferio derecho “piensa” en imágenes.
- Se ocupa de aspectos espaciales y visuales.
- La información se procesa en función de su configuración global.
- La información visual reprocessa y elabora desde el todo hacia las partes.
- El hemisferio derecho es el centro de la intuición y la creatividad.
- Es capaz de comprender un lenguaje sencillo y elaborar el pensamiento abstracto en cierta extensión utilizando símbolos y operaciones mentales asociadas a la aritmética sencilla, pero las respuestas tan solo pueden ser expresadas señalando opciones presentadas en forma visual.
- El hemisferio derecho memoriza hechos.
- Registra visualmente y se comunica por medio de acciones e imágenes.
- El hemisferio derecho parece ser el centro para la información que ha de ser percibida, comprendida y recordada.
- La información que recibe el hemisferio derecho puede ser comunicada a través del hemisferio izquierdo por medio del lenguaje escrito y hablado.

#### 1.2.2. *Hemisferio izquierdo*<sup>4</sup>

- El hemisferio izquierdo piensa en palabras.
- Se ocupa en separar las partes que constituyen un todo
- Se especializa en combinar las partes para crear un todo

---

<sup>3</sup> Osorio A. Rosalba, Hacia una didáctica de la Geometría (aportes y reflexiones), Bucaramanga, Pág. 4

<sup>4</sup>Ibíd., Pág. 4

- Se dedica a la síntesis
- Busca y construye relaciones entre las partes separadas
- Procesa la información a razón de un “bit” por vez.
- La información es organizada secuencialmente.
- El hemisferio izquierdo es el centro de la comunicación del lenguaje en lo relacionado con la lectura y habla, y se ocupa de la comprensión y organización del lenguaje.
- La descripción de los materiales visuales recibidos en el hemisferio izquierdo se hace en forma hablada o escrita.
- Se ocupa del procesamiento de información en el nivel abstracto del lenguaje y palabras.

La diferencia entre los dos hemisferios no significa, que no tenga un funcionamiento complementario, es decir, que no se piensa con un hemisferio o con el otro; ambos hemisferios están implicados en procesos cognoscitivos más altos especializados en imágenes y en relaciones no lineales.

Se hace por tanto necesario crear algunas pautas que constituyan puntos de apoyo y orientación general que permitan crear procesos de reflexión, análisis crítico y acoplamiento por parte de los maestros, y que estén acorde con el nivel cognitivo, de los estudiantes; por ello el MEN plantea dichas pautas, para Colombia, las cuales denomina Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, donde sugieren el material didáctico como mediador en la enseñanza de las matemáticas.

### **1.3. Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas**

#### *1.3.1. Lineamientos Curriculares*

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (en Colombia) se propone organizar el currículo como un todo armonioso alrededor de tres grandes aspectos, los cuales a su vez se deben tener en cuenta al momento de elegir temas, planear y desarrollar actividades escolares; dichos aspectos:

- **Procesos generales:** tienen que ver con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.
- **Conocimientos básicos:** tienen que ver con los procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas.
- **El contexto:** tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas.

#### *1.3.2. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*

El MEN propone unos nuevos elementos teóricos y metodológicos que pretenden actualizar la estructura curricular de la educación matemática en

Colombia, conocidos como los estándares básicos de competencias en matemáticas, respetando la autonomía institucional del proyecto educativo de cada institución; expresan una situación deseada en cuanto a lo que se espera que todos los estudiantes aprendan en cada una de las áreas a lo largo de su paso por la Educación Básica y Media, especificando por grupos de grado (de 1º a 3º, de 4º a 5º, de 6º a 7º, de 8º a 9º, y de 10º a 11º).

En los estándares se pueden identificar al menos dos aspectos básicos: la introducción de diferentes tipos de pensamientos matemáticos (numérico, espacial, métrico, variacional y estadístico), y el llamado de atención sobre la importancia del desarrollo de unos procesos de aula que permitan el aprendizaje de las matemáticas en contextos significativos para los alumnos, tomando como eje central para dicha contextualización las situaciones problema.

Para los fines de este trabajo se hace mayor énfasis en los pensamientos espacial y sistemas geométricos, métrico y sistema de medida, estipulados para los grados 4º y 5º.

#### *Pensamiento espacial y sistema geométrico*

*“En los sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales” (Lineamientos Curriculares, MEN,1998, pág. 56)*

A pesar que las actividades cotidianas siempre están relacionadas con la geometría, la preocupación por adquirir destrezas numéricas ha opacado en

cierto modo, la importancia de crear las posibilidades para el desarrollo del pensamiento espacial como un eje central de procesos de conceptualización, que lleve a los alumnos a la construcción de un pensamiento ágil, flexible, con sentido y significado para su vida diaria, que le permite posicionarse como integrante del espacio, pero que a la vez puede interactuar con él, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, entre otros, reflexionando y razonando sobre algunas propiedades geométricas; para alcanzar estos logros el MEN sugiere, que al terminar quinto grado, los estudiantes deben:

- Comparar y clasificar objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades.
- Comparar y clasificar figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.
- Identificar el ángulo como giros, aberturas, inclinaciones en situaciones estáticas y dinámicas.
- Utilizar sistemas de coordenadas para especificar localizaciones y describir relaciones espaciales.
- Identificar y justificar relaciones de congruencia y semejanza entre figuras.
- Construir y descomponer figuras y sólidos a partir de condiciones dadas.
- Hacer conjeturas y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños.

- Construir objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.

### *Pensamiento métrico y sistemas de medidas*

*“Los procesos de medición comienzan desde las primeras acciones con sus éxitos y fracasos codificadas como más o menos, mucho o poco, grande o pequeño, en clasificaciones siempre relacionadas en alguna forma con imágenes espaciales, esto es con modelos geométricos, aún en el caso del tiempo” (Lineamientos Curriculares, MEN, 1998, pág. 62).*

El pensamiento métrico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes, su cuantificación y su uso con sentido y significado para la comprensión de situaciones en contextos. La medida de las magnitudes en el contexto escolar, requiere de una reflexión sobre las relaciones entre las matemáticas y la realidad la cual no parece tenerse en cuenta por muchos docentes de matemáticas, pues los estudiantes se ven en tareas de conversión de unidades, sin haberse acercado conceptualmente a las magnitudes y sus medidas, sin darse cuenta de la necesidad misma de medir; por ello el MEN sugiere, que al terminar quinto grado, los estudiantes deben:

- Diferenciar atributos mensurables de los objetos y eventos (longitud, superficie, volumen, capacidad, masa-peso, tiempo, y amplitud angular) en diversas situaciones.
- Seleccionar unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes dimensiones.
- Utilizar y justificar el uso de la estimación en situaciones de la vida social, económica, y en las ciencias.

- Utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar la medida de superficies y volúmenes.
- Justificar relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos.
- Reconocer el uso de algunas magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa, duración, rapidez, temperatura) y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Describir y argumentar relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando es constante una de las dimensiones.

Los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas permiten identificar la importancia de implementar en las aulas de clase actividades donde el material didáctico sea un mediador en el proceso enseñanza-aprendizaje, que permita al estudiante hacer uso de su razonamiento e iniciar una discusión, como una sólida referencia para juzgar la validez de sus afirmaciones, en lugar de que el maestro sea el único con facultad para corregir. Es importante aclarar que la manipulación de material no es un fin en sí mismo, ni tampoco provoca un paso directo al concepto matemático, sino que, a través de las actividades realizadas con los materiales auxiliares concretos, el niño puede avanzar en un proceso de abstracción de los conocimientos matemáticos. Froebel reconoce que el tacto es otro medio perceptivo capaz de entregar conocimiento al niño y aconseja que aprenda, por ejemplo, a reconocer las formas geométricas por el tacto y no solamente por la vista; también señala que en un orden evolutivo de desarrollo infantil, es el medio que más temprano aparece.

Piaget afirma que la geometría es el resultado de la exploración del medio; el niño desde que nace, con sus diferentes movimientos está explorando el espacio, a medida que va creciendo físicamente también va creciendo su espacio por el contacto que tiene con su mundo, con su realidad y la manipulación de objetos; es por esto que el conocimiento no se adquiere sino que se construye con la realidad en que se vive y siendo el maestro quien fomenta esta construcción a través del juego, como de actividades individuales y en grupo.

Para construir el concepto de volumen con niños de quinto grado, se pensó en realizar actividades en las cuales la manipulación de material didáctico fuera primordial para la construcción de dicho concepto; es importante “[...] involucrar significativamente la manipulación y la experiencia con los objetos que sirven de apoyo a los procesos de construcción sin restar importancia desde luego a la comprensión y a la reflexión, que posteriormente deben conducir a la formalización rigurosa” (MEN, 1998). Además, las recomendaciones de los expertos apuntan a que el estudio de fórmulas y otros contenidos de tipo cuantitativo debe ser aplazado; en la educación básica primaria se debe dar importancia a aspectos de tipo cualitativo que familiaricen al niño con determinado concepto mediante actividades concretas de manipulación, donde el maestro tenga pleno conocimiento del material a ser utilizado y de cómo lo va a utilizar.

El material didáctico que se usó para la enseñanza del concepto de volumen fue los políedros y algunos objetos de forma irregular como piedras, bolas de ping-pong, arcilla y huevos utilizados como ejemplo para comparar el volumen de dichos objetos; se quiere que los estudiantes descompongan y compongan figuras de distintas formas con igual volumen que les permita una mejor conceptualización; siguiendo, de esta forma, a Froebel quien aconseja dividir en trozos las figuras geométricas para que el niño, jugando, reúna los trozos en

un todo con sentido y reconozca el cómo están hechos los objetos; pasando del todo a las partes y volviendo a integrarlas en un todo.

#### **1.4. DESCRIPCIÓN DE LOS PARTICIPANTES DE LA EXPERIENCIA**

Esta experiencia se realizó en el colegio Liceo Patria, institución pública, ubicado en la Cra. 33 18-53 Quinta Brigada Los Pinos, en la ciudad de Bucaramanga, la cual actualmente cuenta con 1278 estudiantes, en ambas jornadas, donde predomina el estrato 4, resaltando que 499 de la totalidad de los estudiantes, son hijos de militares.<sup>5</sup>

Las actividades realizadas para este trabajo, se llevaron a cabo con un grupo de 39 estudiantes de grado Quinto, sin embargo, para el análisis se hizo estudio de casos tomando la información de cinco niños: Karen, Yolima, Santiago, Iván y Harbey<sup>6</sup>; dicha información fue recogida a partir de las guías desarrolladas en clase, y de las discusiones con y entre estudiantes. Se tuvo en cuenta como criterio para la selección de dichos estudiantes los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, escogiendo tres de los estudiantes que manifestaron confusión e inseguridad en sus respuestas y dos estudiantes cuyas respuestas demostraban mayor claridad en los conceptos. A continuación se hace una presentación de los cinco estudiantes:

Santiago es un niño de 11 años, manifiesta gusto hacia las matemáticas y su pasión por resolver pasatiempos de números, rompecabezas, entre otros. A pesar de su participación constante durante las clases y que sus preguntas

---

<sup>5</sup> Estos datos fueron facilitados por la secretaría del colegio.

<sup>6</sup> Los nombres utilizados en este trabajo son ficticios, debido a que no se solicitó la respectiva autorización para publicar los nombres reales.

generan debates entre sus compañeros, los resultados en sus evaluaciones no son los esperados.

Karen es una niña de 10 años, le gusta las matemáticas y a pesar que no se le facilitan, siempre se esfuerza porque las cosas le queden bien y por encontrar una razón coherente a los temas tratados.

Iván tiene 12 años, es inquieto, con poca capacidad de concentración que lo lleva a distraer a sus compañeros, son constantes sus comentarios sobre el poco agrado por las matemáticas; según su profesora directora de curso, este niño presenta problemas psicológicos que le impiden un buen desempeño académico.

Yolima tiene 10 años, es una niña callada y poco activa en las clases, pero sus resultados muestran destrezas en el área de matemáticas; ella manifiesta que esta no es su área predilecta.

Harbey es un niño bullicioso de 11 años, que está a la expectativa de los errores de sus compañeros para reprocharles y mostrarse como el “sabiondo” del curso; su desempeño en general es bueno.



## Capítulo 2

# Prueba Diagnóstico

"Dadme un punto de apoyo y os moveré el mundo."

Arquímedes

El objetivo primordial de la prueba diagnóstica (ver págs. 26 y 27) era conocer la capacidad de estimación de longitud y área en los niños de quinto grado y a su vez, observar la actitud de los estudiantes frente a este tipo de actividades donde la justificación y la argumentación eran de vital importancia para obtener información sobre su nivel cognoscitivo, aspecto que serviría como un importante punto de partida para diseñar las actividades con las cuales se inducirían a los estudiantes a la construcción del concepto de volumen

*“...importa más el ejercicio de competencias o formas de actuación que puedan ser nombradas como características del conocimiento matemático en general, y lógico en particular, además de las actitudes de los estudiantes. Con este punto de vista interesa observar los cambios de los alumnos desde sus estados iniciales de conocimiento y actuación (evaluación diagnóstica)...” (MEN 1998, pág. 107)*

El primer punto de la actividad se diseñó de tal forma que los estudiantes mostraran sus conocimientos acerca de áreas teniendo en cuenta que ellos deberían descubrir la unidad de medida para resolver el ejercicio, seguido a esto se planteó una actividad donde los estudiantes debían identificar las dimensiones largo, ancho y alto de un paralelepípedo e hicieran comparaciones entre los mismos. Para el siguiente punto de esta guía, se nombraron objetos con diferentes características tanto en su peso, como en su forma y dimensiones que permitieran proporcionar información acerca del conocimiento de volumen por parte de los estudiantes, así por ejemplo la hoja de papel, tiene una dimensión casi nula, sin embargo tiene volumen; también se nombraron objetos con distinto peso como el globo y el ladrillo pretendiendo vivenciar los análisis de algunos autores en los cuales mencionan la constante tendencia de los estudiantes y aún de los mismos profesores de relacionar el peso con el volumen.

En el *primer punto* de la actividad se encontró que la mayoría de los estudiantes tomaron cada uno de los cuadraditos como unidad de medida, por ende daban sus respuestas en función de los mismos, por ejemplo Santiago dijo que la figura de mayor área tenía 12 cuadrados mientras que la de menor área tenía 6 cuadrados. Se encontró que algunos niños optaron por trasladar partes de la figura para completar regiones que solo contuvieran cuadrados o formar figuras rectangulares para usar la fórmula del área de estos polígonos, mostrando con esto, el conocimiento de los estudiantes respecto a áreas; es de señalar que algunos estudiantes presentaban confusión entre área y perímetro, debido a que no contaban los cuadritos de la figura sino que encontraban las longitudes de los lados de la figura, midiendo con una regla, para luego sumarlas y el resultado era, para ellos, el área de la figura. Para el *segundo punto* se notó la facilidad que tienen los estudiantes para reconocer las tres dimensiones de un prisma rectangular, estimando longitudes y haciendo comparaciones entre las mismas.

En la *tercera actividad* se pudo evidenciar mediante la justificación del por qué de las respuestas de los estudiantes, las dificultades que tienen los mismos para reconocer que objetos como una hoja de papel ocupa espacio, encontrando respuestas como: “*la hoja de papel no ocupa espacio porque es plana*”, “*no ocupa espacio porque si lo ocupara, en ese espacio no puedo poner otra cosa pero yo puedo poner mi cuaderno encima*” (ver anexo 1, punto 3)

Se puede apreciar la tendencia que tienen los niños de relacionar el peso con el volumen, y de la importancia de plantear actividades relevantes de manera consecutiva que permitan notar los factores influyentes y los inoperantes en el volumen para contribuir, de esta manera, a la formación de ideas claras sobre tan complejo concepto.

## **2.1. REFLEXIONES FINALES**

A partir de la información recogida en la prueba diagnóstica, se pudo observar que la mayoría de los estudiantes tienen claridad respecto a los conceptos de área y longitud, lo cual favorecería el desarrollo del tema de volumen sin temor a que se presentaran muchas confusiones entre estos conceptos. De la misma manera permitió observar las concepciones erróneas que tenían los estudiantes en cuanto al concepto de volumen.



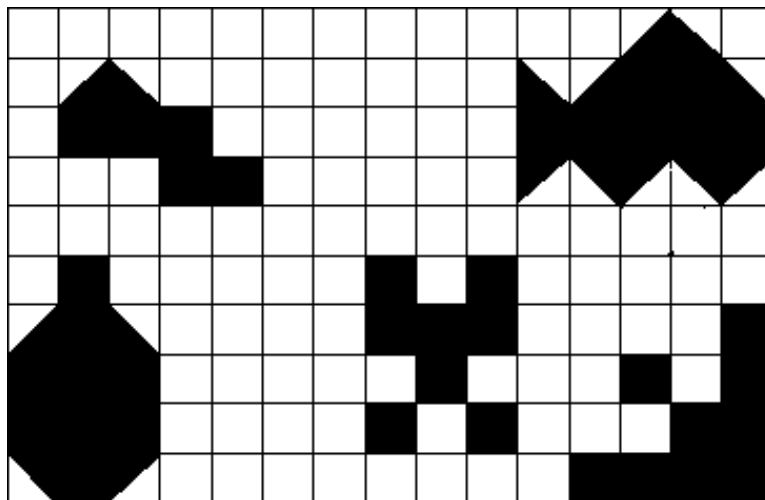
UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
PRÁCTICA PEDAGÓGICA  
COLEGIO LICEO PATRIA



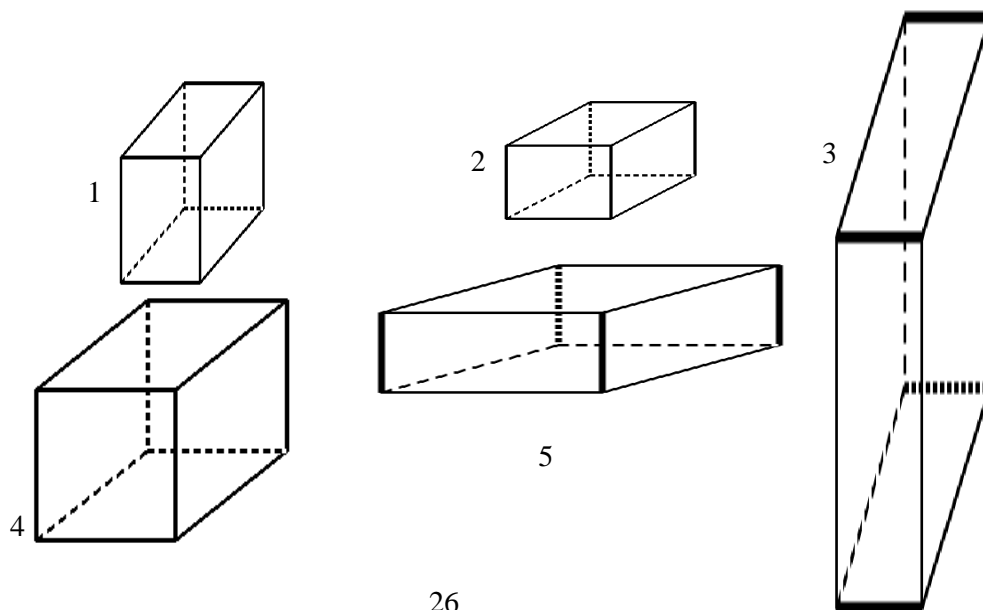
NOMBRE \_\_\_\_\_ GRADO \_\_\_\_\_

Objetivo: hacer un diagnóstico a los niños de quinto grado sobre la capacidad de estimación de longitud y área.

1) Ordene las siguientes figuras de menor a mayor área.



2)



Según la figuras responda falso o verdadero:


- La figura 1 es más alta que la figura 2 ( )
- La figura 4 es más ancha que la figura 1 ( )
- La figura 3 es más larga que la figura 5 ( )
- La figura 2 es más alta que la figura 4 ( )
- La figura 4 es más ancha que la figura 5 ( )
- La figura 3 es más alta que la figura 2 ( )
- La figura 1 es más larga que la figura 4 ( )

3) Complete la siguiente tabla:

Objeto	¿Ocupa espacio?		¿Por qué?
	si	no	
Piedra			
Hoja de papel			
Libro			
Balón			
Ladrillo			
Globo			
Naranja			



Guía elaborada por:  
Delfa Barrera  
Jeny Paola Niño



## **Capítulo 3**

### **Jugando y aprendiendo con los policubos**

*"Quién quiera enseñarnos una verdad, que no nos la diga,  
simplemente que nos ayude a construir algunas trayectorias,  
para que al deslizarnos sobre ellas lleguemos  
nosotros mismos a la nueva verdad"*

*Rosalba Osorio A.*

Para la realización de esta guía (ver págs. 35 y 36), se tuvo en cuenta los presaberes reflejados de los estudiantes en la prueba diagnóstico en cuanto, a las tres dimensiones de un cuerpo (largo, ancho, alto) y por tanto se empezó con el volumen como espacio ocupado por cuerpos fácilmente medibles, haciendo uso de policubos como una unidad de medida patrón; fue importante, inicialmente, aclarar ciertos términos a utilizar en el desarrollo de la guía tales como:

- **Policubos:** son cuerpos geométricos que ocupan un espacio y están formados por cubos iguales pegados por una de sus caras.
- **Espacio:** es el lugar que ocupa un objeto o cuerpo.
- **Cuerpo:** es aquella figura que tiene ancho, alto y largo.

El objetivo primordial de esta guía es usar los policubos como herramienta para la construcción del concepto de volumen ya que, según los lineamientos curriculares (1998), con la manipulación de material concreto se aprecia más que con cualquier definición la diferencia entre cuerpos y superficies; comparando la cantidad de espacio ocupado por diferentes figuras que tengan el mismo número de policubos, tomando cada uno de estos como medida patrón para determinar el volumen de ciertas cajas, de tal forma que los estudiantes reconozcan la existencia de cuerpos fácilmente medibles que ocupan la misma cantidad de espacio a pesar de tener diferentes formas y destacando la importancia de relacionar las tres dimensiones del cuerpo (largo, ancho, alto).

Un hecho importante es que los cálculos realizados por los egipcios y los babilonios no eran siempre exactos. Esto lleva a pensar en una recomendación didáctica tomada en cuenta en la actualidad tratando de centrar la atención de

los estudiantes en la necesidad de dividir un cuerpo en una unidad de medida para hacer una aproximación y proponerles situaciones en las cuales no se hace necesario un cálculo exacto.

Según M<sup>a</sup> del Carmen Chamorro (2003, pág. 265)

*“[...] considerar el volumen es de capital importancia, esto se logra solo en parte en la práctica recurriendo al llenado con cubos de un paralelepípedo rectángulo. La presentación clásica de la forma que da el volumen de un paralelepípedo rectángulo se limita a acompañar un dibujo del mismo, llenando con cubos o descompuesto en capas, lo que, evidentemente, no es suficiente para encontrar la relación entre la descomposición aditiva mostrada en el dibujo y la multiplicativa en función de las longitudes”*

Para el desarrollo de esta clase, inicialmente, se dio a conocer la herramienta de trabajo (policubos) y se hicieron algunas comparaciones en cuanto a la cantidad de espacio que ocupan dos policubos con respecto a lo que ocupa uno de estos, de igual forma para la cantidad de espacio que ocupan tres cubos con respecto a lo que ocupa uno; así mismo; se dieron a conocer los términos, que como se mencionó anteriormente, se utilizarían en la solución de la guía. Cabe aclarar que al terminar cada punto, se realizó una socialización con todos los estudiantes, pero siempre a la expectativa de la participación de los estudiantes seleccionados para el trabajo, con el fin de crear en ellos una buena participación que exigiera su capacidad de formular, construir nuevos saberes a partir de los ya conocidos e intercambiar conceptos con pares, capacitándolos a una mayor autonomía frente al conocimiento y adquiriendo



confianza en sí mismos en lugar de confiar en las respuestas de los textos o en la verificación que haga el profesor.

En el *primer punto*, se encontró que los estudiantes prefieren contar los policubos de uno en uno en lugar de hacer un recuento simplificado por capas;



sin embargo para algunos de los estudiantes en particular para Santiago y Harbey, el problema se redujo a multiplicar las cantidad de cubos que conformaban cada una de las tres dimensiones (ver anexo 2, punto 1), conduciendo a que los estudiantes, mediante la interacción y discusión entre

ellos, así como con sus orientadores, llegaron a la descomposición de las torres para luego armar unas nuevas que tuvieran la misma cantidad de pisos y el mismo número de policubos por piso, es decir la misma forma; siguiendo de manera inconciente a Froebel, quien aconseja partir del todo a las partes y volver a integrarlas en un todo con sentido, comprobando que las tres torres iniciales estaban ocupando la misma cantidad de espacio. Por tanto, es evidente el papel fundamental que juega la comunicación en los procesos de aprendizaje de las matemáticas puesto que se pueden interpretar y ligar varias ideas que permiten una consolidación del conocimiento; “la comunicación es la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas” (Lineamientos Curriculares, MEN, 1998, pág. 95).



Figura 1. Construcción hecha por un grupo de estudiantes.

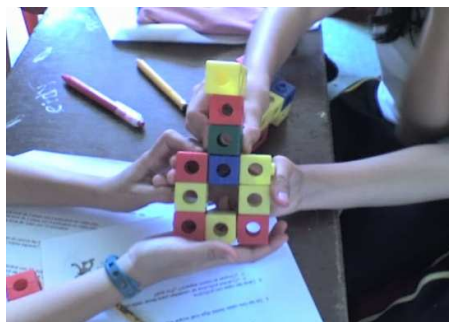
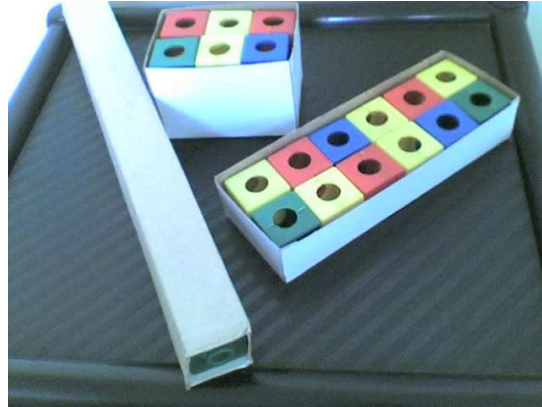


Figura 2. Construcción hecha por un grupo de estudiantes.

Para el *segundo punto*, los estudiantes construyeron una figura cualquiera utilizando la misma cantidad de policubos del punto anterior (12 policubos); se encontraron figuras (ver figura 1 y figura 2), en las que algunos estudiantes presentaban confusión al momento de determinar si ocupaban o no la misma cantidad de espacio que las torres del punto anterior, como era el caso de Iván y Karen quienes manifestaban que este tipo de figuras ocupaban mayor espacio, esto se debía a que ellos no tenían en cuenta el espacio vacío y multiplicaban las tres dimensiones (largo, ancho, alto), como era el caso de la figura 1, obteniendo de esta forma mayor cantidad de espacio. Santiago y Harbey hicieron caer en cuenta a sus compañeros que había una parte de espacio dentro de esa figura que no estaba ocupado, por tanto si hacían esa operación deberían descontar los policubos que faltaban en el centro; para que no existiera mayor dificultad, al multiplicar las tres dimensiones de la figura 2, los niños trasladaron uno de los policubos sobrepuestos al paralelepípedo hueco hacia el centro para cubrir el espacio vacío y de esta forma multiplicar las tres dimensiones del paralelepípedo además de sumar los policubos que sobraban para conseguir la cantidad total de espacio ocupado y verificar que la cantidad de espacio ocupado por cada una de estas figuras en comparación con las torres del punto anterior, eran exactamente la misma. Es importante insistir, en el importante papel que desempeña la comunicación en el proceso de aprendizaje en los estudiantes.

*“Las clases deberían caracterizarse por las conversaciones sobre las matemáticas entre los estudiantes y entre estos y el profesor. Para que los profesores maximicen la comunicación con y entre los estudiantes, deberían minimizar la cantidad de tiempo que ellos mismos dominan las discusiones en el salón de clase”* (NCTM, Professional Standard for Theachin Matematis-MEN, 1998, pág. 96).

Para las *actividades tres y cuatro* los estudiantes comparaban las cajas dadas respecto a la cantidad de espacio ocupado y verificaban sus hipótesis llenando cada una de las cajas con policubos; las cuales tenían distinta forma pero diseñadas de tal manera que ocuparan la misma cantidad de espacio, con el fin de que los niños tuvieran presente que para encontrar la cantidad de espacio que ocupaba



cada una de ellas se debía relacionar las tres dimensiones; para algunos estudiantes, la caja que mayor cantidad de espacio ocupaba era la que tenía una de las dimensiones más larga que las demás cajas, como era el caso de Yolima, quien a pesar de saber que la caja que mayor espacio ocupaba era la que tuviera mayores dimensiones, no tuvo la capacidad de comparar el espacio ocupado por las cajas (ver anexo 3, punto 3); en este punto los estudiantes se limitaron solo a nombrar determinada caja sin explicar el por qué de su respuesta, siendo evidente la falta de argumentación al momento de dar solución a determinado problema, así por ejemplo ellos escribían: “La *caja más larga ocupa más espacio*”, “*ninguna*”, “*ocupan el mismo espacio*”, “*la más ancha*”.

Para verificar o refutar las respuestas, los niños llenaron las cajas con policubos para ver qué cantidad cabía en cada una de estas, de tal forma que fuesen ellos mismos los que evaluaran sus respuestas y no solo fuera el profesor el que tuviera la facultad para corregir o hacer ciertas conclusiones con respecto a los resultados de la experiencia; llegando a concluir que todas las cajas ocupaban la misma cantidad de espacio ya que cabía el mismo número de policubos en cada caja.

En las anteriores actividades solo se vio el espacio ocupado por cuerpos fácilmente medibles tomando cada uno de los policubos como patrón de medida, por ello, para el último punto de la actividad, se le preguntó a los estudiantes: *¿cómo medimos el espacio ocupado por un balón o una naranja?* con el fin de crear en ellos la inquietud de cómo hacer para medir la cantidad de espacio ocupado por otros cuerpos en los que no se podía tomar los policubos como patrón de medida; se encontraron diversas respuestas que reflejaban su creatividad y a la vez su desconocimiento acerca del tema pues, como ya se ha mencionado, confundían peso con volumen (ver anexo 4, punto 5).

### **3.1. REFLEXIONES FINALES**

Los policubos como herramienta didáctica, representaron una gran riqueza en la construcción del concepto de volumen; los estudiantes partiendo de actividades simples como son contar; deshacer y rehacer; llenar y vaciar; y comparar, pudieron observar la influencia de las tres dimensiones en la cantidad de espacio ocupado por un cuerpo, y a la vez descubrir cómo objetos de diferente forma pueden tener el mismo volumen. Estas actividades participativas permitieron a estudiantes como Santiago, tener un aprendizaje significativo, mejorando sus aptitudes de ordenar y plasmar ideas por escrito. Además, los policubos ayudaron a comprobar algunas estimaciones hechas por los niños, respecto al espacio que ocupan algunos objetos huecos (cajas dadas), llenando dichos objetos con policubos, que fueron tomados como una unidad de medida.



NOMBRE \_\_\_\_\_ GRADO \_\_\_\_\_

Objetivo: Usar los polícubos como herramienta para la construcción del concepto de volumen.

## Jugando y aprendiendo con los polícubos

¿Qué son los polícubos y cuándo aparecieron?

Los polícubos son cuerpos geométricos que ocupan un espacio y están formados por cubos iguales pegados por una de sus caras. Unos polícubos muy famosos son los descubiertos en 1936 por el matemático danés Piet Hein.

Pero, ¿Qué es espacio?

Espacio es el lugar que ocupa un objeto o cuerpo.

Y de cuerpo, ¿Podría decir que es una figura que tiene tres dimensiones?

Si, un cuerpo es aquella figura que tiene ancho, alto y largo.



Teniendo en cuenta los conceptos anteriores podemos decir que un policubo ocupa un determinado espacio, luego el espacio ocupado por dos policubos es el \_\_\_\_\_ del \_\_\_\_\_ ocupado por un policubo; ahora decimos que tres policubos ocupan el \_\_\_\_\_ del \_\_\_\_\_ ocupado por un policubo.

### Usemos los policubos

En grupos de cinco estudiantes y con orientación del profesor realizar las siguientes actividades:

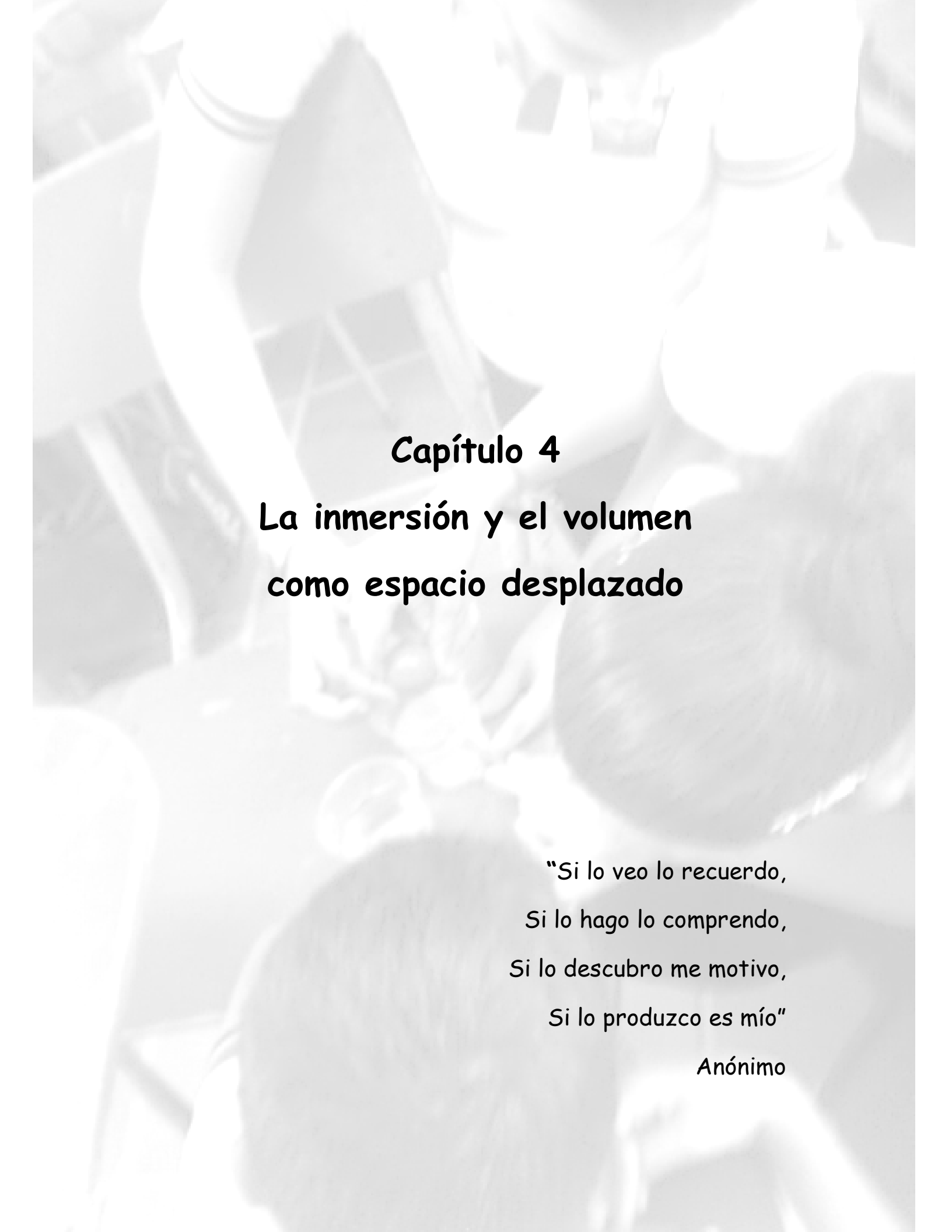
1. Arme una torre de 4 pisos con 3 policubos en cada piso.  
Arme una torre de 2 pisos con 6 policubos en cada piso.  
Arme una torre de 1 piso con 12 policubos.

Responda:

- ¿Qué tienen en común las tres torres?
  - ¿Ocupan el mismo espacio? ¿Por qué?
- 
2. Arme una figura cualquiera con 12 policubos.
    - ¿Qué puede decir de esta figura con respecto a las torres armadas en el punto anterior?
  3. De las tres cajas dadas diga cuál ocupa más espacio y por qué.
  4. Llene las cajas con policubos.
    - ¿Cuántos policubos se necesitan para llenar cada caja?
    - ¿Ocupan el mismo espacio? ¿Por qué?
  5. ¿Cómo medimos el espacio ocupado por un balón o una naranja?

Guía elaborada por:  
Delfa Barrera Duarte  
Jeny Paola Niño G.





## Capítulo 4

# La inmersión y el volumen como espacio desplazado

"Si lo veo lo recuerdo,  
Si lo hago lo comprendo,  
Si lo descubro me motivo,  
Si lo produzco es mío"

Anónimo

La inmersión facilita elementos para llevar a cabo una comparación indirecta de volúmenes, en particular de objetos de formas irregulares con un determinado peso que le permita sumergirse totalmente. Se comparan, por este procedimiento, cantidades de agua desplazada para obtener información sobre el volumen de los cuerpos sumergidos.

Esta actividad principalmente fue fundamentada en el principio de Arquímedes en el cual según cuenta la historia, Hierón rey de Siracusa debido a que había ofrecido a los dioses una corona de oro, pidió a un joyero que le fabricara una corona con cierta cantidad de oro previamente pesado; al ser entregada la corona el rey sospechó que el joyero le había elaborado una corona que no era de oro puro, sino que estaba mezclado con otro metal; hallándose en la necesidad de pedirle a Arquímedes, gran matemático de la época y allegado suyo, que se encargara de averiguar la composición de la corona sin provocar ningún daño a la misma, esta situación representó en un principio un gran problema para Arquímedes ya que no encontraba solución sin necesidad de destruir la corona.

Mientras Arquímedes se hallaba tomando un baño, observó que su cuerpo al sumergirse en la tina, desplazaba una cierta cantidad de agua, entonces se le ocurrió una brillante idea: *todo cuerpo desplaza una cantidad de agua exactamente igual a su volumen*, por tanto esta era una excelente manera de medir el volumen de un cuerpo irregular. Procedió Arquímedes a experimentar, y lo primero que hizo fue pesar la corona. Tomando una cantidad de oro puro, con el mismo peso de la corona, sumergió dichos objetos en recipientes diferentes con el fin de verificar que la cantidad de agua desalojada era exactamente la misma; dándose cuenta de lo contrario, pues observó que la cantidad de agua desplazada por el oro puro era menor que la desplazada por la corona y esto se debía a que la corona estaba hecha con una aleación de oro y otros materiales menos densos que este, por tanto Arquímedes demostró

que el joyero había engañado al rey, para su beneficio personal, por lo cual fue declarado culpable y ejecutado.

Estudios realizados por distintos autores, han mostrado la constante tendencia de estudiantes y aun de los profesores, de confundir el volumen con el peso: “*un maestro [...] argumenta que el peso del objeto sumergido influye en el desplazamiento del líquido...*” (Revista Mexicana de Investigación Educativa Pág. 470); a su vez, desconocen métodos útiles y válidos para encontrar la cantidad de espacio que ocupan algunos objetos como una piedra, una naranja, un balón, etc.; estos aspectos se reflejaron en la última actividad realizada en la guía “*JUGANDO Y APRENDIENDO CON LOS POLICUBOS*” y llevaron a realizar la guía “*LA INMERSIÓN Y EL ESPACIO OCUPADO*”,

Partiendo de observaciones específicas, se buscaba que los niños construyeran el concepto de volumen usando una lógica inductiva, para llegar a conclusiones generales a través de la inmersión de objetos, comparando las cantidades de agua desplazada para obtener información sobre el volumen de los cuerpos sumergidos y a su vez encontrarán la diferencia entre volumen y peso debido a que frecuentemente los estudiantes relacionan el cambio en el nivel del agua, al sumergir un cuerpo en un recipiente con este líquido, más con su peso que con su volumen. Esta confusión puede atribuirse al hecho de que no todos los objetos se sumergen por completo dentro de algún líquido, llevando a los niños a los niños a asignar una cantidad errónea al volumen o impulsándolos a pensar que dichos objetos carecen de volumen.

Para plantear esta guía (ver págs., 45 y 46) se mencionaron algunos objetos de forma irregular, que no se podían medir o comparar con policubos, para buscar otro método que permitiera comparar los espacios ocupados por dichos objetos.

Se organizaron los niños en ocho grupos de cinco estudiantes teniendo cuidado en separar los estudiantes seleccionados para el estudio de tal forma que quedaran ubicados en diferentes grupos y poder ver lo que realmente pensaba cada uno de ellos. El trabajo en grupo logra que los alumnos debatan entre sí y con su lenguaje, se manifiesten en el grupo, representando un paso importante en cuanto a la expresión de cada uno de ellos, donde se van interpretando roles que al niño le servirá en su futuro, ya que hoy en día en distintos ámbitos educativos, productivos y sociales, es importante el trabajo en grupo. Además contribuye a que el estudiante fortalezca sus conocimientos o modifique sus convicciones erróneas acerca de determinado tema.

*“Los constructivistas que apoyan la teoría dialéctica de Vygotsky del aprendizaje y el desarrollo opinan que el trato social es importante para el aprendizaje porque las funciones mentales superiores (como el razonamiento, la comprensión y el pensamiento crítico) se originan en las relaciones sociales y luego son internalizadas por los individuos. Los niños pueden realizar tareas mentales con apoyo social antes de que puedan hacerlas por sí solos; así, el aprendizaje cooperativo les proporciona el apoyo social y el andamiaje que necesitan para avanzar en su aprendizaje”<sup>7</sup>.*

Para el *primer punto* de la actividad se entregó a los estudiantes dos porciones iguales de arcilla y dos vasos de igual tamaño con la misma cantidad de agua, marcaron con una rayita el nivel del agua en cada uno de los vasos; es de aclarar que los vasos no tenían ningún tipo de graduación, debido a que las graduaciones con escalas lineales en las cuales se asocian longitudes con unidades de volumen causan dificultades según estudios realizados por Mariana Luisa Sáiz (2002); por tanto, se buscaba que los estudiantes no confundieran medidas de longitud con cúbicas y que además llegaran

---

<sup>7</sup> [http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/biblioteca/articulos/pdf/trabajo\\_en\\_grupo.pdf](http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/biblioteca/articulos/pdf/trabajo_en_grupo.pdf)

indirectamente a una estimación de volumen sin la ayuda de instrumentos de medición sino mediante la comparación de la cantidad de agua desplazada.

Los estudiantes moldearon diferentes figuras, las sumergieron en cada uno de los vasos y marcaron el nuevo nivel del agua, observando que la cantidad de agua desplazada por las dos figuras era igual sin importar la forma de dichas figuras, así por ejemplo Santiago decía: *“la cantidad de líquido desplazado por las dos figuras es la misma porque es la misma cantidad de arcilla; profe es como lo de los policubos, hacíamos figuras de diferentes formas pero con la misma cantidad de policubos y ocupaban el mismo espacio”* a su vez Harbey comentaba: *“profe, si daño los muñecos y ahora hago una bola con cada uno de ellos, esas bolas quedan iguales”*; estas respuestas permitieron ver una vez más, cómo las actividades con policubos lograron que los estudiantes interiorizaran el concepto de volumen y acomodaran estas ideas para resolver otras situaciones. Otros niños como Yolima no manifestaron de forma verbal sus respuestas pero, de igual manera, fueron acertivos al momento de escribirlas (ver anexo 5, punto 1).

Para el *segundo punto*, se entregaron tres vasos de igual tamaño, una piedra, una bola de arcilla, el ping-pong de la actividad anterior y un tarro con agua a



cada uno de los grupos; se les pidió que vertieran agua en cada uno de los vasos hasta la mitad marcando con una rayita el nivel del agua; los estudiantes sumergieron cada uno de los objetos de forma independiente en los

tres vasos, marcaron el nuevo nivel del agua (ver figura 3) y reconocieron a través del desplazamiento del líquido el espacio ocupado por cada uno de los objetos, mediante una comparación entre las cantidades de agua desplazada, concluyendo que mientras más agua desplace el objeto, mayor va a ser el

espacio ocupado por este; por ejemplo los estudiantes respondían: “*el objeto que mayor espacio ocupa es la bola de arcilla, porque corre más agua, le sigue la piedra y de último el ping-pong que corrió poquita agua*”, “*la bola de arcilla hizo subir más el agua porque es más grande*”, “*la bola de ping-pong es más pequeña y subió más poquita agua*”.



Figura 3. El nuevo nivel del agua luego de la inmersión.

Es de resaltar que en esta actividad Harbey hacía una constante referencia al volumen como la cantidad de espacio ocupado por los objetos, así por ejemplo decía: “*profe, o sea que [...] el que más volumen tiene es la bola de arcilla porque es más grande*”, causando confusión entre algunos de sus compañeros quienes hacían preguntas como: “*¿volumen? y ¿eso qué es?*”, “*¿volumen y espacio ocupado es lo mismo?*”; las cuales indujeron a concretar el objetivo de esta guía, creando la necesidad de aclarar a los estudiantes que volumen es el nombre con el cual se hace referencia a la cantidad de espacio que ocupa un objeto o cuerpo.

Para la siguiente actividad se planteó sumergir dos objetos del mismo tamaño



y forma pero con distinto peso (un huevo hecho con cemento y otro real) donde la diferencia de peso fuera notoria. Inicialmente los estudiantes señalaron el nivel de agua en cada vaso, sumergieron los objetos anteriormente

mencionados y marcaron el nuevo nivel de agua con el fin de poder hacer una comparación de la cantidad de agua desplazada; esta actividad permitió a los estudiantes asimilar que la cantidad de agua desplazada se puede ver como el volumen del objeto y a la vez concluyeron que el peso no influye en el espacio ocupado por un cuerpo ya que desplazan la misma cantidad de agua (ver figura 4); cabe resaltar que estudiantes como Iván quien a pesar de tener dificultad para comprender los distintos conceptos mostró interés y aprendizaje en la clase, pues decía: *“si yo lleno una caja de algodón y a otra igual la lleno de hierro las dos ocupan el mismo espacio”*. A su vez Harbey decía *“Profe, también podemos decir que si yo me meto en la piscina desplazo menos agua que Pedro que es más alto y más gordo que yo, entonces eso quiere decir que Pedro ocupa más espacio que el que ocupo yo”*.



Figura 4. El peso no influye en el volumen.

Actividades de este tipo, generan un ambiente propicio para una comunicación matemática entre los estudiantes de forma natural y segura para hacer conjeturas, explicar sus razonamientos y argumentar.

*“En nuestras clases los profesores necesitamos escuchar lo que los estudiantes comprenden, lo que ellos saben, lo que ellos piensan sobre las matemáticas y su aprendizaje, escuchar las preguntas que hacen y las que no hacen, etc., para conocer cómo van sus procesos de*

*razonamiento, de resolución de problemas, etc., para orientar el uso de lenguaje matemático y ayudarlos a desarrollar su habilidad para comunicar matemáticas” (MEN, pág. 96)*

#### **4.1. REFLEXIONES FINALES**

En general, la inmersión es una buena metodología didáctica para inducir a los estudiantes hacia el concepto de volumen para objetos principalmente no regulares y que se sumerjan por completo, ya que se puede ver el volumen del cuerpo como la cantidad de agua desplazada sin necesidad de hacer uso de unidades de medida; se hace por tanto necesario incluir dentro del programa de matemáticas, actividades donde la manipulación de material concreto o didáctico constituyan un punto de apoyo para la enseñanza de algunos temas y permitan la participación activa y experimentación por parte de los estudiantes, buscando que su aprendizaje sea más significativo.

La actividad número cuatro de la guía fue de gran importancia; permitió a los estudiantes constatar que al sumergir dos objetos de la misma forma y tamaño pero con diferente peso el agua desplazada por ambos es la misma y por tanto ocupan la misma cantidad de espacio o tienen el mismo volumen.



NOMBRE \_\_\_\_\_ GRADO \_\_\_\_\_

Objetivo: Construir el concepto de volumen a partir de la inmersión de objetos

## *La inmersión y el espacio ocupado*



Saber el espacio que ocupan algunos objetos como una piedra, un balón, una naranja, etc. no es una tarea fácil; sin embargo, a través de la inmersión es posible hacer algunas estimaciones acerca del espacio ocupado por dichos objetos.

### ACTIVIDADES

1. Moldee dos figuras con la arcilla dada (dos porciones iguales), sumérlas en los recipientes con agua, ¿qué puede decir de la cantidad de agua desplazada por las figuras? ¿Por qué?
2. Dados tres objetos (bola de ping-pong llena de arena, piedra, bola de arcilla), sumérlas en los recipientes con agua, compare y justifique su respuesta.
  - La cantidad de agua desplazada por la piedra con respecto a la cantidad de agua desplazada por la bola de arcilla.
  - La cantidad de agua desplazada por la bola de ping-pong con respecto a la cantidad de agua desplazada por la bola de arcilla.

- La cantidad de agua desplazada por la piedra con respecto a la cantidad de agua desplazada por la bola de ping-pong.

2.1 ¿Qué objeto ocupa más espacio?

2.2 Teniendo en cuenta las actividades anteriores ¿qué puede decir del tamaño del cuerpo con respecto al agua desplazada?

3. Dados dos huevos (uno hecho de cemento y uno real), suméjralos en los recipientes con agua y responda:

- ¿Cuál de los dos ocupa más espacio? ¿Por qué?
  
- ¿Influye el peso en la cantidad de agua desplazada? ¿Por qué?

## CONCLUSIÓN



Guía elaborada Por:  
Jeny Paola Niño Garzón  
Delfa Barrera Duarte



## **Capítulo 5**

### **Comparando volúmenes**

**“La evaluación es importante al principio,  
durante y al concluir cualquier  
secuencia de la enseñanza”**

**David P. Ausubel**

A pesar que en el transcurso de las actividades realizadas fue continua la evaluación cualitativa donde los estudiantes reflejaron su trabajo cotidiano mostrando gran interés y habilidad en la asimilación y comprensión del tema tratado, se hizo necesario realizar una evaluación de tipo cuantitativo en la cual se pudiera precisar una manera de medir los resultados del aprendizaje de los estudiantes como individuos y de averiguar si aquellos concordaban con nuestros propósitos.

*“Evaluar es hacer un juicio de valor o de mérito, para apreciar los resultados educativos en términos de si están satisfaciendo o no un conjunto específico de metas educativas [...] su valor debe considerarse solo en términos del grado en que realice los fines hacia los que tiende la educación; pero, con demasiada frecuencia, los objetivos educativos no están formulados clara ni explícitamente desde un principio. Por eso casi no sorprende que, al ser evaluados, ni el programa de enseñanza ni los resultados del aprendizaje guarden mucha relación con las metas que se persiguen” (Psicología Educativa, Ausubel David P. y otros, 1989, pág. 515.)*

La guía (ver págs. 52 y 53) estaba diseñada con el propósito de examinar los conocimientos adquiridos por los estudiantes en el transcurso de las actividades realizadas, además de apreciar su comprensión genuina, su originalidad, su capacidad de resolver problemas, de pensar independientemente, de recuperar información y de sintetizar conocimientos enfocados al concepto de volumen; al mismo tiempo, este tipo de actividades forman parte del objetivo a largo plazo por parte de los estudiantes, de incrementar sus capacidades de valoración de sus facultades, sus logros y realismo.

Se plantearon cuatro puntos en los cuales los estudiantes, comparaban figuras teniendo en cuenta formas, tamaños o peso, que les permitiera establecer una

relación de menor o mayor espacio ocupado. A su vez, se daba un espacio en el cual ellos construían ejemplos en base a sus conocimientos y algunas pautas específicas dadas en la guía.

Siendo conscientes que el término evaluación produce, de algún modo, terror, inseguridad y temor al fracaso en los estudiantes, se optó por no comentarles que la guía que iban a resolver era una evaluación, sino que la resolvieran al igual que las demás que se habían venido desarrollando en el transcurso de las clases realizadas de tal manera que no se sintieran presionados por una apreciación cuantitativa.

Para la solución del *primer punto*, los estudiantes hicieron comparaciones a partir de aproximaciones, simetrías y traslaciones, transformando las figuras para lograr una relación entre los volúmenes (ver anexo 6, punto 1) ; esta actividad muestra la importancia de darles la oportunidad a los estudiantes de explorar, para que encuentren una infinidad de soluciones creativas que los impulse a usar estrategias informales y de sentido común sin necesidad de hacer uso de fórmulas y algoritmos que solo generan un aprendizaje mecánico y poco significativo.

En el *segundo punto* los niños se valieron de la noción de medida patrón para comparar el tamaño de las torres, utilizando para ello la apariencia de apartamento por piso, por tanto, contaron la cantidad de apartamentos por torre y compararon el resultado final comprobando que la respuesta dada era realmente razonable (ver anexo 7, punto 2).

Las actividades de romper y rehacer, rotar y trasladar, fueron resultados de manipulaciones mentales que los estudiantes pusieron en juego; algunos niños como es el caso de Santiago quien luego de etiquetar la torre de la izquierda como la número uno y la de la derecha como la dos, giró  $90^{\circ}$  la torre uno, trazó

una simetría vertical y trasladó la parte de la derecha a la parte superior para convertirla en la figura número dos (ver anexo 8, punto 2).

*“[...] una transformación no puede definirse ni mucho menos simbolizarse formalmente, antes de que los alumnos hayan hecho algunas transformaciones externas, moviéndose ellos mismos y moviendo hojas, varillas y otros objetos, deformándolos, rotándolos o deslizándolos unos sobre otros de manera física, de tal manera que ya puedan imaginarse esos movimientos sin necesidad de mover o transformar algo material, a lo más acompañando esta imaginación con movimientos del cuerpo o de las manos”* (Carlos E. Vasco-Lineamientos Curriculares, MEN, 1998, pág. 61)

Otro tipo de respuesta encontrada fue la dada por Yolima quien relacionó las dimensiones para hacer una relación coherente del espacio ocupado por las torres (ver anexo 9, punto 2). Además, en esta actividad se vio con mucha frecuencia la dificultad que tienen los estudiantes para hacer representaciones en el plano de cuerpos sólidos o de objetos de la realidad; a pesar de estar conscientes de la existencia de las tres dimensiones en los objetos, la mayoría de los estudiantes presentan dificultades al momento de hacer este tipo de representaciones tal y como se puede apreciar en el anexo 9 (puntos 1.1 y 2.1). Cabe resaltar que este no es un problema que solo atañe a estos niños, para la mayoría de los estudiantes las experiencias proporcionadas son bidimensionales, se usan libros que contienen figuras bidimensionales para hacer representaciones tridimensionales.

En la *tercera actividad* los estudiantes comparaban las “dimensiones” de los objetos teniendo en cuenta que estos tenían una dimensión igual (alto) pero las otras dos eran diferentes, por tanto el objeto que ocupaba mayor espacio o tenía mayor volumen era el objeto con mayores dimensiones reflejando la claridad de los estudiantes frente a la noción dada del concepto de volumen

entendido como la cantidad de espacio ocupado por un cuerpo (ver anexo 10, punto 3), mostrando el proceso para la construcción del concepto que inició en la abstracción de determinadas características de un objeto y pasando a la “acomodación” de dichas características según el contexto, es decir, partieron de las dimensiones (ancho, alto, largo) que se pueden apreciar en un paralelepípedo para luego adaptarlas a otro tipo de objetos.

Volumen-peso fue un aspecto en el que se trató de hacer mayor hincapié en el transcurso de las actividades, por tanto, en el *último punto* de la evaluación, los estudiantes mostraron sus conocimientos adquiridos acerca del tema, donde la mayoría acertó que el volumen depende del tamaño del objeto mas no de su peso (ver anexo 11, punto 4).

## **5.1. REFLEXIONES FINALES**

Resulta favorable hacer actividades evaluativas donde los estudiantes ignoren este hecho, ya que de esta forma no se sienten presionados y pueden expresar con facilidad sus conocimientos acerca del tema tratado.

En esta evaluación donde se dio espacio a la exploración de la creatividad, herramienta útil en este caso, para el desarrollo del pensamiento espacial, se pudo evidenciar que los estudiantes aprehendieron el concepto de volumen a través de la inmersión y la manipulación de policubos, ya que los estudiantes, para resolver cada uno de los puntos propuestos en la evaluación, recordaban las actividades hechas anteriormente y las relacionaban con situaciones de la vida diaria.



NOMBRE \_\_\_\_\_ GRADO \_\_\_\_\_

Objetivo: comparar volúmenes teniendo en cuenta formas y tamaños.

## Comparando volúmenes

- 1) María es el doble de gorda que Ángela; pero Ángela es el doble de alta que María, ¿quién tiene más volumen? ¿Por qué?



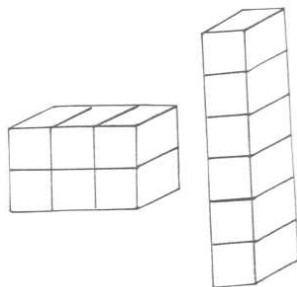
María



Ángela

- 1.1) Nombre y dibuje dos objetos que tengan diferente forma pero igual volumen

- 2) ¿Cuál de las dos torres tiene más volumen? ¿Por qué?



- 2.1) Dibuje dos edificios con diferente forma y con el mismo volumen.

- 3) Pedro y Vilma tienen la misma estatura pero Pedro es más gordo que Vilma. ¿Quién tiene más volumen? ¿Por qué?



- 3.1) Nombre y dibuje dos objetos que tengan la misma altura y el mismo largo pero diferente ancho.

- 4) De los siguientes balones el primero está lleno de arena y el segundo lleno de algodón. ¿Cuál tiene más volumen? ¿Por qué?



- 4.1) Nombre y dibuje dos objetos con distinto peso pero que tengan el mismo volumen.

Guía elaborada por:  
Delfa Barrera Duarte  
Jeny Paola Niño G.



## CONCLUSIONES

- A través de las actividades realizadas y expuestas a lo largo de esta monografía, se logró inducir a los estudiantes a la construcción del concepto de volumen, mediante la inmersión y la manipulación de policubos, permitiendo a los estudiantes una mejor conceptualización y un aprendizaje significativo.
- Los policubos como herramienta didáctica, representan una gran riqueza en la construcción del concepto de volumen, puesto que, partiendo de actividades simples como son contar; deshacer y rehacer; llenar y vaciar; y comparar, la mayoría de estudiantes pueden observar la influencia de las tres dimensiones en la cantidad de espacio ocupado por un cuerpo.
- Se puede afirmar que la inmersión es una buena metodología didáctica para inducir a los estudiantes hacia el concepto de volumen de objetos, principalmente no regulares y con un peso considerable que permita se sumerjan por completo en un líquido, y así reconocer el volumen del cuerpo como la cantidad de agua desplazada, sin necesidad de hacer uso de unidades de medida numéricas.
- En general los estudiantes mostraron un buen desempeño, siendo que su participación fue activa y acertiva frente las actividades propuestas; descubriendo relaciones y adquiriendo sentido espacial al construir, dibujar, medir, visualizar, comparar, transformar y clasificar figuras geométricas.

- Haber abordado esta experiencia desde una perspectiva cualitativa permitió un mayor acercamiento a los estudiantes y a su proceso en la construcción del concepto de volumen.

## RECOMENDACIONES

El desarrollo de los talleres en forma secuencial, permite a los estudiantes avanzar según su propio ritmo de aprendizaje, por eso es importante que los talleres sean aplicados en ese orden ya que su organización va desde el proceso más sencillo de observación y exploración, hasta llegar a la conceptualización.

Es conveniente seguir experimentando modelos didácticos que permitan un aprendizaje más significativo en los estudiantes y que proporcionen ambientes ricos en acción, reflexión y comunicación.

Debido a la constante relación que suelen hacer los estudiantes entre peso y volumen, es importante realizar diversas actividades que permitan recalcar las diferencias entre dichas cualidades.

## GLOSARIO

El glosario presentado a continuación contiene algunos términos a los que se les asignó un significado que estaba al alcance de los estudiantes de quinto grado y su nivel escolar.

**Cuerpo:** es aquella figura que tiene ancho, alto y largo.

**Espacio:** es el lugar que ocupa un objeto o un cuerpo.

**Inmersión:** sumergir un objeto dentro de un líquido.

**Policubos:** son cuerpos geométricos que ocupan un espacio y están formados por cubos iguales pegados por una de sus caras.

**Volumen:** es el espacio ocupado por un cuerpo.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1]. AUSUBEL David P. y otros, Psicología Educativa, México, Ed. Trillas.
- [2]. CABALLERO C. Claudia. Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de volumen del cilindro, esfera, cono, cubo y pirámide a niños de sexto grado. Monografía como requisito para optar al título de Licenciada en Matemáticas, Bucaramanga, 2002.
- [3]. CHAMORRO María del Carmen. Didáctica de las Matemáticas. Madrid: Ed. Pearson, 2003.
- [4]. DEL OLMO M.A. y otros; Matemáticas: cultura y aprendizaje. Superficie y Volumen ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Madrid: Ed. Síntesis, 1993.
- [5]. MEN, Ministerio de Educación Nacional. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Ed. Magisterio, 2003.
- [6]. MEN, Ministerio de Educación Nacional. Lineamientos Curriculares para Matemáticas. Bogotá, Ed. Magisterio, 1998.
- [7]. OTEEN, Lynn Arthur. La enseñanza agradable de las matemáticas. México, Ed. Limusa. 2001.
- [8]. POSADA María Eugenia y otros. Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas. Medellín, 2005.
- [9]. SÁIZ R. Mariana. Artículo. El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto volumen y de su enseñanza. Tesis como requisito para optar

el título de Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática educativa. México, D.F., 2002

[10]. RODRÍGUEZ M. Claudia. "Figuras Geométricas: Relación entre su medida y su dimensión". Monografía como requisito para optar al título de Especialista en Educación Matemática. Bucaramanga, 2004.

[11]. Theorethikos: La revista electrónica de la UFG, Aportes Educativos de Friedrich Froebel, disponible en Internet:  
<http://www.ufg.edu.sv/ufg/theorethikos/aportes01.html>

# ANEXOS

"No menos que el saber me place el dudar"

Dante Alighieri

**Anexo 1.** Parte dos de la “prueba diagnóstico” resuelta por Santiago

Según la figuras responda falso o verdadero:

- La figura 1 es más alta que la figura 2 ( )
- La figura 4 es más ancha que la figura 1 ( )
- La figura 3 es más larga que la figura 5 ( )
- La figura 2 es más alta que la figura 4 ( )
- La figura 4 es más ancha que la figura 5 ( )
- La figura 3 es más alta que la figura 2 ( )
- La figura 1 es más larga que la figura 4 ( )

3) Complete la siguiente tabla:

Objeto	¿Ocupa espacio?		¿Por qué?
	si	no	
Piedra	<input type="radio"/>		Es muy PESADA yancha
Hoja de papel		<input type="radio"/>	Puedo colocar otra cosa encima
Libro	<input type="radio"/>		Es PESADA, tiene ancho, alto y largo
Balón	<input type="radio"/>		Es grande
Ladrillo	<input type="radio"/>		Es PESADA
Globo	<input type="radio"/>		Pero casi NO PESA
Naranja	<input type="radio"/>		PESA



Guía elaborada por:  
Delfa Barrera  
Jeny Paola Niño

**Anexo 2.** Parte dos de la guía “Jugando y aprendiendo con los policubos” resuelta por Santiago

Teniendo en cuenta los conceptos anteriores podemos decir que un policubo ocupa un determinado espacio, luego el espacio ocupado por dos policubos es el doble del espacio ocupado por un policubo; ahora decimos que tres policubos ocupan el triple del espacio ocupado por un policubo.

*Usemos los policubos*

En grupos de cinco estudiantes y con orientación del profesor realizar las siguientes actividades:

1. Arme una torre de 4 pisos con 3 policubos en cada piso.  
Arme una torre de 2 pisos con 6 policubos en cada piso.  
Arme una torre de 1 piso con 12 policubos.

Responda:

➤ ¿Qué tienen en común las tres torres? *que cada una ocupa un espacio*  
➤ ¿Ocupan el mismo espacio? ¿Por qué? *Si porque si x alto, largo, y ancho nos da la misma cantidad de policubos*

2. Arme una figura cualquiera con 12 policubos.

➤ ¿Qué puede decir de esta figura con respecto a las torres armadas en el punto anterior? *que da lo mismo porque tienen 12 policubos*

3. De las tres cajas dadas diga cuál ocupa más espacio y por qué.

*las 3 porque tienen la misma cantidad de policubos*

4. Llene las cajas con policubos.

➤ ¿Cuántos policubos se necesitan para llenar cada caja?  
➤ ¿Ocupan el mismo espacio? ¿Por qué?

*si porque tienen los mismos policubos*

5. ¿Cómo medimos el espacio ocupado por un balón o una naranja?

*pesando*

Guía elaborada por:  
Delfa Barrera Duarte  
Jeny Paola Niño G.



**Anexo 3.** Parte dos de la guía “Jugando y aprendiendo con los policubos” resuelta por Yolima

Teniendo en cuenta los conceptos anteriores podemos decir que un policubo ocupa un determinado espacio, luego el espacio ocupado por dos policubos es el doble del espacio ocupado por un policubo; ahora decimos que tres policubos ocupan el triple del espacio ocupado por un policubo.

*Usemos los policubos*

En grupos de cinco estudiantes y con orientación del profesor realizar las siguientes actividades:

1. Arme una torre de 4 pisos con 3 policubos en cada piso.  
Arme una torre de 2 pisos con 6 policubos en cada piso.  
Arme una torre de 1 piso con 12 policubos.

Responda:

- ¿Qué tienen en común las tres torres? *Están armadas por 12 Policubos.*
  - ¿Ocupan el mismo espacio? ¿Por qué? *Si por que las 3 tienen 12 Policubos.*
2. Arme una figura cualquiera con 12 policubos.
    - ¿Qué puede decir de esta figura con respecto a las torres armadas en el punto anterior? *Que tienen todas 12 Policubos.*
  3. De las tres cajas dadas diga cuál ocupa más espacio y por qué. *la caja grande Por que es mas larga, mas alta y mas ancha.*
  4. Llene las cajas con policubos.
    - ¿Cuántos policubos se necesitan para llenar cada caja? *12*
    - ¿Ocupan el mismo espacio? ¿Por qué? *Si Por que en todas cupieron 12*
  5. ¿Cómo medimos el espacio ocupado por un balón o una naranja?  
*Al balón lo llamo con piedras y luego las cuento.*

Guía elaborada por:  
Delfa Barrera Duarte  
Jeny Paola Niño G.



**Anexo 4.** Parte dos de la guía “Jugando y aprendiendo con los policubos” resuelta por Harbey

Teniendo en cuenta los conceptos anteriores podemos decir que un policubo ocupa un determinado espacio, luego el espacio ocupado por dos policubos es el doble del espacio ocupado por un policubo; ahora decimos que tres policubos ocupan el triple del espacio ocupado por un policubo.

*Usemos los policubos*

En grupos de cinco estudiantes y con orientación del profesor realizar las siguientes actividades:

1. Arme una torre de 4 pisos con 3 policubos en cada piso.  
Arme una torre de 2 pisos con 6 policubos en cada piso.  
Arme una torre de 1 piso con 12 policubos.

Responda:

- ¿Qué tienen en común las tres torres? *que ocupan el mismo espacio*
  - ¿Ocupan el mismo espacio? ¿Por qué? *si porque tiene la misma cantidad de policubos*
2. Arme una figura cualquiera con 12 policubos.
    - ¿Qué puede decir de esta figura con respecto a las torres armadas en el punto anterior? *que todas ocupan el mismo espacio por que todas tienen 12 policubos*
  3. De las tres cajas dadas diga cuál ocupa más espacio y por qué.  
*Ninguna ocupa mas espacio porque todas tienen la cantidad de Policubos*
  4. Llene las cajas con policubos.
    - ¿Cuántos policubos se necesitan para llenar cada caja? *Se necesitan 12*
    - ¿Ocupan el mismo espacio? ¿Por qué? *si porque tiene igual cantidad de policubos*
  5. ¿Cómo medimos el espacio ocupado por un balón o una naranja?  
*los medimos llenandolo de arroz y lo pesamos*

Guía elaborada por:  
Delfa Barrera Duarte  
Jeny Paola Niño G.



**Anexo 5.** Parte uno de la guía “La inmersión y el espacio ocupado” resuelta por Yolima



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTAN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
PRÁCTICA PEDAGÓGICA  
COLEGIO LICEO PATRIA



NOMBRE \_\_\_\_\_ GRADO \_\_\_\_\_

Objetivo: Construir el concepto de volumen a partir de la inmersión de objetos

## La inmersión y el espacio ocupado



Saber el espacio que ocupan algunos objetos como una piedra, un balón, una naranja, etc. no es una tarea fácil; sin embargo, a través de la inmersión es posible hacer algunas estimaciones acerca del espacio ocupado por dichos objetos.

### ACTIVIDADES

1. Moldee dos figuras con la arcilla dada (dos porciones iguales), sumérlas en los recipientes con agua, ¿qué puede decir de la cantidad de agua desplazada por las figuras? ¿Por qué? *Las 2 figuras tienen la misma arcilla y suben lo mismo*
2. Dados tres objetos (bola de ping-pong llena de arena, piedra, bola de arcilla), sumérlas en los recipientes con agua, compare y justifique su respuesta.
  - La cantidad de agua desplazada por la piedra con respecto a la cantidad de agua desplazada por la bola de arcilla. *La bola de arcilla desplaza más agua por ser más grande*
  - La cantidad de agua desplazada por la bola de ping-pong con respecto a la cantidad de agua desplazada por la bola de arcilla. *La bola de arcilla es mucho más grande que la bola de ping-pong y desplaza más agua.*
  - La cantidad de agua desplazada por la piedra con respecto a la cantidad de agua desplazada por la bola de ping-pong. *La piedra subió más que el ping-pong por que es más grande.*

Anexo 6. Parte uno de la guía “Comparando volúmenes” resuelta por Harbey



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
PRÁCTICA PEDAGÓGICA  
COLEGIO LICEO PATRIA



NOMBRE \_\_\_\_\_ GRADO \_\_\_\_\_

Objetivo: comparar volúmenes teniendo en cuenta formas y tamaños.

## Comparando volúmenes

- 1) María es el doble de gorda que Ángela; pero Ángela es el doble de alta que María, ¿quién tiene más volumen? ¿Por qué?



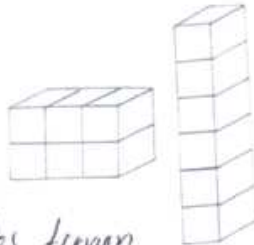
María



Ángela

las dos tienen igual volumen porque si partimos a María por la mitad nos da Ángela así que tienen igual volumen.

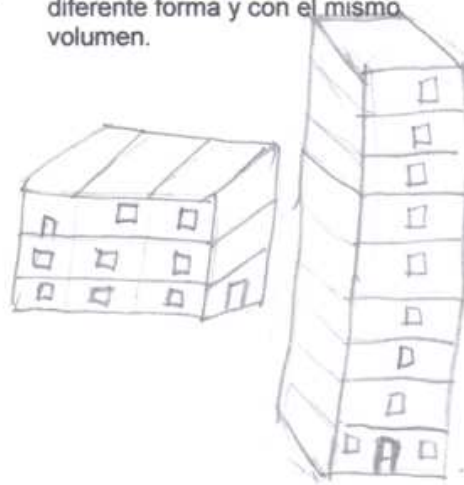
- 2) ¿Cuál de los dos cubos tiene más volumen? ¿Por qué?



los dos tienen igual volumen porque ambos tienen igual cantidad de cubos

- 1.1) Nombre y dibuje dos objetos que tengan diferente forma pero igual volumen

- 2.1) Dibuje dos edificios con diferente forma y con el mismo volumen.



Anexo 7. Parte uno de la guía "Comparando volúmenes" resuelta por Santiago



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
PRÁCTICA PEDAGÓGICA  
COLEGIO LICEO PATRIA



NOMBRE \_\_\_\_\_ GRADO \_\_\_\_\_

Objetivo: comparar volúmenes teniendo en cuenta formas y tamaños.

## Comparando volúmenes

- 1) María es el doble de gorda que Ángela; pero Ángela es el doble de alta que María, ¿quién tiene más volumen? ¿Por qué?



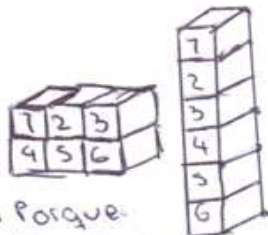
María



Ángela

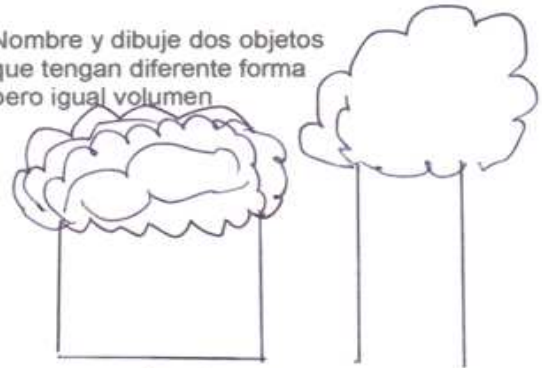
Ninguna porque si costamos a María y la ponemos abajo es lo mismo

- 2) ¿Cuál de los dos cubos tiene más volumen? ¿Por qué?



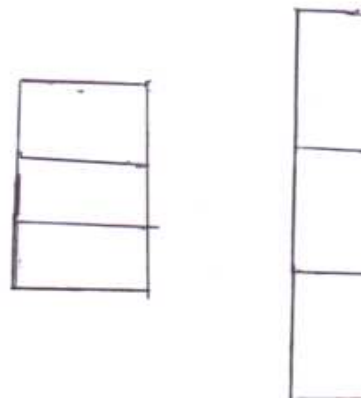
igual porque ambos tienen 6 cubos

- 1.1) Nombre y dibuje dos objetos que tengan diferente forma pero igual volumen



árboles

- 2.1) Dibuje dos edificios con diferente forma y con el mismo volumen.



Anexo 8. Parte uno de la guía “Comparando volúmenes” resuelta por Karen



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
PRÁCTICA PEDAGÓGICA  
COLEGIO LICEO PATRIA



NOMBRE \_\_\_\_\_ GRADO \_\_\_\_\_

Objetivo: comparar volúmenes teniendo en cuenta formas y tamaños.

# Comparando volúmenes

1) María es el doble de gorda que Ángela; pero Ángela es el doble de alta que María, ¿quién tiene más volumen? ¿Por qué?



María



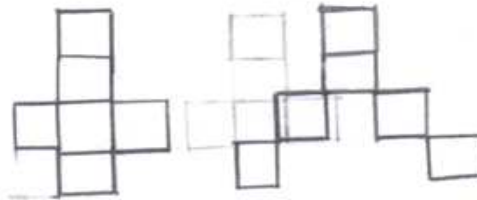
Ángela

Las 2 porque si Colocamos otra

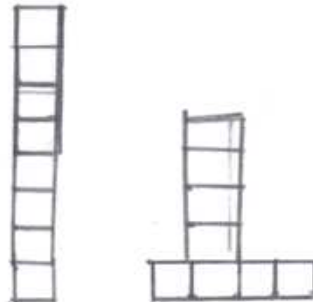
María abajo queda lo mismo volumen que

Ángela 2) ¿Cuál de los dos cubos tiene más volumen? ¿Por qué?

1.1) Nombre y dibuje dos objetos que tengan diferente forma pero igual volumen



2.1) Dibuje dos edificios con diferente forma y con el mismo volumen.



Las 2 por que o si en la figura numero 1 la para y le colocamos 3 cubitos de la derecha encima queda igual a la figura 2.

**Anexo 9.** Parte uno de la guía “Comparando volúmenes” resuelta por Yolima



**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**  
**LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**  
**PRÁCTICA PEDAGÓGICA**  
**COLEGIO LICEO PATRIA**



NOMBRE \_\_\_\_\_ GRADO \_\_\_\_\_

Objetivo: comparar volúmenes teniendo en cuenta formas y tamaños.

# Comparando volúmenes

- 1) María es el doble de gorda que Ángela; pero Ángela es el doble de alta que María, ¿quién tiene más volumen? ¿Por qué?



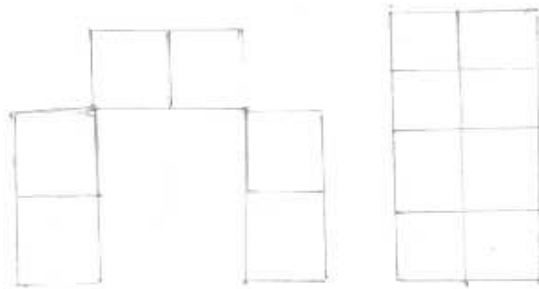
María



Ángela

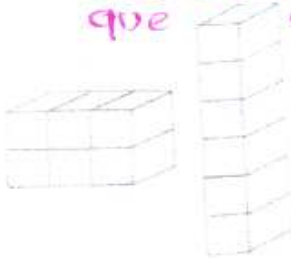
*No ellos tienen igual Volumen porque los 2 tienen igual espacio.*

- 1.1) Nombre y dibuje dos objetos que tengan diferente forma pero igual volumen

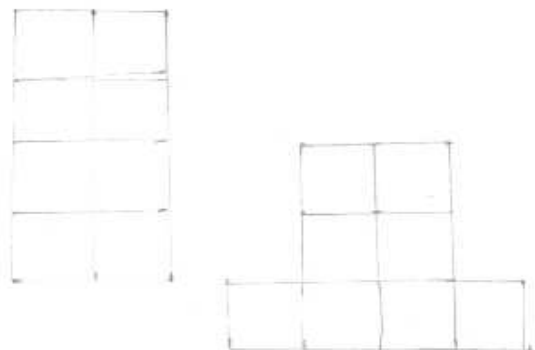


- 2) ¿Cuál de los dos cubos tiene más volumen? ¿Por qué?

*Los 2 tienen igual Volumen sino que uno es más ancho que el otro.*



- 2.1) Dibuje dos edificios con diferente forma y con el mismo volumen.



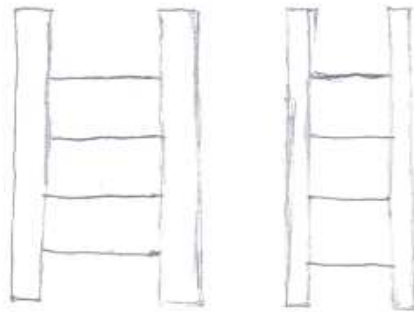
**Anexo 10.** Parte dos de la guía "Comparando volúmenes" resuelta por Harbey

3) Pedro y Vilma tienen la misma estatura pero Pedro es más gordo que Vilma. ¿Quién tiene más volumen? ¿Por qué?



*Tiene mas volumen Pedro porque es de mayor tamaño que vilma y es el tamaño lo que importa en el Volumen*

3.1) Nombre y dibuje dos objetos que tengan la misma altura y el mismo largo pero diferente ancho.

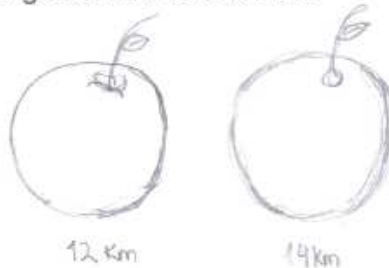


4) De los siguientes balones el primero está lleno de arena y el segundo lleno de algodón. ¿cuál tiene más volumen? ¿Por qué?



*los balones tienen igual Volumen porque ambos son del mismo tamaño*

4.1) Nombre y dibuje dos objetos con distinto peso pero que tengan el mismo volumen.



*Vilma y Pedro*

Guía elaborada por:  
Delfa Barrera Duarte  
Jeny Paola Niño G.



**Anexo 10.** Parte dos de la guía "Comparando volúmenes" resuelta por Iván

3) Pedro y Vilma tienen la misma estatura pero Pedro es más gordo que Vilma. ¿Quién tiene más volumen? ¿Por qué?

Pedro tiene más volumen  
Por que aunque sean de la misma estatura Vilma es mas flaca y tiene menos volumen pero Pedro tiene mucho más volumen por que es más gordo.



3.1) Nombre y dibuje dos objetos que tengan la misma altura y el mismo largo pero diferente ancho.

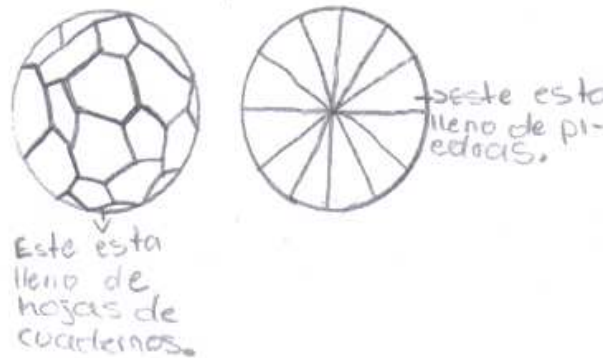


4) De los siguientes balones el primero está lleno de arena y el segundo lleno de algodón, ¿cuál tiene más volumen? ¿Por qué?

tiene más volumen el balón que está lleno de arena por que la arena tiene más volumen que el algodón.



4.1) Nombre y dibuje dos objetos con distinto peso pero que tengan el mismo volumen.



Guía elaborada por:  
Delfa Barrera Duarte  
Jeny Paola Niño G.

