CONCEPTO DE VARIABLE: PROCESOS QUE FAVORECEN SU CONSTRUCCIÓN

MARCO ANÍBAL ORDÓÑEZ VELÁSQUEZ
OSCAR LEONARDO TORRES SALGAR

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2011

CONCEPTO DE VARIABLE: PROCESOS QUE FAVORECEN SU CONSTRUCCIÓN

MARCO ANÍBAL ORDÓÑEZ VELÁSQUEZ
OSCAR LEONARDO TORRES SALGAR

Trabajo de grado como requisito para optar el título de especialista en:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Directora:
***M. en C.* SOLANGE ROA FUENTES**

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2011

CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE ANEXOS

Pág.

GLOSARIO

Abstracción Reflexiva. Mecanismo que nos sirve para extraer o separar una característica de un objeto, a partir no exactamente de los objetos, sino de las acciones que realizamos sobre ellos. La palabra Reflexiva tiene doble connotación: una es reflexionar sobre nuestras acciones, otra es proyectar nuestra acción sobre el plano de las operaciones.

Acción. Es el resultado de una operación mental o física repetible que transforma de alguna manera un objeto físico o mental. Es, de manera general, algorítmica y con estímulos externos.

Centración. Es la acción donde el sujeto, del total de variables posibles en un evento, centra la atención en algo. Es decir, centrar toda la atención en un evento específico de un suceso

Construcción. Se refiere a las acciones y procesos mentales en los que el individuo se involucra y que dichas acciones y procesos mentales permiten formar ideas y conceptos.

Correlación. Se refiere a la dirección de una relación lineal entre dos variables. Se considera que dos variables cuantitativas están correlacionadas cuando los valores de una de ellas varían sistemáticamente con respecto a los valores de la otra.

Covariación. Es una relación que se establece entre dos variables, en un fenómeno de variación. Por ejemplo en el descenso del agua, se establece la relación entre la variable diámetro del orificio de desagüe y tiempos de evacuación del.

Fenómeno de cambio. Se refiere a la observación de los cambios que sufren las medidas de las magnitudes en una determinada situación experimental.

Interiorización. Es la construcción de procesos internos como una manera de atribuir sentido a fenómenos observados. En este mecanismo mental es posible que una acción o acciones se transformen en un proceso. Piaget se refiere a esa construcción como "traducción de una sucesión de acciones materiales en un sistema de operaciones interiorizadas". (Dubinsky 1991a).

Magnitud. Propiedad física que puede ser medida.

Proceso. Es el resultado de la interiorización de una acción o acciones. En esta construcción el individuo no se deja llevar por los estímulos externos, sino por los internos.

Situaciones experimentales. Se refiere a los experimentos que fueron diseñados para la obtención de evidencias, a favor o en contra de nuestra hipótesis. Estas situaciones experimentales tuvieron como marco fenómenos de cambio en que se involucraban la variación de las medidas de dos magnitudes.

Teoría APOE: La teoría APOE es una interpretación de la teoría constructivista que se basó principalmente en el concepto de abstracción reflexiva, introducida por Piaget, para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, y extiende la idea de nociones matemáticas más avanzadas. (Dubinsky, 1991a)

RESUMEN

TÍTULO **CONCEPTO DE VARIABLE: PROCESOS QUE FAVORECEN SU CONSTRUCCIÓN*.**

AUTORES **MARCO ANÍBAL ORDÓÑEZ VELÁSQUEZ, ÓSCAR LEONARDO TORRES SALGAR****

PALABRAS CLAVES Teoría APOE, Descomposición genética, Razonamientos de cambio. Situaciones experimentales.

DESCRIPCIÓN

En ocasiones la variable ha sido descrita como “Cosa”, “Letra acompañante” o “Número escondido”. Igualmente, se han definido los procesos que favorecen la construcción de la noción de variable en niños de 5 a 8 años, independientemente del uso que se le da. Es en este punto del conocimiento donde nos cuestionamos si es necesario construir procesos para formar el concepto de variable en los estudiantes, sin necesidad de los usos de esta. Por esta razón pretendemos dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué procesos favorecen la construcción del concepto de variable en estudiantes de octavo y noveno? Para obtener respuesta a este cuestionamiento nos propusimos como objetivo aplicar la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) con el fin de analizar los procesos que favorecen en la construcción del concepto de variable en estudiantes de octavo y noveno grado del Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata de la ciudad de Bucaramanga.

Como metodología la Teoría APOE nos proporcionó en su ciclo investigativo el planteamiento de una descomposición genética que determinó el camino que el estudiante hace para acercarse al objeto de estudio. También nos brindó elementos teóricos, analíticos y el diseño de instrumentos que permitieron definir el proceso que favorece la construcción del concepto de variable.

Con la aplicación de estos instrumentos logramos recolectar evidencias del proceso que favoreció la construcción del concepto de variable en ellos. Estas evidencias fueron en primera instancia razonamientos de cambio de los estudiantes, cuando con sus propias palabras describían el comportamiento de las medidas entre dos magnitudes correlacionadas. En segunda instancia la simbolización de fenómenos de cambio a través de expresiones algebraicas. En conclusión, la aplicación de la Teoría APOE permitió la búsqueda de estas evidencias como parte de un proceso que favorece la construcción del concepto de variable en los estudiantes.

* Trabajo de Grado.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Director(a): *M. en C.* Solange Roa Fuentes

SUMMARY

TITLE: **CONCEPT OF VARIABLE: CONSTRUCTION PROCESSES THAT FAVOR*.**

AUTHORS: **MARCO ANÍBAL ORDÓÑEZ VELÁSQUEZ,**
ÓSCAR LEONARDO TORRES SALGAR.**

KEY WORDS: APOE theory, Genetic descomposition, Changes of reasoning, Experimental situations.

DESCRIPTION

Sometimes the variable has been described as “Thing”, “Companion Letter”, or “hidden number”. Likewise, it has been defined the process in favor of variable-notion construction among children between 5 and 8 years old, irrespective the given use. This gap in the knowledge is where we ask if it is needed to build up processes to put up the concept of variable between students, without using the concept. we proposed the next question: What processes favor the construction of the variable concept among eighth and ninth grade students? To address this question we aimed to apply the APOE theory (Actions, Processes, Objects, Schemes), with the objective analyze the processes favor in the construction of variable concept in students from eighth and ninth grade from the Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata in Bucaramanga city.

In the methodology, the theory APOE facilitated in the research cycle, the genetic decomposition that determined the pathway that the student does to approach to the study objective. It also provided theorical elements, analytical and the instrument design that allow defining the process that favors the construction of the variable concept.

With these instruments we managed to collect evidences of the process that allowed the construction of the variable concept between the students. These evidences were, first of all, changes of reasoning between the students, whenever they described with their own words the behavior of measurements between two correlated magnitudes. Secondly, the symbolization of phenomenon changes throughout algebraic expressions. In conclusion, the application of APE theory allowed the search of these evidences as part of a process that favor the construction of variable concept between eighth and ninth grade students.

---

* Work of Grade.

** Ability of Sciences. School of Mathematics. Degree in Mathematics. Director: M. in C. Solange Roa Fuentes

INTRODUCCIÓN

Las dificultades en el manejo del concepto de variable en estudiantes que por primera vez tienen contacto con el álgebra han motivado el desarrollo de investigaciones en torno a dicho concepto. Los resultados encontrados tienen diferentes formas de abordar el problema. Por ejemplo, algunos de ellos muestran que las dificultades de los estudiantes están asociadas con el significado que representa una letra en expresiones algebraicas y en el manejo inconsciente de tres usos que pueden ser asignados a la variable: como incógnita, como número generalizado y como relación funcional (Kuchemann, 1980; Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R, 1996; Ambrosio, 2006; Cogollo, 2006). Por otra parte, algunos trabajos han realizado estudios que buscan determinar caminos de construcción de esta área de la matemática. En este sentido, Gómez (2007) tomando como fundamento la teoría APOE, plantea la búsqueda de procesos que favorezcan la construcción de una noción matemática independiente del uso que se le puede dar en un contexto matemático.

En el análisis de los resultados de estos trabajos se puede observar aportes enriquecedores. Aun así no nos interesó sólo analizar la variable como letra o el manejo exclusivo de sus usos. En nuestro trabajo buscamos analizar con base en la teoría APOE desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores (Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K,1996), una descripción de las construcciones mentales (acciones, procesos) que pueden realizar los estudiantes para acercarse al concepto de variable. Esta descripción sistemática de acciones específicas fue presentada mediante una descomposición genética preliminar, que permitió identificar conocimientos previos en los estudiantes y así encontrar evidencias de un proceso que les favoreciera en el acercamiento a dicho concepto.

El planteamiento de la descomposición genética surge gracias al ciclo de investigación que propone la Teoría APOE. Este ciclo está compuesto por tres componentes: análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de datos. En el desarrollo de nuestro análisis teórico diseñamos una descomposición genética preliminar del concepto de variable y con base en dicho análisis diseñamos situaciones experimentales, talleres basados en estas situaciones y entrevistas semi-estructuradas, las cuales son parte del tercer componente del ciclo de APOE que permite enriquecer el análisis teórico mediante datos empíricos.

Los instrumentos diseñados permitieron detectar habilidades y conocimientos que los estudiantes han adquirido en sus clases de matemáticas y así aportar elementos claves en la refinación de la descomposición genética. Las preguntas diseñadas en estos instrumentos permiten a los estudiantes la realización de acciones específicas que nos dan información enriquecedora de la manera de ellos expresarse respecto a fenómenos de cambio. Estos instrumentos fueron aplicados a los estudiantes de octavo y noveno grado del Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata.

La descomposición genética refinada muestra algunas evidencias de los estudiantes cuando observan fenómenos de cambio; la primera de ellas son los razonamientos de cambio hechos por los estudiantes, donde con sus propias palabras describían el comportamiento de las medidas entre dos magnitudes correlacionadas y la segunda son las posibles simbolizaciones que ellos hicieron de fenómenos de cambio a través de expresiones algebraicas. El uso de la variable como relación funcional fue fundamental en la obtención de dichas evidencias.

Nuestro trabajo está organizado en seis capítulos, los cuales describimos a continuación:

Capítulo 1 *Planteamiento y Justificación del Problema*, *Objetivos de la Investigación y Antecedentes.* En este capítulo presentamos una descripción de los trabajos cuyo objetivo es analizar las dificultades que los estudiantes presentan con relación al concepto de variable, la letra como variable y sus usos. Los antecedentes están organizados bajo dos puntos de vista distintos; primero el sentido y uso que los estudiantes hacen de la variable y segundo el concepto de variable desde la perspectiva de la teoría APOE. Es en este punto donde surge nuestro problema de investigación acerca de los procesos que favorecen la construcción del concepto de variable sin dejar a un lado los usos que los estudiantes hacen de esta.

Capítulo 2 *Marco teórico*. Con base en la descripción de los antecedentes, decidimos tomar como referencia teórica la teoría APOE ya que desde esta perspectiva es posible definir procesos (interiorización de acciones) que favorecen la construcción del concepto de variable. En la descripción de la teoría APOE hacemos énfasis en la definición de algunas construcciones y mecanismos mentales con el fin de encontrar habilidades y evidencias en los estudiantes que aporten a los procesos. De la misma manera presentamos una explicación del ciclo investigativo de la teoría APOE en el cual nos interesa plantear una descomposición genética.

Capítulo 3 Análisis teórico, intención de los instrumentos y análisis preliminar sobre las construcciones. En este capítulo se presenta la metodología por la cual se guió nuestro trabajo. Ésta se fundamentó en el ciclo de investigación de APOE. En el análisis teórico como primer componente de dicho ciclo se planteó una descomposición genética preliminar del concepto de variable.

Capítulo 4 *Diseño y Análisis a priori de las situaciones experimentales.* Con base en la descomposición genética preliminar del concepto de variable, se diseñaron los instrumentos y se describió su análisis a priori (Situaciones experimentales, talleres basados en estas y entrevistas semi-estructuradas).

Capítulo 5 *Observación, análisis y verificación de datos*: *Análisis a posteriori.* Aquí se muestran los conocimientos previos y habilidades que tienen los estudiantes acerca de la tabulación de datos, representaciones gráficas, generalidades de la proporcionalidad y otros, los cuales permitieron encontrar evidencias y resultados empíricos en el momento de aplicar los instrumentos de diseño.

Capítulo 6 *Conclusiones*. En este capítulo gracias a las evidencias obtenidas en el análisis y verificación de datos se describe la descomposición genética refinada. En esta parte del trabajo se confronta la pregunta de investigación y los objetivos propuestos con base en la descomposición genética refinada. También sugerimos con base en la Teoría APOE, el planteamiento de diseños de actividades didácticas que permitan la adecuada asimilación de conceptos que se relacionan con la variable.

1. PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA, OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN Y ANTECEDENTES

1.1 PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

En algunas investigaciones se han dado respuestas a un número considerable de cuestionamientos que se presentan actualmente en las aulas de matemáticas, sobre las dificultades de los estudiantes en la construcción de conceptos matemáticos. Uno de estos cuestionamientos se presenta cuando los estudiantes de octavo grado tienen contacto por primera vez con el álgebra, donde aparece la variable en sus diferentes modalidades (Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero, 1996).

La transición de la aritmética al álgebra se convierte en un gran desafío para cada estudiante, quien debe pasar de utilizar números, a considerar el significado que representa una letra dentro de una expresión que modela una situación. Al parecer el problema radica en la poca asimilación que tienen los estudiantes del concepto de variable y la dificultad que surge cuando se enfrentan a situaciones que implican el uso de este concepto.

Estas dificultades radican en diversas causas, una de ellas es que la variable como tal no aparece en el currículo de matemática, sino que surge de la necesidad de desarrollar otros conceptos y nociones matemáticas. De tal manera que previo al trabajo con expresiones algebraicas, los maestros hacen una introducción sobre lo que puede ser esa x (o cualquier otra letra) como valor desconocido dentro de una situación matemática. Ahora bien, la complejidad de definir algunos conceptos matemáticos, como en este caso la variable, motivó el trabajo de Chevallard (1995) quien define las ideas que se desarrollan en matemáticas como: nociones matemáticas, pro-matemáticas y para-matemáticas.

De tal manera que la variable cabe dentro de las nociones para-matemáticas, ya que tiene un nombre asignado dentro de la clase de matemáticas pero no se desarrolla un proceso o una actividad educativa sobre ella. Trabajar sobre el concepto de variable es crucial e importante, ya que estas dificultades presentadas en el álgebra también contribuyen a la escasa asimilación de temas referentes a la variable, tales como: funciones, límites y derivadas.

Por otro lado, estas dificultades motivaron el desarrollo de investigaciones y trabajos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la variable enfocándose en el manejo del concepto de variable a partir del significado del símbolo o la letra y sus usos. La mayoría de estos trabajos muestran las dificultades que presentan los estudiantes con el tratamiento de la letra como variable (Kuchemann, 1980; Trigueros y otros 1996; Ambrosio, 2006; Cogollo, 2006). Por otra parte, trabajos como el de Gómez (2007) consideran que un proceso correcto para construir el concepto de variable es utilizar herramientas didácticas que permiten una mejor comprensión de este, dejando a un lado los usos y la aplicación que se puede hacer del mismo en diversos contextos. En conclusión, Gómez (2007) plantea que la construcción de este concepto matemático es independiente de su uso.

Nuestro trabajo tiene como eje principal identificar habilidades y conocimientos en los estudiantes que aporten en la formación de procesos cognitivos que favorecen la construcción del concepto de variable en ellos sin dejar a un lado el uso que los estudiantes hacen de él. Para cumplir este fin, la *teoría APOE* (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) proporciona herramientas para realizar este análisis cognitivo, mediante el planteamiento de una *descomposición genética,* es decir la descripción de un camino que le permita al estudiante evidenciar habilidades que favorezcan la comprensión del concepto de variable, de tal manera, que logre abordar con éxito situaciones que involucren el concepto de variable y sus diferentes usos.

En este proyecto describiremos cómo los estudiantes se acercan al concepto de variable a partir de la descripción de fenómenos de cambio en situaciones experimentales. Consideramos que las habilidades y evidencias de los estudiantes en estas descripciones aportarán en la formación de procesos (interiorización de acciones) para contribuir en la evolución de la variable dentro de otras nociones matemáticas. Por tanto cuando en este trabajo nos referimos al concepto de variable, estamos haciendo mención a los procesos que favorecen su construcción. En este sentido, no hablamos desde la teoría APOE de “concepto” en términos de un concepto matemático propiamente definido dentro de esta área, sino como lo muestran recientes trabajos con APOE, como un área de estudio para las matemáticas. En este sentido, en este trabajo el término noción o concepto son equivalentes.

Por lo tanto profundizaremos en cómo estudiantes de octavo y noveno grado pertenecientes al Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata de la ciudad de Bucaramanga, tratan de acercarse al concepto de variable. Analizaremos los mecanismos mentales para identificar habilidades en los estudiantes que aporten a los procesos que favorezcan la construcción de dicho concepto, sin dejar a un lado el uso que el estudiante hace de la variable. Consideramos que los resultados obtenidos en este trabajo nos permitirán confrontar las ideas de Gómez (2007), en el sentido de construir nociones o conceptos matemáticos independientes del uso que se le da a dicho concepto.

Esta problemática entre si es necesario construir procesos para formar el concepto de variable en los estudiantes sin necesidad de los usos de esta, o que con sólo un paso por los usos de la variable bien explicados es suficiente para comprender su naturaleza, motivó nuestra investigación; por lo que nuestro trabajo pretende responder a la siguiente pregunta: ¿Qué procesos favorecen la construcción del concepto de variable en estudiantes de octavo y noveno grado?, pero sin dejar a un lado los usos que el estudiante hace de la variable.

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL

Aplicar la teoría APOE con el fin de analizar procesos que favorezcan la construcción del concepto de variable en estudiantes de octavo y noveno grado del Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata de la ciudad de Bucaramanga.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analizar el uso que el estudiante da a la variable a través del diseño y ejecución de actividades en el aula.

- Definir los procesos que favorecen la construcción del concepto de variable mediante el diseño y aplicación de una descomposición genética.

3. ANTECEDENTES

Aunque el concepto de variable causa mucha confusión y es de difícil comprensión para los estudiantes, es muy importante para el desarrollo del pensamiento variacional y construcción de sistemas algebraicos. Además es de gran importancia para el entendimiento de otros conceptos como el de función y límite, entre otros. Por esta razón en nuestra investigación mencionamos algunos trabajos que se han desarrollado acerca de la variable. Estos antecedentes están categorizados de la siguiente manera: El sentido y uso que los estudiantes hacen de la variable y el concepto de variable desde la perspectiva de la teoría APOE.

3.1 SENTIDO Y USO QUE LOS ESTUDIANTES HACEN DE LA VARIABLE.

Kuchemann (1980), realizó un estudio con más de tres mil estudiantes de edades entre 13 y 15 años, con el fin de determinar la forma en que ellos interpretan los símbolos literales usados para representar las variables en un contexto algebraico escolar. Para ello aplicó un cuestionario escrito, en el cual se pedía a los estudiantes que interpretaran y manipularan expresiones algebraicas, resolviendo problemas en los que las variables estaban representadas por símbolos literales. El autor se centró en analizar las diferentes formas que tienen los estudiantes de interpretar los símbolos literales y estudiar el significado asociado con la letra, determinando seis formas de interpretación.

A continuación describimos brevemente cada una de ellas y un respectivo ejemplo:

Letra evaluada: A la letra se le da un valor numérico en lugar de tratarla como un valor desconocido.

Por ejemplo, en la pregunta: "$e + f = 8$, ¿cuánto es $e + f + g$?", el alumno contesta 12 en lugar de $8 + g$ (Kuchemann, 1980).

Letra no usada: La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado.

Por ejemplo, en la siguiente pregunta: "súmale $2\ a\ 3n$" los estudiantes respondieron $5\ o\ 5n$ en lugar de $3n + 2$.

Otro ejemplo de errores de los estudiantes se presentó al resolver la operación $2x + 3y$, el resultado de la mayoría fue $5xy$. En este caso, los estudiantes no se dan cuenta que x e y son términos que no se pueden combinar a través del proceso de adición (Kuchemann, 1980).

Letra como objeto: Se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí.

Por ejemplo, el autor observó en la expresión "$4n + 3n$" que los estudiantes pensaron en "4 naranjas y 3 naranjas" o "4 enes más 3 enes, lo que para ellos significa 7 enes juntas", esta forma de operar suele ser apropiada cuando se suman términos semejantes, pero en otros contextos no es conveniente.

Estas primeras tres interpretaciones de la variable mencionadas son muy básicas y de bajo nivel.

Letra como incógnita: En esta forma la letra se concibe como un número desconocido y el estudiante opera con la letra para obtener dicho número. Aun así, los estudiantes sólo ven la letra como incógnita cuando es un número desconocido único.

Por ejemplo, en la ecuación $6 = x - 2$, x es para los estudiantes un número único que satisface la ecuación. Aunque en algunas ocasiones tenga algunos inconvenientes como en las respuestas $8 + g$ ó $3n + 2$ mencionadas anteriormente.

Letra como número generalizado: Aquí la letra representa valores y no sólo un valor específico.

Por ejemplo: si $A + B = 12$ y B es menor que A, ¿qué valor puede tener A? Los estudiantes que lograron responder este tipo de problemas mostraron un nivel un poco más elevado de la compresión de la variable. Otro ejemplo se presenta en la inecuación $x < 7$, donde x se refiere al conjunto de los números menores que 7 (Kuchemann, 1980).

Letra como variable: En este caso la letra representa un rango de valores; el alumno es capaz de describir el grado con el cual los cambios de un conjunto se determinan por los cambios de otro, estableciendo al menos una relación de segundo orden. Por ejemplo, $a = b + 2$, el autor observó que muy pocos estudiantes analizaron que el valor de a es el valor de b aumentado en 2. Otro ejemplo de este tipo de problema fue la ecuación lineal $y = 2x$. Aquí la variable y puede referirse a una cantidad infinita de valores, dependiendo del valor que se le asigne a la variable *x.* Para este caso sólo un pequeño porcentaje de alumnos notaron esta relación (Kuchemann, 1980).

Según Kuchemann (1980), estos resultados muestran categóricamente dos niveles de comprensión en los estudiantes: el primero abarca las tres primeras categorías y refleja un bajo nivel de respuesta, mientras que las tres categorías restantes indican que el estudiante se está acercando al álgebra.

Entonces, el estudio realizado por Kuchemann resalta el hecho de que los estudiantes tienen diferentes formas de interpretar las letras usadas para representar las variables. Esto indica que estudiantes de octavo grado, quienes entran por primera vez en contacto con el álgebra, consideran que los símbolos literales pueden interpretarse desde diferentes perspectivas y que su significado puede variar con el problema. En este sentido, Kuchemann concluye: "Esto muestra que la interpretación de la variable dada no es siempre la apropiada, y frecuentemente es la fuente de respuestas erróneas. Cambiar de una interpretación a otra en el curso de la resolución de un problema hace que sea difícil para el individuo, y se pierde el verdadero significado de ser utilizada" (Kuchemann, 1980, p. 110).

Ya que los estudiantes buscan su propia forma de interpretar la variable, Kuchemann consideró que la clasificación de la interpretación de los símbolos literales previamente analizados refleja un grado de dificultad creciente en los estudiantes y afirmó al respecto: "que un niño habrá comprendido perfectamente el uso de los símbolos literales en álgebra cuando sea capaz de trabajar con la letra como variable" (Kuchemann, 1980; p. 111). El orden que Kuchemann propone sugiere que es más fácil para el niño trabajar con la letra como incógnita específica, en lugar de la letra como número generalizado. Igualmente sugiere que es más fácil trabajar con la letra como número generalizado en lugar de la letra como variable.

A continuación discutiremos el trabajo de Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero (1996) donde se resaltan un poco más algunos aspectos de la variable presentados por Kuchemann (1980).

Trigueros y otros (1996), presentan una investigación cuyo objetivo es el estudio de la interpretación, simbolización y manipulación que los estudiantes hacen de la variable y sus usos. El desarrollo de este trabajo se realizó a través de un cuestionario de 52 preguntas aplicado a 98 estudiantes, que previamente había sido diseñado para estudiantes de 13 años. Sin embargo, este trabajo se adaptó para estudiantes de primeros niveles de universidad. El cuestionario buscaba explorar en ellos cómo interpretaban, simbolizaban y manipulaban la variable en diversas situaciones que involucran tres distintos usos del concepto de variable: como incógnita, como número general y como relación funcional.

Seguidamente, describiremos cómo Trigueros y otros (1996) caracterizan estos tres usos de la variable:

La variable como incógnita: Un manejo adecuado de la variable como incógnita implica la capacidad de:

- Interpretar la variable como un número cuyo valor o valores específicos se pueden determinar a partir de las restricciones de un problema dado.

- Manipular los elementos que componen una ecuación, parámetros e incógnita, independientemente de la operación o las operaciones involucradas.

- Identificar y simbolizar la incógnita en problemas específicos, susceptibles a representarse mediante una ecuación. (Trigueros y otros, 1996; p.353).

La variable como un número general: Lo que se espera aquí del estudiante es la capacidad de:

- Interpretar la variable como representación de un número cualquiera en expresiones algebraicas tales como tautologías y expresiones abiertas.

- Identificar y simbolizar el objeto general en situaciones particulares que pueden describirse en términos de una regla o método general. (Trigueros y otros, 1996; p. 353).

La variable en una relación funcional: La idea de relación funcional puede considerarse desde dos perspectivas: una estática, en la que la relación se concibe como la correspondencia punto por punto entre dos conjuntos de valores; otra dinámica, en la que se resalta variación interdependiente de las variables. El manejo competente de este uso de la variable implica la capacidad de:

- Reconocer las relaciones funcionales (en su representación analítica, gráfica o tabular) e interpretar las variables involucradas en forma tanto estática cuanto dinámica, dependiendo de la naturaleza del problema.

- Manipular las variables para determinar los valores o intervalos de variación que cada una de ellas puede tomar en términos de la otra; simbolizar situaciones que involucran una relación funcional. (Trigueros y otros, 1996; p. 353).

El enfoque que los autores hacen de las tres categorizaciones o usos de la variable los llevaron a incluir ítems tales como: Interpretación, simbolización y manipulación, que permitieron observar si los estudiantes *interpretaban* correctamente la variable involucrada, y así comprobar si tenían la capacidad para *simbolizar* una situación en la que aparecía cierta caracterización de la variable y por último ser capaces de *manipular* las variables que aparecían en una expresión.

Trigueros y otros (1996), para desarrollar los ítems mencionados analizaron tanto las fortalezas como las dificultades que tienen los estudiantes cuando resuelven problemas que involucran cada uno de los usos de la variable por aparte y de igual modo problemas que requieren en su solución los tres usos de la variable en conjunto.

Debido a esto nos interesó cómo los autores, para tener una información más amplia acerca de la comprensión de la variable, se enfocaron en la variable como *relación funcional*, incluyendo en su investigación ítems que requerían graficación. Por ejemplo, Trigueros y otros (1996) señalan: "la posibilidad de representación de la información que proporciona una fórmula o una tabla de datos mediante una gráfica es de suma importancia en la comprensión de la variable". Para nuestro trabajo, los ítems utilizados por Trigueros y otros (1996), darán aportes enriquecedores para la realización de las *acciones* en nuestros estudiantes, teniendo en cuenta también los apuntes acerca de la variable como *relación funcional* que será parte fundamental para el desarrollo de nuestro objetivo. Trigueros y otros (1996) señalan: "Este diseño pretende facilitar un diagnóstico acerca de cómo los estudiantes interpretan, manipulan y simbolizan cada una de las distintas manifestaciones de la variable y con cuáles tienen más dificultades". El autor concluye diciendo que se presenta una mayor dificultad cuando los estudiantes analizan la variable como relación funcional.

A continuación se muestra un ejemplo del cuestionario donde los estudiantes deben interrelacionar las tres caracterizaciones de la variable, resaltando la variable como relación funcional.

Encuentra la ecuación de la línea que pasa por el punto (6,2) y cuya pendiente es 11.

> Partiendo de la relación que hay entre los puntos de una recta y su pendiente, expresada mediante $y = mx + b$, se espera que el estudiante sea capaz de concebir las variables como números generales, es decir que puedan ver que pueden asumir cualquier valor. Sin embargo para una recta, m y b no son números generales, sino constantes. Por ejemplo, la pendiente m, tiene un número asignado y debe sustituirse, y b es una incógnita que puede determinarse usando los datos. x e y son dos variables interrelacionadas bajo una relación funcional: x puede considerarse una magnitud variante a la que se le pueden asignar diferentes valores, mientras los valores de y cambian con correspondencia.(Trigueros y otros, 1996; p. 353).

Trigueros y otros (1996), recalcan que para resolver este problema, los estudiantes deben ser capaces de trabajar con números generales, constantes, incógnitas y variables en una relación funcional, para poder pasar de una a otra interpretación; incluso aun cuando estas diferentes caracterizaciones de la variable tengan la misma representación simbólica. Los Autores notaron un pobre dominio del concepto de variable como relación funcional y la dificultad en interpretarla, simbolizarla y manipularla.

Otro caso específico son las preguntas 44 y 45, que requerían la determinación de intervalos numéricos.

Considera la siguiente expresión $y = 3 + x$.

44. Si queremos que los valores de y sean mayores que 3 pero más pequeños que 10, ¿qué valores puede tomar x?

45. Si x toma valores entre 8 y 15, ¿entre qué valores caerán los valores de y?
(Trigueros y otros ,1996; p. 357).

Las respuestas de los estudiantes en estas preguntas, mostraron su incapacidad para concebir la variación de manera dinámica. Lo cual puede ser el resultado de una centración de atención exagerada en el aspecto estático de la función, esto es, en la correspondencia entre variables (Trigueros y otros, 1996).

Trigueros y otros (1996), demostraron a partir de los resultados de su estudio, que los estudiantes universitarios tienen una concepción muy pobre de la variable, debido a que la enseñanza escolar no ayuda a superar las dificultades que tienen los estudiantes, al manipular y simbolizar la variable.

Por su parte Ambrosio (2006), recalca que ver la dificultad de los estudiantes desde el punto de vista de la letra tiende a contribuir hacia un tipo de malentendido causado por una *"carencia de referente numérico"* (Ambrosio, 2006). Por ejemplo, en su trabajo encontró que los estudiantes en clase de álgebra confunden la expresión 4*m* debido a la representación aritmética que tenían formada desde sus clases de ciencias naturales y geometría, para los estudiantes esta expresión sigue siendo 4 metros. Ambrosio advierte que el estudiante de octavo grado que entra en contacto por primera vez con la variable, sin presentarle los usos adecuados de esta, tendrá serias dificultades en la comprensión de situaciones que la involucren. En este trabajo se presentó un cuestionario de 38 preguntas que fue aplicado a 100 estudiantes de octavo grado. Ambrosio (2006) toma como referencia los aspectos considerados como más relevantes para un manejo competente del álgebra elemental y que han sido destacados en otras investigaciones como Trigueros y otros (1996), estos aspectos son: el uso de la variable como *incógnita*, como *número general* y como una *relación funcional* (Ambrosio, 2006).

El análisis detallado de las respuestas dadas por los estudiantes al cuestionario aplicado por Ambrosio (2006) en su trabajo y las respuestas dadas por cuatro estudiantes durante entrevistas específicas, sugieren dificultad para discernir entre *la variable como incógnita y la variable como número general.* A diferencia del trabajo de Trigueros y otros (1996), Ambrosio (2006), no hace relevancia en caracterizar la variable como una *relación funcional*.

Esto lo podemos ver en algunas preguntas del cuestionario:

19. ¿Cuál sería un caso particular de la siguiente ecuación general? $(m+2)x^2+3mx+6=m+2$

20. Si x = *0* ¿la expresión que se obtiene puede considerarse aún una ecuación?

Explica tu respuesta.

21. Si m= - *2* ¿la expresión que se obtiene puede considerarse aún una ecuación?

Explica tu respuesta. (Ambrosio, 2006, p. 35).

En las preguntas anteriores se requiere identificar el parámetro, lo cual implica interpretar a la *variable como número general*. Las preguntas anteriores tienen en común que conceptualizan a la *variable como número general*, pues debe ser interpretada, simbolizada o manipulada. En estas preguntas al menos el 40% de los estudiantes contestaron correctamente, muy pocos identificaron el parámetro.

Otro ejemplo, en la pregunta 14:

14. ¿Para qué valores de x la ecuación no tiene solución?
Dada la ecuación $3x^2 + px + 7 = 0$ (Ambrosio, 2006; p. 35).

En este ejercicio Ambrosio comenta que hubo una dificultad al diferenciar la variable como incógnita y el parámetro como número general. Los estudiantes de octavo grado trabajaron sobre la ecuación de tal forma que al parámetro *p* lo tomaron como incógnita.

Ambrosio (2006) concluye:

> … Esto es una muestra de una conceptualización superficial de la variable como incógnita y como número general porque la pregunta claramente pedía encontrar un valor para la incógnita. Aquí los estudiantes no supieron diferenciar entre parámetro y variable en la expresión dada, ya que confundieron los papeles que estos jugaban (Ambrosio, 2006; p. 52).

En estos trabajos tomados como antecedentes los autores coinciden en la dificultad que tiene los estudiantes para interpretar, simbolizar y manipular la variable en sus diferentes usos por separado en diferentes contextos, lo que implica una difícil comprensión cuando éstas se deben interrelacionar en una determinada situación.

Para detallar un poco más estas dificultades vamos a considerar el trabajo de Cogollo (2006); quien a partir de las dificultades que presentaron los estudiantes de un grupo de séptimo grado en álgebra, determinó los significados que tenía la variable para los estudiantes. Siguiendo este camino, el autor, después de realizar una amplia revisión bibliográfica sobre las relaciones de la aritmética y el álgebra y el estudio de la variable en distintas actividades algebraicas, llegó al siguiente planteamiento: ¿Cuál es el sentido que los estudiantes de séptimo grado dan a la variable en actividades algebraicas?, pregunta que enfocó en la identificación y significado dado por los estudiantes a la variable en actividades algebraicas. El estudio de su investigación fue desarrollado a través de encuestas, diálogos, entrevistas y de la observación directa de los estudiantes en cada una de las clases de álgebra, para esto trabajó con un total de cinco estudiantes del Colegio Saucará del Municipio de Floridablanca. El desarrollo y conclusiones de esta investigación las presentó a través de cuatro secciones.

En la primera sección se centró no sólo en buscar una solución metodológica que al implementarla le permitiera reducir el alto índice de pérdida de la asignatura álgebra de sus estudiantes, sino también en la observación detenida de los errores que sus estudiantes presentaban cuando trabajaban con el álgebra. Esto lo llevó a enfocar su trabajo hacia las dificultades y errores de los estudiantes en el álgebra.

En la segunda parte de su trabajo mostró una serie de errores a partir de observaciones hechas a sus estudiantes. Una leve diferencia con los anteriores trabajos es que el autor concluye que algunos estudiantes ven el álgebra como un juego de símbolos muy bueno para la mente.

A continuación se presentan algunas entrevistas hechas por Cogollo (2006) a sus estudiantes:

> *Tulio, en la entrevista realizada el tres de diciembre de 2004, comentó que consideraba el álgebra importante porque:*
> *"Ahí también se empieza a trabajar la mente, a saber…, para uno no quedarse sin saber nada de eso" (Entrevista, Tulio; 3/Dic./04)*
> *Por otro lado, Crisanto y Nacho veían el álgebra como el estudio de la mezcla entre números y letras:*
> *"El álgebra es como una ciencia que estudia los signos, se mezclan los números y letras para formar expresiones algebraicas y también tiene temas interesantes" (Entrevista, Crisanto; 3/Dic./04).*
> *"Entiendo que el álgebra es una matemática que comprende las expresiones de los números y letras en cantidades variables" (Entrevista, Nacho; 3/Dic./04).*
> *Además, Isidoro dijo que el álgebra es una matemática más complicada cuyo único objetivo era resolver incógnitas.*
> *"Es como una rama de las matemáticas que nos ayuda a resolver incógnitas" (Entrevista, Isidoro; 3/Dic./04).*
> *Igualmente expresaban que el álgebra era complicada, porque era una generalización de la matemática que ellos habían visto hasta el momento (aritmética). Es decir, percibían el álgebra como aritmética generalizada. Al respecto, Tulio dijo:*
> *"Es una forma más avanzada de la matemática, donde se obtiene operaciones de más alto grado" (Entrevista, Tulio; 3/Dic./04). (Cogollo, 2006, pp. 14 y 15)*

El autor concluye esta parte de su trabajo reconociendo que esta visión que tenían los estudiantes acerca del álgebra se debía en gran parte a la enseñanza que el profesor hace de esta, generalmente es presentada al estudiante como un "*sinfín de reglas y algoritmos estrictos*" (Cogollo, 2006, p. 19), dejando a un lado el significado de las letras y más aún sin dejar lugar al estudiante que la relacione con la vida real.

Otros errores que evidenció Cogollo (2006), en sus estudiantes a través del diseño y ejecución de cuestionarios fueron que en ejercicios como: $3a + 5$ la respuesta para ellos era $8a$ o en el siguiente ejemplo, $Si\ e + f = 8, entonces\ e + f + g =$ ___ , la respuesta de la mayoría fue: $e + f + g = 10$.

Con base en estas respuestas Cogollo (2006), aclaró: "Según Socas y otros (1986-96), un conocimiento de los errores básicos en álgebra es importante para el profesor, porque lo provee de información sobre la forma en que los niños interpretan los problemas y cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos".

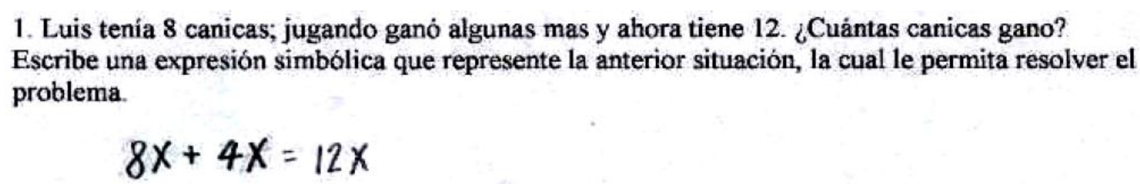
A continuación presentamos otras evidencias de los errores cometidos por los estudiantes en la solución de una pregunta en un primer cuestionario.

> *¿Quién es mayor* $2n ó n + 2$?
> *En esta pregunta Isidoro, Jacinto y Crisanto fueron iguales, aunque en diferentes términos:*
> *Isidoro: "Son Iguales"*
> *Jacinto:" es lo mismo"*
> *Crisanto "Son iguales, porque* $2n = n + 2$" (Cogollo, 2006; p. 21-22)

El autor notó que los estudiantes no tuvieron en cuenta que la variable n podía tener valores y que de esos valores dependía la respuesta. Además veían la letra n como un objeto coleccionable, así $n+2$ era unir (literalmente) el símbolo 2 con la n, y por lo tanto la respuesta era "igual". (Cogollo, 2006).

En el desarrollo de un segundo cuestionario, el autor aclara que a los estudiantes se les dificultó bastante su desarrollo, incluso hasta el punto de no contestar muchas de las preguntas.

A continuación se presentan algunas entrevistas hechas por Cogollo (2006) a sus estudiantes:


1. Luis tenía 8 canicas; jugando ganó algunas mas y ahora tiene 12. ¿Cuántas canicas gano? Escribe una expresión simbólica que represente la anterior situación, la cual le permita resolver el problema.

$8X + 4X = 12X$

Cogollo (2006) pudo observar que el estudiante Crisanto responde el cuestionamiento limitándose simplemente a agregar x a todos los números que intervenían en la situación para decir que era una expresión algebraica y que debía llevar x porque se trataba de una ecuación.

> Booth (1984) dice: "Muchos alumnos nunca logran captar apropiadamente como se puede usar una letra para representar un número generalizado. Ellos tienen la tendencia a ver, digamos, $2m+3b$ como dos manzanas mas tres bananos, usando las letras como unidades de medición y no como símbolos que pueden tomar diferentes valores: (dos veces el número de manzanas…). (Tomado de Cogollo, 2006; p.26)

Los demás estudiantes se limitaron a escribir una respuesta dada como expresión aritmética y no escribieron ninguna respuesta como expresión algebraica.

En la tercera parte de su investigación Cogollo (2006) analizó el sentido que los estudiantes atribuyen al concepto de variable, partiendo de la noción que ellos tenían acerca de esta. Para ellos la variable era una letra que se usaba en el álgebra y significaba "algo que cambia". Esto se puede evidenciar en las respuestas dadas por Jacinto, Tulio e Isidoro en sus entrevistas respectivamente:

> *"variable es como formas de cambiar… estados de ánimo, actos, etc." (Entrevista, Jacinto; 3/Dic./2004/).*
>
> *Es evidente que su respuesta está influenciada por el lenguaje coloquial; por ejemplo, en las frases como "el profesor tiene un estado de ánimo variable" o "en este aspecto influyen muchas variables" se notan las influencias externas y el inconveniente y la dificultad que a veces generan estas relaciones equívocas.*
>
> *Tulio e Isidoro expresaron de la variable:*
>
> *"es como que varía" (Entrevista, Tulio; 3/Dic./2004/).*
>
> *Que se podría llamar definición de diccionario. A sí mismo,*
>
> *"Como la palabra lo dice, la que varía, se encuentra o no se encuentra" (Entrevista, Isidoro; 3/Dic./2004/).*
> *"Señalo que son "definiciones de diccionarios", ya que se asemejan a ciertas definiciones que dan los diccionarios de "variable". Por ejemplo, el diccionario de la Real academia de la*

Lengua Española define variable así: que varía o puede variar. Inestable, constante, inconstante y mudable. Esta definición fue bastante común entre la mayoría de estudiantes, pero estas respuestas cambiaron de interpretación cuando se les sugirió desde el contexto matemático". (Cogollo, 2006, p. 30)

El autor observó que la noción que tenían los estudiantes acerca de variable estaba dominada por el lenguaje coloquial, entonces procedió a indagarlos bajo el contexto matemático y concluyó que desde esta perspectiva los estudiantes interpretaban la variable como una letra que se utiliza en álgebra, como lo expresaron Crisanto y Nacho en su entrevista:

"Pues, lo que yo creo que es variable son las consonantes que se utilizan, por ejemplo la x". (Entrevista, Tulio; 3/Dic./2004/).

"Variable es lo que uno trata de buscar en cada ejercicio…y entonces ¿eso a qué es igual? A esa variable, la letra". (Entrevista, Tulio; 3/Dic./2004/).

Considero aquí que los estudiantes asociaron la variable desde el contexto matemático como letra que se utiliza en el trabajo algebraico. En consecuencia, la variable, de aquí en adelante, para este estudio será considerada como una letra según lo expresado por los estudiantes. Pero entonces, ¿qué sentido le dan los estudiantes a las letras? (Cogollo, 2006, p.31).

En la cuarta parte de su trabajo Cogollo (2006) hace tres categorizaciones de la variable como resultado de lo observado en sus estudiantes, el análisis de la literatura y la reflexión del marco teórico.

Antes de definirlas algo que resaltó este autor fueron los aportes que los estudiantes hicieron cuando trataban de encontrarle un significado a la variable, "para la mayoría la palabra variable significa que "cambia", pero no el cambio que tiene en matemáticas sino el cambio en el contexto real, en otras palabras, es aquella cosa que no es permanente" (Cogollo, 2006, p. 29). Al enfrentarse a una situación en un contexto matemático estas respuestas cambiaron de interpretación, ya que sus interpretaciones en un lenguaje coloquial para un contexto real no era base suficiente para comprender el verdadero significado de la variable en el contexto matemático para el autor.

Al igual que en Cogollo (2006), en nuestro trabajo también será de suma importancia la manera en que se expresen los estudiantes en las entrevistas, cuando estén analizando fenómenos cambiantes propuestos en las diferentes situaciones experimentales.

Siguiendo con el análisis de este trabajo hemos querido resaltar algo importante: Cogollo (2006), concluyó que sus estudiantes interpretaban la variable como la letra que se utiliza en el álgebra.

Retomando una de las respuestas de las entrevistas:

> *"Pues, lo que yo creo que es variable son las consonantes que se utilizan, por ejemplo la x". (Entrevista, Tulio; 3/Dic./2004/).*

Debido a esto Cogollo (2006), se hace otra pregunta, entonces: ¿qué sentido le da los estudiantes a la letra? De ahí vienen sus tres categorizaciones de la variable:

La variable como "cosa": El autor resaltó la dificultad que presentaron los estudiantes al pasar de la aritmética al álgebra, y sus respectivas representaciones, la confusión se da cuando por ejemplo: en primaria trabajaron 10*m* como 10 metros y en álgebra 10*m* puede expresar diez veces un número no identificado.

"Indiscutiblemente, no cabe duda de que mis estudiantes le atribuyen a la variable la idea de algún objeto o cosa especifica dependiendo del contexto del problema, a observar: "Para reemplazar el valor numérico de algo, como patas, cocos, monedas, ect."(Entrevista, Isodoro; 3/Dic. /2004/)." (Cogollo, 2006, p.32).

Los estudiantes pensaron que la letra representaba cualquier "cosa", pero en casos donde era un "objeto" determinado, las letras para los estudiantes representaban ese "objeto", y por lo general la letra representativa de ese "objeto" era su inicial. Por ejemplo 3*p* + 3*m*, los estudiantes lo asociaban con (peras, pepas, melones, manzanas) y en el caso de "en un barril caben 3 melones" la expresión que comúnmente escribían era 1b=3m (Cogollo, 2006; p. 32).

La variable: "letra acompañante", escolta: Cogollo (2006), observó que sus estudiantes en algunos problemas identificaron la variable como una letra acompañante del número. "Es claro que aquí Isidoro le dio sentido a la variable como una decoración, y lo reafirmó cuando se le pregunta ¿Qué puede ser la *m* en esta expresión 10*m* + 20*m* = 30*m*? Algo que acompaña los números". (Entrevista, Isidoro; 3/Dic./2004), (Cogollo, 2004; p.38).

Aunque el resultado es cierto, solo fue una coincidencia puesto que los estudiantes pensaron que en el álgebra todo número debe ir acompañado de una letra, luego operaban aritméticamente y agregaban la letra, pero en otro caso como a la instrucción: "Añade 4 a 3*n*", la mayoría respondieron 7*n.*

La variable como "número escondido": Según el autor, es cuando sus estudiantes le dan sentido a la variable como una "incógnita". Cogollo (2006), concluyó que el estudiante piensa que una letra es determinada por un solo valor, como es el caso de la ecuación $x + 5 = 8$, pero no logran entender cómo la letra puede representar varios valores como en el caso de la igualdad:

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Para los estudiantes siempre que aparezca una letra, en la mayoría de los casos *x,* será una incógnita, esto se refleja en una de las respuestas a la entrevista hecha por el autor:

"Pues, lo que yo creo que es variable son las consonantes que se utilizan por ejemplo la *x,* y el valor que tiene que encontrar por cada letra" (Entrevista, Crisanto; 3/Dic./2004).

Cogollo (2006), plantea que parte de la confusión que tiene los estudiantes en esta categoría se debe mucho a la cantidad de palabras diferentes que utilizan los docentes al tratar de explicar sobre la variable y temas referentes a esta (variable dependiente e independiente, restricción, parámetros), estas expresiones comunes son:

x toma…, x viene a ser…, x es…, sea x…, si x es igual a…, el valor de x…, x representa…, x es cualquier…, x es un…

Al ser complicado la explicación de la variable y temas referentes a esta, Cogollo (2006), sugiere sinceridad con los estudiantes y admitir que es difícil ser preciso.

Estas dificultades de la letra como variable y el uso que los estudiantes dan de la variable en esta primera categorización de nuestros antecedentes, aporta ideas importantes para nuestro trabajo.

3.2 EL CONCEPTO DE VARIABLE DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA APOE

Una de las investigaciones importantes en nuestro trabajo, es la realizada por Gómez (2007); en su trabajo, el autor se centra en explicar qué tipo de construcciones y mecanismos mentales están asociados a la construcción del concepto de variable con base en el marco teórico ofrecido por APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas).

Gómez utilizó *Situaciones experimentales*: "…experimentos que fueron diseñados para la obtención de evidencias, a favor o en contra de la hipótesis. Estas tuvieron como marco fenómenos covariacionales como el descenso y ascenso del volumen de un líquido respecto al tiempo." (Gómez, 2007, p. 1). En estas situaciones el autor observó cómo los niños hacían la construcción del concepto de variable, los experimentos fueron diseñados para que los niños centraran su atención en dos variables.

Tomaremos como ejemplo la siguiente situación experimental, realizada con niños de 5 a 8 años:

> Descenso de un líquido: El objetivo de esta actividad fue a analizar el fenómeno de descenso de la altura de un líquido por medio de un embudo. Las variables a observar fueron el descenso del nivel del agua respecto al tiempo. Los instrumentos utilizados: un embudo de separación, un vaso de

precipitado, agua colorada (rosa), 6 fotocopias del embudo de separación, marcador, grabadora (Gómez, 2007; p.68).

En el procedimiento se le pidió a los estudiantes que observaran detenidamente lo que iba a suceder en el embudo de separación (lleno de agua color rosa) y se les indicó de hay una válvula en la parte inferior que controlaría la salida del líquido la cual caería al vaso de precipitado. Dicha salida del líquido se realizaría contando en intervalos de aproximadamente 5 segundos haciendo un total de 4 intervalos.

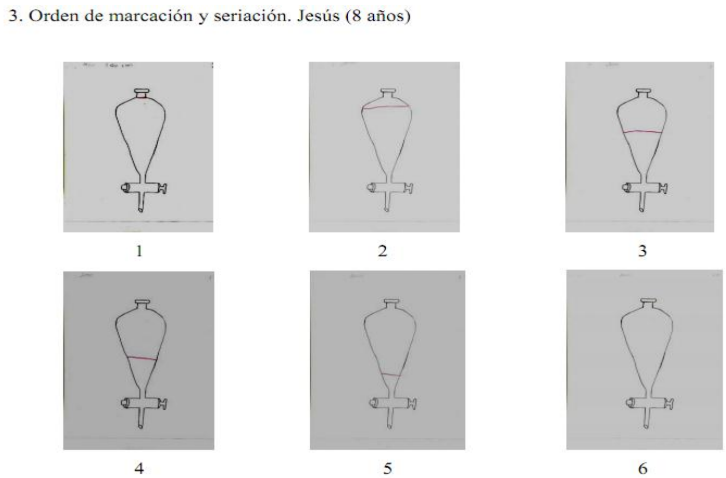
Para esto se le proporcionaron varios dibujos del embudo de separación donde cada estudiante hizo una marca de cada descenso del líquido, desde que estaba lleno hasta quedar vacío, en donde cada uno de ellos realizó un total de 6 dibujos. Al finalizar, se les pidió que realizaran la seriación de los dibujos (dados en desorden) de acuerdo a lo sucedido, así que cada estudiante hizo la seriación para luego ser confrontados en una pequeña entrevista por el docente.

Cada estudiante dio su punto de vista y sus respuestas a la entrevista con base en la situación experimental. Alguna de las repuestas que los niños expresaron fueron: “al principio estaba lleno” y después “se le fue saliendo el agua” y al final estaba “vacío”. (Gómez, 2007, p. 77). Los niños veían por escenas el descenso del líquido en el embudo y expresaban la seriación con palabras como “al principio, después y al final”.

De esta forma se manifiesta la relación de las dos variables y los niños establecen estadios de cambio, propios de la variación como son en este caso: al principio “estaba lleno” (estado inicial), después “se le fue saliendo el agua” (segundo estado) y al final “vacío” (estado final).

Jesús (8 años) mostro las siguientes respuestas:

Figura 1. Dibujos del embudo utilizados por Gómez (2007).



Gómez (2007), expresa en esta situación experimental desarrollada por Jesús: “La *idea de cambio* está presente en el niño al marcar en los dibujos los distintos niveles del líquido” (Gómez, 2007, p. 79).

Esta *idea de cambio* le da aportes importantes a Gómez en cómo identificar los procesos para formar el concepto de variable en el niño y por medio de una entrevista profundizar sobre las construcciones del estudiante dando aspectos realmente enriquecedores para empezar a formar en el niño los procesos que intervienen en la formalidad de un concepto de variable.

Ahora a continuación un breve cuestionario planteado por el autor a Jesús para fortalecer la situación experimental.

E: ¿Cómo estaba al principio?
J: Lleno.

E: ¿Qué le fue sucediendo al agua?

J: Se fue cayendo.

E: ¿Qué le pasó al agua, cambió o no cambió?

J: Cambió.

E: ¿Por qué? Explica.

J: Se fue este…vaciando al vasito. (Extracto de entrevista, tomado de Gómez, 2007).

Gómez (2007), comenta sobre los resultados de la entrevista que este estudiante manifestó centración en el fenómeno mismo de flujo, para él "se fue vaciando al vasito" o bien "se fue cayendo" refiriéndose al líquido. Además es notorio en sus respuestas que lo que cambia sucedió porque el agua estaba cayendo, es decir para él los cambios fueron causados por el vaciado del líquido. Esto nos hace suponer una relación de causalidad entre los cambios y sus causas usada por Jesús en sus respuestas.

En el experimento del descenso del líquido, la mayoría de los niños argumentaron que al principio "estaba lleno", después "se fue bajando" al final "vacía", "se acabó, se fue bajando" y "Estaba lleno, un poquito al medio y otra vez lleno", respectivamente. Estas respuestas dan a entender que la idea de variable está implícita y lleva a Gómez a analizar que teniendo como base dos entes cambiantes, se puede formar procesos que contribuyen al desarrollo del concepto de variable.

En nuestro trabajo Gómez (2007), aportó aspectos necesarios e importantes, como lo fueron las situaciones experimentales y las entrevistas donde el estudiante manifiesta su percepción de variable. Esto debido a las acciones propuestas por el autor y realizadas por los estudiantes; centración, casualidad y seriación, las cuales serán descritas como análisis anteriores en nuestra descomposición genética preliminar.

3.4 CONCLUSIÓN DE LOS ANTECEDENTES

En conclusión, podemos observar en los trabajos presentados por Kuchemann (1980), Trigueros y otros (1996), Cogollo (2006) y Ambrosio (2006), que gran parte de las dificultades que los estudiantes presentan en los diferentes usos de la variable en distintos contextos, se debe a la escasa asimilación del concepto de variable, lo que contribuye a la poca comprensión de temas referentes a esta. Lo anterior también se sustenta en que estos trabajos que se centran en la variable y sus usos, parten de la idea de que el concepto de variable tiene existencia en forma de símbolo, y sólo se hacen investigaciones en torno a su significado. Se preocupan por investigar las dificultades que se presentan en los alumnos al operar con símbolos en la transición de la aritmética al álgebra y la confusión acerca del significado de la letra. Pero aun así destacamos a lo largo de los antecedentes apuntes realmente importantes para nuestro trabajo, como las entrevistas hechas por cogollo (2006) y el trabajo de la variable como relación funcional de Trigueros y otros (1996).

A diferencia de lo anterior, Gómez (2007), no está interesado en el concepto de variable como símbolo, ni se centra en los usos que se le puede dar a esta en diferentes contextos, sino en los mecanismos mentales que favorecen el proceso de construcción de este concepto en los estudiantes con base en la teoría APOE. Observando que aunque dio resultados interesantes, los estudiantes presentaron dificultades cuando las ideas de cambio adquirieron un lenguaje matemático. Los aportes de Gómez (2007) para nuestro trabajo radican en el uso de herramientas didácticas y las entrevistas reflexivas.

Ahora, ambos puntos de vistas descritos son importantes, basados en el análisis de los antecedentes observamos que el concepto de variable como símbolo y sus usos, sin trabajar en un proceso adecuado de construcción, influye en la dificultad del estudiante al trabajar la variable en diversos contextos. De la misma manera al trabajar el concepto de variable como proceso sin tener en cuenta el símbolo y los usos de esta, hace que el estudiante más adelante presente dificultades en simbolizarla en un determinado lenguaje matemático.

4. MARCO TEÓRICO

En nuestro trabajo, el marco teórico se fundamenta en la teoría APOE. En este capítulo explicaremos sus principales características y componentes como los son: Las construcciones mentales (*acción, proceso, objeto y esquema*) y los mecanismos mentales (*Interiorización, Coordinación, Encapsulación, Generalización, Reversión).*

4.1 LA TEORÍA APOE

La Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) toma como marco de referencia epistemológico la teoría de Piaget. A partir de las ideas piagetianas acerca de la manera como se pasa de un estado de conocimiento a otro, en la teoría APOE se hace un modelo para hablar de la manera en que se construyen conceptos matemáticos. En sus inicios, la teoría fue elaborada por el doctor Dubinsky. Con el tiempo y con la colaboración de nuevos investigadores se ha probado en distintos contextos de las matemáticas. Hoy sigue creciendo y adaptándose a las necesidades de este importante campo de investigación a través de los trabajos de los miembros del grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematis Eduacation Community) y de otros investigadores que la utilizan (Trigueros, 2005).

Según Dubinsky: "Puesto que el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, es necesario construir acciones, procesos y objetos y organizarlos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas" (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 276). Es decir, la teoría APOE nos permitirá identificar las *acciones y procesos* que favorecen la construcción en nuestro caso particular, del concepto de variable en estudiantes de octavo y noveno grado.

Según la teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: acción, proceso y objeto. En estas construcciones se puede pasar de una a otra. Una persona puede pasar mucho tiempo en etapas intermedias e incluso estar en una etapa de construcción para ciertos aspectos de un concepto y en otra para otros. (Trigueros, 2005).

El mecanismo principal en la construcción de conocimiento matemático en esta teoría es, como en la de Piaget, la abstracción reflexiva. La abstracción reflexiva le permite a un individuo a partir de las acciones sobre objetos, inferir sus propiedades o relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamiento. Lo que implica, entre otras cosas, la organización o la toma de conciencia de dichas acciones, su distinción por sus contenidos, e insertar esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior. Este mecanismo se activa a través de acciones físicas o mentales que el sujeto hace sobre el objeto de conocimiento.

En la teoría APOE se parte de un análisis de los conceptos matemáticos previos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser enriquecidas en la medida en que un individuo enfrenta la solución de situaciones problemáticas. A este análisis se le conoce como *descomposición genética del concepto*. Inicialmente, son los investigadores quienes proponen un análisis teórico hipotético que describe las construcciones y los mecanismos mentales que un individuo puede realizar para construir un concepto determinado. Una vez se tiene este análisis hipotético, dicha descomposición se refina por el análisis de datos empíricos de modo que dé cuenta de una manera más real sobre cómo los individuos construyen los conceptos matemáticos (Trigueros, 2005).

> “*Una descomposición genética* parte del análisis de las construcciones que el sujeto hace conforme aprende el concepto matemático en términos de lo que es observable. Estas construcciones se caracterizan bajo los rubros de acción, proceso y objeto” (Trigueros, 2005; p.8).

4.1.1 Construcciones Mentales. Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas. Una acción es la transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa. La transformación se lleva a cabo como una reacción a una indicación que da información precisa sobre los pasos que se van a seguir. Si una persona sólo puede resolver problemas haciendo uso de dichas transformaciones, se dice que está en nivel acción (Trigueros, 2005).

> “Es importante recalcar que una persona con un nivel de comprensión más profundo de los conceptos matemáticos puede resolver un problema haciendo transformaciones cuando es apropiado; lo que la distingue es que no está limitada a seguir realizando acciones y posee una concepción acción” (Trigueros, 2005; p.9).

Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un proceso. El proceso es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos que el individuo percibe como externos. El individuo puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos, es decir, tiene más control sobre la transformación. Si una persona resuelve problemas y da muestras de utilizar transformaciones de tipo proceso, cuando el problema lo requiere, decimos que tiene una concepción proceso del concepto estudiado (Trigueros, 2005).

En nuestro trabajo estamos interesados en que los estudiantes realicen unas primeras acciones que evidenciarán un nivel acción. Seguidamente en la repetición de estas primeras acciones y otras los estudiantes adquirirán una concepción acción. Posteriormente al profundizar e interiorizar estas acciones definirán una concepción proceso.

Los conceptos se pueden construir de dos formas: una es encapsulando un proceso para que el individuo pueda hacer nuevas transformaciones sobre él. Es decir, cuando el individuo es consciente del proceso como una totalidad, puede pensar en él como un todo y es capaz de actuar sobre él, se dice que el individuo tiene una concepción objeto del concepto. La otra manera de construir un objeto ocurre cuando un individuo reflexiona y puede actuar sobre un esquema, de lo que hablaremos más adelante.

Cuando se utiliza la teoría APOE en la investigación o en el diseño de material didáctico, se empieza siempre haciendo una descomposición genética de los conceptos de interés. En ella se destacan las acciones y los distintos procesos, además de la forma de irlos estructurando para posibilitar la construcción de un objeto y para propiciar después la construcción de las relaciones entre dichas acciones, procesos y objetos que determinan un esquema. De esta manera se fomenta la construcción de los esquemas que se consideran necesarios para el aprendizaje de la parte de las matemáticas que se está trabajando. Esta primera descomposición genética es utilizada como base teórica para diseñar materiales que se emplean en el salón de clase. Se elaboran también instrumentos de investigación utilizados a lo largo del proceso de enseñanza y se hace una revisión de lo que sucede en la clase y del conocimiento de los alumnos después de haber seguido un proceso de instrucción. Los resultados de esta investigación se utilizan para mejorar la descomposición genética para que sea más exacta con la manera como realmente aprenden los estudiantes. Este procedimiento se repite, en principio, todas las veces que sea necesario, hasta que se considere que la descomposición en cuestión es muy cercana a la manera como un individuo puede comprender un concepto matemático (Trigueros, 2005).

> “En la teoría APOE, un esquema para una parte específica de las matemáticas se define como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas” (Trigueros, 2005; p.11).

Cuando un individuo se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos. Trigueros (2005), plantea que el uso del esquema en investigación y enseñanza es más reciente y se cuenta con menos referencias de su aplicación al análisis de la manera como los estudiantes construyen los conceptos matemáticos.

A continuación presentamos una descripción de las construcciones mentales que fundamentan la teoría APOE.

> *Acción:* Diremos que un estudiante posee una *concepción acción* de un concepto determinado si su entendimiento está limitado por la realización de acciones específicas motivadas por estímulos externos. Por ejemplo un estudiante con una concepción acción de función, relaciona el concepto con la acción de reemplazar ciertos valores dados en una fórmula para obtener otros valores,

por ejemplo en la expresión $f(x) = x^2 + 1$ (Roa-Fuentes, 2008; p. 25).

Proceso: Cuando el estudiante puede pensar y reflexionar en un determinado concepto sin actuar de manera directa sobre él, diremos que dicho concepto ha sido interiorizado por el estudiante en un proceso. En contraste con las acciones, los procesos se perciben como algo interno donde el individuo tiene el control y está en capacidad de describir el concepto sin actuar de manera directa sobre él (Roa-Fuentes, 2008; p. 25).

Objeto: cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso particular, tiene consciencia de dicho proceso como un todo y puede identificar las transformaciones (acciones o procesos) que puede aplicar sobre él, diremos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. Y por tanto el individuo posee una *concepción objeto* del concepto. En esta concepción el mecanismo de desencapsular es tan importante como el de encapsular; mediante este mecanismo un individuo puede regresar al proceso por el cual generó un determinado concepto (Roa-Fuentes, 2008; p. 26).

Esquema: es una colección de procesos y objetos. Esta colección puede ser más o menos coherente, pero el estudiante la utiliza para organizarse, comprender y crear un sentido del fenómeno o conceptos observados (Roa-Fuentes, 2008; p. 26).

De estas construcciones, para el desarrollo de nuestro trabajo enfatizaremos en las acciones de los estudiantes, es decir, las transformaciones que realizan resultado de las indicaciones o estímulos externos, lo cual nos dará información precisa sobre los pasos que pueden generar y los procesos que pueden interiorizar.

4.1.2 Mecanismos Mentales. Presentamos una descripción teniendo como referencia los trabajos realizados por RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), liderado por Ed Dubinsky (Tomado de Roa-Fuentes, 2008; p. 32).

Interiorización: Piaget caracterizó este mecanismo como la traducción de una sucesión de acciones materiales a un sistema de operaciones interiorizado. Dubinsky resume este mecanismo como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno. Mediante este mecanismo es posible que una acción sea transformada en un proceso (Roa-Fuentes, 2008; p. 32).

Coordinación: Este mecanismo fue descrito por Piaget como la coordinación general de acciones, refiriéndose a todas las maneras de usar una o más acciones para construir nuevos objetos o acciones. Mediante este mecanismo dos o más procesos pueden coordinarse para generar nuevos procesos (Roa-Fuentes, 2008; p. 33).

Encapsulación: Este mecanismo es considerado como el más importante para la construcción del conocimiento matemático y consiste básicamente en la conversión de un proceso (una estructura dinámica) en un objeto (una construcción estática) (Roa-Fuentes, 2008; p. 33).

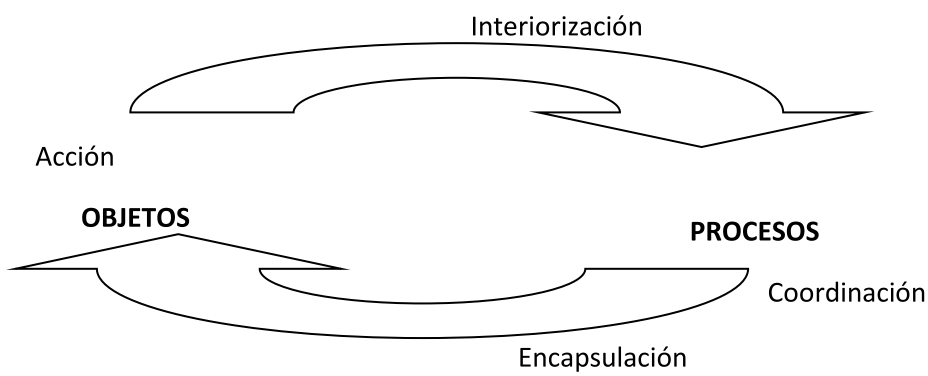
Generalización: Este mecanismo está relacionado con la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en un contexto distinto, está determinado por su capacidad para determinar los alcances de sus construcciones. En este mecanismo los esquemas no cambian, pero otros objetos pueden ser asimilados por un esquema para ser contextualizados en otros contextos (Roa- Fuentes, 2008; p. 33).

Reversión: Este mecanismo fue agregado por Dubinsky como un caso particular de abstracción reflexiva. Consiste básicamente en desencapsular un objeto o revertir el mecanismo que lo generó. De esta manera un individuo puede regresar sobre el proceso siempre que lo requiera (Roa-Fuentes, 2008; p. 33).

Para el desarrollo de nuestro trabajo también nos apoyaremos en uno de los mecanismos mentales presentados por la teoría APOE: la *interiorización*, ya que este mecanismo permitirá a los estudiantes interiorizar *acciones* y formar *procesos* que favorezcan la construcción del concepto de variable en estudiantes de octavo y noveno grado. *La interiorización* de las acciones en nuestro caso es el elemento enriquecedor que contribuirá a refinar la *descomposición genética* del concepto de variable.

En general el siguiente gráfico muestra la estructura de un esquema e identifica las construcciones que influyen.

Figura 2. *Construcciones y Mecanismos (Dubinsky, 1991).*

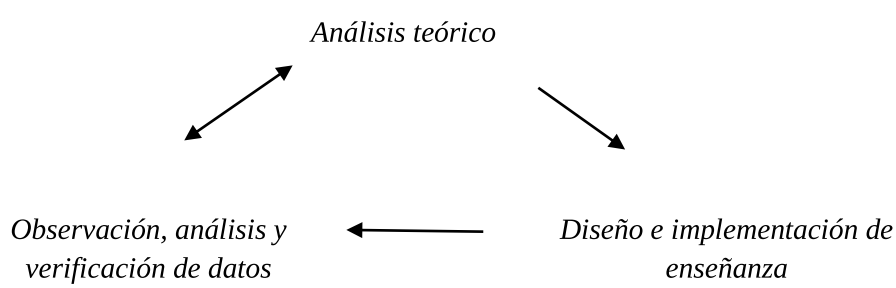


Las acciones son parte fundamental para el desarrollo de un concepto, ya que estas acciones se realizan sobre objetos matemáticos dentro del ámbito de experiencia del estudiante. Conforme una acción se *interioriza* a través de una secuencia de repetición de la acción y el reflejo de la misma, la acción ya no se maneja por influencias externas, pues se vuelve una construcción interna llamada *proceso*.

4.2 CICLO INVESTIGATIVO DE LA TEORÍA APOE.

La teoría APOE proporciona un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: Análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de datos.

Figura 3. Esquema del Ciclo de Investigación de la Teoría APOE (Asiala et al., 1996).



Este ciclo permite obtener una descripción más detallada y cercana a los conceptos matemáticos mediante su repetición. Así tanto el análisis teórico como los instrumentos se mejoran como resultado del análisis de los datos empíricos obtenidos en el desarrollo de la tercera componente.

- *Análisis teórico*: Este ciclo de investigación parte de un análisis teórico sobre el concepto matemático que es objeto de estudio, en donde con base en el análisis de los antecedentes, literatura y en la experiencia personal de los investigadores se diseña una *descomposición genética* del concepto en estudio

(Tomado de Roa-Fuentes, 2008; p. 35). En la teoría APOE se parte de un análisis de los conceptos matemáticos previos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser enriquecidas en la medida en que un individuo enfrenta la solución de situaciones problemáticas. A este análisis se le conoce como *descomposición genética del concepto*. (Trigueros, 2005).

- *Diseño y aplicación de instrumentos*: Definida una *descomposición genética* preliminar del concepto en estudio, es necesario validar con datos empíricos los aspectos considerados teóricamente. Por tanto, es necesario diseñar y aplicar instrumentos que permitan determinar si en la realidad los estudiantes poseen las habilidades que teóricamente se ha considerado.

- *Análisis y verificación de datos*: Con los instrumentos de diseño y aplicación se obtienen datos empíricos sobre si las habilidades, conocimientos previos y las evidencias aportan al objetivo de la investigación. Al ser analizados estos datos de una forma más profunda, nos llevará a la discusión si la descomposición genética preliminar es viable, ya que éstos permiten analizar qué elementos no han sido considerados siendo realmente importantes o qué construcciones mencionadas por el trabajo no se ven claramente en los estudiantes.

5. ANÁLISIS TEÓRICO, INTENCIÓN DE LOS INSTRUMENTOS Y ANÁLISIS PRELIMINAR SOBRE LAS CONSTRUCCIONES

La metodología que implementaremos en el desarrollo de nuestro trabajo se fundamenta en el ciclo investigativo de la Teoría APOE.

Análisis teórico: Esta componente parte de un análisis teórico sobre el concepto de variable, en donde basándonos en los antecedentes, en nuestra experiencia personal como docentes y en los diferentes aspectos a tomar en nuestro trabajo, diseñamos una *descomposición genética* del concepto de variable, considerada como un análisis preliminar. De este modo en conjunto con algunos elementos teóricos de la teoría APOE hacemos un análisis de habilidades y conceptos matemáticos previos de estudiantes de octavo y noveno grado en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser enriquecidas en la medida en que un individuo enfrenta la solución de situaciones problemáticas. A este análisis se le conoce como *descomposición genética del concepto*. (Trigueros, 2005).

Diseño y aplicación de instrumentos: Definida la *descomposición genética* preliminar del concepto de variable, es necesario establecer qué tan viable es el análisis realizado. Es decir, si el camino descrito hace que los individuos se acerquen al concepto matemático. Los instrumentos diseñados y posteriormente a aplicar, van a permitir determinar si el modelo de pensamiento que pretendíamos de cada estudiante es adecuado y permitirán analizar los procesos que favorecen la construcción del concepto de variable.

Los instrumentos que aplicaremos con los estudiantes estarán dados por situaciones experimentales, talleres con preguntas reflexivas y una entrevista semi-estructurada relacionados con ideas y razonamientos de cambio. Estos fenómenos de cambio a observar nos permitirán identificar habilidades en los estudiantes, obtener evidencias y respuestas que nos darán aportes en nuestro objetivo.

Análisis y Verificación de datos: Gracias a las situaciones experimentales como instrumentos de diseño, a las actividades basadas en estas situaciones y a la entrevista semi-estructurada se obtendrán datos empíricos y evidencias necesarias para nuestro trabajo.

5.1 ANÁLISIS TEÓRICO

Este primer componente del ciclo investigativo parte de una descomposición genética preliminar del concepto de variable. Vamos a describir esta descomposición y un análisis anterior.

5.1.1 Análisis Anteriores. En este análisis teórico queremos resaltar dos aportes importantes de los antecedentes: en primer lugar la variable como *relación funcional* descrita por Trigueros y otros (1996) y en segunda instancia tomaremos como punto de referencia algunas herramientas y características de la descomposición genética presentada por Gómez (2007).

La variable como *relación funcional*. Por parte de Trigueros y otros (1996).

En este trabajo se observa la variable como relación funcional, concebida como la correspondencia punto por punto entre dos conjuntos de valores y la variación interdependiente de las variables. El manejo competente de este uso de la variable implica la capacidad de:

Reconocer las relaciones funcionales (tanto en la tabulación como en la representación gráfica) e interpretar las variables, dependiendo de la naturaleza del problema.

Manipular las variables para determinar los valores o intervalos de variación que cada una de ellas puede tomar en términos de la otra; *simbolizar* situaciones que involucran una *relación funcional* (Trigueros y otros, 1996; p. 353).

El uso adecuado de la variable como relación funcional busca desarrollar ítems de interpretación, simbolización y manipulación. Esto permite observar si los estudiantes *interpretan* correctamente la variable involucrada, y así comprobar si tienen la capacidad para *simbolizar* una situación en la que aparece cierta caracterización de la variable y por último ser capaces de *manipular* las variables que aparezcan en una expresión (Trigueros y otros, 1996).

Nos interesa cómo los autores, para tener una información más amplia acerca de la compresión de la variable, se enfocaron en la variable como *relación funcional*, incluyendo en su investigación ítems que requerían de graficación, ya que la posibilidad de representación de la información que proporciona una fórmula o una tabla de datos mediante una gráfica es de suma importancia en la comprensión de la variable (Trigueros y otros, 1996). Los ítems utilizados por Trigueros y otros (1996) y la forma de ver la variable como relación funcional, aportan para el desarrollo de *acciones* en nuestros estudiantes.

Otro aporte importante que queremos resaltar es el de Gómez (2007). Antes de describir nuestra descomposición genética preliminar del concepto de variable, analizaremos algunas herramientas y características presentadas por él.

Gómez (2007), en su trabajo analiza la variable como proceso. El camino que señala en su análisis lleva a los niños a formarse una *idea de cambio,* que es la base para el desarrollo de la noción de variable en niños de 5 a 8 años. Este camino se describe por medio de *acciones* tomadas de Piaget e Inhelder (1981) y adaptadas por Gómez (2007) para el concepto de variable, a continuación presentamos este análisis:

Centración: Es la acción donde el sujeto, del total de variables posibles en un evento, centra la atención en algo. Es decir, centrar toda la atención en un evento específico de un suceso (Gómez, 2007, p. 1).

Causalidad: Es una consecuencia de la acción. La causalidad es una explicación de los hechos encontrados a partir de la acción de centración. Es una forma de organización intelectual que resulta de filtrar las consecuencias efectivas de todas las manipulaciones que hace el niño en las situaciones experimentales (Gómez, 2007, p. 1).

Seriación: Es una actividad que relaciona un evento respecto al tiempo, estableciendo estadios del suceso (Gómez, 2007, p. 2).

Gómez (2007), resalta dos elementos importantes en el proceso que favoreció la construcción de la noción de variable en niños de 5 a 8 años:

Para Gómez, este *primer elemento del proceso* ocurre cuando se relacionan las tres acciones mencionadas: *la centración, la causalidad y la seriación.* Gómez (2007) esperaba que la mayoría de los niños obtuvieran una *seriación* correcta, es decir, en el caso del descenso de un líquido, organizar los dibujos de los embudos marcados con el nivel de agua, de mayor a menor nivel según el *estadio* (etapa o fase de un proceso). Lo anterior sería posible si los niños centraran su atención (*centración)* en el flujo del agua, ya que se suponía que sus respuestas a los cuestionamientos se basarían en ello. Luego en las entrevistas, los niños al explicar las causas de los cambios en los estadios por el vaciado del líquido, realizarían la acción *causalidad*.

El *segundo elemento del proceso* que consideró Gómez, fueron los argumentos que dieron los niños al pedirles que explicaran con sus propias palabras lo sucedido en cada situación experimental. En el caso del descenso de un líquido los niños argumentaron mediante expresiones como: “estaba lleno”, después “se fue bajando”, al final “vacía”, “se acabó, se fue bajando”; y “Estaba lleno, un poquito al medio y otra vez lleno”. Cuando los niños utilizaban los términos “antes”, “después”, “al final”, esta es manifestación de la percepción de variable, ya que estos términos son los elementos primordiales de la variación. Los usos de estos términos mencionados fueron para el autor los que contribuyeron a desarrollar la noción de variable en niños de 5-8 años.

Gómez concluyó que los niños de 5-8 años empiezan a desarrollar una leve *idea de cambio* como resultado de los dos elementos que fueron parte de este análisis.

5.1.2 Una Descomposición genética preliminar del concepto de Variable. Nos interesa presentar una descomposición genética del concepto matemático en estudio, en nuestro caso la variable. Para la construcción de la descomposición genética haremos uso de las construcciones mentales: acciones y procesos; y por tanto del mecanismo mental de interiorización.

De acuerdo con la teoría APOE, cuando un individuo reflexiona sobre una acción esta puede ser *interiorizada* en un proceso (descripción de las acciones sin necesidad de repetirlas). Los estudiantes deberán partir de acciones; en nuestro caso estas acciones estarán determinadas por los talleres basados en las situaciones experimentales y características del uso de la variable como *relación funcional*. Las acciones permitirán la construcción de *ideas intuitivas de cambio*, que al ser interiorizadas formarán en los estudiantes *razonamientos de cambio*. Dubinsky (1991) expone: “que la descomposición genética refleja la manera en que un individuo en particular analizaría el concepto para formular un método de comprensión”. Esperamos que las acciones identifiquen en los estudiantes ese método de comprensión para acercarse al concepto de variable.

Acciones: Las acciones que consideramos que los estudiantes pueden llegar a ejecutar son: Toma de datos, Analizar Magnitudes, Tabular Datos, Graficar, Analizar Comportamientos y Analizar Variables.

El término magnitud hace referencia a las magnitudes físicas a observar en las situaciones experimentales. Para nuestro trabajo: “Una magnitud física es una propiedad o cualidad de un objeto o sistema físico a la que se le pueden asignar distintos valores como resultado de una medición cuantitativa. Existen magnitudes básicas y derivadas que constituyen ejemplos de magnitudes físicas como la masa, la longitud, el tiempo, el peso, la densidad, la temperatura, la velocidad, la aceleración. De aquí se desprende la importancia fundamental del instrumento de medición en la definición de la magnitud” (Monsó, 2008).

En resumen, magnitud es toda propiedad de los cuerpos que puede ser medida y esta se cuantifica usando un patrón definido en la magnitud, tomando como unidad la cantidad de esa propiedad que posea el objeto patrón. Por ejemplo, para la longitud del metro el patrón es 1. En el desarrollo de la actividad los docentes harán aclaración a los estudiantes acerca de qué se entenderá por magnitud y medida de una magnitud. Puesto que la magnitud es la propiedad, pero la medida es cuánto de eso tiene la magnitud. Por ejemplo, la longitud es una magnitud, pero 20 metros es una cantidad o medida.

En nuestra acción *Analizar Variables*, no se va a mencionar la palabra variable en el transcurso de la observación de las situaciones experimentales ni en los talleres. Esta acción simplemente indica la naturaleza cambiante de la variable cuando varían las medidas de alguna magnitud.

Toma de datos: Esta acción estará enfocada en el momento en que los docentes estén realizando cada una de las situaciones experimentales; solo es necesario registrar medidas de una sola magnitud debido a que esta depende de las medidas de otra magnitud que serán dadas en el correspondiente taller de la situación experimental. Se les pedirá a los estudiantes que registren los valores de esta magnitud en una hoja de trabajo en blanco.

Analizar Magnitudes: Los estudiantes tendrán los datos de una magnitud, posteriormente el diseño de los talleres los llevará a identificar todas las magnitudes observadas en cada situación experimental. De estas magnitudes los estudiantes identificarán cuáles de ellas entran en juego para el desarrollo del taller y cuáles no.

Tabular: En cada actividad se presentará una determinada situación experimental en la que los estudiantes podrán observar un fenómeno de cambio y a partir de este podrán registrar los valores de una primera magnitud observada. Se espera que los datos obtenidos de las medidas de la magnitud observada en la situación experimental sean correctamente registrados en la tabla. Posteriormente uno de los docentes dictará las medidas de una segunda magnitud.

Pretendemos que los estudiantes analicen que en la tabulación de datos de cada una de las situaciones experimentales, se puede observar una correspondencia uno a uno y un importante cambio en las medidas de las magnitudes. Se espera que los estudiantes por primera vez noten una leve *idea de cambio*, la cual será una base enriquecedora para nuestro trabajo.

Graficar: Pretendemos que los estudiantes propongan un plano cartesiano y una ubicación correcta de las medidas de las magnitudes sobre los ejes. Esto permitirá a los estudiantes localizar parejas ordenadas como nube de puntos que se acerquen a una curva.

Los estudiantes de octavo y noveno grado no tienen claro los conceptos de función lineal, función cuadrática, función exponencial o más aún del concepto formal de función. Del mismo modo, para ellos la representación de una función en un plano cartesiano no es clara. Aun así desde sus estudios iníciales los estudiantes han tenido un acercamiento con el plano cartesiano. Lo que pretendemos con la nube de puntos en el plano es analizar la naturaleza cambiante entre las medidas de dos magnitudes, es decir, que ellos expresen una lectura coherente de los datos. Por ejemplo, si dicha nube de puntos muestra una distribución creciente hacia el noreste del primer cuadrante, ellos podrán identificar que las medidas de las magnitudes tienen una correlación directa, es decir, cuando las medidas de la primera magnitud aumentan las medidas de la segunda también aumentan.

En estos grados de escolaridad los estudiantes han profundizado muy poco en lo que concierne a las representaciones gráficas de relaciones matemáticas. Sin embargo, debido al estudio de la ecuación de la recta y su gráfica en clases de álgebra hace que las representaciones de puntos sobre el plano sea para ellos casi siempre una recta. Es por esto que los estudiantes están familiarizados con la representación gráfica sin haberla estudiado formalmente. De ahí que nos interesa analizar las percepciones de cambio que ellos observarán en una distribución bidimensional de una nube de puntos y no tanto el estudio formal de representaciones gráficas de funciones.

Analizar Comportamientos: Este tipo de acción es particular de la actividad que se esté realizando. Los estudiantes observarán la gráfica y tendrán la capacidad de explicar el porqué del comportamiento de las medidas de las dos magnitudes observadas y su respectiva variación. La acción buscará que los estudiantes clasifiquen la relación que tienen las medidas de las magnitudes entre ellas. Es decir, deben explicar con sus propias palabras si las medidas de las magnitudes tienen una correlación directa o inversa.

En esta acción cuando hablamos de explicar una correlación nos referimos a establecer la relación o dependencia que existe entre las medidas de dos magnitudes, las cuales intervienen en una distribución bidimensional en el plano. En otras palabras, determinar si los cambios en las medidas de una magnitud influyen en los cambios de la otra. En caso de que esto suceda, diremos que las medidas de las magnitudes tienen una correlación directa o inversa. Una correlación directa se da cuando al aumentar las medidas de una magnitud las medidas de la otra también aumentan o cuando al disminuir las medidas de una magnitud las medidas de la otra también disminuyen. Una correlación inversa se da cuando al aumentar las medidas de una magnitud las medidas de la otra disminuyen o viceversa.

Analizar Variables: En esta acción pretendemos que el estudiante se cuestione e identifique la razón por la cual las medidas de una magnitud cambian respecto a otra y sea un factor determinante para comprender algunas características de la naturaleza de la variable. Se espera con la acción que los estudiantes observen que a partir de los cambios que experimentan las medidas de una primera magnitud, siempre se afectan las medidas de la segunda magnitud. Aquí Los estudiantes deben llegar a comprender y explicar las características de dependencia e independencia que posee la variable como relación funcional.

Hacemos la aclaración que en esta acción no se va a mencionar por parte de los docentes la palabra variable. Este análisis de las medidas en las magnitudes y las acciones de cada estudiante van a hacer que ellos se familiaricen con algunas características de la variable, sin actuar sobre su definición o concepto.

Interiorización.

Esperamos que los estudiantes en las acciones *Toma de Datos, Analizar Magnitudes, Tabular* y *Graficar* desarrollen un *nivel acción* (propuesto en la Teoría APOE) del concepto de variable, esto será evidenciado cuando adquieran una leve *idea de cambio*. Posteriormente en la acción *Analizar Magnitudes,* esperamos que los estudiantes con sus explicaciones del comportamiento de las medidas de las magnitudes y su correlación directa o inversa, formen una *concepción acción* (propuesto en la Teoría APOE) del concepto.

La dependencia de lo específico o acciones específicas repetitivas sin reflexionar en ellas, hacen que los estudiantes asimilen una leve *idea de cambio*, pero sólo estarían enfocados en acciones específicas que dan muy poco aporte al acercamiento del concepto de variable. Como la idea es pasar de esas acciones específicas a un proceso general, deseamos ir más allá de una leve *idea de cambio*, como lo pretendía Gómez (2007) en el análisis previo. Cuando los estudiantes interioricen las acciones en un proceso describirán características de la variable que estarán relacionadas con el contexto de cada situación.

En la realización de acciones los estudiantes observarán que se cumplen para algunos casos específicos presentados en las situaciones experimentales. Pero en el momento en que los estudiantes reflexionen y cuestionen las acciones específicas en el desarrollo de los talleres esperamos que formen un proceso donde ya no ven casos específicos, sino adquieran un proceso general. En dicho proceso pretendemos que los estudiantes ya no dependan de acciones específicas.

El proceso general que esperamos que interioricen los estudiantes, es una señal de que ellos han logrado poseer una *concepción proceso* del concepto. Entonces la pregunta es: ¿Cuál es la señal evidente de que los estudiantes han interiorizado las acciones en un proceso general, como evidencia de una *concepción proceso* más adecuado?

Una de estas evidencias la aportarán los estudiantes cuando la interiorización de acciones les permita desarrollar *razonamientos de cambio*. Es decir, para nuestro trabajo, esta no es solo la capacidad de percibir la *idea de cambio* sino también de interiorizar en ella, siendo capaz de deducir la correlación directa o inversa y las características de dependencia e independencia entre las medidas de dos magnitudes. Esta evidencia dará aportes importantes para uno de nuestros objetivos como lo es analizar el uso que el estudiante da a la variable a través del diseño y ejecución de actividades en el aula. En nuestro caso, el uso que pretendemos que los estudiantes analicen es el de la variable como relación funcional.

Otra de las evidencias de la interiorización de acciones se dará cuando los estudiantes durante el desarrollo de los talleres, busquen una posible simbolización del fenómeno observado en cada situación experimental con ayuda de las correspondientes tabulaciones, gráficas y el análisis de datos y magnitudes. Ahora bien, cuando en los respectivos talleres de cada situación se refiere a una posible expresión algebraica estamos conscientes de que los estudiantes tienen pocas herramientas para modelar situaciones y no poseen conocimientos acerca de aproximación, correlación lineal y estimación. Sin embargo, nuestras situaciones experimentales fueron diseñadas de tal manera que los estudiantes logren visualizar el tipo de proporción que existe entre las magnitudes, permitiendo así que ellos se acerquen a una posible modelación.

Un posible camino que esperamos que sigan los estudiantes en la descomposición genética preliminar es:

Con la correspondencia uno a uno en la tabla de datos y una lectura coherente de la representación gráfica, los estudiantes expresarán la correlación directa e inversa y las características de dependencia e independencia entre dos magnitudes (*razonamientos de cambio*), seguidamente de una posible *simbolización* del fenómeno de cambio. Estos razonamientos y la simbolización serán evidencias de una *concepción proceso* que favorece la construcción del concepto de variable.

5.2 DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI DE LOS INSTRUMENTOS

A continuación presentamos los elementos que hacen parte del diseño y aplicación de instrumentos.

Situaciones Experimentales: Nuestro diseño se basa fundamentalmente en *situaciones experimentales*, las cuales fueron diseñadas para la obtención de evidencias, a favor o en contra de nuestra descomposición genética preliminar del concepto de variable. Estas situaciones en las cuales participarán los estudiantes fueron diseñadas considerando fenómenos de variación con dos factores cambiantes, tales como el tiempo de desagüe del agua a medida que aumenta de diámetro el orificio de desagüe de una serie de tapas en un embudo adaptable, aumento del alargamiento de un resorte a medida que aumenta el peso de objetos redondos y la disminución del alargamiento de un resorte a medida que disminuye el peso de objetos redondos. Las situaciones experimentales con dos factores cambiantes tienen como objetivo, observar las percepciones de los estudiantes en fenómenos de cambio, para su posterior análisis, manipulación y argumentación.

Talleres basados en las Situaciones Experimentales: En segundo lugar, en nuestro diseño están los *talleres* con preguntas claves basadas en las situaciones experimentales, donde cada estudiante será cuestionado y analizará los fenómenos de cambio en dichas situaciones. La Teoría APOE expresa que la repetición de acciones específicas (*concepción acción*) al ser analizadas forma en los estudiantes una interiorización (*concepción proceso*). Por esta razón los talleres tendrán algunas preguntas similares debido al objetivo común de repetir acciones e interiorizar para formar un proceso (descripción de las acciones sin necesidad de repetirlas).

Entrevistas Semi-estructuradas: Las entrevistas *semi-estructuradas* constan de preguntas ya estructuradas pero a medida que se interactúa con el estudiante y según sus respuestas se van adoptando nuevas preguntas. De estas entrevistas podemos extraer datos y argumentos importantes sobre sus razonamientos a medida que transcurre el desarrollo de los talleres.

Entonces, para nuestro trabajo pretendemos obtener información significativa que nos permita corroborar nuestra descomposición genética preliminar. Consideramos que tres talleres iníciales para cada situación experimental y entrevistas semi-estructuradas en algunos momentos del desarrollo de cada actividad, son las herramientas que nos permitirán obtener tal información de los estudiantes.

Se realizarán tres actividades, cada una de las cuales se distribuirá en dos fases:

Primera fase: Observación de la Situación Experimental y
Toma de datos.

Segunda fase: Desarrollo del taller acompañado de Entrevistas semi-estructuradas.

Se presenta a continuación el análisis a priori de las tres actividades.

El análisis a priori de los talleres se basa en una descripción de lo que pretendemos que los estudiantes contesten en cada una de las preguntas. El desarrollo que presenten los estudiantes de los talleres permitirá identificar las habilidades que han adquirido en sus clases de matemáticas, para así poder constatar las acciones de nuestra descomposición genética preliminar del concepto de variable: *Tabular, Analizar Magnitudes, Graficar, Analizar Comportamientos y Analizar Variables.* Por lo anterior las descripciones de cada taller se harán en términos de las acciones de la descomposición genética. Finalizando con el análisis de cada taller en general.

6. DISEÑO Y ANÁLISIS A PRIORI DE LAS SITUACIONES EXPERIMENTALES.

6.1 SITUACIÓN EXPERIMENTAL I

“Tiempo de evacuación del agua por un embudo respecto al diámetro del orificio de desagüe del mismo”.

Objetivo: Analizar el fenómeno de cambio de tiempo de evacuación del agua de un embudo respecto al diámetro del orificio de desagüe del mismo.

Las variables a observar: El tiempo del descenso del agua y el diámetro del orificio en cada tapa del embudo adaptable.

Instrumentos: Un embudo adaptable de separación, cinco tapas de diferente orificio de desagüe de menor a mayor diámetro respectivamente, un vaso, agua y un cronómetro.

Procedimiento:

- Se le pide a cada estudiante que observe detenidamente lo que va a suceder en el embudo adaptable (lleno de agua) con la primera tapa de orificio de menor diámetro y se le indica que observe la salida del agua hasta caer en el vaso.

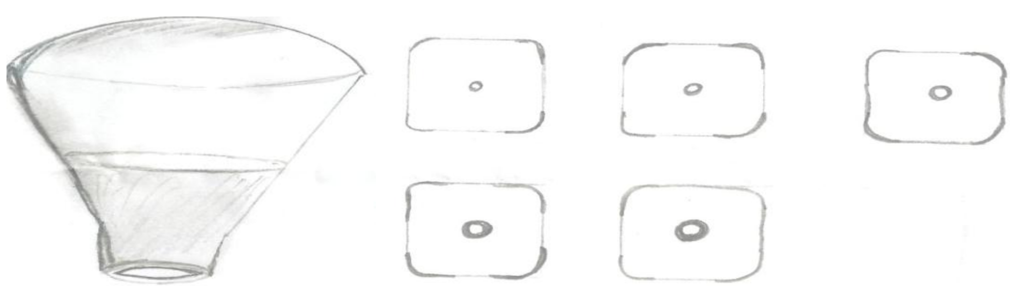
- Durante la salida del agua uno de los docentes registrará el tiempo con un cronómetro desde que sale el agua hasta que haya sido evacuada totalmente del embudo.

- Este registro será mostrado y dictado por los docentes a los estudiantes que lo anotarán en una hoja de trabajo.

- Los docentes cambiarán la tapa del embudo con un orificio de mayor diámetro, donde también será tomado el tiempo de desagüe por uno de los docentes y así sucesivamente con el resto de las tapas con orificio de menor a mayor diámetro.

- Estos datos posteriormente serán llevados como registros para el desarrollo del taller.

Figura 4. Dibujo del embudo adaptable y las cinco tapas de diferente diámetro (Situación experimental 1).



6.1.1 Taller I: Descripción y análisis:

Objetivo: Analizar el comportamiento del tiempo de evacuación del agua de un embudo respecto al diámetro del orificio de desagüe, como una relación de dos magnitudes inversamente correlacionadas.

Descripción basada en las acciones: Toma de Datos, Analizar Magnitudes, Tabular, Graficar, Analizar Comportamientos y Analizar variables.

Pregunta 1: ¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental?

Toma de Datos: En la situación experimental cada estudiante en una hoja de trabajo registrará el tiempo de desagüe del agua del embudo donde fueron adaptadas tapas con orificios de diferentes diámetros. Este tiempo es tomado por uno de los docentes con cronómetro en mano. Los valores de esta magnitud serán analizados en esta pregunta ya que por obvias razones estos valores representan una de las magnitudes que entran en juego para el desarrollo del taller.

Analizar Magnitudes: En el primer punto, aunque parece una pregunta sencilla, identificar magnitudes dentro de un problema, creemos será una dificultad en algunos de los estudiantes. En esta pregunta, esperamos que los estudiantes escriban todas las magnitudes que ellos crean que observaron en la situación experimental.

Los estudiantes deberán identificar que el diámetro del orificio de cada tapa del embudo adaptable necesariamente tuvo que sufrir alguna modificación, ya que el nivel de agua es el mismo en el embudo cuando se le cambiaron sucesivamente las cinco tapas, pero en cada momento el tiempo de evacuación del agua va a ser menor y la velocidad de desagüe va aumentar. Aquí los estudiantes observarán que el tiempo será cada vez menor cuando la tapa con orificios de diferente diámetro se cambia. Lo anterior los llevará a analizar que las magnitudes en juego son: el diámetro del orificio de desagüe de las tapas del embudo cuyas medidas estarán dadas en centímetros, y el tiempo de desagüe cuyas medidas estarán dadas en segundos.

Esperamos que los estudiantes desprecien la magnitud velocidad del agua al momento del desagüe, argumentando que ésta no influye para el desarrollo del taller.

Pregunta 2: Completa la tabla de datos según lo observado en la situación experimental.

Tabla 1. Modelo de la tabla de datos de la segunda pregunta del Taller 1.

Diámetro del orificio de desagüe	Primer diámetro	Segundo diámetro	Tercer diámetro	Cuarto diámetro	Quinto diámetro
Tiempo de evacuación del agua					

Tabular: En nuestra segunda pregunta, los estudiantes completarán los datos obtenidos del tiempo de desagüe en cada uno de los embudos de la situación experimental junto a los datos del diámetro de orificio de las tapas.

Gracias a los datos registrados pretendemos que cada estudiante observe la correspondencia uno a uno de los datos y forme una *leve idea de cambio* en cada registro. Aquí se especificará por parte de los docentes que el diámetro del orificio de desagüe estará dado en milímetros y el tiempo de evacuación del agua en segundos.

Pregunta 3: Representa gráficamente las magnitudes observadas.

Graficar: En nuestra tercera pregunta, esperamos que los estudiantes grafiquen en la hoja de trabajo los puntos (parejas ordenadas) de los datos obtenidos en la tabulación y que la correspondiente nube de puntos se acerque a una curva. Aquí nos interesa la lectura coherente que hagan de los datos en la gráfica, con la cual puedan observar el comportamiento de las magnitudes.

Los estudiantes tendrán que proponer un plano cartesiano y ubicar los puntos en este. Ellos observarán el comportamiento de las medidas de las magnitudes en la gráfica como base para resolver las acciones subsiguientes, ya que pretendemos que la representación en el plano muestre a cada estudiante la correlación inversa entre las medidas de la magnitud tiempo de desagüe y diámetro del orificio de las tapas.

Pregunta 4 ¿Qué sucede al hacer cada vez más grande el orificio de salida del agua? ¿Cómo relacionas el comportamiento de estas magnitudes?

Analizar Comportamientos: En nuestra pregunta 4, los estudiantes observarán tanto la tabla de datos como la gráfica en el plano cartesiano. Al responder la pregunta pretendemos que los estudiantes se den cuenta de la relación que existe entre las medidas de las dos magnitudes a medida que estas cambian. De acuerdo a lo observado en la situación experimental, el estudiante debe analizar que a medida que aumenta el diámetro del orificio de desagüe de las tapas, va disminuyendo el tiempo de desagüe y también identificar factores externos como el aumento de la velocidad del agua al tener más espacio para caer. Esperamos también, que esta observación lleve a los estudiantes a identificar un tipo de relación entre las magnitudes, que en este caso será una correlación inversa y a analizar que si las medidas de una magnitud aumentan, las medidas de la otra disminuyen.

Pregunta 5: Al observar el comportamiento de las magnitudes y su variación, ¿qué puedes concluir de la variación en las medidas de las magnitudes cada una por aparte?

Analizar Variables: Se espera que los estudiantes al haber analizado la relación entre las magnitudes tiempo de desagüe y diámetro del orificio de desagüé del embudo, comprendan la naturaleza cambiante que posee la variable. Aquí pretendemos que los estudiantes analicen las características de dependencia e independencia que posee la variable la cual se profundizará cuando se estén realizando las actividades subsiguientes.

Pregunta 6: Con lo observado en la gráfica, construye una posible expresión algebraica que modele la situación experimental.

(Hacemos una aclaración al poner el término *expresión algebraica*. Los estudiantes han estudiado problemas en sus respectivas clases de álgebra donde modelan algún contexto en una expresión funcional, sin haber estudiado de una manera formal el término función, sino que utilizan términos como *expresión algebraica*, para poco a poco ir desarrollando las características de la función).

Interiorización: Los estudiantes al haber analizado el comportamiento de las medidas de las magnitudes tiempo de desagüe y diámetro del orificio de desagüe como una correlación inversa y al dar explicaciones de las características de dependencia e independencia que posee la variable, darán un segundo paso que es la *simbolización* en una expresión algebraica de lo visto en la situación experimental.

Cuando nos referimos a una posible expresión algebraica estamos conscientes de que los estudiantes tienen pocas herramientas para modelar situaciones. Sin embargo, nuestras situaciones experimentales fueron diseñadas de tal manera que los estudiantes logren visualizar el tipo de proporción que existe entre las magnitudes y así, a partir de esta, puedan llegar a una posible generalización del fenómeno de cambio. De esta manera se espera que los estudiantes observen que la correlación inversa que existe entre las medidas de las dos magnitudes se puede generalizar cuando encuentran que el producto entre dichas medidas siempre se aproxima a una constante.

6.1.2 Análisis teórico del Taller N°1. Elementos de la descomposición genética. En el desarrollo de esta situación experimental y del taller, el fenómeno de cambio a observar es la disminución del tiempo de desagüe del agua debido al aumento del diámetro en los orificios de cada tapa en el embudo adaptable. Puesto que según Dubinsky & McDonald (2001, p. 276): “el conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social”, vamos a observar en la situación experimental del embudo de qué forma los estudiantes analizan fenómenos de cambio en un contexto no matemático, esto nos permitirá ver cómo el estudiante se expresa antes de trabajar con números y letras como variables.

Trigueros (2005) plantea: *“Una descomposición genética* parte del análisis de las construcciones mentales que el sujeto hace conforme aprende el concepto matemático en términos de lo que es observable” (p.8). En este sentido lo observable por los estudiantes es el fenómeno de cambio que después de ser expresado en un lenguaje no matemático, pasa a ser formalizado en un lenguaje matemático con ayuda de la interiorización propuesta.

Según la teoría APOE, “la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas o construcciones mentales: acción, proceso y objeto” (Trigueros, 2005, p. 7). Esta Teoría propone una construcción, o modelo, de la manera en que se construyen o aprenden conceptos matemáticos por medio de estas etapas o construcciones mentales.

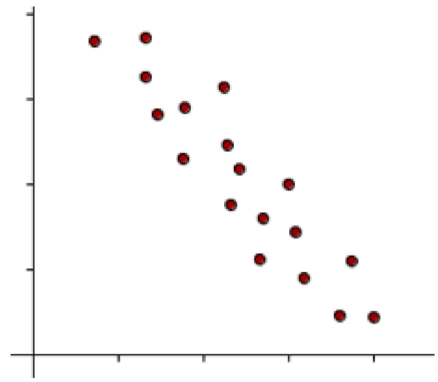
En nuestro experimento del embudo la construcción acción y proceso son la ayuda para profundizar en la observación del fenómeno de cambio.

Concepción acción: Vamos a analizar en esta actividad las construcciones mentales de acción y proceso propuestas por la Teoría APOE, para esto empezaremos por las acciones vistas y descritas anteriormente en este análisis: *Toma de Datos, Analizar Magnitudes, Tabular, Graficar, Analizar Comportamientos y Analizar Variables.* En la descripción hecha en el taller expresamos cómo pretendemos que los estudiantes realicen estas acciones al contestar cada una de las preguntas del taller.

La Teoría APOE propone: "… la conciencia de acciones actuando en ellas para separarlas o unirlas provee información, e insertar esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior hace que este mecanismo se active a través de acciones físicas generales que el sujeto hace sobre el objeto de conocimiento, formando *un nivel acción*" (Trigueros, 2005, p. 7). Por consiguiente las acciones *Toma de Datos, Analizar Magnitudes, Tabular y Graficar* en la situación experimental del embudo provee información gracias a los datos registrados en la hoja de trabajo que posteriormente son llevados y reorganizados en la tabla de datos. Al realizar estas acciones los estudiantes deben notar una leve *idea de cambio* al analizar las magnitudes, y esta leve *idea de cambio* es la evidencia de nuestro *nivel acción* en los estudiantes.

En nuestra acción *Graficar*, según sus conocimientos previos en clases de matemáticas nos interesa que los estudiantes propongan una representación gráfica en un plano cartesiano, de lo contrario se presentarían algunas dificultades para ver en un plano bidimensional el comportamiento de las medidas de las magnitudes tomadas de la situación experimental del embudo. Es muy común ver gráficas cuando dos variables tienen una correlación directa, pero en nuestra experiencia como docentes hay cierta dificultad cuando dos variables tienen una correlación inversa.

Figura 5. Ejemplo de una gráfica de correlación inversa.



La correlación inversa se da cuando al aumentar las medidas de una magnitud las medidas de la otra disminuyen y la nube de puntos se agrupa cerca de alguna curva, es decir, si los puntos no se distribuyen alrededor de una recta, diremos que no hay una correlación lineal y la gráfica no acercará a una recta. Ahora bien, en estos grados de escolaridad los estudiantes no han tenido un estudio formal de gráficas de funciones, ni mucho menos de aproximaciones lineales, es por esto que nos interesa que los estudiantes con su nube de puntos hagan una lectura coherente de los datos y no necesariamente una exacta representación gráfica. Aun así pretendemos que si los estudiantes localizan la nube de puntos, esperamos que esta nube se acerque a una curva que represente una correlación inversa.

Las acciones: *Toma de Datos, Analizar Magnitudes, Tabular y Graficar* permitirán al estudiante observar la correlación inversa entre las magnitudes tiempo de desagüe del agua y diámetro del orificio de las tapas del embudo adaptable.

Concepción proceso: Un estudiante posee una *concepción acción* de un concepto determinado si su entendimiento está limitado por la realización de acciones específicas. Por esta razón no nos interesa únicamente que los estudiantes tengan una leve *idea de cambio,* que es nuestra señal de evidencias de *nivel acción* y parte de la *concepción-acción*, sino que logren profundizar en ella y explicar con sus propias palabras del porqué del cambio de las medidas de la magnitud tiempo de desagüe del agua cuando el diámetro del orificio de las tapas va aumentando.

Según la Teoría APOE "decimos que el individuo posee una *concepción proceso* del concepto cuando puede reflexionar sobre el concepto, sin seguir realizando acciones específicas sobre él". (Roa-Fuentes, 2008; p.25). Podemos decir que el estudiante habrá comprendido el propósito de las acciones, y las ha interiorizado en un proceso cuando reflexionen y expliquen con sus propias palabras la correlación inversa entre el tiempo de desagüe del agua y el diámetro de orificio de cada tapa; y que además puedan describir las características de dependencia e independencia que posee la variable como relación funcional.

Las primeras explicaciones del fenómeno de cambio, las llamaremos *razonamientos de cambio,* estos serán profundizados en el análisis de nuestro último taller, por lo que estos razonamientos junto a la simbolización de cada fenómeno de cambio en las situaciones experimentales son las evidencias del proceso que favorecerá la construcción del concepto de variable.

Los miembros del Grupo RUMEC señalan: "con una *concepción-proceso* un individuo puede programar un algoritmo logrado gracias a la interiorización de acciones en un proceso, ya que con una fórmula explícita pueden comprobar las propiedades que les interesan". Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa (2010) 13 (1): 89-112. En esta actividad, nos interesa que los estudiantes hagan una simbolización (expresión algebraica) que modele el fenómeno de cambio visto en la situación experimental del embudo, al lograr esto decimos que el estudiante ha interiorizado las acciones y posee una *concepción-proceso*.

6.2 SITUACIÓN EXPERIMENTAL II

“Alargamiento de un resorte respecto al aumento del peso de objetos redondos”

Objetivo. Analizar el fenómeno de cambio de alargamiento de un resorte respecto al aumento de peso de objetos redondos de menor a mayor tamaño.

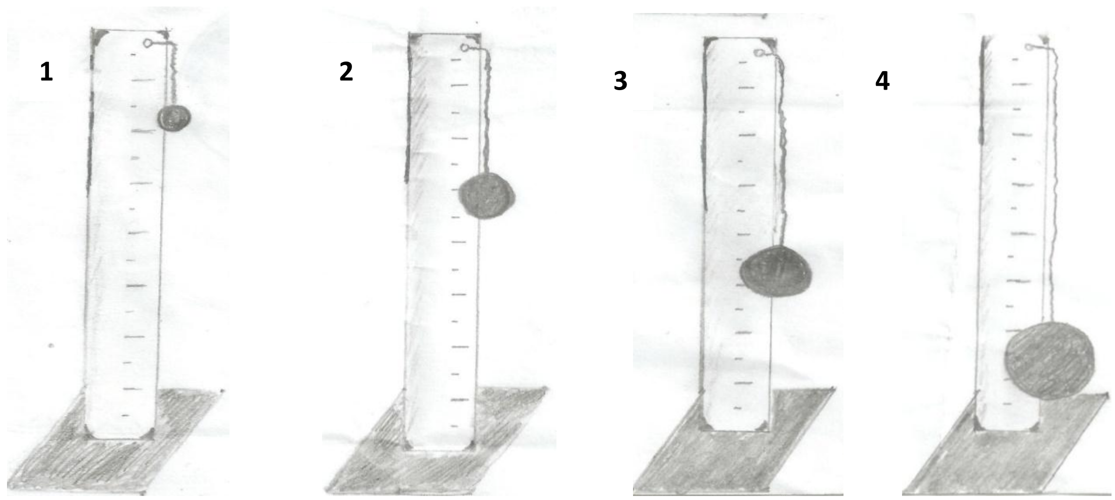
Las variables a observar: Alargamiento de un resorte y el peso de objetos redondos.

Instrumentos: Un artefacto construido en forma de una balanza graduada, cuatro objetos redondos de menor a mayor peso y menor a mayor tamaño, una hoja de trabajo para registrar las medidas tomadas por el artefacto.

Procedimiento:

- Al principio se presentan la balanza y los cuatro objetos redondos, después se le proporciona a los estudiantes una hoja de trabajo.
- Se les indica que observen la balanza y registren el dato señalado por la regla de la balanza al poner en ella el primer objeto redondo de menor peso y menor tamaño.
- Así sucesivamente los estudiantes registrarán los datos que señale la balanza con los otros tres objetos redondos.
- Estos datos posteriormente serán llevados como registros para el desarrollo del taller.

Figura 6. Dibujo de la balanza y los cinco objetos redondos (Situación experimental 2).



6.2.1 Taller II: Descripción y análisis:

Objetivo: Analizar el comportamiento del alargamiento de un resorte respecto al aumento del peso de objetos redondos.

Descripción basada en las acciones: Toma de Datos, Analizar Magnitudes, Tabular, Graficar, Analizar Comportamientos y Analizar variables.

Pregunta 1: ¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental?

Toma de datos: En la observación de la situación experimental los estudiantes obtendrán los datos de valores de una magnitud, en este caso, el alargamiento del resorte. Los datos serán trabajados por los estudiantes en el desarrollo del taller. Cada estudiante sabrá que una de las magnitudes a trabajar es el alargamiento del resorte, el resto del taller los llevará a analizar las demás magnitudes que entran en juego.

Analizar Magnitudes: Los estudiantes analizarán las magnitudes que intervienen en la situación experimental de esta actividad, sabiendo de ante mano que el alargamiento del resorte es una de ellas. Los estudiantes observarán que hay un tamaño y peso diferentes para cada objeto redondo, y el alargamiento de un resorte debido al peso de estos objetos.

En esta acción esperamos que los estudiantes analicen que el peso de los objetos redondos y el alargamiento del resorte son las magnitudes que nos interesan y el tamaño sólo es un factor externo que no interviene en el desarrollo del taller.

Pregunta 2: Completa la tabla de datos según lo observado en la situación experimental.

Tabla 2. Modelo de la tabla de datos de la segunda pregunta del Taller 2.

Peso del objeto Redondo	Primer peso	Segundo peso	Tercer peso	Cuarto peso
Alargamiento del resorte				

Tabular: Los estudiantes observarán el cambio de la medida de la balanza cuando se van poniendo los objetos redondos de menor a mayor peso en el resorte. En la correspondiente situación experimental los estudiantes van a estar pendientes de tomar la medida de cada uno de los pesos en la hoja de trabajo. Después de hacer el análisis de las medidas de las magnitudes, los estudiantes registrarán los datos de la hoja de trabajo en la tabla mostrada en la pregunta dos.

Debido a la correspondencia uno a uno de los datos en la tabla, los estudiantes observarán que entre mayor es el peso del objeto redondo mayor será la el alargamiento del resorte. Lo anterior llevará a los estudiantes a asimilar una leve *idea de cambio* que nos proporcionará una base importante para la acción subsiguiente.

Pregunta 3: Representa gráficamente las magnitudes observadas.

Graficar: En la tercera pregunta se espera que las parejas ordenadas de los datos obtenidos en la tabulación sean ubicados por los estudiantes en un plano cartesiano propuesto por ellos mismos. Seguidamente se espera que la nube de puntos representada por los estudiantes se acerque a una recta. Los puntos ubicados en el plano mostrarán evidencia de los cambios presentados en las medidas de estas magnitudes.

Pregunta 4 ¿Qué ocurre cuando el peso de los objetos redondos va en aumento? ¿Cómo relacionas el comportamiento de estas magnitudes?

Analizar Comportamientos: Para esta pregunta los estudiantes analizarán que a medida que aumenta el peso de los objetos redondos, también va aumentando el alargamiento del resorte. Lo anterior debido a lo que observarán en la tabla de datos y la representación gráfica de las magnitudes peso de objetos redondos y alargamiento de un resorte. Los estudiantes expresarán con sus propias palabras que la relación en el comportamiento entre las medidas de las magnitudes será la de una correlación directa.

Esperamos que los estudiantes no tengan en cuenta el factor externo como lo es el aumento del tamaño de los objetos redondos, ya que esta magnitud no necesariamente es determinante en el peso de estos objetos.

Pregunta 5: Al observar el comportamiento de las magnitudes y su variación, ¿qué puedes concluir de la variación en las medidas de las magnitudes cada una por aparte?

Analizar Variables: Se espera en esta pregunta que el estudiante haya formado y profundizado *ideas de cambio* como parte fundamental de la naturaleza de la variable. Esperamos que debido al desarrollo del primer taller los estudiantes puedan analizar fácilmente las características de dependencia e independencia que posee la variable, en este caso, entre las magnitudes peso de objetos redondos y alargamiento de un resorte.

Pregunta 6: Con lo observado en la gráfica, construye una posible expresión algebraica que modele la situación experimental.

Interiorización: El estudiante pasará a construir una posible modelación del fenómeno de cambio visto en la situación experimental donde se observarán las magnitudes peso de objetos redondos y alargamiento de un resorte. Ahora bien, esperamos que los estudiantes realicen una adecuada formación de esta expresión algebraica modelando la situación experimental observada con ayuda de la tabulación y gráfica. La simbolización nos permitirá recolectar evidencias de una interiorización de acciones en los estudiantes.

Aunque los estudiantes tienen pocas herramientas para modelar situaciones. Esta actividad se diseñó con el fin de que puedan llegar a una posible generalización del fenómeno de cambio. Aquí esperamos que los estudiantes observen que la correlación directa que existe entre las medidas de las dos magnitudes se puede generalizar cuando encuentran que el cociente entre dichas medidas siempre será una constante.

6.2.2 Análisis teórico del Taller N°2. Elementos de la descomposición genética.

En el desarrollo de esta situación experimental y del taller, el fenómeno de cambio a observar es el aumento del alargamiento de un resorte cuando aumenta el peso de objetos redondos de menor a mayor tamaño.

Concepción – acción: Las acciones a observar en esta actividad son: *Toma de Datos, Analizar Magnitudes, Tabular, Graficar, Analizar Comportamientos y Analizar Variables.*

En cada una de las preguntas del taller se hizo una descripción de lo que esperamos que los estudiantes respondan con base a las acciones de la descomposición genética.

La piedra angular más importante para formar un proceso general que favorezca la construcción del concepto de variable para nuestro trabajo es la *acción*. Asiala y otros (1996) expresan: "la comprensión de un concepto matemático se origina mediante la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar *acciones*". Ahora, "Una acción se equipara con cualquier operación mental o física repetible" (Meel, 2003).

Las acciones en esta actividad *Toma de Datos, Analizar Magnitudes y Tabular,* adquieren un sentido repetitivo respecto a la actividad anterior del embudo, ya que en estas acciones los estudiantes tendrán un mayor cuidado en las respuestas del taller. La manipulación de objetos mentales antes construidos hará que los estudiantes tengan un antecedente importante para el análisis del fenómeno de cambio en esta actividad.

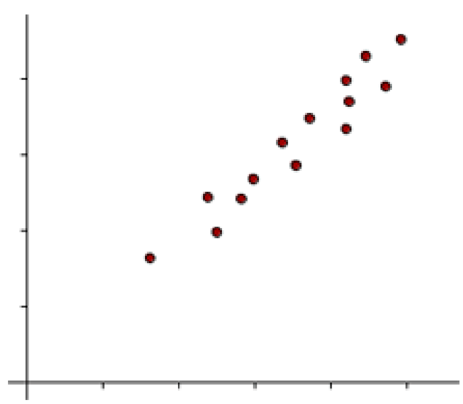
Según la Teoría APOE: "si una persona solo puede resolver problemas haciendo uso de las transformaciones (acciones), se dice que está en *nivel acción*", pero en esta actividad esperamos que el *nivel acción* ya se pueda evidenciar a partir de las acciones *Toma de datos*, *Tabular y Graficar* gracias a la actividad anterior. En este punto y debido a las primeras acciones los estudiantes lograrán deducir que las magnitudes a observar son solo dos; peso de objetos redondos y el alargamiento de un resorte.

Los estudiantes al tener las herramientas de la actividad anterior y la repetición de acciones como: *Toma de Datos, Analizar Magnitudes y Tabular* en este taller, pretendemos que adquieran una *concepción-acción* un poco más profunda.

En las acciones *Analizar Comportamientos y Analizar Variables,* pretendemos que para los estudiantes ahora sea más sencillo describir la correlación directa que existe entre las magnitudes peso de objetos redondos y alargamiento de un resorte. Por lo tanto puedan tener más claras las características de dependencia e independencia entre las magnitudes.

Al igual que en la actividad anterior nos interesa que los estudiantes realicen una adecuada representación gráfica de los datos obtenidos en las magnitudes peso de objetos redondos y alargamiento de un resorte.

Figura 7. Ejemplo de una gráfica de correlación directa.



Una correlación directa se da cuando al aumentar las medidas de una magnitud las medidas de la otra también aumentan y la nube de puntos se distribuye cerca de una recta. Si esto ocurre diremos que hay una correlación lineal. Por lo anterior se espera que si los estudiantes localizan la nube de puntos y logran unirlos entre sí, se acerquen a una recta que represente una correlación directa. Sin embargo, hacemos relevancia en el interés que tenemos de que los estudiantes hagan una lectura coherente de los datos y no precisamente en una exacta representación gráfica que hagan de la situación.

Concepción – proceso: Con base en la gráfica y en la tabulación de los datos, los estudiantes explicarán con sus propias palabras que el aumento en el alargamiento del resorte depende del aumento del peso de objetos redondos, para luego analizar las características de dependencia e independencia que posee la variable como relación funcional. Estos argumentos junto a la posible simbolización que los estudiantes hagan de la situación a través de una expresión algebraica, serán evidencias de una *interiorización* de las acciones en esta actividad.

6.3 SITUACIÓN EXPERIMENTAL III: "ALARGAMIENTO DE UN RESORTE RESPECTO A LA DISMINUCIÓN DEL PESO DE OBJETOS REDONDOS"

Objetivo: Analizar el fenómeno de cambio de alargamiento de un resorte respecto a la disminución del peso de objetos redondos de menor a mayor tamaño.

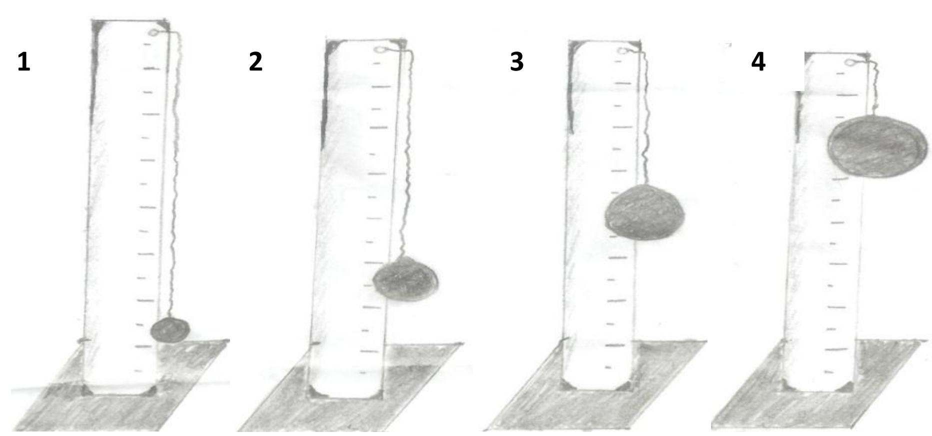
Las variables a observar: Alargamiento de un resorte y el peso de objetos redondos.

Instrumentos: Un artefacto construido en forma de una balanza graduada, cuatro objetos redondos de mayor a menor peso y menor a mayor tamaño, una hoja de trabajo para registrar las medidas tomadas por el artefacto.

Procedimiento:

- Al principio se presentan a los estudiantes la balanza y los cuatro objetos redondos.
- Después se les proporciona una hoja de trabajo.
- Se les indica que observe la balanza y registre el dato señalado por la regla de la balanza al poner en ella el primer objeto redondo de mayor peso y menor tamaño.
- Así sucesivamente los estudiantes anotarán los datos que señale la balanza con los otros tres objetos redondos.
- Estos datos posteriormente serán llevados como registros para el desarrollo del taller.

Figura 8. Dibujo de la balanza y los cinco objetos redondos (Situación experimental 3).



6.3.1 Taller III: Descripción y análisis:

Objetivo: Analizar el comportamiento del alargamiento de un resorte respecto a la disminución del peso de objetos redondos.

Descripción basada en las acciones: Toma de Datos, Analizar Magnitudes, Tabular, Graficar, Analizar Comportamientos y Analizar variables.

Pregunta 1: ¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental?

Toma de datos: Los estudiantes en una hoja de trabajo registrarán los datos de los valores de la medida del alargamiento del resorte de la situación experimental. Los valores de esta magnitud serán trabajados por los estudiantes en el desarrollo de las preguntas de este taller.

Analizar Magnitudes: Esperamos que los estudiantes identifiquen que el tamaño de los objetos redondos es un factor externo y que esta magnitud no va estar asociada en el desarrollo del taller. Debido a lo anterior concluirán que el peso de un objeto no depende necesariamente del tamaño de éste. Ahora bien, los estudiantes analizarán que el peso de cada objeto redondo influirá en la medida que señale la balanza observando que las magnitudes a analizar en la actividad de esta situación experimental son las mismas que las de la actividad anterior; el peso de los objetos redondos y el alargamiento del resorte.

Pregunta 2: Completa la tabla de datos según lo observado en la situación experimental.

Tabla 3. Modelo de la tabla de datos de la segunda pregunta del Taller 3.

Peso del objeto Redondo	Primer peso	Segundo peso	Tercer peso	Cuarto peso
Alargamiento del resorte				

Tabular: En esta pregunta la balanza indicará un cambio en la medida de las magnitudes en el alargamiento del resorte, pero cada vez de menor longitud debido a que el peso de los objetos redondos va disminuyendo.

Al igual que en las actividades anteriores los estudiantes tabularán los datos obtenidos, los cuales permitirán a los estudiantes observar importantes cambios en las medidas de las magnitudes debido a la correspondencia uno a uno de estos. Es en este punto donde se especificará por parte de los docentes que el peso de los objetos redondos estará dado en gramos y el alargamiento del resorte en centímetros.

Pregunta 3: Representa gráficamente las magnitudes observadas.

Graficar: La representación de las parejas ordenadas resultado de la recolección de los datos de la situación experimental, serán observados como parejas ordenadas y ubicados como nube de puntos en un plano cartesiano propuesto por cada estudiante.

Esperamos que esta nube de puntos se acerque a una recta y que los estudiantes realicen un aporte importante al observar el comportamiento de la gráfica. Los estudiantes empezarán a formarse una explicación del porqué del cambio de la magnitud alargamiento del resorte cuando varía el peso de los objetos redondos, que en este caso será de mayor a menor peso, permitiéndoles analizar una relación entre las magnitudes presentadas.

Pregunta 4: ¿Qué ocurre cuando el peso de los objetos redondos disminuye sucesivamente? ¿Cómo relacionas el comportamiento de estas magnitudes?

Analizar Comportamientos: En esta pregunta pretendemos que los estudiantes se den cuenta de la relación que existe cuando cambian los valores de las magnitudes y así ellos logren analizar que cuando disminuye el peso de los objetos redondos, también va disminuyendo el alargamiento del resorte.

Debido a la actividad anterior esperamos que los estudiantes no se confundan en sus explicaciones a causa del tamaño de los objetos redondos, siendo éste sólo es un factor externo que no tiene gran influencia. Por esta razón esperamos que analicen las magnitudes que están en juego y el tipo de relación que hay entre ellas, las cuales son: el peso de los objetos redondos y el alargamiento de un resorte, que en este caso están dadas bajo una correlación directa.

En general, los estudiantes deberán observar que en este tipo de situaciones si las medidas de una magnitud disminuyen, las medidas de la otra también disminuyen.

Pregunta 5. Al observar el comportamiento de las magnitudes y su variación, ¿qué puedes concluir de la variación en las medidas de las magnitudes cada una por aparte?

Pregunta 6: ¿Necesariamente una magnitud debe depender de otra para su variación?

Analizar Variables: Al contestar la pregunta cinco esperamos que los estudiantes analicen las características de dependencia e independencia de una variable como relación funcional.

En la pregunta seis pretendemos que los estudiantes identifiquen la razón por la cual la magnitud alargamiento de un resorte cambia debido a que depende del peso de objetos redondos.

Pregunta 7: Con lo observado en la gráfica, construye una posible expresión algebraica que modele la situación experimental.

Interiorización: Cuando el estudiante ha comprendido la causa del cambio en las magnitudes peso de objetos redondos y alargamiento de un resorte es un buen indicio para nosotros que ha llegado a adquirir razonamientos de cambio, mostrando como señal más clara que ha interiorizado cada una de las acciones al responder la pregunta número siete. La simbolización evidenciará la interiorización de las acciones, ya que la expresión algebraica reflejará un entendimiento más claro de lo analizado en la tabla de datos, la gráfica y la realización de cada punto del taller.

Esta actividad también fue diseñada con el fin de que los estudiantes lograran una posible modelación del fenómeno de cambio. Aquí esperamos que los estudiantes observen que la correlación directa que existe entre las medidas de las dos magnitudes se puede generalizar cuando encuentran que el cociente entre dichas medidas siempre será una constante.

6.3.2 Análisis teórico del Taller N°3: Elementos de la descomposición genética. En el desarrollo de esta situación experimental y del taller, el fenómeno de cambio a observar es la disminución del alargamiento de un resorte cuando disminuyen el peso de objetos redondos de menor a mayor tamaño.

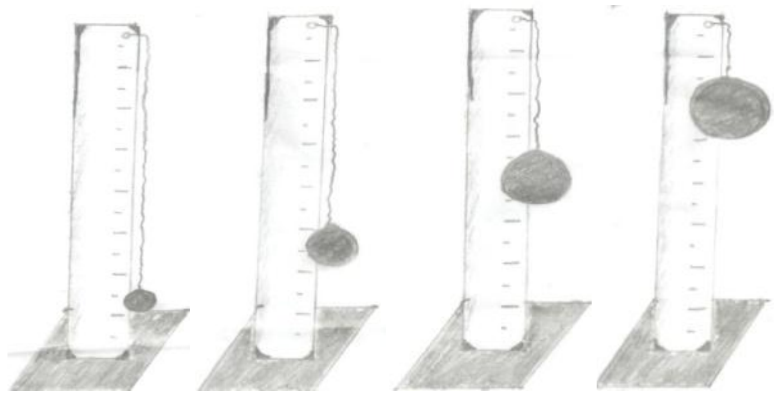
Concepción – acción: En esta actividad los estudiantes estarán familiarizados con cada una de las acciones de nuestra descomposición genética gracias a las dos actividades anteriores; *Toma de Datos, Analizar Magnitudes, Tabular, Graficar, Analizar Comportamientos y Analizar Variables.* En cada una de las preguntas del taller se hizo una descripción de lo que esperamos que los estudiantes respondan con base a las acciones de la descomposición genética.

Con este taller esperamos que las acciones sean algo más profundas, con respuestas más formales para su posterior interiorización y formar así los *razonamientos de cambio* (argumentos en la explicación de los fenómenos de cambio).

En estas actividades y en especial ésta última, los estudiantes debido a las acciones repetitivas construirán una *concepción-acción* más sólida. Lo anterior permitirá la interpretación, simbolización y la manipulación de algunas características de la variable por parte de los estudiantes.

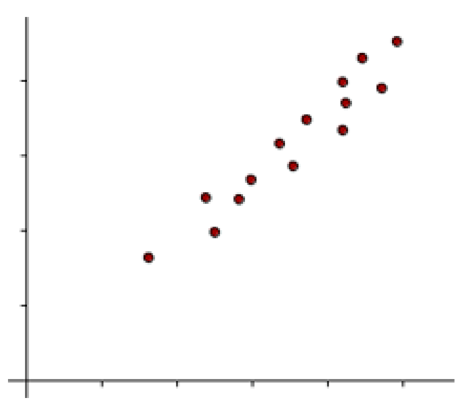
En la actividad anterior se prevé que no se presentarán complicaciones, puesto que el aumento del alargamiento del resorte depende del aumento del peso de los objetos redondos. En este caso el tamaño al tener una relación directa con el peso y el alargamiento del resorte creemos no confundirá a los estudiantes. Sin embargo, en esta actividad a medida que disminuyen el peso y el alargamiento del resorte, aumenta el tamaño de los objetos. Por lo que esta relación inversa puede confundir a los estudiantes, pero esperamos que ellos logren despreciar la magnitud tamaño y ver esto sólo como un factor externo.

Figura 9. Dibujo de la balanza y los cinco objetos redondos (Situación experimental 3).



La correlación directa, en este caso, se da cuando al disminuir las medidas de una magnitud las medidas de la otra también disminuyen. Debido a lo anterior esperamos que la nube de puntos dibujada por los estudiantes en el plano se distribuya cerca de una recta. Sin embargo, nuevamente aclaramos que nuestro interés se centra en que los estudiantes hagan una lectura coherente de los datos y no necesariamente una exacta representación gráfica de la situación.

Figura 10. Ejemplo de una gráfica de correlación directa.



En las acciones *Analizar Comportamientos y Analizar Variables,* esperamos que la explicación por parte de los estudiantes acerca de una correlación directa y la dependencia e independencia entre variables sea más adecuada que en las anteriores actividades. Estos argumentos son los que darán evidencias de las acciones interiorizadas en *razonamientos de cambio.*

Concepción proceso: Los dos elementos claves que nos permitirán evidenciar en los estudiantes la interiorización de las acciones son los *Razonamientos de cambio* y la *Simbolización* del fenómeno de cambio visto en la situación experimental.

Razonamientos de cambio: Según lo propuesto en nuestra descomposición genética preliminar, las acciones en conjunto con las habilidades y conocimientos previos en el aula de clases permitirán la formación de *ideas intuitivas de cambio*, que al ser interiorizadas formarán en los estudiantes *razonamientos de cambio*. Estos serán los argumentos expresados por los estudiantes al tratar de explicar las preguntas cuatro, cinco y seis del taller. Por ejemplo, en la pregunta 4 ¿Qué ocurre cuando el peso de los objetos redondos disminuye sucesivamente? ¿Cómo relacionas el comportamiento de estas magnitudes?, pretendemos que los estudiantes establezcan la relación que existe a medida que cambian los valores de las magnitudes.

En la pregunta 4 los estudiantes observarán que cuando disminuye el peso de los objetos redondos, va disminuyendo el alargamiento del resorte. Los estudiantes describirán con sus propias palabras la explicación del análisis de los comportamientos de las medidas de las magnitudes, en este caso una correlación directa.

Ahora en las preguntas 5 y 6 junto con la pregunta anterior. Al observar el comportamiento de las magnitudes y su variación, ¿qué puedes concluir de la variación en las medidas de las magnitudes cada una por aparte?, ¿Necesariamente una magnitud debe depender de otra para su variación? Esperamos que las respuestas permitan a los estudiantes analizar las características de dependencia e independencia que posee la variable, y así junto con el análisis de la correlación directa entre las magnitudes aportar las evidencias para nuestros objetivos.

Simbolización: En la simbolización esperamos que cada estudiante determine la proporción equivalente de las medidas. Ahora bien, esta misma proporción se va a dar en los datos de la actividad anterior, pues, el resorte que se va a utilizar en ambas situaciones experimentales es el mismo. Con lo anterior pretendemos que los estudiantes vean que la fórmula planteada es igual a la anterior independientemente de que los objetos redondos sean totalmente distintos en masas y pesos. Pretendemos que los estudiantes observen esta fórmula como una expresión general de todos los pesos de objetos redondos que se ubiquen en el resorte.

6.4 DISEÑO Y DESCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS SEMI-ESTRUCTURADAS

Las entrevistas semi-estructuradas tienen como objetivo conocer el razonamiento de los estudiantes que participaron en las actividades. Las entrevistas reforzarán algunos puntos de los talleres, donde nos interesa saber cómo los estudiantes resolvieron una determinada pregunta o que dudas quedaron y así poder profundizar un poco más en el análisis de los *razonamientos de cambio* en los estudiantes.

Se entrevistará a los estudiantes con un sistema de preguntas flexibles ya estipuladas. Ahora bien, dependiendo del estudiante y de la pregunta, si se requieren hacer más cuestionamientos a medida que avanza la conversación, se formularán nuevas preguntas que irán ligadas a las respuestas del estudiante seleccionado de acuerdo a la actividad o experimento en el que se esté reflexionando. Se trata de que los estudiantes con sus propias palabras expresen sus ideas referentes al tema que se está tratando en el momento.

Para este fin se utilizará una grabadora donde se registrará cada respuesta.

Descripción de las Preguntas de las Entrevistas semi-estructuradas:

- ¿Por qué ubicas los valores de la magnitud tiempo de evacuación del agua sobre el eje vertical? (se le señala con la mano al estudiante el eje vertical en el posible plano dibujado por él).

- Si alguno de los estudiantes realizó una gráfica adecuada en cualquiera de las actividades, señalando con una flecha hacia donde sigue dirigiéndose las medidas, se le preguntará ¿Por qué dibujó una flecha señalando hacia arriba (abajo), en la representación gráfica? (se le señala con la mano al estudiante la gráfica hecha por él).

Descripción: Esperamos con las respuestas y formulación de nuevas preguntas reforzar la acción *Graficar*. En la conversación con el estudiante o estudiantes seleccionados por los docentes pretendemos enriquecer los datos obtenidos en esta acción. Aquí queremos observar si los estudiantes empiezan a tener ideas de generalización en los datos. De la misma manera pretendemos crear en los estudiantes los primeros indicios de las características de dependencia e independencia que posee la variable como relación funcional, al averiguar cómo y por qué ubicaron las medidas de las magnitudes en los ejes del plano que el estudiante seleccionado propusiera.

- Al observar el comportamiento de las medidas de la magnitud que no dependía de otra ¿Qué puedes concluir?

- En esta actividad ¿Cuál cree que es la magnitud independiente de esta situación experimental?

Descripción: Pretendemos que en la conversación que surja en estas preguntas dependiendo del estudiante o estudiantes, profundizar en la acción *Analizar Variables*, es decir, en la comprensión de las características de dependencia e independencia que posee la variable como relación funcional.

- ¿Cómo lograste representar la relación entre las dos magnitudes como una expresión algebraica?

Descripción: Los estudiantes al haber interiorizado las acciones de nuestra descomposición genética en cada una de las actividades y al haber formulado una expresión algebraica, es decir, una modelación de una situación específica realizarán un proceso de algo específico a una expresión general. Con esta pregunta pretendemos reforzar nuevamente la acción *Analizar Magnitudes* y *Analizar Variables*, haciendo énfasis en cómo los estudiantes logran modelar la expresión algebraica y por ende analizar las propiedades que posee la variable como relación funcional.

7. OBSERVACIÓN, ANÁLISIS Y VERIFICACIÓN DE DATOS: ANÁLISIS A POSTERIORI

Teniendo en cuenta las habilidades y conocimientos previos que tienen los estudiantes y en conjunto con la búsqueda de elementos, argumentos e ideas que aportaran al fortalecimiento y corroboración de nuestra descomposición genética preliminar aplicamos los talleres descritos en el capítulo anterior, basados en el análisis de los fenómenos de cambio presentados en tres situaciones experimentales.

En esta actividad participaron cinco estudiantes del Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata, tres del noveno grado y dos del octavo grado. Los estudiantes de noveno grado fueron: Yibey Rodríguez, Miguel Rivera y Ana Rocío Quemba. Los estudiantes de octavo grado fueron: Manuel Yesid Medina y Klizman Yair Cárdenas.

A través de las preguntas de los talleres buscamos conocer los argumentos de los estudiantes y las simbolizaciones que hicieron acerca de los fenómenos de cambio observados. Las situaciones experimentales, talleres y entrevistas pretendían la interiorización de acciones propuestas a partir de nuestro marco teórico con respecto a la Teoría APOE. Las evidencias de esta interiorización fueron los argumentos expresados por los estudiantes tales como *razonamientos de cambio* y la posible simbolización que hicieron de los fenómenos de cambio de cada situación.

Observamos en las respuestas y análisis de los estudiantes aportes importantes para el cumplimiento de nuestro objetivo, pero como investigadores detallamos algunos elementos que se pasaron por alto y que causaron dificultad a la hora de expresar resultados más exactos por parte de los estudiantes. Por ejemplo, una de estas dificultades se presentó en la situación experimental del embudo, que aunque fue adecuada para describir un fenómeno de cambio, se pudo observar que para los estudiantes, al momento de simbolizar exactamente dicho fenómeno, no era suficiente tener claro únicamente las propiedades de la proporcionalidad. Por ejemplo:

En la respuesta de Yibey (noveno grado) a la pregunta: Con lo observado en la gráfica, construya una posible expresión algebraica que modele la situación experimental fue: ($y = \frac{240}{\mathrm{x}},\ 30 = \frac{240}{8},$ "comprobación" para mí x = diámetro, y= tiempo). Se observa que Yibey sólo tuvo en cuenta el primer dato del tiempo de evacuación del agua y diámetro del orificio de desagüe, generalizando que como los demás productos se acercaban a 240 entonces así debería ser la expresión algebraica. En esta parte del trabajo no se tuvo en cuenta el error, puesto que el valor verdadero de cierta magnitud que se mide es siempre imposible de determinar por las limitaciones tanto del operador como de los instrumentos de medida. Toda medida va afectada de un error, también imposible de determinar, pero cuyo valor podemos acotar dentro de unos márgenes adecuados.

Debido a que en estos grados de escolaridad los conceptos de aproximación lineal y error no están lo suficientemente claros, la dificultad en expresar una modelación correcta del contexto de la situación experimental no es adecuada. Aun así las posibles modelaciones de los estudiantes muestran el claro dominio de otros conocimientos matemáticos.

Precisamente el dominio de conocimientos matemáticos previos y habilidades de los estudiantes adquiridas en el aula, nos permitieron observar otro elemento que no se tuvo en cuenta en la descomposición genética preliminar, en los diseños de los instrumentos, ni en el análisis a priori. Qué hubiese sucedido si los estudiantes carecieran del manejo de las generalidades de la proporcionalidad y no hubiesen visto problemas algebraicos donde simbolizaban diversas situaciones.

Este tipo de problemas vistos en clases de álgebra tanto de octavo como de noveno grado permitieron a los estudiantes tener conocimientos previos para la representación algebraica de los fenómenos de cambio vistos en cada situación experimental. De la misma forma se observó que los estudiantes tenían un leve dominio tanto en tabular datos como en el dibujo de un plano cartesiano y en la ubicación de medidas sobre los ejes. Aunque algunas gráficas fueron un poco más acertadas que otras, destacamos el conocimiento previo que tenían del dibujo del plano y la localización de la nube de puntos en este.

Los conocimientos previos y las habilidades matemáticas de los estudiantes nos permitieron analizar que las acciones de la descomposición genética describen un camino para hallar las explicaciones de los fenómenos de cambio, pero son precisamente estos conocimientos y habilidades los que permiten a los estudiantes desarrollar y dar resultados cercanos a lo que pretendíamos en nuestro análisis a priori. Es decir, las acciones de nuestra descomposición genética guiaron a los estudiantes con preguntas claves sobre los fenómenos de cambio a la *concepción proceso* (interiorización de acciones), pero no se puede decir que son precisamente estas acciones las que llevaron a los estudiantes a desarrollar una *concepción proceso* del concepto. Puesto que las acciones sólo señalaron el camino que permitieron a los estudiantes con sus conocimientos previos y habilidades llegar a esta concepción.

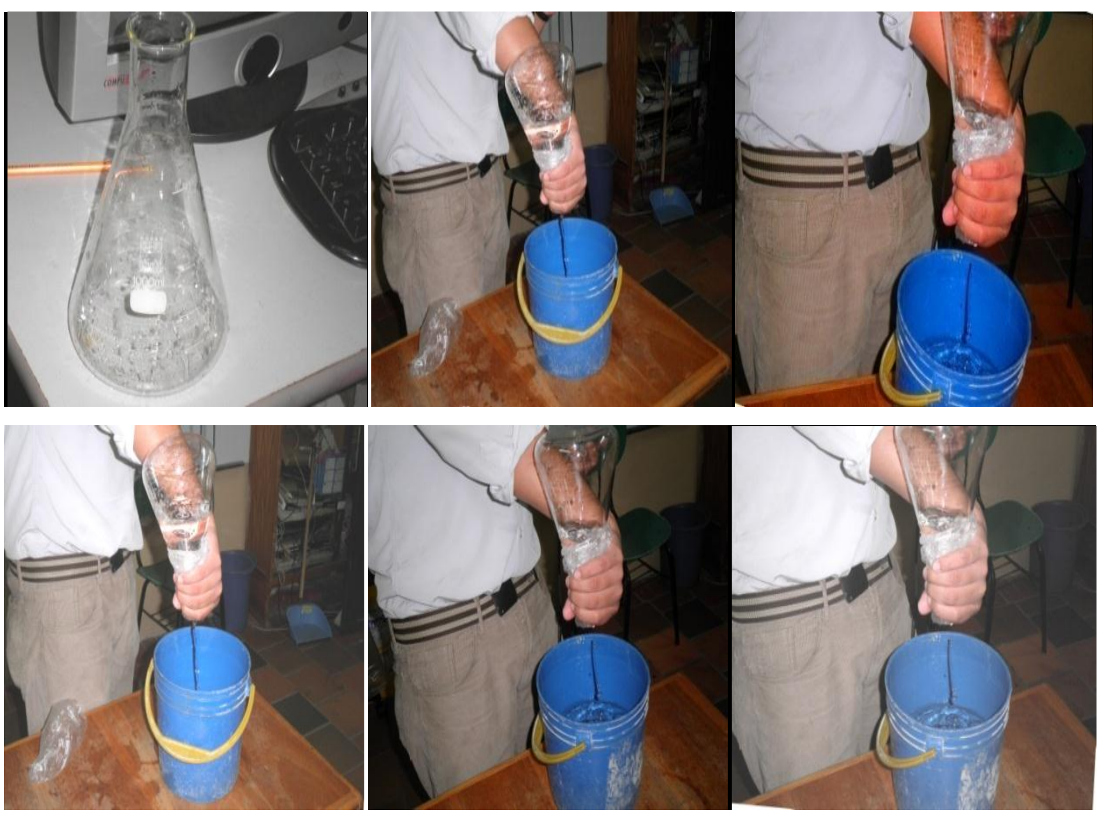
A continuación se mostrarán los aportes y dificultades mencionadas, a través de los argumentos expresados por los estudiantes en las preguntas claves de los talleres propuestos, junto al análisis a posteriori de cada situación experimental.

7.1 ANÁLISIS A POSTERIORI: TIEMPO DE EVACUACIÓN DEL AGUA EN UN EMBUDO RESPECTO AL DIÁMETRO DEL ORIFICIO DE DESAGÜE DEL MISMO

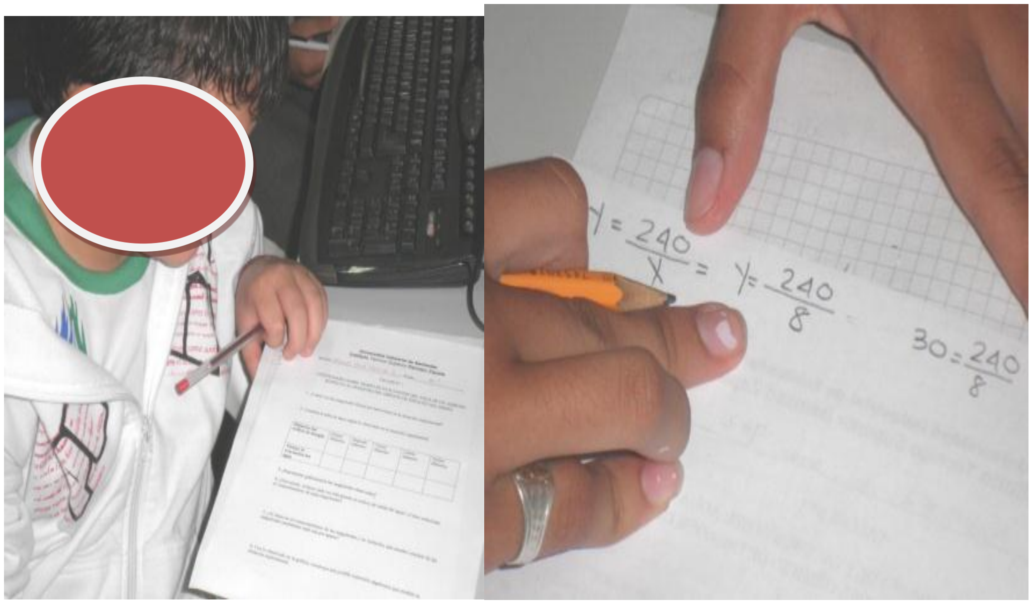
El objetivo del taller N°1 basado en esta situación experimental es analizar el comportamiento del tiempo de evacuación del agua de un embudo respecto al diámetro del orificio de desagüe como una relación de dos magnitudes inversamente correlacionadas.

Con base en lo observado en las respuestas y argumentos del taller por cada estudiante vamos a organizar por cada pregunta las cinco respuestas dadas por los cinco participantes en nuestra actividad.

Figura 11. Fotos tomadas en la situación experimental 1.



Continúa figura 11…



Pregunta 1: ¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental?

Tabla 4. Resultados de la primera pregunta del Taller 1.

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	tiempo, velocidad, diametro de la tapa.
Miguel (Noveno grado)	fisica, tiempo, y su momento, orificio, Sudiametro
Ana Rocío (Noveno grado)	• el cambio de la bolsa El orificio de la bolsa
Manuel (Octavo grado)	El diametro del orificio de la tapa para salir el agua ¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental? La velocidad de salida del agua en cada embudo Fue registrado por un orificio que cada vez era mas Grande. Completa la tabla de datos según lo observado en la situación experimental.
Klizman (Octavo grado)	la velocidad, el tiempo, el diametro del orifici de la tapa.

En esta pregunta se analizaron las acciones *Toma de Datos y Analizar Magnitudes*. Según la descripción hecha en el análisis a priori pretendíamos que los estudiantes escribieran todas las magnitudes que observaron en la situación experimental. Aquí se puede observar que Yibey, Manuel y Klizman identificaron las tres magnitudes involucradas en la situación experimental; tiempo, velocidad y diámetro del orificio de las tapas, pero Ana Rocío y Miguel identificaron sólo una o dos de las magnitudes. Los estudiantes observaron que la velocidad y el tiempo variaban debido al cambio del diámetro del orificio de desagüe en las tapas del embudo adaptable, lo que fue la puerta de entrada para que ellos empezaran a relacionar las dos magnitudes en las que estábamos interesados; diámetro del orificio de desagüe y el tiempo de evacuación del agua.

Pregunta 2: Completa la tabla de datos según lo observado en la situación experimental.

En esta actividad se analizó la acción *Tabular*. Este punto fue el único que no dependía exclusivamente de los estudiantes, ya que cada registro fue dado adecuadamente por uno de los docentes. Creímos que fue prudente que las medidas de los tiempos fuesen tomadas por uno de los docentes, esto para evitar el mal uso que se le pudiese haber dado al cronómetro por parte de los estudiantes y alterar significativamente la toma de los datos. Aun así se les mostró a cada estudiante el tiempo que registraba el cronometro durante cada momento del experimento, analizando que al no tener en cuenta el error se iba a producir dificultad en el momento de graficar y simbolizar.

Debido a que los datos fueron los mismos, cada estudiante registro los valores correctamente en la tabla de datos presentada en el taller. Seguidamente fue aclarado por los docentes que el diámetro del orificio en cada tapa es dado en milímetros y su escritura debía ser de la siguiente manera para evitar confusiones, por ejemplo, $8\,mm$, lo mismo para el tiempo de evacuación del agua que se representó de la siguiente manera $30\,s$, la medida de la magnitud se dio en segundos.

Tabla 5. Resultados de la segunda pregunta del Taller 1.

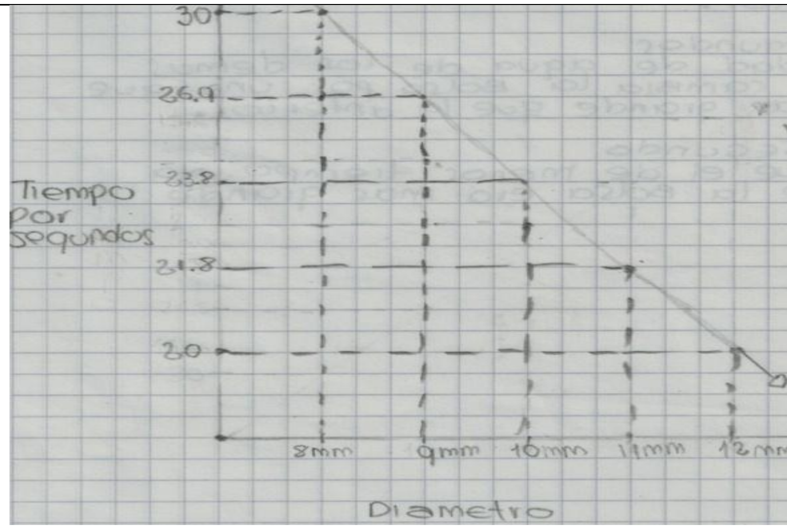
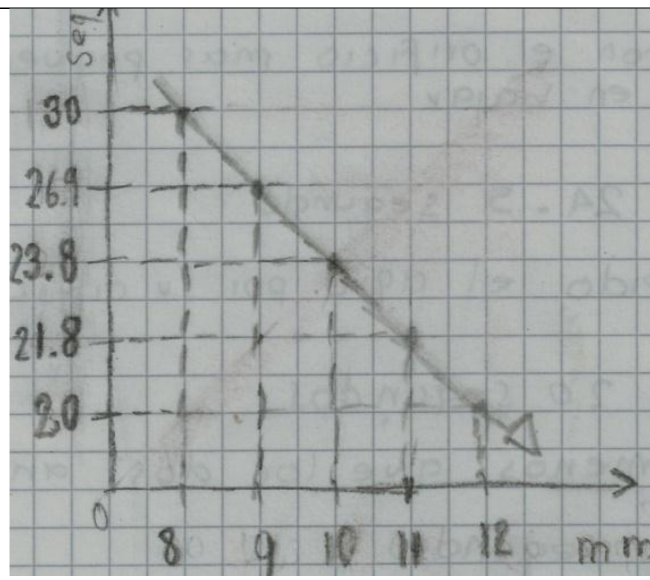
Diámetro del orificio de desagüe	Primer diámetro $8\,mm$	Segundo diámetro $9\,mm$	Tercer diámetro $10\,mm$	Cuarto diámetro $11\,mm$	Quinto diámetro $12\ \ mm$
Tiempo de evacuación del agua	$30\,s$	$26.9\,s$	$23.8\,s$	$21.8\,s$	$20\,s$

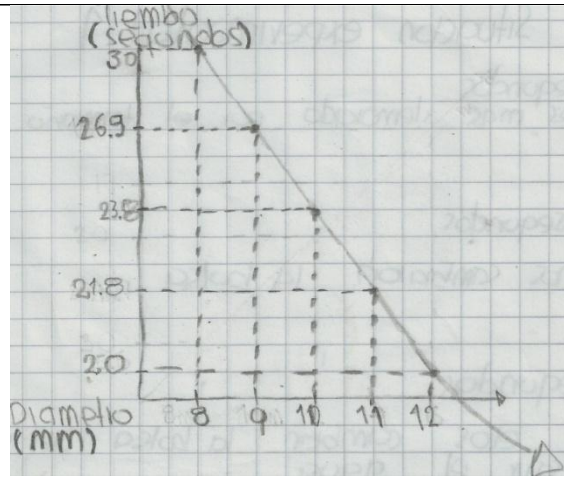
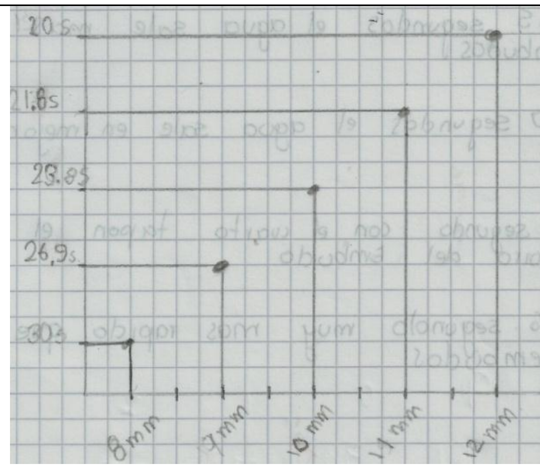
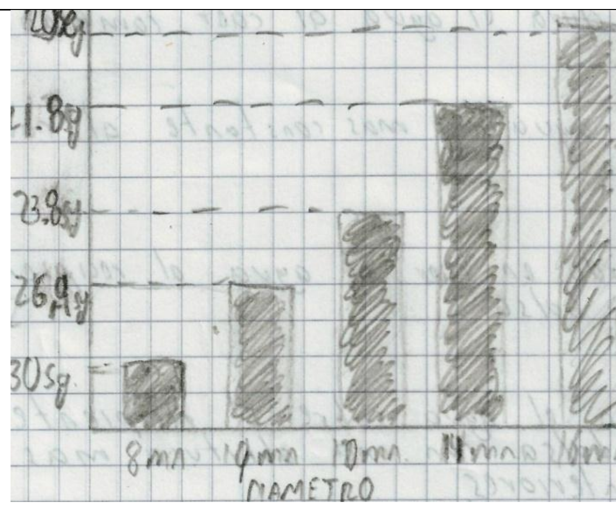
Al tabular los datos del tiempo de evacuación del agua, los estudiantes se dieron cuenta que en cada registro se observaba un importante *cambio* en la magnitud tomada respecto a la magnitud dada por los docentes del diámetro del orificio de desagüe. Este cambio que se logró observar en la tabla mostró a los estudiantes una correspondencia uno a uno entre las medidas del diámetro del orificio de desagüe y el tiempo de evacuación del agua, la cual fue fundamental para que ellos analizaran la proporcionalidad que se presentaba entre las magnitudes y dar una posible simbolización de este fenómeno de cambio.

De acuerdo a nuestro análisis a priori los estudiantes formarían hasta ese momento un *nivel acción*, que sería profundizado a medida que fuesen desarrollando las acciones subsiguientes, teniendo en cuenta que más que las acciones son los conocimientos previos y habilidades matemáticas las que permiten encontrar evidencias de este *nivel acción*.

Pregunta 3: ¿Representar gráficamente las magnitudes observadas?

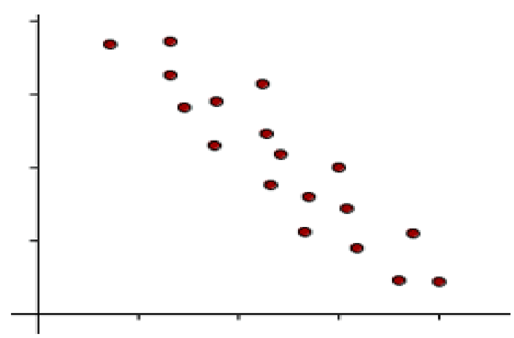
Tabla 6. Resultados de la tercera pregunta del Taller 1.

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	
Miguel (Noveno grado)	

Ana Rocío (Noveno grado)	
Manuel (Octavo grado)	
Klizman (Octavo grado)	

En esta pregunta se analizó la acción *Graficar*. En la descripción y análisis del taller esperábamos que los estudiantes graficaran la nube de puntos (parejas ordenadas) de los datos obtenidos en la tabulación, proponiendo un plano cartesiano y ubicando en él dicha nube de puntos. En el análisis a priori pretendíamos que los estudiantes realizaran una gráfica de correlación inversa como la siguiente nube puntos y quizás una posible unión de estos:

Figura 12. Ejemplo de una gráfica de correlación inversa.



En primera instancia observamos que todos los estudiantes no tuvieron en cuenta la proporción correcta en la ubicación de las medidas de las magnitudes sobre los ejes. Un ejemplo es el caso de Miguel donde asigna la misma distancia entre 20 y 21.8, y, 23.8 y 26.9 en el eje donde ubicó el tiempo de evacuación del agua y por tal razón la nube de puntos que se debería acercar a una curva, se acerca más a una recta. Aunque lo anterior no fue previsto en el análisis a priori, se puede observar que las gráficas son un aporte valioso porque nos muestran que los estudiantes tienen una idea de relación entre las magnitudes diámetro del orificio de desagüe y tiempo de evacuación del agua, y empiezan a formarse argumentos de la correlación inversa que hay entre dichas magnitudes.

Los estudiantes propusieron la idea de plano cartesiano y ubicaron las medidas de las magnitudes sobre los ejes adecuados suponiendo que la magnitud tiempo de evacuación del agua debería ir sobre el eje vertical, ya que esta dependía de los ajustes al diámetro del orificio de evacuación del agua.

Esto se puede evidenciar en la siguiente entrevista realizada durante el desarrollo de la actividad.

Entrevistador: ¿Por qué ubicas los valores de la magnitud tiempo de evacuación del agua sobre el eje vertical? (se le señala con la mano al estudiante el eje vertical en el plano dibujado por él).
Miguel: Porque son los valores que salen cuando se desocupa el embudo.
Entrevistador: ¿y por qué no los ubicaste en el eje horizontal?
Miguel: Porque en el horizontal van los valores que a uno le dan y en el otro los que salen como por culpa de los que a uno le dieron, pues, así nos ha explicado la profesora.

Aunque la nube de puntos se asemeje a una recta, las gráficas de los estudiantes Yibey, Miguel y Ana Rocío se acercaron en algunas características a una gráfica de correlación inversa. En el caso de Manuel y Klizman, aunque no lograron una adecuada ubicación de las medidas de las magnitudes sobre el eje vertical, pues las colocaron de mayor a menor, aun así se logra evidenciar por medio de una entrevista que trataron de hacer una lectura coherente de una correlación inversa entre las magnitudes.

Entrevistador: ¿Por qué ubicas los valores de la magnitud tiempo de evacuación del agua sobre el eje vertical? (se le señala con la mano al estudiante el eje vertical en el plano dibujado por ella).
Klizman: Porque son los tiempos que salen en cada ejercicio.
Entrevistador: ¿Qué quieres decir con eso?

Klizman: Pues,.., que esos tiempos son porque es lo que dura el agua en salir cada vez que se cambia la tapa, y como son los que se hallan van sobre ese eje.

Entrevistador: ¿Por qué ubicas los tiempos de mayor a menor en el eje? (se le señala con la mano al estudiante el eje vertical en el plano dibujado por él).

Klizman: Ah porque los ejercicios me dieron primero el tiempo de 30 segundos y así los voy poniendo de pa' arriba.

Entrevistador: ¿Explícame cómo analizas tu gráfica?

Klizman: ¿Cómo así?

Entrevistador: ¿Es decir, qué sucede cuando los valores del eje horizontal van cambiando? (se le señala con la mano al estudiante el eje horizontal en el plano dibujado por él).

Klizman: Ah porque los ejercicios me dieron primero el tiempo de 30 segundos y así los voy poniendo de pa' arriba.

Entrevistador: ¿Explícame de nuevo cómo analizas tu gráfica?

Klizman: Ah, pues, que ahí se ve, si usted va subiendo, cada aumento del orificio el tiempo es menos.

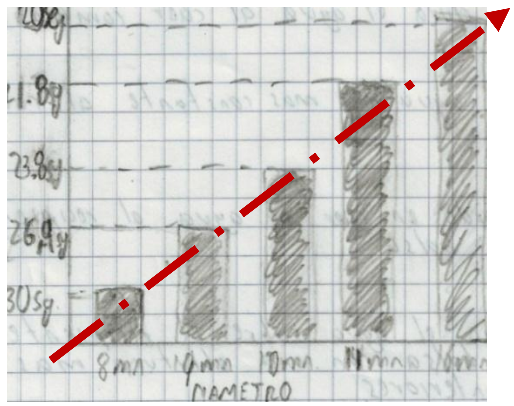
Entrevistador: y observando la gráfica. Por qué haces un diagrama de barras.

Klizman: Porque así son los gráficos que estamos viendo en clase de matemáticas.

Frases como: "*ahí se ve, si usted va subiendo, cada aumento del orificio el tiempo es menos*", se puede observar que aunque la gráfica hecha por Klizman no es acertada según los referentes matemáticos, se evidencia que hace una lectura coherente de los datos en expresar la correlación inversa entre las medidas de las magnitudes.

En la siguiente gráfica se muestra el movimiento de Klizman al explicar la correlación inversa.

Figura 13. Gráfica de las magnitudes dadas en la situación experimental I hecha por Klizman.



Se observa también que Klizman presenta su gráfica como un diagrama de barras, esto debido a la influencia de sus últimas clases de matemáticas relacionadas con estadística. Sin embargo, para nuestro trabajo no importa necesariamente cómo se grafiquen los datos en el plano cartesiano siempre y cuando el estudiante haya dado una lectura coherente de estos. Aun así los resultados hubiesen sido más completos y enriquecedores si los estudiantes en sus representaciones gráficas de nube de puntos se hubiesen acercado a una curva.

Gracias a los conocimientos previos y habilidades de los estudiantes en realizar la correspondencia uno a uno en las tablas de los talleres y las representaciones gráficas cercanas a una descripción de la correlación inversa entre las magnitudes, permitieron que las primeras acciones hubiesen sido la base para las acciones *Analizar Comportamientos y Analizar Variables*.

Pregunta 4: ¿Qué sucede al hacer cada vez más grande el orificio de salida del agua? ¿Cómo relacionas el comportamiento de estas magnitudes?

Tabla 7. Resultados de la cuarta pregunta del Taller 1.

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	- El tiempo cada vez es mas baja que la otra. - la relación de las magnitudes es cuando el diametro de la tapa es mas grande que la anterior el tiempo es menos.
Miguel (Noveno grado)	Demora menos tiempo en drenar el agua por su diametro Uniendo estas dos magnitudes se relaciona su tiempo y momento
Ana Rocío (Noveno grado)	el comportamiento de estas magnitudes? - cuando se hacia mas grande el orificio salia mas rapido el agua - a mayor tamaño de el orificio mena es el tiempo de salida del agua
Manuel (Octavo grado)	el comportamiento de estas magnitudes? Se expulsa más rapido el agua En que el tiempo tiene que ser exacto a la hora que el embudo expulsa toda el aguo. y en cada tapa se expulsa cada vez mar rapida.
Klizman (Octavo grado)	Sucede que el agua va saliendo con mas velocidad, mientras si el orificio es mas pequeño el agua tarda mas tiempo en salir.

En esta pregunta se analizó la acción *Analizar Comportamientos.* En nuestro análisis a priori pretendíamos que los estudiantes se dieran cuenta de la relación que existe entre las dos magnitudes a medida que estas cambian. Lo anterior se pudo evidenciar en las respuestas de la mayoría de los estudiantes como son los casos de Yibey, Ana Rocío y Klizman, quienes escriben respectivamente: "*La relación de las magnitudes es cuando el diámetro de la tapa es más grande que el anterior, el tiempo es menos*"; "*a mayor tamaño del orificio menor es el tiempo de salida del agua*" y "…*mientras si el orificio es más pequeño, el agua tarda más tiempo en salir*".

En esta situación experimental buscábamos que el estudiante expresará con sus propias palabras que a medida que aumentan la medida del diámetro del orificio de desagüe del embudo, va disminuyendo la medida del tiempo de evacuación del agua. Aquí se logra observar que las expresiones escritas por los estudiantes se aproximaron a la descripción de esta relación.

En el análisis a priori también detallamos la posibilidad de que los estudiantes analizaran factores externos como el aumento de la magnitud velocidad del agua al tener más espacio para caer. Según los resultados de los estudiantes observamos que algunos de ellos detallaron el factor externo magnitud velocidad. Por ejemplo, Ana Rocío: "*cuando se hacía más grande el orificio salía más rápido el agua*"; Manuel: "*en cada tapa se expulsa cada vez más rápida [el agua]"* y Klizman: "*sucede que el agua va saliendo con más velocidad*".

Lo que pretendíamos que los estudiantes argumentaran en esta pregunta se logró alcanzar. Pues, los estudiantes observaron que en la correlación directa de esta situación experimental si una magnitud aumenta la otra disminuye. Estas expresiones son muy importantes para el desarrollo de nuestro trabajo, ya que las explicaciones por parte de los estudiantes mostraron las primeras evidencias de sus *razonamientos de cambio.* Estos razonamientos acerca del fenómeno de cambio visto en esta situación experimental fueron la base para detallar un poco más las explicaciones de las otras dos actividades.

Pregunta 5: ¿Al observar el comportamiento de las magnitudes y su variación, qué puedes concluir de la variación de las magnitudes cada una por aparte?

Tabla 8. Resultados de la quinta pregunta del Taller 1.

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	Yo observe que en cada experimento que se hacia, el diametro aumentaba y el tiempo cada vez disminuia. mientras el diametro aumenta el tiempo disminuye
Miguel (Noveno grado)	1) Diametro= Cada vez que cambiaban las tapas salia más rapido el agua y su diametro era mas grande en cada tapa Tiempo= En sus diametros de cada uno es mas corto el tiempo
Ana Rocío (Noveno grado)	Yo observe que cada vez que cambiaban la bolsa, el orificio de la bolsa era mas grande Por lo cual el tiempo dismunia
Manuel (Octavo grado)	magnitudes cambiantes cada una por aparte? 1. los diametros aumentaban en cada embudo. 2. El tiempo disminuia cada vez que cambiaban el diametro de la tapa en el embudo
Klizman (Octavo grado)	DIAMETRO: A medida que hiban cambiando de orificio el diametro del orificio hiban aumentando. TIEMPO: Mientras el diametro aumentaba tardaba menos en salir el agua.

En esta pregunta se analizó la acción *Analizar Variables*. En las respuestas a esta pregunta esperábamos que los estudiantes comprendieran las características de dependencia e independencia entre dos variables sin mencionar la palabra variable. Esta comprensión se analizó cuando los estudiantes describieron el cambio de las medidas de cada magnitud por aparte.

Por ejemplo, los estudiantes escriben: Miguel: "*DIAMETRO: su diámetro era más grande en cada tapa. TIEMPO: en sus diámetros de cada uno, es más corto el tiempo*"; Manuel: "*DIAMETRO: los diámetros aumentaban en cada embudo. TIEMPO: el tiempo disminuía cada vez que cambiaban el diámetro de la tapa en el embudo*" y Klizman: "*DIAMETRO: a medida que iban cambiando de ejercicio el diámetro de orificio iba aumentando. TIEMPO: Mientras el diámetro aumentaba tardaba menos en Salir el agua"*.

En las anteriores respuestas se puede observar que los estudiantes analizaron primero la magnitud diámetro del orificio de desagüe y expresaron que ésta aumentaba a medida que trascurría la actividad, pero no relacionaron su cambio debido a otro factor, es decir, la magnitud diámetro era *independiente* de cualquier otro cambio de magnitud. Es aquí cuando los estudiantes se acercan a la comprensión de la característica de independencia que posee la variable. Por ejemplo, Klizman comenta: "*DIAMETRO: a medida que iban cambiando de ejercicio el diámetro de orificio iba aumentando.*

Se observa también en las respuestas el análisis de la magnitud tiempo en relación al cambio que sufría la magnitud diámetro del orificio de desagüe, dando bases de la característica de *dependencia* que posee la variable. Por ejemplo, Manuel comenta: "*TIEMPO: el tiempo disminuía cada vez que cambiaban el diámetro de la tapa en el embudo*".

En el siguiente extracto de la entrevista de Klizman se aprecia con detalle elementos que consideramos en nuestro análisis a priori.

Entrevistador: Al observar el comportamiento de las medidas de la magnitud que no dependía de otra ¿Qué puedes concluir?

Klizman: …Pero, ¿se refiere al diámetro?

Entrevistador: ¿Crees que el diámetro del orificio de cada tapa, es la magnitud que no depende de otra?

Klizman: Ah, sí claro. El diámetro es la magnitud que no depende de nada… El diámetro ya está porque las tapas ya están hechas. [Risas]Al menos que las pueda estirar más.

Entrevistador: Entonces ¿Cuál es la magnitud que depende de otra?

Klizman: Pues,…En lo que estamos haciendo seria el tiempo cuando sale el agua.

Entrevistador: ¿Por qué?

Klizman: Porque cuando anotamos los tiempos dados, fueron cambiando porque se le fue cambiando la tapa al embudo.

Entrevistador: Entonces ¿el tiempo cambia por la tapa del embudo?

Klizman: Bueno, por el orificio que hay en la tapa de plástico. Como anote en la pregunta el tiempo cambiaba si aumentaba el diámetro de ese orificio en las tapas.

Entrevistador: ¿El tiempo de evacuación del agua siempre va a variar?

Klizman: Claro. Creo, que si ustedes siguen poniendo tapas con diámetros cada vez más grandes, me imagino que el tiempo va ser menos si sigue cambiando de tapas.

Entrevistador: Entonces, en conclusión ¿el tiempo de evacuación seria la magnitud dependiente y el diámetro de orificio de desagüe seria la magnitud independiente?
Klizman: … Si... El diámetro es la magnitud independiente porque ya está ahí, como dijimos no depende de nada y el tiempo es la magnitud dependiente, porque como vimos depende del cambio de las tapas.

Con lo observado en las respuestas de los estudiantes en el taller y la entrevista podemos ver la forma de cómo empiezan a explicar el fenómeno de cambio de la situación experimental del embudo.

Aquí los estudiantes reflexionaron y explicaron con sus propias palabras que la disminución del tiempo de desagüe del agua depende del diámetro de orificio de la tapa y además siempre cuando una de las medidas de una de estas magnitudes disminuye la otra aumenta; debido a esto y según la Teoría APOE y el análisis a priori de esta actividad, podemos decir que el estudiante ha comprendido el propósito de las acciones y ha aportado a la asimilación de una *concepción-proceso* del concepto de variable, teniendo en cuenta que esto se logró gracias a los conocimientos previos y habilidades de los estudiantes.

Pregunta 6: Con lo observado en la gráfica, construya una posible expresión algebraica que modele la situación experimental.

Tabla 9. Resultados de la sexta pregunta del Taller 1.

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	1) $Y = \frac{240}{X} = Y = \frac{240}{8}$ $30 = \frac{240}{8}$ "Comprobación" 2) Para mí X = diametro Y = Tiempo
Miguel (Noveno grado)	la proporción es similar al multiplicar el Diametro por el tiempo $8 \times 30 = 240$ $9.26.9 = 240.1$ $12.20 = 240$ $D.T = 240$
Ana Rocío (Noveno grado)	situación experimental. Podemos darnos cuenta que al multiplicar da 240 Z = Diametro Y = Tiempo $\frac{240}{Z} = Y$ $30 \times 8 = 240$
Manuel (Octavo grado)	Un diametro multiplicado por un tiempo da como resultado 240. $30 = \frac{240}{T}$ $\frac{240}{8}$ $D = \frac{240}{T}$
Klizman (Octavo grado)	situación experimental. Nos dimos cuenta que al multiplicar el tiempo por el diametro nos ba a dar 240, y mientras vamos avanzando nos ba a dar una cantidad aproximada a 240. $T = 240/d$

En esta pregunta se analizó la *interiorización* de las acciones de nuestra descomposición genética preliminar del concepto de variable. Aquí esparábamos que los estudiantes simbolizaran en una expresión algebraica el fenómeno de cambio de la situación experimental del embudo.

La complejidad para registrar datos precisos del tiempo de evacuación por el cronómetro del docente hizo que estos presentaran pequeñas diferencias en la proporcionalidad al momento de multiplicar cada tiempo de evacuación del agua por el diámetro del orificio de desagüe. Lo anterior no se tuvo en cuenta en nuestro análisis a priori, ya que el valor verdadero de cierta magnitud que se mide es siempre imposible de determinar por las limitaciones tanto del operador como de los instrumentos de medida. Toda medida va afectada de un error, también imposible de determinar, pero cuyo valor podemos acotar dentro de unos márgenes adecuados. Sin embargo, nos interesaba que los estudiantes se aproximaran a una posible modelación de los datos, pero no se predijo cómo harían para obviar estas diferencias en las medidas. Ahora bien, observamos en los estudiantes un claro dominio de algunas de las generalidades de la proporcionalidad, las cuales fueron de gran importancia para la simbolización en una posible expresión algebraica no solo de esta situación experimental sino también de las actividades subsiguientes y del manejo de la fórmula para verificar propiedades de generalización para cualquier medida del diámetro. Esto es evidente en las siguientes entrevistas hechas a los estudiantes Klizman y Yibey:

La respuesta de Klizman a la pregunta: Con lo observado en la gráfica, construya una posible expresión algebraica que modele la situación experimental fue: *(Nos dimos cuenta que al multiplicar el tiempo por el diámetro nos va a dar cerca de 240, y mientras vamos avanzando nos va a dar una cantidad aproximada a 240, T=240/d”).*

> *Entrevistador: ¿Cómo lograste representar la relación entre las dos magnitudes como una expresión algebraica?(señalando con la mano la expresión que el estudiante realizó)*

Klizman: Me di cuenta de la proporción entre las medidas al multiplicar cada tiempo por el diámetro, eso va a dar aproximadamente 240. Y yo había visto un ejercicio parecido en clase y me guie por eso.

Entrevistador: Pero, ¿cómo lograste deducir la expresión T=240/d?

Klizman: Bueno, como le había dicho la multiplicación entre el tiempo y diámetro es aproximadamente 240, si lo expreso con incógnitas es: Txd=240. El diámetro pasa a dividir y nos queda lo que importa la T de tiempo.

Entrevistador: Y, ¿cómo sabes que T=240/d es la expresión correcta?

Klizman: Ah, pues, fácil, en la calculadora se pone 240 y lo divido en los diámetros y nos da aproximadamente el tiempo que se halló.

Entrevistador: ¿Será que esta fórmula funcionará para cualquier otro diámetro?

Klizman: Me imagino que sí,… Porque si lo probamos con varios y funcionó.

La respuesta de Yibey a la pregunta: Con lo observado en la gráfica, construya una posible expresión algebraica que modele la situación experimental fue: ($y = \frac{240}{\mathrm{x}},\ 30 = \frac{240}{8},$ "comprobación" para mí x = diámetro, y= tiempo).

Entrevistador: ¿Cómo lograste representar la relación entre las dos magnitudes como una expresión algebraica? (señalando con la mano la expresión que la estudiante realizó)

Yibey (noveno): Lo que observé,… Fue que… 240 divido en 8 me da 30, y en el resto de las divisiones de 240 sobre cada diámetro *me da cerca a 240. Luego 240 sobre la x que es para mí el diámetro me dará siempre la y que es para mí el tiempo, y así creo que para todos los diámetros que le meta.*

Para una posible modelación de este fenómeno de cambio, $y = \frac{240}{x}$, fue la expresión que la mayoría de los estudiantes propusieron. Esta expresión no es la más acertada por el grado de complejidad de la situación, pues, se necesitaría conceptos de aproximación, error, precisión, que en estos grados no se estudian formalmente. Aun así nos interesó el manejo que tiene los estudiantes de la proporcionalidad logrando deducir una posible modelación del fenómeno.

En este punto también se analizó que debido a los conocimientos de la correspondencia uno a uno en una tabla de datos, la representación gráfica y el manejo de las generalidades de las proporciones, fueron los que permitieron con la guía de las acciones acercarse a una *concepción proceso* del concepto de variable. Por lo que nuestra descomposición genética preliminar, donde se había señalado que las acciones llevarían a esta concepción se complementa únicamente si los estudiantes tienen habilidades y conocimientos previos, si no fuera así, la descomposición sería inadecuada.

7.2 ANÁLISIS A POSTERIORI: ALARGAMIENTO DE UN RESORTE RESPECTO AL AUMENTO DEL PESO DE OBJETOS REDONDOS DE MENOR A MAYOR TAMAÑO

El objetivo del taller N°2 basado en esta situación experimental es analizar el comportamiento del alargamiento de un resorte respecto al aumento del peso de objetos redondos como una relación de dos magnitudes directamente correlacionadas.

Con base en lo observado en las respuestas y argumentos del taller por cada estudiante vamos a organizar por cada pregunta las cinco respuestas dadas por los cinco participantes en nuestra actividad.

Figura 14. Dibujo de la balanza y los cinco objetos redondos (Situación experimental 2).

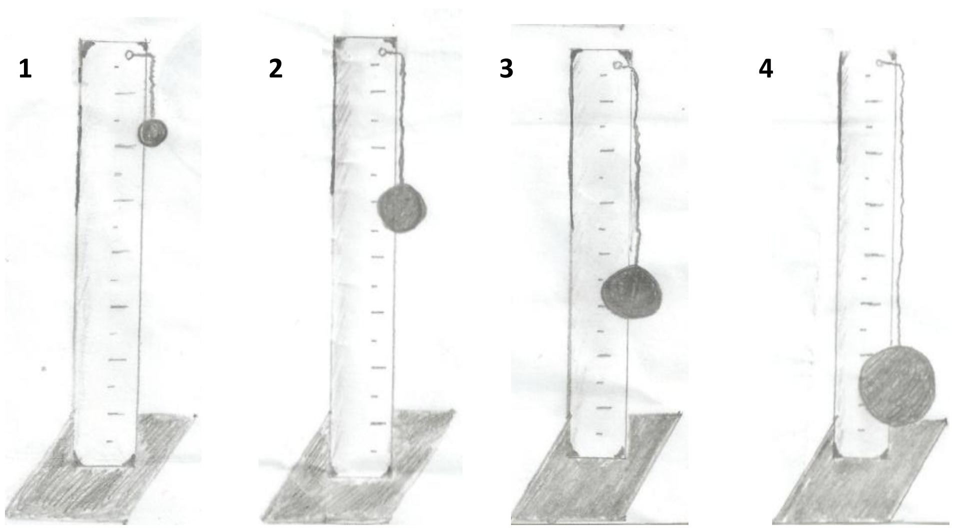
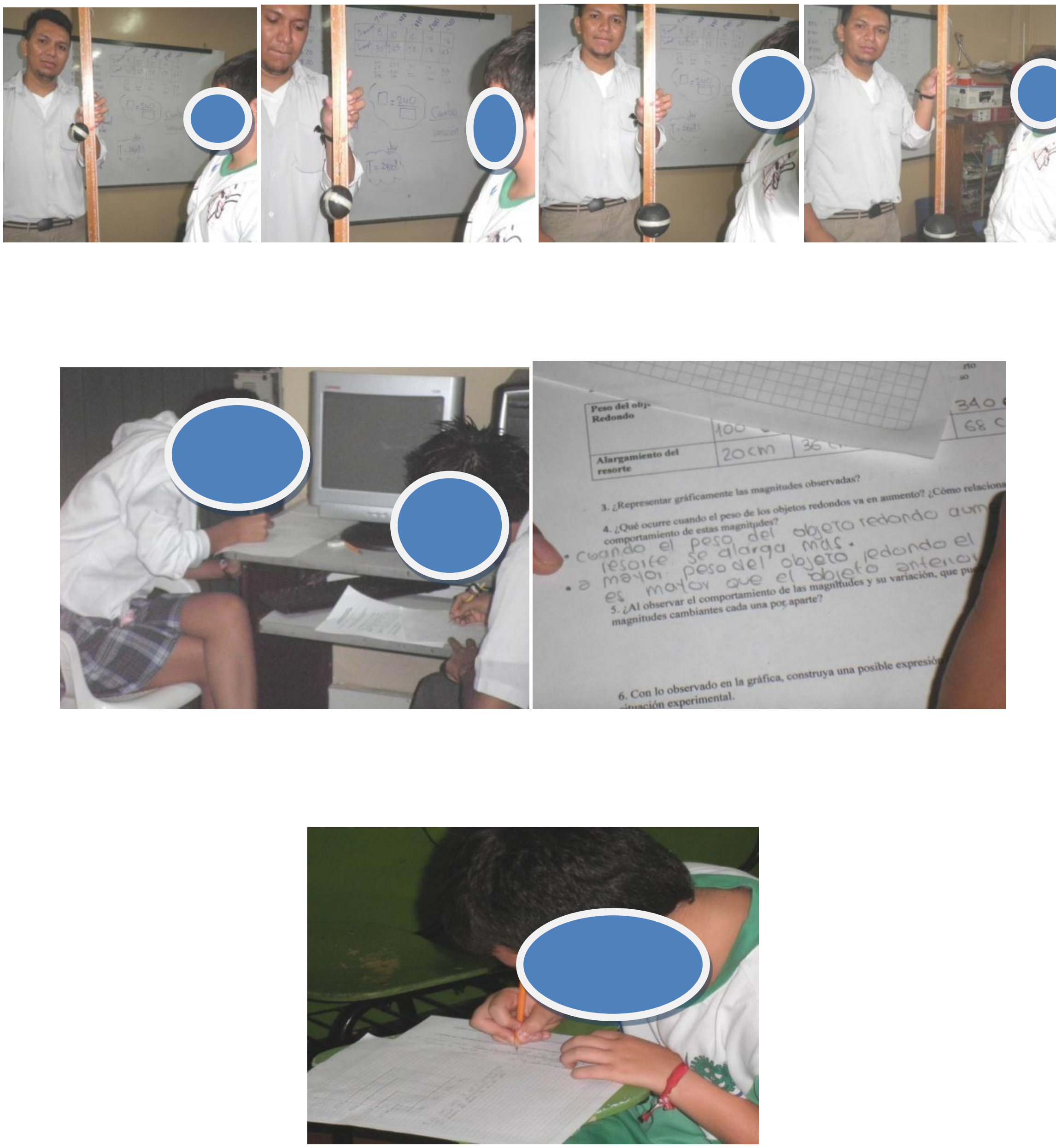


Figura 15. Fotos tomadas en la situación experimental 2.



Pregunta 1: ¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental?

Tabla 10. Resultados de la primera pregunta del Taller 2.

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	peso, tamaño, Alargamiento
Miguel (Noveno grado)	Volumen, variación, peso, Alargamiento del resorte
Ana Rocío (Noveno grado)	- El Peso de la bolita -se alargo el resorte - Tamaño de la bolita
Manuel (Octavo grado)	1. ¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental? caer. la distancia que aumenta la pelota al dejarla El tamaño de cada pelota, el peso, Se alargo el resorte
Klizman (Octavo grado)	El peso de cada pelota, el tamaño de cada pelota, el alargue del resorte,

En esta pregunta se analizaron las acciones: *Toma de Datos y Analizar Magnitudes*. Con la pregunta se pretendía que los estudiantes anotaran todas las magnitudes que creen que se observaron en la situación experimental. Se pudo observar en las respuestas que todos los estudiantes identificaron por lo menos tres magnitudes en la situación experimental, escritos tal vez con diferentes nombres, pero coincidieron en que estas magnitudes observadas fueron: el peso de los objetos redondos, el tamaño de los objetos redondos y el alargamiento del resorte.

Los estudiantes observaron que el alargamiento del resorte variaba debido al cambio sucesivo de los objetos redondos puestos en la balanza. Lo anterior los llevó poco a poco a analizar cuáles magnitudes iban a entrar en juego en el desarrollo del taller.

Pregunta 2: Completa la tabla de datos según lo observado en la situación experimental.

Los datos obtenidos para esta situación experimental fueron los mismos para los talleres de cada estudiante, ya que uno de los docentes tomó cada una de las medidas del alargamiento del resorte cuando puso los objetos redondos en la balanza graduada. Cada estudiante registró los valores correctamente en la tabla de datos presentada en el taller.

Fue explicado por los docentes que el alargamiento del resorte es dado en centímetros y su escritura debía ser de la siguiente manera para evitar confusiones $20\ cm$, lo mismo para el peso de los objetos redondos que se representó de la siguiente manera $100\ g$, la medida de la magnitud se daba en gramos.

Tabla 11. Resultados de la segunda pregunta del Taller 2.

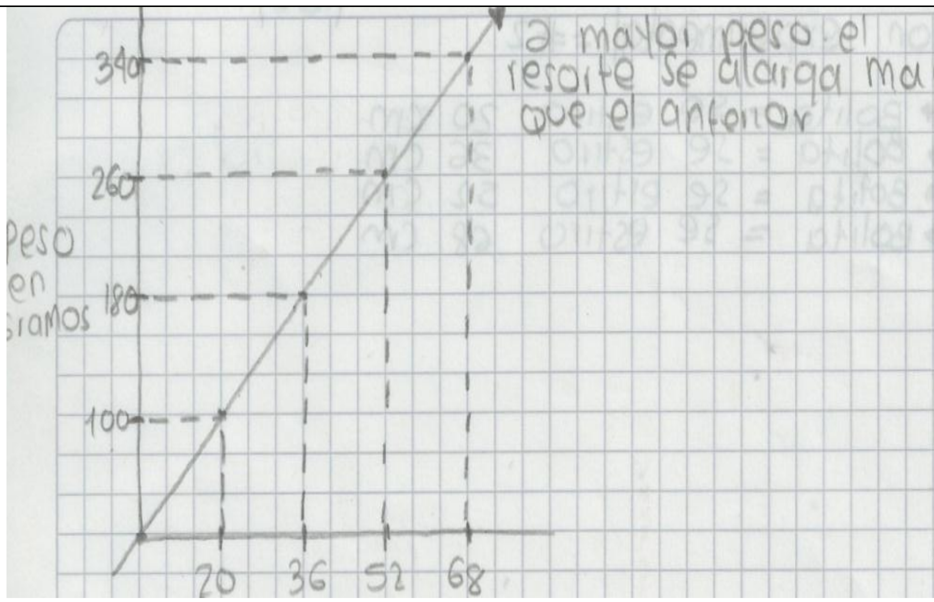
Peso del objeto Redondo	Primer peso $100\ g$	Segundo peso $180\ g$	Tercer peso $260\ g$	Cuarto peso $340\ g$
Alargamiento del resorte	$20\ cm$	$36\ cm$	$52\ cm$	$68\ cm$

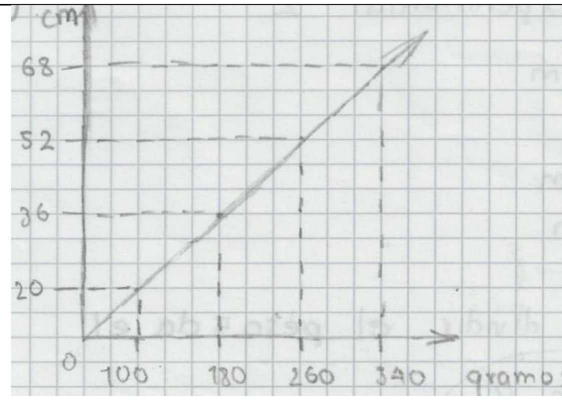
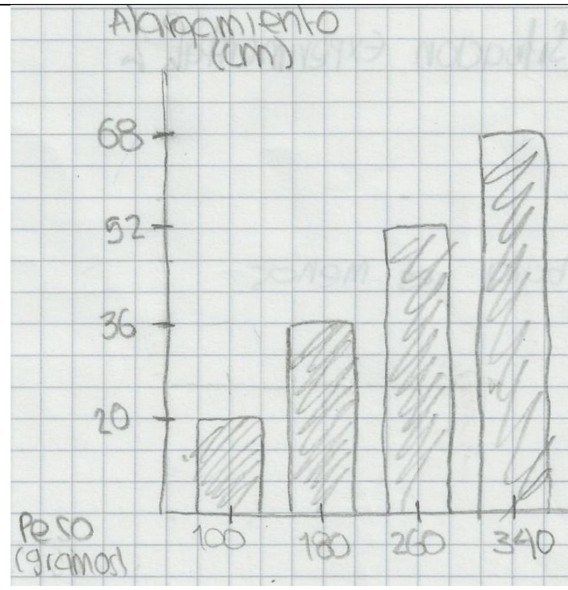
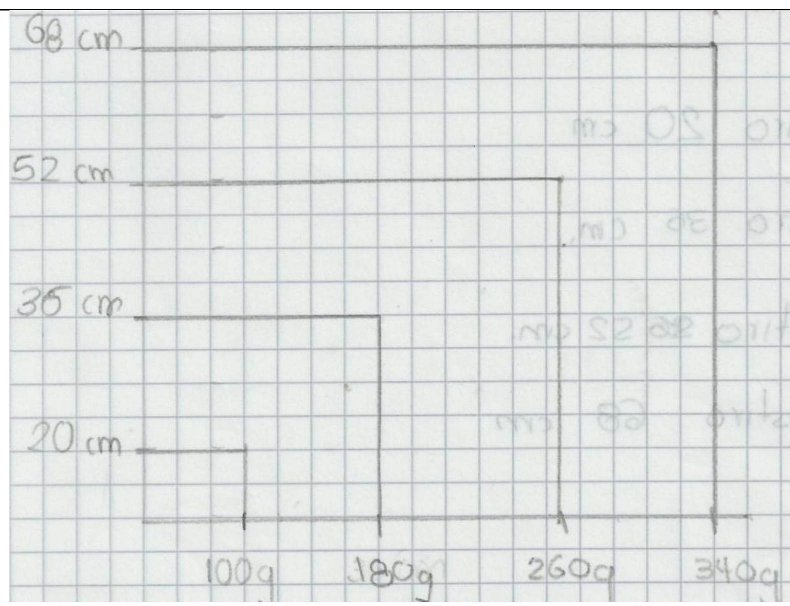
Los estudiantes observaron que en cada dato registrado se notaba un importante *cambio* en la magnitud que fue tomada por uno de los docentes. Este cambio se hizo sobresaliente cuando los estudiantes tabularon los datos de las dos magnitudes y observaron la correspondencia uno a uno entre ellos.

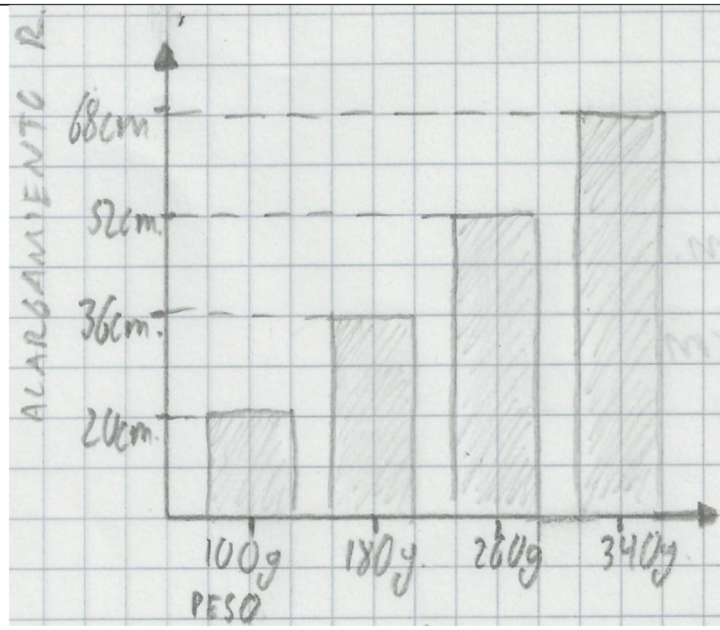
En esta actividad la *concepción-acción* ya se puede evidenciar a partir de la primera acción, puesto que en el *nivel acción,* que es evidenciado por una leve *idea de cambio* ya lo han reflejado los estudiantes sabiendo de ante mano que sólo se analizaran dos magnitudes por el antecedente de la actividad anterior.

Pregunta 3: ¿Representar gráficamente las magnitudes observadas?

Tabla 12. Resultados de la tercera pregunta del Taller 2.

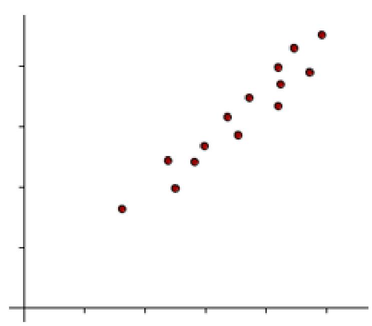
Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	

<table>
<tr><td>Miguel
(Noveno grado)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ana Rocío
(Noveno grado)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Manuel
(Octavo grado)</td><td>
</td></tr>
</table>

Klizman (Octavo grado)	

En esta pregunta se analizó la acción *Graficar*. Los estudiantes se aproximaron a una gráfica de correlación directa, aunque con el mismo error de la actividad anterior en la ubicación de las distancias de las medidas sobre los ejes. Aun así la lectura coherente de los datos permitió a los estudiantes analizar el comportamiento de las medidas de las magnitudes.

Figura 16. Ejemplo de una gráfica de correlación directa.



La acción de algunos estudiantes muestra que la nube de puntos se acercó a una recta. Aquí las gráficas son un aporte valioso porque reflejan que los estudiantes tienen una idea de relación entre las magnitudes peso de objetos redondos y alargamiento del resorte. Es en este punto donde ellos empiezan a formarse argumentos de la correlación directa que hay entre dichas magnitudes. Las gráficas que no se asemejan a una recta como las que presentan diagramas de barras no son necesariamente inadecuadas, puesto que nos interesa la lectura coherente que hacen los estudiantes de la correlación directa de los datos que presentan en sus gráficas más que la representación exacta que podrían hacer de ésta.

Al finalizar esta pregunta se vuelve a realizar una entrevista a uno de los estudiantes acerca de su representación gráfica.

> *Entrevistador: ¿Por qué ubicas los valores de la magnitud peso de objetos redondos sobre el eje horizontal? (se le señala con la mano a la estudiante el eje horizontal en el plano dibujado por ella).*
>
> *Ana Rocío: Pues, yo creo que en ese eje debe ir. Pues, es la primera magnitud.*
>
> *Entrevistador: ¿Qué quieres decir con eso de que la magnitud peso es la primera magnitud?*
>
> *Ana Rocío: Sí, la magnitud peso ya estaba,… Como cuando uno toma los valores de "x" en una recta en la clase.*
>
> *Entrevistador: ¿De una recta?, me podrías explicar.*
>
> *Ana Rocío: Bueno, uno hace una tablita parecida a la de la segunda pregunta. Y se pone en los valores de "x" los que uno quiera. Luego es la primera que ya está. Las de "y" se hallan cuando uno reemplaza en la fórmula que la profe da.*

Entrevistador: ¿Entonces a eso te refieres como la primera magnitud?
Ana Rocío: Si claro, en clases vimos que la primera se pone en el eje de abajito.
Entrevistador: ¿El eje vertical?
Ana Rocío: Sí, en ese.

En esta entrevista se pudo observar la razón por la que Ana ubicó las medidas de las magnitudes en los ejes correspondientes. Ahora bien, las gráficas de Ana, Manuel y Klizman no muestran una recta continua, hacen suponer saltos entre las parejas ordenadas. Sin embargo, al no tener mecanizado este tipo de representaciones, ellos entienden que hay una continuidad en los datos, lo cual se refleja en las preguntas subsiguientes.

Pregunta 4: ¿Qué ocurre cuando el peso de los objetos redondos va en aumento? ¿Cómo relacionas el comportamiento de estas magnitudes?

Tabla 13. Resultados de la cuarta pregunta del Taller 2

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	• Cuando el peso del objeto redondo aumenta el resorte se alarga mas. • a mayor peso del objeto redondo el alargamiento es mayor que el objeto anterior.
Miguel (Noveno grado)	comportamiento de estas magnitudes? el resorte aumenta o se alarga es diferente su peso Al relasionarlas nos va a dar el mismo resultado

Ana Rocío (Noveno grado)	comportamiento de estas magnitudes? cuando el peso de la bolita aumenta el resorte que lo sostiene se alarga
Manuel (Octavo grado)	comportamiento de estas magnitudes? 1. Cuando el aumento del objeto redondo se pone en el resorte se alarga mas el resorte. 2. Bien por que van cambiando los pesos y los giamos 5. ¿Al observar el comportamiento de las magnitudes y su variación, que puedes concluir de las
Klizman (Octavo grado)	Cuando el objeto redondo va pesando mas el resorte va alargandose de acuerdo al peso del objeto redondo.

En esta pregunta se analizó la acción *Analizar Comportamientos.* Pretendemos que los estudiantes se den cuenta de la relación entre las magnitudes peso de objetos redondos y alargamiento de un resorte. Lo anterior se hace notorio en todas las expresiones hechas por los estudiantes. Por ejemplo, Yibey comenta: "*cuando el peso del objeto redondo aumenta, el resorte se alarga más*" y Ana Rocío comenta: "*cuando el peso de la bolita aumenta el resorte que lo sostiene se alarga*".

Con base en el análisis y la descripción de esta situación experimental, cada estudiante analizó que la relación en el comportamiento entre las magnitudes observadas fue de una correlación directa. Aquí Los estudiantes observaron en esta relación que si una magnitud aumenta la otra también va en aumento. Por ejemplo, Klizman comenta: “*cuando el objeto redondo va pesando más, el resorte va alargándose de acuerdo al peso del objeto redondo*”.

En el análisis a priori detallamos la posibilidad de que los estudiantes analizaran factores externos como la magnitud tamaño de los objetos redondos. Aquí vemos que los estudiantes no notaron este factor externo, debido a la correspondencia directa entre el aumento del tamaño de objetos redondos a medida que aumenta el peso de estos. Lo que no sucedió en el caso de la actividad anterior del embudo, cuando los estudiantes mencionaron el factor externo velocidad del agua en sus respuestas a la pregunta equivalente.

La Teoría APOE propone que la repetición de acciones permite mejorar la *concepción-acción* del objeto en estudio y así formar adecuadamente la *concepción-proceso*. Aquí se observar que no es sólo las acciones repetitivas que acerca a los estudiantes a *la concepción acción*, sino también los conocimientos previos en problemas similares y habilidades adquiridas en clases de matemáticas.

Pregunta 5: ¿Al observar el comportamiento de las magnitudes y su variación, qué puedes concluir de la variación de las magnitudes cada una por separado?

Tabla 14. Resultados de la quinta pregunta del Taller 2.

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	• a medida que las Bolitas se cambia se observa que el peso cambia o varia a mayor • yo observe que al colocar cada Bolita en el Resorte la de mayor peso asia que el resorte se alargaba más.
Miguel (Noveno grado)	- Su peso varia a las demas y su alargamiento

Ana Rocío (Noveno grado)	·a medida que cambiaban las Bolitas el peso va aumentando y el alargamiento tambien aumenta
Manuel (Octavo grado)	1. Al cambiar el objetos observe que necesariamente cambiaba el peso de cada una 2. El resorte aumenta mas cada vez que se cambio de objeto . Con lo observado en la gráfica, construya una posible expresión algebraica que modele la ituación experimental.
Klizman (Octavo grado)	•PESO: Mientras hiban cambiando las pelotas cada una hiban pesando mas que la anterior. •RESORTE: Mientras las pelotas pesaban mas el resorte hiba estirando mas que la anterior.

En esta pregunta se analizó la acción *Analizar Variables*. Los estudiantes tenían que hacer una descripción de lo que sucedía con cada una de las magnitudes por aparte, para así analizar las características de independencia y dependencia de la variable.

Es notoria la confusión en el estudiante Miguel al analizar las magnitudes como una relación, pero se observa que Ana Rocío, Manuel y Klizman escriben: "*PESO: a medida que cambia las bolitas el peso va aumentando. ALARGAMIENTO: El alargamiento también aumenta*"; "*PESO: al cambiar los objetos observe que necesariamente cambiaba el peso de cada uno. ALARGAMIENTO: El resorte aumenta cada vez que se cambió de objeto*"; "*PESO: mientras iban cambiando las pelotas cada una iba pesando más que la anterior. ALARGAMIENTO: Mientras las pelotas pesaban más, el resorte iba estirando más que la anterior*" respectivamente. De esta manera se logra evidenciar un acercamiento al análisis a priori de esta actividad.

Ahora bien, según nuestro análisis a priori, observamos la comprensión de la característica de la independencia de la variable en los estudiantes por medio de sus expresiones. Por ejemplo Ana Rocío escribe: "*PESO: a medida que cambia las bolitas el peso va aumentando".* Seguidamente también detallamos la compresión de la característica de la dependencia de la variable por los estudiantes según sus expresiones. Por ejemplo Manuel escribe: "*ALARGAMIENTO: El resorte aumenta cada vez que se cambió de objeto*".

Se completó y se logró observar parte de lo que esperábamos en la siguiente entrevista:

> *Entrevistador: Al observar el comportamiento de las medidas de la magnitud que dependía de la otra magnitud ¿Qué puedes concluir?*
> *Manuel: ¿La que dependía de otra? ¿Cómo así?*
> *Entrevistador: Si, ¿Cuál magnitud cambiaba si la otra también cambiaba?*
> *Manuel: Ah ya, por supuesto, el aumento del resorte. El resorte se estiraba más dependiendo del objeto que se colocara.*
> *Entrevistador: Entonces ¿Cuál es la magnitud que no depende de otra, la magnitud independiente?*
> *Manuel: Sería, entonces,… Lógico, el peso, pues los objetos ya tienen un peso cada uno, mientras que el resorte es igual siempre, solo cambia cuando se pone diferentes objetos.*

Pregunta 6: Con lo observado en la gráfica, construya una posible expresión algebraica que modele la situación experimental.

Tabla 15. Resultados de la sexta pregunta del Taller 2

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	1. observe que al dividir el peso en 5 nos da el alargamiento ej= $A = \frac{P}{5} = 20 = \frac{100}{5}$ "Comprobación"
Miguel (Noveno grado)	Observé que al dividir el peso 5 da el alargamiento $a = \frac{P}{5}$
Ana Rocío (Noveno grado)	observe que al dividir el peso por el alargamiento da un resulta = 5 Y al Dividir el Peso por 5 da el alargamiento X = Peso Y = Alargamiento $\frac{100X}{20Y} = 5 \rightarrow \frac{100X}{5} = 20Y$
Manuel (Octavo grado)	Observe que al dividir el peso en 5 me da el alargamiento del resorte $\square = \frac{\square}{5}$ $a = \frac{P}{5}$
Klizman (Octavo grado)	Observe que al dividir por 5 el peso me ba a dar el estiramiento del resorte. $R = \frac{P}{5}$

En esta pregunta se analizó la *interiorización* de las acciones propuestas en nuestra descomposición genética preliminar. Aquí pretendíamos que los estudiantes fueran confrontados a construir una posible modelación del fenómeno de cambio visto en la situación experimental. Observamos que los estudiantes realizaron una adecuada formación de esta expresión algebraica, debido a la proporción similar de dividir cada peso del objeto redondo entre cinco lo cual daba como resultado las medidas del alargamiento del resorte.

La expresión que coincidieron la mayoría fue: $a = \frac{p}{5}$, siendo a el alargamiento del resorte y p el peso de objetos redondos. La única excepción fue la expresión hecha por la estudiante Ana Rocío, donde realizó el siguiente procedimiento: $\frac{100x}{20y} = 5, \rightarrow \frac{100x}{5} = 20y$, lo cual daría $x = y$. Observamos que captaba la idea de la proporción que al dividir las medidas de los pesos por cinco daba las medidas de los alargamientos del resorte, pero se confundió al tratar de representarlo en una expresión algebraica.

Para obtener más evidencias realizamos la siguiente entrevista:

La respuesta de Yibey a la pregunta fue: (*Observé que al dividir el peso en 5 nos da el alargamiento. Ej*= $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{p}}{5}$, 20=$\frac{100}{5}$, *"comprobación"*).

> *Entrevistador: ¿Cómo lograste representar la relación entre las dos magnitudes como una expresión algebraica? (señalando con la mano la expresión que la estudiante realizó)*
>
> *Yibey: … Sólo observé que al dividir el peso de las pelotas en cinco, siempre me iba a dar el alargamiento del resorte.*
>
> *Entrevistador: ¿Cómo lograste deducir la expresión* $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{p}}{5}$*?*
>
> *Yibey: Ah, fácil si A es el alargamiento y P es el peso, entonces el alargamiento es igual al peso sobre cinco.*

Entrevistador: ¿Cómo lograste representar esa división que viste en las proporciones por medio de letras? (señalando con la mano la expresión que la estudiante realizó)
Yibey: No entiendo, ¿cómo así?
Entrevistador: Es decir, ¿cómo supiste utilizar las letras para hacer esa representación algebraica?
Yibey: Ah ya, bueno en clase hemos visto mucho eso. Por ejemplo, esos problemas, de por ejemplo, Juan tiene el doble de la edad de Pedro, entonces uno pone J=2P.

Con base a la gráfica y en la tabulación de datos, los estudiantes explicaron con sus propias palabras que el aumento en el alargamiento del resorte dependió del aumento del peso de objetos redondos, comprendiendo una de las características de la variable como *relación funcional* y su correlación directa, cuando las medidas de una de las magnitudes aumentan las medidas de la otra también aumentan.

Observamos que gracias al manejo de algunas generalidades de la proporcionalidad (*observé que al dividir el peso de las pelotas en cinco, siempre me iba a dar el alargamiento del resorte*), y la representación en letras de algunos contextos (*por ejemplo, Juan tiene el doble de la edad de Pedro, entonces uno pone J=2P*), los estudiantes lograron una posible modelación del fenómeno de cambio en este contexto. Lo anterior evidencia que son estos conocimientos previos lo que refuerzan la interiorización de acciones, que las acciones actuando por sí solas en los estudiantes.

7.3 ANÁLISIS A POSTERIORI: ALARGAMIENTO DE UN RESORTE RESPECTO A LA DISMINUCIÓN DEL PESO DE OBJETOS REDONDOS DE MENOR A MAYOR TAMAÑO

El objetivo del taller N°3 basado en esta situación experimental es analizar el comportamiento del alargamiento de un resorte respecto a la disminución del peso de objetos redondos como una relación de dos magnitudes directamente correlacionadas.

Con base en lo observado en las respuestas y argumentos del taller por cada estudiante, vamos a organizar por cada pregunta las cinco respuestas dadas por los cinco participantes en nuestra actividad.

Figura 17. Dibujo de la balanza y los cinco objetos redondos (Situación experimental 3).

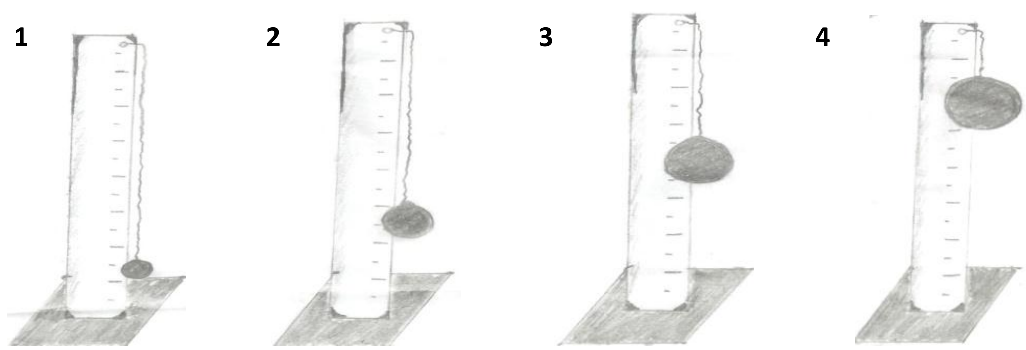
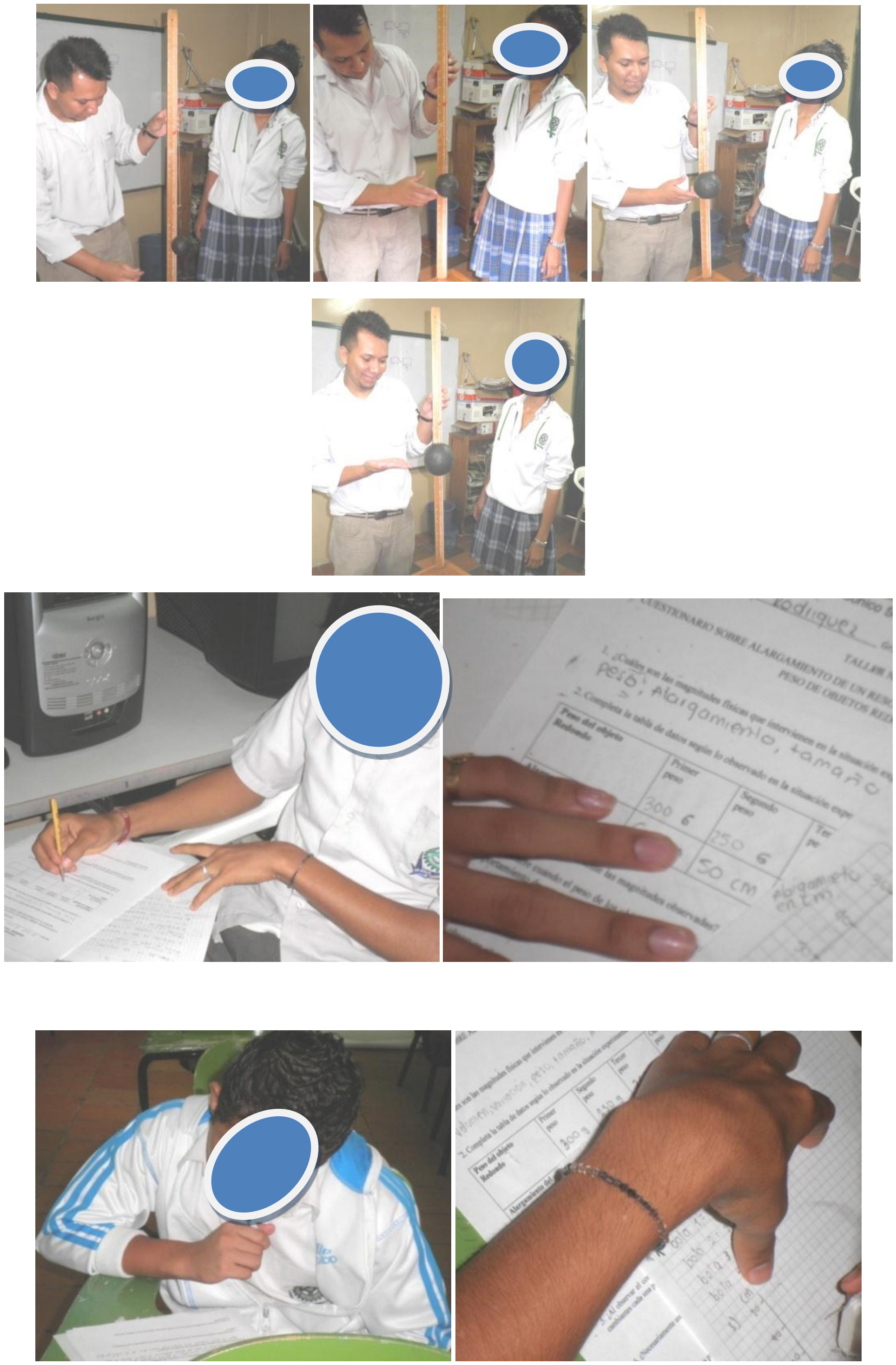


Figura 18. Fotos tomadas en la situación experimental 3.



Pregunta 1: ¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental?

Tabla 16. Resultados de la primera pregunta del Taller 3.

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	peso, Alargamiento, tamaño.
Miguel (Noveno grado)	Volumen, variación, peso, tamaño. Alargamiento
Ana Rocío (Noveno grado)	- El tamaño del objeto - El alargamiento - El peso
Manuel (Octavo grado)	El Tamaño, El peso, El alargamiento del resorte. etc
Klizman (Octavo grado)	Peso, tamaño, alargamiento.

En esta pregunta se analizó las acciones *Toma de Datos y Analizar Magnitudes*. La correcta identificación de las magnitudes en la situación experimental de la disminución del resorte da bases suficientes para que el estudiante pase de un *nivel acción* a una *concepción-acción.* Seguidamente se observó en los datos que todos los estudiantes identificaron por lo menos tres magnitudes en la situación experimental, coincidiendo que estas magnitudes observadas fueron: el peso de los objetos redondos, el tamaño de los objetos redondos y el alargamiento del resorte. Hasta este momento la *idea de cambio* ya ha sido profundizada en los estudiantes debido al desarrollo de las actividades anteriores y la identificación adecuada de las magnitudes en esta pregunta.

Pregunta 2: Completa la tabla de datos según lo observado en la situación experimental.

Al igual que la actividad anterior los datos obtenidos para esta situación experimental fueron los mismos para los talleres de cada estudiante. Los docentes tomaron cada una de las medidas del alargamiento del resorte cuando se pusieron los objetos redondos de menor peso y mayor tamaño sucesivamente en la balanza graduada. Cada estudiante registro los valores correctamente en la tabla de datos presentada del taller. Seguidamente fue explicado por los docentes que el alargamiento del resorte es dado en centímetros y su escritura debía ser de la siguiente manera para evitar confusiones $60\ cm$, lo mismo para el peso de los objetos redondos que se representó de la siguiente manera $300\ g$, la medida de la magnitud se daba en gramos.

Tabla 17. Resultados de la segunda pregunta del Taller 3.

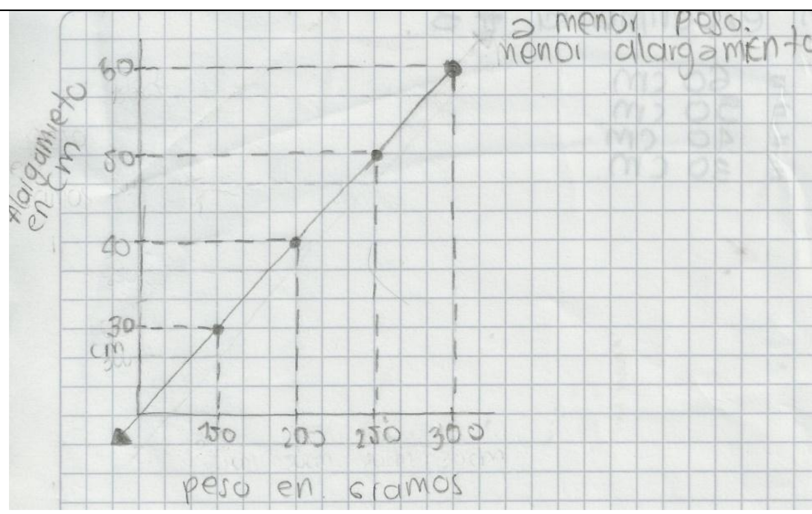
Peso del objeto Redondo	Primer peso $300\ g$	Segundo peso $250\ g$	Tercer peso $200\ g$	Cuarto peso $150\ g$
Alargamiento del resorte	$60\ cm$	$50\ cm$	$40\ cm$	$30\ cm$

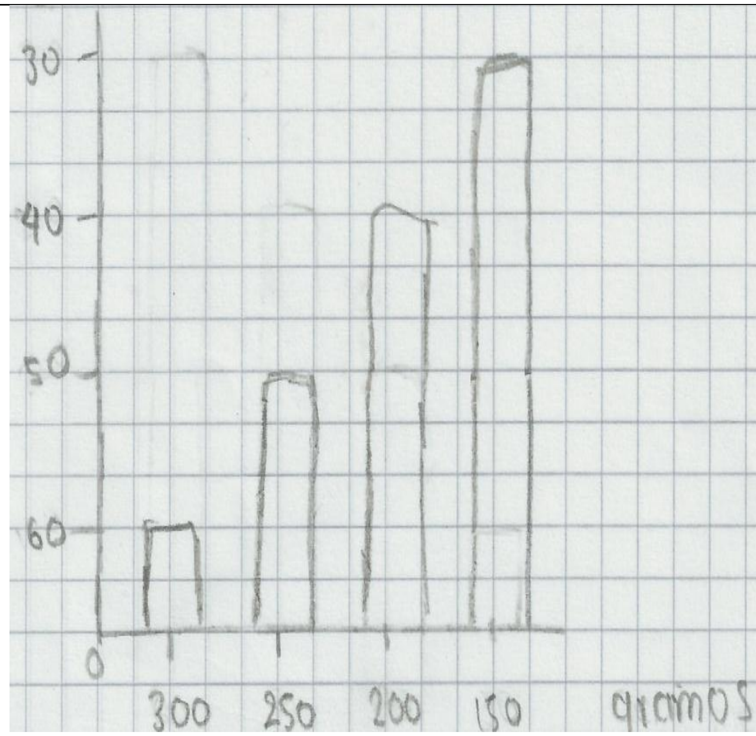
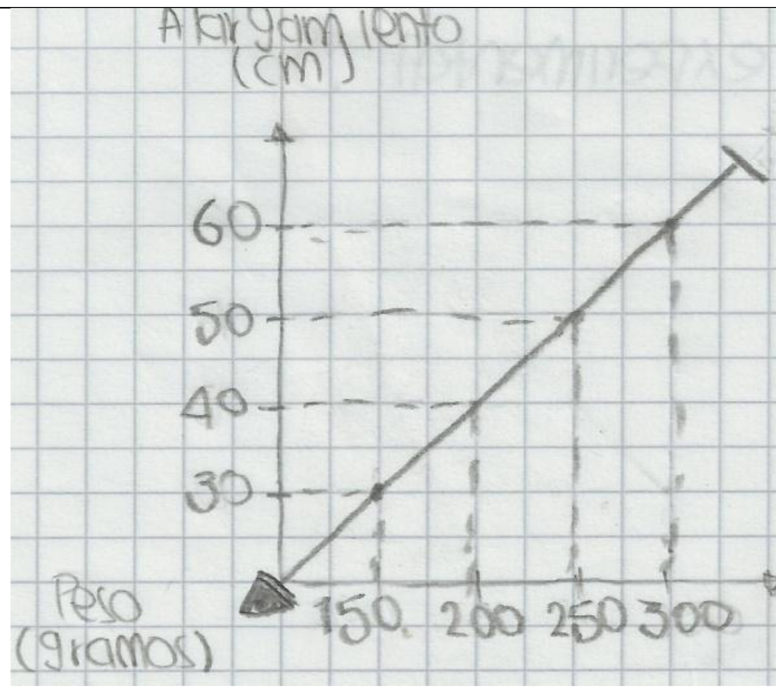
La tabulación de datos y la correspondencia uno a uno de estos, da argumentos a los estudiantes para analizar de antemano las acciones subsiguientes sin necesidad de haber actuado en ellas. De acuerdo con la Teoría APOE: “si una persona sólo puede resolver problemas haciendo uso de las transformaciones (acciones), se dice que está en *nivel acción*”, pero los estudiantes en este momento mostraron más allá de un *nivel acción*, pues, ellos dieron respuesta a esta pregunta en muy poco tiempo evidenciando un claro dominio en esta acción como en la anterior de *Analizar Magnitudes*. Las respuestas a esta pregunta y la anterior evidenciaron una *concepción-acción* más elaborada.

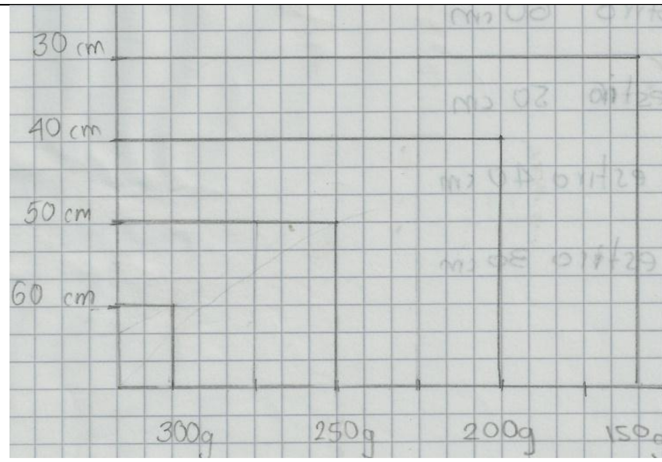
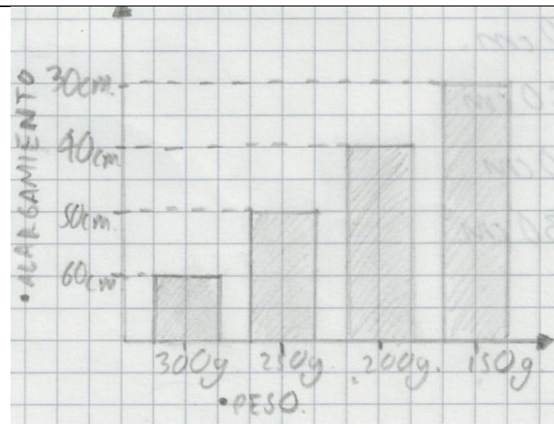
En esta actividad los estudiantes ya han estado familiarizados con cada una de las acciones de nuestra descomposición genética gracias a las dos actividades anteriores: *Toma de Datos, Analizar Magnitudes, Tabular, Graficar, Analizar Comportamientos y Analizar Variables.* Aun así se hace evidente los elementos que no fueron tomados en cuenta como el dominio que los estudiantes ya poseían en el manejo de tabla de datos y representaciones gráficas.

Pregunta 3: Representar gráficamente las magnitudes observadas.

Tabla 18. Resultados de la tercera pregunta del Taller 3.

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	

<table>
<tr><td>Miguel
(Noveno grado)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Ana Rocío
(Noveno grado)</td><td>
</td></tr>
</table>

Manuel (Octavo grado)	
Klizman (Octavo grado)	

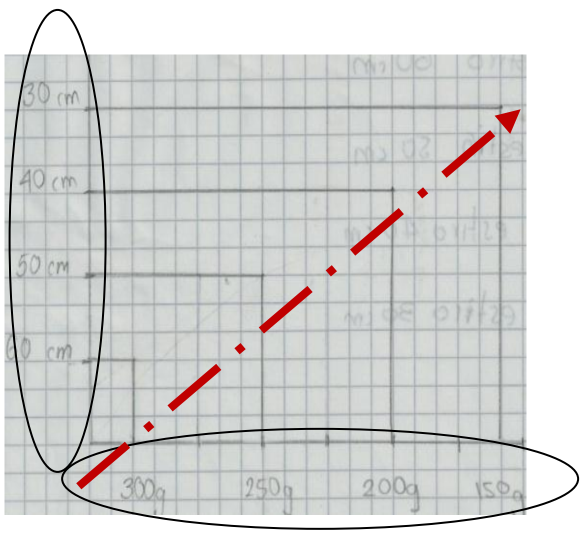
En esta pregunta se analizó la acción *Graficar*. Hasta este momento se observó que los estudiantes no poseían simplemente un *nivel acción* como en la primera actividad. Aunque la repetición de acciones es necesaria para formar una adecuada *concepción-acción*, cuando está ya ha sido profundizada por los estudiantes, empiezan a generalizar sin necesidad de seguir repitiendo acciones (*concepción proceso*).

Aunque en algunas gráficas como las de Miguel, Manuel y Klizman los puntos correspondientes a cada eje fueron ubicados de mayor a menor medida de magnitud y sus representaciones no concuerdan con una recta continua, ellos lograron comprender que los datos pueden seguir extendiéndose y que en los saltos entre las parejas ordenadas puede haber más puntos, esto debido a las respuestas dadas en las preguntas subsiguientes.

Fue de gran importancia conocer que los estudiantes tuvieron una lectura coherente de los datos y lograron comprender la característica de correlación directa entre variables, a medida que disminuyen las medidas de una magnitud las medidas de la otra también disminuyen.

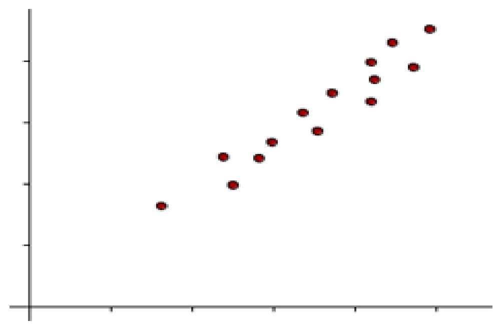
Ejemplo de la lectura de la gráfica realizada por Manuel:

Figura 19. Gráfica de las magnitudes dadas en la situación experimental 3 realizada por Manuel.



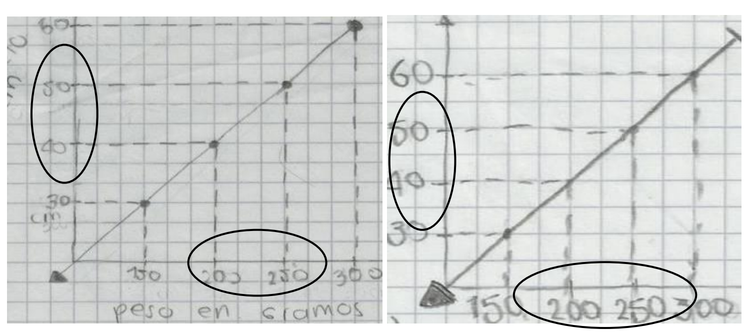
Los estudiantes presentaron falencias al ubicar las medidas de las magnitudes en los respectivos ejes debido al orden de mayor a menor en que tomaron los datos. Aun así, logran una adecuada ubicación de parejas ordenadas en el plano, lo cual permite observar que los estudiantes tienen claro el comportamiento que deben presentar las gráficas, concluyendo que a medida que disminuyen las medidas de una magnitud las medidas de la otra también disminuyen. En nuestro análisis a priori esperábamos que los estudiantes realizaran una gráfica de correlación directa como la siguiente:

Figura 20. Ejemplo de una gráfica de correlación directa.



Pretendíamos que en esta correlación directa la distribución de la nube de puntos la acercaran a una recta. A continuación presentamos algunas gráficas que se aproximaron a lo esperado:

Figura 21. (Gráficas de las magnitudes dadas en la situación experimental 3 hechas por Yibey y Ana Rocío respectivamente).



Observamos que las gráficas de Yibey y Ana Rocío se aproximaron un poco a lo que esperábamos en nuestro análisis a priori. Las estudiantes observaron y comprendieron el comportamiento de las magnitudes al señalar con una flecha hacia abajo que las medidas de las magnitudes son cada vez menores. Al finalizar esta pregunta se vuelve a realizar una entrevista a uno de los estudiantes acerca de su representación gráfica.

> *Entrevistador: ¿Por qué dibujó una flecha señalando hacia abajo, en la representación gráfica? (se le señala con la mano a la estudiante la gráfica hecha por ella).*
> *Yibey: … Pues, creo que,… Es evidente que las medidas siguen bajando.*
> *Entrevistador: ¿Podrías explicarlo mejor?*
> *Yibey: Pues, mira, (mostrando la gráfica), cuando el peso era 300 g el resorte se alargó 60 cm, cuando era 250 disminuyó su alargamiento a 50 cm, y así sigue y sigue, pues la flechita me indica que sigue bajando en general para todas las medidas.*

Estos argumentos fueron común denominador en la mayoría de los estudiantes, debido a que empezaron a generalizar la situación sin aún haberla modelado a través de una expresión algebraica. Por ejemplo, Yibey (noveno) comenta: "*la flechita me indica que sigue bajando en general para todas las medidas.*"

Pregunta 4: ¿Qué ocurre cuando el peso de los objetos redondos disminuye sucesivamente? ¿Cómo relacionas el comportamiento de estas magnitudes?

Tabla 19. Resultados de la cuarta pregunta del Taller 3.

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	a menor peso, menor alargamiento.
Miguel (Noveno grado)	No importa el tamaño si no el peso que se prolongue Disminuye cada una
Ana Rocío (Noveno grado)	comportamiento de estas magnitudes? Que el tamaño de el objeto no afecta en nada al peso, por lo tanto a mayor peso mayor alargamiento
Manuel (Octavo grado)	comportamiento de estas magnitudes? 1. Porque el proceso se revierte y va ahora de menor a mayor 2. Que ahora la pequeña pesa mas y tiene menor tamaño y las demas son mas grandes y pesan menos
Klizman (Octavo grado)	Cuando el peso del objeto disminuye sucesivamente el resorte va disminuyendo.

En esta pregunta se analizó la acción *Analizar Comportamientos*. Debido a la complejidad de la actividad, observamos que algunos estudiantes no tuvieron la misma facilidad que en actividades anteriores para definir la relación entre las magnitudes a causa del factor externo magnitud tamaño de objetos redondos.

La idea de la relación del comportamiento entre las magnitudes peso de objetos redondos y alargamiento del resorte estaba claro en cada uno de los estudiantes.

De ahí esperábamos que respondieran que a medida que disminuyen las medidas del peso de objetos redondos, también disminuyen las medidas del alargamiento del resorte, pero el factor externo magnitud tamaño, hizo que algunos de los estudiantes se les dificultara expresar sus respuestas.

En el caso de Manuel se evidencia esta dificultad por el factor externo del tamaño de los objetos redondos. Manuel escribe: "*Que ahora la pequeña pesa más y tiene menos tamaño y las demás son más grandes y pesan menos*". Cuando lo que se pedía era la relación entre las magnitudes peso de objetos redondos y alargamiento del resorte.

Ahora bien, en los casos de Miguel y Ana Rocío, su confusión no radicó en involucrar la magnitud tamaño, sino que quisieron expresar que el tamaño en sí, no importaba, pero en el momento de hacer la aclaración, la cual no se pedía, se les hizo confuso describir la relación entre las magnitudes que si estaban involucradas. Miguel comenta: "*No importa el tamaño, sino el peso que se prolongue, disminuye cada una*"; Ana Rocío escribe: "*Que el tamaño del objeto no afecta nada al peso*".

Las descripciones que pretendíamos en nuestro análisis a priori fueron más cercanas en algunos estudiantes. Por ejemplo, Yibey y Klizman escriben: "*a menor peso, menor alargamiento*" y "*cuando el peso del objeto disminuye, sucesivamente el resorte va disminuyendo*" respectivamente.

Se logra observar que únicamente Yibey y Klizman lograron expresar la correlación directa entre las magnitudes. Sin embargo, el resto de estudiantes tuvo una idea clara del comportamiento de estas magnitudes, sólo que se les dificultó escribirlo en el taller por el factor externo.

Preguntas 5 y 6.

Pregunta 5: ¿Al observar el comportamiento de las magnitudes y su variación, qué puedes concluir de la variación en las medidas de las magnitudes cada una por aparte?

Tabla 20. Resultados de la quinta pregunta del Taller 3.

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno)	nos dimos cuenta que el tamaño. no influye en el alargamiento - si no influye el peso.
Miguel (Noveno grado)	1 bola = es pequeña la bola pero su peso es mas grande 2 bola = es más gradesita pero es menor el peso 3 bola = es media pero era menos su medida 4 bola = es grande su medida es menor
Ana Rocío (Noveno)	El tamaño no influye en el alargamiento lo que influye es el Peso a menor Peso no alarga mucho
Manuel (Octavo grado)	ambiantes cada una por aparte? Yo observe al. poner los objetos empezaron a disminuir los objetos. 2. Yo obserue que al colocar los objetos el resorte
Klizman (Octavo grado)	cambiantes cada una por aparte? • PESO: Mientras el ejercicio avanzaba el objeto redondo disminuia su peso. • ALARGAMIETO: Mientras el peso del objeto disminuia el resorte hacia lo mismo.

Pregunta 6: ¿Necesariamente una magnitud debe depender de otra para su variación?

Tabla 21. Resultados de la sexta pregunta del Taller 3.

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	6. ¿Necesariamente una magnitud debe depender de otra para su variación? segun lo que vimos una magnitud si depende de otra ya que observamos que mientras un objeto cambia la otra magnitud tamben.
Miguel (Noveno)	si porque su variación cambia y no es importante su tamaño
Ana Rocío (Noveno grado)	Si porque cuando el peso cambiaba el alargamiento tambien si depende una de otra
Manuel (Octavo grado)	Si porque en el embuclo la tapa devia cambiar el orificio y las pelotas necesitan de las otras para notar la diferencia.
Klizman (Octavo grado)	6. ¿Necesariamente una magnitud debe depender de otra para su variación? Segun lo que vimos una magnitud dependia de la otra porque, para que el resorte bajara tenia que tener un peso mayor al otro.

En estas dos preguntas se buscó analizar la acción *Analizar Variables*. En las anteriores actividades hubo un claro dominio por parte de los estudiantes en la comprensión de las características de la dependencia e independencia de la variable. La complejidad en esta actividad pretende averiguar la profundización de este entendimiento.

En la pregunta cinco y seis de esta actividad nos interesó averiguar los razonamientos que los estudiantes poseen de la naturaleza de independencia y dependencia de la variable.

Al igual que en la pregunta cinco de la actividad anterior se observa en algunos estudiantes una confusión en sus respuestas, en este caso, en las estudiantes Yibey y Ana Rocío al analizar las magnitudes como una relación, lo que se pedía en la pregunta cuatro, ellas mencionaron el factor externo magnitud tamaño. Ahora bien, podemos observar que el estudiante Miguel, hace una descripción de lo que sucedió en cada momento del experimento, mostrando evidencias del comportamiento de las magnitudes por aparte.

Observamos nuevamente como en la actividad anterior que Manuel y Klizman describieron cada una de las magnitudes por aparte. Por ejemplo Manuel escribe: "*PESO: observé que al poner los objetos empezaron a disminuir los pesos. ALARGAMIENTO: Yo observé que al colocar los objetos el resorte aumentaba*"; Klizman: "*PESO: mientras el ejercicio avanzaba el objeto redondo disminuía su peso. ALARGAMIENTO: Mientras el peso del objeto disminuía, el resorte hacia lo mismo*".

La comprensión de la característica de la independencia de la variable fue notoria en algunos estudiantes a través de las explicaciones que dieron en las respuestas a la pregunta cinco. Por ejemplo, Klizman comenta: "*PESO: mientras el ejercicio avanzaba el objeto redondo disminuía su peso".* Seguidamente detallamos la compresión de la característica de la dependencia de la variable por los estudiantes según sus expresiones. Por ejemplo, Klizman comenta: *"ALARGAMIENTO: Mientras el peso del objeto disminuía, el resorte hacia lo mismo*".

Fue fundamental hacer nuevamente una entrevista para la pregunta cinco y reforzar lo que esperábamos:

> *Entrevistador: En esta actividad ¿Cuál cree que es la magnitud independiente de esta situación experimental? Teniendo en cuenta lo descrito en las anteriores actividades.*
> *Miguel:… Pues, creo que el peso, como en la pasada actividad, el peso, porque el peso de cada bola ya está dado.*
> *Entrevistador: Si, ¿Por qué no lo describiste de esa forma en la pregunta cinco? (señalando con la mano su respuesta a la pregunta 5).*
> *Miguel: La verdad, no había entendido la pregunta bien, pero ahora sí la entiendo, la magnitud independiente es el peso de las bolas, porque ya están dados los pesos, pero estos si influyen para el cambio del resorte.*
> *Entrevistador: Entonces ¿la magnitud del alargamiento del resorte que magnitud viene siendo?*
> *Miguel: Pues, viene siendo lógico la otra, la dependiente, ya que cada alargamiento depende del peso que se da en ese momento.*

Las entrevistas ayudaron a aclarar las dudas y confusiones en algunos momentos de las preguntas del taller. Ahora bien, en esta actividad se agregó una nueva pregunta que no hizo parte de los talleres anteriores. La pregunta seis: ¿Necesariamente una magnitud debe depender de otra para su variación?, esta se diseñó en la última actividad para reforzar las características de dependencia e independencia que posee la variable. Lo anterior lo podemos observar en los siguientes ejemplos: Yibey escribe: “*Según lo que vimos una magnitud si depende de otra, ya que observamos que si un objeto cambia la otra magnitud también*” y

Klizman escribe: “*Según lo que vimos una magnitud dependía de la otra, porque para que el resorte bajara tenía que tener cada vez un peso mayor que el otro*”.

Con el análisis de esta pregunta, se pudo concluir que las acciones *Tabular, Graficar*, *Analizar Comportamientos y Analizar Variables,* les permitieron a los estudiantes identificar conocimientos previos y habilidades para explicar de una forma apropiada la correlación directa de las magnitudes peso de objetos redondos y alargamiento del resorte y las características de dependencia e independencia que posee la variable. Hasta este momento los estudiantes han adquirido facilidad al explicar los fenómenos de cambio presentados en cualquiera de las tres actividades. Estas expresiones en las respuestas de los tres talleres y las entrevistas hechas a los estudiantes son las evidencias de los *razonamientos de cambio.*

Los *razonamientos de cambio* son la primera evidencia que logramos obtener de los estudiantes como parte de la formación de la *concepción-proceso* (interiorización de acciones).

Pregunta 7: Con lo observado en la gráfica, construye una posible expresión algebraica que modele la situación experimental.

Tabla 22. Resultados de la séptima pregunta del Taller 3

Estudiante	Respuesta
Yibey (Noveno grado)	1. al dividir cualquier peso en 5 nos da el alargamiento. ej= $A = \frac{P}{5}$ $60\,cm = \frac{300g}{5}$
Miguel (Noveno grado)	$a = \frac{P}{5} \rightarrow 60 = \frac{300}{5}$

Ana Rocío (Noveno grado)	al dividir el Peso en 5 daba como resultado el alargamiento P = Peso L = alargamiento $\frac{P}{5} = L \rightarrow \frac{300}{5} = 60$
Manuel (Octavo grado)	imental. $a = \frac{P}{5}$
Klizman (Octavo grado)	experimental. $R = \frac{P}{5}$

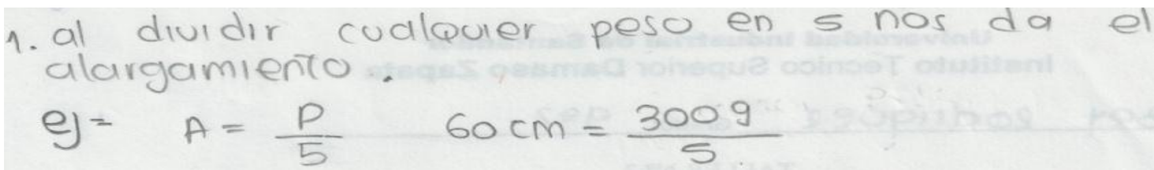
En esta pregunta se analizó la *interiorización* de las acciones de nuestra descomposición genética preliminar del concepto de variable. Podemos observar en las respuestas de cada estudiante que comprendieron la causa del cambio en las magnitudes peso de objetos redondos y alargamiento de un resorte. Lo anterior se convierte en un importante indicio para nuestro trabajo que los estudiantes han llegado a adquirir adecuados *razonamientos de cambio.* Las expresiones algebraicas mostraron como señal más clara que los estudiantes interiorizaron las acciones debido al manejo de las generalidades de la proporcionalidad, las representaciones gráficas y la tabulación de datos.

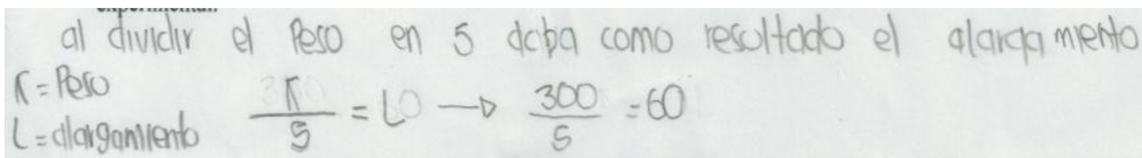
La expresión de esta relación que esperábamos que los estudiantes describieran era de la siguiente forma: $a = \frac{p}{5}$, Donde a representa el alargamiento del resorte y p el peso de cada objeto redondo.

Lo que se puede observar en cada una de las expresiones hechas por los estudiantes es que todos lograron una posible modelación del fenómeno de cambio, pero gracias a los conocimientos previos descritos a lo largo del análisis de resultados, guiados por las acciones de la descomposición genética preliminar.

Ejemplos:

Figura 22. (Expresiones algebraicas construidas por Yibey y Ana Rocío, para modelar la situación experimental 3, respectivamente).


1. al dividir cualquier peso en 5 nos da el alargamiento.
ej= $A = \frac{P}{5}$ 60 cm = $\frac{300g}{5}$


al dividir el Peso en 5 daba como resultado el alargamiento
K = Peso
L = alargamiento $\frac{K}{5} = L \rightarrow \frac{300}{5} = 60$

Se logra observar que los estudiantes analizaron las proporciones entre las magnitudes y concluyeron según sus propias palabras que la fórmula que modelaron coincidían con la de la actividad anterior, pues, se trataba del mismo resorte. Lo anterior se puede reforzar en la siguiente entrevista:

La respuesta de Ana Rocío a la pregunta fue: *“Al dividir el peso en 5 daba como resultado el alargamiento. k= peso, L= alargamiento.* $\frac{k}{5} = \mathrm{L}$ *,* $\frac{300}{5}$=60*”*

> *Entrevistador: ¿Cómo lograste representar la relación entre las dos magnitudes como una expresión algebraica? (señalando con la mano la expresión que la estudiante realizó).*
> *Ana (noveno): Observé que al igual que la actividad que hicimos antes al dividir el peso entre cinco nos daba como resultado lo que se estira el resorte.*

Entrevistador: ¿Cómo lograste deducir la expresión $\frac{\mathrm{k}}{5} = \mathrm{L}$*?*

Ana (noveno): En la actividad que hicimos antes me había confundido al poner las letras, pero ahora sé que se hace así, porque cada peso que yo lo llamé k, al dividirlos en cinco me va a dar los alargamientos que yo llamé L.

Entrevistador: ¿Y esta fórmula entonces serviría para todos los objetos redondos no importando sus tamaños y pesos?

Ana (noveno): emm, Si, creo que sí, si sirve para los pesos que hicimos ahorita, debe servir para todos los pesos que yo ponga en el resorte.

Los argumentos en la explicación de los fenómenos de cambio que hemos llamado *razonamientos de cambio* y la simbolización de cada uno de estos fenómenos fueron las evidencias que esperábamos encontrar en los estudiantes para la *interiorización* de las acciones (*concepción-proceso*), pero esto gracias a los conocimientos previos y habilidades que los estudiantes han adquirido en la realización de temas matemáticos en el aula de clases.

CONCLUSIONES

En la descomposición genética refinada del concepto en estudio se tienen en cuenta los aportes de las acciones de la descomposición preliminar, pero también los elementos que se pasaron por alto y no se analizaron debidamente.

Se pretendía analizar las construcciones mentales acción y proceso propuestas por la Teoría APOE. Según Trigueros (2005): *"Una descomposición genética* parte del análisis de las construcciones mentales que el sujeto hace conforme aprende el concepto matemático en términos de lo que es observable" (p. 8). Las construcciones mentales se evidenciaron en los estudiantes gracias a la aplicación del ciclo investigativo de la Teoría APOE. Ahora bien, en el análisis teórico de este ciclo se planteó una descomposición genética preliminar del concepto de variable. En este análisis se diseñaron instrumentos de aplicación tales como: situaciones experimentales, tallares y entrevistas semi-estructuradas, de las cuales esperábamos nos dieran evidencias para alcanzar el objetivo del trabajo. Seguidamente, la recolección de los datos en los talleres realizados por los estudiantes fue analizada y verificada haciendo posible el mejoramiento de la descomposición genética preliminar.

Como primera observación se analizó que no necesariamente las acciones planteadas y fundamentadas en los talleres fueron claves para obtener dichas evidencias, ya que estas señalaron el camino que debían seguir los estudiantes, más no les proporcionaron las herramientas suficientes para lograr poseer la concepción *proceso* (interiorización de acciones). Posteriormente fue analizado que es debido a los conocimientos de los estudiantes acerca de la correspondencia uno a uno en una tabla de datos, a la representación gráfica y al manejo de las generalidades de la proporcionalidad, los que permitieron con la guía de las acciones acercarlos a una *concepción proceso* del concepto de variable. Por lo que nuestra descomposición genética preliminar, donde se había señalado que las acciones llevarían a esta *concepción proceso* se complementaría únicamente si los estudiantes tienen habilidades y conocimientos previos, de no ser así, la descomposición genética y sus acciones no serían para nada útiles.

Por todo lo anterior la siguiente descomposición genética refinada del concepto de variable se dio gracias a los conocimientos previos, habilidades matemáticas y temas desarrollados por los estudiantes en el aula de clase en conjunto con la observación, análisis y descripción de las *acciones* planteadas en la descomposición preliminar. Los talleres lograron resaltar en los estudiantes dichas habilidades y conocimientos previos, los cuales permitieron que las acciones fuesen interiorizadas produciendo en los estudiantes la *concepción proceso* que se buscaba.

La observación, análisis y descripciones hechas por los estudiantes se hicieron con base a fenómenos de cambio donde intervinieron dos factores cambiantes en las situaciones experimentales. Estas fueron: el tiempo de desagüe del agua a medida que aumenta de diámetro el orificio de desagüe de una serie de tapas en un embudo adaptable, alargamiento de un resorte en relación del aumento de peso de objetos redondos de menor a mayor tamaño y alargamiento de un resorte en relación de la disminución del peso de objetos redondos de menor a mayor tamaño.

Ahora bien, el paso de una *concepción acción* a *concepción proceso* del concepto en estudio se logró gracias al manejo que tenían los estudiantes de temas esenciales y al mecanismo mental de *interiorización* propuesto por la Teoría APOE. Los estudiantes que participaron en las actividades dieron evidencias de adquirir una *concepción acción* y al haber interiorizado las acciones formaron una *concepción proceso*. En el análisis de resultados observamos que las evidencias expresadas por los estudiantes dieron aportes enriquecedores pero no debido esencialmente a las acciones de nuestra descomposición genética preliminar.

Debido a todo lo anterior, la descomposición genética refinada se fundamenta en que las acciones guían a los estudiantes a identificar conocimientos previos y habilidades matemáticas y así nosotros poder llegar a encontrar evidencias de una *concepción proceso* en ellos. Por lo tanto nuestra descomposición genética refinada se ha estructurado de la siguiente manera:

En primer lugar presentamos una descripción de la *concepción acción* que lograron los estudiantes gracias a los conocimientos previos y habilidades matemáticas durante el desarrollo de las actividades propuestas. En esta parte de la estructura se describe el *nivel acción* que lograron los estudiantes finalizando con las evidencias de la formación de la *concepción acción* en ellos. Como segunda componente mostramos una descripción de la *concepción proceso* lograda por los estudiantes y evidenciada por dos elementos: *Razonamientos de cambio* y *Simbolización* de los fenómenos de cambio vistos en las situaciones experimentales propuestas.

Concepción acción.

Los conocimientos previos y las habilidades matemáticas adquiridas por los estudiantes en el aula de clases permitieron desarrollar las siguientes acciones: *Toma de Datos, Analizar Magnitudes, Tabular, Graficar, Analizar Comportamientos y Analizar Variables.* Estas acciones están descritas en nuestra descomposición genética refinada a medida que se vaya explicando la estructura de esta. Asiala y otros (1996) identifican: “la comprensión de un concepto matemático se origina mediante la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar *acciones*”.

Nivel acción.

A continuación se describen las primeras acciones realizadas por los estudiantes que permitieron evidenciar el *nivel acción* en cada uno de ellos.

Toma de datos: Esta acción estuvo enfocada en el momento en que los docentes realizaron cada una de las situaciones experimentales. Los estudiantes registraron en una hoja de trabajo en blanco las medidas de una de las magnitudes observadas en dichas situaciones.

Analizar Magnitudes: En esta acción los estudiantes al haber presenciado cada situación experimental describieron y analizaron todas las magnitudes que observaban en ellas. Por ejemplo:

Klizman: *Velocidad, tiempo y diámetro del orificio de la tapa*, en la situación experimental 1 del embudo; Ana Rocío: *Peso de la bolita, alargamiento del resorte y tamaño de la bolita*. En la situación experimental 2 del aumento del alargamiento del resorte; Manuel: *El tamaño, el peso, el alargamiento del resorte*. En la situación experimental 3 de la disminución del alargamiento del resorte.

Tabular: En esta acción los estudiantes al registrar los datos en la hoja de trabajo en blanco hicieron una tabulación de los datos obtenidos en cada situación experimental. Ellos observaron en la tabla de datos la correspondencia uno a uno y esto los llevó a observar los cambios importantes en las magnitudes analizadas de cada situación. Por ejemplo, de la situación experimental 3 de la disminución del alargamiento del resorte.

Tabla 23. Ejemplos de resultados situación experimental III.

Peso del objeto Redondo	Primer peso $300\ g$	Segundo peso $250\ g$	Tercer peso $200\ g$	Cuarto peso $150\ g$
Alargamiento del resorte	$60\ cm$	$50\ cm$	$40\ cm$	$30\ cm$

La Teoría APOE propone: “la conciencia de acciones actuando en ellas para separarlas o unirlas provee información, e insertar esta información en un marco intelectual reorganizado en un nivel superior hace que este mecanismo se active a través de acciones físicas generales que el sujeto hace sobre el objeto de conocimiento, formando *un nivel acción*” (Trigueros, 2005). Las acciones *Toma de Datos, Analizar Magnitudes y Tabular* en las situaciones experimentales proveyeron tal información.

La información se dio gracias a los datos registrados en la hoja de trabajo que posteriormente los estudiantes llevaron y reorganizaron en la tabla de datos. Esta información reorganizada se evidenció cuando los estudiantes ordenaron los datos en la tabla, lo cual les permitió observar la correspondencia uno a uno de los registros. Precisamente la correspondencia uno a uno fue el aporte enriquecedor de dicha información e hizo que los estudiantes adquirieran una leve *idea de cambio* al analizar los cambios de medidas en las magnitudes, y esta leve *idea de cambio* fue la evidencia del *nivel acción* en cada uno de los estudiantes.

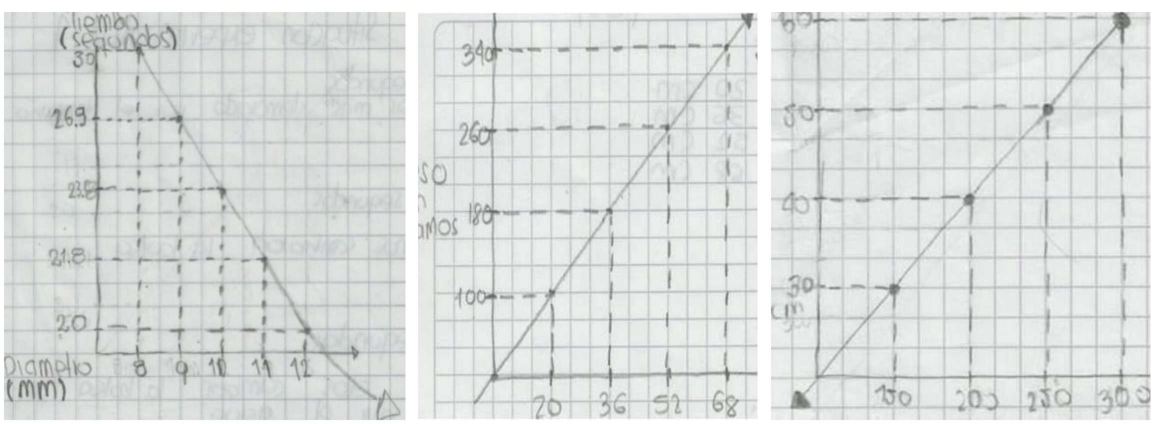
Evidencias de la concepción acción.

Los estudiantes al analizar las magnitudes y organizarlas en una tabla obtuvieron una leve *idea de cambio,* lo cual evidenció el *nivel acción* que poseían los estudiantes hasta ese momento. Ahora bien, para profundizar en esta *idea de cambio*, se propuso las acciones *Graficar y Analizar Comportamientos,* que en conjunto con los conocimientos ya ha adquiridos por los estudiantes en clases de matemáticas desarrollaron una *concepción acción* del concepto en estudio.

Graficar: Trigueros y otros (1996), proponen: “la posibilidad de representación de la información que proporciona una fórmula o una tabla de datos mediante una gráfica es de suma importancia en la comprensión de la variable”. En esta acción los estudiantes hicieron una representación gráfica de la nube de puntos (parejas ordenadas de los datos) en un plano cartesiano, y aunque no se tuvo en cuenta la posibilidad de errores cuando la nube de puntos mostrará un acercamiento a una curva inadecuada, nos interesó la forma en que los estudiantes hicieron una lectura coherente de la correlación directa o inversa entre las magnitudes. Por ejemplo, se presentan gráficas de las tres situaciones respectivamente:

Ana Roció (Situación experimental 1), Yibey (Situación experimental 2) y Yibey (Situación experimental 3)

Figura 23. Ejemplos de gráficas realizadas en las situaciones experimentales por las estudiantes Ana Rocío y Yibey.



A continuación ejemplos de algunos de estos argumentos que permitieron tener una base para la acción *Analizar Magnitudes*: la entrevista hecha a Miguel en la *Acción Graficar* de la actividad del embudo, parte de la entrevista hecha a Ana en *la Acción Graficar* de la actividad del aumento del alargamiento del resorte y la entrevista hecha a Yibey en la *Acción Graficar* de la actividad de la disminución del alargamiento del resorte.

> *Entrevistador: ¿Por qué ubicas los valores de la magnitud tiempo de evacuación del agua sobre el eje vertical? (se le señala con la mano al estudiante el eje vertical en el plano dibujado por ella).*
> *Miguel: Porque son los valores que salen cuando se desocupa el embudo.*
> *Entrevistador: ¿y por qué no los ubicaste en el eje horizontal?*
> *Miguel: Porque en el horizontal van los valores que a uno le dan y en el otro los que salen. Como por culpa de los que a uno le dieron, pues, así nos ha explicado la profesora.*

> *Entrevistador: ¿Qué quieres decir con eso de que la magnitud peso es la primera magnitud?*
> *Ana Rocío: Si, la magnitud peso ya estaba,… Como cuando uno toma los valores de "x" en una recta en la clase.*
> *Entrevistador: ¿De una recta?, me podrías explicar.*
> *Ana Rocío: Bueno, uno hace una tablita parecida a la de la segunda pregunta. Y se pone en los valores de "x" los que uno quiera, luego es la primera que ya está. Las de "y" se hallan cuando uno reemplaza en la formula que la profe da.*
> *Entrevistador: ¿Entonces a eso te refieres como la primera magnitud?*

Ana Rocío: Si claro, en clases vimos que la primera se pone en el eje de abajito.
Entrevistador: ¿El eje vertical?
Ana Rocío: Si, en ese.

Entrevistador: ¿Por qué dibujó una flecha señalando hacia abajo, en la representación gráfica? (se le señala con la mano a la estudiante la gráfica hecha por ella).
Yibey:… Pues, creo que,… Es obvio que las medidas siguen bajando.
Entrevistador: ¿Podrías explicarlo mejor?
Yibey: Pues, mira, (mostrando la gráfica), cuando el peso era 300 g el resorte se alargó 60 cm. Cuando era 250 disminuyó su alargamiento a 50 cm, y así sigue y sigue, pues la flechita me indica que sigue bajando en general para todas las medidas.

Estos argumentos fueron muy importantes, ya que los estudiantes empezaban a generalizar los fenómenos de cambio, aun sin haber analizado los comportamientos de las medidas de las magnitudes y formulado la expresión algebraica. Yibey (noveno) comenta: "*la flechita me indica que sigue bajando en general para todas las medidas".*

En la acción *Analizar Comportamientos*, los estudiantes observaron la tabulación de datos y la gráfica expresando con sus propias palabras la relación del comportamiento de las medidas de las dos magnitudes involucradas en cada situación experimental. En estas descripciones los estudiantes expresaron la correlación directa o inversa del fenómeno de cambio de cada una de las situaciones.

Las frases expresadas reflejaron la facilidad de la mayoría de los estudiantes al explicar la correlación directa o inversa entre las magnitudes, pero también reflejaron la dificultad que presentaron algunos, cuando se confundieron con magnitudes llamadas factores externos. A continuación presentamos algunos ejemplos.

- En la situación experimental 1 del embudo se describió la correlación inversa entre las medidas de dos magnitudes, es decir, para este caso si las medidas de una magnitud aumentan, las medidas de la otra disminuyen.

Los estudiantes lograron expresarse sobre las experiencias con expresiones como: Yibey comenta: "*La relación de las magnitudes es cuando el diámetro de la tapa es más grande que el anterior, el tiempo es menos*"; Ana Rocío comenta: "*a mayor tamaño del orificio menor es el tiempo de salida del agua*" y Klizman comenta: "*mientras si el orificio es más pequeño, el agua tarda más tiempo en salir*".

Estudiantes que se les dificultó expresar la relación: Ana Rocío comenta: "*cuando se hacía más grande el orificio salía más rápido el agua*"; Manuel comenta: "*en cada tapa se expulsa cada vez más rápido el agua"* y Klizman "*sucede que el agua va saliendo con más velocidad*". Factor externo de confusión magnitud velocidad.

- En la situación experimental 2 del aumento del alargamiento del resorte se describió la correlación directa entre las medidas de dos magnitudes, es decir, para este caso si las medidas de una magnitud aumentan, las medidas de la otra también aumentan.

Los estudiantes lograron expresarse sobre las experiencias con expresiones como: Yibey comenta: "*cuando el peso del objeto redondo aumenta, el resorte se alarga más*"; Miguel comenta: "*el resorte aumenta o se alarga cuando es diferente* *su peso*”; Ana Rocío comenta: “*cuando el peso de la bolita aumenta el resorte que lo sostiene se alarga*”; Manuel comenta: “c*uando el aumento del peso redondo se pone en el resorte, se alarga más el resorte*” y Klizman comenta: “*cuando el objeto redondo va pesando más, el resorte va alargándose de acuerdo al peso del objeto redondo*”. En esta situación experimental vemos que los estudiantes no notaron el factor externo magnitud tamaño de objetos redondos, debido a la correspondencia directa entre el aumento del tamaño de objetos redondos a medida que aumenta el peso de estos y el alargamiento del resorte.

- En la situación experimental 3 de la disminución del alargamiento del resorte se describió la correlación inversa entre las medidas de dos magnitudes, es decir, para este caso si las medidas de una magnitud disminuyen, las medidas de la otra también disminuyen.

Los estudiantes lograron expresarse sobre las experiencias con expresiones como: Yibey comenta: “*a menor peso, menor alargamiento*” y Klizman comenta: “*cuando el peso del objeto disminuye, sucesivamente el resorte va disminuyendo”*.

Estudiantes que se les dificultó expresar la relación: Manuel comenta: “*Que ahora la pequeña pesa más y tiene menos tamaño y las demás son más grandes y pesan menos*”; Miguel comenta: “*No importa el tamaño sino el peso que se prolongue, disminuye cada una*” y Ana Rocío comenta: “*Que el tamaño del objeto no afecta nada al peso*”. En este experimento a medida que aumentaba el tamaño, el peso y el alargamiento disminuían, esta relación inversa confundió a los estudiantes por el factor externo magnitud tamaño de los objetos redondos.

La profundización de la *idea de cambio* por medio de la explicación de la relación entre el comportamiento de las medidas de las magnitudes hizo que los estudiantes pasaran de un *nivel acción* a una *concepción acción.* De acuerdo con la teoría APOE: “La repetición de acciones específicas hará que el estudiante obtenga una *concepción acción* más sólida”. La profundización de la *idea cambio* se observó cuando los estudiantes dieron repetición a las acciones de una actividad a otra, pero lo anterior gracias a los conocimientos previos y el manejo adecuado que ya tenían los estudiantes acerca de la tabulación de datos y una idea de representaciones gráficas.

Podemos observar en las respuestas de los estudiantes un avance en sus explicaciones de un taller a otro. Las respuestas a la acción *Analizar Comportamientos* comprueba lo planteado por la Teoría APOE, que la repetición de acciones permite mejorar la *concepción acción* del objeto en estudio y que al ser profundizada por los estudiantes empiezan a no depender de su continua repetición, dando bases para formar adecuadamente la *concepción proceso* en los estudiantes.

Concepción proceso.

Cuando el estudiante puede pensar en un determinado concepto sin actuar de manera directa sobre él, diremos que dicho concepto ha sido interiorizado por el estudiante en un proceso o que posee una *concepción proceso*, es decir, la descripción de acciones sin necesidad de su repetición. Los estudiantes en la acción *Analizar Comportamientos* dieron indicios de lo que podían comprender acerca de una correlación directa o inversa entre las medidas de dos magnitudes. Lo anterior deja ver que los conocimientos previos y las habilidades matemáticas permiten a los estudiantes expresar argumentos, los cuales son estos las evidencias de la *concepción acción* del concepto de variable. Seguidamente esto fue complementado con la comprensión que mostraron poseer acerca de las características de dependencia e independencia de la variable como relación funcional y la *simbolización* en una expresión algebraica del fenómeno de cambio.

Entonces, la *concepción proceso* (interiorización de las acciones realizadas durante la totalidad de la actividad, gracias a los conocimientos previos y habilidades matemáticas de los estudiantes), fue evidenciada por los siguientes elementos, *razonamientos de cambios* y la *simbolización* de los fenómenos de cambio.

Razonamientos de cambio.

Las acciones realizadas por los estudiantes evidenciaron *Nivel acción* (ideas intuitivas de cambio), ideas que al ser profundizadas con la repetición de las acciones y las explicaciones de la correlación directa o inversa entre dos magnitudes formaron en ellos una *concepción acción.* Seguidamente los conocimientos previos, habilidades en temas esenciales de tabulación de datos y representación gráfica, permitieron a los estudiantes mostrar evidencias de explicaciones, repetición de acciones, y argumentos dados en la acción *Analizar Variables* formando así en los estudiantes *razonamientos de cambio*.

En la acción *Analizar Variables* los estudiantes analizaron las características de dependencia e independencia que posee la variable. Las palabras expresadas por ellos dan una explicación sobre los cambios de las medidas de la magnitudes por aparte y lo que experimentan las medidas de una segunda magnitud que depende de una primera. Por ejemplo:

En la situación experimental 1 del embudo:

Los estudiantes lograron expresarse sobre las experiencias con expresiones como: Miguel comenta: "*DIAMETRO: su diámetro era más grande en cada tapa. TIEMPO: en sus diámetros de cada uno, es más corto el tiempo";* Manuel comenta: "*DIAMETRO: los diámetros aumentaban en cada embudo. TIEMPO: el tiempo disminuía cada vez que cambiaban el diámetro de la tapa en el embudo*) y

Klizman comenta: "*DIAMETRO: a medida que iban cambiando de ejercicio el diámetro de orificio iba aumentando. TIEMPO: Mientras el diámetro aumentaba tardaba menos en salir el agua"*. Los estudiantes analizaron primero la magnitud diámetro del orificio de desagüe y expresaron que este aumentaba a medida que trascurría la actividad, pero no relacionaron su cambio debido a otro factor. Es decir, la magnitud diámetro era *independiente* de cualquier otro cambio de magnitud. Luego, se observó el análisis que hicieron de la magnitud tiempo con relación al cambio que sufría la magnitud diámetro del orificio de desagüe.

Las explicaciones se complementaron con la siguiente entrevista semi-estructurada.

> *Entrevistador: Al observar el comportamiento de las medidas de la magnitud que no dependía de otra, ¿qué puedes concluir?*
> *Klizman (octavo): … Pero, ¿se refiere al diámetro?*
> *Entrevistador: ¿Crees que el diámetro del orificio de cada tapa, es la magnitud que no depende de otra?*
> *Klizman: Ah, sí claro, el diámetro es la magnitud que no depende de nada,… El diámetro ya esta porque las tapas ya están hechas [Risas], al menos que las pueda estirar más.*
> *Entrevistador: Entonces ¿Cuál es la magnitud que si depende de otra?*
> *Klizman: Pues,…, En lo que estamos haciendo seria el tiempo cuando sale el agua.*
> *Entrevistador: ¿Por qué?*
> *Klizman: Porque cuando anotamos los tiempos dados fueron cambiando porque se le fue cambiando la tapa al embudo.*

Entrevistador: ¿Entonces, el tiempo cambia por la tapa del embudo?

Klizman: Bueno, por el orificio que hay en la tapa de plástico, como anote en la pregunta el tiempo cambiaba si aumentaba el diámetro de ese orificio en las tapas.

Entrevistador: ¿El tiempo de evacuación del agua siempre va a variar?

Klizman: Claro… Creo, que si ustedes siguen poniendo tapas con diámetros cada vez más grandes, me imagino que el tiempo va ser menos si sigue cambiando de tapas.

Entrevistador: ¿Entonces, en conclusión el tiempo de evacuación seria la magnitud dependiente y el diámetro de orificio de desagüe seria la magnitud independiente?

Klizman: … Si… El diámetro es la magnitud independiente porque ya está ahí, como dijimos no depende de nada y el tiempo es la magnitud dependiente, porque como vimos depende del cambio de las tapas.

Frases que resaltan la comprensión de las características de dependencia e independencia que posee la variable como relación funcional: "*el diámetro es la magnitud que no depende de nada, el diámetro ya está porque las tapas ya están hechas*", "*cuando anotamos los tiempos dados fueron cambiando porque se le fue cambiando la tapa al embudo*", "*el tiempo cambiaba si aumentaba el diámetro de ese orificio en las tapas*", "*el diámetro es la magnitud independiente porque ya está ahí, como dijimos no depende de nada y el tiempo es la magnitud dependiente, porque como vimos depende del cambio de las tapas*".

En la situación experimental 2 del aumento del alargamiento del resorte.

Los estudiantes lograron expresarse sobre las experiencias con expresiones como: Ana Rocío comenta: "*PESO: a medida que cambia las bolitas el peso va aumentando. ALARGAMIENTO: El alargamiento también aumenta*)"; Manuel comenta: "*PESO: al cambiar los objetos observe que necesariamente cambiaba el peso de cada uno. ALARGAMIENTO: El resorte aumenta cada vez que se cambió de objeto*" y Klizman comenta: "*PESO: mientras iban cambiando las pelotas cada una iba pesando más que la anterior. ALARGAMIENTO: Mientras las pelotas pesaban más, el resorte iba estirando más que la anterior*". Los estudiantes analizaron la magnitud peso de objetos redondos como una magnitud independiente y el aumento del alargamiento del resorte como una magnitud dependiente del peso. A continuación las explicaciones se complementaron con la siguiente entrevista semi-estructurada.

Entrevistador: Al observar el comportamiento de las medidas de la magnitud que dependía de la otra magnitud ¿Qué puedes concluir?
Manuel (octavo): ¿La que dependía de otra, como así?
Entrevistador: Si, ¿Cuál magnitud que cambiaba si la otra también cambiaba?
Manuel (octavo): ah ya, por supuesto, emm, el aumento del resorte, el resorte se estiraba más dependiendo del objeto que se colocara.
Entrevistador: Entonces ¿Cuál es la magnitud que no depende de otra, la magnitud independiente?
Manuel (octavo): Seria, entonces, ehh, lógico, el peso, pues los objetos ya tienen un peso cada uno, mientras que el resorte es igual siempre, solo cambia cuando se pone diferentes objetos.

Frases que resaltan la comprensión de las características de dependencia e independencia que posee la variable como relación funcional: "*el aumento del resorte, el resorte se estiraba más dependiendo del objeto que se colocara*", "*el peso, pues los objetos ya tienen un peso cada uno, mientras que el resorte es igual siempre, solo cambia cuando se pone diferentes objetos*".

En la situación experimental 3 de la disminución del alargamiento del resorte.

Manuel comenta: "*PESO: observe que al poner los objetos empezaron a disminuir los pesos. ALARGAMIENTO: Yo observe que al colocar los objetos el resorte aumentaba*" y Klizman comenta: "*PESO: mientras el ejercicio avanzaba el objeto redondo disminuía su peso. ALARGAMIENTO: Mientras el peso del objeto disminuía, el resorte hacia lo mismo*". Estas expresiones se fortalecen con la siguiente entrevista semi-estructurada.

> *Entrevistador: En esta actividad ¿Cuál cree que es la magnitud independiente de esta situación experimental? Teniendo en cuenta lo conversado en las anteriores actividades.*
> *Miguel (noveno): emm, pues, creo que el peso, como en la pasada actividad, el peso, porque el peso de cada bola ya está dado.*
> *Entrevistador: Si, ¿Por qué no lo describiste de esa forma en la pregunta cinco? (señalando con la mano su respuesta a la pregunta 5).*
> *Miguel (noveno): La verdad, no había entendido la pregunta bien, pero ahora si la entiendo, la magnitud independiente es el peso de las bolas, porque ya están dados los pesos, pero estos si influyen para el cambio del resorte.*
> *Entrevistador: Entonces ¿la magnitud del alargamiento del resorte que magnitud viene siendo?*

Miguel (noveno): Pues, viene siendo lógico la otra, la dependiente, ya que cada alargamiento depende del peso que se da en ese momento.

Frases que resaltan la comprensión de las características de dependencia e independencia que posee la variable como relación funcional: "*la magnitud independiente es el peso de las bolas, porque ya están dados los pesos, pero estos si influyen para el cambio del resorte*", "*la dependiente, ya que cada alargamiento depende del peso que se da en ese momento*".

En conclusión, las explicaciones de los estudiantes (*razonamientos de cambio*) dieron argumentos sobre la comprensión de las características de dependencia e independencia que posee la variable en una relación funcional, sin necesidad de haber trabajado el concepto de variable de una manera más formal. Lo anterior hace notorio lo que caracteriza una *concepción proceso* para nuestra descomposición genética refinada.

Simbolización.

Los miembros del Grupo RUMEC señalan: "con una *concepción-proceso* un individuo puede programar un algoritmo logrado gracias a la interiorización de acciones en un proceso, ya que con una fórmula explícita pueden comprobar las propiedades que le interesa". Aquí no se tuvo en cuenta que los contextos que se pueden simbolizar son situaciones problemáticas escritas donde no se presentan datos experimentales. Ahora bien, se presentaron dificultades sobre todo en la situación experimental del embudo, que aunque fue adecuada para describir un fenómeno de cambio, en el momento de simbolizar dicho fenómeno, nos dimos cuenta que tener claro generalidades de la proporcionalidad no era suficiente para simbolizar correctamente este tipo de contextos.

La proporcionalidad y la correspondencia uno a uno que se observaba en los datos les permitió deducir a los estudiantes un posible modelo matemático para simbolizar los fenómenos de cambio de cada situación experimental. Ahora bien, este adecuado uso de algunas de las generalidades de la proporcionalidad fue el soporte para la simbolización de los fenómenos de cambio. Por lo tanto son estos conocimientos con la guía de las acciones los que lograron en el estudiante modelar el fenómeno de cambio de cada situación experimental reflejándolo en una expresión algebraica (llamada así, para no confundir a los estudiantes con el término función). A continuación algunos ejemplos de los estudiantes cuando simbolizaron los fenómenos de cambio:

En la situación experimental 1 del embudo.

Tabla 24. Ejemplos de resultados situación experimental II.

Diámetro del orificio de desagüe	Primer diámetro $8\ mm$	Segundo diámetro $9\ mm$	Tercer diámetro $10\ mm$	Cuarto diámetro $11\ mm$	Quinto diámetro $12\ mm$
Tiempo de evacuación del agua	$30\ s$	$26.9\ s$	$23.8\ s$	$21.8\ s$	$20\ s$

Los estudiantes propusieron una modelación similar a $t = \frac{240}{d}$, donde d representa las medidas del diámetro y t la medida del tiempo.

Los cinco estudiantes participantes se dieron cuenta de la proporción similar al multiplicar cada diámetro por cada tiempo, en este caso las multiplicaciones se aproximaban a 240.

30 x 8 = 240, 26.9 x 9 = 242.1, 23.8 x 10 = 238, 21.8 x 11 = 239.8, 20 x 12 = 240.

Aunque los datos no representaban una proporción exacta debido a un margen de error, la cercana modelación de los estudiantes fue muy enriquecedora para nuestro trabajo. De otra manera se pudo comprobar a través de las respuestas y argumentos de los estudiantes propiedades de generalidad que se pueden analizar con la simbolización del fenómeno de cambio, ya sea cercana o correcta.

Klizman *(Nos dimos cuenta que al multiplicar el tiempo por el diámetro nos va a dar cerca de 240, y mientras vamos avanzando nos va a dar una cantidad aproximada a 240, T=240/d)*

> *Entrevistador: ¿Cómo lograste representar la relación entre las dos magnitudes como una expresión algebraica?(señalando con la mano la expresión que el estudiante realizó)*
> *Klizman (octavo): Me di cuenta de la proporción entre las medidas al multiplicar cada tiempo por el diámetro eso va a dar aproximadamente 240. Y yo Había visto un ejercicio parecido en clase y me guie por eso.*
> *Entrevistador: ¿Pero, cómo lograste deducir la expresión T=240/d?*
> *Klizman (octavo): Bueno, como le había dicho la multiplicación entre el tiempo y diámetro es aproximadamente 240, si lo pongo como con incógnitas es: Txd=240, el diámetro pasa a dividir y nos queda lo que importa la T de tiempo.*

Entrevistador: ¿Y cómo sabes que T=240/d es una expresión algebraica adecuada?
Klizman (octavo): ahh, pues, fácil, en la calculadora se pone 240 y lo divido en los diámetros y nos da muy cercano a los tiempos que se ven ahí.
Entrevistador: ¿Será que esta fórmula funcionará para cualquier otro diámetro?
Klizman (octavo): Me imagino que sí, emm, porque si lo probamos con varios y funcionó.

La respuesta de Yibey a la pregunta fue: "$y = \frac{240}{x}$, $30 = \frac{240}{8}$, "Comprobación". Para mi x=diámetro, y=tiempo".

Entrevistador: ¿Cómo lograste representar la relación entre las dos magnitudes como una expresión algebraica? (señalando con la mano la expresión que la estudiante realizó)
Yibey (noveno): Lo que observé, emm, fue que, emm 240 divido en 8 me da 30, y en el resto de las divisiones de 240 sobre cada diámetro me da cerca a 240, luego 240 sobre la x que es para mí el diámetro me dará siempre la y que es para mí el tiempo, y así creo que para todos los diámetros que le meta)

Frases que evidencian un proceso general: "*¿Será que esta fórmula funcionará para cualquier otro diámetro?, Me imagino que sí, porque si lo probamos con varios y funcionó*", "*240 sobre la x que es para mí el diámetro me dará siempre la y que es para mí el tiempo, y así creo que para todos los diámetros que le meta*"
En la situación experimental 2 del aumento del alargamiento del resorte.

Tabla 25. Ejemplos de resultados situación experimental II.

Peso del objeto Redondo	Primer peso $100\ g$	Segundo peso $180\ g$	Tercer peso $260\ g$	Cuarto peso $340\ g$
Alargamiento del resorte	$20\ cm$	$36\ cm$	$52\ cm$	$68\ cm$

Debido a la razón encontrada por los estudiantes entre el peso de los objetos y la constante cinco, lograron la obtención del valor del alargamiento del resorte. Los estudiantes coincidieron en representar este fenómeno de cambio de la siguiente forma $a = \frac{p}{5}$, donde a representa el alargamiento del resorte y p el peso de cada objeto redondo.

Yibey escribe: *"Observé que al dividir el peso en 5 nos da el alargamiento. Ej=* $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{p}}{5}$,
$20 = \frac{100}{5}$*, "comprobación"".*

> *Entrevistador: ¿Cómo lograste representar la relación entre las dos magnitudes como una expresión algebraica? (señalando con la mano la expresión que la estudiante realizó)*
> *Yibey (noveno): emm, solo observé que al dividir el peso de las pelotas en cinco, siempre me iba a dar el alargamiento del resorte.*
> *Entrevistador: ¿Cómo lograste deducir la expresión* $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{p}}{5}$*?*
> *Yibey (noveno): ahh, fácil si A es el alargamiento y P es el peso, entonces el alargamiento es igual al peso sobre cinco.*

Entrevistador: ¿Cómo lograste representar esa división que viste en las proporciones por medio de letras? (señalando con la mano la expresión que la estudiante realizó)
Yibey (noveno): No entiendo, ¿cómo así?
Entrevistador: ¿Es decir, Cómo supiste utilizar las letras para hacer esa representación algebraica?
Yibey (noveno): Ahh ya, bueno en clase hemos visto mucho eso, por ejemplo, esos problemas, de por, ejemplo, Juan tiene el doble de la edad de Pedro, entonces uno pone J=2P.

Frases que evidencian un proceso general: "*observé que al dividir el peso de las pelotas en cinco, siempre me iba a dar el alargamiento del resorte*"

En la situación experimental 3 de la disminución del alargamiento del resorte.

Tabla 26. Resultados de la primera pregunta del Taller III.

Peso del objeto Redondo	Primer peso $100\ g$	Segundo peso $180\ g$	Tercer peso $260\ g$	Cuarto peso $340\ g$
Alargamiento del resorte	$20\ cm$	$36\ cm$	$52\ cm$	$68\ cm$

Los estudiantes en esta actividad profundizaron en ese proceso general, ya que percibieron que al ser el mismo resorte la expresión algebraica sería la misma o similar a la de la situación experimental anterior. $a = \frac{p}{5}$, donde a representa el alargamiento del resorte y p el peso de cada objeto redondo.

Ana Rocío escribe: *"Al dividir el peso en 5 daba como resultado el alargamiento. k= peso, L= alargamiento.* $\frac{k}{5} = L$ *,* $\frac{300}{5}$=60*".*

> *Entrevistador: ¿Cómo lograste representar la relación entre las dos magnitudes como una expresión algebraica? (señalando con la mano la expresión que la estudiante realizó)*
> *Ana (noveno): Observé que al igual que la actividad que hicimos antes al dividir el peso entre cinco nos daba como resultado lo que se estira el resorte.*
> *Entrevistador: ¿Cómo lograste deducir la expresión* $\frac{k}{5} = L$*?*
> *Ana (noveno): En la actividad que hicimos antes me había confundido al poner las letras, pero ahora sé que se hace así, porque cada peso que yo lo llamé k, al dividirlos en cinco me va a dar los alargamientos que yo llamé L.*
> *Entrevistador: ¿Y esta fórmula entonces serviría para todos los objetos redondos no importando sus tamaños y pesos?*
> *Ana (noveno): emm, Si, creo que sí, si sirve para los pesos que hicimos ahorita, debe servir para todos los pesos que yo ponga en el resorte.*

Frases que evidencian un proceso general: "*, porque cada peso que yo lo llamé k, al dividirlos en cinco me va a dar los alargamientos que yo llamé L",* "*si sirve para los pesos que hicimos ahorita, debe servir para todos los pesos que yo ponga en el resorte*"*.* Con la expresión algebraica como evidencia de un proceso general se pudo comprobar propiedades que ya habían visto en las acciones específicas.

Los conocimientos previos y habilidades matemáticas guiadas por las acciones descritas en la descomposición genética refinada permitieron a los estudiantes *simbolizar* los fenómenos de cambio, dichas simbolizaciones junto con los *razonamientos de cambio* son las evidencias de que los estudiantes lograron adquirir una *concepción proceso* (interiorización de las acciones de la descomposición genética refinada del concepto de variable).

En conclusión, por medio de los *razonamientos de cambio* y la s*imbolización* de los fenómenos de cambio en cada situación experimental, se pudo evidenciar la *concepción proceso* en los estudiantes. *La concepción acción* y la *concepción proceso* en los estudiantes alimentan y fundamentan nuestra descomposición genética refinada del concepto de variable.

Conclusiones teóricas basadas en la Descomposición Genética Refinada.

Los resultados de la observación de las situaciones experimentales propuestas, los talleres y las entrevistas semi-estructuradas, nos proporcionaron evidencias de la formación de una *concepción proceso* que favorece la construcción del concepto de variable. Por lo que la pregunta que nos planteamos en nuestra investigación ¿Qué procesos favorecen la construcción del concepto de variable en estudiantes de octavo y noveno grado?, sin dejar a un lado el uso que el estudiante hace de esta, queda contestada al parecer cuando los estudiantes, según la teoría APOE, logran adquirir una *concepción proceso* del concepto de variable propuesta en una descomposición genética refinada del concepto en estudio en el presente trabajo.

Ante la posibilidad de encontrar varios trayectos asequibles para acercar al estudiante al concepto de variable, se partió del diseño de instrumentos que permitieran encontrar un proceso o una *concepción proceso*, que posteriormente fuese definida en la descomposición genética refinada de dicho concepto. En la descomposición genética refinada se hace visible la forma de cómo los estudiantes pueden adquirir una *concepción proceso,* debido a que esta es alimentada gracias a los conocimientos previos y habilidades matemáticas que los estudiantes ya tenían debido a sus clases de álgebra. Lo anterior no se había tenido en cuenta, pues se suponía que las acciones de la descomposición genética preliminar guiarían por si solos a los estudiantes en una *concepción proceso* del concepto. Por lo que la descomposición genética preliminar hubiese sido inadecuada sin el complemento de estos conocimientos previos en los estudiantes. Ahora bien, como uno de nuestros objetivos nos interesaba definir los procesos que favorecen la construcción del concepto de variable mediante el diseño y aplicación de una descomposición genética, se observó que la descomposición genética preliminar no era tan viable sin tener en cuenta otros conceptos o conocimientos fundamentales para acercarse al concepto de variable. Aun así estos conocimientos y habilidades matemáticas complementaron nuestra descomposición genética, mejorándola de fondo.

Los conocimientos previos y habilidades matemáticas adquiridas en el aula de clases permitieron formar en los estudiantes dicha *concepción proceso* del concepto y lo anterior al momento de ser guiados por las acciones: *Toma de Datos, Analizar Magnitudes, Tabular, Graficar, Analizar Comportamientos y Analizar Variables* de la descomposición genética refinada. Seguidamente en esta descomposición se define que las ideas de los estudiantes sobre *Razonamientos de cambio* (explicaciones escritas y verbales de fenómenos de cambio vistos en situaciones experimentales) y la *simbolización* (generalización y modelación en un proceso general de acciones específicas), son los elementos que evidencian la *concepción proceso* del concepto de variable en los estudiantes.

En conclusión, el diseño y aplicación de una descomposición genética refinada fue clave para definir el proceso que favorece la construcción del concepto de variable.

Gómez (2007), plantea que encontrar procesos que favorezcan la construcción de una noción o concepto de la variable en cualquier grado de escolaridad es independiente del uso que se le puede dar a esta. En nuestro trabajo nos planteamos como un claro objetivo analizar el uso que el estudiante da a la variable a través del diseño y ejecución de actividades en el aula, confrontando lo propuesto por Gómez (2007). El uso de la *variable como relación funcional* propuesta por (Trigueros y otros, 1996), fue uno de los elementos claves para la formación de la *concepción proceso* del concepto en los estudiantes.

La *variable como relación funcional* en un primer plano propone dos clases de correlaciones entre variables. A continuación mencionamos las características que se observaron en nuestro trabajo. La correlación inversa expresa que cuando las medidas de una magnitud aumentan las medidas de la otra disminuyen o viceversa y la correlación directa expresa que cuando las medidas de una magnitud aumentan las medidas de la otra también aumentan o cuando las medidas de una magnitud disminuyen las medidas de la otra también disminuyen. Frases similares a estas fueron elaboradas por los estudiantes, (*a mayor tamaño del orificio menor es el tiempo de salida del agua*), (*cuando el objeto redondo va pesando más, el resorte va alargándose de acuerdo al peso del objeto redondo*), (*a menor peso, menor alargamiento*), (*cuando el peso del objeto disminuye, sucesivamente el resorte va disminuyendo*).

Los estudiantes también lograron por medio de algunas preguntas de los talleres y entrevistas semi-estructuradas realizadas en las acciones *Graficar* y *Analizar Variables,* expresar frases que hacían comprender las características de dependencia e independencia que posee la *variable como relación funcional*. Por ejemplo, “*DIAMETRO: a medida que iban cambiando de ejercicio el diámetro de orificio iba aumentando. TIEMPO: Mientras el diámetro aumentaba tardaba menos en salir el agua*”; “*el peso, pues los objetos ya tienen un peso cada uno, mientras que el resorte es igual siempre, solo cambia cuando se pone diferentes objetos*”; “*el diámetro es la magnitud que no depende de nada, el diámetro ya está porque las tapas ya están hechas*”.

En conclusión, las expresiones dadas por los estudiantes a la hora de explicar la correlación directa o indirecta entre las medidas de dos magnitudes y la comprensión que tuvieron de las características de dependencia e independencia de la variable como relación funcional, son los elementos que les permitieron analizar el uso de la variable como relación funcional y esto a través del diseño y aplicación de las actividades propuestas.

Como objetivo general nos planteamos aplicar la teoría APOE con el fin de analizar los procesos que favorecen la construcción del concepto de variable en estudiantes de octavo y noveno grado del Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata de la ciudad de Bucaramanga. La Teoría APOE propone que la interiorización de acciones consiste en construir una estructura mental o un proceso general, en este proceso general los estudiantes pueden pasar de lo específico a lo general y viceversa.

Los tres estudiantes de noveno y los dos estudiantes de octavo grado del Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata, lograron acercarse a un proceso general cuando por medio de los conocimientos previos y habilidades matemáticas interiorizaron acciones simbolizando en una posible expresión algebraica los fenómenos de cambio vistos en las situaciones experimentales. Ahora bien, en el desarrollo de esta interiorización se presentaron dificultades, ya que no fue previsto por los investigadores que las situaciones experimentales al ser basadas en fenómenos de cambio donde se tenían que medir cantidades con instrumentos de medición, necesariamente se presentarían errores, para esto se necesitaría el manejo de aproximaciones lineales y acotamiento del error, lo cual los estudiantes de estos grados no dominan. Debido a estas dificultades no se puede concluir en este trabajo que los estudiantes hayan desarrollado un exacto proceso general en la simbolización de los fenómenos. Aun así las ideas de generalización se evidenciaron en los estudiantes gracias a sus conocimientos previos de tabulación de datos, graficación de algunos contextos, generalidades de la proporcionalidad y simbolización de situaciones problemáticas.

En conclusión, posibles modelos como: $y = \frac{240}{x}$, en la situación experimental del embudo y $a = \frac{p}{5}$, en las dos situaciones experimentales del alargamiento del resorte, seguidamente de expresiones verbales como: "*240 sobre la " x" que es para mí el diámetro me dará siempre la "y" que es para mí el tiempo, y así creo que para todos los diámetros que le meta*"; "*porque cada peso que yo lo llamé k, al dividirlos en cinco me va a dar los alargamientos que yo llamé* L"; "*Sí sirve para los pesos que hicimos ahorita, debe servir para todos los pesos que yo ponga en el resorte*"; corrobora que la Teoría APOE con la utilización de sus elementos teóricos permitió aproximarse a un proceso general, el cual favoreció sensiblemente el acercamiento del concepto en estudio en una primera etapa escolar.

Conclusiones didácticas y sugerencia para futuras investigaciones.

Como parte de una conclusión didáctica, recomendamos a los docentes trabajar algunos conceptos matemáticos relacionados con la variable (ecuación de una recta, funciones, proporcionalidad), partiendo de la observación de fenómenos de cambio pero en situaciones problemáticas donde no se requieran datos experimentales, puesto que la dificultad en la medición de estas magnitudes no permitirá una adecuada formación de un proceso general. Aún así destacamos que la interacción de observar, analizar y argumentar características de un determinado concepto, sin actuar aún sobre la formalidad de este, provee al estudiante de una información que le permitirá comprender características del concepto de una forma más participativa. Opinamos que estos argumentos expresados por los estudiantes de un determinado concepto sin actuar aún sobre él, pueden mejorar sensiblemente la comprensión de este cuando se tenga que pasar a una formalidad matemática.

El proceso general permitirá al estudiante pasar del contexto no matemático a un contexto matemático, también le permitirá comprobar propiedades, y pasar de argumentos específicos a expresiones generales y viceversa, siempre y cuando las situaciones problemáticas no manejen datos experimentales.

Proponemos con base a lo observado en nuestro trabajo, el desarrollo de futuras investigaciones que implique el uso de la Teoría APOE y la implementación de una descomposición genética donde se propongan acciones específicas basadas en fenómenos de cambio y diseños de actividades apropiadas. Un tema para analizar en alguna de estas investigaciones podría ser el planteamiento de situaciones problemáticas y actividades didácticas que favorezcan la construcción del concepto de recta como función lineal. Lo proponemos porque en una expresión como $y = mx + b$, no sólo está inmersa la variable como relación funcional, sino la variable como numero generalizado (b), y la variable como incógnita (m), es decir, los tres usos de la variable en conjunto. Ahora bien, las situaciones problemáticas que se observan en física de décimo y once grado cuando trabajan con movimiento rectilíneo uniforme podría ser un aporte enriquecedor antes de formalizar el concepto de recta como función lineal y sus características. Por ejemplo en observar la distancia que recorre un automóvil debido al tiempo y la velocidad, dando datos no experimentales para que los estudiantes tabulen dichos datos y traten de simbolizar la situación problemática en una relación funcional.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ambrosio, J. (2006). Uso *de un modelo teórico para el estudio de la comprensión del concepto de parámetro en el álgebra*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Veracruzana.

2. Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*. In J. Kaput, A. H. Shoenfeld and E. Dubinsky (eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

3. Chevallard, Y. (1996). La transposición didáctica. Del saber al sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique.

4. Cogollo, C. (2006). La Variable: “Cosa”, “Letra acompañante” o “Número escondido”. Tesis en Especialización en Eduación Matemática. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga. Colombia. (pp. 14-41).

5. Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (ed.). *Pensamiento Matemático Avanzado*,95-126. Kluwer Academia Publishers.

6. Dubinsky, E. (1994). *A theory and practice of learning college mathemtics. In A Shoenfeld (Ed.) Mathematical thinking and problem solving*. Pp. 221-247. Hillsdale, NJ: Eslbaum.

7. Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viraje personal. *Relime*, 3(1), 47-

70.Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist Theory of Learning in

8. Undergraduate Mathematics Education Research. En D. Holton et al (Eds.). *The teaching andlearning of mathematics at University Level An ICMI Study* (pp. 273-280). Kluwer Academic Publishers.

9. Gómez, E (2007). *La construcción de la noción de variable*. Tesis Doctor en Matemática Educativa no publicada. Instituto Politécnico Nacional. México, D.F.

10. Kuchemann, D. (1980). *Children's understanding of numerical variables*. Mathematics in School, 7(4), 23-26

11. Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirien y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 6, Núm. 3, noviembre 2003. PP 221-271.

12. Pedemonte, B. (2011). AlNuSet: A dynamic system for learning algebra. Memorias XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas, Bucaramanga. Colombia.

13. Roa-Fuentes, S. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal.* Tesis de Maestría, Cinvestav, México. Pp 20-40.

14. Roa-Fuentes, S. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal.* Tesis de Maestría, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa (2010) 13 (1): 89-112.

15. Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. Revista de la Enseñanza de las ciencias, Investigación y Experiencias Didácticas, 14(3), 351-363.

16. Trigueros, M., Ursini, S. y Lozano, D. (2000*). La conceptualización de la variable en la enseñanza media.* Educación Matemática. 12(2), 27-48.

ANEXOS

Anexo A. Talleres realizados por los estudiantes

TALLER N° 1

Pregunta 1: ¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental?

Pregunta 2: Completa la tabla de datos según lo observado en la situación experimental.

Diámetro del orificio de desagüe	Primer diámetro	Segundo diámetro	Tercer diámetro	Cuarto diámetro	Quinto diámetro
Tiempo de evacuación del agua					

Pregunta 3: ¿Representar gráficamente las magnitudes observadas? (En la hoja de trabajo).

Pregunta 4: ¿Qué sucede al hacer cada vez más grande el orificio de salida del agua? ¿Cómo relacionas el comportamiento de estas magnitudes?

Pregunta 5: ¿Al observar el comportamiento de las magnitudes y su variación, qué puedes concluir de la variación en las medidas de las magnitudes cada una por aparte?

Pregunta 6: Con lo observado en la gráfica, construya una posible expresión algebraica que modele la situación experimental.

TALLER N° 2

Pregunta 1: ¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental?

Pregunta 2

Completa la tabla de datos según lo observado en la situación experimental.

Preso de objetos redondos	Primer peso	Segundo peso	Tercer peso	Cuarto peso	Quinto peso
Alargamiento del resorte					

Pregunta 3: ¿Representar gráficamente las magnitudes observadas? (En la hoja de trabajo).

Pregunta 4: ¿Qué sucede al hacer cada vez más grande el orificio de salida del agua? ¿Cómo relacionas el comportamiento de estas magnitudes?

Pregunta 5: ¿Al observar el comportamiento de las magnitudes y su variación, qué puedes concluir de la variación en las medidas de las magnitudes cada una por aparte?

Pregunta 6: Con lo observado en la gráfica, construya una posible expresión algebraica que modele la situación experimental.

TALLER N° 3

Pregunta 1

¿Cuáles son las magnitudes físicas que intervienen en la situación experimental?

Pregunta 2

Completa la tabla de datos según lo observado en la situación experimental.

Preso de objetos redondos	Primer peso	Segundo peso	Tercer peso	Cuarto peso	Quinto peso
Alargamiento del resorte					

Pregunta 3: ¿Representar gráficamente las magnitudes observadas? (En la hoja de trabajo).

Pregunta 4 : ¿Qué sucede al hacer cada vez más grande el orificio de salida del agua? ¿Cómo relacionas el comportamiento de estas magnitudes?

Pregunta 5: ¿Al observar el comportamiento de las magnitudes y su variación, qué puedes concluir de la variación en las medidas de las magnitudes cada una por aparte?

Pregunta 6: ¿Necesariamente una magnitud debe depender de otra para su variación?

Pregunta 7: Con lo observado en la gráfica, construya una posible expresión algebraica que modele la situación experimental.