

ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE LA RADIACIÓN
SINCROTRÓNICA EN LA ACELERACIÓN
AUTO-RESONANTE ESPACIAL DEL ELECTRÓN:
FRENADO POR RADIACIÓN EN AUSENCIA DE CAMPO
DE MICRO-ONDAS

DANIEL DAVID TORRES AMARIS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2013

**ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE LA RADIACIÓN
SINCROTRÓNICA EN LA ACELERACIÓN
AUTO-RESONANTE ESPACIAL DEL ELECTRÓN:
FRENADO POR RADIACIÓN EN AUSENCIA DE CAMPO
DE MICRO-ONDAS**

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN REALIZADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OBTENER EL TÍTULO DE FÍSICO

DANIEL DAVID TORRES AMARIS

DIRECTOR: VALERIY D. DUGAR-ZHABON. FÍSICO, PH.D.
CODIRECTOR: EDUARDO OROZCO. FÍSICO, DR.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2013

A mi madre y mi padre por su cariño y su apoyo moral sin condiciones.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todos lo que de una forma u otra me acompañaron en este camino, principalmente a mis padres, Olga y Rafael y a mis hermanos, Edmanuel, Ludys, Matilde, Miguel y Rafael. Gracias por su paciencia y por las palabras correctas en los momentos correctos.

Gracias a Valeriy Dugar-Zhabon Ph.D. por haberme aceptado como estudiante de Grado y brindarme su experiencia.

A mis compañeros del Grupo de Física y Tecnología del Plasma y Corrosión Ana María Herrera

Ph.D. David Alejandro Martínez

Dr. Eduardo Orozco

M.Sc. Ely Dannier Valbuena Niño

M.Sc. Fredy Fabián Parada Becerra

Henry Gutierrez

RESUMEN

Título : ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE LA RADIACIÓN SINCROTRÓNICA EN LA ACELERACIÓN AUTO-RESONANTE ESPACIAL DEL ELECTRÓN: FRENADO POR RADIACIÓN EN AUSENCIA DE CAMPO DE MICRO-ONDAS.*.

Autores : Torres Amaris, Daniel David †.

Palabras Claves: Radiación sincrotrónica, fuerza de frenado, método de Boris-Buneman, técnica Leap-Frog.

DESCRIPCIÓN:

El presente trabajo se enmarca en la rama de la electrodinámica encargada del estudio de la radiación producida por las partículas con carga eléctrica diferente de cero y que se encuentran aceleradas. Para el caso en cuestión, nos centraremos en la radiación del sincrotrón en el caso relativista y la introducción de los efectos de este fenómeno en los cálculos de la trayectoria de un electrón. Por lo tanto se decide abordar el problema de manera teórica y computacional, ya que la experimentación en estos casos es costosa y los datos no son de fácil acceso, como sí lo son en la simulación computacional.

Para la solución del problema se empleó el método de Boris-Buneman, el cual es un esquema Leap-Frog en diferencias finitas centradas. Hubo que realizar una modificación para conseguir una variante de este método convencional con el fin de incluir la fuerza producida por la radiación que aparece como consecuencia de la conservación del momentum del sistema partícula-radiación sincrotrónica. Éste trabajo permite esclarecer el rol de la radiación sincrotrónica en la dinámica de la Aceleración Espacial Auto-resonante - SARA (Por sus siglas en inglés Spatial Auto Resonant Acceleration).

* Trabajo de grado

† Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Valeriy Dugar-Zhabon (Director). Eduardo A. Orozco (Codirector)

ABSTRACT

TITLE:

STUDY OF THE SYNCHROTRON RADIATION INFLUENCE IN SPATIAL AUTO-RESONANT ACCELERATION OF THE ELECTRON: RADIATION DAMPING IN ABSENCE OF FIELD OF MICROWAVE.*.

Autores : Torres Amaris, Daniel David †.

KEY WORDS: Synchrotron radiation, damping force, Boris-Buneman method, Leap-Frog scheme.

DESCRIPTION:

This work is part of the branch of the electrodynamics responsible for the study of radiation produced by the particle with a non-zero electric charge and which are accelerated. In this very case, we will focus on in the relativistic case of the synchrotron radiation and the introduction of the effects of this phenomenon in the calculations of the trajectory of an electron. It is therefore decided to deal with the problem by two ways, theoretical and computational. Experimentation in these cases is costly and the data are hardly accessible, while in computer simulations, it is the opposite. Inside the FITEK (because of the spanish acronym of *grupo de Física y Tecnología del plasma y Corrosión.*) with the guidance of Valeriy Dugar-Zhabon Ph.D. we are working on this problem, this is the very first step in the calculations including this force of radiation term.

The Boris-Buneman method which is a Leap-Frog scheme in centered finite differences, was used for the solution of the problem. We had to make a change to get a variant of this conventional method that includes the force produced by the radiation particle - synchrotron radiation appears as a result of the preservation of the momentum of the system. This work allows clarifying of the role of the synchrotron radiation in the dynamics of the Spatial Auto-Resonant Acceleration - SARA (for its english acronym).

*Trabajo de grado

†Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Valeriy Dugar-Zhabon (Director).Eduardo A. Orozco (Codirector)

Índice general

Introducción	11
1. Planteamiento del problema	14
2. Marco teórico	15
3. El campo a grán distancia de un sistema de cargas	17
4. Potenciales de Lienard-Wiechert	19
5. Ecuaciones del campo a grandes distancias	21
6. Las principales fuentes de radiación sincrotrónica	22
6.1. Radiación del dipolo.	22
6.2. Radiación de una carga que se mueve rápidamente.	24
7. Radiación sincrotrónica	26
7.1. Amortiguamiento por radiación	28
7.2. Distribución angular de la radiación	29
8. Influencia de la radiación en el movimiento de el electrón	31
9. Método de solución del problema	32
10. Resultados y análisis de simulaciones	34

11. Conclusiones y observaciones	41
REFERENCIAS	43

Introducción

En 1932 se puso en marcha el primer Ciclotrón, construido por Ernest Lawrence de la Universidad de California, Berkeley [1]. En el ciclotrón el electrón se mantiene en una trayectoria circular mediante un campo magnético perpendicular a su trayectoria. Todo el movimiento del electrón sucede en un plano dentro de un cilindro de vacío de altura reducida. Este cilindro se corta a mitades y estas se separan una distancia bastante pequeña. Estos semi-cilindros se llaman duantes y entre ellos se aplica un potencial de alta frecuencia. Cada vez cuando el electrón pasa por el espacio entre los duantes el campo eléctrico éste es acelerado.

En 1962, Kolomenskii y Lebedev descubrieron el fenómeno de resonancia ciclotrónica autosostenida en un campo magnético homogéneo y estático [2]. Este régimen de aceleración se logra manteniendo la frecuencia de la onda electromagnética igual a la frecuencia ciclotrónica homogénea. Este tipo de autoresonancia se observa si se cumple la condición: $\omega = \omega_0 = eB_0/m_0\gamma$, donde e es la carga del electrón, m_0 su masa en reposo y γ es el factor relativista.

Entre 1980 y 1997, K. S. Golovanisky llevo a cabo un estudio detallado de la estabilidad de la fase de la interacción resonante entre una onda estacionaria y el movimiento ciclotrónico del electrón también en campos magnéticos homogéneos pero crecientes en el tiempo. Él propuso el esquema de acelerador GYRAC donde se encuentra la realización de sus ideas acerca automantenimiento de la igualdad $\omega = \omega_0$.

Investigaciones realizadas con ayuda de RS dan información importante para entendimiento de la estructura electrónica de sólidos, por ejemplo sobre zonas prohibidas, posibles transiciones entre diferentes estados etc. Durante los últimos años la firma IBM llevó a cabo una serie de estudios que mostraron grandes ventajas de aplicación de la RS ante otros métodos en la micro-litografía para fabricación de micro-esquemas electrónicos. La potencia de RS se puede usar para realizar fotosíntesis, análisis de hidrocarburos, estudio de óxidos de nitrógeno y otras combinaciones químicas. La RS monocromática en el rango rayos X puede encontrar su aplicación en rentgeno-diagnóstico que permitirá disminuir en muchos órdenes de magnitud la carga por radiación que recibe el cuerpo humano en laboratorios de rayos X.

En recientes trabajos realizados en el grupo FITEK de la UIS, mediante una serie de estudios analíticos y numéricos, se encontró un fenómeno de autosostenimiento de condiciones de resonancia ciclotrónica electrónica en campos magnéticos estacionarios no homogéneos. Este fenómeno obtuvo nombre Aceleración Autorresonante Espacial o SARA por sus siglas en inglés de Sincrotron AutoResonant Acceleration.

Todos los tipos de aceleración autoresonante aprovechan el efecto de dependencia que tiene la energía del electrón de su masa, lo que significa que estos fenómenos son puramente relativistas. Principalmente en sistemas SARA el haz de electrones en la etapa final se mueve en un plano que se llama el plano de reflexión (ver Fig.1) formando un anillo de alta energía que se muestra en la figura 1 y en la figura 2 se presenta la configuración 3D del campo magnético estacionario (cuyos valores de configuración se encuentran en la Tabla 1) que asegura auto-mantenimiento de la resonancia. Actualmente ya se ha demostrado que SARA garantiza aceleración hasta energías de centenas de kilo-electrón-voltios, sin embargo en ciertas condiciones la energía puede alcanzar el rango ultrarelativista. El único efecto que limita absolutamente el valor de la energía alcanzable es el frenado sincrotrónico, también llamado frenado ciclotrónico (terminos procedentes de aceleradores cíclicos, sincrotrones y ciclotrones). En los estudios realizados hasta ahora no se ha tenido en cuenta cómo afecta la radiación sincrotrónica a la aceleración autorresonante, pues bajo las energías de centenas de keV la radiación sincrotrónica prácticamente no afecta el movimiento de electrones SARA. La fuerza de frenado sincrotrónica aparece debido a la intensa emisión de ondas electromagnéticas (llamada radiación sincrotrónica) por parte de electrones ultrarelativistas y finalmente puede compensar completamente la aceleración autoresonante. El efecto limitador de aceleración tiene una significancia práctica muy importante. La frecuencia de la radiación sincrotrónica (RS) depende del radio de la trayectoria circular y la energía de los electrones. Los rangos de frecuencias de esta radiación que se utilizan con mayor efectividad son de ultravioleta de vacío y de rayos X. En una primera aproximación a la solución del problema, es decir, la influencia de la radiación sobre la resonancia, en este trabajo, se abordará el modelado de la radiación de partículas en ausencia de un campo eléctrico externo, esto con el fin de comprender los mecanismos que originan este frenado. De esta manera, podemos obtener cierta información acerca de como acelerar al electrón hasta estas energías puesto que acelerarlo sería el proceso inverso a dejar decaer su energía por radiación. Para llevar a cabo el propósito de este trabajo, se realizó una revisión teórica del fenómeno de radiación de partículas cargadas aceleradas y la fuerza

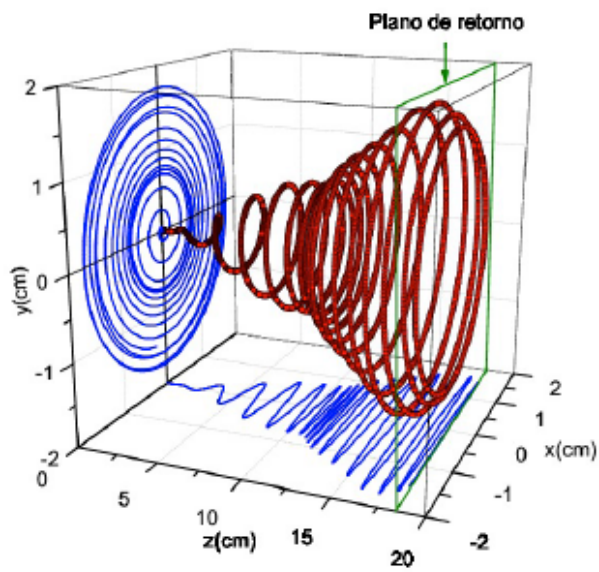


Figura 1: Trayectoria típica de electrones en el sistema SARA

de frenado que esta radiación produce, luego, mediante el método de Boris-Buneman se hicieron cálculos con las ecuaciones obtenidas, que permitieron obtener gráficas de potencia radiada, energía del electrón y diámetro de su trayectoria en el tiempo.

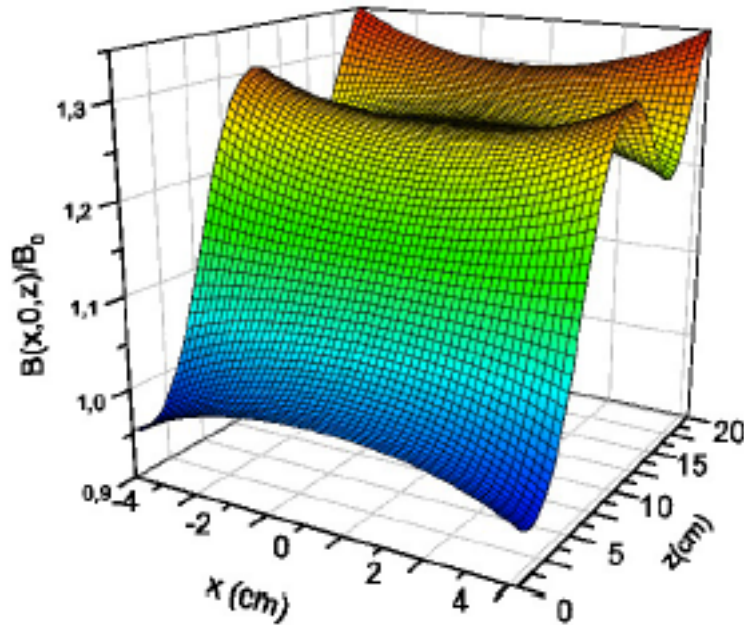


Figura 2: Ejemplo del perfil de campo magnético del sistema SARA

0.1 Planteamiento del problema

En el grupo Laboratorio de Física y Tecnología del Plasma y Corrosión FITEK se han llevado a cabo estudios teóricos y numéricos sobre el mecanismo de aceleración de partículas SARA, pero ninguno que traiga luz sobre cómo afecta la fuerza de frenado a la autorresonancia cuando las energías son muy altas, es así que el estudio de tal fenómeno toma interés si se persigue obtener partículas con estas energías. En nuestra metodología, el problema se ha dividido en dos partes, en una primera etapa abordar el estudio de la radiación únicamente, sin campo de micro-ondas para observar el efecto de ésta y una segunda etapa sería tener en cuenta la radiación, compensar la pérdida de energía y a su vez aumentarla con un campo de micro-ondas (esta segunda parte será estudiada en un trabajo posterior).

Por lo tanto, en este trabajo, orientado hacia el desarrollo de la primera etapa, se propone el estudio de la radiación de una partícula en el esquema SARA a partir del plano de retorno y luego de que el campo externo de micro-ondas es removido.

Tabla 1: Parámetros del sistema de bobinas

Bobina	$R_i(cm)$	$R_e(cm)$	$L_b(cm)$	$J(A/mm^2)$	$z(cm)$
1	6,0	20,0	6,0	1,48	-5,75
2	6,0	20,0	7,5	1,23	9,25
3	6,0	20,0	10,0	1,29	22,75

0.2 Marco teórico

En la teoría SARA no figura el hecho de que en un movimiento acelerado, la partícula cargada emite energía electromagnética. En un campo magnético, la partícula se mueve sobre una trayectoria circular con una aceleración centrípeta, consecuentemente el electrón emite ondas electromagnéticas. El campo electromagnético producido por estas cargas en movimiento se caracteriza por la densidad de carga j y se describe por las

ecuaciones no homogéneas para los potenciales vectorial y escalar:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

donde las densidades de corriente y de carga ρ son funciones arbitrarias de las coordenadas y del tiempo. Supongamos que las fuentes se encuentran en un elemento finito de espacio y que tenemos los potenciales creados por estas cargas en todo el espacio. Las deducciones se hacen en suposición de que la influencia inversa del campo de radiación al movimiento de las cargas es pequeña y puede ser despreciada; más adelante, se mostrará que esta suposición es correcta incluso hasta para las energías del orden de 100 MeV.

La solución de las ecuaciones no homogéneas se encuentra mediante el uso de funciones de Green. La función de Green $G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')$ es la solución a la ecuación

$$\Delta G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (3)$$

en todo el espacio; donde en la ecuación (3), $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$ son funciones de Dirac, t' es el instante de tiempo en que es emitida la onda electromagnética y t es el tiempo en el instante de llegada de la onda al punto de observación en \mathbf{r} . El campo de la radiación emitida se presenta como los potenciales vectorial y escalar que se describen a partir de las ecuaciones integrales

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') \mathbf{j}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') d^3 \mathbf{r}' dt' \quad (4)$$

y

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') \rho(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') d^3 \mathbf{r}' dt'. \quad (5)$$

Anotemos que las ecuaciones anteriores las satisfacen no sólo una función sino una amplia serie de funciones de Green que conducen a diferentes soluciones de $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ y $\varphi(\mathbf{r}, t)$. Para obtener una única solución que se adecúe al problema de estudio es necesario tener en cuenta las condiciones de frontera y la física. En nuestro caso de interés, las ondas electromagnéticas en el espacio infinito, no hay fronteras como tal, así que basta con usar el principio de causalidad, este principio exige que la causa

(el movimiento de cargas que produce en radiación) precede a la consecuencia (que es la excitación del campo en el punto de observación). Los potenciales que satisfacen el principio de causalidad se llaman, *potenciales retardados*.

La integración de los potenciales se realiza con la ayuda de la función δ y el resultado tiene la forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV, \quad (6)$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV, \quad (7)$$

en la que la estructura del argumento temporal muestra que el campo en el punto \mathbf{r} en el momento t se determina por el estado de las fuentes en el instante de tiempo precedente $t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$, es decir, difiere en el tiempo de propagación de la perturbación desde la fuente hasta el punto de observación. Estos potenciales retardados nos dan la solución completa del problema del campo electromagnético que se produce por un sistema de cargas en movimiento en el espacio infinito. Durante todo este proceso, se supone que se conoce la ley de movimiento de las cargas.

0.3 El campo a grán distancia de un sistema de cargas

Se considerará el campo producido por un sistema de cargas móviles a distancias grandes comparadas con las dimensiones del sistema. En este caso se puede tratar a la onda emitida como una onda plana en pequeñas regiones del espacio.

Se buscará la forma del potencial escalar y vectorial, y la ecuación de onda para el primero es:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \varrho, \quad (8)$$

la cual es una ecuación diferencial no-homogenea de segundo orden; su solución general está dada por la combinación lineal de dos soluciones; la solución a su correspondiente ecuación homogenea más una particular de (8).

Gracias a la linealidad de (8), podemos dividir el espacio en pequeños elementos de volumen y determinar el campo producido por las cargas contenidas en dicho elemento, luego el campo total será igual a la suma de los campos producto de cada elemento

diferencial.

Ubicando el origen de coordenadas en el elemento dV con una cantidad de carga $dq(t)$ (esta cantidad depende del tiempo), obtenemos la densidad de carga como

$$\rho(t) = dq(t)\delta(R), \quad (9)$$

donde esta distribución es cero en todo el espacio excepto en $R = 0$. Así, (8) toma la siguiente forma

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi dq(t)\delta(R), \quad (10)$$

y por la naturaleza de la distribución (9) se tiene

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

para cualquier punto en que $R \neq 0$. Aplicadas estas condiciones, se llega a un problema con simetría central; la solución será natural en coordenadas esféricas*. Es así que se escribe

$$\frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial\phi}{\partial R} \right) \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \quad (12)$$

y haciendo el cambio de variable $\phi = \frac{\varphi(R,t)}{R}$ en (12), se obtiene

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (13)$$

De esta manera, con la excepción de el origen de coordenadas, el potencial ϕ tendrá la forma

$$\phi = \frac{\varphi(t - \frac{R}{c})}{R}. \quad (14)$$

La ecuación (14) no determina a φ , esta función debe escogerse tal que coincida con el valor del potencial en $R \rightarrow 0$. En otras palabras, para $R \rightarrow 0$ debe reducirse a la ley de Coulomb; esto es así debido a que para estos valores de R , el crecimiento de la derivada espacial es tal que se puede despreciar el término $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ y entonces nos quedamos con

$$\nabla^2\phi = e\delta(R), \quad (15)$$

que es la ecuación cuya solución es $\phi = \frac{e}{R}$, de esta manera el potencial queda determinado como:

$$\phi = \frac{dq(t - \frac{R}{c})}{R}. \quad (16)$$

* En la ecuación (12) se ha escrito el laplaciano en coordenadas esféricas.

Usando este resultado, se puede calcular el potencial para una distribución arbitraria de carga haciendo la sustitución $dq(t) \rightarrow \rho(t)dV$ e integrando sobre todo el espacio. La solución general estará dada entonces por la suma de esta integral y la solución de la ecuación homogénea ϕ_0 , obteniendo

$$\phi = \int_V \frac{1}{R} \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) dV + \phi_0, \quad (17)$$

en donde R es la distancia desde el elemento de volumen dV hasta el lugar donde se quiere calcular el campo.

De manera similar, a partir de

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (18)$$

se obtiene la expresión para el potencial vectorial

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int_V \frac{1}{R} \mathbf{j} \left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c} \right) dV + \mathbf{A}_0. \quad (19)$$

La parte integral de las ecuaciones (17) y (19) es lo que se llama potenciales retardados, estos aparecen cuando la distribución de cargas se encuentra en movimiento; en el caso estacionario, este par de cantidades se reducen a cero entonces obtenemos las expresiones convencionales para el potencial.

0.4 Potenciales de Lienard-Wiechert

Las ecuaciones anteriores son muy útiles para solucionar problemas cuya distribución de carga sea complicada, pero en el caso de tener el problema de una sola carga, es más pertinente utilizar los potenciales de Lienard-Wiechert.

De acuerdo a las fórmulas para potenciales retardados, el campo en el punto de observación $\mathbf{P}(x, y, z)$ en el instante t , es determinado por el estado de movimiento de la carga en el tiempo anterior t' , que es el tiempo de propagación del campo a la velocidad de la luz desde el punto \mathbf{r}'_0 , donde la carga estaba localizada, hasta el punto \mathbf{P} ; la diferencia de tiempos es $t - t'$.

Sea $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$ el radio-véctor desde la carga e hasta el punto \mathbf{P} , como $\mathbf{r}_0(t)$ es función dada del tiempo, entonces t' es determinada por la ecuación

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t. \quad (20)$$

Dado que la $\mathbf{R}(t)$ representa el véctor con inicio en e y final en \mathbf{P} , su magnitud representa la distancia entre la carga y el punto de observación en el tiempo t , entonces $R(t')$ será dicha distancia para el tiempo t' . Así, el tiempo empleado por el campo en llegar a el punto \mathbf{P} será $\frac{R(t')}{c}$.

En un sistema de referencia en el que en t' , $v = 0$, el potencial en el tiempo t viene determinado por el potencial de Coulomb punto de observación, es decir

$$\phi = \frac{e}{R(t')}, \quad (21)$$

ya que

$$\mathbf{A} = 0, \quad (22)$$

lo cual se puede escribir

$$\phi = \frac{e}{c(t - t')}. \quad (23)$$

Para obtener una expresión para el potencial en un sistema de referencia arbitrario se debe escoger uno que coincida con estas ecuaciones en el caso $\mathbf{V} = 0$. Los potenciales adecuados serían

$$\phi = \frac{e}{R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c}}, \quad (24)$$

y

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c(R - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{c})}. \quad (25)$$

Todas estas cantidades en función de t' son llamados potenciales de Lienard-Wiechert, y a partir de estas fórmulas se puede calcular la intensidad de los campos eléctrico y magnético usando las expresiones:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad (26)$$

y

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (27)$$

Estas fórmulas determinan el campo con base en derivadas con respecto a x, y, z y t , pero nuestro potencial está dado en función de estas coordenadas y t' así que para poder calcular se hace derivación implícita con respecto a t' y luego respecto de t , obteniendo

$$\mathbf{E} = e \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^3} \left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R\right) + \frac{e}{c^2 \left(R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^3} \mathbf{R} \times \left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} R\right) \times \dot{\mathbf{v}}\right], \quad (28)$$

y

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R} \mathbf{R} \times \mathbf{E}, \quad (29)$$

con $\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'}$.

En la expresión para el campo eléctrico se puede ver que la primera parte depende solo de \mathbf{v} lo que nos dice que éste sería el campo producido por una carga en movimiento uniforme y decae como $\frac{1}{R^2}$. En cuanto a la segunda parte, que depende tanto de \mathbf{v} como de $\dot{\mathbf{v}}$ y decae como $\frac{1}{R}$, esta es la que tiene que ver con la energía radiada por la carga.

0.5 Ecuaciones del campo a grandes distancias

Poniendo el origen de coordenadas en algún lugar de la distribución de cargas y tomando a \mathbf{R}_0 como el véctor desde el origen hasta el punto de observación $\mathbf{P}(x, y, z)$ con su correspondiente vector unitario \mathbf{n} y el radio vector del elemento de carga $dq = \rho dV$ es \mathbf{r} y sea \mathbf{R} el vector desde dq hasta \mathbf{P} , tenemos $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, entonces a grandes distancias del la distribución de cargas $R \gg r$ tenemos

$$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| \cong R_0 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}. \quad (30)$$

Sustituyendo esta expresión en las ecuaciones para el potencial retardado se obtiene

$$\phi = \frac{1}{R_0} \int_V \rho \left(t - \frac{R_0}{c} - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{c}\right) dV, \quad (31)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int_V \mathbf{j} \left(t - \frac{R_0}{c} - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{c}\right) dV. \quad (32)$$

en el factor $\frac{1}{R}$ de (31) y (32) se ha despreciado $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$ en comparación con R_0 . En el parámetro $t - \frac{R}{c}$ de las densidades, no se puede hacer lo mismo pues la importancia de este término depende de cuanto varíe ρ y \mathbf{j} respecto $\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{c}$.

En la *zona de ondas* de radiación, se tiene

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}, \quad (33)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (34)$$

Luego, para la total determinación del campo solo se necesita describir el potencial vectorial \mathbf{A} . Pero como para el caso de ondas planas tenemos que

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n} \quad (35)$$

y

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}. \quad (36)$$

Es de notar que el campo es proporcional al inverso de R_0 y que el tiempo siempre entra en las fórmulas en la forma $t - \frac{R_0}{c}$. Para el cálculo de la radiación producida por una carga en movimiento arbitrario es conveniente usar las fórmulas de los potenciales de Lienard-Wiechert teniendo en cuenta que a largas distancias podemos reemplazar el vector \mathbf{R} por el vector constante \mathbf{R}_0 . Para el tiempo primado se hace uso de la relación $R = R_0 - \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n}$, de esta manera

$$\mathbf{A} = \frac{ev(t')}{cR_0 \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}(t')}{c}\right)}, \quad (37)$$

la relación entre el tiempo t y el tiempo t' se encuentra a partir de la distancia recorrida por el campo a la velocidad c de la siguiente manera

$$t' - \frac{\mathbf{r}_0(\mathbf{t}') \cdot \mathbf{n}}{c} = t - \frac{R_0}{c}. \quad (38)$$

Las ondas electromagnéticas radiadas transportan una energía cuyo flujo viene dado por el vector de Poynting \mathbf{S} y la intensidad dI a través de el elemento de ángulo sólido $dO = R_0^2 d\Omega$ (elemento de superficie esférica) se encuentra como el producto $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dO$, así

$$dI = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dO = c \frac{H^2}{4\pi} \quad (39)$$

entonces

$$dI = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2 d\Omega. \quad (40)$$

dI es constante e independiente de R_0 pues H es inversamente proporcional a R_0 . Esto era de esperarse pues la energía que acarrea el campo electromagnético se propaga a la velocidad de la luz llenando todo el espacio sin pérdida ni acumulación en ningún punto.

0.6 Las principales fuentes de radiación sincrotrónica

0.6.1. Radiación del dipolo.

En este caso, las expresiones para los potenciales son:

$$\phi = \frac{1}{R_0} \int \varrho(t - \frac{R_0}{c} + \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{c}) dV, \quad (41)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}(t - \frac{R_0}{c} + \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{c}) dV, \quad (42)$$

se puede despreciar el término de tiempo $\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{c}$ si la distribución de cargas no cambia mucho en este lapso.

Si T es el periodo durante el cual la distribución de cargas cambia apreciablemente, entonces, si a es el orden de magnitud de las dimensiones del sistema, se debe cumplir que

$$\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{n}}{c} \sim \frac{a}{c}, \quad (43)$$

así la condición que debe cumplir nuestro sistema es

$$a \ll cT, \quad (44)$$

que se puede escribir como

$$a \ll \lambda. \quad (45)$$

Las dimensiones del sistema deben ser mucho mayores que la longitud de la onda radiada.

observando el sistema a distancias grandes comparadas con la dimensiones del sistema y asumiendo que a condición anterior se cumple, aseguramos que el problema queda determinado conociendo el potencial vectorial. A estas distancias, el campo puede ser considerado como ondas planas

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \int \mathbf{j}_{t'} dV. \quad (46)$$

en esta ecuación, $t' = t - \frac{R_0}{c}$ no depende de la variable de integración, entonces, se puede sustituir \mathbf{j} por $\varrho \mathbf{v}$, obteniendo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \left(\sum e \mathbf{v} \right) \quad (47)$$

y como $\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}}$, con \mathbf{d} , el momento dipolar del sistema,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0} \dot{\mathbf{d}} \quad (48)$$

con lo cual, el campo magnético queda como

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2 R_0} \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n} \quad (49)$$

y el eléctrico

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R_0} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}. \quad (50)$$

El campo de radiación depende de la segunda derivada del momento dipolar. Este tipo de radiación, se denomina radiación dipolar.

Como $\ddot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$, entonces, este tipo de radiación se da solo en partículas aceleradas, las cargas en movimiento uniforme no radían. La intensidad de esta radiación viene dada por

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3} (\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n})^2 do = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta d\Omega, \quad (51)$$

donde θ es el ángulo entre $\ddot{\mathbf{d}}$ y \mathbf{n} . La expresión anterior nos da la intensidad radiada hacia el elemento de ángulo sólido do . La distribución angular de la radiación la da el factor $\sin^2 \theta$.

Haciendo el cambio $do = 2\pi \sin \theta d\theta$ e integrando sobre θ en el intervalo ($\theta \rightarrow \pi$) se encuentra la radiación total

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2 \quad (52)$$

para el caso de una sola carga, $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ y $\ddot{\mathbf{d}} = e\dot{\mathbf{v}}$; $\dot{\mathbf{v}} \equiv$ aceleración de la carga. Entonces

$$I = \frac{2e^2 \dot{v}^2}{3c^3}. \quad (53)$$

Para un sistema de partículas aisladas, la radiación dipolar es cero, luego

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = cte \sum m\mathbf{r}, \quad (54)$$

$$\sum m\mathbf{r} = \mathbf{R} \sum m = 0, \quad (55)$$

entonces, la intensidad dI radiada será cero.

0.6.2. Radiación de una carga que se mueve rápidamente.

Examinar la radiación de una carga que se mueve con una velocidad que no es pequeña comparada con la velocidad de la luz requiere hacer unas consideraciones a la hora de aplicar las ecuaciones desarrolladas antes. Para este objetivo, es necesario considerar un sistema de referencia en el que la partícula se encuentre en reposo. Eso es posible, solo para el caso de una sola partícula, pues en general no existe tal sistema de referencia para una configuración de muchas partículas.

En tal sistema de referencia, la energía radiada en el intervalo dt viene dada por

$$d\mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2 dt, \quad (56)$$

y el momentum total radiado es cero

$$d\mathbf{P} = 0. \quad (57)$$

Esto se debe a que esta cantidad depende de la densidad de flujo del momentum a través de una superficie que encierre la partícula; en el caso del dipolo, existe una simetría tal que la cantidad radiada en una dirección es igual en magnitud, pero opuesta en signo a la que se radía en la dirección opuesta.

En un sistema de coordenadas arbitrario, el cuadvivector de momentum se escribe de la siguiente manera

$$dP^i = -\frac{2e^2}{3c} \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dx^i = -\frac{2e^2}{3c} \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} u^i ds. \quad (58)$$

En esta ecuación en nuestro sistema de referencia de partícula en reposo, todas las componentes espaciales de la velocidad son cero

$$\frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} = -\frac{\dot{v}^2}{c^4}, \quad (59)$$

de esta manera, sólo queda la componente temporal

$$d\mathcal{E} = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{v}^2 dt, \quad (60)$$

la integral de la ecuación (58) nos da el momentum total radiado durante el tiempo que la partícula se encuentra dentro del campo electromagnético, esto es:

$$\Delta P^i = -\frac{2e^2}{3c} \int \frac{du^k}{ds} \frac{du_k}{ds} dx^i, \quad (61)$$

la cual se puede reescribir en términos del tensor electromagnético usando la ecuación

$$mc \frac{du_k}{ds} = \frac{e}{c} F_{kl} u^l, \quad (62)$$

se obtiene

$$\Delta P^i = -\frac{2e^4}{3m^2 c^5} \int (F_{kl} u^l) (F^{km} u_m) dx^i, \quad (63)$$

cuya componente temporal nos da la energía total radiada, que en componentes cartesianas se escribe

$$\Delta U = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{v}^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}, \quad (64)$$

ó, en término de los campos eléctrico y magnético externos:

$$\Delta U = \frac{2e^4}{3m^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}]^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (65)$$

Para velocidades cercanas a la de la luz, el numerador en la ecuación anterior es prácticamente constante y la energía total radiada depende esencialmente como $[1 - \frac{v^2}{c^2}]^{-1}$. La única excepción se da cuando la dirección de movimiento es paralela a la del campo, en este caso, el factor $[1 - \frac{v^2}{c^2}]^{-1}$ del denominador, se cancela con uno idéntico que aparece en el numerador y la radiación no depende de la energía de la partícula. Para la parte de la distribución angular de la radiación, para una carga que se mueve rápidamente, usando las expresiones de los potenciales de Lienard-Wiechert, y tomando sólo la parte que depende como $\frac{1}{R}$ pues a grandes distancias la parte de $\frac{1}{R^2}$ contribuye muy poco, nos queda

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \dot{\mathbf{v}}]}{\left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)^3} \quad (66)$$

y

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \quad (67)$$

Expandiendo el denominador de \mathbf{E} como un triple producto vectorial de la forma $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ y resolviendo el producto $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ se obtiene

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[\frac{2(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}})(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c}\right)^5} + \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c}\right)^6} \right] d\Omega. \quad (68)$$

Para determinar la distribución angular total de la radiación a lo largo de todo el recorrido de la partícula, es necesario integrar la intensidad en el tiempo teniendo en cuenta que el integrando es función del tiempo t' , luego, debemos hacer el cambio

$$dt = \frac{\partial t}{\partial t'} dt' = \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right) dt'. \quad (69)$$

0.7 Radiación sincrotrónica

Se considera una partícula en movimiento circular en un campo magnético uniforme (fig 3). El radio de giro r y la frecuencia angular del movimiento se pueden expresar en términos de la intensidad del campo magnético H y la velocidad de la partícula v de la siguiente forma:

$$r = \frac{mcv}{eH\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (70)$$

$$\omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{eH}{mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (71)$$

La intensidad de la radiación emitida se puede calcular usando la ecuación (65) con $E = 0$ y omitiendo la integral respecto del tiempo, obteniendo así

$$I = \frac{2e^4 H^2 v^2}{3m^2 c^5 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}, \quad (72)$$

esta intensidad es proporcional a el cuadrado del momentum, siendo entonces una cantidad considerable, pues las velocidades del problema son relativistas.

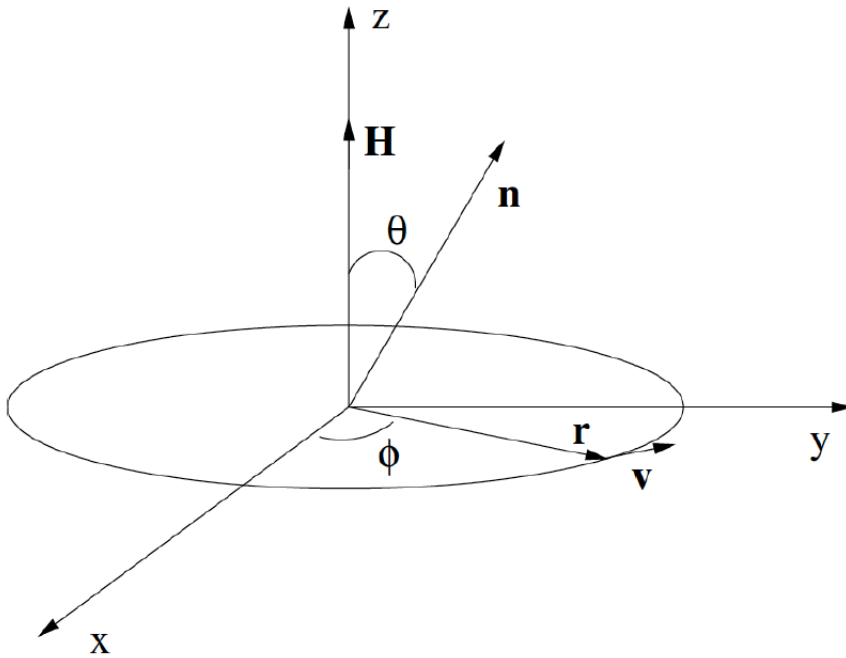


Figura 3: Esquema de ciclotrón.

Desarrollando los productos en la ecuación 68 escribimos

$$dI = d\Omega \frac{e^4 H^2 v^2}{8\pi^2 m^2 c^5} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \int_0^{2\pi} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos^2 \theta + \left(\frac{v}{c} - \sin \theta \cos \phi\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \sin \theta \cos \phi\right)^5} d\phi, \quad (73)$$

resolviendo la integral se obtiene

$$dI = d\Omega \frac{e^4 H^2 v^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{8\pi^2 m^2 c^5} \left[\frac{2 + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta\right)^{5/2}} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(4 + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta\right) \cos^2 \theta}{4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta\right)^{7/2}} \right]. \quad (74)$$

La razón entre la intensidad de radiación a un ángulo $\theta = 0$ y la intensidad para $\theta = \pi/2$ (en el plano de la órbita) es

$$\frac{\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_{\pi/2}}{\left(\frac{dI}{d\Omega}\right)_0} = \frac{4 + 3\frac{v^2}{c^2}}{8 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}}, \quad (75)$$

entonces, el intervalo angular de máxima intensidad es

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (76)$$

0.7.1. Amortiguamiento por radiación

Haciendo la expansión de la potenciales hasta orden tres para ϕ y orden dos para \mathbf{A} en $\frac{1}{c}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi^{(3)} &= -\frac{1}{6c^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int R^3 \rho dV, \\ \mathbf{A}^{(2)} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} dV, \end{aligned} \quad (77)$$

de aquí se toma sólo el término de orden dos del potencial vectorial para que la función de Lagrange sea correcta, ya que el potencial vectorial va multiplicado por $\frac{1}{c}$ en la función de Lagrange:

$$\mathbf{A}' = -\frac{2}{3c^2} \sum e \dot{\mathbf{v}}, \quad (78)$$

así, el campo magnético queda siendo nulo pues el rotacional del potencial vector es igual a cero dado que las coordenadas no aparecen explícitamente, mientras que el campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}' = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}, \quad (79)$$

aquí se puede ver que los términos de tercer orden en la expansión del potencial conducen a la aparición de fuerzas, que no se encuentran en la función de Lagrange, dadas por

$$\mathbf{f} = \frac{2e \dots}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}. \quad (80)$$

El promedio de la integral de trabajo en la unidad de tiempo de esta expresión

$$\overline{\sum \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}} = -\frac{2}{3c^3} \overline{\ddot{\mathbf{d}}^2}, \quad (81)$$

da como resultado el valor medio de la energía radiada por el sistema (salvo el signo). Así pues, la fuerza descrita en la ecuación (80) da cuenta de el efecto de la radiación sobre las cargas. Este tipo de fuerzas, son llamadas fuerzas de amortiguamiento o fuerzas de rozamiento de Lorentz.

Para una sola carga, se da también el amortiguamiento por radiación, la fuerza se calcula mediante el valor medio de la derivada del momento angular respecto del tiempo y da como resultado

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}, \quad (82)$$

incluyendo esta fuerza en la ecuación de movimiento

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}} \quad (83)$$

y usando el hecho de que $\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}$, se obtiene la ecuación de la fuerza

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3mc^3} \dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (84)$$

0.7.2. Distribución angular de la radiación

Caso no relativista.

En este caso $v \ll c$, entonces se puede despreciar los términos de orden v/c que aparecen en la densidad de flujo, luego

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} [\dot{\mathbf{v}}^2 - (\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c})^2] = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta, \quad (85)$$

donde θ es el ángulo entre el vector de aceleración (en t') y el sentido de observación. la radiación está distribuida simétricamente respecto al sentido de $\dot{\mathbf{v}}$ y es máxima en la dirección perpendicular a este vector.

Caso ultrarelativista

Nos interesa la radiación de una partícula ultrarelativista ($\gamma \gg 1$) cuya aceleración es perpendicular a la dirección del movimiento, $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$. El flujo de energía del campo electromagnético a través del ángulo sólido a grandes distancias es

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{e^2 [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \dot{\mathbf{v}}]^2}{4\pi c^3 (1 - \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c})^6}, \quad (86)$$

haciendo unos cambios en el numerador, obtenemos

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[\frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c})^4} - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(\mathbf{n}\mathbf{v})^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c})^6} \right], \quad (87)$$

introduciendo el ángulo ϕ que es el ángulo entre los planos $(\mathbf{v}\mathbf{n})$ y $(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})$, la ecuación 87 queda en la forma

$$\frac{dJ}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{4\pi c^3} \left[\frac{1}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^4} - \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2}) \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{(1 - \frac{v}{c} \cos \theta)^6} \right], \quad (88)$$

la potencia radiada (energía perdida por unidad de tiempo) $-\frac{d\mathcal{E}}{dt'}$, es una característica más cómoda para describir la radiación ya que, a diferencia de la intensidad, ésta es un invariante relativista.

La pérdida total de energía en la unidad de tiempo por parte de la partícula cargada en movimiento se encuentra haciendo integración sobre todo el ángulo sólido como sigue:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = - \int \frac{d^2\mathcal{E}}{dt' d\Omega} d\Omega = \int (1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}(t')}{c}) \frac{dJ}{d\Omega} d\Omega, \quad (89)$$

en el caso no relativista, la integración en Ω da

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3}. \quad (90)$$

La expresión anterior se llama *Formula de Larmor*.

Para el caso ultrarelativista, cambiamos a $\dot{\mathbf{v}}^2$ por un invariante relativista que tiende a $\dot{\mathbf{v}}^2$ cuando $v \rightarrow 0$. Tal invariante es el cuadrado de la 4-aceleración y se toma con el signo opuesto $-w^k w_k$. Bajo la condición $v \rightarrow 0$, la componente temporal de w^k se vuelve cero, $\frac{dw^k}{d\tau}$. Aquí, $d\tau$ es el diferencial del tiempo propio de la partícula, $d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt'$, así la componente espacial se transforma en $\dot{\mathbf{v}}$, entonces la potencia resulta de la siguiente manera

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\frac{2e^2}{3c^3} w^k w_k. \quad (91)$$

La pérdida de momentum en el sistema propio de la partícula es $d\mathbf{p}_0 = 0$. Por otra parte, en el sistema de coordenadas del laboratorio, utilizando transformaciones de Lorentz:

$$d\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v}d\mathcal{E}_0}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (92)$$

donde $d\mathcal{E}_0$ es la energía de radiación en el sistema propio para el tiempo $dt'_0 = d\tau$. La relación entre $d\mathcal{E}$ y $d\mathcal{E}_0$ puede encontrarse con ayuda de las transformaciones de Lorentz

$$-d\mathcal{E} = -d\mathcal{E}_0/(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}, \quad (93)$$

y como $dt' = d\tau/(1 - \frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}$, tenemos entonces $-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = -\frac{d\mathcal{E}_0}{d\tau}$. Por ende, la pérdida de momentum (28) en el intervalo temporal en el sistema del laboratorio dt' es:

$$-\frac{d\mathbf{p}}{dt'} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \left(-\frac{d\mathcal{E}_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt'} \right) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} \right). \quad (94)$$

Esta fórmula es válida para cualquier velocidad de la partícula. El cuadrado de la 4-aceleración se puede representar mediante valores de tres dimensiones: $w^k w_k = -\gamma^6[\dot{\mathbf{v}}^2 - (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2/c^2]$. Esto permite escribir la generalización relativista de la fórmula de Larmor a través de valores tridimensionales:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} = \frac{2e^2\gamma^6}{3c^3} \left[\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2} \right]. \quad (95)$$

En el caso en el que la partícula se mueve por una trayectoria circular, cuando $\mathbf{H} \neq 0$ y la aceleración es perpendicular a la velocidad $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$ la potencia de pérdida de energía por parte del electrón es

$$-\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt'}\right) = \frac{2e^4\gamma^2 H^2 v^2}{3m_e^2 c^5} \approx \frac{2e^4\gamma^2 H^2}{3m_e^2 c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m_e^2 c^4} \gamma^2 H^2 c = \frac{2\gamma^2 H^2 c r_0^2}{3} c^2 = \frac{2\gamma^2 H^2 \tau^2 c^3}{3}, \quad (96)$$

aquí $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ es el radio clásico del electrón y $\tau = \frac{r_0}{c} = 9,3 \times 10^{-24} s$. Esta energía radiada produce una fuerza que frena la partícula

$$\mathbf{F}_R = -\frac{d\mathbf{p}}{dt'} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt'} \right) = \frac{2e^2\gamma^6 \mathbf{v}}{3c^5} \left[\dot{v}^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2} \right]. \quad (97)$$

0.8 Influencia de la radiación en el movimiento de el electrón

Para encontrar el grado de influencia de esta radiación sobre el movimiento del electrón es necesario comparar la energía ganada en un ciclo por resonancia con la energía

perdida por radiación sincrotrónica. El tiempo para un ciclo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi mc\gamma}{eH}, \quad (98)$$

entonces, la energía radiada es

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}T = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2\omega}{c} \gamma^3. \quad (99)$$

La velocidad crece debido a la aceleración resonante $\frac{\partial E'}{\partial t} = eEc \cos\phi$ durante una rotación, la fase queda en el rango de aceleración $\pi/2, 3\pi/2$. Así, el aumento de energía durante un periodo de rotación es

$$\Delta\mathcal{E}' = \frac{2\pi eEc}{\omega} \gamma. \quad (100)$$

La energía máxima alcanzada por una partícula en el esquema SARA viene dada por γ_{lim} y se calcula como

$$\gamma_{lim} = 2 \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{E}{e}}, \quad (101)$$

de esta manera, la energía límite alcanzada será:

$$\mathcal{E}_{lim} = 2 \frac{mc^3}{\omega} \sqrt{\frac{E}{e}}, \quad (102)$$

cuando se llega a este límite, toda la potencia entregada a la partícula, es emitida en forma de radiación.

0.9 Método de solución del problema

Para resolver el proble del electrón en resonancia ciclotrónica, esquema SARA, se usó ua variante del método de Boris-Buneman en el que se incluyó un campo eléctrico total \mathbf{E}_T^* , formado por un campo externo \mathbf{E}^* más un campo de radiación sincrotrónica \mathbf{E}_{rs}^* , que genera una fuerza contraria a al sentido de movimiento de la partícula. La ecuación de movimiento en forma adimensional es:

$$\frac{d\mathbf{p}^*}{d\tau} = (\mathbf{E}^* + \mathbf{E}_{rs}^*) + \mathbf{v}^* \times \mathbf{B}^*, \quad (103)$$

donde, $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}/c$, $t^* = \omega_c t$, $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}/\omega_c c$, $\mathbf{p}^* = \mathbf{p}/m_e c$ y $\mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{B}}{\omega_c m_e/e}$. Para el caso de estudio de este trabajo, el campo externo $\mathbf{E}^* = 0$ y el campo de radiación se obtiene a

partir de la fuerza de radiación como

$$\mathbf{E}_{rs}^* = \frac{\mathbf{F}_R}{-e} = -\frac{e\gamma^6\mu_0}{6\pi c^3} \left[\dot{v}^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}})^2}{c^2} \right] \mathbf{v} \quad (104)$$

ó en unidades adimensionales,

$$\mathbf{E}_{rs}^* = \mathcal{K}[\dot{v}^{*2} - (\mathbf{v}^* \times \dot{\mathbf{a}}^*)^2] \mathbf{v}^*, \quad (105)$$

donde $\mathcal{K} = \frac{1}{m_e} \frac{\omega_c}{c} e^2 \gamma^6 \frac{\mu_0}{6\pi}$.

En su método, Boris propone resolver el problema con diferencias finitas centradas, así pues, usando las expresiones

$$v_x^* = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{u_x^{n-\frac{1}{2}} + u_x^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right), \quad (106)$$

y

$$a_x^* = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{u_x^{n+\frac{1}{2}} - u_x^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta\tau} \right), \quad (107)$$

se reescribe el campo de radiación y la ecuación de movimiento y se calculan usando el siguiente algoritmo:

1er Paso: Calcular \mathbf{u}^-

$$\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^{n-1/2} + \mathbf{g}_0 \Delta\tau / 2 \quad (108)$$

2do Paso: Calcular t

$$\gamma^n = [1 + (\mathbf{u}^-)^2]^{1/2} \quad (109)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{b}^n \Delta\tau / 2\gamma^n \quad (110)$$

3er Paso: Calcular \mathbf{u}'

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}^- + \mathbf{u}^- \times \mathbf{t} \quad (111)$$

4to Paso: Calcular \mathbf{S}

$$\mathbf{S} = 2\mathbf{t} / (1 + t^2) \quad (112)$$

5to Paso: Calcular \mathbf{u}^+

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^- + \mathbf{u}' \times \mathbf{S} \quad (113)$$

6to Paso: Calcular $\mathbf{u}^{n+1/2}$

$$\mathbf{u}^{n+1/2} = \mathbf{u}^n + \mathbf{g}^n \Delta\tau/2 \quad (114)$$

7mo Paso: Calcular nuevas coordenadas de la(s) partícula(s)

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{u}^{n+1/2} \Delta\tau/\gamma^{n+1/2} \quad (115)$$

donde $\gamma^{n+1/2} = [1 + (\mathbf{u}^{n+1/2})^2]^{1/2}$.

0.10 Resultados y análisis de simulaciones

Las simulaciones de variación de radio de rotación y energía de electrones en campos magnéticos respectivos de electrones con dependencia del número de rotaciones se presentan en las figuras que se muestran a continuación. Las simulaciones se realizaron para casos cuando el electrón se inyectó con energías iniciales de $1MeV$, $10MeV$ y $100MeV$ dentro de campos magnéticos homogéneos de $1T$, $5T$ y $10T$.

Las figuras están organizadas de la siguiente manera, gráfica (a) indica el diámetro de la trayectoria como función del número de ciclos y está representado por la distancia entre las dos curvas, la gráfica (b) muestra la energía en función del número de ciclos y la gráfica (c) es la potencia radiada vs el número de ciclos. Se conserva este orden para cada campo y cada valor de energía de inyección, con la excepción de $100MeV$. Para la energía de inyección de $100MeV$, en la parte (a) se realizó un gráfico de la componente y de la trayectoria (ubicando z en la misma dirección del eje de simetría de la trayectoria y x sobre el plano horizontal). Para el caso de inyección del electrón con la energía de $1MeV$ (fig 4) no se observó una variación apreciable de las variables observadas, el diámetro, la energía y la potencia radiada se mantuvieron constantes, esta última fue prácticamente cero. El resultado fue el mismo para todos los diferente campos aplicados y por esta razón no fue incluida la gráfica para los demás casos. Esto muestra que para las energías del orden de unidades de (eV) la radiación es totalmete despreciable y no es necesario tener en cuenta la fuerza de frenado. A partir de la energía de inyección de $10MeV$ (fig 5), se comienza a ver el efecto de la radiación sincrotrónica, el diámetro decrece (fig 5a) con el paso de los ciclos, resultado consistente con la teoría, ya que, como el electrón pierde energía por radiación (fig 5b) y (fig 5c), su velocidad disminuye y por tanto su radio de giro debe hacerlo también (esto, por el hecho de encontrarse dentro de un campo magnético). En la (fig 6)[†], que se refiere a la inyección del electrón

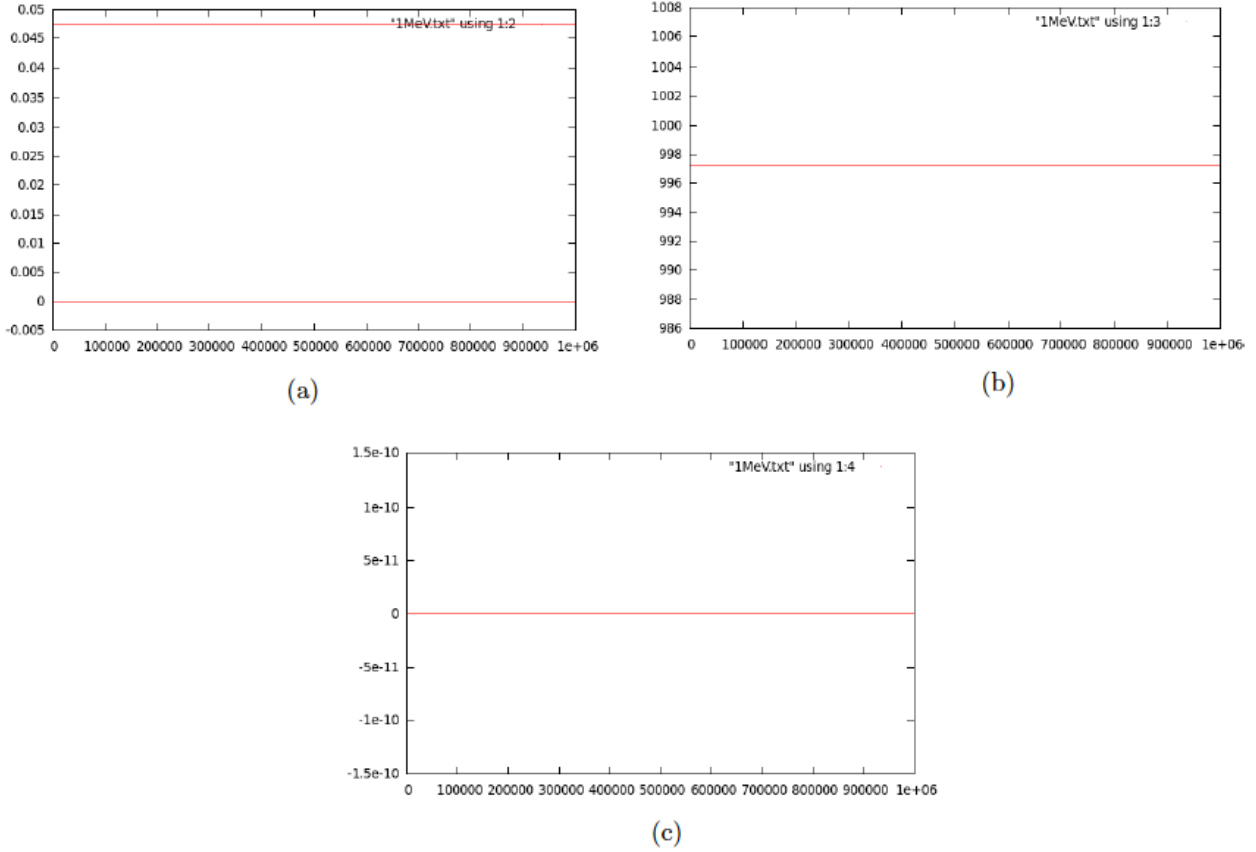


Figura 4: Resultados para Campo magnético de $2 \times 10^{-1}T$ y energía de $1MeV$. a) Diámetro en (m) como la medida de la recta vertical que corta las dos curvas vs Número de ciclos. b) Energía (keV) vs Número de ciclos. c) Potencia radiada ($\frac{keV}{s}$) vs Número de ciclos.

co la energía de $100MeV$, se nota a simple vista como se acentúan las características observadas en la (fig 5).

Se puede ver que en todos los casos la energía disminuye en el tiempo y la pérdida de energía es máxima en la etapa inicial de movimiento que es debido a que la radiación sincrotrónica es proporcional al cuadrado de la energía del electrón. En su movimiento por una trayectoria circular o casi circular la potencia total emitida por un solo electrón se determina por la expresión (96) que para el caso de energía inicial de $1MeV$ nos da $\frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx 10 - 21W$, esta potencia crece rápido con el aumento de la energía del electrón y la magnitud del campo magnético correspondiente, ésta alcanza aproximadamente el valor del orden de $4 \times 10^{-16}W$ para la energía de $100MeV$. Estas estimaciones muestran

[†]Aquí, el gráfico del diámetro se cambió por el de la componente y del movimiento (el sistema de coordenadas esta ubicado de tal forma que el plano zx es tangente a la figura formada por la trayectoria del electrón).

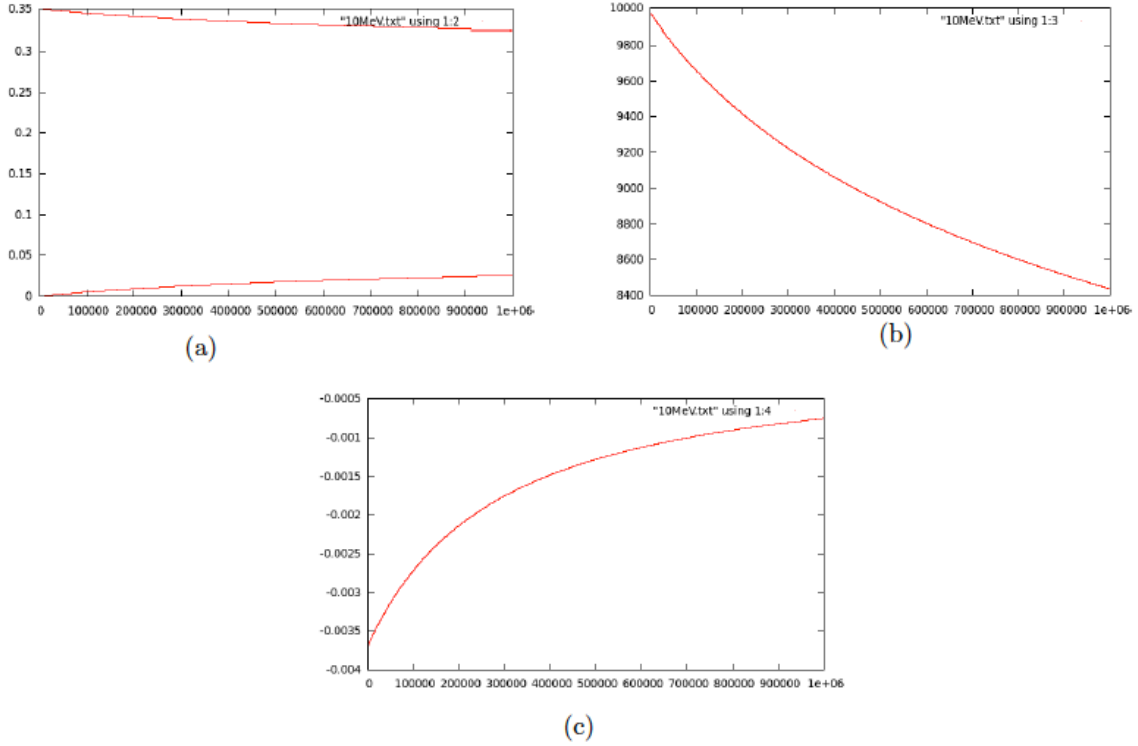


Figura 5: Resultados para Campo magnético de $2 \times 10^{-1}T$ y energía de $10MeV$. a) Diámetro en (m) como la medida de la recta vertical que corta las dos curvas vs Número de ciclos. b) Energía (keV) vs Número de ciclos. c) Potencia radiada ($\frac{keV}{s}$) vs Número de ciclos.

que la pérdida de energía por radiación es absolutamente despreciable. Sin embargo la intensidad de radiación es un efecto colectivo que consiste en la interferencia de ondas emitidas por diferentes partículas y en la interacción entre partículas. Se establece el régimen de coherencia entre la ondas emitidas por diferentes electrones. En este caso todo el conjunto de partículas emite como una sola partícula y ya que la potencia de emisión (en la fórmula (61)) es proporcional al cuadrado de carga, toda potencia de radiación resulta proporcional al cuadrado del número de partículas aceleradas simultáneamente.

En el sistema SARA simultáneamente se aceleran el número total de electrones que encuentra en un haz de $0,1A$ y un haz de $1A$. En estos casos prácticos la potencia de la radiación sincrotrónica para un haz de $0,1A$ es todavía muy pequeña de $0,1W$ (ver figs 9 y 10) pero para el haz de $100MeV$ de una corriente también de $0,1A$ la potencia de radiación alcanza un valor de $40kW$. En estas condiciones un haz de $1A$ emite la

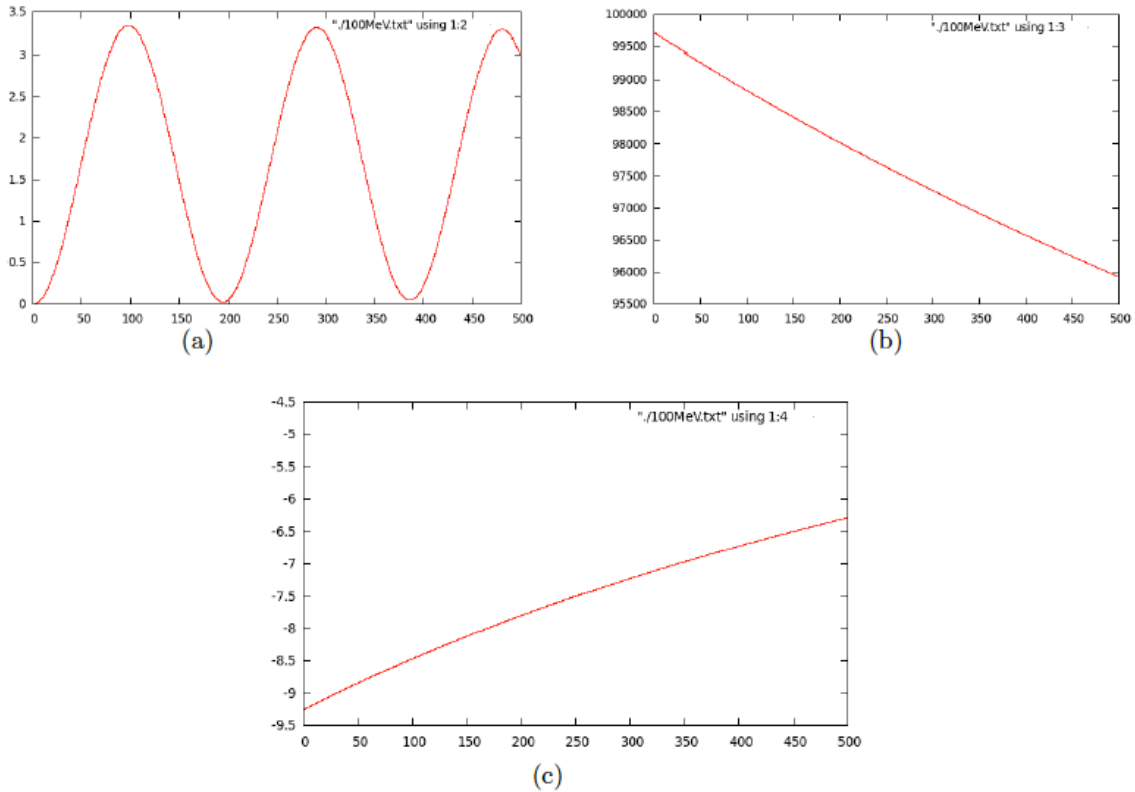


Figura 6: Resultados para Campo magnético de $2 \times 10^{-1}T$ y energía de $100MeV$. a) Componente y de la trayectoria en (m) vs Número de ciclos. b) Energía (keV) vs Número de ciclos. c) Potencia radiada ($\frac{keV}{s}$) vs Número de ciclos.

potencia a dos órdenes de magnitud mayor, $4MW$. Es evidente que para mantener el régimen SARA la potencia transmitida del campo de microondas al haz debe ser no menor que la potencia emitida, es decir la potencia de generador de microondas se determina por estos valores. Aceleración del haz de $1A$ hasta la energía de $1GeV$ es posible si la energía de aceleración es por lo menos igual a $1MW$.

Se observa claramente, en los gráfijs de las (figuras a) para la energía de $100MeV$, que la componente y tiene la forma de un coseno modulado por una función decreciente, esto va de acuerdo con el hecho de la la disminución de la energía cinetica de la partícula.

La transmisión de la energía de micro-ondas al haz de electrones con tanta velocidad es posible si la tensión eléctrica es muy grande, con valores limitados por la tensión de ruptura del aire seco en la cámara SARA, este valor es aproximadamente $10kV/cm$.

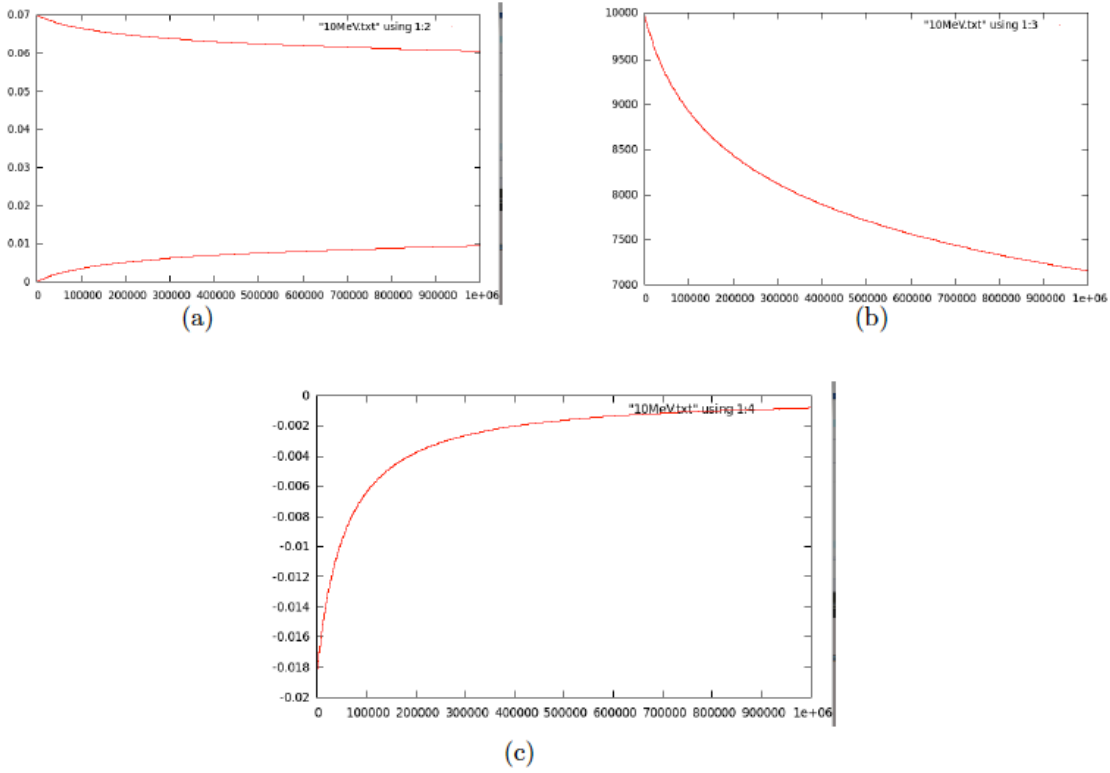


Figura 7: Resultados para Campo magnético de $1T$ y energía de $10MeV$. a) Diámetro en (m) como la medida de la recta vertical que corta las dos curvas vs Número de ciclos. b) Energía (keV) vs Número de ciclos. c) Potencia radiada ($\frac{keV}{s}$) vs Número de ciclos.

Este valor determina la tensión máxima de microondas y pone el límite técnico para la energía de aceleración. Es importante notar que la intensidad de la radiación sincrotrónica es mucho mayor que la intensidad de los dispositivos tradicionales de rayos X, los cuales no superan $10W$. Una de las causas es que la radiación sincrotrónica se propaga en un cono sólido de ángulo pequeño $\theta_0 \approx \frac{1}{\gamma} \ll 1$ (conocido como efecto de faro), comúnmente no mayor de 10° , mientras que los rayos X forman un cono de 180° . Para un observador que se encuentra en el plano de la órbita circular la partícula emite desde una pequeña parte de su trayectoria en la cual la dirección de la velocidad cambia un ángulo del orden de $\frac{1}{\gamma}$. Se puede suponer que en la longitud de esta parte de trayectoria la velocidad y aceleración permanecen constantes. Esta longitud se llama longitud de coherencia o longitud de generación de la radiación $l_{coh} \approx \frac{\rho}{\gamma}$, donde ρ es el radio de curvatura. Es importante notar que las pérdidas de radiación deben ser compensadas constantemente y por eso es necesario que el proceso de aceleración termine en unas pocas rotaciones pues el problema de la fabricación de generadores de microondas de potencias mayores que $1MW$ todavía no está resuelto.

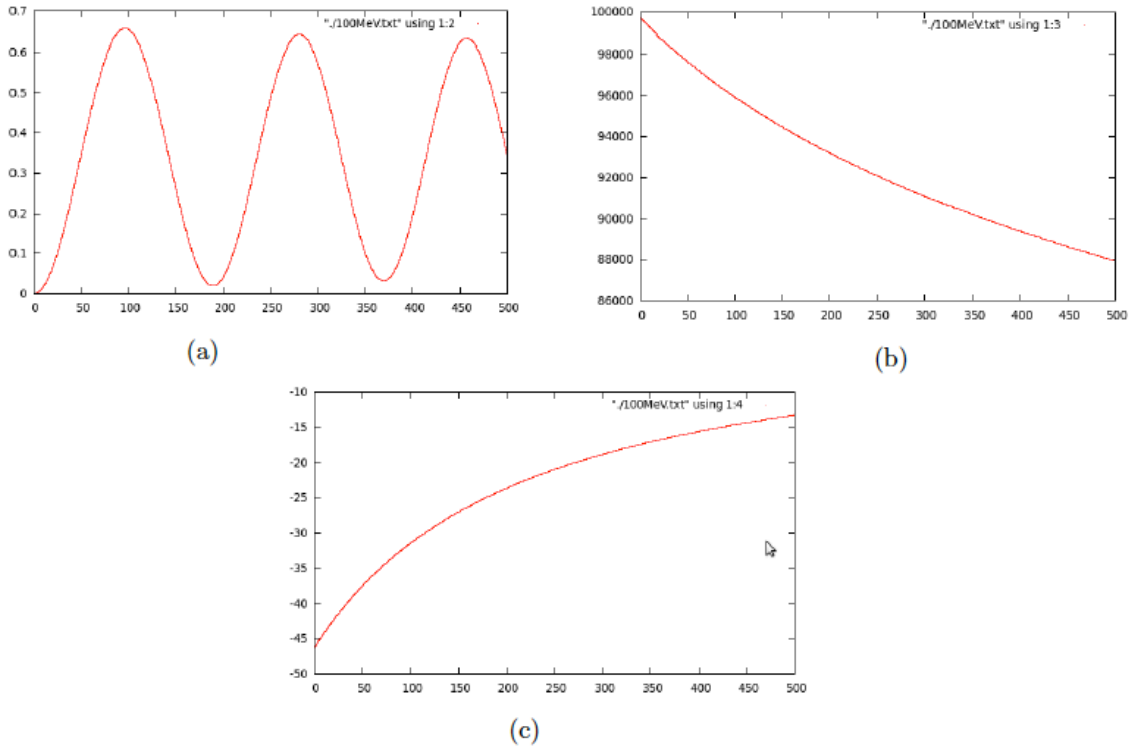


Figura 8: Resultados para Campo magnético de $1T$ y energía de $100MeV$. a) Componente y de la trayectoria en (m) vs Número de ciclos. b) Energía (keV) vs Número de ciclos. c) Potencia radiada ($\frac{keV}{s}$) vs Número de ciclos.

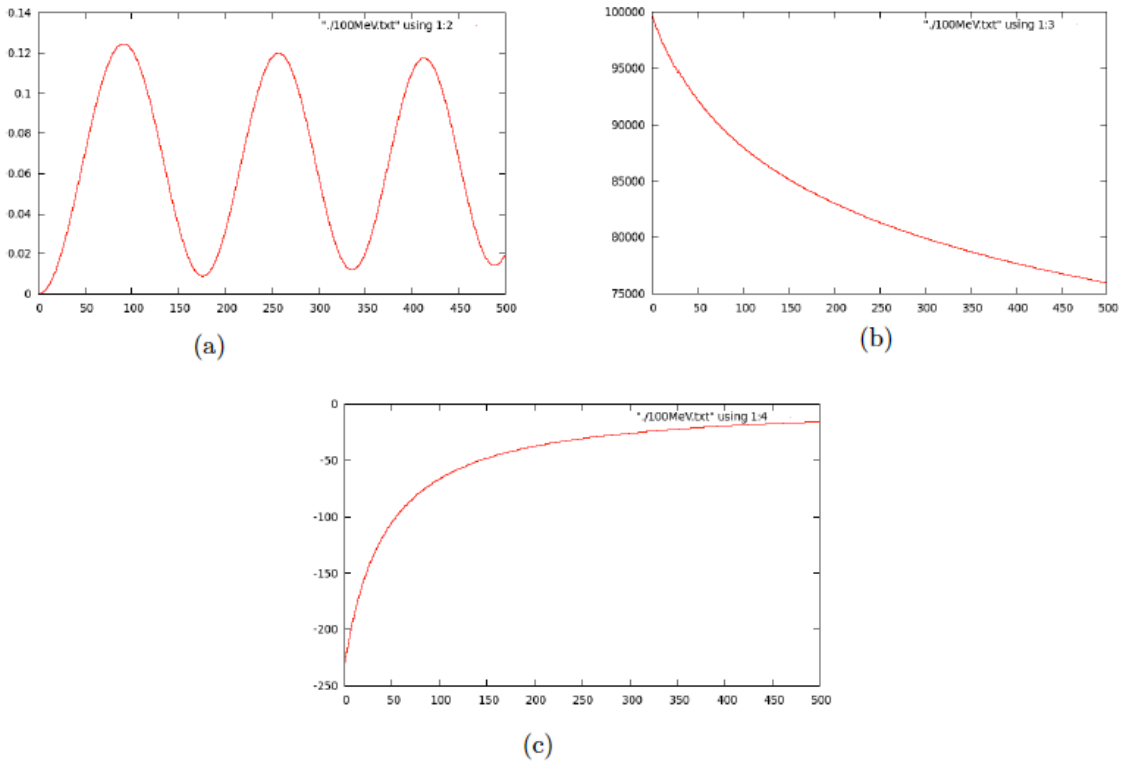


Figura 11: Resultados para Campo magnético de $5T$ y energía de $10MeV$. a) Diámetro en (m) como la medida de la recta vertical que corta las dos curvas vs Número de ciclos. b) Energía (keV) vs Número de ciclos. c) Potencia radiada ($\frac{keV}{s}$) vs Número de ciclos.

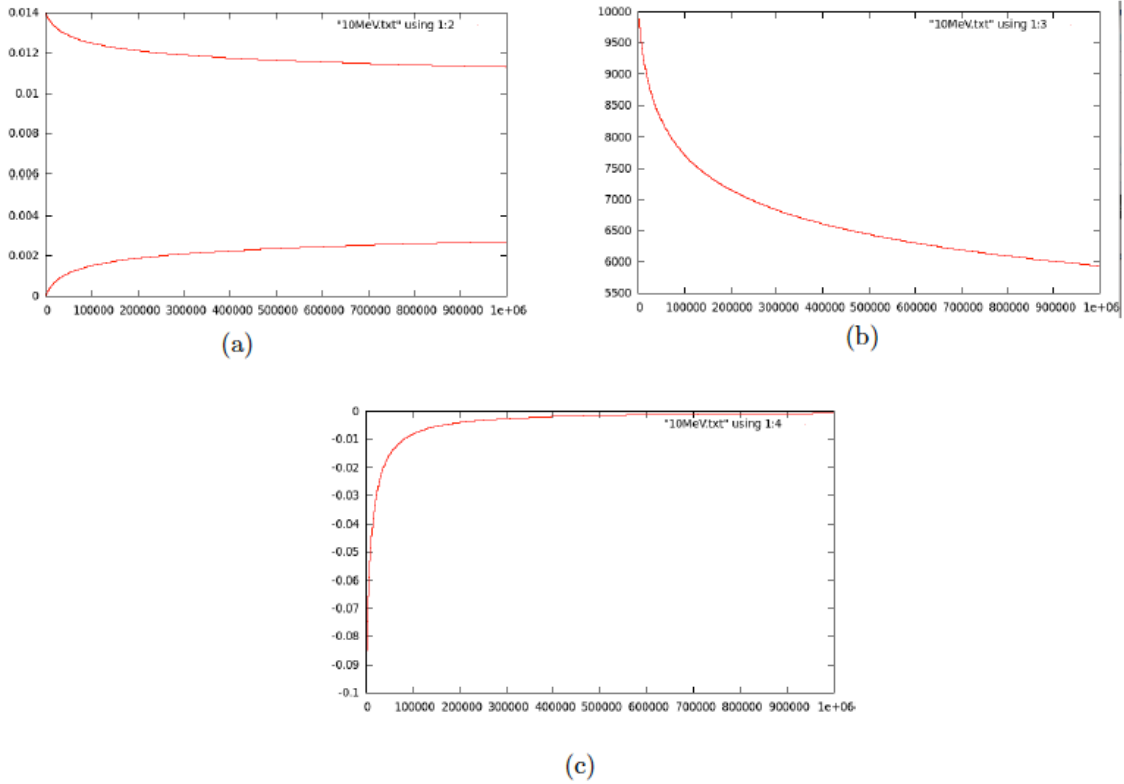


Figura 9: Resultados para Campo magnético de $10T$ y energía de $10MeV$. a) Diámetro en (m) como la medida de la recta vertical que corta las dos curvas vs Número de ciclos. b) Energía (keV) vs Número de ciclos. c) Potencia radiada ($\frac{keV}{s}$) vs Número de ciclos.

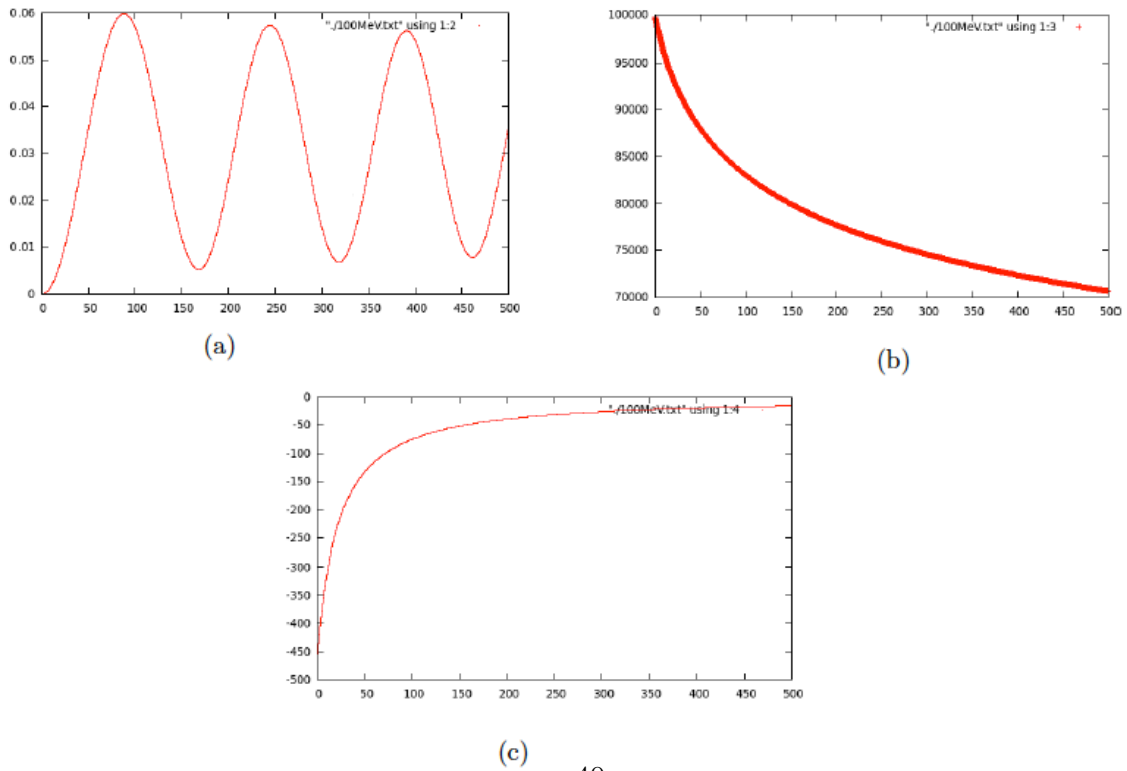


Figura 12: Resultados para Campo magnético de $5T$ y energía de $100MeV$. a) Componente y de la trayectoria en (m) vs Número de ciclos. b) Energía (keV) vs Número de ciclos. c) Potencia radiada (keV/s) vs Número de ciclos.

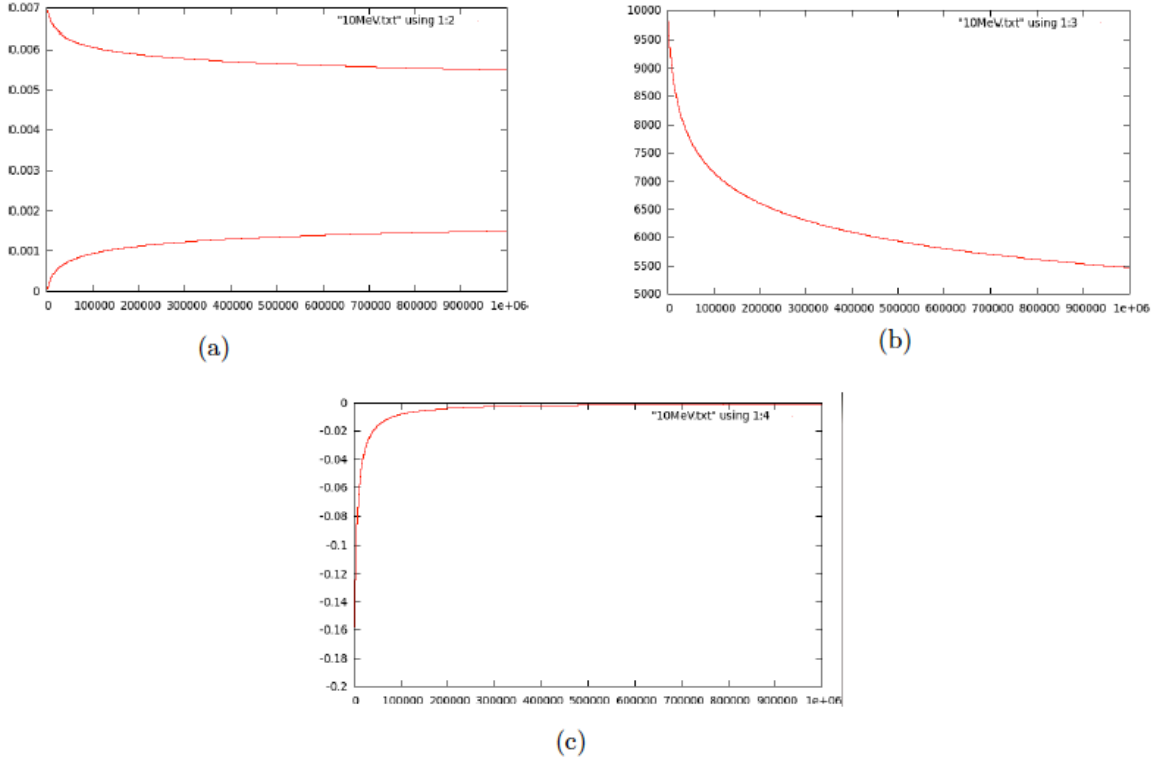


Figura 10: Resultados para Campo magnético de $10T$ y energía de $100MeV$. a) Componente y de la trayectoria en (m) vs Número de ciclos. b) Energía (keV) vs Número de ciclos. c) Potencia radiada ($\frac{keV}{s}$) vs Número de ciclos.

Durante el tiempo de emisión $\tau \approx \frac{l_{coh}}{v\omega} \frac{1}{v} \approx \rho/\gamma v$ la fase de onda emitida con una frecuencia ω se cambia a $\Delta\phi = \omega\tau - \mathbf{n}\Delta\mathbf{S}(\tau) \approx \frac{\omega\rho}{2\gamma^3 c}$. Se emitan solo ondas de frecuencias para las cuales $\Delta\phi \leq 1$. En el caso $\Delta\phi > 1$ las ondas en el cono de radiación tienen grandes desplazamientos de fases y apagan una a otra. El rango de frecuencias emitidas se determina por la condición $\Delta\omega \leq \omega_c = c\gamma^3/\rho$. La frecuencia ω_c es crítica, la intensidad cae rápido y el máximo de radiación corresponde a $\omega \cong \omega_c$. Por ejemplo para $H = 5T$ un haz de energía 100 MeV (ver figs 11 y 12) emite en el rango $\omega_c/2\pi \cong 10^{16}Hz$ que pertenece al espectro visible. Esto coincide completamente con los resultados experimentales.

0.11 Conclusiones y observaciones

En esta tesis se presenta un análisis y características de la radiación producida por movimiento acelerado de electrones conforme al acelerador SARA. Se hace una simulación de movimiento de los electrones que toma en consideración la fuerza de frenado por ra-

diación sincrotrónica. Se muestra la fuerza por radiación para cada uno de los periodos de rotación de Larmor en el sistema SARA influye poco sobre tales parámetros como la velocidad de los electrones y su energía pero se muestra que el balance energético en el caso de haces electrónicos depende significativamente de la potencia emitida por radiación. Se esclarecen límites físicos y técnicos para fuentes de radiación sincrotrónica.

El acelerador SARA se puede convertir en una fuente de radiación sincrotrónica si en el plano de reflexión del haz electrónico (ver fig 1) se crea un pozo magnético local. Se supone que en este pozo tridimensional sucederá la captura de electrones y se formará un anillo electrónico de alta energía y alta densidad. Este pozo se puede formar ubicando en el plano de reflexión una bobina delgada con la corriente dirigido en la dirección opuesta a la corriente en las bobinas principales de SARA.

REFERENCIAS

- [1] Physics by M. Alonso & E. Finn, Addison Wesley 1996.
- [2] A. A. Kolomenskii, A.N.Levedev. Dokl. Akad, Nauk USSR, 145, 1251 (1962); Sov. Phys. Dokl., 7, 492 (1962).
- [3] K. S. Golovanivsky. Phisica Scripta, 22, 126 (1980), K. S. Golovanivsky, IEEE Trans. Plasma Sci., Ps-11, 28 (1983).
- [4] V. D. Dugar-Zhabon and E. A. Orozco. “Cyclotron spatial Autoresonance acceleration model”. Phys. Rev. ST. Accel. Beams. 12, 041301 (2009).
- [5] V. D. Dugar-Zhabon, E. A. Orozco, IEEE Trans. Plasma Phys. Three dimensional particle in cell simulation of spatial electron beam motion (2010)
- [6] The Classical Theory of Fields - Course of Theoretical Physics Volume 2, L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Butterworth-Heinemann.
- [7] Radiation Processes In Plasmas, G. Bekefi, Wiley.
- [8] Electrodynamics of Particles and Plasmas, P. C. Clemmow, J. P. Dougherty, Addison-Wesley.