

**PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL ACERCAMIENTO A LA NOCIÓN DE
ÁNGULO A PARTIR DE LA MEDIDA DEL ARCO, BASADA EN
PLANTEAMIENTOS DE KEVIN C. MOORE**

**GERMAN EUTIMIO SORA YANQUÉN
VLAKXMIR ROBLES MARÍN**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2012

**PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL ACERCAMIENTO A LA NOCIÓN DE
ÁNGULO A PARTIR DE LA MEDIDA DEL ARCO, BASADA EN
PLANTEAMIENTOS DE KEVIN C. MOORE**

**GERMAN EUTIMIO SORA YANQUÉN
VLAKXMIR ROBLES MARÍN**

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
Especialista en Educación Matemática**

**Director:
PHD. MARTIN ACOSTA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA**

2012

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	13
1. OBJETIVOS	15
1.1 OBJETIVO GENERAL	15
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	15
2. MARCO REFERENCIAL	16
3. METODOLOGÍA	18
4. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES	20
4.1 ACTIVIDAD PRELIMINAR	20
4.1.1 Análisis a priori	20
4.1.2 Análisis a posteriori	21
4.1.3 Análisis a priori de la entrevista	28
4.1.4 Análisis a posteriori de la entrevista	29
4.2 PRIMERA ACTIVIDAD: CONSTRUCCIÓN DE TRANSPORTADORES	35
4.2.1 Análisis a priori	35
4.2.2 Análisis a posteriori	39
4.2.3 Análisis a priori de la entrevista	42
4.2.4 Análisis a posteriori de la entrevista	43
4.3 SEGUNDA ACTIVIDAD: APLICATIVO	50
4.3.1 Análisis a priori	50
4.3.2 Análisis a posteriori	53
4.3.3 Análisis a priori de la entrevista	62
4.3.4 Análisis a posteriori de la entrevista	63
4.4 TERCERA ACTIVIDAD: RDIANES	69
4.4.1 Análisis a priori	69
4.4.2 Análisis a posteriori	71

4.4.3 Análisis a priori de la entrevista	80
4.4.4 Análisis a posteriori de la entrevista	81
4.5 CUARTA ACTIVIDAD: PROBLEMAS	94
4.5.1 Análisis a priori	94
4.5.2 Análisis a posteriori	96
4.5.3 Análisis a priori de la entrevista	100
4.5.4 Análisis a posteriori de la entrevista	101
5. CONCLUSIONES	106
6.1 RESUMEN DEL ANÁLISIS DE CADA ESTUDIANTE	106
6.2 ALCANCE DE LAS ACTIVIDADES	109
6.3 LIMITACIONES Y SUGERENCIAS	110
BIBLIOGRAFÍA	113
ANEXOS	115

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1: Ángulo para medir	20
Figura 2: Ángulo para medir, dada la longitud de su arco (1,92 cm)	21
Figura 3: Desarrollo del primer ejercicio de la actividad preliminar por parte de Paola.	24
Figura 4: Subdivisiones del plano hechas por Paola, en cuadrantes y ángulos de 45°, 22,5° y 11,25°.	24
Figura 5: Desarrollo del segundo ejercicio de la actividad preliminar por parte de Paola.	25
Figura 6: Subdivisiones del plano hechas por Jorge, en cuadrantes y ángulos de 45° y 22,5°.	26
Figura 7: Subdivisiones del plano hechas por Jorge, en cuadrantes y ángulos de 45° y 22,5° a partir de bisectrices y comparación del arco con la circunferencia.	26
Figura 8: Figura base sobre la cual construir un trasportador.	36
Figura 9: Divisiones del círculo grande en 8 partes iguales por parte de Paola.	40
Figura 10: Divisiones del círculo grande en 8 partes iguales por parte de Jorge.	41
Figura 11: Círculo doblado en mitades tres veces sucesivamente, por parte de Jorge.	47
Figura 12: Aplicativo en CaRMetal para el análisis de las relaciones entre los atributos de una Circunferencia.	50
Figura 13: Tabla que acompaña al aplicativo en la segunda actividad.	51
5.3.2 Análisis a posteriori	53
Figura 14: Desarrollo del primer punto de la actividad 2 por parte de Paola.	53
Figura 15: Desarrollo del segundo punto de la actividad 2 por parte de Paola.	54
Figura 16: Desarrollo del tercer punto de la actividad 2 por parte de Paola.	55
Figura 17: Desarrollo del primer punto de la actividad 2 por parte de Jorge.	56

Figura 18: Desarrollo del segundo punto de la actividad 2 por parte de Jorge.	56
Figura 19: Explicaciones del segundo punto de la actividad 2 por parte de Jorge.	57
Figura 20: Desarrollo del tercer punto de la actividad 2 por parte de Jorge.	58
Figura 21: Explicaciones del tercer punto de la actividad 2 por parte de Jorge.	58
Figura 22: Circunferencia construida en la actividad 3 por parte de Paola.	72
Figura 23: Desarrollo de los puntos 2, 3, 4 y 5 de la actividad 3 por parte de Paola.	73
Figura 24: Operaciones desarrolladas en la solución del punto 5 de la actividad 3 por parte de Paola.	74
Figura 25: Desarrollo el primer punto de la actividad 3 por parte de Jorge.	74
Figura 26: Observaciones de primer y segundo punto de la actividad 3 por parte de Jorge.	75
Figura 27: Observaciones del tercer y cuarto punto de la actividad 3 por parte de Jorge.	75
Figura 28: Solución del punto 5 de la actividad 3 por parte de Jorge.	76
Figura 29: Desarrollo del problema 1 de la cuarta actividad por parte de Paola.	97
Figura 30: Desarrollo del problema 1 de la cuarta actividad por parte de Jorge.	98
Figura 31: Comprobación de la equivalencia entre la longitud del arco subtendido por un giro de una circunferencia y el avance de la misma sobre determinada superficie	100

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO A. Actividad preliminar de ángulos	115
ANEXO B. Construcción de transportadores	116
ANEXO C. Medición y comparación de las características de los ángulos y relaciones entre ellos	117
ANEXO D. Radianes	118
ANEXO E. Problemas de ángulos y longitud de arco	119

RESUMEN

TÍTULO: PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL ACERCAMIENTO A LA NOCIÓN DE ÁNGULO A PARTIR DE LA MEDIDA DEL ARCO, BASADA EN PLANTEAMIENTOS DE KEVIN C. MOORE*.

AUTORES: GERMAN EUTIMIO SORA YANQUÉN**
VLAKXMIR ROBLES MARÍN

PALABRAS CLAVES: Ángulo, relaciones multiplicativas, pensamiento cuantitativo, circunferencia, razón.

CONTENIDO:

Esta monografía reproduce una secuencia didáctica propuesta por el profesor Kevin C. Moore titulada "*Making sense by measuring arcs: A teaching in angle measure*", en la cual se realiza una construcción del concepto de ángulo y de medida en radianes, a partir del desarrollo del pensamiento cuantitativo y el establecimiento de relaciones multiplicativas entre los atributos medibles de la circunferencia, el ángulo y el arco. Moore realizó esta experiencia con estudiantes de primeros cursos universitarios con edades entre los 20 y 25 años. Para reproducir esta experiencia se escogieron estudiantes de grado noveno de un colegio privado de la ciudad de Bucaramanga, Colombia, con edades de alrededor de 14 años. Por ello se ajustaron algunas actividades, orientando los talleres a la construcción del concepto de ángulo y su medida más que a dar sentido a un concepto previo.

Durante la aplicación de las actividades se observó a los estudiantes y se llevaron registros escritos de sus aportes, los cuales fueron profundizados a través de entrevistas. Estas observaciones fueron retroalimentando progresivamente las ideas iniciales sugeridas por Moore y arrojaron resultados muy interesantes relacionados con la manera como los estudiantes iban pasando de una concepción memorística de los ángulos notables, a una comprensión cuantitativa de las relaciones multiplicativas que se pueden establecer.

El análisis de las actividades y las conclusiones fueron realizados bajo el planeamiento de la ingeniería didáctica (análisis a priori y a posteriori). En el análisis a priori se explicó la intención de cada una de las actividades y en el análisis a posteriori se tuvo especial cuidado en realizar las descripciones sin incluir las opiniones del observador; para luego comprobar lo esperado con lo observado.

* Proyecto de Grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director PhD. Martín Acosta.

ABSTRACT

TITLE: DIDACTIC PROPOSED TO THE ANGLE NOTION BY THE MEASURING ARC LENGTH, BASED ON STATEMENTS OF KEVIN C. MOORE*.

AUTHORS: GERMAN EUTIMIOSORA**
YANQUÉN ANDVLAKXMIR ROBLES MARÍN.

KEYWORDS: Angle, multiplicative relationships, quantitative thinking, circumference, ratios.

CONTENT:

This work reproduces a didactic sequence, proposed by teacher Kevin C. Moore titled "*Making sense by measuring arcs: A teaching in angle measure*", which constructs the angle concept and its radian measure, through the development of the quantitative thinking and the establishment of multiplicative relationships among measurable features of the circumference, angle and arc. Moore performed this experience with students of first university levels between 20 and 25 years. To reproduce this experience, ninth grade students over 14 years from a private school in Bucaramanga, Colombia, were chosen. For this reason several activities were set, by guiding the worksheets toward the construction of the angle concept and its measure instead of making sense to a prior concept.

The students were observed during the performance of the activities and their contributions were recorded in a written way. Subsequently, students supported their responses through interviews. The observations provided a progressive feedback of Moore's statements and displayed interesting results related to the way the students were changing their acquired conceptions by heart about special angles, to a quantitative comprehension of the multiplicative relationships which can be established.

The analysis and the conclusions of the activities were performed under the statements of didactic engineering (a priori and a posteriori analysis). In the a priori analysis, the intentions of each activity were explained, while in the a posteriori analysis descriptions were performed being careful about not including the opinions of the observer, and after that the expectations were checked base on the observations.

* Degree Project

** Sciences School. Mathematics Department. Director PhD. Martín Acosta.

INTRODUCCIÓN

Las nociones y representaciones mentales que los estudiantes realicen sobre un concepto matemático en particular pueden ser trascendentales en la edificación de estructuras teóricas o conceptuales posteriores, dado el carácter gradual y secuencial de las matemáticas.

Por ejemplo, los conceptos de ángulo, razón, proporción y semejanza son fundamentales en el estudio de la trigonometría, así como en sus aplicaciones en áreas como la física, la ingeniería, la astronomía, entre otras. Por esta razón, es importante lograr una conceptualización adecuada de los ángulos y sus medidas para lograr un buen desempeño en la solución de problemas de aplicación en matemáticas y otras ciencias.

El presente proyecto consiste en reproducir una experiencia de aula que busca construir el concepto de ángulo y su medida estableciendo relaciones de tipo multiplicativo entre las medidas del arco, el radio, la circunferencia y el ángulo.

Una de las dificultades en la construcción de dicho concepto es resultado de la separación tácita entre la medida dada en radianes y en grados que se da en la enseñanza secundaria. Los docentes generalmente enseñan las dos medidas de manera separada y se limitan a dar procedimientos aritméticos para realizar la respectiva conversión entre una y otra, sin preocuparse por la comprensión que logran los estudiantes de la relación entre estas dos medidas.

Es importante recalcar que en el proceso de medición existen diferentes relaciones entre los objetos medidos y su correspondiente patrón de referencia. Algunas de estas relaciones son de tipo geométrico (como el sentido, el tamaño, la forma, etc.) y otras son de tipo aritmético (como la proporción). Estas últimas

serán el punto crítico que permitirá establecer si la comprensión del estudiante del concepto de ángulo se limita únicamente a una descripción superficial de las formas, o si por el contrario logra establecer relaciones multiplicativas entre los diferentes atributos medibles en una circunferencia.

El profesor Kevin C. Moore, de la universidad de Georgia (USA), en su artículo "*Makingsensebymeasuringarcs: A teaching in anglemeasure*"¹, propone una secuencia didáctica para la construcción del concepto de medida de ángulo, haciendo énfasis en el pensamiento cuantitativo, dirigida a estudiantes de primeros semestres universitarios. Este proyecto se propone adaptar dicha secuencia didáctica para el nivel de educación media, en el contexto colombiano, y verificar el impacto de dicha secuencia en la construcción del concepto de medida de ángulo en radianes y sus aplicaciones.

Este proyecto también busca llamar la atención de los docentes que imparten dichos contenidos, para que se preocupen por lograr una mayor comprensión del concepto de ángulo y de las relaciones entre las medidas en grados y en radianes.

¹MOORE, Kevin C. *Making sense by measuring arcs: A teaching in angle measure*, The university of Georgia, Department of Mathematics and Science Education. Correo electrónico: kvcmoore@uga.edu

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Proponer una estrategia didáctica que favorezca la comprensión o asimilación del concepto de ángulo y su respectiva medición a partir de medidas de longitud de arco, en estudiantes de noveno grado, con ayuda de los planteamientos realizados por Kevin C. Moore.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Estructurar y referenciar los fundamentos epistemológicos y teóricos abordados por Kevin C. Moore relacionados con el concepto de ángulo y su medida, así como los lineamientos pedagógicos que sustentan las actividades de aula desde la medida del arco.
2. Adaptar las actividades propuestas por Kevin C. Moore para la comprensión del concepto de ángulo y su medición, al contexto de la enseñanza media en Colombia.
3. Presentar los resultados obtenidos luego de la implantación de las actividades en relación a la asimilación del concepto de ángulo.

2. MARCO REFERENCIAL

Puede observarse en el planteamiento de Castillo-Garsow² que el razonamiento cuantitativo es pieza clave en la elaboración de cualquier concepto matemático. Utilizando un análisis de tipo covariacional, evidencia el papel que cumplen las relaciones cuantitativas en el entendimiento de las funciones y su determinación a partir de ecuaciones diferenciales. De esta manera, puede destacarse el hecho que al obtener relaciones cuantitativas entre los atributos de un objeto algebraico o geométrico, se establece una base para el modelamiento mental por parte de los estudiantes.

Moore define el razonamiento cuantitativo como el proceso que “involucra una acción mental individual y que concibe y construye atributos medibles sobre una situación”, pero más allá de eso, lo más importante es que “construye relaciones o racionamientos a partir de las cantidades que se van construyendo”³.

Igualmente, define el ángulo como la propiedad medible que tiene la intersección de dos rayos o líneas, a la cual se puede identificar con el atributo de abertura (o nivel de abertura), y agrega que este atributo medible permite crear relaciones multiplicativas entre la medida del ángulo, la longitud del radio y del arco.

Moore realiza una división fundamental entre lo que él considera “valor” y “número” como resultados de una medición; concibe un valor como el resultado de un proceso de medición que tiene algún tipo de significado al relacionar esa

²CASTILLO-GARSOW, C.C(2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth: Ph.D. Dissertations. Arizona State University, Tempe, Az.*

³MOORE, Kevin C. An Investigation IntoPrecalculus Students' Conceptions of Angle Measure National Science Foundation Grants No. EHR-0412537, 2011.

medida con algún fenómeno en concreto; por su parte, el número resulta o no de esa medición; pero no posee significado alguno para el individuo que lo obtiene. En este sentido, teniendo en cuenta lo planteado por Thomson⁴, esta distinción significaría que se está hablando de *valor* del ángulo cuando el estudiante relacione este con el radio y el arco subtendido. De forma contraria el estudiante hablará de número, cuando no logre establecer relaciones multiplicativas entre estas variables.

Retomando las herramientas diseñadas por Patrick Thomson, y utilizadas por el profesor Moore, se diseña una entrevista clínica con la intención de indagar sobre los pensamientos o estructuras mentales de los estudiantes implicados en el estudio. Esta técnica ha surtido frutos en diferentes campos del saber científico y se perfila como la apropiada para abordar este tipo de análisis.⁵

⁴ THOMPSON, P. W. (1989). *A cognitive model of quantity-based algebraic reasoning*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Associations, San Francisco. CA.

⁵ CLEMENT, J. (2000) Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In Lesh, R. and Kelly, A., *Handbook of research methodologies for science and mathematics education* (pp. 341-385). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

3. METODOLOGÍA

Nuestro proyecto consiste en la adaptación de una secuencia didáctica propuesta por Moore para la construcción del concepto de ángulo y su medida adoptando un enfoque cuantitativo. Realizamos una adaptación de las actividades propuestas en dicha secuencia, para el contexto colombiano en el nivel de noveno grado, a manera de introducción al concepto de medida en radianes de un ángulo.

Utilizamos la metodología de Ingeniería Didáctica, en la que se realiza un contraste entre un análisis a priori y un análisis a posteriori. El análisis a priori consiste en anticipar los comportamientos de los estudiantes promedio ante las actividades propuestas, para determinar el grado de probabilidad con que se producirán efectos didácticos de dichas actividades en el aprendizaje de los estudiantes. El análisis a posteriori consiste en describir el comportamiento real de los estudiantes que participan en la experiencia, con el fin de contrastar esos comportamientos reales con los comportamientos hipotéticos del análisis a priori.

En la estrategia utilizada por Moore, básicamente hace un diagnóstico escrito de varios estudiantes para luego tomar dos de ellos (Zac y Judy) para el análisis a través de entrevistas más detalladas. Dichos estudiantes pertenecen a carreras ajenas al del manejo ingenieril o científico, y sus edades oscilan entre los 20 y 25 años. En nuestro caso, se escogieron estudiantes de noveno grado de un colegio privado de la ciudad de Bucaramanga, con edades de alrededor de los 14 años. En primera instancia se realizó una prueba diagnóstica preliminar a 20 estudiantes, de los cuales se escogieron 3 para la realización de cuatro sesiones de profundización en el concepto de ángulo a través de cuatro actividades⁶. Los estudiantes escogidos para tal fin serán mencionados en el presente escrito bajo los seudónimos de Jorge, Paola y Andrea. Después de dichas sesiones, se entrevistaron a dos de estos estudiantes (Jorge y Paola) a fin de profundizar en los

⁶Estas actividades se encuentran debidamente presentadas en los anexos.

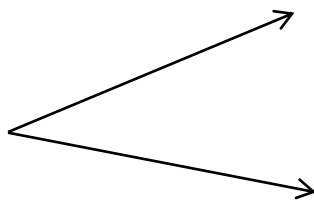
razonamientos que les permitieron realizar cada actividad, a través de lo que se denomina entrevista clínica. Los estudiantes contaban con los útiles necesarios de geometría, tales como lápiz, borrador, regla, escuadra, compás, transportador, pero no tenían permitido el uso del transportador. Adicionalmente contaban con una pita (para medir curvas) y con computadores portátiles personales o proporcionados por la institución.

4. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

4.1 ACTIVIDAD PRELIMINAR

4.1.1 Análisis a priori. Lo primero que se ha de tener en cuenta, si se quiere orientar la construcción del concepto de ángulo, es saber las ideas preliminares con las que cuentan los estudiantes. Para ello se optó por diseñar una actividad que permitiera identificar dichas ideas. La actividad consta de dos ejercicios en los que se pide medir un ángulo sin hacer uso de un transportador. No obstante, se puede utilizar una regla, una pita, un compás y una calculadora. En ambos casos, el ángulo dado mide 34° .

Figura 1: Ángulo para medir

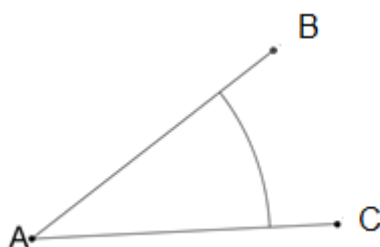


En el primer ejercicio, (Ver figura 1) se da un ángulo sin especificar qué tipo de ángulo es, sin dibujar el pequeño arco que denota cuál de los dos ha de medirse (si el convexo o el cóncavo). Se espera que los estudiantes intenten medir el ángulo convexo, ya que es con el cual están más familiarizados. La pregunta que se les plantea es la siguiente: *¿Cuánto mide el siguiente ángulo en grados sexagesimales?* La pregunta en sí misma contiene la palabra sexagesimal, que aunque está directamente relacionada con el hecho de que una vuelta completa corresponde a un ángulo de 360 unidades, se espera que la mayoría de los estudiantes no estén familiarizados con este concepto, ya que la palabra grados, más que ser entendida como una unidad de medida, es básicamente un acompañante permanente del número asociado a cada ángulo. Inclusive es

posible que los estudiantes confundan los *grados sexagesimales* con los *grados centígrados*. Por otra parte, se quiere destacar que el ángulo dado no es ninguno de los ángulos notables (30° , 45° , 60° , 90° y 180°); así, su medida no podrá ser determinada por simple comparación con los ángulos propios de una escuadra de 30° o de 45° . Se espera que los estudiantes hagan uso de todos sus conocimientos previos para establecer alguna relación cuantitativa entre la medida del ángulo y los atributos medibles con las herramientas que se cuentan. Debido a que los estudiantes involucrados en esta experiencia son de grado noveno, no se esperan construcciones de tipo trigonométricas. Las construcciones esperadas estarán relacionadas con perímetros, áreas, y proporciones.

En el segundo ejercicio se da el mismo ángulo anterior, pero en esta ocasión se les especifica gráficamente tanto el ángulo que se quiere que mida, como la medida del arco que subtiende. En este ejercicio se quiere indagar si los estudiantes están relacionados con el concepto de arco y si conocen o están en capacidad de establecer alguna relación entre este y la medida del ángulo que lo subtiende. Vea la figura 2.

Figura 2: Ángulo para medir, dada la longitud de su arco (1,92 cm)



4.1.2 Análisis a posteriori

Descripción de la clase y lo entregado por los estudiantes

Al realizar el primer ejercicio, los estudiantes se encontraron básicamente con una palabra desconocida: “sexagesimal”. Después de las aclaraciones hechas por el

docente, relacionadas con esta palabra y de reforzar el hecho de que no se podía hacer uso de transportador, los estudiantes comenzaron a buscar la manera de medir el ángulo dado. Se observó durante este diagnóstico que la mayoría de los estudiantes al darse cuenta de que no contaban con su herramienta predilecta para la medición de ángulos, se mostraron frustrados, y más que buscar una solución por sus propios medios, insistían en solicitar al docente que les diera un método para poderlo aplicar. Algunos de ellos comenzaron a explorar con el compás trazando circunferencias con centro en el vértice del ángulo dado y otros básicamente hacían un esfuerzo por recordar el valor de un ángulo que fuera similar al dado para poder dar una respuesta aproximada.

Las estrategias utilizadas pueden ser clasificadas en tres grupos. Primero están aquellos que solamente dieron un valor “a ojo”⁷ para el ángulo dado. En su hoja de trabajo solamente se observa el ángulo dado y un número como respuesta. En segundo lugar están aquellos que antes de dar una aproximación visual, realizaron alguna operación o dibujo. En tercer lugar están quienes realizaron en su hoja de trabajo algunas construcciones, tales como una circunferencia y diferentes diámetros de la misma, para finalmente dar una respuesta.

Al enfrentarse al segundo ejercicio, se esperaba que los estudiantes logaran aprovechar el nuevo dato dado (la longitud del arco), pero durante la clase no se observó el uso de este valor. Básicamente el trabajo de casi todos los estudiantes se concentró en trazar diámetros centrados en el vértice del ángulo dado, ya sea dibujando o no una circunferencia igualmente centrada en dicho vértice.

Las soluciones entregadas por los estudiantes se pueden clasificar en tres grupos: El primer grupo son aquellos que no mostraron ningún interés en el desarrollo de la actividad y básicamente presentaron una respuesta al azar o la hoja en blanco;

⁷ “a ojo” era la expresión utilizada por los estudiantes para referirse a la forma como habían resuelto el ejercicio cuando daban una respuesta por simple aproximación visual, sin realizar ningún tipo de construcción o cálculo.

el segundo fueron aquellos, que aunque mostraron interés en el desarrollo de la actividad, no lograron desarrollar alguna construcción sobre el ángulo dado, pero buscaron alguna otra estrategia para resolver el problema planteado; y el tercer grupo fueron aquellos que en su trabajo se pudo evidenciar un proceso de análisis a través de construcciones y/o justificaciones escritas que les permitieron llegar a una aproximación del valor del ángulo pedido.

Para la selección de los estudiantes que se iban a observar a lo largo de las actividades siguientes, se escogió un estudiante de cada uno de los grupos mencionados anteriormente, que pudieran participar de las demás actividades que se realizarían y que dispusieran del tiempo para las correspondientes entrevistas. Igualmente se procuró que dichos estudiantes no fueran los más destacados académicamente, ya que estos ya tenían asignadas muchas responsabilidades extracurriculares en su vida personal y con el colegio, y se prefirió que pudieran llevar un proceso más básico en cuanto a los presaberes que pudieran utilizar para la solución de los ejercicios que se les iban a proponer.

A los estudiantes escogidos se les asignaron los nombres de Silvia, Paola y Jorge, respectivamente, pero para la observación detallada y las correspondientes entrevistas, se concentró la atención solamente en Paola y Jorge. A continuación se describe lo desarrollado por estos dos estudiantes.

Paola:

Una primera mirada a la actividad de Paola, muestra básicamente una respuesta sin ningún tipo de construcción o razonamiento que la respalde (ver figura 3). No obstante, detrás de su hoja hay una construcción que posiblemente fue utilizada por la estudiante para resolver el ejercicio. (Ver figura 4).

Figura 3: Desarrollo del primer ejercicio de la actividad preliminar por parte de Paola.

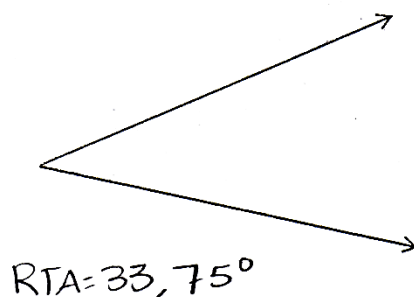
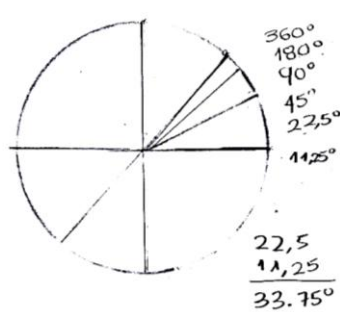


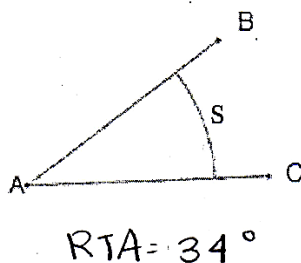
Figura 4: Subdivisiones del plano hechas por Paola, en cuadrantes y ángulos de 45° , $22,5^\circ$ y $11,25^\circ$.



Se observa cómo Paola traza una circunferencia con centro en el vértice del ángulo dado y aparentemente divide esta circunferencia en cuatro ángulos rectos. Puede observarse cómo el ángulo recto que coincide con la ubicación de los extremos del ángulo dado, es a su vez subdividido haciendo uso de tres radios. A la derecha de la construcción realizada por Paola, pueden observarse seis valores (360° , 180° , 90° , 45° , $22,5^\circ$ y $11,25^\circ$) al igual que una aparente suma entre dos de ellos ($22,5+11,25 = 33,75^\circ$).

Al igual que en el primer ejercicio, en el segundo tan sólo aparece un valor como respuesta, bajo el ángulo dado (ver figura 5).

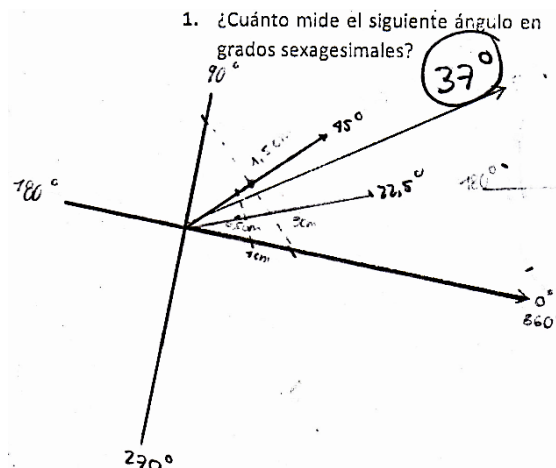
Figura 5: Desarrollo del segundo ejercicio de la actividad preliminar por parte de Paola.



Jorge:

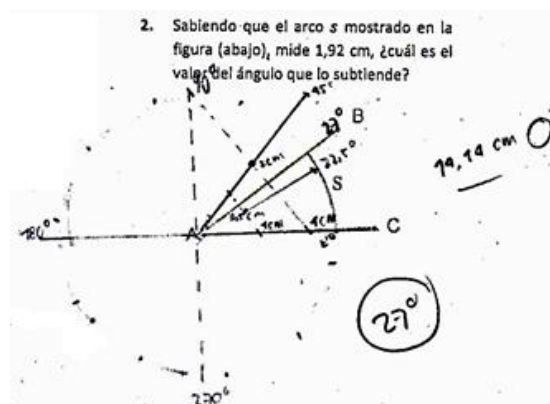
Por su parte, Jorge presenta en el desarrollo del primer ejercicio dos rectas aparentemente perpendiculares, una de ellas coincide con la semirrecta inferior del ángulo dado, etiquetado como 180° en su extremo izquierdo y 0° y 360° en su extremo derecho. La recta “perpendicular” a esta está también etiquetada como 90° en su extremo superior y 270° en su extremo inferior. En una especie de “primer cuadrante” hay tres rayos que parten del origen y subdividen dicho cuadrante; uno de ellos es el extremo final del ángulo dado. Dichos rayos están etiquetados respectivamente como $22,5^\circ$, 37° (encerrado) y 45° . También puede verse un segmento punteado trazado desde el rayo etiquetado como 0° y el rayo etiquetado como 90° , con un punto como marca en el corte con el rayo etiquetado como 45° (etiquetado como 1,5cm). Igualmente hay un segmento punteado entre los rayos de 0° y 45° con una marca en el corte con el rayo de $22,5^\circ$. El corte con el rayo de 0° , y el segmento punteado está etiquetado como 1cm, y el corte de dicho segmento con el rayo de $22,5^\circ$ está etiquetado como 0,5cm (ver figura 6).

Figura 6: Subdivisiones del plano hechas por Jorge, en cuadrantes y ángulos de 45° y $22,5^\circ$.



En el segundo ejercicio, Jorge realiza una construcción similar a la del primero, pero esta vez también incluye una circunferencia con centro en el vértice del ángulo dado, en la cual realiza algunos cortes. También incluye dos valores al lado del gráfico realizado: 14,14cm y 27° , este último encerrado.

Figura 7: Subdivisiones del plano hechas por Jorge, en cuadrantes y ángulos de 45° y $22,5^\circ$ a partir de bisectrices y comparación del arco con la circunferencia.



Interpretación de los resultados

En el desconocimiento del significado de la palabra “sexagesimal” por parte de la totalidad de los estudiantes involucrados, puede verse que no existe relación alguna entre los atributos medibles en una circunferencia o en un ángulo,

incluyendo el valor asignado para una vuelta completa que es 360° . Es así como desde el comienzo se hace evidente la manera memorística como los estudiantes abordan la actividad, esforzándose por recordar, de la manera más aproximada posible, un ángulo conocido que les permitiera establecer un valor para el ángulo dado. Los ángulos en los cuales se basaron la mayoría de los estudiantes fueron 360° , 180° , 90° y 45° , los cuales coinciden con los ángulos notables que desde la educación primaria se les ha enseñado. Igualmente se puede observar en las respuestas dadas únicamente con base en aproximaciones visuales, que existe una carencia de rigor matemático en cuanto al respaldo de las respuestas con gráficas, cálculos o argumentos escritos deducidos de principios conocidos.

Por su parte, Paola muestra en su trabajo un mayor nivel argumentativo al ahondar un poco más en la idea de la aproximación. Aunque falta cierto grado de precisión en el trazo de las perpendiculares, las subdivisiones sugeridas por la estudiante fundamentan en gran medida su aproximación. Básicamente puede verse como Paola utiliza en forma implícita la definición de bisectriz, al garantizar que a través de cada subdivisión se obtendrá un ángulo que es la mitad del inmediatamente anterior. Bajo este principio, se puede continuar indefinidamente hasta obtener una buena aproximación, tan exacta como se quiera. Finalmente, ha de considerarse que en cualquier proceso de medición existe un porcentaje de error y por ello puede validarse la estrategia utilizada por Paola ya que con instrumentos al continuar haciendo dichas subdivisiones, se puede llegar a una muy buena aproximación.

El trabajo de Jorge se muestra aún más sólido que el de Paola. Puede verse como Jorge no sólo intenta trazar las bisectrices, sino que lo hace después de trazar segmentos, formando triángulos isósceles. En forma implícita, se evidencia en su proceso el uso de las propiedades de este tipo de triángulos. Entendiendo el número encerrado (37°) como su respuesta definitiva, se observa que es bastante cercana al ángulo dado. En cuanto al segundo ejercicio, las aproximaciones de

Jorge se ven nuevamente respaldadas por la construcción de bisectrices aparentemente a partir de la construcción y medición de triángulos isósceles. Pero lo que es más interesante es que de alguna manera, Jorge hace uso de la medida del arco dado, trazando una circunferencia con centro en el vértice del ángulo dado y cuyo radio es tal que la circunferencia coincide con dicho arco. Sobre esta circunferencia pueden observarse marcas que dejan ver un posible conteo alrededor de la circunferencia haciendo uso del arco dado. Ha de tenerse en cuenta que el arco dado cabe aproximadamente 10,47 veces en la circunferencia y que Jorge hizo 10 marcas.

Es curioso cómo en este caso la aproximación no es tan buena como en el primer ejercicio (el valor encerrado por Jorge es de 27°). En la entrevista se podrá aclarar cuáles fueron las razones que llevaron a Jorge a dar esta respuesta.

4.1.3 Análisis a priori de la entrevista. Teniendo en cuenta el diseño de la actividad preliminar, la forma como los estudiantes la asumieron durante la clase y los resultados de la misma, se diseñó una entrevista que permitiera ahondar en la comprensión de los preconceptos que los estudiantes tienen en relación con la medición de ángulos y especialmente en las relaciones multiplicativas que establecen entre los elementos de un ángulo y de una circunferencia.

La entrevista comienza preguntando acerca de aquellas palabras desconocidas por los estudiantes y que fueron el primer obstáculo en la solución de los ejercicios. Se espera que en esta pregunta los estudiantes manifiesten su desconocimiento de las palabras “sexagesimal” y “subtiende”. Igualmente se trata de establecer con cuál instrumento para la medición de ángulos está familiarizado el estudiante. A continuación se le pregunta acerca de la estrategia utilizada para la solución del primer ejercicio, tratando de esclarecer cuáles fueron las razones o el proceso (no escrito) realizado, que sustente tanto las construcciones realizadas como la respuesta obtenida. Se trata especialmente de identificar si en algún

momento el estudiante realizó algún tipo de medición para después establecer alguna relación cuantitativa entre las medidas tomadas.

Para el segundo ejercicio, se busca una explicación por parte del estudiante de la estrategia utilizada, pero aclarándole en la pregunta que en este segundo ejercicio ya se cuenta con la medida del arco subtendido por el ángulo que se quiere medir. Se espera que con esta pregunta el estudiante explique de qué forma hizo uso de la medida dada y si no la utilizó, qué pensó que podría hacer con ella o si definitivamente no encontró ninguna relación entre este dato y el ejercicio.

4.1.4 Análisis a posteriori de la entrevista

Entrevista con Paola

Al entrevistar a Paola se pudo comprobar el desconocimiento de las palabras “sexagesimal” y “subtiende”. Pudo notarse que a pesar de haber hecho la correspondiente aclaración durante la clase, Paola, después de haber resuelto los dos ejercicios propuestos, aún desconoce el significado de estas palabras. Al parecer la explicación dada durante la clase no logró la claridad que se quisiera frente a los conceptos, aunque sí dejó una idea muy superficial, pero suficiente para la realización de los ejercicios, asumiendo simplemente que los ángulos se miden en “grados” y que de alguna manera el arco dado está relacionado con el ángulo que se desea medir.

A continuación se le preguntó acerca de la estrategia utilizada para medir el primer ángulo:

Entrevistador (E): Debía calcular la medida del ángulo sin hacer uso del transportador, ¿cómo lo resolvió?

Paola (P): *“En otra hoja independiente había hecho un círculo, y ese círculo lo partí en cuatro pedazos, pues a ojo, pero ambas tenían que pasar... ambas líneas tenían que pasar por el punto del compás...”*

Al parecer Paola no se apartó mucho del concepto de *transportador* como instrumento de medida de ángulos y haciendo uso de cuadrantes y bisectrices, puso en marcha la construcción de un transportador lo más detallado posible que le permitiera dar una buena aproximación del ángulo dado.

Cabe destacar dos expresiones importantes utilizadas por Paola. La primera es la expresión “a ojo”. Al no utilizar propiedades para la construcción de objetos geométricos tales como perpendiculares y bisectrices, el recurso visual queda como estrategia útil y eficaz. Básicamente lo que hizo Paola fue ubicar cuidadosamente la regla de manera que el ángulo logrado sea aproximadamente de 90 grados. La segunda expresión a destacar es “el punto del compás”. Puede deducirse, por los conceptos utilizados por la estudiante, que esta expresión se refiere al centro de la circunferencia que le serviría como transportador.

Paola continuó explicando su proceso:

(P): *“...y después de esto tomé una parte y la partí por la mitad, entonces ya no quedaría de 90° sino de 45 y 45, pero era muy grande para el ángulo, entonces lo volví a partir por la mitad y daba 22,5, y lo puse encima del ángulo, pero estaba muy pequeño, y entonces ese 22,5 arriba, lo volvía a partir por la mitad y me dio 11,25, entonces lo volvía a poner sobre ehh... (E): el ángulo... (P): ... sobre el ángulo, y ya era como más preciso, y sumé 22,5 más 11,25 y me dio 37 punto 75.”*

De esta manera puede verse que a pesar de no utilizarse un proceso mucho más riguroso, la construcción de cuadrantes y bisectrices fue realizada bajo los fundamentos de rectas concurrentes (las dos primeras perpendicularmente) y división de ángulos en dos mitades exactas. Aunque aún no se evidencia el

establecimiento de relaciones multiplicativas, ya se utilizan las subdivisiones, la comparación y la independencia del tamaño de una circunferencia, como elementos propios de un proceso de medición de ángulos.

Recordando nuevamente que todo proceso de medición tiene un porcentaje de error, el proceso de Paola ha de validarse como estrategia demostrativa de un nivel básico y puede verse que su respuesta (37,75) logra una muy buena aproximación.

En el segundo ejercicio, en el cual es explícita la medida del arco, la cual debería ser muy útil para el cálculo del valor del ángulo, no se pudo evidenciar el establecimiento de relaciones entre el ángulo y el arco. Básicamente Paola repitió la misma estrategia utilizada en el primer ejercicio. Al preguntársele si había utilizado algún instrumento para garantizar la bisección de los ángulos, respondió que no, lo mismo que cuando se le preguntó si había utilizado de alguna forma la medida del arco.

Entrevista con Jorge

La entrevista comienza preguntando a Jorge cuáles palabras desconocía, a lo cual respondió que no conocía la expresión “grados sexagesimales”. Se le insistió en la pregunta, sugiriéndole las palabras “compás”, “ángulo” y “subtiende”, pero haciendo un gesto con la cabeza asintió en el conocimiento de dichas palabras. Igualmente se le preguntó con qué instrumento medía los ángulos, a lo cual respondió que con un transportador. Al insistírsele en que si conocía algún otro instrumento útil para la medición de ángulos, manifestó no conocer ningún otro. La entrevista continúa como se muestra a continuación:

Entrevistador (E): ... ¿cómo hizo para medir un ángulo si no podía utilizar el transportador?

Jorge (J): *“Pues utilicé una regla, y pues, como que ya tengo una línea, pues la ubiqué la regla sobre esa línea y la terminé de trazar. Eh, entonces ahí ya tengo los 180° , entonces para trazar la línea de los 90° , pues porque forma un ángulo de 90° , entonces utilicé una cuadrícula, la puse abajo, y pues, como la cuadrícula se alcanzaba a ver tracé la línea... recta. Entonces ahí ya tenía ángulos claros, bueno, los principales. Entonces medí una medida, pongámoslo que 3 y acá también, la misma...”*

Prolongando el rayo inferior del ángulo dado, Jorge construye un ángulo de 180° y utiliza una cuadrícula para trazar una recta perpendicular

Hasta el momento, la estrategia utilizada por Jorge no se ha apartado de la comparación con ángulos conocidos. Lo interesante ahora es que para la construcción de los ángulos de 45° no utiliza, por ejemplo, la diagonal que puede trazar en la cuadrícula, sino que emprende la tarea de construir un triángulo isósceles y bisecar uno de sus segmentos para obtener la bisectriz del ángulo. No obstante, la explicación de Jorge no muestra con claridad que es consciente de las propiedades de los triángulos isósceles sino que sus razones son de carácter intuitivo, como se puede interpretar en la respuesta dada a continuación:

(E): ¿Por qué la misma?

(J): *“... yo considero que, pues, es mi pensamiento, que voy más a la fija con la misma medida de ambos, ambos ejes.”*

A continuación se hace explícita en la respuesta de Jorge la construcción del triángulo isósceles y la posterior bisección del lado transversal a las rectas perpendiculares ya trazadas. Acto seguido, este proceso es repetido para el ángulo de 45° . El trazo de las bisectrices no lo hace a través del tradicional proceso geométrico, sino que lo hace realizando la división en dos de la medida del segmento transversal:

(E): ¿y qué hizo después?

(J): “después puse los ejes, pues marqué unos punticos en cada eje, y luego los uní, entonces eso me dio 3cm, la línea me dio 3cm, entonces la mitad de 3cm es de cero punto cinco centímetros, entonces yo sé que por ahí tiene que pasar los 45° .”

(E): ¿Y luego?

(J): “luego pues hice lo mismo con los 45° , y entonces pues exactamente lo mismo que hice con los 90° y me daba el ángulo de 22 punto 5 grados.”

(E): ¿Por qué 22,5?

(J): “porque esa es la... o sea 45 dividido en 2.”

(E): ... ¿y entonces ahora qué hizo?

(J): “entonces con eso, pues como el ángulo que nos estaban preguntando estaba entre 45 y 22,5 grados, pues obviamente lo lógico es que estuviera entre eso, eh, y luego pues ahí sí en esa parte pues ya lo hice con mi... ojo... entonces pues más o menos uno tiene la idea de que son 360° y pues con las líneas básicas que son 90, 45, 0 grados, pues ahí... perspectiva” **(E):** y ahí a ojo, ¿cuánto le puso? **(J):** “37 grados.”

El procedimiento llevado a cabo por Jorge se basa en la comparación con ángulos conocidos, los cuales son a su vez muy particulares, ya que se obtienen de dividir sucesivamente en mitades. Al final Jorge simplemente intenta hacer una aproximación visual de la medida del ángulo. Se puede resaltar del procedimiento seguido por Jorge que realizó construcciones para la construcción de las bisectrices, pero este tipo de construcciones todavía no son por el establecimiento de relaciones multiplicativas.

A diferencia de Paola, en el segundo problema Jorge sí hizo uso de la medida del arco dada, construyendo una circunferencia con centro en el vértice del ángulo dado, que coincidiera con dicho arco. Después reprodujo la medida alrededor de

la circunferencia construida y comenzó a aproximar el valor del ángulo para la cantidad de veces que le cupo el arco en la circunferencia:

(E): En el segundo problema, que ya tenía un datico extra, ¿cómo lo hizo?

(J): *“Pues acá yo sé que el arco s mide 1,92cm, entonces pues hice lo mismo que acá (señalando el primer ejercicio) solamente que este (señalando el segundo ejercicio) utilicé un compás, entonces hice, terminé de hacer la circunferencia. Y entonces una vez terminada la circunferencia, pues utilicé la misma medida del arco s y la fui haciendo, ¿sí? entonces empieza acá el arco s y termina acá, el siguiente, empieza acá y termina acá (señalando las marcas hechas sobre la circunferencia), cada uno de 1,92cm y entonces me dio diez... ¿iguales? (aparentemente queriendo buscar una palabra apropiada)...”***(E):** Diez pedacitos...

(J): *“Diez pedacitos iguales, y me sobró un poquito [...], sumé los pedazos, y el poquito que me sobró no lo conté, y entonces la circunferencia en total son 14,14cm, o sea eso tiene que ser igual a 360° , entonces pues yo qué hice, ahí pues yo sabía que no podía medir digamos 37° porque si me diera 37 como este pedacito mide lo mismo que éste, entonces tendría que multiplicar 37 por 10, más estos poquitos ángulos (señalando el pequeño arco que le sobró), entonces eso me daba más de 360° , entonces no podía ser, tenía que ser menor que 37, y 36 tampoco porque entonces tendría que haber dado los diez pedacitos exactos.”*

Pueden confirmarse por las respuestas de Jorge, algunas de las suposiciones hechas en la interpretación de los resultados. Efectivamente, reprodujo el procedimiento hecho en el primer ejercicio, pero en este caso no se conformó con tratar de dar una aproximación visual, sino que aprovechando la medida del arco dada, quiso saber cuántas veces cabía el arco en la circunferencia. Esto puede considerarse un avance en la comprensión de la relación multiplicativa entre el ángulo y el arco a saber: un ángulo cabe tantas veces en una vuelta como el arco subtendido cabe en la circunferencia correspondiente. Al afirmar Jorge que “eso tiene que ser igual a 360° ”, está estableciendo la relación mencionada y puede observarse cómo la utiliza en las aproximaciones siguientes.

Por otra parte, la aproximación de la circunferencia dada por Jorge durante la entrevista, y escrita en su hoja, no coincide con la explicación dada, ya que según su estrategia, la circunferencia tendría que medir 19,2cm aproximadamente. Sin embargo, el valor de 14,14cm no fue utilizado por Jorge después de haberlo calculado; sólo se concentró en las diez veces que cabe aproximadamente el arco en la circunferencia y en buscar un valor para el ángulo que al ser multiplicado por diez se obtuviera un poco menos que 360° . Claramente ni 36 ni 37 grados son aproximaciones que satisfacen las condiciones buscadas, de manera que Jorge decide sugerir 27° como la respuesta del ejercicio, aclarando en la entrevista que ya no se siente conforme con dicha aproximación:

(J): *“pues entonces yo sabía que tenían que ser menos de 36° , entonces puse, pues ahí sí ya lo hice a ojo, puse 27° pero me di cuenta que me había quedado mal, pues eso fue en medio de mi afán, porque si yo multiplico 27 por 10 me va a dar 270° , y en este poquito (señalando el arco restante) no hay la diferencia entre 270 y 360 grados, entonces tendría que ser como unos 32° para que en total de 320° y entonces eso (señalando el arco restante) son unos 40° .”*

Se puede observar cómo Jorge mantiene una estrategia de aproximación visual, pero trata de respaldar sus aproximaciones con procesos geométricos, y en el segundo ejercicio con relaciones multiplicativas. Aunque no se evidencia con certeza el conocimiento de estas relaciones, sí se nota un uso de las mismas de una manera superficial.

4.2 PRIMERA ACTIVIDAD: CONSTRUCCIÓN DE TRANSPORTADORES

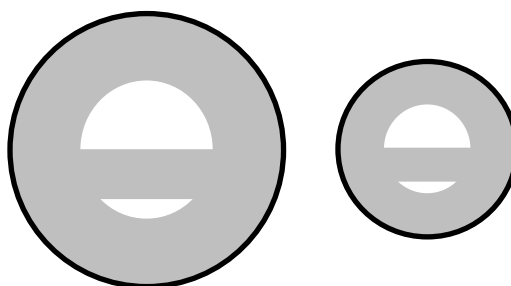
4.2.1 Análisis a priori. Dentro de los resultados obtenidos en la actividad preliminar, pudo verse la necesidad de un transportador por parte de los estudiantes para poder medir un ángulo. Más que ofrecerles la herramienta para que hagan un uso mecánico de ella, esta actividad pretende utilizar la construcción de un transportador como excusa para ahondar en la comprensión del concepto

de ángulo, motivando a los estudiantes a construir divisiones según la cantidad pedida, las cuales al principio pueden ser abordadas con estrategias que no involucren relaciones multiplicativas (especialmente cuando se trata de potencias de dos), pero después se tornan más complejas (cuando se trata de números primos) en la medida en que requieren un mayor proceso de análisis para su construcción orientado hacia la medición y establecimiento de proporciones entre el arco, el ángulo y la circunferencia.

La actividad consta de dos ejercicios de construcción de transportadores, en los cuales nuevamente se les permite a los estudiantes hacer uso de todas las herramientas que deseen (regla, escuadras, compás, tijeras, calculadora, una pita, etc.) menos el transportador.

En el primer ejercicio se les pide a los estudiantes que construyan un transportador, pero no que lo dividan en 360 partes, sino en vez de esto, lo dividan en 8 partes iguales (ver figura 8). Nótese cómo el número 8 aporta ciertas características útiles para la división del transportador como lo son la posibilidad de dividir en mitades hasta llegar a ocho partes; la posibilidad de trazar dos perpendiculares que se corten en el centro de la circunferencia, para luego dividirlos con bisectrices (como ya lo hicieron en la actividad preliminar); o hacer uso de una escuadra de 45° , ya que como se sabe, $360^\circ/8=45^\circ$.

Figura 8: Figura base sobre la cual construir un transportador.



En este ejercicio se le da además al estudiante un segundo transportador más pequeño, para que una vez haya resuelto el ejercicio con el transportador grande, lo intente ahora con el pequeño. En esta ocasión, se espera que el estudiante logre evidenciar que el proceso desarrollado para la división del círculo es independiente del tamaño del mismo.

A pesar de que el objetivo principal de estas actividades es que los estudiantes establezca relaciones multiplicativas, este primer ejercicio pretende que los estudiantes utilicen estrategias que no necesariamente tienen que ver con procesos de medición ni cuantitativos, sino que pueden ser geométricos o derivados de dobleces o aproximaciones; estrategias que se espera sean invalidadas por los mismos estudiantes durante la realización del segundo ejercicio, ya que todas estas, salvo la aproximación visual, son inútiles al intentar resolverlo.

En el segundo ejercicio se les da a los estudiantes la misma gráfica mostrada en la figura 8, y al igual que en el caso anterior, se les pide que dividan el transportador en partes iguales. No obstante, en esta ocasión la cantidad de partes debe ser igual a 13. ¿Por qué 13? Nótese las características tan especiales de este número. Para empezar es un número primo, lo cual obliga al estudiante a buscar las 13 partes desde el comienzo, ya que no le va a ser posible primero dividir en cierta cantidad y luego dividir cada una de las partes obtenidas. Por otra parte, haber escogido números primos menores que 8 había resultado en partes muy grandes que se apartan mucho de la imagen de transportador que conocen los estudiantes, y haber escogido al número 11 (que es el primo más cercano y mayor que 8) resultaría en partes cuya medida aun sería muy parecida a 45° . El trece resulta ser una buena opción.

Tanto en el primero como en el segundo ejercicio, es posible que los estudiantes intenten hacer simplemente aproximaciones visuales para dar su respuesta, o que

por ensayo y error vayan probando un ángulo y reproduciéndolo alrededor de la circunferencia (por ejemplo con el compás) hasta lograr que las 8 ó 13 partes den exactas.

En el segundo ejercicio se espera que los estudiantes intenten hacer divisiones similares a las hechas en el primero, es decir que intenten dividir en mitades. Como es de esperarse, esta estrategia no les será útil, ya que el número 13 no es potencia de dos. Y si de alguna manera logran trisecar la circunferencia o dividirla en cuatro partes o en cinco, de igual manera no podrán hacer subdivisiones que resulten en 13 partes, ya que este número no posee más divisores que la unidad y él mismo. Todas estas divisiones mencionadas podrían obtenerse haciendo uso del ángulo de 30° o 60° de una escuadra, o realizando construcciones geométricas conocidas con regla y compás.

También se espera encontrar algunas curiosidades relacionadas con la comprensión de la expresión “partes iguales”. Cuando se aborda con estudiantes de primaria el concepto de número fraccionario y se les pide que dividan una unidad en cinco partes iguales, algunos estudiantes tienden a dividir primero en cuatro partes y luego subdividir una de ellas en dos. Este error los suele acompañar por mucho tiempo, y por ello, en este ejercicio es posible que algún estudiante intente hacer lo mismo; por ejemplo que de alguna forma divida la circunferencia en 12 partes y luego subdivida una de estas partes en mitades para obtener un total de 13.

Como les es permitido hacer uso de una pita, una regla y una calculadora, es posible que algún estudiante intente medir la longitud de la circunferencia para luego dividirla en 13 partes y tomar nuevamente esta medida sobre la circunferencia para establecer el tamaño de cada una de los ángulos en los cuales queda dividido el transportador; después puede hacer uso del compás, de la regla,

o de la misma pita para replicar dicha medida. Así podría evidenciarse un uso de relaciones multiplicativas entre los ángulos, los arcos y la circunferencia.

A cada una de las partes en las que queda dividido el círculo en el primer ejercicio se le llamó *saltos* y a las del segundo ejercicio *pasos*. Esto obedece a que se pretende no se desea generar confusiones con las divisiones conocidas como *grados* y *radianes*. Por otra parte, nótese cómo el avance de un paso de una persona suele ser menor al avance de un salto de la misma y por ello a las partes más pequeñas (los treceavos) se les asignó el nombre de pasos y a las más grandes (los octavos) el de saltos.

Los dos ejercicios son presentados en una misma hoja, cada uno con su correspondiente enunciado y con los dos “transportadores” (el grande y el pequeño) para construir los transportadores, pero los estudiantes reciben la instrucción de realizar la actividad en el orden en el que se les presenta.

4.2.2 Análisis a posteriori

Descripción de la clase y lo entregado por los estudiantes

Al igual que en la actividad preliminar, los estudiantes esperaban que se les diera un método a seguir, una solución algorítmica del problema o una fórmula que solo tuvieran que reproducir para conseguir dividir la circunferencia en partes iguales. Poco a poco fueron explorando estrategias muy similares a las utilizadas en la actividad preliminar y rápidamente comenzaron a verse las manos levantadas indicando que ya tenían una solución para el problema.

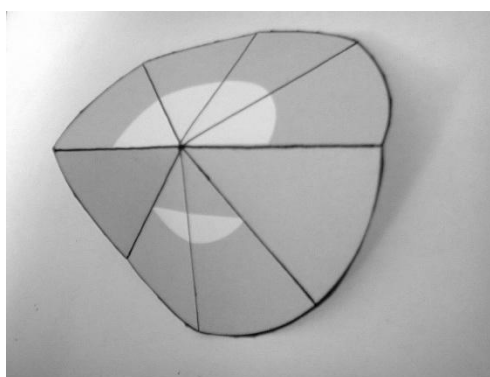
Podemos identificar cuatro estrategias diferentes que utilizaron los estudiantes. La primera fue ensayo y error, dividiendo aproximadamente la circunferencia para obtener la cantidad de partes requerida, pero sin ofrecer ningún tipo de argumento o proceso matemático que respaldara su repartición. La segunda fue de tipo origami: Los estudiantes recortaron los círculos e hicieron divisiones en mitades,

algunas veces desdoblado y otras haciendo dobleces sucesivos. La tercera estrategia consistió en trazar rectas perpendiculares y luego las bisectrices de los ángulos formados. Ninguna de las estrategias anteriores les fue útil cuando trataron de dividir el círculo en 13 partes iguales. Tan sólo un estudiante midió la circunferencia e hizo algunos cálculos con ella, manifestando haber resuelto el problema. Este estudiante fue Jorge y más adelante se detallará lo entregado y la explicación dada por el estudiante del proceso seguido. A continuación se describe lo presentado por cada estudiante.

Paola:

Durante el desarrollo de la clase se pudo observar cómo Paola optó por recortar los círculos dados y hacer pliegues en ellos. En la circunferencia entregada por Paola se pueden observar los pliegues que permiten suponer la estrategia utilizada (Ver figura 9). Al parecer Paola optó por doblar el círculo por la mitad, para después doblar nuevamente logrando una perpendicular. Lo que no se puede determinar con claridad es la estrategia utilizada para encontrar el centro de la circunferencia, para conseguir que las rectas sean perpendiculares y para garantizar que las bisectrices realmente dividan cada uno de los ángulos en partes iguales.

Figura 9: Divisiones del círculo grande en 8 partes iguales por parte de Paola.



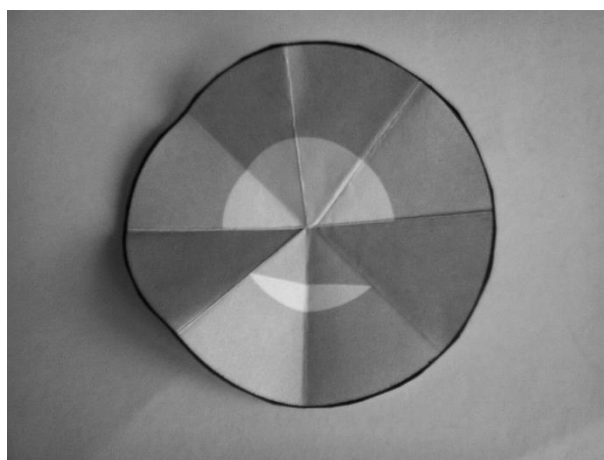
Puede observarse cómo uno de los pliegues coincide con una de las líneas dibujadas en la figura dada. El hecho de haber entregado ese dibujo en el círculo, de ninguna manera pretendía sugerir el uso de los elementos que él contenía, pero aparentemente Paola hizo uso de uno de ellos.

Paola no entregó ni el círculo pequeño, ni los que debían dividirse en 13 partes. Es posible que no haya logrado resolver la segunda parte de la actividad. La estrategia de subdividir en mitades no será útil al tratar de conseguir 13 partes iguales.

Jorge:

Como ya se mencionó anteriormente, Jorge no sólo realizó recortes y pliegues durante la clase, sino que también se le observó realizando mediciones valiéndose de un trozo de papel que utilizó como “regla flexible”. Al igual que en el caso de Paola, el transportador entregado por Jorge permite ver los pliegues realizados por el estudiante, dividiendo el círculo en ocho partes iguales.

Figura 10: Divisiones del círculo grande en 8 partes iguales por parte de Jorge.



Igualmente Jorge hace entrega de una segunda circunferencia en la que pueden observarse 14 marcas a lápiz, 13 de ellas aparentemente dividen la circunferencia en partes iguales, y una cortando irregularmente una de estas partes.

En ninguno de los casos Jorge entregó el círculo pequeño. No se espera que habiendo resuelto la primera parte del ejercicio, el estudiante haya tenido dificultades para reproducir su estrategia en un círculo más pequeño. Podría suponerse que Jorge no vio necesario realizar la actividad en el círculo pequeño, suponiendo que el proceso sería exactamente el mismo.

4.2.3 Análisis a priori de la entrevista. Al observar el trabajo durante la clase y los transportadores entregados por los estudiantes, surgen algunas inquietudes que han de ser aclaradas durante la entrevista. Por ello la entrevista que se realizará a los estudiantes observados se orientará no sólo a preguntar cuál fue el proceso seguido por cada uno para la solución de los problemas propuestos, sino también a indagar sobre la certeza que tuvieron los estudiantes para la ubicación del centro; el trazo de perpendiculares y bisectrices; y en el caso de Jorge, la división en 13 partes iguales. Igualmente se desea aclarar el orden en el cual fueron realizados los pliegues y cuál era el objetivo de efectuar cada uno de ellos, y conocer el significado de la marca 14 en el transportador de Jorge y demás detalles que hayan pasado desapercibidos.

Por otro lado, debido a que los estudiantes no hicieron entrega en algunos casos del círculo dividido en 13 partes y en otros casos del círculo pequeño, es necesario preguntar a los estudiantes para tener claridad de si lograron o no resolver la segunda parte de la actividad y si lograron establecer que el proceso de división es independiente del tamaño del círculo.

4.2.4 Análisis a posteriori de la entrevista

Entrevista con Paola

Para empezar se le recordó a Paola en qué consistía la primera actividad y se le pidió que explicara la estrategia que utilizó para resolverla. Paola explica que decidió recortar el círculo y doblarlo por la mitad para obtener dos partes; luego, lo desdobló y lo dobló nuevamente por la mitad para obtener cuatro partes (siempre procurando que coincidieran los bordes); y luego hizo los dobleces correspondientes para obtener las ocho partes, desdoblado siempre antes de realizar cada doblez.

Se desea saber cómo estableció Paola el centro de la circunferencia, cómo logró trazar la perpendicular y cómo logró trazar las bisectrices. A continuación se presenta un aparte de las preguntas realizadas y las correspondientes respuestas de Paola:

Entrevistador (E): Cuando hizo el primer doblez, ¿para qué lo hizo?

Paola (P): *“Para partirlo por la mitad, o sea ehh, más o menos la medida y después volverlo a partir en cuatro. Entonces era más fácil para hacerlo así”*

(E): ¿Y cómo logró que quedara justo en la mitad?

(P): *“Porque recorté bien y los bordes me quedaron unidos, o sea por la mitad.”*

(E): En el segundo doblez parece que desdobló y volvió a doblar... ¿para qué hizo ese segundo doblez?

(P): *“Para dividirlo en cuatro, entonces ya tenía la mitad, entonces esos cuatro pedazos los tenía que partir en dos para que fueran los ocho.”*

(E): ¿Y cómo logró que los cuatro pedazos fueran iguales?

(P): *“A ojo.”*

(E): Entonces, ¿cómo sería a ojo?

(P): *“Pues lo abrí, ya estaba partida por la mitad, entonces pues intenté que no quedara torcido, y pues ya tenía un punto y estaba marcándola con un marcador, cada línea que hacía para que no quedara torcido.”*

Puede observarse cómo Paola tiene bastante claro que al hacer divisiones y subdivisiones en mitades podrá obtener ocho partes iguales. Igualmente se utiliza en forma implícita la propiedad de que una cuerda pasa por el centro de un círculo si y sólo si es una línea de simetría del mismo, por lo cual hacer que los bordes coincidan entre sí (*“los bordes me quedaron unidos”*) permite encontrar un primer diámetro del círculo.

Los trazos hechos con el marcador le fueron muy útiles a Paola para hacer coincidir los extremos del primer diámetro trazado (*“intenté que no quedaran torcidos”*) y conseguir hacer un doblez que permita trazar una recta perpendicular y por consiguiente dividir el círculo en cuatro partes iguales.

Nuevamente la expresión “a ojo” acompaña a la estudiante. Aunque la estrategia utilizada por Paola se remite en forma implícita a principios y propiedades geométricas, en ningún momento la estudiante las menciona o utiliza con precisión argumentos basados en ellos. Básicamente desarrolla una actividad de carácter empírico.

En cuanto a la relación entre el tamaño de los ángulos y el tamaño del círculo, la entrevista se desarrolló de la siguiente manera:

(E): Luego había que hacerlo con un círculo más pequeño, ¿cómo le fue con ese círculo?

(P): *“Hice lo mismo, y me quedó igual. Y también lo marqué con marcadores, entonces se veía que estaba pasable.”*

(E): ¿Qué puede decir del tamaño del círculo? ¿Afecta en algo la actividad?

(P): “No.”

(E): ¿Y por qué cree que pasa eso? ¿por qué cree que no afecta?

(P): *“Porque igual el ángulo que yo estaba haciendo no va a cambiar por el tamaño de círculo.”*

De alguna manera la estudiante tiene claro que el proceso de división llevado a cabo no se va a ver afectado por cambios en el tamaño del círculo, pero a pesar de haber insistido en la pregunta, la explicación dada no se aparta de la repetición de dicha pregunta con sus propias palabras.

Por último, al preguntarle por la segunda parte de la actividad que consistía en dividir la circunferencia en 13 partes iguales, Paola mostró que sí había intentado resolverlo pero que no pudo conseguir la división pedida:

(E): En el segundo punto había que dividirlo en 13 partes que llamaríamos pasos, ¿cómo lo hizo?

(P): *“Pues dividí 360 en 13 y me dio 27,70 aproximadamente, pero no fui capaz de hacerlo porque no tenía... no tenía transportador para medir los grados... entonces solo hice la operación pero no supe cómo se divide.”*

(E): ¿Y no se le ocurrió algún otro método, alguna otra forma de dividirlo?

(P): *“Pues lo empecé a dividir pues los 90 grados y empecé más o menos a aproximar, y empecé a dividir todo el círculo pero igual me quedaban pedazos más grandes que otros...”*

Paola, al igual que los demás estudiantes, tenía claro que el “tamaño” de cada una de las partes debía ser el mismo. Así, es importante destacar cómo Paola opta por realizar la división del ya conocido valor de 360° en 13 partes iguales. Esto muestra cómo Paola comienza a establecer (o a evidenciar) procesos de tipo cuantitativo en un problema de tipo geométrico en el que intervienen círculos y divisiones de los mismos. Si Paola hubiera dividido la medida de la circunferencia, seguramente no habría tenido ningún problema en medir el arco correspondiente a $1/13$ de la circunferencia, pero se puede ver que la dificultad no yace necesariamente en entender el proceso de partición como equivalente al proceso cuantitativo de división, sino en encontrar una forma alternativa para medir cada una de las partes que se obtienen, basada en la circunferencia y no en el giro.

También puede observarse cómo siguen apareciendo dos elementos: la necesidad del transportador y las intenciones de realizar aproximaciones visuales bajo comparación con ángulos conocidos.

Entrevista con Jorge

En esta entrevista puede encontrarse una diferencia entre el proceso llevado a cabo por Paola y por Jorge, ya que Jorge no desdobló el círculo en cada paso, sino que los pliegues los hizo en forma sucesiva. Al final se enorgullece de mostrar la hoja doblada tres veces en forma sucesiva, en donde se puede comprobar visualmente que las partes tienen el mismo tamaño.

(E): ¿Cómo le fue cuando trató de dividir la circunferencia en ocho partes iguales?

(J): *“Yo la cogí, pues la recorté, y lo partí exactamente por la mitad y luego, sin desdoblarlo, lo seguí doblando. Luego seguí [...] entonces ahí tenía el centro y salían los 8 pliegues.”*

(E): Bueno, hablemos del primer doblez, al hacer ese doblez ¿qué quería lograr?

(J): *“Dos mitades, o sea como si fueran de 180: 180 y 180... 360.”*

(E): ¿Y cómo hizo para que le quedaran exactas?

(J): *“Pues tenía que recortar bien el círculo, y entonces luego pues con precisión lo medí muy bien.”*

(E): ¿Y el siguiente pliegue?

(J): *“Sin desdoblarlo, o sea igual lo parto por la mitad.”*

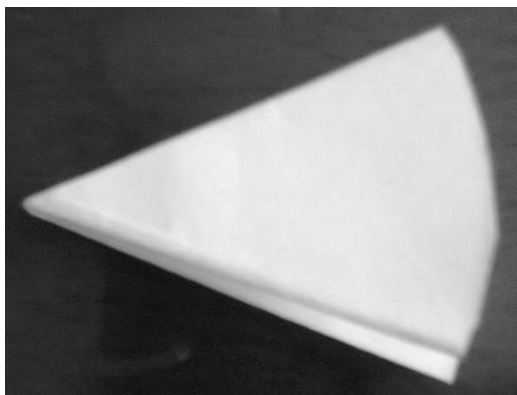
(E): ¿Y por qué dice sin desdoblarlo? ¿Qué pasa si lo desdobla?

(J): *“Porque si lo desdobla pues entonces digamos que yo tengo esto ¿no? entonces tengo esta línea voy a tener aquí un doblez entonces me quede, o sea no me quede exacto sino que me quede una equis o sea quede torcido entonces no me va a dar igual.”*

(E): ¿Cuando dice torcido se refiere a algún número específico?

(J): “Sí, o sea puede que un ángulo me quede diferente al otro, entonces los doblo y pues así garantizo que cuando los desdoble todos me van a quedar así (señalando el círculo doblado tres veces en forma sucesiva).” (Ver figura 11).

Figura 11: Círculo doblado en mitades tres veces sucesivamente, por parte de Jorge.



En cuanto a la precisión de los pliegues hechos, Jorge utiliza la expresión “*medí muy bien*” mientras muestra cómo coinciden los bordes al hacer cada uno de los pliegues. Igualmente insiste en que no se debe desdoblar la hoja (sino hacer los dobleces sucesivamente) para evitar que “le quede torcido”, lo cual puede interpretarse como la búsqueda del ángulo recto.

La estrategia de Jorge es mucho más precisa que la de Paola, pero no evidencia el establecimiento de relaciones multiplicativas entre el ángulo, el arco, o la circunferencia y la cantidad de partes pedidas. En cuanto al tamaño del círculo, manifiesta que no afecta su proceso y por tanto realiza exactamente el mismo procedimiento tanto en el círculo grande como en el pequeño, como se puede observar en la siguiente parte de la entrevista.

(E): Y ¿cuándo lo hizo con la circunferencia más pequeña? **(J):** “*Pues hice lo mismo*” ¿hace lo mismo? **(J):** “*exactamente lo mismo*” **(E):** ¿hay alguna diferencia en que le circunferencia sea grande o pequeña para ese proceso? **(J):** “*no afecta*

en nada” (E): ¿y cómo sabe que queda bien? (J): “8 (mostrando el círculo dividido en ocho partes)”.

Luego se le preguntó a Jorge por la estrategia utilizada para la división del círculo en 13 partes y tanto su proceso como sus respuestas mostraron ya un uso de la relación invariante entre el cociente de la circunferencia y el arco y el tamaño de las partes en las que queda dividido el círculo. Este proceso se describe en el siguiente aparte de la entrevista:

(E): El siguiente problema le pedía que lo hiciera para 13 partes iguales, ¿cómo le fue en este problema?

(J): *“Yo utilicé un pedacito de papel como una pita, ah, primero medí la pitica. Entonces la pitica en total midió 21,6cm [...], pero la circunferencia mide más de 21,6, entonces medí hasta donde pude, o sea medí, y hice como donde empecé y donde me terminó la pita, y donde me terminó medí lo que me faltaba y eso me dio 1 punto 7 centímetros, entonces lo sumo y me da un total de 23,3, eso es lo que mide la circunferencia. Teniendo lo que mide la circunferencia, como sé que tiene que haber 13 partes iguales, pues divido la medida de la circunferencia que es 23,3 en 13, eso me va a dar 1 punto 79...”*

(E): ¿Y qué hizo con el 1,79?

(J): *“Entonces 1,79 es lo que tiene que medir cada, cada lado: 1,79; 1,79; 1,79 tiene que medir 13 partes”*

Recuérdese que Paola también planteó la división de 360° en 13 para el establecimiento del tamaño de cada una de las partes, pero no intentó medir la circunferencia ni hacer la división con el valor obtenido. Por su parte, Jorge no se concentró en la medición del círculo solamente desde los 360° , sino que se dispuso a medir la circunferencia. Claramente el proceso utilizado para la medición de la circunferencia también le fue útil para la medición del arco después de haber hecho la división.

En cuanto al círculo pequeño, Jorge manifiesta nuevamente que el procedimiento es el mismo, pero detalla las medidas correspondientes y en este caso no tuvo que utilizar la pita dos veces ya que la medida de la circunferencia pequeña era inferior a los 21,6cm de la pita.

Al preguntársele por la precisión, Jorge hace una aclaración importante para cualquier proceso de medición y es el grado de error diciendo:

“Pues no es que haya sido súper preciso, pues como son números decimales, entonces van decimal, decimal, decimal, pero la diferencia es de muy pocos decimales.”

Reconociendo con ello que aunque la estrategia utilizada lleva a una solución del ejercicio, la precisión en el tamaño de las partes depende del grado de aproximación en que se mida y la cantidad de cifras decimales que se tengan en cuenta.

La última observación hecha por Jorge reafirma que está percibiendo la circunferencia y los ángulos que en ella se ubican, ya no desde un punto de vista memorístico por comparación con ángulos conocidos, sino que de alguna manera pare tener nociones de la proporción existente entre los ángulos y los arcos que subtienden:

“Si tengo esta circunferencia, el tener una más grande pasa lo mismo porque el círculo va como aumentando, porque siempre son 360° , independientemente que tan grande sea una circunferencia, siempre son 360° ”

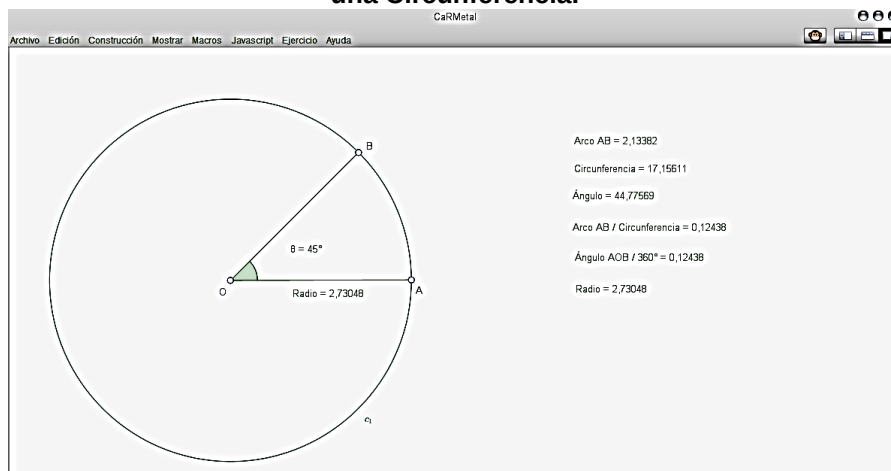
En la siguiente actividad los estudiantes podrán hacer uso de un aplicativo informático que les sugerirá las relaciones entre los atributos de una circunferencia, de manera que ellos puedan plantear una proporción que les permita resolver problemas como los planteados hasta el momento.

4.3 SEGUNDA ACTIVIDAD: APLICATIVO

4.3.1 Análisis a priori. En esta actividad se orientó a los estudiantes para que observaran en forma dinámica la proporción *arco es a circunferencia como ángulo es a 360°*; la relación proporcional existente entre el radio y el arco, y entre el radio y la circunferencia; así como la invariancia del ángulo al cambiar la longitud del radio o de la circunferencia.

Para tal fin se elaboró un aplicativo, desarrollado con el programa *CaRMetal* (ver figura 12), donde se presenta una circunferencia con dos puntos sobre ella llamados A y B. El aplicativo muestra la longitud del arco entre dichos puntos; la medida de la circunferencia, la del ángulo (en grados); el cociente entre la longitud del arco y la circunferencia, el cociente entre la medida del ángulo y 360°; y la longitud del radio. Igualmente permite mover en forma independiente los puntos A y B sin que estos “se salgan” de la circunferencia, de manera que el punto A varíe el radio de la misma y el punto B la amplitud del ángulo. El aplicativo fue realizado por los autores de este proyecto procurando reproducir con fidelidad el utilizado por Moore.

Figura 12: Aplicativo en CaRMetal para el análisis de las relaciones entre los atributos de una Circunferencia.



La importancia de este aplicativo yace en que permite que los estudiantes perciban visual e interactivamente las relaciones entre las variables a analizar, mientras confrontan lo observado con los datos que se irán tomando en una tabla (ver figura 13).

Figura 13: Tabla que acompaña al aplicativo en la segunda actividad.

	Arco	Circunferencia	$\angle AOB$	$\frac{\text{Arco } AB}{\text{Circunferencia}}$	$\frac{m\angle AOB}{360^\circ}$
Posición 1					
Posición 2					
Posición 3					
Posición 4					
Posición 5					

La actividad consta de tres puntos. El primero es básicamente un ejercicio de ubicación de los componentes que se desean analizar, a fin de que los estudiantes ubiquen cada uno de ellos en el aplicativo. El segundo punto consiste en variar la posición del punto B, ubicándolo en cinco lugares diferentes y llenando la tabla con cada uno de los resultados mostrados; y el tercer punto consiste en variar la posición del punto C, ubicándolo también en cinco lugares diferentes y tomando nota de los correspondientes valores obtenidos.

En el segundo punto de la actividad se espera que los estudiantes observen, a medida que varían la ubicación del punto B, que al mover el punto alrededor de la circunferencia en sentido antihorario, aumentarán los valores correspondientes al arco, al ángulo y a las dos razones mostradas. Igualmente se espera que los estudiantes observen que al moverlo en sentido horario, las variables mencionadas disminuyen su valor. En ambos casos se espera que los estudiantes noten que la medida de la circunferencia permanece constante.

El tercer punto es similar al segundo, en el sentido en que los estudiantes variarán la posición de un punto que está sobre la circunferencia, observando y tomando

nota de las variables mostradas. En este caso el punto no se mueve alrededor de ella, sino que lo hace en forma horizontal, haciendo que el valor del radio aumente o disminuya. Se espera que los estudiantes se den cuenta que al alejar el punto del centro de la circunferencia, los valores del radio, el arco y la circunferencia aumentarán. En forma similar se espera que comprueben que acercar el punto al centro de la circunferencia conlleva a una disminución de los valores mencionados. En ambos casos se espera que comprueben que la medida del ángulo y las razones mostradas permanecen constantes.

Acerca de la proporción existente entre el arco y el ángulo, puede que los estudiantes perciban una interesante “coincidencia” que se da en la primera ubicación escogida, pero a medida que van escogiendo nuevas ubicaciones se espera que descubran cómo las dos razones (planteadas en las últimas dos columnas de la tabla) siempre tienen el mismo valor para cada posición escogida. La igualdad observada entre las dos razones permitirá a los estudiantes establecer la proporción deseada.

Aunque se buscó que la guía y el aplicativo fueran muy claros, es posible que se presenten dudas en la manipulación del mismo, por lo cual sería necesario que el docente orientador aclarara dichas inquietudes, con el ánimo de avanzar hacia el verdadero objetivo de la actividad que es analizar las relaciones existentes en la circunferencia dada. También es posible que los estudiantes manipulen eficazmente el aplicativo y que tomen todos los datos solicitados en las tablas, pero no se percaten de las relaciones existentes. El trabajo entregado por cada estudiante así como las correspondientes entrevistas determinará el alcance logrado.

4.3.2 Análisis a posteriori

Descripción de la clase y lo entregado por los estudiantes

En términos generales se pudo observar que los estudiantes no presentaron mayores dificultades para entender y seguir las instrucciones de la actividad. Sin embargo, antes de iniciar hicieron algunas pruebas de manipulación del aplicativo, moviendo los puntos y después cerrándolo con el ánimo de comenzar desde las condiciones iniciales que este les presentaba.

Una vez relacionados con la herramienta, desarrollaron la actividad sin dificultades para mover los puntos y llenar las tablas. No obstante, se tuvo que reiterar que debían poner por escrito las observaciones hechas, por lo cual no se mostraron conformes manifestando que tenían ideas pero no hallaban la forma de escribirlas. También se pudo observar a los estudiantes refiriéndose a los conceptos geométricos analizados, con palabras o expresiones diferentes a sus nombres. Estas observaciones serán detalladas a continuación.

Paola:

Como se puede observar en la figura 14, Paola escribió junto a cada variable analizada el valor mostrado por el aplicativo. Cabe aclarar que los valores escritos por Paola coinciden con los valores por defecto mostrados en el aplicativo. Jorge no escribió nada con relación al significado de cada una de estas variables. Nótese que el único valor que está expresado con enteros es el ángulo.

Figura 14: Desarrollo del primer punto de la actividad 2 por parte de Paola.

a) Longitud del arco AB.	d) Razón entre la longitud del arco AB y la longitud de la circunferencia
Arco AB= 2,66443	$\frac{\text{Arco AB}}{\text{Circunferencia}} = 0,45534$
b) Longitud de la circunferencia	e) Razón entre la medida del ángulo AOB y la medida de una vuelta completa.
Circunferencia= 13,45644	$\frac{m\angle AOB}{360^\circ} = 0,45534$
c) Medida del ángulo AOB en grados	
$\angle AOB = 56^\circ$	

Los puntos escogidos por Paola no muestran ningún orden aparente, ni ascendente ni descendente, pero puede comprobarse que todos los valores escritos cumplen las relaciones de las variables analizadas para cada posición. En este caso también se puede notar que el ángulo es el único valor que aparece haciendo uso de enteros y no de decimales.

Figura 15: Desarrollo del segundo punto de la actividad 2 por parte de Paola.

	Arco	Circunferencia	$\angle AOB$	$\frac{\text{Arco } AB}{\text{Circunferencia}}$	$\frac{m\angle AOB}{360^\circ}$
Posición 1	3,16027	17,15611	66°	0,18421	0,18421
Posición 2	0,37647	17,15611	8°	0,02194	0,02194
Posición 3	9,07162	17,15611	190°	0,52877	0,52877
Posición 4	1,29597	17,15611	90°	0,2504	0,2504
Posición 5	12,857	17,15611	270°	0,74941	0,74941

a) ¿Qué valores permanecen constantes y qué valores cambian? ¿por qué ocurre esto?

1) la circunferencia y el radio, ya que la circunferencia no aumenta al igual que el radio.

2) Arco, $\angle AOB$; Arco AB / circunferencia, $m\angle AOB / 360^\circ$, ya que el ángulo varía y eso afecta el arco, ya que lo aumenta o lo disminuye.

En cuanto a las observaciones hechas por Paola en este ejercicio se destacan las siguientes afirmaciones⁸:

- El radio y la circunferencia permanecen constantes, y
- la variación del ángulo afecta el arco.

Para el tercer punto, Paola realiza la tabla tomando como referente el ángulo de 56° (el cual es el que aparece por defecto en el aplicativo), variando el punto A de manera tal que se puede observar que los valores variables primero crecen y luego decrecen (ver figura 16).

⁸ Estas observaciones y las del punto 3 fueron reescritas procurando mantener el sentido original dado por la estudiante. Las afirmaciones originales pueden leerse en la figura 15.

En este punto, Paola realiza las siguientes afirmaciones:

- $m\angle AOB$, $\frac{\text{Arco } AB}{\text{Circunferencia}}$, $\frac{m\angle AOB}{360^\circ}$ permanecen constantes,
- “el ángulo [...] es el que factor que cambia esas medidas”, y
- “el arco aumenta o disminuye dependiendo del tamaño de la circunferencia...”.

Figura 16: Desarrollo del tercer punto de la actividad 2 por parte de Paola.

	Arco	Circunferencia	$\angle AOB$	$\frac{\text{Arco } AB}{\text{Circunferencia}}$	$\frac{m\angle AOB}{360^\circ}$
Posición 1	3,08894	19,88929	56°	0,15531	0,15531
Posición 2	2,11157	13,59623	56°	0,15531	0,15531
Posición 3	1,51463	9,75261	56°	0,15531	0,15531
Posición 4	3,94027	25,37115	56°	0,15531	0,15531
Posición 5	5,27465	33,96343	56°	0,15531	0,15531

a) ¿Qué valores permanecen constantes y qué valores cambian? ¿por qué ocurre esto?
 1) $\angle AOB$, Arco AB/Circunferencia, $m\angle AOB/360^\circ$ ya que el ángulo no varía y ese es el factor que cambia esas medidas.
 2) Arco, circunferencia. El arco aumenta o disminuye dependiendo del tamaño de la circunferencia la cual aumenta o disminuye.

Jorge:

Al igual que Paola, Jorge escribió junto a la variable correspondiente, el valor inicial que el aplicativo muestra por defecto (ver figura 17). Igualmente, no escribió nada con relación al significado de cada una de estos atributos. También Jorge utilizó valores enteros para el ángulo.

Figura 17: Desarrollo del primer punto de la actividad 2 por parte de Jorge.

1. Identifique en el aplicativo cada uno de los siguientes atributos. Explique el significado de cada uno de ellos.
 - a) Longitud del arco AB.
Arco AB = 2,66443
 - b) Longitud de la circunferencia
Circunferencia = 17,15611
 - c) Medida del ángulo AOB en grados
 $\angle AOB = 56^\circ$
 - d) Razón entre la longitud del arco AB y la longitud de la circunferencia
 $\frac{\text{Arco AB}}{\text{Circunferencia}} = 0,15531$
 - e) Razón entre la medida del ángulo AOB y la medida de una vuelta completa.
 $\frac{m\angle AOB}{360^\circ} = 0,15531$

En el segundo punto puede verse cómo Jorge llenó cada una de las casillas de la tabla con los valores de las variables analizadas, correspondientes a cada una de las posiciones escogidas para el punto B. Al observar los valores escritos por Jorge, puede comprobarse que se cumplen los comportamientos previstos. Igualmente pueden notarse los valores enteros dados para el ángulo. (Ver figura 18).

Figura 18: Desarrollo del segundo punto de la actividad 2 por parte de Jorge.

	Arco	Circunferencia	$\angle AOB$	$\frac{\text{Arco AB}}{\text{Circunferencia}}$	$\frac{m\angle AOB}{360^\circ}$
Posición 1	8,03249	17,15611	169°	0,4682	0,4682
Posición 2	16,93903	17,15611	355°	0,98735	0,98735
Posición 3	0,16808	17,15611	4°	0,0098	0,0098
Posición 4	4,29342	17,15611	90°	0,25026	0,25026
Posición 5	8,58755	17,15611	180°	0,50055	0,50055

Al respaldo de la hoja Jorge escribió las observaciones correspondientes, relacionadas con el segundo punto de la actividad como se puede observar en la figura 19:

Figura 19: Explicaciones del segundo punto de la actividad 2 por parte de Jorge.

- 2) a. el único valor que permanece constante es el de la circunferencia en las 5 diferentes posiciones ya que B únicamente afecta el ángulo dando diferentes respuestas a todas las categorías en las 5 posiciones excepto la categoría de circunferencia. Esto quiere decir que hubo 5 diferentes ángulos en la misma circunferencia.

dato extra:

mientras el punto B está en la posición 1 el resultado de $\frac{\text{arco AB}}{\text{circunferencia}}$ es igual al resultado de $\frac{m\angle AOB}{360^\circ}$, al igual que en la posición 2, 3, 4, y 5 pero no es la misma en las 5 posiciones, es decir, es la misma respuesta para estas dos operaciones si está el punto B en la misma posición.

Jorge realiza dos afirmaciones:

- “el valor que permanece constante es el de la circunferencia”
- “el resultado de $\frac{\text{arco AB}}{\text{Circunferencia}}$ es igual al resultado de $\frac{m\angle AOB}{360^\circ}$... pero no es la misma en las 5 posiciones.”

En cuanto al tercer ejercicio, puede observarse en la figura 20 que Jorge completó cada una de las casillas de la tabla, dejando al punto B en una posición tal que fijó el ángulo en 94° y realizando una corrección a través de un tachón en las casillas correspondientes al arco y la circunferencia en la tercera posición. Cabe aclarar que durante la clase, Jorge fue sorprendido completando las tres últimas casillas de la tabla en forma vertical, por lo cual se le recordó que debía realizar el ejercicio en forma horizontal, a lo que contestó que ya se había dado cuenta que siempre iba a dar lo mismo.

Figura 20: Desarrollo del tercer punto de la actividad 2 por parte de Jorge.

	Arco	Circunferencia	$\angle AOB$	$\frac{\text{Arco AB}}{\text{Circunferencia}}$	$\frac{m\angle AOB}{360^\circ}$
Posición 1	9,89408	38,0306	99°	0,26016	0,26016
Posición 2	0,26627	1,02346	99°	0,26016	0,26016
Posición 3	4,54348	17,10361	99°	0,26016	0,26016
Posición 4	4,47923	17,10361	99°	0,26016	0,26016
Posición 5	4,03294	15,46124	99°	0,26016	0,26016

Al igual que en el punto anterior, Jorge escribió las observaciones correspondientes al respaldo de la hoja como se muestra en la figura 21:

Figura 21: Explicaciones del tercer punto de la actividad 2 por parte de Jorge.

3) a. los valores que permanecen constantes en todas las categorías posiciones ^{en} son los valores de las categorías $\angle AOB$, $\frac{\text{Arco AB}}{\text{Circunferencia}}$, $\frac{m\angle AOB}{360^\circ}$.

Ya que el punto B está en la misma posición, por lo tanto el ángulo en los 5 casos será igual.

Los únicos datos que cambian son los que se ven afectados por el punto A que da el radio, es decir, que tan grande o pequeña es la circunferencia.

De esto puedo deducir que el ángulo no se ve afectado por el tamaño de la circunferencia, pues los grados se ajustan al tamaño de ~~exci~~.

Esto quiere decir que conociendo un valor en una circunferencia grande puedo hallar los de una pequeña, siempre y cuando el valor en común sea el ángulo, pues luego lo que resta hacer es simplificar para hallar el de una circunferencia más pequeña o ^{no}.

Si me dan el valor de una circunferencia (ejemplo: 30 cm) y el radio es 6 cm y me dan una circunferencia de 15 cm se que el radio será $\frac{6}{2}$, es decir, 3 cm.

En las observaciones anteriores hechas por Jorge se pueden destacar las siguientes afirmaciones⁹:

- El ángulo y las dos razones planteadas permanecen constantes,
- el punto B está en la misma posición,
- el radio y la circunferencia son los únicos que se ven afectados por el punto A, y
- el tamaño de la circunferencia no afecta el ángulo.

Por último Jorge hace dos afirmaciones las cuales se han decidido no reescribir para realizar su correspondiente análisis en la interpretación que sigue.

Interpretación de los resultados

Al parecer tanto Paola como Jorge manipularon el aplicativo en forma satisfactoria, identificando en él cada una de las variables a analizar. No obstante la no escritura de la explicación del significado de cada una de ellas deja en entredicho la comprensión del significado de las mismas.

En cuanto a la escritura entera del valor del ángulo, esto puede deberse a la presentación del aplicativo, ya que es la única variable que al ser presentada en dos lugares (uno sobre el ángulo y otro en el listado junto con las demás variables), en uno de ellos aparece como entero mientras en el otro como decimal; el programa redondea el valor que ha de poner como etiqueta del ángulo. Es posible que esto sea lo que haya llevado a los estudiantes a preferir el valor entero al decimal.

El hecho de que los valores escogidos tanto por Paola como por Jorge para el punto B no sean siempre ascendentes o descendentes, no permite evidenciar por

⁹ Estas afirmaciones fueron re-escritas procurando mantener el sentido original dado por el estudiante. Las afirmaciones originales pueden leerse en la figura 21.

simple inspección en la tabla, que existe una correlación directa entre el ángulo y las demás variables que variaron.

A diferencia de las actividades anteriores que requerían de procesos físicos de medición, en esta actividad los estudiantes realizaron los ejercicios con mayor fluidez y seguridad, lo cual es un aspecto positivo al trabajar con aplicativos informáticos.

En cuanto a las relaciones entre las variables, puede observarse como ambos estudiantes lograron establecer la relación de invariancia entre la circunferencia y el ángulo. Por su parte, Paolo logró establecer que existe una correlación directa entre el ángulo y el arco, mientras que Jorge estableció la equivalencia entre las razones dadas, para cada una de las posiciones del punto B.

Por otra parte, nótese que aunque el valor escogido por Paola para el ángulo en el punto 3 coincide con el valor por defecto en el aplicativo, las demás variables no coinciden con sus correspondientes valores por defecto, es decir que Paola tuvo que haber movido el punto A antes de iniciar o haber ubicado por coincidencia al punto B en el lugar de partida.

En el tercer punto de la actividad, Jorge comienza a adelantarse a las conclusiones a medida que avanza en el llenado de la tabla, como pudo apreciarse en la situación ocurrida durante la clase, que muy posiblemente llevó a Jorge a la corrección hecha a través del tachón.

En esta parte de la actividad, ambos estudiantes consiguen establecer la invariancia del arco y las razones dadas al cambiar el valor del radio (la posición del punto A). De igual forma, ambos logran establecer la correlación directa existente entre el radio y la circunferencia, y Jorge por su parte, la existente entre el radio y el arco.

Vale la pena resaltar dos de las afirmaciones hechas por Jorge: Al decir que “el punto B está en la misma posición”, es muy probable que realmente se esté refiriendo a la amplitud del ángulo, ya que realmente la posición del punto B también varía al mover el punto A, acercándose o alejándose al centro de la circunferencia; y al decir que el tamaño de la circunferencia no afecta el ángulo, es probable que se esté acercando a la proporción entre el arco y el ángulo que se desea que los estudiantes establezcan.

A partir de esta actividad ya comienzan a observarse el establecimiento de relaciones directas entre las variables de una circunferencia, podría pensarse que en este momento los estudiantes tendrían las nociones de una relación multiplicativa entre estas variables, aun sin hacer explícito el radián como unidad de medida del ángulo.

Llama especialmente la atención las dos observaciones hechas por Jorge al final de la actividad. En la primera de ellas (aunque la encierra y escribe la palabra “no” a su derecha) asegura que dado un ángulo sobre una circunferencia grande y una pequeña, al conocer los diferentes valores de las variables presentes en una circunferencia grande es posible deducir los correspondientes valores en la circunferencia pequeña a través de la simplificación de los primeros, Esta afirmación es evidentemente cierta para las variables de interés, como lo son el radio, el arco y la circunferencia. Cabe aclarar que otras variables como por ejemplo el área, no cumplen con propiedad.

En segundo lugar, Jorge también afirma lo siguiente: *“si me dan el valor de una circunferencia, por ejemplo de 30cm y el radio es de 6cm, y si me dan por ejemplo una circunferencia de 15cm, entonces su radio será $6\text{cm}/2 = 3\text{cm}$ ”*. El análisis presentado por el estudiante es bastante cercano a la realidad, aunque desde luego no es válido que a una circunferencia de 30cm le corresponda un radio de 6cm, al igual que para 15cm y 3cm respectivamente.

Las dos afirmaciones anteriores son muestras claras del establecimiento de relaciones multiplicativas entre las variables lineales presentes en una circunferencia.

4.3.3 Análisis a priori de la entrevista. Con la entrevista se pretendía indagar inicialmente sobre las dificultades que tendrían los estudiantes al momento de utilizar el aplicativo, con el fin de establecer los posibles percances que se puedan presentar a cuando se involucran herramientas informáticas en este tipo de actividades. Por otra parte, en el caso de percibir obstáculos o dificultades en su entendimiento, se contarían con elementos favorables para la proposición de mejoras tanto en la actividad como en el aplicativo propiamente dicho.

Con la entrevista también se quería indagar sobre la percepción que los estudiantes poseían sobre los conceptos y variables que fueron abordados en la actividad. Ya que como se pudo observar en el desarrollo de las actividades entregado por los estudiantes, ninguno de ellos explicó el significado de dichas variables.

También se quería conocer con más detalle el proceso llevado a cabo por cada estudiante para el desarrollo del segundo y tercer punto actividad, queriendo descubrir si además de llenar las correspondientes tablas, los estudiantes estaban realizando una interiorización de las relaciones entre las variables analizadas, o conocer el nivel de comprensión que tenían sobre dichas relaciones. En este sentido, se preguntaba especialmente sobre las razones por la cuáles consideraba que una u otra variable presentaba cierto comportamiento ya fuera que permaneciera constante o no, y en algunos casos se les planteaban situaciones hipotéticas contradictorias a sus conclusiones para confrontar la certeza y los argumentos que respaldan sus observaciones.

4.3.4 Análisis a posteriori de la entrevista

Entrevista con Paola

Al iniciar la entrevista, Paola manifiesta no haber tenido dificultades con la manipulación del aplicativo ni con la identificación de las variables que requería para llenar las tablas. Al parecer el hecho de no haber escrito nada relacionado con la explicación del significado de dichas variables se debió únicamente a que la guía no destinaba el espacio requerido para ello, por lo cual lo pasó por alto. A continuación se le preguntó a Paola sobre el procedimiento a llevar a cabo para la realización del primer segundo ejercicio:

Entrevistador (E):...¿cómo le fue en este punto (el segundo)? ¿cómo lo hizo?

Paola (P):*“Pues era una circunferencia, tenía dos puntos, el A estaba, por decir el radio y el B era el que medía el ángulo, entonces ahí nos pedía que moviéramos el punto B que era el de mover el ángulo y lo que alcanzaba a cambiar era el arco, porque el arco era desde el punto A al B, la circunferencia no varía porque no cambió de tamaño ni disminuyó, el ángulo AOB cambió, porque era el que se movía en el punto B, el arco sobre la circunferencia en el ejercicio se ve afectado, igual que esta (refiriéndose a la razón entre el ángulo y 360°), pero el resultado del ángulo sobre la circunferencia era el mismo resultado del ángulo AOB sobre 360, pero era lo mismo según el ángulo, o sea, según la posición que tuviera”*

Como se puede observar, el razonamiento de Paola se basa simplemente en la observación del comportamiento de los atributos a la vez que manipula el aplicativo, pero no agrega ninguna explicación fuera de este. No obstante, pudo hacer una pequeña generalización, al establecer que las dos razones presentadas iban a ser iguales siempre y cuando se estuviera en la misma posición del punto B. La entrevista continúa queriendo profundizar en la argumentación:

(E): ¿Por qué cree que pasaba eso?

(P): *“Porque el arco era igual al ángulo y la circunferencia era igual a 360”*

En este momento Paola plantea una “igualdad” dos a dos entre cuatro variables: el arco con el ángulo y la circunferencia con 360° . Esta afirmación muestra un primer avance para el establecimiento de una relación multiplicativa entre dichas variables. A pesar de que no se mencione con claridad la relación exacta entre ellas, la correspondencia planteada es correcta.

(E): ¿Por qué cree que la circunferencia no cambiaba?

(P): *“Porque la circunferencia no aumentaba de tamaño, ni aumentaba ni disminuía”*

(E): ¿Y el arco? ¿por qué cree que cambiaba?

(P): *“El arco sí cambiaba porque el arco está afectado por el ángulo, que era lo que cambiaba el punto B”*

En este momento Paola establece una correspondencia directa entre el arco y el ángulo, pero al igual que en la pregunta anterior, no define con claridad dicha relación.

(E): En el siguiente punto debía mover el punto A ¿cómo desarrolló este ejercicio? y ¿cómo descubrió los puntos que iba a utilizar?

(P): *“Pues en el punto teníamos el ángulo quieto que era 63° , el arco varía porque depende del radio”*

En esta parte de la entrevista, Paola se mostró muy insegura alcanzando solamente a manifestar que existe una correlación entre el arco y el radio, pero sin dar más explicaciones de dicha relación.

Entrevista con Jorge

Al igual que en el caso de Paola, Jorge asegura que no presentó ningún tipo de dificultad para manipular el aplicativo y que se sintió muy cómodo haciendo uso de él. Igualmente manifiesta conocer el significado de cada una de las variables mostradas en el aplicativo, explicando cada una de ellas al preguntarle. Cabe aclarar que todo el tiempo se refirió a las razones mostradas como divisiones entre

sus correspondientes variables, es decir, no como una variable única, sino como el resultado de una operación. La entrevista continuó pidiéndole a Jorge que explicara cómo había desarrollado el ejercicio así:

Entrevistador (E): Le pedían que ubicara cinco posiciones diferentes y que tomara algunos datos, ¿cómo decidió tomar esas posiciones?

Jorge (J): *“Pues tome unas claves y otras al azar. Como claves pues tomé la de 90° y la de 180° . ¿Por qué tomé estas dos?, porque [...] 90 es la mitad de 180 entonces lo que me dé 180 tiene que ser el doble como para agilizar, con ese fin lo hice, y los otros si fueron ángulos al azar.”*

Desde el comienzo, en la actividad preliminar, Jorge ha mostrado intenciones de establecer relaciones de tipo cuantitativo entre las variables que se le presentan. En este caso manifiesta implícitamente una relación de proporcionalidad entre los ángulos y otras medidas, afirmando no sólo que están correlacionadas, sino también que conservan un factor de escala. Aunque sus ángulos preferidos siguen siendo los notables, no hace uso de ellos por su forma o ubicación, sino por la relación multiplicativa existente entre ellos.

(E):...¿Qué permanece constante y qué cambia?, ¿qué pudo observar ahí?

(J): *“Pues en las cinco posiciones lo que permanece constante es la circunferencia y en cualquier otra posición se va a mantener la misma circunferencia, ¿por qué?, porque la circunferencia no varía dependiendo de la posición del punto B, que el punto B en este caso es el ángulo, en el programa, lo que era el punto B era lo que me daba el ángulo, entonces la circunferencia no tiene nada que ver con el ángulo, por eso la circunferencia en cualquier posición no va a variar. ¿Qué si pude notar?, que en la misma posición, la división entre el arco y la circunferencia iba a ser igual a la del ángulo sobre 360 , pero en la misma posición, tenía que ser en la misma posición...”*

Se pueden destacar tres cosas importantes en esta parte de la entrevista: La primera es que la asociación del punto B al ángulo, está generando cierta confusión conceptual. Jorge afirma que el punto B es el ángulo, y aunque están directamente relacionados, son dos objetos geométricos diferentes. En segundo lugar, se puede evidenciar la certeza que manifiesta Jorge, al asegurar que la circunferencia permanece constante. A pesar de que las afirmaciones de Jorge van acompañadas inmediatamente por una justificación, en este caso la justificación se limita a repetir su afirmación sin agregar algún otro argumento, más que el visual. En tercer lugar, Jorge nota una constante que no es fruto de la observación vertical de los valores de la tabla, sino que se obtiene analizándolos en cada posición a la vez, y que corresponde a la proporción que intencionalmente se les ha puesto para que establezcan la relación entre el arco y el ángulo. Esto representará una base que más adelante será utilizada por Jorge para la solución de otros problemas.

(E): ¿Por qué cree que pasa eso?

(J): *“Pues porque el arco, o sea, lo que me da el arco, el arco me indica el ángulo, entonces son como relativamente, por decirlo así primos, o sinónimos, cosas así... son similares; y una circunferencia, pues no sé, yo pensaba que era porque [...] (manifestando un poco de inseguridad) toda circunferencia mide 360° y pues no sé, son como un dato es relativo al otro, pues iba a ser igual [...] la respuesta del uno iba a ser igual a la del otro.”*

(E): Bueno y ¿qué más pudo observar en esa tabla?

(J): *“Pues que lo que modifica el ángulo es el arco y [...] siempre va a ser constante la circunferencia y las divisiones del arco y la circunferencia y el ángulo y 360 son iguales en la misma posición. O sea que los únicos datos que varían en diferentes posiciones son el arco sobre la circunferencia, el ángulo sobre 360, el ángulo, que es lo que estoy modificando, y el arco.”*

En esta parte de la entrevista puede verse nuevamente cómo Jorge manifiesta en forma implícita las relaciones multiplicativas esperadas, al asegurar que el arco y el ángulo son relativos o similares. Para profundizar un poco más en la relación manifestada por Jorge se le propone la siguiente situación hipotética:

(E): Digamos que usted haya querido agrandar el ángulo pero el arco se haya disminuido, ¿será posible que esto ocurra?

(J): *“No porque el ángulo, lo que decíamos, o sea el ángulo es relativo al arco. O sea hay dos formas como de medir las cosas, ¿no? entonces uno puede medir con arcos, digamos que no existieran los grados, entonces yo lo podría medir con arcos, son relativos.”*

La pregunta no logra desestabilizar la idea que Jorge se ha formado. Antes bien, agrega un nuevo elemento a su análisis: Jorge asegura que podría medir ángulos sin necesidad de utilizar grados, valiéndose sólo de los arcos. Esto puede interpretarse como una noción del concepto de medida en radianes que será abordado en la siguiente actividad.

A continuación se le pregunta a Jorge acerca del proceso llevado a cabo en la segunda parte de la actividad, en donde se debía manipular el punto A, el cual cambiaba el valor del radio de la circunferencia. Jorge manifestó que tampoco tuvo dificultades en esta parte para la manipulación de aplicativo y realizó las siguientes observaciones:

(E): ¿Qué cosas le parecían constantes y qué cosas cambiaban?

(J): *“Aquí prácticamente todo estuvo constante. Lo único que varió fue el arco y la circunferencia, fue lo único. Porque yo estaba era moviendo el punto A que es el radio, entonces [...] dependiendo del [...] tamaño del radio me va a dar el tamaño de la circunferencia. Entonces porque, yo puedo hallar una circunferencia con la fórmula de 2π por r , entonces dependiendo del radio, me voy a dar cuenta de la*

circunferencia, por eso los dos se veían acertados. Pero el ángulo no importa, a eso me refería, que una circunferencia grande o chiquita pueden tener el mismo ángulo, no importa si es grande o chiquita porque siempre van a tener 360°, entonces el ángulo no tiene por qué afectar. Y pues, la división entre el arco y la circunferencia y el ángulo sobre 360 en todas dio igual [...] porque el ángulo permaneció constante.”

Al igual que con el punto B, en este caso se puede observar cómo al sugerir en el enunciado que el movimiento del punto A afecta el valor del radio, ha formado en Jorge la idea que el punto A es el radio. Aunque puede ser simplemente un mal uso temporal del lenguaje, es recomendable estar atento a este tipo de afirmaciones.

Nótese cómo para Jorge es bastante clara la relación existente entre el radio y la circunferencia, posiblemente de forma memorística, pero estableciendo una conexión entre estas variables, de manera tal que la una varía exclusivamente con la variación de la otra. A pesar de la claridad que Jorge manifiesta en que el ángulo no tiene por qué afectar, aún no expresa en forma clara los argumentos de tipo cuantitativo que sustenten dicha afirmación. No obstante, sí menciona los elementos necesarios para la construcción de dicho argumento, como lo son: ángulo, arco, 360° y circunferencia.

(E): ¿El arco también permaneció constante?

(J): *“No, el arco variaba dependiendo del radio.”*

(E): ¿Qué sucedía con el arco a medida que el radio aumentaba?

(J): *“El arco también aumentaba.”*

(E): ¿Cómo explica usted que el arco se haga más grande pero que la división entre arco y circunferencia siga dando lo mismo?

(J): *“Pues porque es relativo, o sea digamos es como si yo estuviera simplificando las cosas, o sea en la posición uno, digamos tuve una medida del arco y una*

medida de la circunferencia, y en la posición... tuve otra medida del arco y otra medida de la circunferencia, pero estas dos son, como relativas de la otra, ¿sí? o sea ahí no importa el tamaño de la circunferencia si es grande o más chiquita, ¿por qué?, porque van a tener el mismo ángulo, entonces hay un arco que permanece constante y hace que, pues, los otros se vean reflejados en eso.”

En la última parte de la entrevista se trató de orientar a Jorge para que aclarando un poco más sus ideas, pudiera dar un argumento más sólido frente a la relación entre el ángulo y el arco, y se puede observar en las respuestas dadas que Jorge está estableciendo una proporción entre dichas variables. Nótese cómo Jorge manifiesta que el arco y el ángulo son relativos, que dado un ángulo en dos circunferencias se puede simplificar el cociente arco/circunferencia para obtener atributos de una dados los de la otra.

4.4 TERCERA ACTIVIDAD: RADIANES

4.4.1 Análisis a priori. Esta actividad se considera clave para la edificación de las relaciones multiplicativas que pueden surgir entre las variables involucradas. La actividad consistía inicialmente en que los estudiantes construyeran una circunferencia tomando como radio la medida que obtuvieran al cortar un pedazo de cuerda. A continuación se les pregunta cuántas veces cabe dicha medida (el radio) en la circunferencia construida.

Esta actividad estaba direccionada a entender las relaciones que existen entre el radio, la circunferencia y el arco subtendido, lo que conllevaría al establecimiento de la conocida relación multiplicativa $C = 2\pi r$. Se esperaba que los estudiantes definieran o establecieran una medida de las veces que cabe el radio en la circunferencia, esperando que dicha media estuviera para ellos entre 6 y 7 veces. Luego, se les pide a los estudiantes que elaboren un ángulo que tenga un arco subtendido del mismo tamaño del radio escogido. Con este aspecto se esperaba

que los estudiantes se aproximaran de una manera más concreta y práctica a la utilización del radio como unidad de medida, es decir, al concepto de radián.

Una de las definiciones del radian (1 radian) establece que es el ángulo que hace un arco subtendido con la misma longitud que el radio. Este procedimiento se debía hacer primero en forma “manual”, con la ayuda del pedazo de cuerda que inicialmente se cortó; y en segunda instancia se debía utilizar el aplicativo trabajado en la actividad anterior de manera que los estudiantes pudieran comprobar los resultados obtenidos.

Con ayuda del aplicativo, las construcciones hechas manualmente y los conceptos previos que poseen los estudiantes con relación al número Pi (cómo número y no como valor), se esperaba que los pudieran identificar por sí mismos la forma como este número interviene en la relación multiplicativa entre el radio y la circunferencia. Como ya se mencionó, se esperaba que luego de esta actividad los estudiantes dieran sentido la relación multiplicativa $C = 2\pi r$.

A manera de ejercitación, afianzamiento y especialmente verificación de la comprensión de las relaciones entre el arco, el ángulo y la circunferencia, la actividad terminó con la proposición de tres ejercicios, en los cuales se les pide a los estudiantes que calculen la longitud del arco que subtiende un ángulo de 29° , al tomar el radio los valores de 5cm, 5,6cm y 6,3cm. Después de haber desarrollado los ejercicios en forma manual, los estudiantes podrán hacer uso del aplicativo para comprobar sus respuestas.

Aunque se espera que los tres estudiantes tengan resultados similares, es posible que por falta de precisión en la medición las respuestas puedan variar, teniendo en cuenta que no es sencillo medir arcos con una pita.

Es posible que durante el desarrollo de esta actividad los estudiantes no logren escribir con propiedad la igualdad comprobada en la actividad anterior (arco sobre circunferencia es igual a ángulo sobre 360°) lo cual no les permita realizar los ejercicios finales.

Dentro de los conceptos que deben ser tenidos en cuenta para la realización de esta actividad con la intención de que los estudiantes realicen un acercamiento a las relaciones multiplicativas, es el relacionado con la competencia previa que los estudiantes deben poseer en resolución de ecuaciones lineales de una incógnita; en tal sentido, sería pertinente, antes de abordar esta actividad, cerciorarse de que los alumnos dominan estos procesos.

4.4.2 Análisis a posteriori

Descripción de la clase y lo entregado por los estudiantes

Lo primero que se debe señalar en relación a esta actividad, al igual que la actividad 2, es la facilidad que los estudiantes tuvieron para desarrollar la actividad con la ayuda del aplicativo, comparado con la utilización de la cuerda, ya que en el procedimiento manual se notó dificultad para medir con la exactitud adecuada para el ejercicio. Incluso se vieron algunos gestos de incomodidad cuando intentaban la cantidad de veces que cabe el radio en la circunferencia. Se evidenció un trabajo algo más fluido acompañado de mucha seguridad por parte de los estudiantes. No obstante, en la parte correspondiente a las explicaciones escritas de las respuestas dadas, se pudieron notar nuevamente las dificultades que presentan algunos estudiantes desde lo argumentativo. A continuación se describen e interpretan los resultados de cada estudiante.

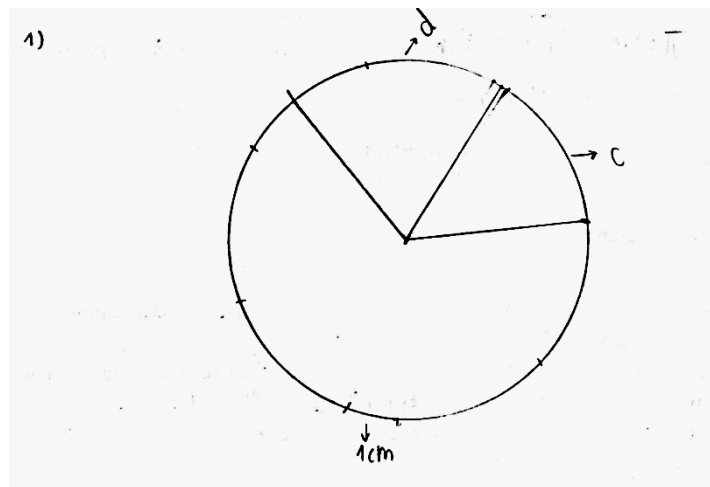
Igualmente se pudieron observar dificultades por parte de los tres estudiantes para el despeje de una ecuación lineal o de una cuarta proporcional, por lo cual fue

necesario dar algunos ejemplos antes de continuar con la actividad, de manera que los estudiantes pudieran recordar los procedimientos mencionados.

Paola:

La circunferencia entregada por Paola tiene un radio de aproximadamente 5cm. En ella se pueden contar alrededor de diez marcas. Igualmente hay trazados tres radios (dos de ellos coincidiendo con marcas de las contadas) que dividen la circunferencia en tres arcos de diferente tamaño, los dos menores etiquetados respectivamente con las letras c y d. Dos de las marcas mencionadas anteriormente forman un pequeño arco etiquetado como 1cm. (Ver figura

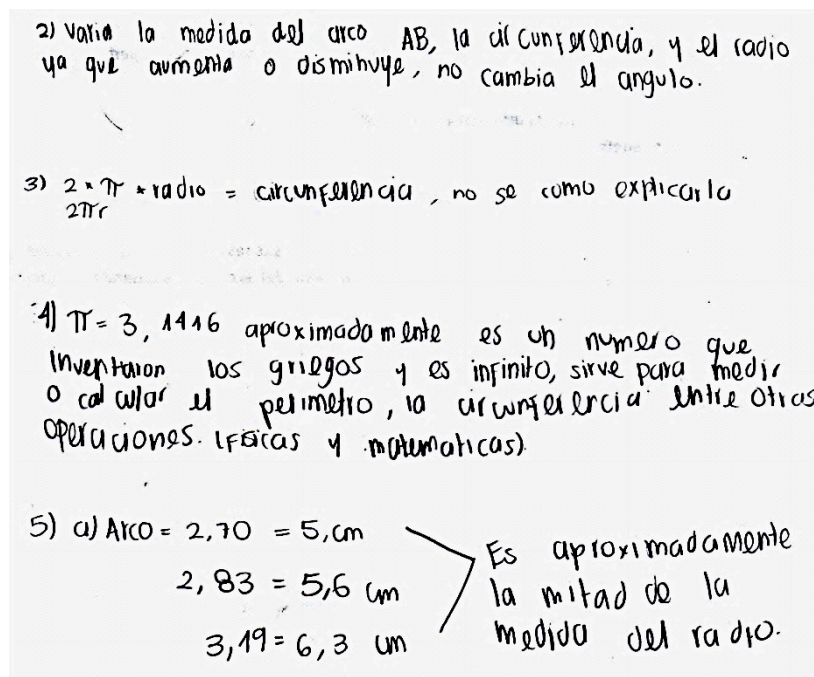
Figura 22: Circunferencia construida en la actividad 3 por parte de Paola.



Paola también escribe las correspondientes respuestas a cada una de las preguntas planteadas. En la pregunta relacionada con la cantidad de veces que cabe el radio en la circunferencia escribe “*Aproximadamente 7 veces*”.

La figura 23 muestra las observaciones hechas por Paola después de haber realizado las construcciones a mano y con la ayuda del aplicativo. Igualmente se muestra la relación entre el radio y la circunferencia (punto 3), el significado de π y el cálculo de las longitudes de arco (punto 5).

Figura 23: Desarrollo de los puntos 2, 3, 4 y 5 de la actividad 3 por parte de Paola.



En las observaciones, y demás afirmaciones hechas por Paola se destaca lo siguiente:

- Varía el arco, la circunferencia y el radio, pero el ángulo permanece constante,
- $C = 2\pi r$, pero no sabe como explicarlo,
- π es un número griego e infinito relacionado con la circunferencia, y
- (el arco) es aproximadamente la mitad del radio.

En la parte frontal de la hoja, debajo del punto 5 (calcular la longitud de arco), Paola realiza algunas operaciones que involucran los valores del primer ejercicio, como lo son 29° y 5cm . Dichas operaciones presentan planteamientos aparentes de proporciones, divisiones y multiplicaciones. (Ver figura 24).

Figura 24: Operaciones desarrolladas en la solución del punto 5 de la actividad 3 por parte de Paola.

$$\frac{29}{360} = \frac{27}{11,5 \cdot 2} \quad \frac{29}{360} = 0,80$$

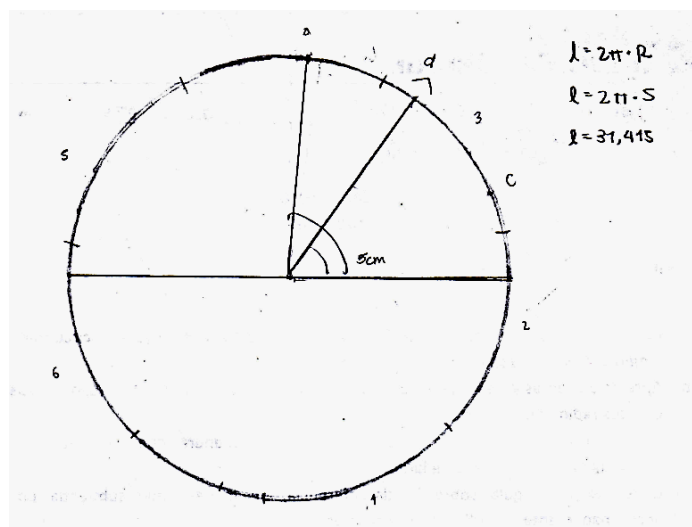
$$\frac{x}{3,14 \times 5 \times 2} \quad 0,80 = \frac{x}{3,14 \times 5 \times 2}$$

$$0,80 = \frac{x}{31,4} = 25,12 = x$$

Jorge:

Por su parte, Jorge presenta una circunferencia con cuatro radios en ella, uno de los cuales está etiquetado como 5cm. También se observan etiquetas con las letras c y d, similares a las presentadas por Paola, pero con la diferencia que en este caso la etiqueta *d* está ubicada justo en la intersección de uno de los radios con la circunferencia. La circunferencia de Jorge también presenta marcas alrededor y una numeración del 1 al 6, sobre los arcos alrededor de la circunferencia. En la parte superior derecha dice $l = 2\pi \cdot R$, $l = 2\pi \cdot 5$ y $l = 31,415$. (Ver figura 25).

Figura 25: Desarrollo el primer punto de la actividad 3 por parte de Jorge.



Con respecto al segundo punto, Jorge realiza las afirmaciones mostradas en la figura 26, de las cuales se puede resaltar lo siguiente:

- Las variables ángulo, arco, arco sobre circunferencia y ángulo sobre 360° permanecen iguales entre sí.
- Las variables arco y radio son iguales.
- La circunferencia siempre cambia y no es igual a otro dato.

Figura 26: Observaciones de primer y segundo punto de la actividad 3 por parte de Jorge.

2) hay ciertas variables que siempre están iguales, como lo son el ángulo, Arco $= \frac{AB}{\text{Circunferencia}}$ y ángulo $\frac{AOB}{360^\circ}$.

hay 2 variables que sus datos son iguales, las cuales son el Arco AB y el Radio.

el único dato que siempre cambia y no es igual a otro dato es la circunferencia.

Igualmente, en la parte frontal de la guía, justo debajo de cada pregunta Jorge contesta brevemente los puntos 3 y 4 escribiendo la fórmula de la circunferencia dado el radio y describe a π como irracional y agrega: “son 3 veces más o menos el diámetro”. (Ver figura 27).

Figura 27: Observaciones del tercer y cuarto punto de la actividad 3 por parte de Jorge.

3. ¿Existe alguna expresión (fórmula) que permita calcular la longitud de una circunferencia dado su radio? Si la hay explíquela. $l = 2\pi \cdot R$

4. ¿Qué puede decir relacionado con el número irracional π (pi)? que se ample, es irracional, son 3 veces más o menos el diámetro

Para el siguiente punto se les pedía que encontraran la longitud de arco para un ángulo y radio definido. Jorge escribe en la parte superior la proporción $\frac{29^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi r}$,

indica el número 0,080 con una flecha bajo el valor de 360° . En la parte superior derecha escribe el número 911,18, y numerando como a), b) y c), plantea la expresión $2\pi \cdot R$ para cada uno de los ítems. Igualmente realiza algunas operaciones en las cuales se destacan los números 2,53cm; 2,92cm; y 3,19cm.

Figura 28: Solución del punto 5 de la actividad 3 por parte de Jorge.

5. Problema de la longitud de arco (resuélvalo a mano y compruebe sus respuestas haciendo uso del aplicativo): Dado un ángulo de 29 grados, determine el valor del arco que subtiende en una circunferencia de:

a) 5 cm de radio
b) 5,6 cm de radio
c) 6,3 cm de radio

$\frac{29}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi \cdot R}$ 911,18

$\downarrow$
0,080

$2\pi \cdot R$

a) $2\pi \cdot 5 \rightarrow$
b) $2\pi \cdot 5,6 \rightarrow$
c) $2\pi \cdot 6,3 \rightarrow$

a) $31,42$
 $29^\circ \rightarrow 2,53 \text{ cm}$

b) $\frac{1044,51}{360} = \frac{29}{360} = \frac{2\pi \cdot 5,6}{360} \rightarrow 2,92 \text{ cm}$

c) $\frac{1147,02}{360} = \frac{29}{360} = \frac{2\pi \cdot 6,3}{360} \rightarrow 3,19 \text{ cm}$

Interpretación de los resultados

En esta actividad se puede observar que los estudiantes, entendiéndolo o no la relación, establecen una correspondencia entre el radio y la circunferencia que estaría en un factor de aproximadamente 6 ó 7 veces. Al parecer no tuvieron problemas en la construcción de la circunferencia pedida ni en la utilización del aplicativo para la comprobación de los resultados obtenidos.

Otro de los aspectos que se deben tener en consideración, es que se observa que utilizan la proporción $\frac{\text{Arco } AB}{\text{Circunferencia}} = \frac{m\angle AOB}{360^\circ}$, para resolver ejercicios, llamando la atención de que aunque era una de las conclusiones de las actividades previas, se debe reconocer cierta recursividad por parte de los estudiantes al plantear la situación como una ecuación lineal con una incógnita, donde la incógnita en el

contexto del problema planteado resulta ser el arco subtendido para un radio y un ángulo dado.

En esta actividad se observa un mayor establecimiento de relaciones multiplicativas por parte de los estudiantes, al igual que una mayor familiaridad con la terminología. Se puede identificar además, que los estudiantes de alguna forma han asimilado conceptos y las relaciones construidas en actividades previas, y que su afianzamiento ha permitido la posterior validación en situaciones nuevas por parte de ellos mismos.

Paola:

En la circunferencia construida por Paola se puede observar que no tuvo dificultades para la construcción de la misma basada en el radio escogido. Igualmente se puede suponer que las etiquetas *c* y *d*, corresponden a las respuestas de los ítems que llevan el mismo nombre, ya que el arco *C* mide aproximadamente un radio, así como el arco *d* mide aproximadamente radio y medio.

En cuando al conteo de la cantidad de veces que cabe el radio en la circunferencia, se puede suponer que la medición de la circunferencia haciendo uso de la pita le representó a Paola algunas dificultades, debido a que algunos de los arcos formados en la figura son un poco más pequeños. De igual forma, la respuesta dada por Paola supera la esperada de 6cm, ya que como se sabe, 2π es aproximadamente 6,28 cm.

Respecto al segundo punto, las observaciones de Paola no corresponden a las esperadas, ya que manifiesta que el radio varía (así como otras variables), lo cual no tiene sentido al mover el punto B (que está relacionado con la amplitud del ángulo). Es posible que Paola haya intentado aproximar el arco moviendo el punto

A, pero en ese caso no hubiera podido conseguir su objetivo. En la entrevista se aclararán estas afirmaciones.

Nótese cómo Paola conoce la relación entre la circunferencia y el radio a manera de fórmula en su memoria, pero a pesar de haber hecho la medición por sí misma, y conocer un valor aproximado de π , no escribe una explicación para la igualdad escrita. Igualmente, tanto el número que asigna a π como las características que le atribuye, no corresponden ni a la definición de dicho número ni a una relación de tipo cuantitativo. Básicamente son características cualitativas asociadas a un símbolo, pero que carecen de significado.

En cuanto a la conclusión hecha por Paola en el quinto punto, es aproximadamente cierta, luego deja el sinsabor de que había podido escogerse otro valor para el ángulo, tal que no permitiera estas ambigüedades.

Por último, el procedimiento realizado por Paola en la figura 24, parece ser el planteamiento y solución de la expresión $\frac{\text{Arco } AB}{\text{Circunferencia}} = \frac{m\angle AOB}{360^\circ}$, salvo que presenta un pequeño error en la división del ángulo en 360° ya que $\frac{29}{360} = 0,08$. Este error hace que su respuesta (25.12) sea diez veces mayor que el valor esperado. Afortunadamente en los resultados mostrados al respaldo de la hoja ya presenta corregido este error, aparentemente bajo el uso del aplicativo, ya que no presenta las correspondientes operaciones (ver figura 23).

Jorge:

La circunferencia construida por Jorge también cumple con las especificaciones dadas, ya que el radio de la misma mide aproximadamente lo mismo que el ángulo etiquetado con la letra c . Al igual que con Paola, se puede suponer que las letras c y d corresponden a las correspondientes respuestas de los ítems del primer punto de la actividad. Lo que es curioso es que a pesar de que el arco C mide

aproximadamente un radio, las marcas del conteo de los radios puestos por Jorge no coinciden con los extremos del dicho arco. De la misma manera al agregar un pequeño arco al arco C, se puede obtener el arco d, que mide aproximadamente un radio y medio.

Es curioso cómo el conteo hecho por Jorge no comienza con el arco C, sino que lo hace en forma anti horaria desde una marca hecha en la parte inferior de la circunferencia. A partir de allí, las marcas hechas por Jorge son aparentemente equidistantes, quedando un espacio inferior a un radio después de la sexta marca. Aun así, este espacio es muy grande para en comparación con el residuo esperado.

En cuanto a las expresiones escritas en la parte superior derecha de la hoja, puede suponerse que son el cálculo de la medida de la circunferencia, ya que en ella Jorge plantea la expresión para dicho cálculo ($2\pi r$) y luego resuelve para el valor de 5cm, obteniendo una circunferencia de 31,415cm de longitud.

Las observaciones hechas por Jorge, relacionadas con la relación entre ángulo y arco y la igualdad entre el radio y el arco, tienen total sentido dentro del planteamiento del problema, pero decir que la circunferencia varía no tiene sentido. Quizás lo que Jorge quiso decir es que las demás variables mostradas en el aplicativo tienen igual valor, pero la medida de la circunferencia es diferente a todas las demás medidas.

Al igual que Paola, Jorge plantea pero no explica la relación entre la circunferencia y el arco, mostrando también su conocimiento memorístico de la misma, que prima sobre las observaciones y las construcciones hechas por él mismo. De la misma forma, los comentarios hechos con relación al número π , dejan ver con fusión en sus conocimientos previos, relacionados con la definición y uso de este número.

Por su parte, los procedimientos llevados a cabo en el punto cinco son coherentes al planteamiento de la correspondiente relación entre el ángulo y el arco, al remplazo de los datos ofrecidos por el problema, y a la correspondiente solución de cada uno de los tres ítems. Puede evidenciarse en esta parte las fortalezas adquiridas por Jorge para la aplicación de las relaciones construidas durante las actividades posteriores y por ende la validación por parte del estudiante de las estrategias desarrolladas.

4.4.3 Análisis a priori de la entrevista. La siguiente entrevista, al igual que las anteriores, tiene como objetivo principal esclarecer las estrategias utilizadas por los estudiantes durante el desarrollo de la actividad. En forma puntual se desea conocer el nivel del destreza que tuvieron en la realización de las construcciones pedidas tanto en forma manual como haciendo uso del aplicativo. En segundo lugar, a través de esta entrevista se pretenden aclarar algunos aspectos de la construcción hecha y algunas de las afirmaciones escritas en los puntos que así lo requerían.

Por lo anterior, la entrevista comenzará preguntando a los estudiantes si tuvieron dificultades para realizar la construcción pedida y su correspondiente comprobación haciendo uso del aplicativo. A continuación se les preguntará acerca de la medida que escogieron como radio y las razones para su escogencia, así como la explicación de la construcción desarrollada. A medida que se escucha a los estudiantes, se irá profundizando en sus ideas a fin de esclarecer todas las inquietudes que surjan relacionadas con el proceso llevado a cabo.

En el caso de que los estudiantes muestren seguridad en alguna de las afirmaciones hechas, se procurará plantearles situaciones hipotéticas que refuercen o que refuten dichas afirmaciones.

A continuación se presenta el análisis de las entrevistas hechas a cada estudiante.

4.4.4 Análisis a posteriori de la entrevista

Entrevista con Paola

A diferencia de sus dos compañeros, Paola obtuvo un valor de 7, al contar las veces que cabe el radio en la circunferencia. La entrevista con Paola comienza preguntando acerca del valor escogido para el radio y las razones por las cuales lo escogió ese valor:

Entrevistador (E): Bueno en esta actividad se le pedía que escogiera con una pita un valor lo recortara y construyera una circunferencia con ese valor, quiero preguntarle qué valor escogió.

Paola (P): “5cm”

(E): Y ¿tuvo alguna razón especial para escoger ese valor?

(P): “No”

(E): Y cuando lo midió en la circunferencia que era la siguiente pregunta, ¿cuántas veces le cupo ese valor en la circunferencia?

(P): “Pues yo lo hice al principio y me daba 7 veces, pero mis compañeros tenían otro dato que era 6, y yo lo volví a hacer y me dio 6 pero me sobraba un poquito de pita”

Paola escogió el radio en forma arbitraria, pero al hacer la correspondiente medición, desconfió de su proceso al conocer los resultados de sus compañeros. Si bien, el proceso de medición hecho por Paola no debió ser muy exacto, es importante evitar que las estrategias de un estudiante se vean influenciadas por las de otro, ya que en algunas ocasiones pueden haber formas diferentes de resolver un ejercicio e inclusive ocasionalmente se pueden obtener respuestas diferentes. Sería interesante realizar alguna modificación de esta actividad, de

manera tal que cada estudiante obtuviera respuestas diferentes y al final todas ellas se complementarían.

Como era de esperarse, la pita debía caber un poco más de 6 veces, ya que corresponde a las 2π veces que cabe el radio en la circunferencia.

(E): Bien, entonces después había que construir un ángulo tal que el arco que subtiende ese ángulo fuera igual al radio que usted había escogido, entonces ¿cómo hizo para hacer esa construcción?

(P): *“Pues partí de un punto de la circunferencia y ahí con la pita por el borde pues medí con la pita hasta que terminara y donde terminó la pita marque un punto y ahí armé el ángulo desde donde empecé a medir al centro y donde terminó la pita y ese sería el ángulo que daba la longitud del radio.”*

(E): Bueno, y luego le decían que hiciera lo mismo pero entonces ahora no con un radio sino que con radio y medio. ¿Cómo hizo esa parte?

(P): *“Pues yo lo hice enseguida del ejercicio anterior entonces de donde terminé el otro yo empecé y medí otra vez con la pita una vez y la dividí en la mitad la pita y medí lo que faltaba entonces ahí trace el otro ángulo.”*

(E): ¿Por qué en el dibujo dice c y arriba dice d?

(P): *“Pues la c se refería al numeral c que fue el primer ángulo que hice, y después a partir de donde terminó ese ángulo hice la d y por eso se llama d”*

En esta parte de la entrevista se puede observar cómo Paola hace uso correcto del radio como unidad de medida. A pesar de que no se refieren a los ángulos contruidos como *radianes*, por no se les ha indicado de esta manera, el hecho de pasar la pita por el borde de la circunferencia da muestra de la claridad que tiene de la medición que debe realizar. Igualmente en el caso de un radio y medio (1,5 radianes) la estudiante no tiene dificultades ni dudas al utilizar nuevamente el radio como unidad de medida y dividir en dos dicha unidad para la mitad faltante.

Como se había supuesto en la interpretación hecha, la c y la d corresponden a las respuestas de cada ítem y muestran el dominio de la estudiante en la medición de arcos. Cabe recordar que en la actividad de construcción de transportadores la estudiante no halló la manera de hacer uso de la pita para medir. Es posible que hayan compartido estrategias con sus compañeros y ahora cuenta con los elementos necesarios para realizar mediciones a lo largo de la circunferencia.

(E): Bueno, entonces ahora se le pedía que hiciera lo mismo pero con el aplicativo, ¿tuvo alguna dificultad para utilizar el aplicativo para hacer este ejercicio?

(P): *“Pues no directamente, tal vez por lo que no era muy exacto pero si muy cercano, por lo menos el 5 me daba 5.001 y así pero igual yo los copie así, la otra era la parte b que decía que cuantas veces cabía el radio en la circunferencia pues yo había encontrado que 6 veces aproximadamente pero entonces ahí en arco sobre la circunferencia daba que 0.16 entonces es como diferente porque dio menos, no sé porque habrá dado lo mismo, no sé porque dio diferente pero yo suponía que iba a dar igual, parece que se refieren a cosas diferentes”*

La observación hecha por la estudiante con relación a la razón *arco sobre circunferencia* presentada en el aplicativo, deja la sensación de que puede ser más comprensible para los estudiantes darle sentido a las razones presentadas, si se les muestra de manera tal que la cantidad menor quede ubicada en el denominador. De esta manera Paola habría podido confirmar su valor aproximado de 7 (ó 6 después de la corrección) por simple comparación con la razón mostrada. Nótese que Paola no tiene claridad en la interpretación de una razón, ya que no considera el hecho de que el arco se encuentre en el numerador, luego en este caso, 0,16 es la cantidad de veces que cabe la circunferencia en el arco y no lo contrario.

De la misma forma como en este proyecto se busca la construcción del concepto de ángulo, su medida y las relaciones multiplicativas que lo determinan, también sería útil realizar una construcción apropiada del concepto de razón, ya que es la base fundamental de muchos elementos y propiedades en matemáticas.

Por otra parte, cabe recordar que los estudiantes estaban realizando esta actividad haciendo uso de computadores portátiles con *mouse* táctil, por lo cual no era sencillo manipular los puntos dados para obtener un resultado cercano al deseado. No obstante, las aproximaciones logradas por Paola son del orden de milésimas, lo cual es satisfactorio.

(E): Ah bueno, se dio que cuenta que no le daba lo mismo que pensaba que le daban las 6 veces, sino que le daba un número diferente en esa parte del programa. Bueno y luego para construir el ángulo, el ángulo que midiera un radio...

(P): *“Ehh pues ahí lo que hice fue hallar el valor, ahí lo que manipulé fue el punto b del aplicativo hasta que me diera 5 que era la longitud de la pita que era el radio que escogí y me dio 57 grados y en el otro también manipulé el punto b hasta que me diera 7.5 que sería el radio más la mitad y me dio 86 grados”*

(E): Bueno muy bien, ¿qué puede entonces decir de lo que pudo observar al hacerlo con la pita y al hacerlo con el aplicativo que observaciones tiene del trabajo hecho?

(P): *“Que con la pita pues se puede uno equivocar más porque puede que haya escogido 5 pero de pronto la pita la haya cortado mal puede dar menos que 5 o más que 5, entonces tal vez por eso es mejor el aplicativo porque ahí ya está el número que uno escogió”*

Nuevamente se evidencia la comodidad con que Paola abordó la actividad cuando hacía uso del aplicativo. Paola no duda en establecer el 5 como patrón de medida y tiene bastante claro que para lograr un ángulo de un radio, el arco también tiene que medir 5cm y para conseguir uno de radio y medio, el arco debe medir 7,5cm.

Nótese cómo en este punto de la secuencia didáctica Paola ya no manifiesta la necesidad de hacer uso de un transportador, sino que se concentra en realizar mediciones a lo largo de la circunferencia.

(E): Y ¿por qué aquí dice que el arco crece y la circunferencia también?, ¿porque dice que varía?

(P): *“Ah bueno también me di cuenta que como lo que yo había manipulado en un principio fue el punto A que es radio entonces al acercarlo o alejarlo pues ahí cambiaba el tamaño de la circunferencia y pues como la b se quedaba quieto entonces el ángulo era el mismo”*

Las observaciones que se esperaban en esta parte de la actividad estaban relacionadas con el uso del radio como unidad de medida. No obstante, Paola continuó realizando las mismas observaciones que en la actividad anterior, como si se tratara de establecer el comportamiento de las variables al cambiar el radio o el ángulo.

Si Paola quería que la circunferencia tuviera 5cm de radio, necesariamente tuvo que haber movido el punto A, pero la intención de la actividad no era observar el comportamiento de las variables mientras realizaba este movimiento. De todas formas no se puede demeritar las observaciones hechas por Paola, ya que se evidencia en ellas una validación de las conclusiones de la actividad anterior que establecen relaciones entre el radio, el arco y la circunferencia, y entre el ángulo y el arco.

(E): ¿Que fórmula conoce relacionada con la circunferencia, conoce alguna fórmula?

(P): *“Pues yo sé que la circunferencia es $2\pi r$ pero no sé cómo explicarlo”*

(E): Y digamos con lo que hablamos ahorita con lo que logró observar o descubrir, ¿le dice algo más esa fórmula?

(P): *“Pues tal vez que sería como una relación de cuantas veces está el radio en la circunferencia por el radio”*

(E): *¿Cuánto cree que es aproximadamente 2π ?*

(P): *“Pues π es 3.14 por dos sería 6.14 más o menos”*

(E): *¿Y se parece ese número a algo que haya encontrado antes?*

(P): *“En el primer ejercicio que hallé más o menos que era 6 veces que cabe el radio en la circunferencia”*

Se puede observar que la Paola conoce un valor aproximado de π ; también que tiene claro que 2π es aproximadamente 6 (aunque su cálculo presenta un pequeño error en los decimales ya que $2\pi \approx 6,28$); también sabe que la circunferencia es igual a “dos π por r ”; y por último, sabe (según su medición) que el radio cabe aproximadamente 6 veces en la circunferencia. Lo curioso es que no logra combinar esos valores y conceptos para explicar la fórmula conocida. Al parecer, la estudiante no logra establecer una relación entre calcular el producto de dos cantidades y decir que una de ellas se repite tantas veces como dice la otra. Es posible que la dificultad para dar una explicación de la fórmula de la circunferencia esté relacionada con la comprensión superficial del concepto de multiplicación, visto más como una simple operación o algoritmo, pero sin darle el sentido que establece implícitamente, como reproducir una cantidad tantas veces como diga la otra.

(E): entonces hay una observación del número π , ¿qué puede decir del número π ?

(P): *“Pues lo que me han enseñado en el colegio, que es un número que tiende a infinito que sirve para hallar la circunferencia”*

(E): ¿Hay otra cosa que pueda decir del número π ?

(P): *“Pues, como en el punto 3 la fórmula de la circunferencia es $2\pi r$, si yo divido eso en dos me da πr . Yo supongo que hay una relación con la circunferencia y el*

pi entonces, supongo yo que un pi, que el pi sólo sería como la mitad de la circunferencia, supongo que hay una relación ahí”

En cuanto al número π , al principio la estudiante realiza observaciones cualitativas y memorísticas relacionadas con este número, pero también manifiesta tímidamente que existe una relación entre este número y la circunferencia. Al insistirle en la pregunta, Paola profundiza un poco más su idea sugiriendo que existe una equivalencia entre π y media circunferencia (*“pi sería como la mitad de la circunferencia”*), relación que es la más utilizada para la conversión de grados a radianes y viceversa ($\pi \equiv 180^\circ$).

(E): Entonces supone que hay una relación ahí, para terminar había que aplicar unas preguntitas que estaban ahí. Dado un ángulo de 29° , había que calcular el arco variando el radio, para 3 radios diferentes, de 5, de 5.6 y de 6.3 cm, entonces ¿cómo lo hizo?

(P): *“Pues como en las actividades previas encontré que es lo mismo dividir el ángulo por 360 que el arco sobre la circunferencia, eso da lo mismo. Entonces yo ahí remplace los datos que tenía y despejé el arco, despejé pues esa incógnita que no sabía, y al hacerlo me pareció que el arco es como la mitad de cada radio.”*

(E): ¿Le dio siempre la mitad? ¿Le dio exacto?

(P): *“No, exacto no, pero si era [...] aproximada la mitad de cada radio del ejercicio”*

(E): ¿Será que eso siempre pasa con cualquier ejercicio para cualquier ángulo o cualquier radio?

(P): *“Pues yo creo que no, de pronto en este caso, porque todos, en todos los ejercicios que hice utilicé el ángulo de 29° , tal vez si el ángulo cambia también cambie el arco”*

Como se esperaba en esta parte de la actividad, Paola está validando la proporción establecida en la actividad anterior. Con ayuda de la relación existente

entre el radio y el arco, y calculando previamente la medida de la circunferencia, la estudiante calculó las longitudes de arco solicitadas casi en forma mecánica, utilizando ya la relación encontrada a manera de fórmula. Sin embargo, se corre el riesgo de que la comprensión de esta relación pierda su sentido y quede en la memoria de la estudiante como una simple fórmula. Es recomendable que frecuentemente el uso de una fórmula esté acompañado por un repaso conceptual del significado de la misma.

Por otra parte, Paola observa que los valores obtenidos para los arcos son aproximadamente la mitad de los radios dados, esto se debe a que para el ángulo dado, el arco es aproximadamente $s = 29^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} \times r$, es decir $s \approx 0,506 r$. Aunque esta relación no se basa directamente en las relaciones establecidas anteriormente, sí establece una nueva relación conocida entre el radio y la longitud de arco, a saber $s = \theta r$, donde θ está en radianes.

La observación hecha por Paola sugiere una adaptación para la actividad, en la que se pueda profundizar un poco más esta relación a fin que construir de manera más concreta el concepto de radián y la relación multiplicativa entre el arco y el radio.

Entrevista con Jorge

Entrevistador (E): En esta nueva actividad se le pide que construya una circunferencia dada una medida de una pita que llamaremos radio, ¿cómo hizo para construir esa circunferencia?

Jorge (J): *“Utilicé, en este caso mi cordón de mi zapato, y con una regla medí 5cm, o sea, medí en el cordón 5cm y entonces ese era el radio de mi circunferencia. Con esos 5cm hice una apertura, una... abrí mi compás, a una distancia de 5cm y lo tracé, hice una circunferencia de eso.”*

(E): Bueno, en la siguiente pregunta queríamos saber cuánto medía esa pitica, cuántas veces cabía ese radio en la circunferencia ¿cómo hizo para averiguar eso?

(J): *“Pues utilicé la misma medida del radio que son 5cm, y pues, la iba poniendo alrededor de la circunferencia. Entonces acá hay 5cm, acá hay otro, acá hay otro y así (señalando los arcos determinados por las marcar hechas en la circunferencia en el orden establecido por los números escritos alrededor de la misma). Entonces pues a mí me cupo, pues aproximadamente seis veces y media... y sobró otro poquito.”*

Puede verse que Jorge no tuvo dificultades en la comprensión de la actividad y la construcción inicial de la circunferencia. Igualmente se nota cómo utiliza la pita como instrumento de medida alrededor de la circunferencia con total naturalidad (igual que en las pasadas actividades) estableciendo que el radio cabe un poco más de 6 veces en su circunferencia. Las suposiciones hechas frente a las marcas hechas por Jorge eran correctas, ya que él comenzó a medir desde la parte inferior de la circunferencia, pero los arcos de un radio y radio y medio que se le pedían, los construyó en forma independiente pero sobre la misma circunferencia, sin basarse en las marcas que ya había hecho, como se observa a continuación:

(E): Bueno. Luego debía hacer un ángulo que subtienda un arco que mida aproximadamente un radio de largo, de longitud, ¿cómo hizo para construir ese ángulo?

(J): *“Pues, medía el radio con el cordón y pues, lo mismo, lo puse alrededor de la circunferencia (señalando el arco de un radio), y entonces donde fuera, donde hiciera la marca, acá hay un radio pues trazo el ángulo.”*

(E): Y luego, ¿cómo hizo para medir un radio y medio?

(J): *“Pues yo sé que mi radio es de 5cm, entonces medio radio serían 2,5cm. Entonces pues un radio y medio sería 5cm más 2,5, total de 7,5cm. Trazo, o sea, utilizo otra vez el cordón y mido 7,5cm y trazo.”*

Jorge no presenta dificultades en la utilización de radio como unidad de medida alrededor de la circunferencia y construye apropiadamente los ángulos de un radio y un radio y medio. Presenta claridad en que la medida debe hacerse “alrededor de la circunferencia”, lo cual muestra una percepción clara tanto de los arcos como de la misma circunferencia como objetos geométricos longitudinales.

(E): ¿Qué conclusiones, qué observaciones pudo hacer de esta actividad no sólo cuando la hizo en el papel sino también cuando la hizo en el computador?

(J): *“Pues yo miré que hay ciertas variables que siempre se van a mantener iguales, siempre, siempre. Que son la del ángulo, o sea no se va a ver afectado, y una que son proporcionales, que son el arco sobre la circunferencia y el ángulo sobre 360°. También vi que hay dos variables que sus datos son iguales las cuales son el arco y el radio, o sea esas dos variables siempre van a estar iguales, y el único dato que siempre va a cambiar es el de la circunferencia, ¿por qué? porque pues dependiendo del radio, si el radio es más grande pues la circunferencia va a ser más grande, y si el radio se achica, se hace más chiquita la circunferencia.”*

Al igual que Paola, Jorge valida nuevamente las conclusiones de la actividad anterior acerca de la relación del arco con el ángulo, y del arco con el radio y la circunferencia, pero no realiza observaciones relacionadas con la utilización del radio como unidad de medida. Aunque esto valida el proceso de construcción de relaciones multiplicativas deseado, no consigue que el estudiante defina al radio como unidad de medida para la posterior consolidación del concepto de radián. Se haría necesario profundizar un poco más en esta idea a fin de lograr la construcción clara del concepto mencionado.

(E): ¿Qué relación, qué fórmula o qué expresión conoce usted relacionada con cómo calcular una circunferencia?

(J): *“Bueno, yo sé que la circunferencia es igual a 2π por r .”*

(E): ¿Usted podría explicar esa fórmula?

(J): *“Sí, o sea, es que esta fórmula pues es igual a otra, que es la de circunferencia va a ser igual a pi por el diámetro, y entonces el diámetro es dos veces el radio... entonces pues, es organizar la fórmula, pues esta ecuación lo que sea, entonces pues si yo sé que el diámetro por pi me va a dar la circunferencia, pues entonces, dos veces el radio, que es lo mismo que el diámetro, por pi, me va a dar la circunferencia, porque el diámetro o sea una longitud, que es el radio (en voz baja), cabe pi veces en la circunferencia, esas pi veces son 3 punto tantas veces, 3.1416 aproximadamente, entonces pues si eso cabe el diámetro, pues el radio debe caber el doble de lo que cabe el diámetro, porque son, el diámetro es dos veces el radio, de ahí sale eso.”*

(E): ¿Usted pudo ver eso en el ejercicio que hizo?

(J): *“Sí si cabe. Porque [...] acá hay un radio, acá hay dos radios, acá hay tres radios, acá hay cuatro radios, acá hay cinco, acá hay seis y seis y medio y algo (señalando los arcos numerados en la circunferencia), entonces si a mí me pidieran que lo midiera en diámetro, entonces no me cabría 6 punto algo, me cabría la mitad de eso, porque el diámetro es dos veces el radio, entonces pues sería, lo que me dé las veces que cabe el radio dividido en dos, eso me va a dar las veces que cabe el diámetro”*

A pesar de que en la hoja Jorge no escribió una explicación de la fórmula escrita, a diferencia de Paola, Jorge no hace alusión a dicha respuesta, simplemente no la escribió. En la entrevista se pudo observar la comprensión de Jorge en lo relacionado con el sentido de π en su definición en la circunferencia, la relación entre el radio y el diámetro, la comprensión de la multiplicación como la reproducción de una cantidad tantas veces como lo establezca el otro factor. Inclusive se puede afirmar que lo descrito por Jorge en su respuesta corresponde a una demostración de la fórmula de la circunferencia desde la definición de π y las propiedades del radio y el diámetro, ya que aunque carece del rigor necesario,

es un razonamiento deductivo acorde a la edad y el grado en que se encuentra el estudiante.

(E): ¿En resumidas cuentas qué puede decir de π ?

(J): “(después de hacer una introducción a la respuesta, relacionada con su gusto por las matemáticas y con su percepción de un círculo)... *pues π es las veces que se ha visto que cabe [...] el diámetro en la circunferencia. Esa longitud nunca va a saber exactamente un número.*”

(E): ¿Qué puede decir si la circunferencia es más grande o más pequeña respecto a esas veces que cabe el diámetro en la circunferencia, varía o permanece constante?

(J): “*Permanece constante porque [...] π son las veces que cabe el diámetro, entonces si la circunferencia se hace más grande es porque el radio es más grande, entonces pues siempre se va a mantener π , siempre, entonces pues si yo tengo una circunferencia muy muy grande, pues el radio también es muy muy grande y como el diámetro es dos veces el radio, pues va a caber tres veces algo.*”

En esta parte Jorge fortalece aún más sus argumentos anteriores, al describir la invariancia de π . A pesar de ello, puede verse que Jorge manifiesta que “nunca va a saber exactamente un número”, seguramente por su percepción natural de los números enteros como los únicos exactos. Es decir, aunque Jorge muestra que tiene claro el significado de π , su carácter irracional parece no permitirle aceptarlo como un número exacto.

Por otra parte, Jorge muestra claridad en la percepción de la relación entre el diámetro y la circunferencia. En este caso no realiza un razonamiento deductivo (ya que podría pensarse por ejemplo que la circunferencia crezca más rápido que el diámetro), pero su explicación deja ver la claridad que tiene frente a la proporcionalidad entre dichas variables.

(E): Al final había que calcular unos arcos, ¿qué otra observación puede hacer relacionada con la última parte de la actividad y todo lo que usted ha observado hasta el momento?, lo que considere importante.

(J): *“Que yo puedo conocer el ángulo sin necesidad de utilizar transportador. [...] A partir de la observación que fue en la actividad anterior, yo vi que hay dos variables, dos datos que siempre permanecen iguales que son [...] el arco sobre la circunferencia y el ángulo sobre 360. Entonces si a mí me llegaran a pedir cuánto mide el arco pues hago la regla de tres: [...] sé que tengo 360 que es la circunferencia, tengo cuánto es la circunferencia que es 2π por r , y pues tendría el ángulo, entonces con eso hago la regla de tres (señalando la proporción entre el ángulo y el arco escrita en la hoja) , entonces hallo este dato que es la circunferencia, lo multiplico por el ángulo, eso me va a dar un valor y entonces sé que 360 por algo me tiene que dar el arco. [...]De manera más fácil, el dato me haya dado la circunferencia por el ángulo, lo divido en 360 y eso me da inmediatamente el arco. O lo puedo hacer también con los ángulos: Si a mí me dicen que halle el ángulo pues entonces tengo el arco, la circunferencia y 360° , entonces haría lo mismo, multiplico el arco por 360° , eso me va a dar un dato, ese dato lo divido por la circunferencia y me va a dar de una vez el ángulo. Entonces eso es algo muy sencillo y uno no necesita el transportador.”*

En cuanto al problema del cálculo de la longitud de arco, puede decirse que Jorge alcanzó uno de los objetivos esperados de la actividad, que era el de validar relaciones obtenidas en la actividad pasada y reforzadas por esta. Jorge utiliza la relación entre el arco y el ángulo para realizar una *regla de tres*, la cual manipula con destreza y le permite calcular con tranquilidad tanto arcos como ángulos. Faltaría saber si también Jorge estaría en capacidad de utilizarla para calcular el radio, lo cual podría ser un futuro complemento para esta parte de la actividad.

En cuanto al objetivo de establecer el radio como unidad de medida, para llamarlo posteriormente radián, y el de establecer una relación multiplicativa directa entre el

ángulo y el arco medido en radianes, es necesario puede verse que es necesario realizar algunos ajustes a la actividad, ya que no se puede afirmar en ninguno de los dos casos, que hayan establecido estos concepto y relaciones.

4.5 CUARTA ACTIVIDAD: PROBLEMAS

4.5.1 Análisis a priori. Una vez establecida la relación de proporcionalidad entre el radio, el arco y la circunferencia, así como entre el ángulo y el arco, se plantearon a los estudiantes 14 problemas de aplicación de estas relaciones, que servirían para la comprobar la validación de las relaciones establecidas en las actividades anteriores, aplicadas en contextos cercanos al entorno en el cual se desenvuelven los estudiantes.

Estos problemas consistían en el cálculo del ángulo o el arco respectivamente girado o subtendido por una llanta, un parabrisas, un péndulo, un tren en una vía circular, una esfera o un volante. En algunos casos no sólo se hacía referencia a los valores del ángulo, del arco y la circunferencia, sino que también se calculaba la velocidad angular o tangencial.

El análisis que se realizará a continuación se centrará en el siguiente problema:

Problema 1: *Sabiendo que cada llanta de un vehículo tiene un radio de 30 cm, y que el vehículo ha avanzado 50 cm, ¿cuál es el valor del ángulo girado (en grados sexagesimales)?*

Como primer elemento del problema se puede ver que una llanta es un elemento común en el contexto de un estudiante de noveno grado, con el cual está relacionado. Claramente es un ejemplo válido para la aplicación de las propiedades de la circunferencia, sin detallar demasiado lo relacionado con las irregularidades propias del objeto o debidas al peso del vehículo.

En segundo lugar se tiene el radio de la llanta, el cual básicamente se entrega como dato explícito del problema, por lo cual se espera que los estudiantes no tengan ninguna dificultad al querer hacer uso de este atributo.

En tercer lugar está el arco. Nótese cómo el arco no es un dato explícito dentro del problema, sino que se entrega al estudiante bajo el disfraz del avance del vehículo. El problema básicamente consiste en establecer la relación entre el avance del vehículo y el arco. Ha de observarse que a medida que un vehículo avanza, cada una de sus llantas se va ubicando sobre la superficie, dejando una huella de longitud equivalente tanto a la longitud del arco subtendido por el ángulo girado, como a la distancia avanzada. En esta parte es donde se espera que los estudiantes hagan uso de los preconceptos que tengan relacionados con giros de círculos y que posiblemente realicen gráficas que les sirvan de apoyo en la comprensión del problema. Igualmente es posible que se observen construcciones de círculos que asemejen la función de la llanta, a fin de poder observar detalladamente el comportamiento de la misma.

El último elemento del problema está en la pregunta: El ángulo girado (por cada una de las llantas). Este ángulo ha de ser medido en grados sexagesimales y se espera que en este momento, después de haber realizado las cuatro actividades anteriores, ya los estudiantes estén muy familiarizados con la palabra sexagesimal y no tengan ningún inconveniente en la comprensión y utilización de la misma.

Una vez establecidos los datos a saber: radio y arco, se espera que los estudiantes puedan calcular la correspondiente circunferencia, para plantear al igual que en la actividad pasada, una relación multiplicativa entre el ángulo y el arco, al compararlos respectivamente a través de una razón, con 360° y la circunferencia calculada.

Aunque las actividades realizadas previamente están orientadas a la construcción del concepto de ángulo, estableciendo relaciones multiplicativas entre sus

atributos, y que son de carácter argumentativo y propositivo, todas ellas se enmarcan dentro de un contexto netamente matemático y requieren que el estudiante se concentre en la observación de las características y propiedades de los ángulos, arcos, radios, circunferencias y relaciones entre ellos. Por su parte, esta actividad conecta los conceptos y propiedades encontradas, con situaciones reales que requieren un poco de astucia y mucha proposición por parte de los estudiantes, a fin de establecer las relaciones entre los datos dados y los datos requeridos.

4.5.2 Análisis a posteriori

Descripción de la clase y lo entregado por los estudiantes

Para empezar, cabe comentar que de los 14 problemas sólo se realizaron 5 durante la clase, ya que los estudiantes encontraron muchas dificultades en la conversión de unidades y en algunos casos el cálculo de las velocidades.

Como era de esperarse, para los estudiantes fue muy natural el manejo de una llanta como un claro ejemplo de aplicación de las propiedades de una circunferencia y establecieron el radio como dato explícito del problema. Sin embargo, los estudiantes tuvieron cierta dificultad para relacionar conceptualmente la longitud horizontal que se desplazaba la llanta o vehículo, en términos de longitud de arco subtendido y el ángulo que la rueda giraba. En primer lugar hay que tener en cuenta que para la distancia dada, el ángulo no supera una revolución. Al hacer que la llanta avance se tendrán dos ángulos, uno cóncavo y uno convexo; para Paola y Andrea (la tercera estudiante) les fue confuso decidir cuál era el ángulo que debían escoger y su correspondiente arco. Fue interesante ver la estrategia utilizada por Andrea, quien tomando un transportador circular mostraba cómo a medida que la “llanta” iba girando, iba coincidiendo el arco con la “huella” de la llanta y esta era a su vez el avance del vehículo. Esto llevó a que en

forma general se les mostrara a los demás estudiantes esta misma coincidencia haciendo uso de un reloj circular que se encontraba en el salón.

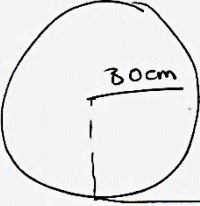
Una vez obtenido el arco y sabiendo que ya se contaba con el radio, el problema se convirtió en un ejercicio de aplicación de la relación que ya conocían por las actividades anteriores.

Paola:

La solución entregada por Paola, contiene una gráfica en la que aparece una especie de circunferencia con unos dos radios: uno punteado y otro continuo y etiquetado como 30cm. Desde la parte inferior de la circunferencia se observa un segmento horizontal hacia la derecha, etiquetado como 50cm. (Ver figura 29).

Bajo esta gráfica, Paola escribe lo que aparentemente corresponde a la relación ángulo sobre 360 es igual a arco sobre circunferencia. También escribe la expresión $C = 2\pi r$ abordada en la actividad anterior. Junto con estas expresiones, Paola incluye procedimientos de evaluación y solución de ecuaciones lineales.

Figura 29: Desarrollo del problema 1 de la cuarta actividad por parte de Paola.



30cm

50cm.

$$\frac{\theta}{360} = \frac{s}{C}$$

$$\frac{\theta}{360} = \frac{50cm}{188.49}$$

$$\theta = \frac{50 \cdot 360}{188.49}$$

$$\theta = 95,49^\circ$$

$$C = 2\pi r$$

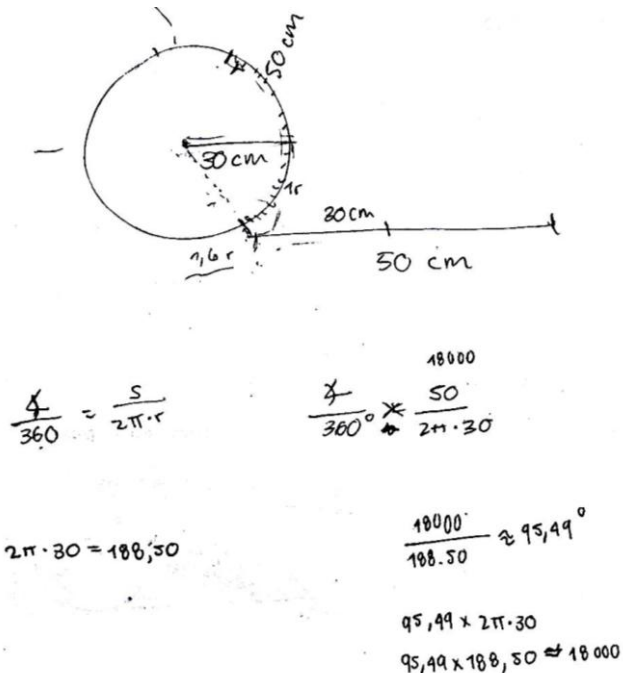
$$C = 2\pi 30$$

$$C = 188,49$$

Jorge:

Durante la clase pudo observarse cómo Jorge planteaba el problema valiéndose de una gráfica en la cual dibujaba a mano alzada una circunferencia con una línea horizontal a su derecha, casi tangencial al extremo inferior de dicha circunferencia, la cual está etiquetada con el valor de 50cm (ver figura 30). En la circunferencia dibuja dos radios, uno punteado y uno continuo, etiquetando este último con 30 cm, que es el valor del radio de la llanta. También hace un corte sobre la línea horizontal, etiquetándolo como 30cm y en el arco comprendido entre los dos radios dibujados escribe 1r. En la parte inferior de la circunferencia escribe 1,6r y en debajo de la gráfica hecha plantea y resuelve algunas operaciones que aparentemente muestran cómo paso a paso el estudiante planteó la relación ya conocida entre el ángulo y el arco, y realizó las correspondientes para obtener el valor del ángulo. Al final, puede observarse cómo realiza una multiplicación más haciendo uso del valor obtenido, la cual se aclarará en la entrevista con el estudiante.

Figura 30: Desarrollo del problema 1 de la cuarta actividad por parte de Jorge.



Cabe aclarar que tanto las marcas hechas a la derecha de la circunferencia, como la etiqueta de 50cm puesta sobre ella, fueron realizadas durante la entrevista y por ello, no corresponde en este momento hacer alusión a las mismas como parte de la descripción del trabajo realizado por el estudiante.

Interpretación de los resultados

Puede suponerse que tanto Paola como Jorge tienen bastante claro el problema, ya que su trabajo muestra una descripción gráfica bastante clara del mismo y un desarrollo operacional muy coherente con lo que se esperaba. Nótese cómo en la solución presentada por Jorge, la expresión $1,6r$ escrita bajo la circunferencia, es una buena aproximación para el arco obtenido. Debe recordarse que en la actividad 3, los estudiantes desarrollaron su destreza en la comprensión del concepto de radián, y que aunque en este momento lo se le esté llamando de esa manera, puede suponerse un uso del radio como unidad de medida de la longitud del arco: Si un radio son 30 cm, dos radios son 60 cm, pueden hacerse algunas pruebas por ensayo y error, determinando $1,6r$ como la mejor aproximación a una cifra decimal que no sobrepasa el valor de 50cm dado.

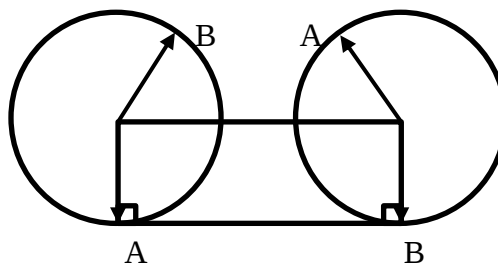
El planteamiento de la relación entre el ángulo y el radio, permite suponer que los estudiantes ya cuentan con una mejor comprensión de las relaciones multiplicativas inmersas en la circunferencia. Se observa cómo en ningún momento se utilizó una estrategia de aproximación del ángulo a través de ángulos conocidos, lo cual es un aliciente que permite suponer que ya se cuenta con una mejor comprensión de los conceptos y relaciones objetivo de este trabajo.

El procedimiento realizado por Paola corresponde al despeje del arco como incógnita de la ecuación lineal planteada. Por su parte, teniendo en cuenta la cruz dibujada sobre el símbolo de igualdad y la operación realizada por Jorge después de calcular el ángulo pedido, puede suponerse que realizó la comprobación de sus

cálculos mediante la multiplicación de antecedentes y consecuentes en la proporción planteada.

La gráfica realizada por Paola básicamente es un apoyo visual para la comprensión del problema y para el procedimiento realizado, pero no sustenta la equivalencia entre el avance del vehículo y el arco subtendido por el ángulo girado por la llanta. En cuanto a Jorge, nótese cómo el segmento horizontal dibujado a manera de superficie para la llanta, no comienza ni se interseca con el extremo inferior de la circunferencia. Esto lleva a suponer que aunque el estudiante parece comprender el problema, le falta precisión en las condiciones necesarias para garantizar la coincidencia entre la longitud del arco y la distancia recorrida, ya que es mucho más clara y demostrable esta equivalencia, si se comienza desde el extremo inferior de la circunferencia, ya que de esta forma se podría garantizar que el radio es perpendicular al segmento tangencial, obteniendo así un rectángulo y por lo tanto garantizando que el desplazamiento horizontal del centro de la circunferencia es igual a la “huella” dejada por el arco sobre el segmento (ver figura 31).

Figura 31: Comprobación de la equivalencia entre la longitud del arco subtendido por un giro de una circunferencia y el avance de la misma sobre determinada superficie



4.5.3 Análisis a priori de la entrevista. En este caso la entrevista se orientó de manera que se pudiera esclarecer la estrategia utilizada por Paola y Jorge, saber qué tipo de dificultades encontraron al abordar el problema y determinar de qué manera están haciendo uso de las relaciones multiplicativas obtenidas hasta el momento.

La entrevista se programó de tal forma que comenzara recordando el problema del cual se iba a hablar y permitiendo que, para empezar, los estudiantes tuvieran la oportunidad de explicar con sus propias palabras el procedimiento llevado a cabo para la solución del mismo. De acuerdo a la profundidad de las explicaciones dadas por los estudiantes se pedirán las aclaraciones que se estimen convenientes.

4.5.4 Análisis a posteriori de la entrevista

Entrevista con Paola

Entrevistador (E): En esta última actividad se le planteaba el problema el de una llanta, entonces había un vehículo que iba avanzando cuando avanzaba 50 cm había que averiguar cuánto había girado la llanta sabiendo que tiene un radio de 30 cm. Bueno entonces primero que todo quiero que me explique cómo empezó a realizar el problema.

Paola (P): *“Bueno yo empecé remplazando el arco por 50 cm que fue la distancia que había avanzado el carro.”*

(E): ¿Cómo sabe que lo mismo que avanza el carro es la misma medida del arco?

(P): *“Pues yo tengo entendido que el arco es como un pedacito de la circunferencia, pues ahí yo me imaginaba como una pita que enrollaba la llanta, ya para hallar el ángulo me daban una relación, una fórmula que era el ángulo sobre 360 igual al arco sobre la circunferencia y pues ahí la circunferencia era $2\pi r$...”*

A manera de ejemplo, cuando se desenrolla una madeja de lana dejándola rodar sobre el suelo, puede verse cómo lo que va avanzando la madeja aproximadamente corresponde a la lana que se va desenrollando. Experiencias como esta pueden llevar a una persona a establecer relaciones que más adelante le servirán como enlace para establecer relaciones, lo cual es una de las bases en la solución de problemas. Puede verse cómo Paola compara el avance de la llanta con una pita que se enrolla en la circunferencia. De esta manera, Paola justifica el

hecho de hacer equivalentes el avance de la llanta con la longitud del arco. No obstante, esta justificación se basa en experiencias y no en propiedades de objetos geométricos como las mencionadas anteriormente y representadas en la figura 31.

Por otra parte, Paola manifiesta hacer uso de una expresión “dada”, por lo cual se le pregunta acerca del origen de dicha expresión:

(E): Antes de seguir esa expresión que usted dice que utilizó, ¿cómo la conoció?, lo que dice ahí del ángulo sobre 360 y el arco sobre la circunferencia, ¿cómo conoció esa expresión?

(P): *“Del taller pasado, las actividades que ya había realizado”*

(E): ¿Recuerda cómo era la actividad?

(P): *“Era de, se trataba de cambiar un radio cambiar los ángulos, y hallaba el arco sobre la circunferencia, el ángulo sobre 360 y daban lo mismo”*

(E): ¿Qué puedo concluir de eso?

(P): *“Que como daban lo mismo podía hallar el ángulo que me pedía igualando esas dos relaciones esas dos fórmulas.”*

A pesar de que Paola hace uso correcto de la relación entre el arco y el ángulo, se corre el riesgo de que esta expresión se convierta para ella en una fórmula más sin sentido alguno, por lo cual, como ya se mencionó en actividades anteriores, es importante recordar con frecuencia el sentido de las diferentes fórmulas que se utilizan.

Tanto en el desarrollo del problema como en la entrevista, Paola muestra seguridad en la aplicación de la relación arco-ángulo obtenida en actividades previas.

(E): ¿que hizo a continuación?

(P): *“Con los datos que me daba el ejercicio hallé la circunferencia, y hallé los números, por lo menos la circunferencia me dio 188.49 y pues eso lo remplacé en la fórmula que había aprendido en la actividad anterior y me dio 95.49 grados.”*

Paola decide primero calcular la circunferencia haciendo uso de la correspondiente fórmula, la cual utiliza con propiedad, a pesar de que en la actividad anterior no pudo darle un sentido concreto. Igualmente Paola muestra dominio en la solución de ecuaciones lineales en cuanto al despeje realizado.

(E): Entonces ese 95 que es en últimas, esos 95 grados ¿qué son?

(P): *“Pues como yo relaciono el arco, o sea los 50 cm que avanzó la pita, partiendo de un punto de la llanta, o sea como una circunferencia lo relaciono yo. Entonces así como cuando uno va hallar un ángulo en el transportador que parte de cero y le va dando como la vuelta por la izquierda del transportador, entonces yo supongo que ese ángulo que hallé es como la distancia que hay desde el punto donde empecé a medir los 50cm de la circunferencia hasta que se acabó. Entonces es como el giro que hace la llanta.”*

Paola relaciona ahora el ángulo con el arco correspondiente, inclusive no se refiere al transportador desde su uso para medir “esquinas” sino desde la regla que posee alrededor de su circunferencia.

Entrevista con Jorge

Al entrevistar a Jorge pudo observarse cómo con toda seguridad el estudiante explicaba la estrategia llevada a cabo y desde el planteamiento de la gráfica como elemento útil para la comprensión y solución del problema. Después de explicar la gráfica realizada, Jorge continúa explicando cómo estableció la equivalencia entre el desplazamiento de la llanta y el arco subtendido por el ángulo girado por dicha llanta:

(J): *“...entonces, yo sé que el auto recorrió 50cm, me están preguntando el ángulo, entonces estos 50cm es como si fueran a abarcar un sello en esta llanta. Por qué,*

porque entonces, acá empieza la carretera (proyectando un poco el radio inferior hasta alcanzar el punto inicial del segmento horizontal), pues acá es la unión entre la llanta y la carretera, entonces digamos que acá empieza el radio. Entonces, a medida que la llanta se va moviendo, pues esto (señalando el segmento horizontal) va marcando como algo en la llanta (trazando las marcas mencionadas anteriormente sobre la circunferencia). Entonces eso que marca son exactamente la misma medida que esto (señalando el segmento horizontal), entonces van a ser 50cm (escribiendo la etiqueta de 50cm sobre la circunferencia), son lo mismo, es como si fuera un sello.”

Cabe mencionar cómo algunos autores consideran que dentro de la didáctica de la geometría es necesario que los estudiantes tengan contacto directo con objetos tangibles para que se desarrolle en ellos una comprensión concreta de los objetos geométricos en dos y tres dimensiones. Puede verse como la comparación de la situación con un objeto tangible como lo es un sello (circular), le da al estudiante en forma empírica e intuitiva, las herramientas necesarias para establecer la equivalencia mencionada. No obstante, dicha equivalencia se basa solamente en experiencias y carece de argumentos sólidos desde el punto de vista geométrico, relacionados con los teoremas de la circunferencia¹⁰ y las propiedades del rectángulo.¹¹

Jorge continúa su explicación con lo siguiente:

(J): “...entonces, pues esos 50cm ese es el arco, yo ya conozco el arco entonces aplico una... fórmula... una aplicación, entonces cuál es, es esta (señalando la expresión escrita en la hoja)...”

A pesar de la evidente comprensión del proceso a llevar a cabo para la solución del problema, Jorge comienza a utilizar la proporción entre el ángulo y el arco,

¹⁰ Toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio cuyo extremo es el punto de intersección entre la recta tangente y la circunferencia.

¹¹ Los lados opuestos de un rectángulo son congruentes.

refiriéndose a ella como una fórmula, lo cual permite suponer que Jorge tiene claridad de la existencia de esta relación, pero no la asimila como una proporción sino como un algoritmo a seguir.

La respuesta dada por Jorge continúa explicando paso a paso cómo remplazó los correspondientes valores en la proporción planteada, refiriéndose a los 360° como “sexagesimales”. Jorge aclara que lo primero que hizo fue calcular el valor de la circunferencia, luego multiplicar 360° por 50cm, para finalmente realizar la división correspondiente y obtener el valor del ángulo.

Como se supuso anteriormente, Jorge además de calcular el ángulo, comprobó su respuesta multiplicando el ángulo hallado por el valor de la circunferencia y verificando que el resultado era aproximadamente igual al producto de 360° con la longitud del arco.

5. CONCLUSIONES

En esta sección se presentará un resumen del proceso general de los dos estudiantes observados, frente a su avance en la construcción del concepto de medida de ángulo y a las relaciones multiplicativas entre el ángulo, el radio, el arco y la circunferencia. A continuación se mostrarán tanto los aspectos en que las actividades planteadas por Moore consiguieron los objetivos deseados en estudiantes de grado noveno (bajo la adaptación hecha por los autores), como los demás alcances obtenidos en el desarrollo de las mismas. Finalmente se harán algunas aclaraciones relacionadas con las limitaciones de este trabajo, relacionadas con el nivel de estudio y la cantidad de estudiantes observados, así como las demás que se hayan evidenciado durante el análisis de las actividades y entrevistas.

6.1 RESUMEN DEL ANÁLISIS DE CADA ESTUDIANTE

Paola:

Tanto en la actividad preliminar como en la construcción del transportador, Paola no manejaba algunos términos (“grados sexagesimales” y “arco subtendido”), ni hacía alusión a las relaciones multiplicativas esperadas. Las nociones que tenía de ángulo se limitaban al reconocimiento de los ángulos notables y a la comparación con divisiones en mitades de los mismos. En un intento de validar las estrategias utilizadas en los primeros ejercicios, la estudiante trata de dividir una circunferencia en 13 partes iguales pero puede comprobar que sus estrategias no le son útiles. La estudiante no logra realizar la división pedida, pero plantea la división de 360° sobre 13, como primer indicio de uso del pensamiento cuantitativo en la medición de ángulos.

A partir de la interacción con el aplicativo, se comienza a observar un mayor dominio de los conceptos de ángulo, arco subtendido, radio y circunferencia, y la existencia de correlaciones directas entre las variables mencionadas. La proporción “arco es a circunferencia como ángulo es a 360° ” es asumida por la estudiante, al observar la invariancia de sus correspondientes razones.

Luego se puede observar un natural uso del radio como unidad de medida para la longitud de la circunferencia, pero sin generalizar esta unidad, es decir, no se alcanza a construir con claridad el concepto de radián. No obstante, durante el desarrollo de esta actividad Paola valida las observaciones hechas en la actividad anterior (las relaciones entre el ángulo, el radio, el arco y la circunferencia), al utilizarlas en el cálculo de la longitud de arco, dados el ángulo y el radio, estableciendo además una relación mucho más directa entre el radio y el arco, pero sin mencionar la conversión del ángulo a radianes.

Finalmente, Paola valida nuevamente las relaciones conocidas al resolver situaciones problemas donde se involucran ángulo, arco subtendido y radio, pero donde se deben identificar elementos adicionales propios de cualquier problema de aplicación.

Jorge:

Por su parte Jorge, desde el principio tuvo un mayor nivel de reconocimiento, del tipo de relaciones que se estaban analizando. Al igual que Paola, tampoco conocía el término “sexagesimal”, pero esto no dificultó su posterior análisis de la situación. Se identificó un mayor nivel argumentativo, al utilizar construcciones con triángulos isósceles para el trazo de bisectrices, que permitieran dividir una circunferencia dibujada previamente, en partes cada vez más pequeñas para calcular con mayor precisión la medida del ángulo dado. De la misma forma, se detectó en las primeras actividades la intención de utilizar arcos, para hallar proporcionalmente los ángulos correspondientes.

Jorge también logró realizar las divisiones de los transportadores a través de subdivisiones del círculo en mitades, e invalidar esta estrategia durante la división del círculo en 13 partes iguales, pero a diferencia de Paola, Jorge realizó el procedimiento esperado al medir la circunferencia y dividir su longitud, como estrategia efectiva.

Jorge empieza a reafirmar de manera más formal las nociones intuitivas que tenía de la circunferencia y la relación entre sus elementos. La interacción con el aplicativo, le permite reconocer de manera más concreta la proporción: “arco es a circunferencia como ángulo es a 360° ” entre otras correlaciones directas que existen entre el ángulo, el radio, el arco y la circunferencia.

Al igual que Paola, Jorge asumió de manera muy natural la utilización del radio como unidad de medida desde práctica en el uso concreto de la pita y virtual del aplicativo. Después del desarrollo de esta actividad, se puede interpretar en la explicación dada por Jorge a la expresión para el cálculo de la circunferencia ($C=2\pi r$), un bosquejo de demostración, al referirse a la definición de π , y establecer las relaciones correspondientes entre el diámetro y el radio, y entre el radio y la circunferencia. Al igual que Paola, Jorge termina validando nuevamente la relación multiplicativa entre el arco y el ángulo, solucionando ejercicios de cálculo de la longitud de arco y problemas de aplicación.

En este orden de ideas, el desempeño mostrado por Paola, sugiere que de alguna manera las actividades desarrolladas por el profesor Moore permiten que los estudiantes de noveno grado puedan acceder a las nociones de relaciones multiplicativas que existen entre ángulo, arco subtendido y radio, esto a la luz de los avances presentados por la estudiante, en la medida en que pasa casi de un nivel total de desconocimiento de estos conceptos, hasta la aplicación de los mismos en situaciones de reales.

6.2 ALCANCE DE LAS ACTIVIDADES

En las actividades realizadas por Moore se pueden identificar las siguientes intenciones pedagógicas para estudiantes de cursos de primeros semestres universitarios:

- Construir un significado de la medida del ángulo desde el razonamiento cuantitativo y correlacional,
- identificar el arco como una fracción de la circunferencia,
- establecer relaciones cuantitativas entre el ángulo, el radio, el arco y la circunferencia,
- explicar el significado de la proporción “ángulo es a 360° como arco es a circunferencia”, y
- establecer el radio como unidad de medida de la circunferencia, conocida como radián.

La adaptación hecha para estudiantes de grado noveno pudo conseguir que los estudiantes observados adquirieran un significado de cada uno de los elementos de la circunferencia, establecieran relaciones entre ellos y establecieran la proporción mencionada, ofreciendo explicaciones basadas en la equivalencia entre las razones involucradas en dicha proporción. No obstante, se puede decir que los estudiantes observados no llegaron a concretar el concepto de radián, ya que siempre se remitían al cálculo de la circunferencia, en vez de medir en forma directa el arco haciendo uso del radio. Cabe aclarar que ninguno de los estudiantes observados poseen conocimiento previos relacionados con el concepto de radian o la conversión de grados a radianes (o viceversa).

Se pudo observar una evolución de la comprensión del ángulo, que pasó de una percepción cualitativa, basada en comparaciones con imágenes mentales de ángulos conocidos, a una comprensión cuantitativa del mismo, basada en la

comparación con la longitud del arco subtendido y la medida de la circunferencia. En el caso de Paola, la estudiante alcanzó a mostrar nociones de la relación $s = \theta r$, pero sin tener certeza de su observación ni dar una explicación de la misma. Por su parte Jorge logró hacer uso de las relaciones establecidas para dar una explicación convincente del significado de la expresión $C = 2\pi r$. Finalmente tanto Jorge como Paola empiezan a estar en capacidad de resolver ciertas situaciones problemas, pero al igual que Zac (uno de los estudiantes de Moore) en la actividad preliminar, hacen uso de la proporción existente entre el ángulo y el arco, en forma mecánica, pero sin dar un significado a las razones involucradas en ella.

A pesar de no observarse con claridad la construcción del concepto de radián, puede decirse que las adaptaciones hechas a las actividades para estudiantes de grado noveno, sí consiguen establecer los cimientos necesarios y útiles para la introducción de dicho concepto, tales como las relaciones existentes entre el ángulo, el radio, el diámetro, el arco y la circunferencia. Igualmente, se puede decir que la reproducción de la presente secuencia didáctica con estudiantes con las mismas características, generaría resultados muy similares, e incluso mejores si se acogen las observaciones hechas a continuación.

6.3 LIMITACIONES Y SUGERENCIAS

Las actividades realizadas en el presente proyecto fueron realizadas con estudiantes de grado noveno y no universitarios, a fin de hacer una construcción y no una reconstrucción de los conceptos, por ello se encontraron dificultades relacionadas con conocimientos previos que no han sido afianzados, relacionados con el sentido de una multiplicación, una razón, una proporción y unidades e instrumentos de medida.

No se contó con espacios libres de ruido ni con instrumentos de grabación especializados, por ello, la grabación de las entrevistas presentó dificultades técnicas, especialmente al momento de ser transcritas.

Las actividades solo se realizaron con tres estudiantes, de los cuales solo se seleccionaron dos. Por ello las conclusiones hechas no pueden ser generalizadas, pero sí sirven de orientación para la determinación de las estrategias y soluciones esperadas.

Los autores del presente proyecto han considerado algunos aspectos que pueden ser mejorados para indagar sobre los efectos de las actividades desarrolladas por el profesor Moore, a fin de obtener resultados más confiables con el rigor científico necesario, y especialmente conseguir (además de lo ya mencionado) una construcción concreta del concepto de radián. Dichos aspectos se enumeran a continuación:

1. Las actividades pueden ser incluidas dentro de la planeación del docente, de manera que no interfiera en la maya curricular y puedan ser aplicadas a la totalidad del curso o nivel y no solo a algunos estudiantes seleccionados.
2. Es necesario realizar una actividad diagnóstica orientada no al concepto e ángulo y su medida, sino a esclarecer si los estudiantes tienen claridad en los conceptos de multiplicación, razón, proporción y unidades de medida.
3. Diseñar una primera actividad en la que se relacionara a los estudiantes con los elementos de la circunferencia y el diseño de instrumentos de medida de longitud de segmentos y curvas.
4. En la actividad 2 (aplicativo) pueden presentarse las razones como fracciones impropias (ubicando los 360° y la longitud de la circunferencia en el numerador correspondiente), a fin de conseguir una relación directa entre la razón *circunferencia sobre arco* y la cantidad de veces que cabe el radio en la circunferencia (en actividad 3).

5. La actividad 3 (radianes) puede complementarse con un segundo aplicativo que permita mostrar con mayor claridad la posibilidad de usar el radio como unidad de medida, para al final de la misma definir dicha unidad como radián. La actividad puede incluir ejercicios comparativos que permitan establecer la relación entre la expresión $s = \theta r$ y la proporción “arco es a circunferencia como ángulo es a 360° ”.
6. La cantidad de problemas en la actividad 4 puede reducirse a 5, para poder profundizar en el análisis de las estrategias utilizadas en ellos.

BIBLIOGRAFÍA

- BRESSOUD D.M., Historical reflections on teaching trigonometry. *Mathematics Teacher* 104(2) 106-112, 2010.
- CASTILLO-GARSOW, C.C., *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth: Ph.D. Dissertations. Arizona State University, Tempe, Az.*, 2010.
- Clement, J., Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In Lesh, R. and Kelly, A., *Handbook of research methodologies for science and mathematics education* (pp. 341-385). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 2000.
- INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR, Nueva estructura de los exámenes de estado para ingreso a la educación superior y validación del bachillerato académico en un solo examen, 2005.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN), La revolución educativa estándares básicos de matemáticas y lenguaje educación básica y media, 2003.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN), Lineamientos Curriculares de matemáticas, 2002.
- MOORE Kevin. C., *Making Sense By Measuring arcs: A Teaching Experiment in Angle Measure*, 2011.
- MOORE, Kevin C. *An Investigation Into Precalculus Students' Conceptions of Angle Measure* National Science Foundation Grants No. EHR-0412537, 2010.

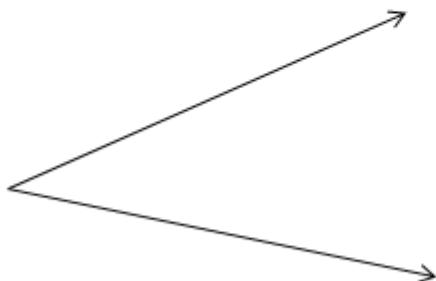
- THOMPSON, P. W. *A cognitive model of quantity-based algebraic reasoning*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Associations, San Francisco. CA., 1989.

ANEXOS

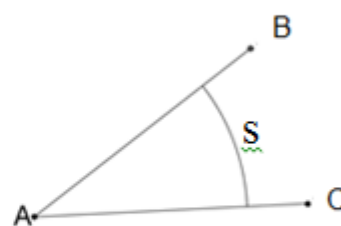
ANEXO A. Actividad preliminar de ángulos

Utilizando una regla, una pita, un compás y sin utilizar transportador, conteste las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto mide el siguiente ángulo en grados sexagesimales?

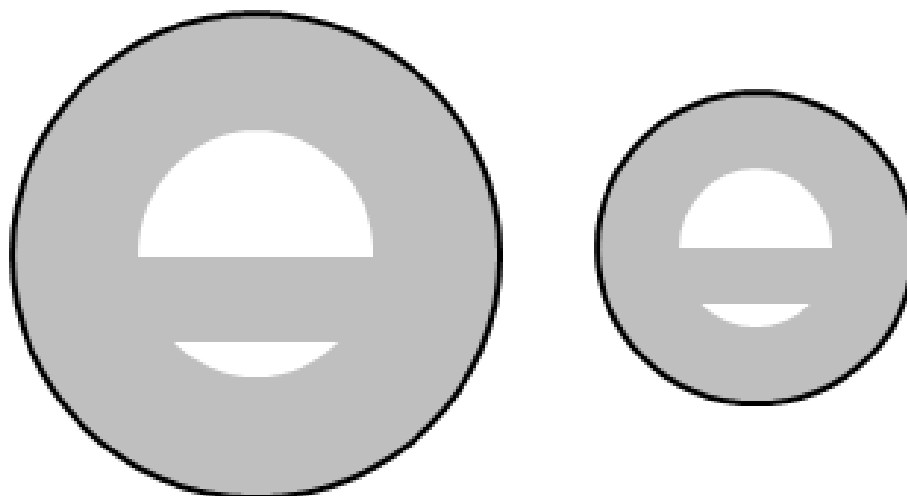


2. Sabiendo que el arco s mostrado en la figura (abajo), mide 1,92 cm, ¿cuál es el valor del ángulo que lo subtiende?

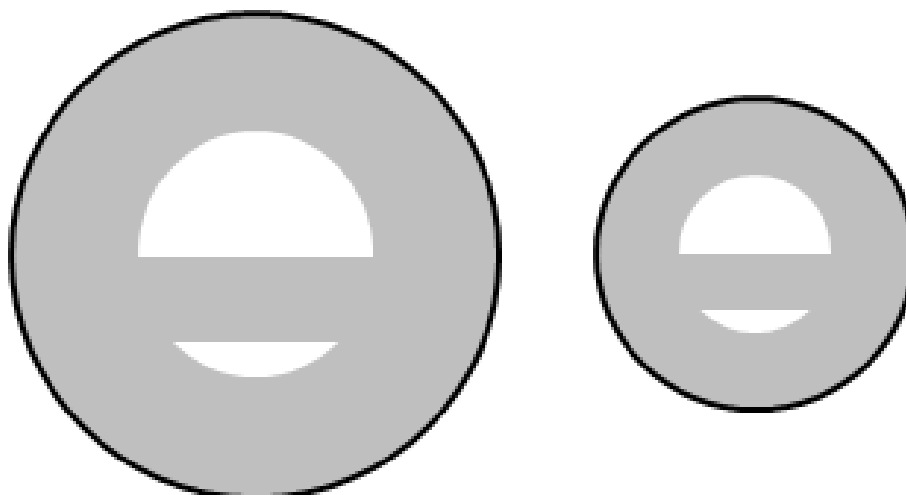


ANEXO B. Construcción de transportadores

1. Utilizando regla y compás construya una herramienta para medir ángulos la cual llamaremos transportador, dividiendo la circunferencia en ocho partes iguales, cada una de las cuales se llamarán "saltos". Realice el procedimiento con ambas circunferencias.



2. Ahora repita el punto anterior, dividiendo la circunferencia en 13 partes iguales, cada una de las cuales se llamarán "pasos".



ANEXO C. Medición y comparación de las características de los ángulos y relaciones entre ellos

1. Identifique en el aplicativo cada uno de los siguientes atributos. Explique el significado de cada uno de ellos. |

a) Longitud del arco AB

$$\text{Arco AB} =$$

b) Longitud de la circunferencia

$$\text{Circunferencia} =$$

c) Medida del ángulo AOB en grados

$$\angle AOB =$$

d) Razón entre la longitud del arco AB y la longitud de la circunferencia

$$\frac{\text{Arco AB}}{\text{Circunferencia}} =$$

e) Razón entre la medida del ángulo AOB y la medida de una vuelta completa.

$$\frac{m\angle AOB}{360^\circ} =$$

2. Varíe la posición del punto B, de manera que cambie el valor del ángulo. Llene la siguiente tabla para cinco posiciones diferentes:

	Arco	Circunferencia	$\angle AOB$	$\frac{\text{Arco AB}}{\text{Circunferencia}}$	$\frac{m\angle AOB}{360^\circ}$
Posición 1					
Posición 2					
Posición 3					
Posición 4					
Posición 5					

a) ¿Qué valores permanecen constantes y qué valores cambian? ¿por qué ocurre esto?

3. Varíe la posición del punto A, de manera que cambie el radio de la circunferencia. Llene la siguiente tabla para cinco posiciones diferentes:

	Arco	Circunferencia	$\angle AOB$	$\frac{\text{Arco AB}}{\text{Circunferencia}}$	$\frac{m\angle AOB}{360^\circ}$
Posición 1					
Posición 2					
Posición 3					
Posición 4					
Posición 5					

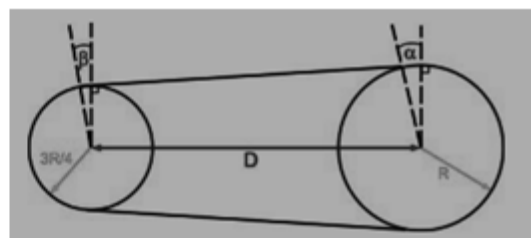
a) ¿Qué valores permanecen constantes y qué valores cambian? ¿por qué ocurre esto?

ANEXO D. Radianes

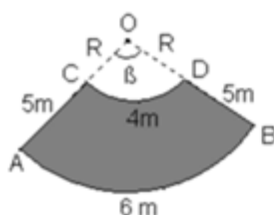
1. Problema de la circunferencia:
 - a) Corte un pedazo de pita (al cual llamaremos "radio") y construya una circunferencia cuya longitud de su radio sea la misma que esta pita.
 - b) Aproxime cuántas veces cabe la longitud de la pita en la longitud de la circunferencia, es decir cuántos radios caben en la circunferencia.
 - c) Construya un ángulo sobre la circunferencia, de manera que subtienda un arco de aproximadamente un radio de largo.
 - d) Construya un ángulo sobre la circunferencia, de manera que subtienda un arco de aproximadamente un radio y medio de largo.
2. Realice la construcción y mediciones anteriores haciendo uso del aplicativo de manera que pueda variar la longitud del radio y realice las observaciones y conclusiones que considere pertinentes.
3. ¿Existe alguna expresión (fórmula) que permita calcular la longitud de una circunferencia dado su radio? Si la hay explíquela.
4. ¿Qué puede decir relacionado con el número irracional π (pi)?
5. Problema de la longitud de arco (resuélvalo a mano y compruebe sus respuestas haciendo uso del aplicativo): Dado un ángulo de 29 grados, determine el valor del arco que subtiende en una circunferencia de:
 - a) 5 cm de radio
 - b) 5,6 cm de radio
 - c) 6,3 cm de radio

ANEXO E. Problemas de ángulos y longitud de arco

1. Sabiendo que cada llanta de un vehículo tiene un radio de 30 cm, y que el vehículo ha avanzado 50 cm, ¿cuál es el valor del ángulo (en grados sexagesimales)?
2. El limpia brisas de un auto tiene 18 pulgadas de longitud. Si efectúa $1/3$ de revolución en 1 segundo, ¿Qué velocidad tendrá su punta?
3. El diámetro de cada rueda de una bicicleta es de 26 pulgadas. Si usted viaja en esta bicicleta a una velocidad de 35 m/h ¿Cuántas revoluciones por minuto completarán las ruedas?
4. El minutero de un reloj tiene 6 pulgadas de longitud. ¿Cuánto se desplazará su punta en 15 minutos? ¿Cuánto se desplaza su punta cada segundo?
5. Dos discos de radios R y $3R/4$ están unidos por un eje de largo D y una correa ideal (sin grosos) que permanece siempre estirada.



- a) Encuentre el valor de los ángulos α y β que forman la línea perpendicular al eje que une ambos centros y los respectivos puntos de contacto entre la correa y los discos.
- b) Calcule el largo de la correa que rodea a los discos y el área encerrada por la correa.



6. Calcular el perímetro de la figura sombreada (a la izquierda).
 7. El minutero de un reloj mide 10 cm. ¿Qué distancia recorre la punta del minutero durante 40 minutos?
 8. Una vía férrea ha de describir un arco de circunferencia. ¿Qué radio hay que utilizar si la vía tiene que cambiar su dirección en 30° en un recorrido de 100 m?
9. Un tren se mueve a razón de 7,5 millas por hora sobre una vía circular cuyo radio mide 2000 pies. ¿Qué ángulo describe en un minuto?
 10. Supóngase que la Tierra es una esfera de 3960 millas de radio.
 - a) Encontrar la distancia que hay desde el ecuador hasta un punto situado a $36^\circ N$ de latitud.
 - b) La distancia entre dos ciudades situadas en un mismo meridiano es de 270 kilómetros. Encontrar su diferencia de latitud.
 11. Un tramo de vía férrea curvilínea esta formado por dos arcos sucesivos. el primer arco correspondiente a un ángulo central de 20° con un radio de 2500 pies, y el segundo corresponde a un ángulo central de 25° con un radio de 3000 pies. Encontrar la longitud total de los dos arcos.
 12. Un volante de 10 pulgadas de radio gira a razón de 900 rpm. ¿A qué velocidad, en pies/seg, se mueve un punto del borde del volante?
 13. La rueda de un automóvil tiene 30 pulgadas de diámetro. ¿Con qué rapidez (rpm) gira la rueda alrededor de su eje cuando el automóvil mantiene una velocidad de 45 millas por hora?
 14. Si la rueda de un automóvil, de 32 pulgadas de diámetro, gira a razón de 800 rpm, ¿cuál es, en millas por hora la velocidad del automóvil?