

Modelo determinístico bi-objetivo para el problema de ruteo de vehículos con condiciones de
contaminación

Edinson Urrutia Gómez y Lysbeydys Carolina Nieves Medina

Trabajo de Grado para optar al título de Ingeniero Industrial

Director:

Javier Eduardo Arias Osorio

Ph.D.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas

Escuela de Estudios Industriales y Empresariales

Bucaramanga

2022

Tabla de contenido

	Pág.
Introducción	16
1. Planteamiento del Problema	18
2. Justificación del Proyecto	19
3. Objetivos	21
3.1 Objetivo general	21
3.2 Objetivos específicos	21
4. Revisión de la Literatura	22
4.1 Análisis Bibliométrico	22
4.1.1 Indicadores de actividad científica.....	23
4.1.1.1 Indicadores de productividad científica.....	23
4.1.1.2 Indicadores de output (resultados).....	29
4.1.1.3 Indicadores de tipo de investigación.....	31
4.1.1.4 Indicadores basados en coautoría.....	32
4.1.1.5 Indicadores basados en asociaciones temáticas	35
4.1.2 Indicadores de impacto	36
4.1.2.1 Indicadores de impacto o influencia.....	36
4.2 Análisis preliminar de la literatura.....	37
4.3 Marco de antecedentes	43
5. Marco Teórico.....	46
5.1 Optimización matemática	46

5.1.1 Optimización combinatoria.....	46
5.2 . Problema de optimización.....	47
5.2.1 Problema de enrutamiento de vehículos (VRP).....	47
5.2.2 Problema de enrutamiento con condiciones de contaminación (PRP)	48
5.2.3 El problema con ventanas de tiempo (VRPTW).....	48
5.3 Modelo de optimización	48
5.3.1 Modelo determinístico	48
5.3.2 Modelo probabilístico	49
5.3.3 Mono-objetivo.....	49
5.3.4 Multiobjetivos	49
5.4 Técnicas de optimización.....	50
5.4.1 Exactas	50
5.4.2 Heurísticas.....	50
5.4.2.1 Heurística de Búsqueda.....	51
5.4.2.2 Heurísticas Constructivas.....	51
5.4.3 Metaheurística.....	51
5.4.3.1 La búsqueda tabú (TS).....	52
5.4.3.2 Recocido simulado (SA).....	52
5.4.3.3 Búsqueda Adaptativa de Grandes Vecindarios (ALNS).....	53
5.4.4 Algoritmos genéticos	53
5.4.4.1 Algoritmo Genético De Ordenamiento No-dominado segunda generación (NSGA-II). .	53
5.4.4.1.1 Cromosoma.....	54
5.4.4.1.2 Población.....	54

5.4.4.1.3 Aptitud.....	54
5.4.4.1.4 Selección.....	54
5.4.4.1.5 Cruce.....	55
5.4.4.1.6 Mutación.....	57
5.4.4.1.7 Frente de Pareto.....	57
5.4.4.1.8 ANOVA.....	58
6. Metodología.....	58
7. Diseño y Modelamiento del Problema.....	60
7.1 Descripción del Problema.....	60
7.2 Obtención de los datos.....	61
7.3 Descripción del modelo de optimización.....	61
7.4 Formulación Matemática.....	62
7.5 Validación del modelo matemático para el problema PRP.....	73
8. Algoritmo de solución propuesto – NSGA II.....	78
8.1 Codificación de las soluciones.....	80
8.2 Decodificación y factibilidad de las soluciones.....	82
8.3 Ordenamiento no dominado rápido.....	85
8.4 Selección.....	88
8.5 Operador de cruce.....	92
8.6 Operador de mutación.....	95
8.7 Elitismo.....	98
9. Rendimiento del Algoritmo Genético.....	98
9.1 Planteamiento del diseño experimental.....	99

9.2 Factores del diseño.....	99
9.3 Variables de desempeño	100
9.4 Tratamientos	102
9.5 Análisis de resultados	104
9.5.1 Tiempo de ejecución.....	105
9.5.2 Cantidad de soluciones no dominadas	107
9.5.3 Tiempo computacional.....	116
10. Conclusiones.....	124
11. Referencias Bibliográficas	126

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1. Cumplimiento de los objetivos del proyecto	17
Tabla 2. Participación de autores según el número de publicaciones (2010-2020).....	23
Tabla 3 Participación de publicaciones por años (2010-2020).....	25
Tabla 4. Participación por áreas de investigación (2010-2020).....	26
Tabla 5 Participación por países (2010-2020)	28
Tabla 6 Participación de patrocinadores (2010-2020).....	29
Tabla 7. Participación por tipo de documentos (2010-2020).....	31
Tabla 8 Cantidad de vehículos a asignar k y capacidades disponibles.	74
Tabla 9 Cantidad, Ubicación y demanda de los clientes.....	74
Tabla 10 Resultados de asignación obtenidos en la minimización de los costos totales	77
Tabla 11 Resultados de asignación obtenidos bajo consideraciones ambientales	77
Tabla 12 Especificación equipo cómputo	99
Tabla 13 Factores del diseño experimental.....	100
Tabla 14 Tratamientos de la validación a niveles bajos.....	103
Tabla 15 Tratamientos de la validación a niveles altos	103
Tabla 16 Instancias de prueba para la validación del algoritmo NSGA-II.....	104
Tabla 17 Análisis de la población para el tiempo computacional a niveles bajos	107
Tabla 18 Análisis del parámetro poblacional para el tiempo computacional a niveles altos ...	107
Tabla 19 Análisis del parámetro población para la cantidad de soluciones a niveles bajos	109
Tabla 20 Análisis del parámetro población para la cantidad de soluciones a niveles altos	109
Tabla 21 Análisis de probabilidad de cruce para el tiempo computacional en un nivel bajo...	112

Tabla 22	Análisis de probabilidad de cruce para el tiempo computacional en un nivel alto....	113
Tabla 23	Análisis del parámetro probabilidad de cruce para la cantidad de soluciones no dominados en un nivel bajo	115
Tabla 24	Análisis del parámetro probabilidad de cruce para la cantidad de soluciones no dominados en un nivel alto	115
Tabla 25	Análisis de probabilidad de mutación para el tiempo computacional en un nivel bajo	118
Tabla 26	Análisis de probabilidad de mutación para el tiempo computacional a niveles altos	118
Tabla 27	Análisis del parámetro probabilidad de mutación para la cantidad de soluciones no dominados en un nivel bajo	120
Tabla 28	Análisis del parámetro probabilidad de mutación para la cantidad de soluciones no dominados en un nivel alto	121
Tabla 29	Tratamientos para análisis de costos y emisiones.....	122
Tabla 30	Costos mínimos obtenidos para cada instancia.....	124
Tabla 31	Emisiones mínimas obtenidas para cada instancia	124

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1. Ecuación de búsqueda	22
Figura 2 Participación de autores según el número de publicaciones (2010-2020)	24
Figura 3. Participación de publicaciones por años (2010-2020).	24
Figura 4 Participación por áreas de investigación (2010-2020)	27
Figura 5 Participación por países (2010-2020).....	28
Figura 6 Participación de patrocinadores (2010-2020).....	30
Figura 7 Participación por tipo de documentos (2010-2020)	32
Figura 8 Visualización VOSviewer de una red de coautoría entre países cuyos autores publicaron al menos dos documentos (2010-2020)	33
Figura 9 Visualización VOSviewer de una red de coautoría entre autores publicando al menos dos documentos (2010-2020)	34
Figura 10.	35
Figura 11 Visualización VOSviewer de una red de citación entre autores citados publicando al menos treinta documentos (2010-2020).....	36
Figura 12 Número de citas por año	37
Figura 13. Cruce de un punto.....	56
Figura 14. Cruce de dos puntos	56
Figura 15. Cruce uniforme.....	57
Figura 16 <i>Codificación de la función de costos totales en GAMS</i>	75
Figura 17 <i>Codificación de la función de consideraciones ambientales en GAMS</i>	76
Figura 18 Costo mínimo total obtenido para la instancia de prueba	76

Figura 19	Emisiones de CO2 mínimas obtenidas para la instancia de prueba	77
Figura 20	Pseudocódigo del algoritmo NSGA-II del problema PRP	79
Figura 21	Representación general de una solución del modelo PRP	80
Figura 22	Individuos generados aleatoriamente para la primera población	82
Figura 23	Factibilidad de los individuos según el límite de vehículos propios	83
Figura 24	Individuo de demostración de la población aleatoria	84
Figura 25	Pseudocódigo del Ordenamiento No Dominado Rápido adaptado de	86
Figura 26	Selección por torneo aleatorio binario.....	89
Figura 27	Cálculo de la distancia de apilamiento de una solución i.....	91
Figura 28	Individuos de prueba para el operador de cruce.....	92
Figura 29	Padres con posiciones resaltadas a modificar durante el cruce	93
Figura 30	Descendiente intermedios del cruce	93
Figura 31	Descendientes intermedio y final de la madre.....	94
Figura 32	Descendientes intermedio y final del padre	95
Figura 33	Descendientes finales del cruce a ser mutados.....	96
Figura 34	Descendiente resultante del tipo de mutación 1	97
Figura 35	Descendiente resultante de la mutación tipo 2	97
Figura 36	Gráfica de intervalos de población para la variable tiempo a niveles bajos.....	105
Figura 37	Gráfica de intervalos de población para la variable tiempo a niveles altos	106
Figura 38	Gráfica de intervalos de población para la variable cantidad de soluciones a niveles bajos	108
Figura 39	Gráfica de intervalos de población para la variable cantidad de soluciones a niveles altos.....	108

Figura 40 Gráfica de intervalos de probabilidad de cruce para la variable tiempo a un niveles bajos 111

Figura 41 Gráfica de intervalos de población para la variable tiempo a niveles altos 111

Figura 42 Gráfica de intervalos de probabilidad de cruce para la variable cantidad a un niveles bajos 113

Figura 43 Gráfica de intervalos probabilidad cruce para la variable cantidad a un niveles altos 114

Figura 44 Gráfica de intervalos de probabilidad de mutación para la variable tiempo a niveles bajos 117

Figura 45 Grafica de intervalos de probabilidad de mutación para la variable tiempo a niveles altos 117

Figura 46 Gráfica de intervalos de probabilidad de mutación para la variable cantidad a un nivel bajo..... 119

Figura 47 Gráfica de intervalos probabilidad mutación para la variable cantidad a un nivel alto 119

Figura 48 Frente de Pareto obtenido para los tratamientos 1 y 7 en cuatro instancias de prueba 123

Lista de Apéndices

Todos los apéndices utilizados en el trabajo de investigación se pueden encontrar anexados en una carpeta

Apéndice A. Parámetros asociados al transporte

Apéndice B. Valores de entrada en GAMS y Matlab

Apéndice C. Codificación de los costos totales en GAMS

Apéndice D. Codificaciones de las consideraciones ambientales en GAMS

Apéndice E. Datos e instancias de inicialización del algoritmo (Excel)

Apéndice F. Resultados de la ejecución del algoritmo en las instancias de pruebas

Apéndice G. Resultados del diseño de experimento ANOVA

Apéndice H. Código Matlab del algoritmo NSGA-II

Apéndice I. Artículo publicable del diseño

Resumen

Título: Modelo determinístico bi-objetivo para el problema de ruteo de vehículos con condiciones de contaminación

Autores: Edinson Urrutia Gomez

Lysbeydys Carolina Nieves Medina

Palabras claves: Optimización Multiobjetivos, Algoritmo Genético, Optimización, Ruteo De Vehículos, VRP, PRP, Emisiones CO2, Ventanas De Tiempo

Descripción:

En el desarrollo del presente proyecto de investigación, el cual tiene como objetivo Diseñar y evaluar un modelo determinístico bi-objetivo para el problema de enrutamiento con condiciones de contaminación. El tradicional problema de enrutamiento de vehículo (VRP) será la base para el desarrollo del modelo propuesto, el cual, trae consigo la incorporación de variantes como su naturaleza bi-objetivo, vinculando el enfoque de minimización de costos totales y consideraciones ambientales. Las condiciones ambientales han ganado peso con el pasar de los años en los campos de investigación, autores como: G. Laporte, Palmer y Bektas consideran las consideraciones ambientales un factor decisivo en las tomas de decisiones estratégicas de ruteo de vehículos, especialmente las emisiones CO2 como un foco importante de estudio. Para cumplir los objetivos planteados en el presente trabajo, el modelo matemático se desarrollará y validará su correcto funcionamiento del modelo MILP para cada una de las dos funciones por separadas, en la herramienta GAMS. Como resultado de la revisión de literatura se consideró que para encontrar las soluciones no dominadas del problema completo bi-objetivo, la metaheurística adecuada y recomendada en estudios anteriores, es el NSGA-II, por lo que se realizara la codificó de este en MATLAB, para el apartado de validación de las pruebas de rendimiento del algoritmo, se empleó

los análisis estadísticos de Tukey brindados por la herramienta MINITAB. Mediante el desarrollo de las pruebas se llegó a la conclusión de que el menor tiempo de ejecución del algoritmo NSGA-II propuesto, se obtiene con una combinación de factores de tamaño de la población, probabilidad de cruce y mutación en sus niveles bajos (50, 0.4 y 0.1, respectivamente). En cambio, para obtener la mayor cantidad de soluciones no dominadas se debe establecer un tamaño de población de 100 individuos, una probabilidad de cruce igual a 0.7 y una probabilidad de mutación de 0.1. Finalmente, al revisar las soluciones no dominadas encontradas en estos 2 tratamientos e identificar los costos mínimos, se demostró que las soluciones generadas por el tratamiento número 7 (con $P = 50$, $C=0.4$ y $M=0.1$) dominaron a las del tratamiento 1 (con $P=100$, $C=0.7$ y $M=0.1$).

Abstract

Title: Bi-objective deterministic model for the vehicle routing problem with polluted conditions

Authors: Edinson Urrutia Gómez

Lysbydys Carolina Nieves Medina

Keywords: Multiobjective Optimization, Genetic Algorithm, Optimization, Vehicle Routing, VRP, PRP, CO2 Emissions, Time Windows

Description:

In the development of the present research project, the objective is to design and evaluate a deterministic bi-objective model for the routing problem with contamination conditions. The traditional vehicle routing problem (VRP) will be the basis for the development of the proposed model, which brings with it the incorporation of variants such as its bi-objective nature, linking the total cost minimization approach and environmental considerations. Environmental conditions have gained weight over the years in the research fields, authors such as: G. Laporte, Palmer and Bektas consider environmental considerations as a decisive factor in strategic vehicle routing decisions, especially CO2 emissions as an important focus of study. To meet the objectives set out in the present work, the mathematical model will be developed and its correct performance of the MILP model for each of the two functions separately will be validated in the GAMS tool. As a result of the literature review, it was considered that to find the non-dominated solutions of the complete bi-objective problem, the appropriate metaheuristic and recommended in previous studies, is the NSGA-II, so the coding of this in MATLAB was performed, for the validation section of the algorithm performance tests, the Tukey statistical analysis provided by the MINITAB tool was used. Through the development of the tests, it was concluded that the shortest execution time of the proposed NSGA-II algorithm is obtained with a combination of population

size, crossover probability and mutation factors at low levels (50, 0.4 and 0.1, respectively). In contrast, to obtain the highest number of non-dominated solutions, a population size of 100 individuals, a crossover probability equal to 0.7 and a mutation probability of 0.1 should be set. Finally, when reviewing the non-dominated solutions found in these 2 treatments and identifying the minimum costs, it was shown that the solutions generated by treatment number 7 (with $P = 50$, $C=0.4$ and $M=0.1$) dominated those of treatment 1 (with $P=100$, $C=0.7$ and $M=0.1$).

Introducción

El crecimiento del comercio electrónico y las entregas de paquetes a domicilio derivadas de la pandemia COVID-19, tuvieron un aumento en Latinoamérica del 505% de las compras por domicilio respecto al nivel pre-pandemia, siendo el estrato medio el de mayor crecimiento con un 638%. (La Republica, 2021).

El comprador online busca entregas cada vez más rápidas, esto conlleva a que el número de vehículos circulando en las carreteras hayan aumentado y, por ende, el consumo de combustible. Es así, como los índices de contaminación a causa de la movilización de carga y de pasajeros, en sus diferentes modos, pero específicamente el carretero, cada vez son más altos, por esta razón es necesario enfocarse en la reducción de las emisiones, es aquí donde nace la necesidad de dar solución al Problema de Enrutamiento de la Contaminación (PRP) como una alternativa, el cual es una variación del clásico Problema de Enrutamiento de Vehículos (VRP), siendo este problema fundamental para la planificación del transporte por carretera, teniendo como objetivo el enrutamiento de los vehículos para cumplir con la demanda establecida por los clientes. El PRP busca realizar una función objetivo que abarque la gran mayoría de variables que causen variaciones en el consumo de combustible y, por ende, en las emisiones de CO₂. Busca la incorporación de modelos matemáticos que brinden alternativas de solución para el PRP con y sin ventanas de tiempo, así mismo que los experimentos computacionales se asemejen al problema real.

A través de los años, se ha realizado investigaciones que brindan nuevas y mejores alternativas de solución para PRP. Es así, como (Palmer, 2007) propuso un modelo integrado de enrutamiento y emisiones para vehículos de carga, centrando su investigación en el papel que cumplía la velocidad en la reducción de emisiones de dióxidos de carbono (CO₂), teniendo en

cuenta varios factores como, la congestión y la existencia de ventanas de tiempo y la inexistencia de ellas. Dando como resultado una reducción del 5% de los índices de emisiones. Cabe recalcar que este modelo no tuvo en cuenta la carga de los vehículos.

Por lo mencionado anteriormente, surge el compromiso como estudiantes de la Universidad Industrial de Santander perteneciente al semillero de Ópalo de dar solución a un problema que impacta negativamente a la sociedad y al medio ambiente. Dado esto, el propósito de este trabajo es dar solución a un problema de optimización con condiciones de contaminación, planteando un modelo matemático, el cual utiliza una técnica metaheurística que tenga la capacidad de dar la solución óptima al PRP planteado en el documento.

Tabla 1.

Cumplimiento de los objetivos del proyecto

Objetivos	Cumplimiento
Realizar una revisión de literatura sobre el problema de ruteo de vehículos con condiciones de contaminación	Numeral 4
Formular un modelo matemático para el problema de ruteo de vehículos con condiciones de contaminación.	Numeral 6
Definir y desarrollar la técnica a utilizar para dar solución al modelo formulado	Numeral 7
Evaluar la técnica a partir de instancias propias del problema abordado.	Numeral 8
Elaborar un artículo de carácter publicable sobre la investigación.	Apéndice

1. Planteamiento del Problema

El problema de ruteo de vehículos (VRP), es un problema de optimización de programación de rutas para transporte, que tiene como propósito direccionar un conjunto de vehículos que cumplan con la demanda de los clientes, teniendo en cuenta las restricciones y buscando una solución óptima del diseño de las rutas. El VRP es de gran ayuda, entre otros, para compañías que se encargan de las operaciones, distribución y entrega de productos al cliente final.

Este tema ha sido de gran interés para varios autores los cuales han propuesto diversas variaciones al problema tradicional del VRP. Esta investigación tendrá como fin el estudio del problema de ruteo de vehículos con condiciones de contaminación (PRP por su sigla en inglés – Pollution Routing Problem), que tiene como objetivo la minimización de costos y emisiones de gases de efecto invernadero, como lo es el dióxido de carbono (CO₂), considerando que este tipo de emisiones dependen de factores como la carga, la velocidad, la distancia, la congestión, el tiempo, entre otros, siendo este fenómeno un foco clave de investigación tanto para las empresas prestadoras del servicio como para las entidades que regulan las emisiones.

El sector de transporte se convierte en un pilar de gran importancia para el óptimo funcionamiento de la industria, es así como el constate crecimiento y avance del sector se generan algunos problemas sociales, monetarios y ambientales. Se considera importante que la académica centre su mirada en brindar opciones de mejoras a problemas difíciles y controversiales para su análisis, por lo tanto, se podría asegurar que las emisiones de CO₂ a causa de este sector ocupan un lugar importante en cuanto a perjuicios generados a la sociedad y el medio ambiente se trata.

Un campo que tendría grandes beneficios con la realización de esta investigación es la logística, con una alternativa para la implementación de un plan de ruteo de vehículos que

contribuya a la disminución de emisiones. La cadena de suministro sería un escenario adecuado para la puesta en marcha de dicha investigación.

El PRP brinda una estrategia de optimización para el cumplimiento de los objetivos de la cadena de suministro, tales como, la realización de entregas exitosas cumpliendo con los tiempos establecidos y evitando pérdidas, y a su vez, optimizar distancias en el recorrido, teniendo en cuenta ciertas características como las necesidades impuestas por el cliente. Por esta razón el PRP debe cumplir con el tamaño y la capacidad de una flota de vehículos que sea adaptable a la variación de la demanda.

Por las razones mencionadas con anterioridad, es de vital importancia la investigación y apropiación de un modelo matemático que analice y evalúe las causas de los altos índices de emisiones de CO₂ generados por el sector de transporte, a su vez plantear posibles escenarios de solución que se vean reflejado en la disminución de los costos operativos y por supuesto en la reducción de los índices de emisión, creando un camino de constante mejora en la prestación del servicio y en el enriquecimiento de la academia en sectores industriales y medio ambientales.

Existe la posibilidad de estudiar este problema de forma detallada, involucrando aspectos de ventanas de tiempo, flota de vehículos mixta con carga heterogénea, entre otros.

2. Justificación del Proyecto

El problema de ruteo de vehículos (VRP) es un problema de optimización de programación de rutas para transporte, que tiene como propósito direccionar un conjunto de vehículos que cumplan con la demanda de los clientes teniendo en cuenta las restricciones y buscando una solución óptima del diseño de las rutas. El VRP es de gran ayuda, entre otros, para compañías que se encargan de las operaciones, distribución y entrega de productos al cliente final.

Este tema ha sido de gran interés para varios autores los cuales han propuesto diversas variaciones al problema tradicional del VRP. Esta investigación tendrá como fin el estudio del problema de ruteo de vehículos con condiciones de contaminación (PRP por su sigla en inglés – Pollution Routing Problem), que tiene como objetivo complementario al clásico objetivo de minimización de costos, el objetivo de la minimización de las emisiones de gases de efecto invernadero como lo es el dióxido de carbono, considerando que este tipo de emisiones dependen de factores como la carga, la velocidad, la distancia, entre otros, siendo este fenómeno un foco clave de investigación tanto para las empresas prestadoras del servicio como para las entidades que regulan las emisiones. Con el avance de las industrias productoras el sistema de transporte se convierte en un pilar de gran importancia para su óptimo funcionamiento, es así como el constate crecimiento y avance de estos sectores se generan algunos problemas, sociales, monetarios y ambientales. Se considera importante que la académica centre su mirada en brindar opciones de mejoras a problemas difíciles y controversiales para su análisis, por lo tanto, se podría asegurar que las emisiones de CO₂ a causa de la industria transportadora ocupan un lugar importante cuando de perjuicios generados a la sociedad y el medio ambiente se trata.

Por las razones mencionadas con anterioridad es de vital importancia la investigación y apropiación de un modelo conceptual que analice y evalúe las causas de los altos índices de emisiones de CO₂ generados por este sector, a su vez plantear posibles escenarios de solución que se vean reflejado en la disminución de los costos operativos y por supuesto en la reducción de los índices de emisión, creando un camino de constante mejora en la prestación del servicio y en el enriquecimiento de la academia en sectores industriales y medio ambientales.

Existe la posibilidad de estudiar este problema de forma detallada, involucrando aspectos de ventanas de tiempo, flota de vehículos mixta con carga heterogénea, entre otros.

3. Objetivos

3.1 Objetivo general

Diseñar y evaluar un modelo determinístico bi-objetivo para el problema de enrutamiento con condiciones de contaminación

3.2 Objetivos específicos

- Realizar una revisión de literatura sobre el problema de ruteo de vehículos con condiciones de contaminación.
- Formular un modelo matemático para el problema de ruteo de vehículos con condiciones de contaminación.
- Definir y desarrollar la técnica a utilizar para dar solución al modelo formulado
- Evaluar la técnica a partir de instancias propias del problema abordado.
- Elaborar un artículo de carácter publicable sobre la investigación.

4. Revisión de la Literatura

Para el problema planteado se tiene en cuenta trabajos de investigaciones anteriores con el fin de respaldar las declaraciones que se realiza a lo largo del proyecto. Inicialmente, se lleva a cabo un análisis bibliométrico para darle paso al seguimiento del análisis preliminar de la literatura, y, por último, estructurar u marco de antecedentes con bases conceptuales sólidas, el cual dará las pautas de iniciales para el desarrollo del proyecto.

4.1 Análisis Bibliométrico

Para la realización del análisis bibliométrico de la investigación se utiliza la base de datos SCOPUS, teniendo en cuenta la siguiente ecuación de búsqueda:

Figura 1.

Ecuación de búsqueda

Scopus:

(TITLE-ABS-KEY (("Pollution routing problem" OR ("routing problem") AND ("emissions ")

Tras realiza la incorporación de la ecuación de búsqueda en la base de datos ya mencionada se obtiene como resultado 522 artículos en un periodo determinado (2010-2020). Así mismo, se utiliza el software VOSviewer para analizar y visualizar las redes bibliométricas.

4.1.1 Indicadores de actividad científica

4.1.1.1 Indicadores de productividad científica.

Tabla 2.

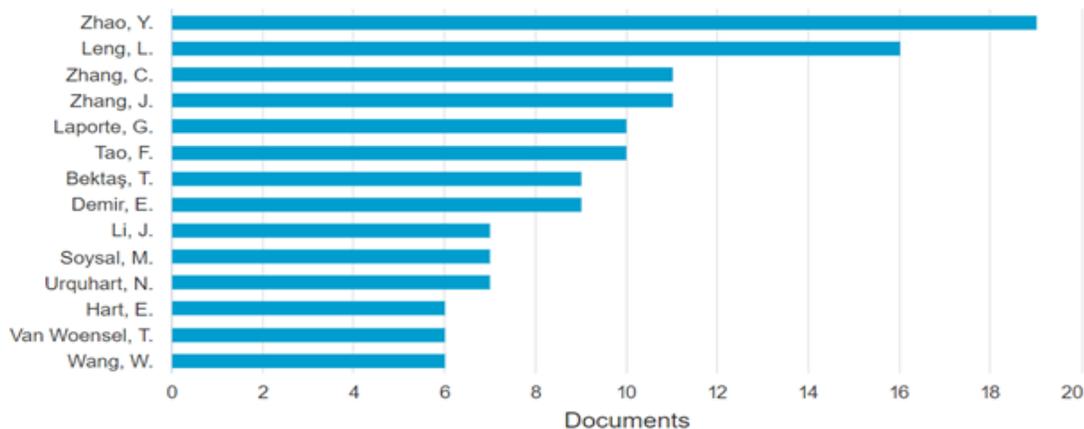
Participación de autores según el número de publicaciones (2010-2020)

Autores	Publicaciones	Participación (%)
Zhao, Y.	19	14,2%
Leng, L.	16	11,9%
Zhang, C.	11	8,2%
Zhang, J.	11	8,2%
Laporte, G.	10	7,5%
Tao, F.	10	7,5%
Bektas, T.	9	6,7%
Demir, E.	9	6,7%
Li, J.	7	5,2%
Soysal, M.	7	5,2%
Urquhart, N.	7	5,2%
Hart, E.	6	4,5%
Van Woensel, T.	6	4,5%
Wang, W.	6	4,5%
Total	134	

Nota. Tomado de *Web of Science, 2021*.

Figura 2

Participación de autores según el número de publicaciones (2010-2020)

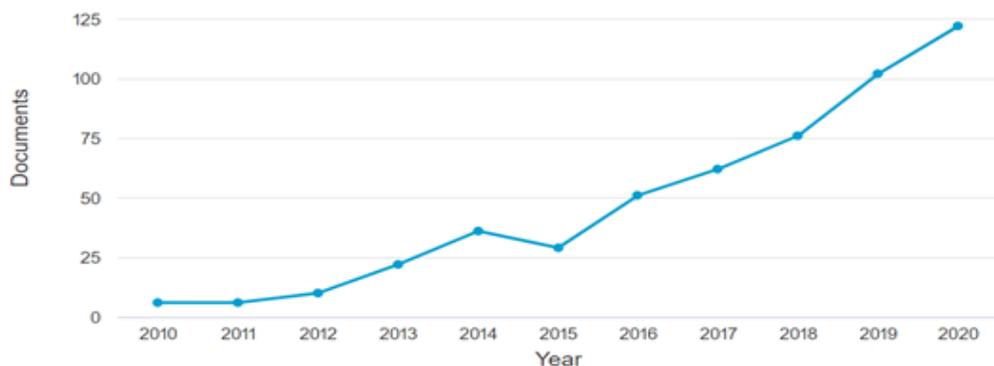


Nota. Tomado de *Web of Science*, 2021.

De acuerdo con la tabla 2, se puede evidenciar la contribución de los autores según el número de publicaciones de documentos. El autor con mayor número de contribución es Y. Zhao con 19 publicaciones, seguido de Leng L. 16. Los autores Zhang C y Zhang J tienen 11 publicaciones cada uno durante el periodo evaluado, lo cual se ve evidenciado en la figura 1. Los cuatro (4) autores ya mencionados representan un 42,5% de las publicaciones arrojadas.

Figura 3.

Participación de publicaciones por años (2010-2020).



Nota. Tomado de *Web of Science*.

Tabla 3*Participación de publicaciones por años (2010-2020).*

Año	Número de publicaciones	Participación (%)
2010	6	1,1%
2011	6	1,1%
2012	10	1,9%
2013	22	4,2%
2014	36	6,9%
2015	29	5,6%
2016	51	9,8%
2017	62	11,9%
2018	76	14,6%
2019	102	19,5%
2020	122	23,4%
Total	522	

Nota. Tomado de *Web of Science*.

Según la Figura 2, se puede notar una baja publicación durante los dos primeros años (2010-2011), con tan solo seis (6) publicaciones en cada periodo. De igual forma, se muestra un continuo crecimiento en el número de publicaciones llegando al 2020 con un total de 122 artículos publicados, teniendo una tendencia baja en el 2015; 7 documentos menos al año anterior. Por último, se puede notar un total de 300 publicaciones durante los últimos tres años analizados (2018-2020) representando un 57,5%, como se puede presenciar en la Tabla 3.

Tabla 4.

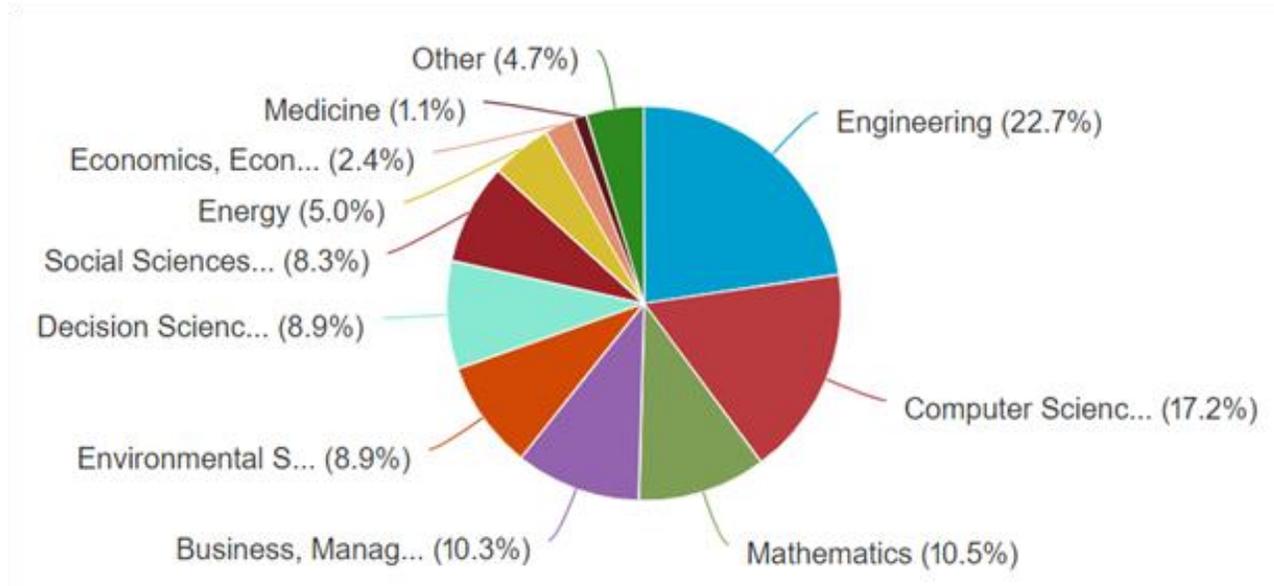
Participación por áreas de investigación (2010-2020)

Áreas	Número de publicaciones	Participación (%)
Ingeniería	269	22,7%
Ciencias de la computación	204	17,2%
Matemáticas	125	10,5%
Negocios, gestión y contabilidad	122	10,3%
Ciencia medioambiental	106	8,9%
Ciencias de la decisión	105	8,9%
Ciencias sociales	98	8,3%
Energía	59	5,0%
Economía, econometría y finanzas	29	2,4%
Medicina	13	1,1%
Otros	56	4,7%
Total	1186	

Nota. Tomado de *Web of Science*.

Figura 4

Participación por áreas de investigación (2010-2020)



Nota. Tomado de *Web of Science, 2021*.

Conforme a la Tabla 4 y la figura 3, se puede concluir que la disciplina que más se encuentra en las publicaciones analizadas es ingeniería con 269 artículos, seguidos de la ciencia de la computación (204) y matemáticas (125), representando un 22,7%, 17,2% y 10,5% respectivamente, dando a conocer el amplio interés que tiene estas tres áreas mencionadas en el problema de enrutamiento con condiciones de contaminación. Cabe resaltar la excelente participación que ha tenido las demás áreas por dicha investigación, ya que esto da a conocer su interés por contribuir en la disminución de las emisiones de CO₂ y crear un trabajo cooperativo de información en pro de la investigación y la ciencia.

Tabla 5

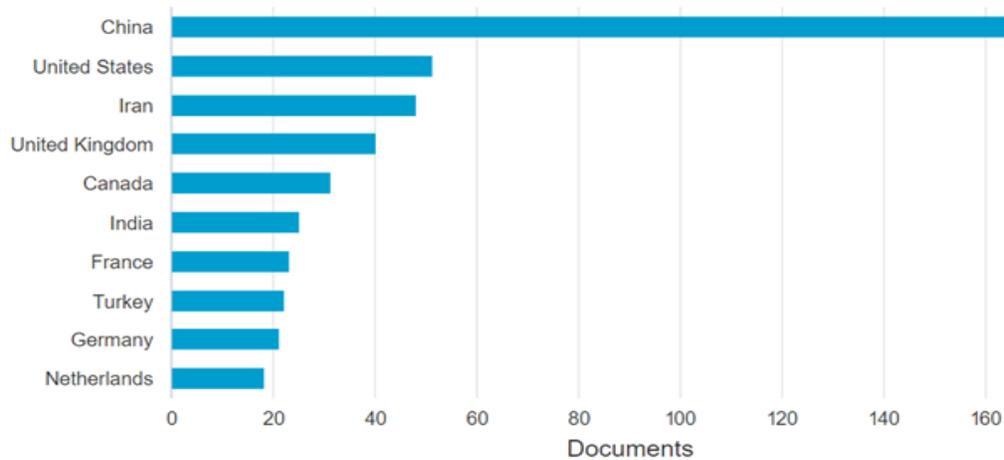
Participación por países (2010-2020)

Países	Número de publicaciones	Participación (%)
China	164	37,0%
Estados Unidos	51	11,5%
Irán	48	10,8%
Reino Unido	40	9,0%
Canadá	31	7,0%
India	25	5,6%
Francia	23	5,2%
Alemania	21	4,7%
Total	443	

Nota. Tomado de *Web of Science*.

Figura 5

Participación por países (2010-2020)



Nota. Tomado de *Web of Science, 2021*.

De acuerdo con la tabla 5, se puede considerar una enorme participación de La República Popular China, siendo el país más productivo con 164 documentos, teniendo una participación del 37,0%. Le sigue Estados Unidos (51) e Irán (48) con una representación del 11,5% y 10,8% respectivamente. Sin embargo, en la figura 4 se puede notar una diferencia descomunal de China con respecto a los demás países. Dicha diferencia se puede dar gracias al sumo aporte de los cuatro autores (Y. Zhao, L. Leng, C. Zhang y J. Zhang) con mayor número de publicaciones que se da en dicho país, como se pudo mostrar en la figura 1. Se puede deducir que el interés demostrado por China se debe a la preocupación de altos índices de contaminación generada por la industrialización existente en dicho país.

4.1.1.2 Indicadores de output (resultados).

Tabla 6

Participación de patrocinadores (2010-2020)

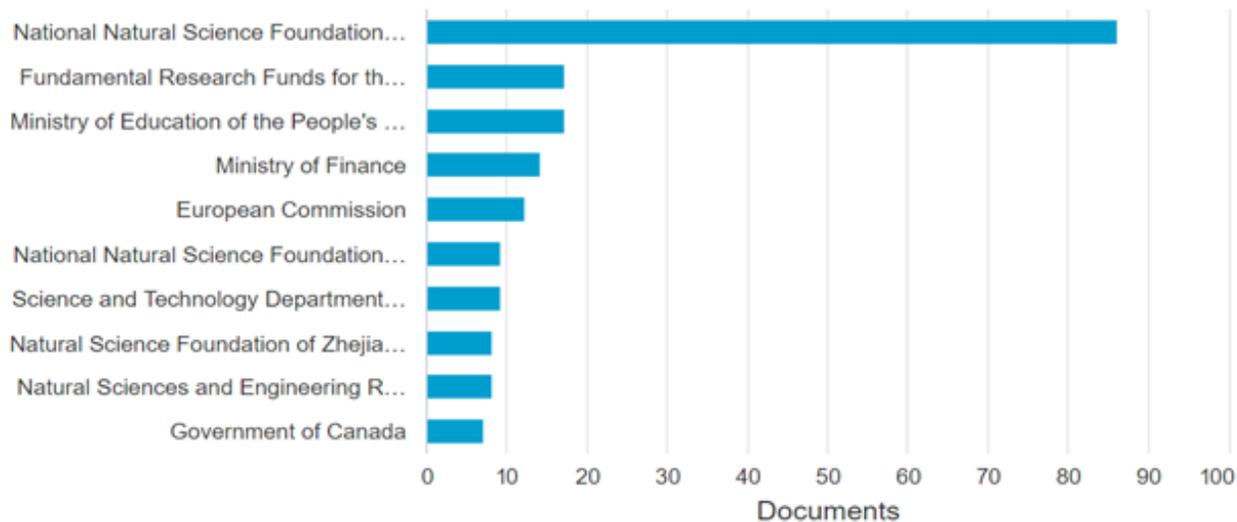
Patrocinador del investigador	Número de documentos	Participación (%)
Fundación Nacional de Ciencias Naturales de China	86	46,0%
Fondos de investigación fundamental para las universidades centrales	17	9,1%
Ministerio de Educación de la República Popular China	17	9,1%
Ministerio de Finanzas	14	7,5%
Comisión Europea	12	6,4%
Fondo Conjunto de la Fundación Nacional de Ciencias Naturales de China-Zhejiang	9	4,8%

Patrocinador del investigador	Número de documentos	Participación (%)
Departamento de Ciencia y Tecnología de la provincia de Zhejiang	9	4,8%
Fundación de Ciencias Naturales de la provincia de Zhejiang	8	4,3%
Consejo de Investigación de Ciencias Naturales e Ingeniería de Canadá	8	4,3%
Gobierno de Canadá	7	3,7%
Total	187	

Nota. Tomado de *Web of Science*.

Figura 6

Participación de patrocinadores (2010-2020)



Nota. Tomado de *Web of Science, 2021*.

De acuerdo con la Tabla 6, se muestra los entes patrocinadores en investigaciones realizadas para el fortalecimiento de estas. Con una gran participación del 46,0%, la Fundación Nacional de Ciencias Naturales de China es la mayor contribuyente con 86 documentos patrocinados, marcando a la diferencia con las demás entidades patrocinadoras como se muestra en la Figura 5.

De igual manera, se puede evidenciar que el 78,2% de la participación de los patrocinadores en documentos pertenecen a China.

4.1.1.3 Indicadores de tipo de investigación.

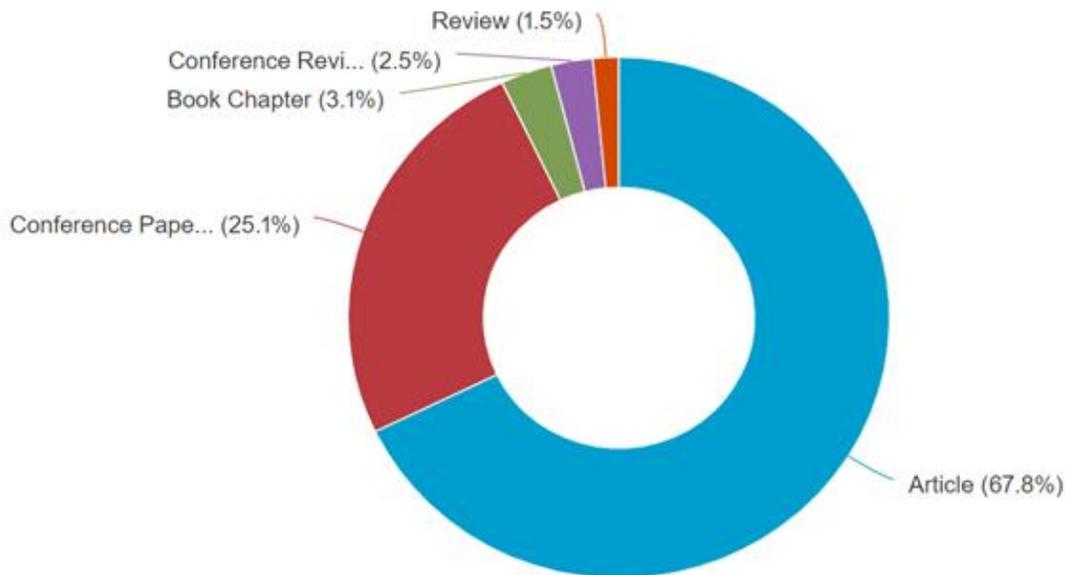
Tabla 7.

Participación por tipo de documentos (2010-2020)

Tipo de documento	Documentos	Participación (%)
Artículo	354	67,8%
Documento de conferencia	131	25,1%
Capítulo del libro	16	3,1%
Revisión de la conferencia	13	2,5%
Revisar	8	1,5%
Total	522	

Figura 7

Participación por tipo de documentos (2010-2020)



Nota. Datos tomados de *Web of Science, 2021*.

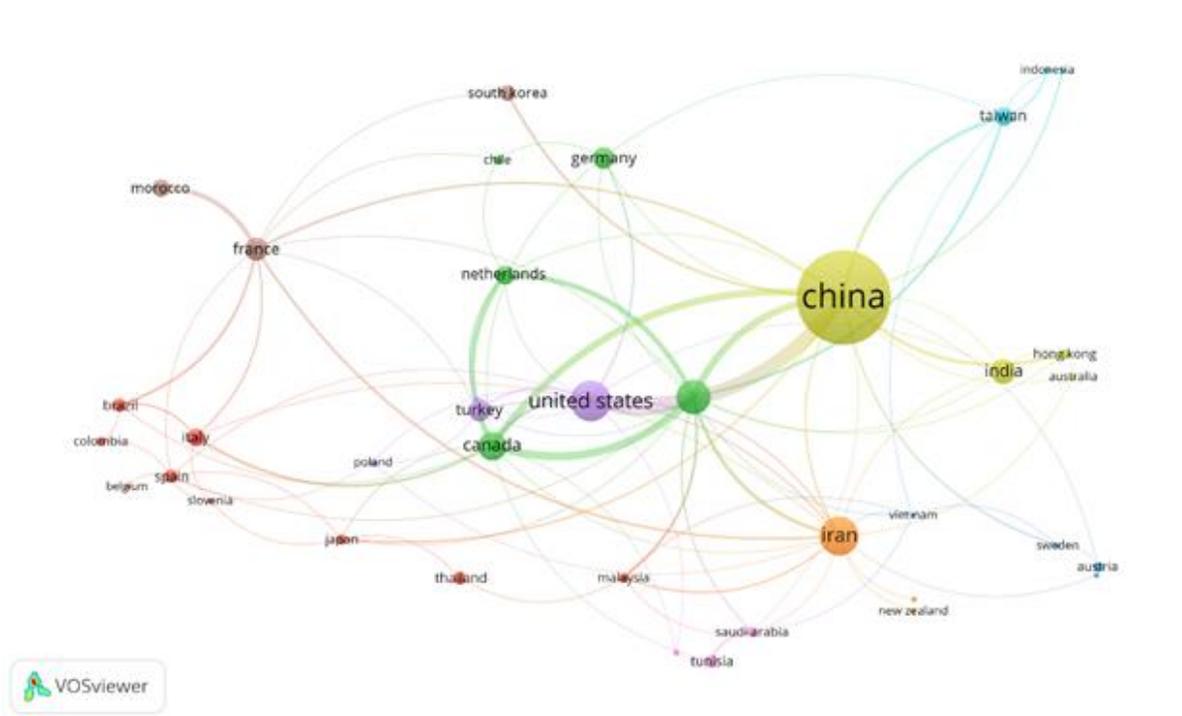
En la Tabla 7, se evidenció la gran participación de los artículos con un 67,8%, esto se representa en 354 unidades de artículos totales publicados, seguido de los documentos de conferencia, con una interpretación de 131 unidades. En la Figura 6, se puede percatar que los dos tipos de documentos mencionados anteriormente tiene la mayor participación, representando un 92,9% (485 documentos) del total (522 documentos).

4.1.1.4 Indicadores basados en coautoría.

En la figura 7 se muestra la visualización de coautoría entre países, donde cada círculo simboliza un país, su tamaño es la cantidad de documentos publicados y la distancia de un país a otro es la fuerza de coautoría que se ejerce en cada uno de ellos. En otras palabras, cuanto más cerca se encuentren los países, mayor es la relación de coautoría. Mientras que un país esté más alejado del otro, menor es la fuerza de coautoría.

Figura 8

Visualización VOSviewer de una red de coautoría entre países cuyos autores publicaron al menos dos documentos (2010-2020)



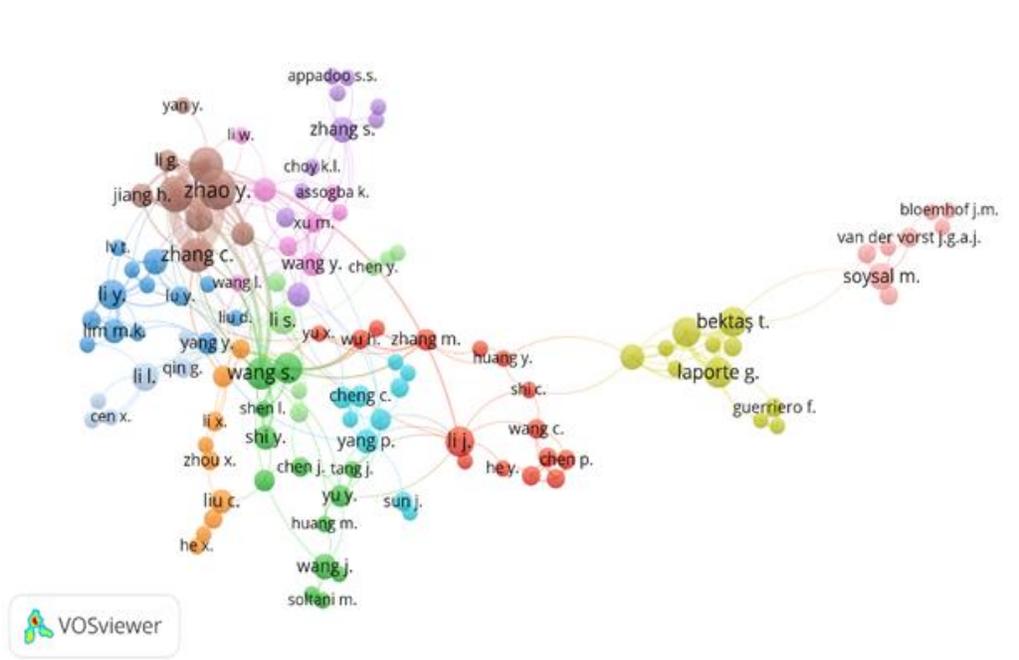
Nota. Datos tomados de *Web of Science*, 2021.

La República Popular China es el país con mayor contribución con 164 documentos y con una colaboración de 17 países diferentes; siendo el país con más colaboraciones, en los cuales se encuentra una gruesa cooperación con países como: Estados Unidos con 51 documentos, Irán con 48 documentos y Reino Unido con 40 documentos. Por otra parte, Brasil (11), Chile (7) y Colombia (7) son los países más productivos de Latinoamérica.

De igual forma, en la figura se puede diferenciar la colaboración entre los países dependiendo de su temática. Cada color indica *clusters* de países que están altamente relacionado en términos de temática entre ellos.

Figura 9

Visualización VOSviewer de una red de coautoría entre autores publicando al menos dos documentos (2010-2020)

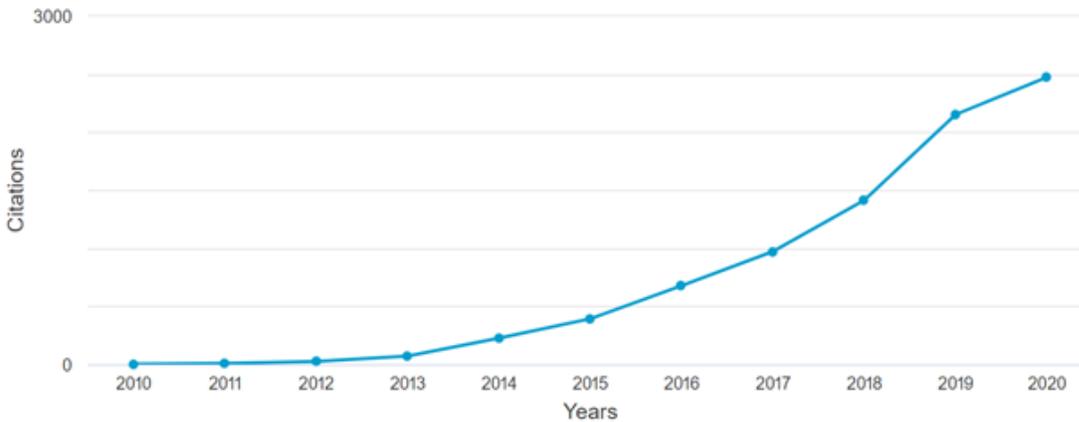


Nota. Datos tomados de *Web of Science*, 2021.

En la red de coautoría de la figura 8, se identificó que los autores que realizar mayor trabajo colaborativo en la realización de sus artículos en un periodo 2010-2020 son: Y. Zhao con 20 documentos y 11 colaboraciones, L. Leng con 16 documentos y 9 colaboraciones, J. Zhang con 16 documentos y 16 colaboraciones y C. Zhang con 13 documentos y 12 colaboraciones, teniendo una gran cooperación entre ellos. Así mismo, se puede observar que dichos autores no tienen una relación directa con los autores G. Laporte, E. Demir y T. Bektas, los cuales lideran una temática diferente, teniendo una densa colaboración entre los autores mencionados.

Figura 12

Número de citaciones por año



Nota. Datos tomados de *Web of Science, 2021*.

En la figura 11 se puede ver el continuo aumento de las citaciones por los autores en los últimos 10 años. Antes del 2010 no hubo citación alguna, sin embargo, los autores comenzaron a citar en el 2010 haciéndose 3 citaciones, teniendo un crecimiento exponencial al punto de llegar a 2475 citaciones en el 2020.

El artículo “The Pollution-Routing Problem” de los autores T. Bektas y G. Laporte tiene 617 citaciones en el periodo 2010-2020, siendo el artículo más citado por los autores en los 522 artículos arrojados por la ecuación de búsqueda.

4.2 Análisis preliminar de la literatura

En los últimos años, la investigación sobre los efectos ambientales ha tenido un crecimiento sustancial. Acto que ha sido punto de estudio para los investigadores, los cuales plantean distintos tipos de modelos que buscan disminuir el impacto ambiental. (Palmer, 2007) fue uno de los primeros autores que enfocó su investigación en los factores que causaban la variación del consumo de combustible, tales como, la topografía de la vía, la congestión y la velocidad de los

vehículos. En la formulación de su modelo no tuvieron en cuenta factores como el tiempo y la carga. La solución del modelo dio como resultado la disminución de emisiones de dióxido de carbono, pero un aumento en los tiempos de entrega. A diferencia, (Suzuki, 2011) considera importante las características de limitación de tiempo y carga útil, en el momento de plantear un modelo que busque minimizar el consumo de combustible y las emisiones contaminantes, dicho modelo propone una ruta donde los primeros clientes visitados sean los de mayor peso en su demanda y los últimos con menor peso.

Por otra parte, varios autores consideran la importancia de minimizar la energía consumida, considerándose que esta provoca una reducción proporcional en el combustible y en las emisiones. Es allí donde nace el problema de enrutamiento de vehículos que minimiza la energía (EMVRP), siendo un enfoque analizado por (Kara, Kara, & Kadri Yetis, 2007) donde su principal objetivo es minimizar la distancia y la carga para cada arco, se considera importante la ruta óptima del vehículo, con el fin de optimizar la energía utilizada para el desplazamiento, por ende, esto se ve reflejado en la reducción de las emisiones. Los investigadores (Peng & Wang, 2009) y (Scott, Urquhart, & Hart, 2010), realizaron trabajos independientes donde se encontraron similitudes en ellos, siendo la carga y la distancia los dos factores de mayor enfoque, dando como resultado, diferentes puntos de vista y soluciones en un modelamiento de minimización de energía. De igual manera, el autor (Úbeda, Arcelus, & Faulin, 2011) ejemplifica lo dicho y relacionado por los anteriores autores.

El tiempo es uno de los aspectos que se debe tener en cuenta al momento de minimizar los costos del combustible, es por esto que el autor (Kuo, 2010) propone un modelo para calcular dicho costo para el problema de enrutamiento de vehículos dependiente del tiempo (TDVRP), de igual manera, este autor resaltó la importancia de no sobrepasar la capacidad del vehículo. Como

una herramienta de solución, se utilizó un algoritmo de recocido simulado (SA), la cual ayudó a disminuir el consumo de combustible sobre el método basado en minimizar el tiempo y las distancias de transporte. Tiempo más tarde de haberse publicado el artículo anterior, los autores (Wang & Kuo, 2011) centraron su investigación en buscar un modelo matemático alternativo al ya conocido, es por esto que plantea un algoritmo de búsqueda tabú para el mismo problema ya propuesto.

En el artículo realizado por (Bektaş & Laporte, 2011) donde se aborda el Problema de Enrutamiento de Contaminación (PRP por su sigla en inglés – Pollution Routing Problem) que busca cumplir con dos objetivos: la minimización de los costos operativos y de las emisiones gases de efecto invernadero. En los cuales se destacan los costos de emisiones, los costos operativos en ruta y los costos de los conductores, teniendo como limitaciones las ventanas de tiempo. Sin embargo, como principal componente del costo fue, la distancia total de viaje, la cantidad de carga transportada por unidad de distancia, las velocidades del vehículo y la duración de las rutas. Los autores consideran velocidades de flujo libre de 40 km/h o más.

(Jabali, Van Woensel, & De Kok, 2012) adoptaron un modelo el cual tienen en cuenta el tiempo de viaje (sin ventanas de tiempo), el combustible y los costos de emisiones de dióxido de carbono (CO₂). Se utilizó un modelo similar al de (Figliozzi, 2011), pero empleando la velocidad como una variable agregada. El tiempo de viaje se dividió en dos partes, la primera se tiene en cuenta la congestión, donde la velocidad del vehículo es fija, y la segunda, no se tiene en cuenta la congestión, por ende, se basa en una velocidad de flujo libre en el vehículo, en donde se puede hacer una optimización. Los autores plantean una heurística de búsqueda tabú para dar solución al problema planteado.

Otra contribución a las investigaciones se debe a (Laporte, Demir, & Bektaş, 2012) propuso una heurística en búsqueda de una solución óptima para un número de visitas predeterminadas de 200 nodos, en el cual se desarrolló en dos fases. En la primera fase se resuelve el VRPTW mediante una Búsqueda Adaptativa de Grandes Vecindarios (ALNS). En una segunda fase, se llevó a cabo la utilización de un algoritmo de optimización de velocidad (SOA), el cual consiste en dar como resultado la velocidad óptima en cada arco de la ruta, con el fin de minimizar los costos del consumo de combustible y los costos de los conductores. De igual manera, los autores proponen una formulación más ampliada del PRP teniendo en cuenta velocidades más bajas de 40 km/h, pero sin estimar la congestión. A menudo ocurre que se pueden hacer optimizaciones simultáneas. Dando paso a modelos multiobjetivos, como es el caso de (Demir, Bektaş, & Laporte, 2014) donde realizaron una nueva publicación, teniendo en cuenta los logaritmos ya visto en el artículo anterior para dar solución a un nuevo problema de investigación de dos objetivos importantes, el consumo de combustible y el tiempo de conducción. Se compara cuatro métodos entre sí, dando como resultado óptimo el método híbrido (HM), el cual surge de una combinación de la ponderación adaptativa con el método de restricción ϵ . Siendo este método el más eficiente para encontrar soluciones no dominadas del PRP con 100 nodos.

Posteriormente, (Franceschetti, Honhon, Van Woensel, Bektaş, & Laporte, 2013) propusieron El Problema de Enrutamiento de Contaminación Dependiente del Tiempo (TDPRP) utilizando el algoritmo de solución para el Problema de Optimización de Velocidad y Hora de Salida (DSOP), el cual tenía como objetivo estructurar un plan de velocidad y tiempo de salida para una red de arco único. Este algoritmo fue aplicado para una flota de vehículo homogénea, teniendo en cuenta la congestión vehicular y la utilización de la “espera inactiva” como estrategia para minimizar los costos de combustible y el tiempo de espera en la congestión. Al plantear la

función objetivo, se evidencio que la variable velocidad no permitía realizar un modelo lineal, por ende, los autores realizaron el cambio de esta variable a una binaria propuesta por (Bektaş & Laporte, 2011) y así poderla incorporar al modelo. Ampliando la investigación, los autores (Franceschetti, Anna; Demir, Emrah; Honhon, Dorothée; Van Woensel, Tom; Laporte, Gilbert; Stobbe, Mark, 2017) plantearon nuevos operadores de inserción y extracción, teniendo una mejor adaptación al problema y, por ende, mejores resultados que los obtenidos en el artículo (Franceschetti, Honhon, Van Woensel, Bektaş, & Laporte, 2013).

Un eslabón importante en la cadena de suministro es movilizar el producto a lo largo de la cadena hasta llegar al cliente final, es por esto que es necesario contar con herramientas adecuadas que ayuden a cumplir los planes de entrega, sin dejar a un lado los impactos ambientales que esto puede generar. Es así, como algunos autores consideran importante abordar y ampliar la decisión del tipo de flota a utilizar para cumplir con la demanda. (Koç, Bektaş, Jabalib, & Gilbert, 2014) realizaron pruebas computacionales para 100 nodos, comparándolas entre ellas utilizando un algoritmo híbrido llamado HEA ++ propuesto por (Koç, Bektaş, Gilbert, & Jabalib, 2014) y (Vidal, Crainic, Gendreau, & Prins, 2014) para dar solución al problema de enrutamiento de la contaminación mixta (FSMPRP). Para dar solución a este problema, se usó la herramienta HEA ++, ALNS y SOA, dando como resultado de las comparaciones realizadas los beneficios de utilizar una flota heterogénea sobre una homogénea, permitiendo una disminución del consumo de combustible y emisiones, por lo que el vehículo trabaja con la carga útil adecuada. De igual forma, se comprobó que no es necesario optimizar la velocidad para ver reflejado una disminución de los costos totales.

Las empresas que tienen la labor de distribuir a propios y/o terceros, por ende, buscan disminuir la mayoría de sus costos. Es así como estos autores (Zhang J. , Zhao, Xue, & Li, 2015)

propone un modelo para la minimización de los costos de consumo de combustible, costo de emisiones y el costo de uso (depreciación, salarios operativos, seguros, etc.). Teniendo este, un aspecto agregado en comparación a otros estudios ya realizados. Para brindar una alternativa de solución a la problemática planteada, los autores sugieren usar el algoritmo de búsqueda tabú de división de rutas (RS-TS), ayudando a encontrar la ruta óptima, donde se realiza una disminución y compensación entre la distancia, el consumo de combustible, el tiempo de viaje y otros parámetros.

Se ha hablado que la disminución de emisiones de CO₂ y los costos operativos siendo proporcionales, pero en el artículo realizado por los autores (Zhang, Zhao, Zhang, Leng, & Wang, 2017) donde se aborda el modelo de problema de localización-enrutamiento, el cual, su único propósito es crear un algoritmo que ayude a disminuir las emisiones. En dicho documento utilizaron un Algoritmo Evolutivo Cuántico (QEA) empleando un método de búsqueda local, siendo este encargado de dar solución a esta problemática. En los resultados obtenidos al utilizar el QEA, se comprobó que se disminuye en gran proporción las emisiones, pero los costos generales del proceso aumentaron significativamente. Para brindar otra alternativa de solución, los autores (Wang, Zhao, Leng, Zhang, & Jiang, 2020) continuaron la investigación con un nuevo artículo, en el cual se toma como ejemplo la organización de las hormigas para la realización de sus labores, es así como, implementaron un modelo algorítmico hiperheurístico, en donde se realizó una analogía de la selección de colonias de hormigas para la solución del problema del enrutamiento de ubicación con bajas emisiones de carbono con restricción de capacidad. Se concluyó que este algoritmo da como resultado la ruta de menor emisiones de CO₂ y una disminución de los costos operacionales, en comparación al artículo anterior.

4.3 Marco de antecedentes

El artículo desarrollado por los autores (Koç, Bektaş, Jabalib, & Gilbert, 2014) llamado “el tamaño de la flota y el problema de enrutamiento de la contaminación mixta” en donde tiene como objetivo principal la minimización de la suma de los costos fijos del vehículo y el costo de la ruta (costo de combustible, las emisiones de dióxido de carbono y el costo del conductor). De igual manera se toma en cuenta factores importantes como el tamaño de la flota y el tipo de flota que se debería utilizar. Establecieron cuatro factores que incluye en el consumo de combustible: el vehículo, el conductor, el medio ambiente y el tráfico. Para dar solución para el problema planteado en el documento se llevó a cabo una heurística de búsqueda la cual se desarrolló en dos etapas: la primera, una extensión del esquema de ruta de vehículos clásico LANS, la segunda etapa, utilizaron un algoritmo para optimizar la velocidad en cada arco llamado SOA. Como resultado de la investigación se llevó a la adaptación de bi-objetivo de la heurística con las dos fases ya mencionada, donde se realizó una comparación con los cuatro métodos: el método de ponderación, el método de ponderación normalización, el método de restricción y el método de restricciones de epsilon, dando mejores resultados. De igual forma, se llegó a la conclusión de utilizar una flota heterogénea sin optimización de velocidad debido a que reducía el costo total. Cabe recalcar que, para el desarrollo de la investigación es importante decidir el tipo de flota que se manejará, es por esto que se toma como guía el artículo anterior para optar por la flota heterogénea como punto de análisis para esta investigación.

El segundo artículo que se analizó, fue escrito por los autores (Kramer, Subramanian, Videl, & Anjos F. Cabral, 2015) llamado “un enfoque matemático para el problema de enrutamiento de la contaminación” teniendo como objetivo minimizar los costos operativos y ambientales respetando las limitaciones de capacidad y las ventanas de tiempo de servicio

(VRPTW), teniendo en cuenta aspectos como la variación de la velocidad del vehículo, considerándolo una variable decisión de suma importancia en su trabajo de investigación, ya que esta puede hacer que los costos totales, el tiempo, la ubicación y por supuesto la ruta de factibilidad del modelo cambien. Por lo anterior, los autores optaron por un modelo matemático llamado ILS-SP-SOA, buscando la optimización de la velocidad y programación. En el artículo se menciona que el modelo matemático utilizado para su solución presentó mejores soluciones en comparación a otros modelos matemáticos ya analizados.

La investigación realizada por (Raphael, Nelson, Anand, & Thibaut, 2015) llamada “Un algoritmo de optimización de la velocidad y la hora de salida para el problema del enrutamiento de la contaminación” en él se abordan temas tan importantes como la velocidad óptima para un modelo PRP. Para contribuir en las investigaciones ya realizadas para resolver un PRP, se propone como alternativa de solución un Algoritmo de optimización de la velocidad y el tiempo de salida, este cuenta con una metaheurística de búsqueda locales integrada en el algoritmo, donde su único propósito es encontrar la programación de velocidad y enrutamiento óptimo. Cabe resaltar que este artículo en particular cuenta con una variable decisión no mencionada en otros ya abordados, como lo es el inicio de la jornada laboral puesto considera la distribución de los recursos humanos relevante.

Para el PRP, la velocidad es un pilar importante para analizar ya que, esta afecta variables y perjudica los objetivos a cumplir si no es estipulada de manera correcta. Para los escritores de este artículo analizan el papel que realiza la velocidad ya que podría afectar el tiempo en los recorridos y por ende la posibilidad de una ventana de tiempo en el modelo, hace que ellos realicen su enfoque en el subproblema de optimización de velocidad (SOP) con el fin de encontrar la ruta más adecuada, manteniendo los límites de tiempos y así contribuir a la disminución de costos y las

emisiones. El algoritmo abordado por los autores ofrece una mejora del 8.36% en costos, puesto que el modelo se desarrolló con tiempos cuadráticos, produciendo mejoras en la velocidad y hora de salida para una búsqueda local. Con relación a lo anterior la velocidad es un factor importante cuando de analizar un problema de PRP se trata, como este puede ser decisivo en los costos operacionales de las empresas. Los índices de emisiones provocados por la falta de planeación en tiempos, rutas, velocidad y demás son preocupantes cuando en el desarrollo de la actividad de distribuir vía terrestre no se considera factor a controlar y disminuir.

La investigación realizada por (Yoshinori, 2016) en el artículo “Un enfoque metaheurística de doble objetivo para resolver un problema práctico de enrutamiento de la contaminación” resalta su preocupación por el constante crecimiento del calentamiento global, y a su vez resalta la importancia que las empresas de transportista y fabricantes de vehículos involucrada en la gestión de la cadena de suministro enfoque sus esfuerzos en disminuir el consumo de combustible por ende las emisiones de CO₂. En esta ocasión el PRP tiene doble objetivo que minimiza conjuntamente el recorrido en millas y la carga útil del vehículo, donde se utilizó la mezcla del método de Pareto y a su vez el uso de la búsqueda de tabú, el cual ayudaría a el método de Pareto en la búsqueda de las regiones cercanas a las fronteras. Es importante tener claro que este método tiene en cuenta aspectos como la congestión y la velocidad de arco a arco no presentan variación en el tiempo.

Con lo analizado con anterioridad podríamos hablar que los autores brindan un enfoque diferente a los ya abordados, puesto que consideran el modelo en condiciones ideales, pero los resultados de ahorros son alentadores puesto que una cifra del 0,5% de ahorro de consumo de combustible, siendo esto positivo por la gran cantidad de vehículos que circular en una cadena de suministro básica.

5. Marco Teórico

A continuación, se da a conocer los temas que se abordaron durante la investigación.

5.1 Optimización matemática

El objetivo de la optimización matemática es obtener el mejor resultado posible en un evento determinado, con el fin de tomar las decisiones correctas dentro de un grupo de alternativas con la ayuda de una función objetivo asociada a restricciones. Esto juega un papel importante, ya que, da realismo al modelo. (Astolfi, 2006). (Chong & Stanislaw, 2001)

5.1.1 Optimización combinatoria

La optimización combinatoria es un método que existe en la matemática moderna aplicada y la disciplina de la computación, donde se trabaja problemas cuyo dominio se caracteriza por tener un conjunto finito de soluciones factibles. Cuando se habla de optimización combinatoria, se parte desde el hecho que deriva de la optimización cuyos problemas giran alrededor de la toma de decisiones que dan la solución óptima (sea maximizar o minimizar) de una determinada función. De acuerdo con el número de funciones que se planteen en un problema combinatorio este puede ser de dos tipos: De un solo objetivo o multiobjetivos (más de un objetivo). (Sánchez García, 2000)

Según (Bluem & Roli, 2003) define un problema de optimización combinatoria de la siguiente manera. Las variables que se abarcan en el ejercicio son agrupadas y cada grupo es asimilado como un objeto que tiene una estructura de datos compleja. Estas variables son ubicadas en determinadas posiciones que van a generar una configuración que será analizada por la combinatoria. En problemas como estos se trata de tomar la mejor configuración, pero para tomar este tipo de decisiones se crea una o más funciones de valor sobre el espacio de las configuraciones.

En otras palabras, para entender más este tipo de problemas se clasifican de acuerdo a su complejidad computacional, dado a esto se ha desarrollado varios tipos de algoritmos para darle

solución o respuesta a un problema. La optimización combinatoria no solo se utiliza para conocer la complejidad de los algoritmos, sino también permite verificar entre varias opciones de respuesta se haya escogido la que permita que el problema de optimización sea óptimo. (Lange, 2010).

5.2 . Problema de optimización

Un problema de optimización se caracteriza por centrarse en encontrar soluciones factibles dentro de un conjunto determinado, con el fin de optimizar la función objetivo.

Estos tipos de problemas presentan tres componentes que se deben tener en cuenta, la función objetivo, las variables y las restricciones. Para la solución de un problema de optimización es necesario saber el valor de las variables con el fin de encontrar la función objetivo óptima, teniendo en cuenta las restricciones establecidas en el problema planteado. (Ramos, Sánchez, Ferrer, Barquín, & Linares, 2010)

5.2.1 Problema de enrutamiento de vehículos (VRP)

En el año 1959, los autores (Dantzing & Ramser, 1959) propusieron el problema de ruteo de vehículos (VRP por sus siglas en inglés – Vehicle Routing Problem) o enrutamiento por medio de una formulación matemática de la entrega de gasolina a las estaciones de servicio. En 1964, los autores (Clarke & Wright, 1964) propusieron y desarrollaron el primer algoritmo para resolver el problema planteado de una forma eficiente. Así, dando inicio a grandes investigaciones y trabajos en el área de enrutamiento de vehículos.

El VRP consiste tener un conjunto de clientes con demandas específicas, un depósito y una flota de vehículos con una capacidad determinada, con un costo asignado a cada uno del desplazamiento entre la localización geográfica de los clientes, influyendo el sentido en el cual se realice, de ésta manera es que se pretende encontrar una ruta que minimice los costos, cuyo inicio y fin sea el mismo punto (deposito). (Gelves, Mora, & Lamos, 2015). Para este problema, la

capacidad de los vehículos y la demanda de los clientes son factores determinísticos, minimizando los costos de transporte que se presentan en la logística de la cadena de suministro como punto de solución para dicho problema planteado.

5.2.2 Problema de enrutamiento con condiciones de contaminación (PRP)

El PRP es una de las variantes del problema de enrutamiento de vehículos (VRP), siendo una función objetivo más amplia y completa que tiene en cuenta no solo la distancia de viaje, sino también la cantidad de emisiones de efecto invernadero, combustible, tiempos de viaje y sus costos. De igual manera, al problema se puede llevar a cabo con o sin ventanas e tiempo. (Bektaş & Laporte, 2011).

5.2.3 El problema con ventanas de tiempo (VRPTW)

El VRPTW es una de las variantes del problema de enrutamiento de vehículos, donde se tiene en cuenta, las restricciones de capacidad del vehículo y ventanas de tiempo para cada cliente. Este último, indica el intervalo de tiempo en que el cliente es visitado.

De igual forma, se permite un tiempo de demora en la ventana de tiempo. Si el vehículo llega antes del inicio de la ventana de tiempo, deberá esperar hasta que la ventana de tiempo inicie. (Galvis, Jaimes, & Quiroga, 2011)

5.3 Modelo de optimización

Un modelo de optimización es aquello donde existe un conjunto de variables de decisión que tienen como finalidad cumplir con la función objetivo (maximizar/minimizar) sometidas a un conjunto de restricciones. (Scharage, 1997). (Williams, 1999).

5.3.1 Modelo determinístico

Un modelo determinista es un modelo matemático donde las mismas entradas o condiciones iniciales producirán invariablemente las mismas salidas o resultados, no

contemplándose la existencia de azar, o incertidumbre en el proceso modelada mediante dicho modelo.

Está estrechamente relacionado con la creación de entornos simulados a través de simuladores para el estudio de situaciones hipotéticas, o para crear sistemas de gestión que permitan disminuir la propagación de errores. Los modelos deterministas sólo pueden ser adecuados para sistemas deterministas no caóticos, para sistemas azarosos (no-determinista) y caóticos los modelos deterministas no pueden predecir adecuadamente la mayor parte de sus características. (Barrera, 2016)

5.3.2 Modelo probabilístico

Son modelos matemáticos apropiados para situaciones reales en condiciones específicas, son importantes porque ayuda a predecir la conducta de futuras repeticiones de un experimento aleatorio. Los modelos pueden ser discretos o continuos. (Bello, s.f.)

5.3.3 Mono-objetivo

Optimizar significa encontrar los valores máximos (maximización) o mínimos (minimización) de una función entre todas las soluciones factibles del problema. En problema con un solo objetivo, existe una única función a optimizar. Aquel individuo (solución en el espacio del problema del problema) que corresponde con el valor máximo-mínimo del problema, es la solución al problema de optimización. (López, 2013)

5.3.4 Multiobjetivos

Existe más de una función objetivo. El problema trata varias funciones objetivo a la vez, teniendo en cuenta que el óptimo para un objetivo no lo es para otro, son objetivos en conflictos entre sí. Ésta se conoce como una decisión Multicriterio (MCDM por sus siglas en inglés – multicriteria decision making). (Ramos, Sánchez, M., & Linares, 2010).

5.4 Técnicas de optimización

Para la generación de soluciones óptimas es necesario la utilización de técnicas para la generación de soluciones óptimas. Las diferentes técnicas se dividen en dos grandes grupos: en el primer grupo se tiene las técnicas exactas de optimización, el cual es la técnica o método más trivial de solución evaluando todas las posibles soluciones factibles. En el segundo grupo se pueden encontrar las técnicas de solución no exactas, basados en heurísticas y metaheurística, el cual tienen como ventaja la disminución de tiempo al momento de la ejecución computacional. (Rico & Rodríguez, 2019).

5.4.1 Exactas

Los métodos exactos es una ayuda para la extracción de la solución óptima del problema planteado. Existe diversas técnicas de optimización como: Programación Lineal Entera Mixta, Branch and Bound, Programación Dinámica, Planos de Corte, Branch and Cut, entre otras. (Demeuleneester & Herroelen, 2002).

Muchos autores de la literatura han usado los métodos exactos para instancias de tamaño pequeño donde garantizan la solución óptima. Sin embargo, son caros en tiempo, por lo que no pueden aplicarse a grandes problemas de tipo NP-Hard o difíciles. (Camacho & Ramírez, 2019).

5.4.2 Heurísticas

La heurística son técnicas de solución aproximada, la cual se han utilizado desde el comienzo de la investigación de operaciones para abordar problemas combinatorios difíciles.

Según los autores (Bluem & Roli, 2003), las heurísticas tienen dos inconvenientes: primero, se adoptan a un problema en específico y la adaptación a otros problemas es difícil e incluso imposible en algunos casos. Segundo, por lo general están diseñadas para construir una

única solución de la manera más efectiva, mientras que la mayoría de los problemas de decisión tienen una gran cantidad de soluciones factibles, que pueden ser mejores que las estudiadas.

La ventaja de la heurística es que en general determina buenas soluciones con rapidez, utilizando reglas de solución simples. La desventaja es que la calidad de la solución (con respecto a la óptima) suele desconocerse.

Los métodos heurísticos se pueden clasificar en dos etapas: Heurísticas de Búsqueda y Heurísticas Constructivas.

5.4.2.1 Heurística de Búsqueda.

Desarrollan una búsqueda en el espacio de solución de un problema determinado durante el cual examinan muchas soluciones diferentes para encontrar la mejor solución posible.

5.4.2.2 Heurísticas Constructivas.

Son específicas de un problema e intentan construir una única solución con la mejor calidad posible mediante la selección cuidadosa de elementos de solución prometedoras.

5.4.3 Metaheurística

Los autores (Osman & Laporte, 1996) propusieron la siguiente definición: “Una metaheurística se define formalmente como un proceso iterativo de generación que guía una heurística subordinada combinando inteligentemente diferentes conceptos para explotar y explorar el espacio de búsqueda; las estrategias de aprendizaje se utilizan para estructurar información a fin de encontrar soluciones eficientemente casi óptimas”.

Según (Glover, 1986) el término metaheurístico, son estrategias inteligentes para mejorar o modificar de cierta forma, otras soluciones para la resolución de problemas con alto grado de rendimiento, explorando y aprovechando de una manera sencilla los espacios de búsqueda, siendo más fácil de implementar ya que necesita información especial del problema a solucionar.

Este método (metaheurístico) se puede llevar a cabo especialmente a los problemas que no tienen una heurística específica o algoritmo que dé una solución óptima. Por esta razón, se ha propuesto diferentes algoritmos metaheurísticos para darle solución a los problemas de optimización combinatoria, por ejemplo, búsqueda tabú (TS), recocido simulado (SA), entre otros. (Barrera Navarro, 2016)

5.4.3.1 La búsqueda tabú (TS).

Método metaheurístico el cual utiliza una memoria flexible, así como de estrategias especiales para la solución de problemas de optimización combinatoria en donde el proceso de solución se detiene cuando se ha escogido la mejor opción. Si la solución obtenida es producto de un movimiento tabú, se actualiza la mejor solución y este movimiento deja de ser tabú. Esta nueva solución se conoce como criterio de aspiración. Este método se utiliza normalmente para la asignación de máquinas para la programación de la producción, igual este método ha servido para la localización y distribución de plantas. (Marulanda, 2017)

5.4.3.2 Recocido simulado (SA).

El SA o enfriamiento simulado se basa en el recocido del acero y cerámicas, técnica que consiste en tomar el material y elevar su temperatura al máximo y luego dejarlo que comience a disminuir lentamente para variar sus propiedades físicas. Este procedimiento fue introducido en 1983 por Kirkpatrick y colaboradores. En cada iteración del SA se evalúan algunos vecinos del estado actual y probabilísticamente se decide entre efectuar la transición a un nuevo estado o quedarse en el estado actual. Esta heurística permite evaluar soluciones poco atractivas al comienzo, luego a medida que la temperatura disminuye, siendo este un parámetro la búsqueda tiende a ser más selectiva, de tal manera que la función objetivo arroje una solución óptima. (López Lezama, 2015)

5.4.3.3 Búsqueda Adaptativa de Grandes Vecindarios (ALNS).

El ALNS es una estructura de búsqueda local en donde cierto número de algoritmos simples compiten por modificar la solución actual. En cada iteración, algoritmo es escogido para destruir la solución establecida hasta el momento, y un algoritmo para repararla. La nueva solución solamente es aceptada si ésta satisface los criterios definidos por el marco de búsqueda local aplicada en el nivel maestro. Sin embargo, en vez de verse la heurística ALNS como una secuencia de operaciones de destruir y reparar, otra alternativa puede ser verlo como una secuencia de operaciones de arreglo y optimización. (Gelves & Estévez, 2019)

5.4.4 Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos son basados en la teoría evolutiva de Darwin, el cual sobreviven los mejores que se adaptan al medio ambiente. Este tipo de algoritmo mantiene un conjunto de soluciones posibles la cual es llamado población. Las poblaciones se generan a partir del cruzamiento de las soluciones obtenidas y comparándolas para tener conocimiento de las mejores. Dicha población es mejorada por un proceso cíclico, el cual busca la mejor solución por medio de funciones fitness. Cada ciclo se le da el nombre de generación. (Schaffer, 1985)

5.4.4.1 Algoritmo Genético De Ordenamiento No-dominado segunda generación (NSGA-II).

El algoritmo tiene como función realizar una clasificación de la población por frentes, donde los individuos que pertenecen al primer frente son los no dominados, los que pertenecen al segundo frente son los que no dominados en ausencia de los del frente anterior. (Camacho & Ramírez, 2019). Este mecanismo tiene como fin incorporar elitismo y reducir la complejidad del procedimiento de ordenamiento rápido por no dominancia de su antecesor y en elegir los mejores individuos de la población padre e hijo. (Alvarado, Herazo, Ardila, & Donoso, 2005)

5.4.4.1.1 Cromosoma.

Es el potencial de solución que tiene un problema planteado en donde se toma una fila de parámetros y se asignan valores, normalmente la fila se codifica en una cadena binaria o numérica dando una solución conocido como individuo, y que, a su vez se le conoce como gen. (Cabellero & Aguilar, 2019)

5.4.4.1.2 Población.

La población de una generación es un conjunto de cromosomas finitos. Recomendaciones: Para abarcar los datos de la población no se recomienda un numero diminuto debido a que no se pueden tomar el espacio de búsqueda en la solución. De igual manera, no se recomienda realizar estudios con amplios números de poblaciones debido a que se pueden generar altos costos computacionales en el trabajo de investigación. (Cabellero & Aguilar, 2019)

5.4.4.1.3 Aptitud.

Evaluación de calidad que se hace al cromosoma en estudio. Entre mayor sea la aptitud del cromosoma, será mejor la solución y superior su probabilidad a contagiar sus características a cromosomas descendientes. (Davis, 1991)

5.4.4.1.4 Selección.

La selección está encargada de escoger los mejores individuos para la reproducción de estos, sin embargo, los individuos que no son aptos no son descartados, ya que pueden servir para investigaciones de generaciones futuras y así, no homogeneizar y tener multiplicidad la población. (Cabellero & Aguilar, 2019). En los siguientes numerales se pueden detallar los principales criterios para tener en cuenta en el proceso de selección (selección por ruleta y selección por torneo).

Selección por ruleta o selección de Montecarlo

Este proceso de selección consiste en relacionar un individuo de la población con una parte proporcional a su nivel de adaptación. Entre más apto sea el individuo, mayor porción obtendrán. (Cabellero & Aguilar, 2019)

Selección por torneo

Este método se puede dar gracias a las comparaciones directas que se hace entre ellos (individuos) por medio de un método probabilístico p determinístico (opcional). (Cabellero & Aguilar, 2019)

5.4.4.1.5 Cruce.

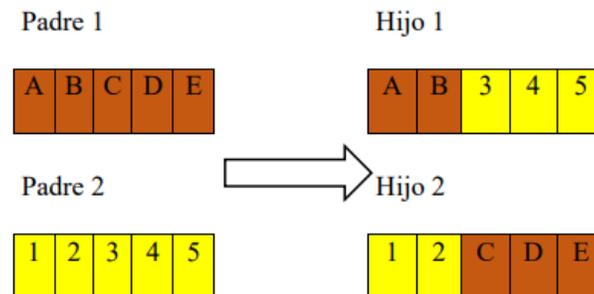
Este operador es un planeamiento de reproducción que se da luego de seleccionar cada uno de los individuos estarán con el rol de padres. Estos últimos se vuelven a combinar para poder producir una nueva descendencia. Para el cruce, se debe determinar una probabilidad que indica periodicidad de los cruces entre los individuos padres. (Cabellero & Aguilar, 2019) En caso que no exista reproducción en los padres, los hijos tendrán copias exactas a sus padres. (Arranz & Parra, 2007). Es muy común que la probabilidad de cruce sea del 90%. (Cabellero & Aguilar, 2019). Los tipos de cruces más comunes son los siguientes:

Cruce de un punto.

Cuando se seleccionan los padres para el cruce son cortado en un punto determinado y así, dividiéndose en dos (cabeza y cola) en la cual se recombinan las dos colas con el fin de generar un nuevo descendiente. De un cruce de dos individuos padres descienden dos individuos hijos, como se puede ver en la Figura 13:

Figura 13.

Cruce de un punto



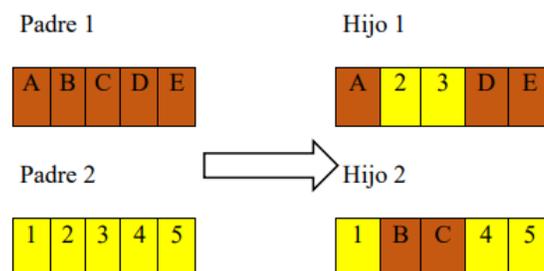
Nota: Cruce de un punto para generar descendencia. Tomado de (Cabellero & Aguilar, 2019)

Cruce de dos puntos.

Este cruce inicia con el corte del individuo (padres) en dos puntos diferentes sin concordar en ninguno de ellos entres los cromosomas ni en los extremos, con el fin de la aceptación de tres segmentos. Los descendientes se construyen tomando el segmento principal (central) del primer padre y los segmentos del segundo padre. (Cabellero & Aguilar, 2019)

Figura 14.

Cruce de dos puntos



Nota: Cruce de dos puntos para generar descendencia. Tomado de (Cabellero & Aguilar, 2019)

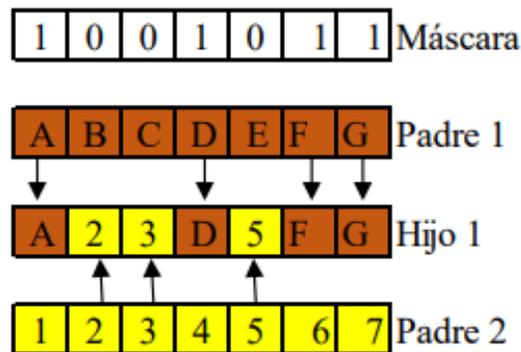
Cruce uniforme.

Para esta técnica es necesario la generación de una máscara de cruce con valores binarios (0,1). En donde se encuentre el valor 1 en la máscara será reemplazado por el gen del primer padre, por el contrario, será utilizado los genes del segundo padre. El número de punto en el cruce es un valor fijo, pero será por término medio, es decir, la longitud del cromosoma dividido en dos. (Cabellero & Aguilar, 2019)

Figura

15.

Cruce uniforme



Nota: Cruce uniforme para generar descendencia. Tomado de (Cabellero & Aguilar, 2019)

5.4.4.1.6 Mutación.

La mutación es una secuencia realizada después del operador de cruce. Luego que se realiza el cruce se realiza la mutación por lo menos de un descendiente con el fin que al menos uno de ellos (genes del cromosoma) varíe al azar. (Cabellero & Aguilar, 2019)

5.4.4.1.7 Frente de Pareto

El frente de Pareto o frontera de Pareto es un conjunto de respuestas eficientes no dominadas buscadas en programaciones multiobjetivos, ya que la determinación la lleva el ente decisor. (Vitoriano, 2007)

5.4.4.1.1. Ordenamiento no dominado

Es un procedimiento en el cual se ordenan de mayor a menor dominación cada uno de los cromosomas (individuos). Primero, se divide la solución factible y las no factibles. Para las soluciones factibles se equivale la dominación de la función fitness, por otro lado, para las soluciones no factibles se equivale a la magnitud de violación de las restricciones (Deb, Partap, Agarwal, & Meyarivan, 2002)

5.4.4.1.8 ANOVA

El análisis de varianza (ANOVA) es la técnica para separar la variación total en las partes con las que contribuye cada fuente de variación en el experimento. (Gutiérrez & Salazar, 2008)

Método de Tukey

Es un método en el cual se comparan pares de medias muestrales (asociadas al tratamiento), teniendo en cuenta, el valor crítico que se da por la siguiente formula (Gutiérrez & Salazar, 2008):

$$T_{\alpha} = q_{\alpha}(k, N - k) \sqrt{CM_E In_i}$$

6. Metodología

Las fases de la metodología se desarrollarán teniendo en cuenta las actividades a desarrollar, para así poder cumplir los objetivos planteados.

Revisión de la literatura asociada al problema de optimización a investigar.

Para la realización de la revisión de literatura fue necesario la utilización de la base de datos Scopus, en la cual se insertó la ecuación de búsqueda dando con ella artículos, y conferencias donde se abordaban el PRP con diferentes variantes y diversas formas de solución. Para complementar la revisión de la literatura, fue necesario utilizar la herramienta VOSviewer la cual

se vinculó a los resultados de la base de datos, cumpliendo la función de recopilar y representar la información de las redes bibliométricas.

Definición de las características del problema de optimización a investigar.

Una vez desarrollado el análisis preliminar de la literatura y analizando los diferentes modelos propuestos por los autores, se pasaría a identificar las características propias del problema del enrutamiento con condiciones ambientales.

Formulación del modelo matemático, a partir de la revisión de literatura realizada.

A partir de la revisión de literatura ya realizada, se planteará un modelamiento matemático que represente y de solución al problema abordado, el cual se desarrollará mediante una programación lineal entera mixta.

Definición de la técnica a utilizar para solucionar el modelo a partir de la revisión de literatura realizada.

Con el análisis de la revisión de literatura, se elaborará una técnica metaheurística encargada de preparar el modelo formulado para la elaboración de la investigación.

Desarrollo de la técnica en un software especializado.

Después de analizada y seleccionada la técnica metaheurística que se empleará, se procederá a diseñar y desarrollar en la herramienta Matlab el algoritmo que dará una alternativa de solución al problema planteado.

Evaluación de la técnica con instancias propias del problema de optimización.

A partir de la definición de las características del problema y su representación en el modelo matemático, se considera el uso de instancias propias para el problema y se analizará el tiempo y uso del algoritmo en diferentes tamaños de instancias.

Realización del artículo publicable del trabajo de investigación desarrollado.

Se realizará un documento técnico y publicable con la síntesis y los resultados de la investigación realizada en un formato de revista indexada y homologada, la cual está por definirse.

7. Diseño y Modelamiento del Problema

A continuación, se presenta la descripción del problema que se aborda durante el proyecto de investigación incluyendo el modelo de optimización propuesto como posible solución al problema ya mencionado.

7.1 Descripción del Problema

El PRP es un problema de optimización que puede considerarse una variación del ruteo de vehículos por nodos (VRP) al cual se integran entre otras cosas, las consideraciones ambientales. Para este trabajo se parte de la descripción del problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW), así:

Sea $G = (N, A)$ un grafo dirigido y completo, donde $N = \{0, \dots, n\}$ representa el conjunto de los nodos, donde el nodo 0 es el depósito y los demás nodos corresponden a los clientes, y $A = \{(i, j) : i, j \in N, i \neq j\}$ representa el conjunto de aristas, donde la distancia del recorrido del nodo i al nodo j es denotado por d_{ij} , y cada uno de los clientes tienen una demanda q_i .

Además, dentro de las consideraciones básicas del problema está que:

- A. Este es un problema de un solo escalón, un solo periodo y el ruteo es de entrega a los clientes.
- B. Para hacer las entregas se cuenta con una flota heterogénea (vehículos de una capacidad diferente de acuerdo con el tipo) y mixta (ya que puede ser propia o subcontratada).

- C. Un cliente es visitado una sola vez y por sólo un vehículo. Lo anterior denota que ninguna demanda q_i puede ser mayor a la capacidad del vehículo propio CP^p y/o del vehículo subcontratado CS^s .
- D. Se considera que, para entregar a los clientes, estos cuentan con una ventana de tiempo $[f_i, g_i]$, donde f_i es el tiempo para empezar el servicio en el nodo $i \in N$ y g_i el tiempo de finalización del servicio en el mismo nodo. Y también se considera un tiempo total de servicio en el cliente que está denotado por t_{si} .
- E. Todos los vehículos k viajan a la misma velocidad promedio durante todo el recorrido, la cual es independiente del tipo y tamaño del vehículo.
- F. El costo del consumo del combustible de los vehículos, tanto para la flota propia como subcontratada, es asumido por la empresa.
- G. El elemento asociado a la contaminación ambiental se mide en función de las emisiones de CO₂ totales de cada vehículo según su tipo y su tamaño.

7.2 Obtención de los datos

Para la formulación del modelo matemático se utilizó la información anexada en el Apéndice A, para la estructuración de los parámetros asociados al transporte y los parámetros específicos del vehículo empleados en la función objetivo con condiciones ambientales, el cual fue abordado en el artículo (Çağrı, Tolga, Ola, & Gilbert, 2014) y así poder establecer el consumo de combustible en una distancia determinada.

7.3 Descripción del modelo de optimización

Como se mencionó antes, en la presente investigación se propone un modelo de programación lineal entera mixta MILP (por sus siglas en inglés) para dar solución al problema de optimización bi-objetivo de tipo PRP. Para la primera parte del modelo, compuesta por el VRP

con ventanas de tiempo y minimización de los costos operacionales, se tomó como base el trabajo de (Çağrı, Tolga, Ola, & Gilbert, 2014), denominado “x” (En español – “El tamaño de la flota y el problema de enrutamiento de la contaminación mixta”). Mientras que, para introducir el componente relacionado con las consideraciones ambientales; se optó por el enfoque de medición de las emisiones totales de CO₂ de los vehículos durante el viaje, desarrollado por (Kenan Karagul et. al, 2019), en su propuesta de solución al problema de enrutamiento de vehículos verde con consumo de combustible. No obstante, el estudio mencionado se centra únicamente en vehículos de carga pesada, por lo que fue necesario emplear la “Metodología para calcular las emisiones y el consumo de energía durante el transporte – MEET” (Hickman, 1999), con el fin de adaptarlo a los parámetros y supuestos del presente proyecto.

En detalle, el primer criterio objetivo es minimizar los costos de consumo de energía, la distancia del recorrido y los costos operacionales, donde estos últimos incluyen: el costo del conductor, el costo de uso del vehículo (propia o subcontratada) y el gasto de gasolina. Y el segundo criterio objetivo es la minimización de las emisiones de dióxido de carbono (CO₂), las cuales se calculan en función de los parámetros de velocidad asociados al tipo de vehículo, la distancia recorrida, la carga transportada y el estado del vehículo.

7.4 Formulación Matemática

A continuación, se presenta el planteamiento formal del modelo matemático arriba descrito:

Índices

$i, j = \text{Nodos}$

Depósito ($i=0$ o $j=0$) y Clientes $\{(i, j): i, j \in N, i \neq j, i > 0, j > 0\}$

k = Cantidad de vehículos a asignar $\{1, 2, \dots, K\}$

p = Tamaño del vehículo propio $p = \{1,2,3\}$

Convención del tipo y tamaño del vehículo:

1 = Vehículo pequeño propio (camión de dos ejes-camión sencillo)

2 = Vehículo mediano propio (camión de tres ejes – doble troque)

3 = Vehículo grande propio (tractomula de dos ejes con semirremolque de tres ejes)

s = Tamaño del vehículo subcontratado $s = \{1,2,3\}$

Convención del tipo y tamaño del vehículo:

1 = Vehículo pequeño subcontratado (camión de dos ejes-camión sencillo)

2 = Vehículo mediano subcontratado (camión de tres ejes – doble troque)

3 = Vehículo grande subcontratado (tractomula de dos ejes con semirremolque de tres ejes)

Parámetros

Parámetros básicos del modelo

d_{ij} = Distancia del recorrido del cliente i al cliente j (Km)

t_{ij} = Tiempo de recorrido del cliente i al cliente j (Segundos)

ts_i = Tiempo total del servicio en el nodo i (Segundos)

f_i = Tiempo de inicio de servicio en el nodo i (Segundos)

g_i = Tiempo de finalización del servicio en el nodo i (Segundos)

q_i = Demanda del cliente (Kg)

$efhp_p$ = Factor de emisión de CO2 para un vehículo propio en caliente y cargado

$efhs_s$ = Factor de emisión de CO2 del vehículo subcontratado en caliente y cargado

$effp_p$ = Factor de emisión de CO2 para un vehículo propio en frío y cargado

$effs_s$ = Factor de emisión de CO2 de un vehículo subcontratado en frío y cargado

$evhp_p$ = Factor de emisión de CO2 para un vehículo propio en caliente y vacío

$evhs_s$ = Factor de emisión de CO2 para un vehículo subcontratado en caliente y vacío

$evfp_p$ = Factor de emisión de CO2 para un vehículo propio en frío y vacío

$evfs_s$ = Factor de emisión de CO2 para un vehículo subcontratado en frío y vacío

CP^p = Capacidad del vehículo propio p (Kg)

CS^s = Capacidad del vehículo subcontratado s (Kg)

Para la estructuración de las ecuaciones del consumo de combustible fueron necesarios la incorporación de parámetros asociados al transporte y parámetros específicos del vehículo (Apéndice A).

La tasa de consumo de combustible y las emisiones para una ventana de tiempo determinada son necesarias a considerarlas en este modelo. Para ello se realizan adaptaciones al mismo donde se incorpora la flota heterogénea y mixta (propio y subcontratada). Esta tasa de consumo de combustible FRP y FRS (litro/s) de los vehículos está dada por:

Vehículos propios

$$FR^p = \frac{\xi \left(k^p N^p X^p + \frac{P^p}{\eta} \right)}{\kappa}$$

Vehículos subcontratados

$$FR^s = \frac{\xi \left(k^s N^s X^s + \frac{P^s}{\eta} \right)}{\kappa}$$

El consumo de combustible FR^p y FR^s (en litros) se evalúan para un tipo de vehículo específico en una distancia determinada (asociada estas en el modelo con d_{ij}), permitiendo ampliar las ecuaciones (5) y (6) así:

Vehículos propios

$$FRP^p = \frac{k^p N^p X^p \lambda d}{v^r} + \frac{P^p \lambda \gamma^p d}{v^r}$$

Vehículos subcontratados

$$FRS^s = \frac{k^s N^s X^s \lambda d}{v^r} + \frac{P^s \lambda \gamma^s d}{v^r}$$

Y, las expresiones anteriores entonces se pueden reescribir de la siguiente manera:

Vehículos propios

$$FRP^p = \lambda \left(\frac{k^p N^p X^p d}{v^r} + M^p \gamma^p \alpha d + \beta^p \gamma^p d (v^r)^2 \right)$$

Vehículos subcontratados

$$FRS^s = \lambda \left(\frac{k^s N^s X^s d}{v^r} + M^s \gamma^s \alpha d + \beta^s \gamma^s d (v^r)^2 \right)$$

Donde el primer término, hace referencia al módulo del motor, el segundo término, representa el módulo de peso y el tercer término, indica el módulo de velocidad. Los dos factores de consumo de combustible mencionados serán empleados en la función objetivo de los costos operacionales.

Otros parámetros

M = Constante muy grande

L = Constante muy grande

sc = Salario del conductor (\$/seg)

fp_p = Costo fijo del vehículo propio (\$)

fs_s = Costo de alquiler del vehículo subcontratado (\$)

GG = Precio de la gasolina (\$/litro)

$cantPP$ = Cantidad de vehículos propios pequeños disponibles

$cantPM$ = Cantidad de vehículos propios medianos disponibles

$cantPG =$ Cantidad de vehículos propios grandes disponibles

d. Variables

d.1. Variables reales

$wP_{ikp} =$ Tiempo de llegada del vehículo k de tipo propio p al cliente i (horas)

$ws_{iks} =$ Tiempo de llegada del vehículo k de tipo subcontratado s al cliente i (horas)

$h_k =$ Cantidad de tiempo total invertido en una ruta (horas)

d.2. Variables binarias

Vehículos propios

$ZP_{ij}^{kp} \begin{cases} 1 & \text{Un vehículo } k \text{ de tipo propio } p \text{ viaja sobre la arista } (i, j) \\ 0 & \text{De lo contrario} \end{cases}$

Vehículos subcontratados

$ZS_{ij}^{ks} \begin{cases} 1 & \text{Un vehículo } k \text{ de tipo subcontratado } s \text{ viaja sobre la arista } (i, j) \\ 0 & \text{De lo contrario} \end{cases}$

Funciones Objetivo

Objetivo 1: Minimizar el costo total.

Costo total (Z_1) = Salario del conductor durante todo el recorrido + el costo fijo de la flota propia de vehículos + el costo de los vehículos subcontratados + costo del combustible de los vehículos propios + costo del combustible de los vehículos subcontratados.

$$\begin{aligned}
 & sc * \sum_{k=1}^k h_k + \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^3 \sum_{(i,j) \in A} f p_p * Z P_{ij}^{kp} + \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^3 \sum_{(i,j) \in A} f s_s * Z S_{ij}^{ks} \\
 & + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^3 d_{ij} * FRP^p * GG * Z P_{ij}^{kp} \\
 & + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^3 d_{ij} * FRS^s * GG * Z S_{ij}^{ks}
 \end{aligned} \tag{1}$$

En la ecuación (1) se describe la función encargada de determinar el costo total del recorrido, el cual cuenta con una variante en la flota, puesto que se dividieron los costos de la flota propia y la subcontratada; cabe resaltar que para la formulación de este modelo matemático se considera el costo del consumo de combustible de la flota propia y la alquilada, la cual se especifica más adelante. La primera ecuación hace referencia al costo de la mano de obra, que se calcula multiplicando el salario del conductor sc (\$/hora) por el tiempo total utilizado en el recorrido de cada vehículo asignado h_k (horas) siempre y cuando sea de tipo p ; el costo fijo operativo del vehículo propio $f p_p$ multiplicado por la binaria $Z P_{ij}^{kp}$, que indica si uno de los vehículos realiza el recorrido o no; el costo de alquiler de los vehículos subcontratados $f s_s$ multiplicado por la variable binaria de decisión $Z S_{ij}^{ks}$, si se contrata el vehículo o no; así mismo, se establecieron los índices de las variables binarias como (k, s, p, i, j) . Por último, se tiene el costo producido por el consumo de combustible tanto para la flota propia FRP^p y subcontratada FRS^s ; como anteriormente se mencionó, para este costo se considera la distancia de recorrido d_{ij} multiplicado por el tipo de flota, por el costo del combustible (\$/litro) y por supuesto por cada una de las variables binarias según la flota que se elija.

Objetivo 2: Minimizar el impacto ambiental

Impacto ambiental de la red (Z_2) = Emisiones emitidas por el vehículo propio en caliente + emisiones emitidas por el vehículo subcontratado en caliente + emisiones emitidas por el vehículo propio en frío + emisiones emitidas por el vehículo subcontratado en frío.

a. Minimizar consideraciones ambientales

Vehículo propio en caliente

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^3 d_{ij} * \left[\left(\frac{efhp_p - evhp_p}{CP^p} \right) * q_i - 0.3 \left(\frac{efhp_p - evhp_p}{CP^p} \right) + evhp_p \right] * ZP_{ij}^{kp} \quad (2)$$

$$\{\forall (i,j) \in N, i \neq 0, i \neq j\}$$

Vehículo subcontratado en caliente

$$+ \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^3 d_{ij} * \left[\left(\frac{efhs_s - evhs_s}{CS^s} \right) * q_i - 0.3 \left(\frac{efhs_s - evhs_s}{CS^s} \right) + evhs_s \right] * ZS_{ij}^{ks}$$

$$\{\forall (i,j) \in N, i \neq 0, i \neq j\}$$

Vehículo propio en frío

$$+ \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^3 d_{ij} * \left[\left(\frac{effp_p - evfp_p}{CP^p} \right) * q_i - 0.3 \left(\frac{effp_p - evfp_p}{CP^p} \right) + evfp_p \right] * ZP_{ij}^{kp}$$

$$\{\forall (i,j) \in N, i = 0, i \neq j\}$$

Vehículo subcontratado en frío

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^3 d_{ij} * \left[\left(\frac{effs_s - evfs_s}{CS^s} \right) * q_i - 0.3 \left(\frac{effs_s - evfs_s}{CS^s} \right) + evfs_s \right] * ZS_{ij}^{ks}$$

$$\{\forall(i, j) \in N, i = 0, i \neq j\}$$

En la ecuación (2), se aborda la minimización de las emisiones de CO2 divididas según el tipo de vehículo (propio o subcontratado). Dichas emisiones dependen de la distancia d_{ij} , la cantidad transportada q_i , la capacidad del vehículo y los factores unitarios de emisiones definidos dentro del marco europeo MEET. Según dicha metodología, estos factores dependen del estado en que se encuentra el vehículo, ya sea que el motor esté en caliente o frío y el vehículo se encuentre cargado o vacío, definidos en este modelo como ($efhp_p, efhs_s, evhp_p, evhs_s, effp_p, effs_s, evfp_p, evfs_s$). Adicionalmente, se emplea el factor de variación (-0.3) de la carga total del vehículo, que representada la disminución de combustible en el tanque a medida que el vehículo avanza y, por ende, la reducción en la emisión de CO2 del vehículo. (Karagul, Sahin, Aydemir, & Oral)

Restricciones

- El número máximo de vehículos totales, propios y subcontratados que salen del origen es igual a la flota disponible.

$$\sum_{i \in N} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^3 ZP_{ij}^{kp} + \sum_{i \in N} \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^3 ZS_{ij}^{ks} \leq K \quad \{\forall(j) \in N, j = 0\} \quad (3)$$

- El número máximo de vehículos propios de cada tipo asignados es menor o igual a la cantidad de vehículos disponibles.

$$\sum_{i \in N} \sum_{k=1}^K ZP_{ij}^{kp} \leq cantPP \quad \{\forall(j) \in N, j = 0, p = 1\} \quad (4)$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{k=1}^K ZP_{ij}^{kp} \leq cantPM \quad \{\forall(j) \in N, j = 0, p = 2\} \quad (4)$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{k=1}^K ZP_{ij}^{kp} \leq cantPG \quad \{\forall(j) \in N, j = 0, p = 3\} \quad (5)$$

- Cada vehículo propio o subcontratado entra y/o sale del origen una sola vez.

La ruta es de reparto a los clientes sin regresar a cargar.

$$\sum_{i \in N} ZP_{ij}^{kp} \leq 1 \quad \{\forall(j) \in N, j = 0, \forall(p) \in P\} \quad (5)$$

$$\sum_{i \in N} ZS_{ij}^{ks} \leq 1 \quad \{\forall(j) \in N, j = 0, \forall(s) \in S\} \quad (6)$$

- Garantiza que toda la demanda de los clientes sea atendida. Se asume que todos los clientes tienen demanda.

$$\sum_{i \in N} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^3 M * ZP_{ij}^{kp} + \sum_{i \in N} \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^3 M * ZS_{ij}^{ks} \geq q_i \quad \{\forall(j) \in N, j \neq 0\} \quad (7)$$

- Asignación de clientes a una sola ruta de vehículos, es decir, el cliente es atendido por un solo tipo de vehículo.

$$\sum_{j \in N} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^3 ZP_{ij}^{kp} + \sum_{j \in N} \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^3 ZS_{ij}^{ks} \leq 1 \quad \{\forall(i) \in N, i > 0, j > 0\} \quad (8)$$

- Asegura que cada vehículo que entre a cualquier nodo, incluyendo el depósito, salga de este.

$$\sum_{j \in N} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^3 ZP_{ij}^{kp} - \sum_{j \in N} \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^3 ZP_{ji}^{kp} = 0 \quad \{\forall(i) \in N, i \geq 0, j \geq 0\} \quad (9)$$

$$j \in N, k=1, K, s=1, 3, ZS_{ijks} - j \in N, k=1, K, s=1, 3, ZS_{jiks} = 0 \quad \forall i \in N, i \geq 0, j \geq 0 \quad (10)$$

- Cada vehículo propio o subcontratado que entra a un nodo, lo hace solo una vez.

$$(11)$$

- $ZP_{ij}^{kp} + ZP_{ji}^{kp} \leq 1 \quad \{\forall(i, j) \in N, i \neq 0, j \neq 0, \forall p \in P\}$

$$ZS_{ij}^{ks} + ZS_{ji}^{ks} \leq 1 \quad \{\forall(i, j) \in N, i \neq 0, j \neq 0, \forall s \in S\} \quad (12)$$

- **Restricciones de tiempo:** Aseguran que no se puede iniciar un servicio en j sin atender antes el cliente i.

- Tiempo de servicio entre los clientes

$$wp_{ikp} + ts_i + t_{ij} - wp_{jkp} \leq (M - ZP_{ij}^{kp} * M) \quad \forall(i, j) \in A, i \neq j, \quad \forall p \in P \quad (13)$$

$$ws_{iks} + ts_i + t_{ij} - ws_{jks} \leq (M - ZS_{ij}^{ks} * M) \quad \forall(i, j) \in A, i \neq j, \quad \forall s \in S \quad (14)$$

- Garantiza que el inicio de servicio en el cliente i se lleva a cabo dentro de la ventana de tiempo correspondiente.

$$\bullet \quad f_i \sum_{j \in N} ZP_{ij}^{kp} \leq wp_{ikp} \quad \forall p \in P, \quad \forall i \in N \quad (15)$$

$$wp_{ikp} \leq g_i \sum_{j \in N} ZP_{ij}^{kp} \quad \forall p \in P, \quad \forall i \in N \quad (16)$$

$$f_i \sum_{j \in N} ZS_{ij}^{ks} \leq ws_{iks} \quad \forall s \in S, \quad \forall i \in N \quad (17)$$

$$ws_{iks} \leq g_i \sum_{j \in N} ZS_{ij}^{ks} \quad \forall s \in S, \quad \forall i \in N \quad (18)$$

- El tiempo de llegada al depósito de cualquier vehículo propio o subcontratado es igual a cero porque es el punto de partida.

$$wp_{ikp} = 0 \quad \{ \forall p \in P, i = 0 \} \quad (19)$$

$$ws_{iks} = 0 \quad \{ \forall s \in S, i = 0 \} \quad (20)$$

- La suma de la demanda de todos los clientes atendidos no debe exceder la capacidad del vehículo.

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} q_i ZP_{ij}^{kp} \leq CP^p \quad \{ i \neq j, i > 0, j > 0 \} \quad \forall p \in P \quad (21)$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} q_i ZS_{ij}^{ks} \leq CS^s \{i \neq j, i > 0, j > 0\} \forall s \in S \quad (22)$$

- Indica condiciones de no negatividad a las variables del modelo

$$h \geq 0 \quad (23)$$

$$wp_{ikp} \geq 0 \forall i \in N, \forall p \in P \quad (24)$$

$$ws_{iks} \geq 0 \forall i \in N, \forall s \in S \quad (25)$$

$$ZP_{ij}^{kp} \in \{0,1\} \forall (i,j) \in A, \forall p \in P \quad (26)$$

$$ZS_{ij}^{ks} \in \{0,1\} \forall (i,j) \in A, \forall s \in S \quad (27)$$

7.5 Validación del modelo matemático para el problema PRP

Para validar el correcto funcionamiento del modelo de programación lineal entera mixta bi-objetivo descrito antes en esta sección, se empleó el software de optimización matemática GAMS. Debido a que dicho entorno permite encontrar soluciones exactas a problemas de un solo objetivo a través de su herramienta CPLEX, basada en el método SIMPLEX; fue necesario separar el modelo original en dos problemas mono-objetivo y correr ambos submodelos por separado para encontrar la solución óptima de la función de los costos totales y de las emisiones de CO2 de manera independiente. En las tablas 8 y 9, se presenta la instancia de prueba utilizada en este

procedimiento, la cual también será utilizada en secciones posteriores para ejemplificar el funcionamiento del algoritmo propuesto.

Tabla 8

Cantidad de vehículos a asignar k y capacidades disponibles.

Cantidad vehículos	Capacidad (Miles kg)			Tabla 9
	<i>k</i>	<i>Sencillo</i>	<i>Doble</i>	
4	8	15	24	<i>Cantidad,</i>

Ubicación y demanda de los clientes

Cliente	Coordenadas		Demanda	Distancia $d(i,j)$						
	<i>X</i>	<i>Y</i>		<i>$q(j)$</i>	0	1	2	3	4	5
0	15	6	0	M	84	75	90	23	59	57
1	85	54	3	84	M	50	43	61	61	39
2	90	4	3	75	50	M	89	54	89	66
3	56	87	6	90	43	89	M	74	38	34
4	37	15	4	23	61	54	74	M	51	40
5	24	65	2	59	61	89	38	51	M	24
6	46	54	5	57	39	66	34	40	24	M

De la tabla 9, es importante destacar que la diagonal de la matriz de distancia será un número muy grande M, siguiendo estrictamente los fundamentos del método de optimización SIMPLEX, con el fin de evitar asignaciones o desplazamientos inválidos. Además, el cliente $i=0$, será siempre el depósito y, por ende, no contará con demanda de producto. Los demás parámetros

de entrada, tales como: factores de emisión de CO₂, costos unitarios operativos, consumos de combustible, tiempos de ruta y descargue, etc., pueden ser consultados en el apéndice B.

A continuación, se presenta la codificación de las funciones objetivo incorporada en el programa ya mencionado. Para ampliar la información sobre la codificación de los modelos remitirse al apéndice C (costos totales) y apéndice D (consideraciones ambientales).

Figura 16

Codificación de la función de costos totales en GAMS

```
*COSTOS TOTALES PRP*

EQUATIONS
OBJ          "Funcion objetivo"      ;

OBJ..        fo =E=  SUM((k,p), sc*ht(k)) + SUM((i,j,k,p), fp(p)*ZP(i,j,k,P))
              + SUM((i,j,k,s), fs(s)*ZS(i,j,k,s))
              + SUM((i,j,k,p), d(i,j)*FRP(p)*GG*ZP(i,j,k,p))
              + SUM((i,j,k,s), d(i,j)*FRS(s)*GG*ZS(i,j,k,s));

MODEL PRP /ALL/;

SOLVE CVRP USING MIP MINIMIZING fo ;

DISPLAY fo.l,ZP.l,ZS.l,wp.l,ws.l,ht.l
```

Nota: Creación propia

Figura 17

Codificación de la función de consideraciones ambientales en GAMS

```
*CONSIDERACIONES AMBIENTALES PRP*

EQUATION

OBJ          "Funcion objetivo" ;

OBJ..        fo =E=  SUM((i,j,k,p), d(i,j)*(((efhp(p)-evhp(p))/CP(p))*q(j))
- (0.3*((efhp(p)-evhp(p))/CP(p)))+ evhp(p))*ZP(i,j,k,p)
+ SUM((i,j,k,s), d(i,j)*(((efhs(s)-evhs(s))/CS(s))*q(j))
- (0.3*((efhs(s)-evhs(s))/CS(s)) + evhs(s))*ZS(i,j,k,s)
- SUM((j,k,p), d('0',j)*(((efhp(p)-evhp(p))/CP(p))*q(j))
- (0.3*((efhp(p)-evhp(p))/CP(p)))+ evhp(p))*ZP('0',j,k,p)
- SUM((j,k,s), d('0',j)*(((efhs(s)-evhs(s))/CS(s))*q(j))
- (0.3*((efhs(s)-evhs(s))/CS(s)))+ evhs(s))*ZS('0',j,k,s)
+SUM((j,k,p), d('0',j)*(((effp(p)-evfp(p))/CP(p))*q(j))
- (0.3*((effp(p)-evfp(p))/CP(p)))+ evfp(p))*ZP('0',j,k,p)
+ SUM((j,k,s), d('0',j)*(((effs(s)-evfs(s))/CS(s))*q(j))
- (0.3*((effs(s)-evfs(s))/CS(s)))+evfs(s))*ZS('0',j,k,s));

MODEL PRP /ALL/;

SOLVE CVRP USING MIP MINIMIZING fo ;

DISPLAY fo.l,ZP.l,ZS.l,wp.l,ws.l,ht.l
```

Nota: Creación propia.

De la anterior codificación se obtuvieron los siguientes resultados:

Figura 18

Costo mínimo total obtenido para la instancia de prueba

```
Proven optimal solution
MIP Solution:          2119.391550      (398877 iterations, 33129 nodes)
Final Solve:          2119.391550      (0 iterations)
```

Nota: Creación propia

Tabla 10

Resultados de asignación obtenidos en la minimización de los costos totales

Vehículos	Tipo	Clientes	Tiempo de ruta
1	s1	0-3-5-0	3,61
2	p1	0-6-1-0	3,50
3	p1	0-4-2-0	3,03

Figura 19

Emisiones de CO2 mínimas obtenidas para la instancia de prueba

```
Solution satisfies tolerances
MIP Solution:          260.723333    (40397 iterations, 2570 nodes)
Final Solve:          260.723333    (0 iterations)
```

Nota: Creación propia

Tabla 11

Resultados de asignación obtenidos bajo consideraciones ambientales

Vehículos	Tipo	Clientes	Tiempo ruta
1	s2	0-4-6-1-2-0	5,08
2	NA	NA	NA
3	s1	0-5-3-0	3,61

A partir de los resultados presentados arriba, se puede comprobar que el modelo MILP propuesto para las funciones del costo total y de las consideraciones ambientales funciona

correctamente obteniendo soluciones consistentes de acuerdo con las necesidades de cada una de las funciones objetivo. Del modelo del costo total, se puede observar en la tabla 10 que la solución óptima se obtiene asignando tres vehículos de tipo sencillo, dos propios y uno subcontratado, con un costo mínimo asociado de USD 2.119,392. Mientras que, para la función de consideraciones ambientales se obtiene la mejor solución cuando se asignan dos vehículos subcontratados, uno de tipo sencillo y el otro dobletroque, generando un nivel mínimo de emisiones de CO₂ de 260,723 Kg. Finalmente, es importante destacar que el acotamiento definido en los supuestos del modelo con respecto a la cantidad de vehículos propios disponibles para asignar está siendo efectivo, ya que, es posible observar que para el objetivo de costos totales se utilizaron todos los vehículos propios disponibles ($p_1 = 2$) buscando mayor eficiencia de recursos; en contraste con el objetivo dos, donde se optó por alquilar un vehículo más grande en lugar de utilizar los dos sencillos propios disponibles, puesto que el factor de emisión no depende de si el vehículo es propio o subcontratado.

Una vez confirmado el funcionamiento del algoritmo mediante métodos exactos, se procede a desarrollar el algoritmo evolutivo para encontrar ahora las soluciones aproximadas, como se describe en la sección 7.

8. Algoritmo de solución propuesto – NSGA II

El algoritmo propuesto en el presente trabajo para resolver el modelo PRP bi-objetivo es el denominado Algoritmo Genético de Ordenamiento No Dominado (NSGA-II), el cual está basado en un ordenamiento rápido de las soluciones en diferentes frentes de Pareto, un método de selección por torneo binario con distancia de apilamiento, el operador de cruce fundamentado en recombinación de dos puntos, un operador de mutación aleatorio y elitismo. En el siguiente apartado se amplía la información en detalle de los elementos mencionados.

A continuación, se presenta el funcionamiento general del algoritmo desarrollado en este capítulo (Figura 20).

Figura 20

Pseudocódigo del algoritmo NSGA-II del problema PRP

Algoritmo 1. Algoritmo NSGA – II Basado en el PRP

1.	Inicio
2.	Inicialización de parámetros
3.	Iniciar población Elite General vacía (Q)
4.	Ciclo iterativo: Repetir hasta n iteraciones
5.	Generar población aleatoria de tamaño 4*popSize
6.	Verificar la factibilidad de la población aleatoria
7.	Seleccionar 2*popSize soluciones factibles como población inicial
8.	Calcular los costos y emisiones asociadas a la población inicial
9.	Realizar un ordenamiento no dominado rápido a la población inicial
10.	Seleccionar popSize mejores individuos como población actual
11.	Actualizar la población Q con los individuos del primer frente de la población inicial
12.	Ciclo evolutivo: Repetir m generaciones
13.	Seleccionar padres a cruzar de la población actual
14.	Aplicar el operador de cruce (si aleatorio < Pc)
15.	Obtener población descendiente del cruce
16.	Aplicar el operador de mutación a la población descendiente (si aleatorio < Pm)
17.	Obtener la población descendiente mutada
18.	Unir las poblaciones actual, cruzada y mutada en una población temporal
19.	Realizar ordenamiento no dominado rápido de la población temporal
20.	Seleccionar popSize mejores individuos del ordenamiento como nueva población actual
21.	Actualizar la población Q con los individuos del primer frente de la población temporal
22.	Incrementar el contador de generación m
23.	Fin
24.	Incrementar el contador de iteraciones

Algoritmo 1. Algoritmo NSGA – II Basado en el PRP

- 25. **Fin**
 - 26. Realizar ordenamiento no dominado rápido de la población elite general Q
 - 27. Seleccionar los individuos del primer frente como población no dominada
 - 28. Calcular los costos y emisiones asociados a los individuos de la población no dominada
-

8.1 Codificación de las soluciones

Como se mencionó en el marco teórico, a menudo la aplicación de técnicas heurísticas requiere de una codificación o representación de la estructura de soluciones factibles para el modelo de optimización investigado. El rendimiento de la técnica empleada se puede ver afectado por la estructura de solución previamente definida. Por esta razón, para el problema de PRP en cuestión, se decidió utilizar una estructura de representación vectorial, ya que es la forma de representación más común en este campo de estudio.

El vector que representa una solución para el problema PRP está configurado por los clientes i (donde, $i=0$ es el depósito), el tipo de vehículo asignado (propio o subcontratado) será un valor negativo entre -1 y -6 (con $p = -1, -2, -3$ y $s = -4, -5, -6$), como se muestra en la Figura 21.

Figura 21

Representación general de una solución del modelo PRP

k1					k2				
Tipo vh	Depósito	Cliente i1	Cliente in	Deposito	Tipo vh	Depósito	Cliente j1	Cliente jn	Deposito

En la Figura 21, se observa la representación general del cromosoma de solución para el modelo PRP desarrollado, el cual agrupa de manera horizontal la ruta de cada vehículo asignado

con sus respectivas salidas y retornos al depósito. De esta manera, si se tienen k vehículos, i clientes y un solo depósito el tamaño del vector será de $i + 3k$.

Con el propósito de ilustrar el funcionamiento de cada una de las etapas del algoritmo NSGA-II construido en el entorno de programación matemática Matlab para el cumplimiento de los objetivos de esta investigación, se retoma la instancia de prueba descrita en la sección de validación del modelo matemático, donde se buscaba encontrar la mejor configuración de recursos para atender a una red de 6 clientes potenciales, asignando $k=3$ vehículos y partiendo de la premisa de que se cuenta con una flota propia de 2 vehículos sencillos de tipo p1. A partir de estos datos y los demás valores de entrada consignados en la Tabla 9 y el Apéndice B, se generan $4 * \text{popSize}$ individuos aleatorios empleando la función `aleatoriosSolIniciales()` desarrollada para tal fin.

En la Figura 22, se muestran 12 individuos generados con esta función aleatoria para la instancia mencionada durante una corrida del algoritmo ejecutada a manera de ejemplo con un tamaño de población $\text{popSize} = 3$, una única iteración y para una sola generación.

Si se observan detenidamente los individuos presentados, es evidente que esta primera población contiene cromosomas factibles y no factibles. Una forma sencilla de llegar a esta conclusión es inspeccionar los valores negativos en cada individuo. Partiendo del hecho de que dichos valores representan el tipo del vehículo, como se mencionó más arriba; y que para esta instancia se estableció un límite de vehículos propios igual a 2 sencillos; es decir, puede aparecer el (-1) máximo dos veces y no deberían asignarse vehículos de tipo (-2, igual a p2) y (-3, igual a p3) en cada cromosoma. Es posible afirmar a primera vista que individuos como el 1, 3, y el 11 (entre otros) no son soluciones elegibles para la instancia analizada. Por tal motivo, se hace necesario el procedimiento de reducción de la población descrito en el siguiente numeral.

Figura 22

Individuos generados aleatoriamente para la primera población

<i>Individuos</i>	<i>Solución codificada</i>														
1	-1	0	4	5	3	6	0	-3	0	2	0	-3	0	1	0
2	-5	0	3	5	0	-1	0	1	0	-4	0	6	4	2	0
3	-6	0	6	0	-4	0	1	4	3	0	-3	0	5	2	0
4	-6	0	6	0	-5	0	5	0	-1	0	1	3	2	4	0
5	-1	0	5	0	-6	0	6	2	3	4	0	-3	0	1	0
6	-5	0	3	0	-4	0	4	5	0	-4	0	2	6	1	0
7	-6	0	5	0	-2	0	4	6	0	-2	0	3	1	2	0
8	-6	0	3	0	-1	0	6	1	4	0	-1	0	5	2	0
9	-1	0	2	0	-1	0	5	1	0	-6	0	6	4	3	0
10	-6	0	6	0	-3	0	3	0	-4	0	5	4	1	2	0
11	-6	0	4	0	-2	0	6	2	3	5	0	-2	0	1	0
12	-3	0	2	0	-1	0	6	1	0	-5	0	5	3	4	0

8.2 Decodificación y factibilidad de las soluciones

Cada iteración del algoritmo NSGA-II inicia con la generación de una población de individuos aleatoria con la estructura de codificación presentada anteriormente. Debido a que esta configuración puede generar individuos no factibles, primero se verifica la factibilidad de los mismos y, posteriormente, los individuos factibles se seleccionan y se guardan en una población inicial. Cabe resaltar que el cromosoma planteado no requiere de estrategias de decodificación

adicionales, puesto que su estructura muestra la ruta de los vehículos y con ella es posible calcular de forma directa los valores de las funciones objetivo y las variables de decisión.

En concreto, la función denominada factibilidad () consta de un primer filtro que se le aplica a cada nueva población con el fin de desechar aquellos individuos que no cumplen el límite de vehículos propios establecido en los datos que caracterizan a la instancia en cuestión. En la Figura 23, se resaltan en color los genes asociados al tipo de vehículo que ocasiona la no factibilidad del individuo al que pertenecen, que para este ejemplo se asume un criterio de límite de vehículos propios igual a 2 p1's.

Figura 23

Factibilidad de los individuos según el límite de vehículos propios

<i>Individuos</i>	<i>Solución codificada</i>														<i>Criterio</i>	
1	-1	0	4	5	3	6	0	-3	0	2	0	-3	0	1	0	No factible
2	-5	0	3	5	0	-1	0	1	0	-4	0	6	4	2	0	Factible
3	-6	0	6	0	-4	0	1	4	3	0	-3	0	5	2	0	No factible
4	-6	0	6	0	-5	0	5	0	-1	0	1	3	2	4	0	Factible
5	-1	0	5	0	-6	0	6	2	3	4	0	-3	0	1	0	No factible
6	-5	0	3	0	-4	0	4	5	0	-4	0	2	6	1	0	Factible
7	-6	0	5	0	-2	0	4	6	0	-2	0	3	1	2	0	No factible
8	-6	0	3	0	-1	0	6	1	4	0	-1	0	5	2	0	Factible
9	-1	0	2	0	-1	0	5	1	0	-6	0	6	4	3	0	Factible
10	-6	0	6	0	-3	0	3	0	-4	0	5	4	1	2	0	No factible
11	-6	0	4	0	-2	0	6	2	3	5	0	-2	0	1	0	No factible

12	-3	0	2	0	-1	0	6	1	0	-5	0	5	3	4	0	No factible
----	----	---	---	---	----	---	---	---	---	----	---	---	---	---	---	-------------

Una vez se obtiene una población reducida incluyendo únicamente aquellos individuos factibles durante el primer filtro; se valida nuevamente la factibilidad de cada cromosoma, pero ahora vista desde su cumplimiento de las restricciones de capacidad y ventanas de tiempo. Para ello, se toma como ejemplo el segundo individuo de la población aleatoria contemplada en la Figura 23; el cual está etiquetado como factible para el primer criterio, y se define su factibilidad para los criterios dos y tres así:

Figura 24

Individuo de demostración de la población aleatoria

<i>k1</i>					<i>k2</i>				<i>k3</i>					
-5	0	3	5	0	-1	0	1	0	-4	0	6	4	2	0

El individuo aleatorio 2 es un cromosoma factible si cumple que:

- Capacidad ($k1 = s2$) \leq demanda (3) + demanda (5) y
- Capacidad ($k2 = p1$) \leq demanda (1) y
- Capacidad ($k3 = s1$) \leq demanda (6) + demanda (4) + demanda (2)

Y, además:

- Tiempo de llegada de $k1$ a los clientes 3 y 5 se encuentra entre $f3, f5$ y $g3, g5$, respectivamente.
- Tiempo de llegada de $k2$ al cliente 1 se encuentra entre $f1$ y $g1$.
- Tiempo de llegada de $k3$ a los clientes 6, 4 y 2 se encuentra entre $f6, f4, f2$ y $g6, g4, g2$, respectivamente.

De este paso, resulta una población inicial de tamaño $2 * popSize$, a la cual se le aplicará el ordenamiento no dominado rápido con el fin de seleccionar tan solo $popSize$ individuos que entrarán al ciclo evolutivo para reproducirse (de ser elegidos) y/o sobrevivir a la siguiente generación (dependiendo de su rango de dominancia).

8.3 Ordenamiento no dominado rápido

El primer paso para realizar el ordenamiento no dominado rápido es conocer los valores de las funciones objetivo generados por cada individuo de la población, ya que el procedimiento se lleva a cabo sobre el espacio de soluciones y no sobre la estructura de los cromosomas. Para el caso del algoritmo propuesto, se diseñaron dos funciones llamadas `calcularCostos ()` y `calcularEmisiones ()`.

Esta estrategia de acercamiento al Frente de Pareto se lleva a cabo realizando una comparación de dominancia entre cada una de las soluciones de la población con respecto a las demás, dando como resultado una combinatoria de la forma $\frac{n*(n-1)}{2}$. En cada comparación, se determina si una solución p domina a una solución q (en este caso se incrementa el grupo S_p , que corresponde a las soluciones dominadas por p); o en el evento contrario, cuando q domina a p , se incrementa el rango de dominancia de p denominado n_p (es decir, se incrementa el contador de soluciones que dominan a p). Posteriormente, aquellas soluciones que no sean dominadas por ninguna otra solución de la población o , en otras palabras, si para una solución p su respectivo $n_p = 0$, entonces dicha solución pertenece al primer frente de soluciones no dominadas $F1$. Una vez se conoce el primer frente $F1$, se verifica para cada p perteneciente a este frente cuáles soluciones q , de su grupo de soluciones dominadas S_p , pertenecen al frente subsiguiente (que sería $F2$) y se rellena dicho frente. Luego, se buscan las soluciones dominadas por los integrantes del frente $F2$, para completar el frente $F3$ y, así sucesivamente, hasta haber asignado cada solución del espacio a

algún frente. De esta forma, las mejores soluciones quedan ubicadas en los primeros frentes, incorporando así una estrategia de minimización durante la búsqueda.

Para una mayor claridad del procedimiento descrito, en la Figura 25, se relaciona el pseudocódigo propuesto por Kalyanmoy Deb et. al (2002).

Figura 25

Pseudocódigo del Ordenamiento No Dominado Rápido adaptado de

Ordenamiento No Dominado Rápido (P)

1.	Para cada $p \in P$
2.	$S_p = \emptyset$
3.	$n_p = 0$
4.	Para cada $q \in P$
5.	Si p domina a q entonces,
6.	$S_p = S_p \cup \{q\}$
7.	De lo contrario, si q domina a p entonces,
8.	$n_p = n_p + 1$
9.	si $n_p = 0$ entonces,
10.	$Prank = 1$
11.	$F_1 = F_1 \cup \{p\}$
12.	$i = 1$
13.	Mientras $F_i \neq \emptyset$

Ordenamiento No Dominado Rápido (P)

14.	$Q = \emptyset$
15.	Para cada $p \in F_i$
16.	Para cada $q \in S_p$
17.	$n_q = n_q - 1$
18.	si $n_q = 0$ entonces,
19.	$q_{rank} = i + 1$
20.	$Q = Q \cup \{q\}$
21.	$i = i + 1$
22.	$F_i = Q$

Un punto importante a remarcar es que, en el algoritmo desarrollado a lo largo de este trabajo, no se ordenan todos los frentes de niveles inferiores para luego elegir los n primeros hasta completar los `popSize` individuos necesarios, como se suele hacer en el NSGA-II clásico. En cambio, para reducir la complejidad y elevar la eficiencia de computación, únicamente se agrupan las soluciones del primer frente F_1 (con $n_p = 0$) en un grupo élite y los individuos a los que se les aplicarán los operadores genéticos se seleccionan por torneo aleatorio binario con base en el menor rango de no dominancia de las soluciones y la distancia de apilamiento, como se verá más adelante.

Antes de continuar a la siguiente etapa del algoritmo, es preciso profundizar en los criterios empleados para determinar si una solución domina a otra.

Para este tipo de problema de optimización bi-objetivo PRP, p domina a q si:

- El costo de p es menor que el costo de q y las emisiones de p menores o iguales a las de q .
- Las emisiones de p son menores a las de q y el costo de p es menor o igual al de q .

- Tanto el costo como las emisiones de p son menores que los de q

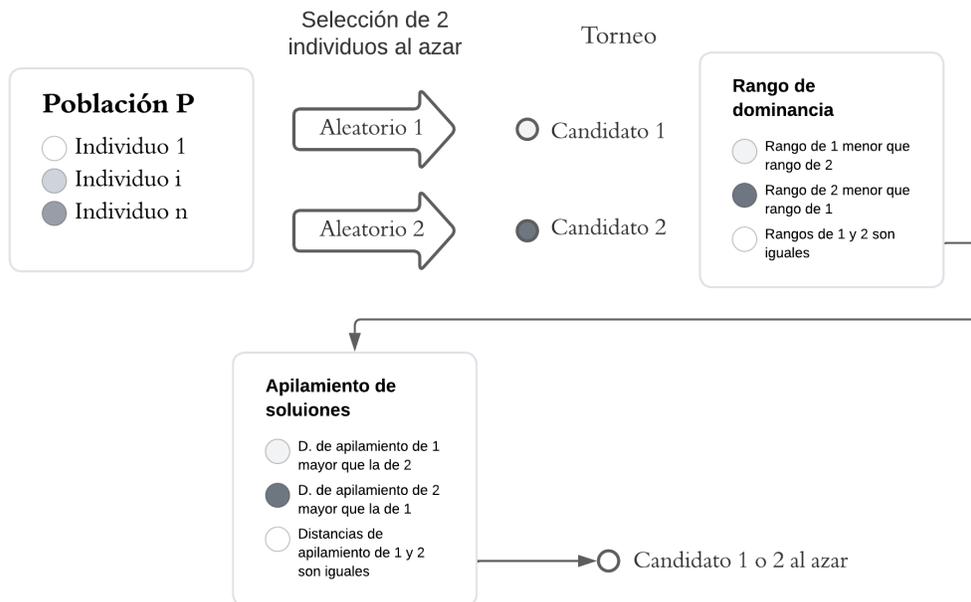
En el caso en que p es menor que q en uno de los objetivos, pero mayor en el otro, se dice que p y q son soluciones del frente de Pareto y por lo tanto no se dominan entre sí (se agregan al frente $F1$). Después de que el ordenamiento ha finalizado, se eligen los individuos que conformarán la poblaciónActual de individuos (con derecho a reproducirse) mediante el operador de selección diseñado para tal fin. Este operador es descrito en la sección 7.4.

8.4 Selección

El método de selección por torneo aleatorio binario consiste en generar dos números mediante una distribución aleatoria que permitan seleccionar al azar a dos individuos de la población para enfrentarlos cara a cara, comparándolos con base en alguna métrica predefinida. En el algoritmo NSAG – II propuesto aquí, se establecieron dos criterios de medición para determinar el ganador del enfrentamiento. Primero, se revisa el rango de no dominancia de cada individuo y, de pertenecer ambos al mismo frente, se discrimina según la cantidad de soluciones aglomeradas en su vecindad próxima, apoyándose en el cálculo de la distancia de apilamiento. En la Figura 26, se presenta un diagrama con los pasos del operador de selección de manera general.

Figura 26

Selección por torneo aleatorio binario



De este vistazo general del operador, es posible partir del hecho de que cuanto mayor sea la distancia de apilamiento mejor calificado para ser aceptado será el individuo. Esto se debe a que cuando la distancia es muy grande indica que se están explorando diversos espacios de soluciones, mientras que una distancia de apilamiento pequeña puede dar indicios de que una solución candidata está convergiendo a un óptimo local. En el NSAG-II propuesto en este trabajo, en lugar de comparar las distancias de apilamiento directamente, se utilizan para calcular un área de apilamiento de cada solución candidata y, de esta forma, encontrar cuántas soluciones de la población están contenidas dentro de esa área. Así, cuanto mayor sea la cantidad de soluciones apiladas para un candidato, menor será su probabilidad de ser escogido.

Esta fase del torneo correspondiente al criterio de apilamiento de las soluciones parte de un porcentaje de apilamiento introducido por el decisor entre los parámetros de inicialización del

algoritmo. Con este porcentaje y con el promedio del valor de función objetivo (se promedia por costos y por emisiones, respectivamente) de cada par de candidatos, se calculan cuatro distancias que actúan como deltas o variaciones con el fin de encontrar los vértices del rectángulo que demarcará el área de apilamiento.

Por ejemplo, para dos candidatos 1 y 2; con funciones de costos y emisiones $C1$, $C2$ y $E1$, $E2$, respectivamente:

$$C1 = 2000 \quad C2 = 1000$$

$$E1 = 300 \quad E2 = 500$$

Si se establece una tasa de apilamiento del 10%, entonces:

$$\text{Costo promedio} = \frac{C1 + C2}{2} = 1500$$

$$\text{Emisión promedio}(\Delta E) = \frac{E1 + E2}{2} = 400$$

$$\Delta C = \text{Costo promedio} * \text{tasa apilamiento} = 150$$

$$\Delta E = \text{Emisión promedio} * \text{tasa apilamiento} = 40$$

Teniendo los deltas para el costo y las emisiones, se hallan los límites de cada área como sigue:

Área candidato 1:

$$\text{Lim Inf } C1 = C1 - \Delta C$$

$$\text{Lim Sup } C1 = C1 + \Delta C$$

$$\text{Lim Inf } E1 = E1 - \Delta E$$

$$\text{Lim Sup } E1 = E1 + \Delta E$$

Área candidato 2:

$$\text{Lim Inf } C2 = C2 - \Delta C$$

$$\text{Lim Sup } C2 = C2 + \Delta C$$

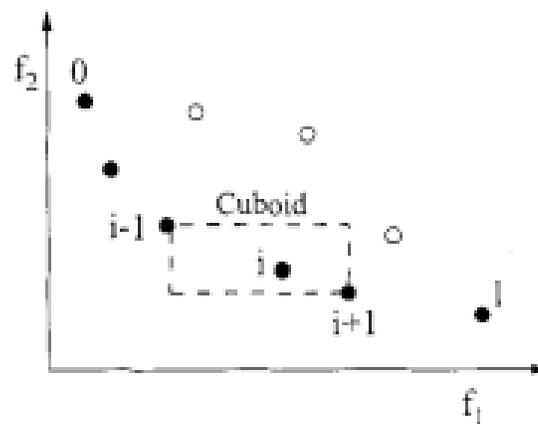
$$\text{Lim Inf } E2 = E2 - \Delta E$$

$$\text{Lim Sup } E2 = E2 + \Delta E$$

Con cada uno de estos límites es posible dibujar un rectángulo en un plano cartesiano donde el eje de las ordenadas sean los costos y el de las abscisas las emisiones, similar al propuesto por Kalyanmoy Deb et al (2002).

Figura 27

Cálculo de la distancia de apilamiento de una solución i



El siguiente paso es verificar una a una las soluciones de la población, para ver si sus valores de costos y emisiones se encuentran dentro de estos límites y, de ser así, se aumenta el contador de soluciones apiladas para el candidato a partir del cual se generaron esos límites. Por último, como ya se mencionó, el candidato que contenga menor cantidad de soluciones apiladas en su área de apilamiento será el ganador del torneo y tendrá el derecho a ser elegido para la reproducción, la cual inicia con un operador de cruce introducido en el siguiente pasaje.

8.5 Operador de cruce

El operador de cruce en los algoritmos evolutivos es una estrategia que permite la intensificación en la búsqueda de soluciones, ya que se centra en explotar las soluciones ya encontradas para generar nuevos individuos con características similares que puedan mejorar las funciones objetivo del modelo. El operador de cruce del NSAG – II propuesto, está basado en el trabajo de (Benaini & Berrajaa, 2018) quienes utilizaron una recombinación con corte en dos puntos aleatorios.

Con la intención de plasmar detalladamente el funcionamiento del operador, se plantea un ejemplo práctico con los siguientes dos individuos de la población inicial generada en pasos previos (**Figura 28**).

Figura 28

Individuos de prueba para el operador de cruce

Individuo	Solución codificada														
2	-5	0	3	5	0	-1	0	1	0	-4	0	6	4	2	0
9	-1	0	2	0	-1	0	5	1	0	-6	0	6	4	3	0

Inicialmente se generan dos posiciones aleatorias para cada individuo, las cuáles indican qué individuos serán extraídos de la estructura para ser insertados en el descendiente del cruce.

Estas posiciones están resaltadas en color gris (para el individuo 2) y azul (para el individuo 9) en la **Figura 29**. A partir de ahora, el individuo 2 será llamado Madre y el individuo 9, Padre.

Figura 29

Padres con posiciones resaltadas a modificar durante el cruce

Individuo	Solución codificada														
Madre	-5	0	3	5	0	-1	0	1	0	-4	0	6	4	2	0
Padre	-1	0	2	0	-1	0	5	1	0	-6	0	6	4	3	0

Según esto, para crear el descendiente 1, se extraen los clientes 5 y 4 de la madre (casillas de color gris) y se insertan en las casillas azules del padre (es decir, donde inicialmente se encontraban los clientes 2 y 1). De manera semejante, los clientes 2 y 1 del padre se insertan en la estructura de la madre, donde antes estaban los clientes 5 y 4.

Figura 30

Descendiente intermedios del cruce

Individuo	Solución codificada														
Madre	-5	0	3	5	0	-1	0	1	0	-4	0	6	4	2	0
Padre	-1	0	2	0	-1	0	5	1	0	-6	0	6	4	3	0
Individuo	Solución codificada														
Desc. 1	-5	0	3	2	0	-1	0	1	0	-4	0	6	1	2	0
Desc. 2	-1	0	5	0	-1	0	5	4	0	-6	0	6	4	3	0

Una vez realizada la inserción y generados los descendientes 1 y 2, es posible notar que en la estructura de estos dos nuevos individuos aparecen repetidos los clientes que fueron insertados de la madre y el padre, respectivamente. Debido a las restricciones del modelo matemático, esta

repetición de valores genera que los individuos no sean factibles. Para resolver este inconveniente, se procede a buscar en cada individuo los valores dobles de la cadena y se eligen las posiciones de aquellos clientes repetidos que estaban desde el comienzo en la estructura del cromosoma y no los que fueron insertados. Luego, en esas posiciones se reemplazarán los clientes repetidos con los clientes extraídos de la estructura al comienzo del cruce, puesto que ahora están ausentes en la cadena. En el ejercicio práctico quedaría de la siguiente manera:

Para el cliente 1 se tiene:

- Estructura base: Madre
- Clientes extraídos inicialmente: 5 y 4
- Clientes insertados del padre: 2 y 1

Como los clientes insertados son 2 y 1, estos serán los valores repetidos en la estructura del descendiente 1. Entonces, se eliminan los clientes repetidos 2 y 1 que ya estaban en la cadena de la madre desde el inicio (casillas en rojo) y se reemplazan por los clientes 5 y 4 que fueron extraídos al comienzo (casillas en gris), obteniendo el descendiente final DESC. 2 F.

Figura 31

Descendientes intermedio y final de la madre

Individuo	Solución codificada														
Madre	-5	0	3	5	0	-1	0	1	0	-4	0	6	4	2	0
Desc. 1	-5	0	3	2	0	-1	0	1	0	-4	0	6	1	2	0
Desc. 1 F	-5	0	3	2	0	-1	0	4	0	-4	0	6	1	5	0

Para obtener el descendiente final cruzado, del padre, se hace de forma análoga al descendiente de la madre. Como ahora los clientes insertados son 5 y 4, y se repiten en la cadena;

los clientes 5 y 4 que estaban desde antes de la inserción, se eliminan y se reemplazan por los clientes extraídos 2 y 1.

Figura 32

Descendientes intermedio y final del padre

Individuo	Solución codificada														
Padre	-1	0	2	0	-1	0	5	1	0	-6	0	6	4	3	0
Desc. 2	-1	0	5	0	-1	0	5	4	0	-6	0	6	4	3	0
Desc. 2 F	-1	0	5	0	-1	0	2	4	0	-6	0	6	1	3	0

Tras obtener el descendiente final de la madre y el descendiente final del padre, se evalúa la factibilidad de ambos con el fin de decidir si se desechan o se añaden a la población de descendientes del cruce. Luego, se repite toda la secuencia hasta que la población descendiente sea de tamaño popSize, para proceder a aplicar el operador de mutación.

8.6 Operador de mutación

El operador de mutación permite la exploración de nuevos espacios de solución, dotando al algoritmo de diversidad en la búsqueda de soluciones no dominadas. Mientras que, en el operador de cruce aplicado anteriormente, solamente era posible alterar o combinar los genes correspondientes a los clientes de la ruta de distribución de cada vehículo; en el operador de mutación se cuenta con dos posibles opciones de transformación de la estructura. En primer lugar, se propone el cambio del tipo de vehículo generando un valor aleatorio entre -1 y -6 y reemplazándolo en alguna de las casillas de la cadena dispuestas para albergar dicha variable. La segunda opción de mutación aplicada, es la extracción de un cliente aleatorio de la cadena, de manera similar al operador de cruce, y su posterior reinsertión una posición distinta dentro de la

estructura del mismo individuo. De esta forma, el cromosoma está sufriendo cambios en la capacidad del vehículo y en el tamaño y orden de las rutas de cada vehículo.

Para continuar el ejemplo expuesto hasta ahora, se toman los dos individuos finales de la fase de cruce (**Figura 33**).

Figura 33

Descendientes finales del cruce a ser mutados

Individuo	Solución codificada														
Desc. 1 F	-5	0	3	2	0	-1	0	4	0	-4	0	6	1	5	0
Desc. 2 F	-1	0	5	0	-1	0	2	4	0	-6	0	6	1	3	0

Con fines ilustrativos, a continuación, se le aplica la opción de mutación 1 al descendiente final 1 y la opción 2 al segundo descendiente final.

Para la mutación tipo 1, se buscan las posiciones del vector Desc. 1 F en donde el valor contenido sea menor que cero (es decir, los tipos de vehículos), obteniendo el siguiente vector resultante $r = [-5, -1, -4]$. Luego, se genera un número aleatorio de 1 hasta el tamaño de r para elegir el tipo de vehículo que será alterado. Suponiendo que el aleatorio generado sea $a = 2$; entonces, el segundo vehículo k_2 de tipo p_1 (que es lo mismo que -1) será el que cambie. Finalmente, se busca el valor de -1 en el cromosoma Desc. 1 F y se reemplaza por un valor p -nuevo = aleatorio entre -1 y -6 . En la **Figura 34**, se observa el descendiente mutado resultante, para un valor p -nuevo igual a -6 .

Figura 34

Descendiente resultante del tipo de mutación 1

Individuo	Solución codificada														
Desc. 1M	-5	0	3	2	0	-6	0	4	0	-4	0	6	1	5	0

En cuanto al segundo tipo de mutación, se genera un valor aleatorio entre 1 y el número de cliente N (para el ejemplo a =3), que será el cliente a cambiar de posición. Luego, se genera otro aleatorio para determinar la ubicación en donde será reinsertado el cliente a (se supone, i =4). Finalmente, se hace la reinserción, obteniendo el descendiente mutado número 2 de la **Figura 35**.

Figura 35

Descendiente resultante de la mutación tipo 2

Individuo	Solución codificada														
Desc. 2M	-1	0	5	3	0	-1	0	2	4	0	-6	0	6	1	0

Como se puede observar en la estructura del Desc. 2M, el vehículo k1 ahora tiene una ruta más larga, atendiendo a los clientes 5 y 3. Por esta razón, al igual que con los individuos descendientes del cruce, estas nuevas configuraciones de genes también deben ser analizadas para establecer si son factibles y se aceptan o si se deben rechazar.

En este punto hay varias aclaraciones importantes a resaltar. Por un lado, el operador se aplica hasta que se complete un tamaño de descendientes mutados igual a popSize. Además, es oportuno dejar en evidencia el hecho de que estos dos tipos de mutación no son excluyentes, por lo que es posible que se apliquen ambos al mismo individuo, pero para hacer la explicación más didáctica se optó por explicarlo separadamente.

Para finalizar, una vez se tiene completa la población descendiente mutada, se une con la población descendiente cruzada y la población actual (o población de padres) en un solo grupo de $3 * \text{popSize}$, y mediante un ordenamiento no dominado rápido y el uso del operador de selección se eligen los popSize individuos que pasarán a conformar la siguiente generación. Como comentario final, un aspecto relevante es que la ejecución de los operadores de cruce y mutación depende de dos valores aleatorios (p_{Cruce} , $p_{\text{Mutación}}$); los cuales son comparados con los valores iniciales P_c y P_m , respectivamente, ingresados por el usuario. De esta forma, durante una corrida del algoritmo, una población de individuos será cruzada solo cuando el valor aleatorio p_{Cruce} , sea menor a la probabilidad de cruce ($p_{\text{Cruce}} < P_c$), y mutada, únicamente en el caso en que el valor aleatorio $p_{\text{Mutación}}$ sea menor a la probabilidad de mutación ($p_{\text{Mutación}} < P_m$).

8.7 Elitismo

El último paso a describir de este algoritmo es la incorporación de un grupo élite en donde se van guardando, tras cada generación y cada iteración del algoritmo, las soluciones no dominadas del primer frente obtenido mediante el ordenamiento no dominado rápido en diferentes etapas de algoritmo. A esta población de individuos élite generales, se le realiza un ordenamiento al final de la ejecución del NSGA. II, con el objetivo de seleccionar las soluciones no dominadas entre todos los mejores individuos encontrados de principio a fin. Y este grupo será el resultado que arroje el algoritmo para la fase de validación y rendimiento descrita a continuación en la sección 8.

9. Rendimiento del Algoritmo Genético

El algoritmo NSGA-II propuesto como solución al problema de optimización PRP, fue desarrollado en el software de programación matemática Matlab versión R2022a en un computador portátil con las siguientes especificaciones:

Tabla 12

Especificación equipo cómputo

Especificación	Descripción
Fabricante	Asus
Modelo	N551JK
Procesador	Intel (R) Core (TM) i7 – 4710HQ CPU @ 2.5GHz
Memoria instalada (RAM)	8,00 GB
Tipo de sistema	Sistema operativo de 64 bits procesador x64

9.1 Planteamiento del diseño experimental

El método estadístico elegido para esta etapa de evaluación del rendimiento del algoritmo descrito en la sección anterior es el análisis de varianza de un solo factor (ANOVA), que permite examinar las diferencias entre las medias de dos poblaciones de estudio, haciendo uso de la herramienta estadística MINITAB 2019. Para su implementación, primero se plantea un diseño de experimentos en el cual se busca validar cuáles son los datos de entrada que generan un mayor rendimiento del algoritmo con respecto a las dos variables de desempeño, que son: el tiempo de ejecución y la cantidad de soluciones no dominadas encontradas durante la corrida.

9.2 Factores del diseño

Los factores del diseño descrito son tres parámetros de entrada del algoritmo, tales como: el tamaño de la población, la probabilidad de cruce y la probabilidad de mutación. La elección de estos parámetros está sustentada en el hecho de que durante la revisión bibliográfica se encontró que estas variables son fundamentales para el buen rendimiento de un algoritmo evolutivo y, por lo tanto, son comúnmente objeto de estudio en este campo de investigación. Cada parámetro será

evaluado en 2 diferentes niveles (ALTO, BAO). Además, es importante mencionar que los niveles de cada factor fueron seleccionados tomando como base de referencia los diseños propuestos por (Alvarado C. , Herazo, Ardila, & Donoso, 2005) y (Hernández, Castilla, López, & Mancilla, 2016), consolidados en la

Tabla 13. Al igual que los demás parámetros de entrada como el número de iteraciones, la cantidad de generaciones y la tasa de apilamiento.

Tabla 13

Factores del diseño experimental

Factores	Niveles	
	Bajo	Alto
Tamaño de población	50	100
Probabilidad de cruce	0.4	0.7
Probabilidad de mutación	0.1	0.2

9.3 Variables de desempeño

Para la ejecución del experimento y subsiguiente la validación de las posibles soluciones arrojadas por el algoritmo propuesto, se utilizaron las siguientes métricas:

- Tiempo de ejecución del algoritmo
- Cantidad de soluciones no dominadas encontradas

Tiempo de ejecución del algoritmo

Uno de los recursos más limitado durante la toma de decisiones a nivel estratégico es la variable tiempo; la naturaleza evolutiva del algoritmo NGSa-II ocasiona que este tipo de metaheurística requiera una gran inversión de este recurso en la búsqueda de soluciones no dominadas ya que mapea todo el espacio mientras se acerca al frente Pareto. Por esta razón, el tiempo de ejecución es una de las variables de respuesta comúnmente utilizada para comparar el rendimiento de los algoritmos en este campo de estudio. En el presente trabajo esta variable es calculada por MATLAB con la función Tic-Toc.

Cantidad de soluciones no dominadas encontradas

El algoritmo NSGA-II propuesto explora el espacio de soluciones buscando la minimización de las funciones de costos y emisiones totales, tras cada generación, implementando sus operadores genéticos y el método de ordenamiento no dominado. En cada iteración, se guardan las soluciones pertenecientes al primer frente ordenado F1, como población élite general (Q) de la corrida. Una vez el algoritmo alcanza el límite de iteraciones definido en sus valores de entrada, se eliminan los individuos idénticos almacenados en el grupo Q y se realiza un ordenamiento final entre la población restante, la cual pasa a conformar la población final de soluciones no dominadas del problema, y el tamaño de este grupo determina la variable de desempeño denominada cantidad de soluciones no dominadas encontradas.

Para complementar el análisis de influencia de los factores de este diseño experimental; además de estas dos variables de respuesta, se evalúa la calidad de las soluciones encontradas en la mejor corrida de cada instancia, a partir de la verificación de sus valores de costos y emisiones totales obtenidos. A continuación, se describe cada uno:

Costos totales

Se selecciona la variable de decisión del costo mínimo en este diseño experimental; puesto que, durante la revisión de la literatura se encontró que es uno de los principales criterios a la hora de evaluar diseños de enrutamiento de vehículos. El valor de esta variable se obtiene de la decodificación de los individuos pertenecientes a la población de soluciones no dominadas encontradas por el NSGA-II.

Consideraciones ambientales

Debido que el problema de optimización PRP, se centra en la minimización del impacto ambiental, se establece esta variable de decisión como una buena métrica de comparación. Como se mencionó antes, el impacto se mide en la cantidad de emisiones de CO₂ totales liberadas al medio ambiente como consecuencia de la configuración de recursos y rutas planteada en cada solución del modelo. De cada corrida del algoritmo este valor será el generado por los individuos de la población no dominada obtenidos en su último paso.

9.4 Tratamientos

Al llevar a cabo las pruebas de validación surgieron en total 8 tratamientos, derivados de la combinación de los 3 factores entre sus niveles. En detalle, para cada factor, se realiza una comparación de los resultados obtenidos a nivel BAJO y ALTO. Existen dos tipos de comparación para cada factor, denominadas “*validación a niveles bajos*” y “*validación a niveles altos*”.

Para cada validación surgen dos tratamientos, donde primero se elige el factor a evaluar; el cual se encuentra variando entre sus dos niveles, mientras que los demás factores se mantienen constantes. En la Tabla 14, se ilustran los tratamientos resultantes de la “*validación a niveles bajos*”, donde se puede observar que el factor evaluado cambia de su nivel bajo al alto de un tratamiento a otro, en contraste, con los factores constantes que permanecen en su nivel bajo.

Tabla 14

Tratamientos de la validación a niveles bajos

Factor evaluado	Factor constante	Factor constante
<i>Nivel Bajo</i>	<i>Nivel Bajo</i>	<i>Nivel Bajo</i>
<i>Nivel Alto</i>	<i>Nivel Bajo</i>	<i>Nivel Bajo</i>

De la misma manera, la “*validación a niveles altos*”, es presentada en la **Tabla 15**; con la diferencia de que ahora todos los factores constantes se encuentran en su nivel alto.

Tabla 15

Tratamientos de la validación a niveles altos

Factor evaluado	Factor constante	Factor constante
<i>Nivel Bajo</i>	<i>Nivel Alto</i>	<i>Nivel Alto</i>
<i>Nivel Alto</i>	<i>Nivel Alto</i>	<i>Nivel Alto</i>

Por otra parte, para seleccionar las 5 instancias de prueba a utilizar en esta etapa de validación de parámetros, se generaron mediante una distribución aleatoria las coordenadas, demandas y ventanas de tiempo de 100 clientes, ubicados en un área de (100 * 100) km², tomando como límites de cada distribución los valores propuestos en los trabajos de (Pratap, Sammer, & Meyarivan, 2022) y (Benaini & Berrajaa, Genetic Algorithm for Large Dynamic Vehicle Routing Problem on GPU). Para calcular la distancia entre dos clientes, se emplearon las coordenadas generadas y la ecuación de distancia euclidiana entre dos puntos del espacio. Finalmente, se realizaron 5 réplicas para cada tratamiento en cada instancia y se tomó el promedio de los tiempos y las soluciones no dominadas obtenidos por instancia para llevarlos a MINITAB y analizarlos

mediante la comparación estadística de medias de la prueba TUKEY. En la **Tabla 16**, se presentan las 5 instancias utilizadas durante las pruebas realizadas, para consultar otros valores de iniciación del algoritmo remitirse al Apéndice E.

Tabla 16

Instancias de prueba para la validación del algoritmo NSGA-II

Instancias	Clientes	Vehículos
1	8	3
2	9	5
3	6	3
4	5	2
5	10	4

Cabe resaltar que, durante la etapa de revisión de la literatura, no se encontraron artículos que incluyeran la restricción propuesta en este trabajo relacionada con la cantidad de vehículos propios disponibles. Por esta razón, se asume un porcentaje razonable del 60% de la cantidad total k de vehículos a asignar.

9.5 Análisis de resultados

En el siguiente apartado, se refieren de forma detallada los hallazgos provenientes de la implementación del ANOVA con las respectivas hipótesis para cada uno de los factores estudiados.

8.3. Diseño experimental para el tamaño de la población

Para el tamaño de la población se consideran las siguientes hipótesis:

- Cuanto mayor es el tamaño de la población, el algoritmo consume un tiempo de ejecución más alto.
- Un nivel alto del tamaño de población genera una mayor cantidad de soluciones no dominadas que un nivel bajo.

Además, como se mencionó en la explicación de los tratamientos, en este diseño se analiza el efecto que tiene el factor tamaño de la población a un nivel bajo ($P = 50$) y a un nivel alto ($P = 100$) sobre las variables de respuesta tiempo de ejecución y cantidad de soluciones no dominadas encontradas, mediante dos tipos de validación:

Validación a niveles bajos: Se mantienen los demás factores en su nivel bajo. ($P_c = 0.4$, $P_m = 0.1$).

Validación a niveles altos: Se mantienen los demás factores en su nivel alto. ($P_c = 0.7$, $P_m = 0.2$).

9.5.1 Tiempo de ejecución

En la Figura 36, se presentan los intervalos de confianza del tamaño de la población para la validación a niveles bajos, mientras que en la **Figura 37**, se observan los intervalos correspondientes a la validación a niveles altos. Del análisis de estas dos gráficas, es posible afirmar que un tamaño de población de 100 individuos genera un mayor tiempo de ejecución que un nivel bajo de 50, con lo cual, se corrobora la primera hipótesis planteada para este diseño.

Figura 36

Gráfica de intervalos de población para la variable tiempo a niveles bajos

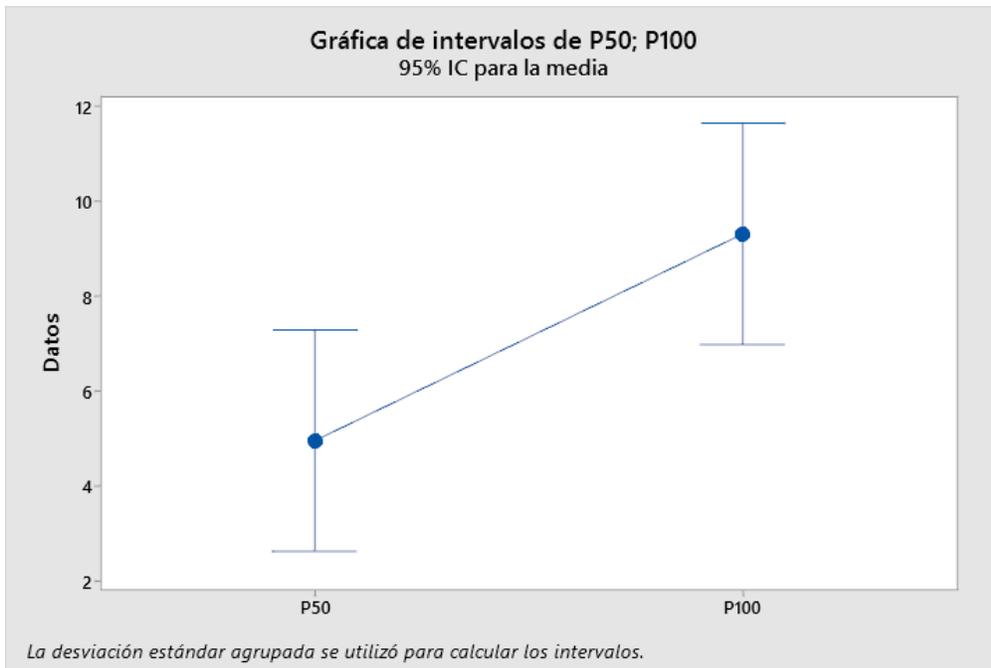
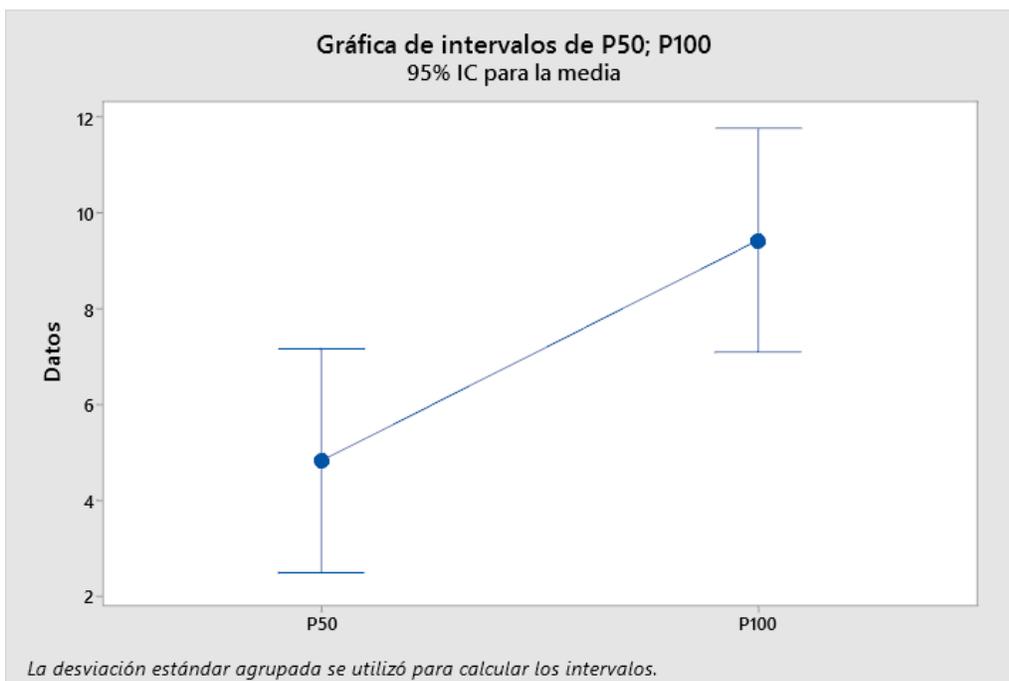


Figura 37

Gráfica de intervalos de población para la variable tiempo a niveles altos



Al entrar a revisar en profundidad los valores obtenidos para las medias, desviaciones e intervalos, contenidos en la **Tabla 17** y **Tabla 18**, se encontraron valores de medias muy similares para ambos tipos de validación; donde una población de 100 individuos con 5 réplicas y un nivel de confianza del 95% genera un menor rendimiento del NSGA-II, con una media de 9 segundos aproximadamente.

Tabla 17

Análisis de la población para el tiempo computacional a niveles bajos

Factor	N	Media	Desv.Est.	IC de 95%
P50	5	4,969	3,744	(2,639; 7,298)
P100	5	9,33	7,29	(7,00; 11,65)

Desv.Est. agrupada = 5,79199

Tabla 18

Análisis del parámetro poblacional para el tiempo computacional a niveles altos

Factor	N	Media	Desv.Est.	IC de 95%
P50	5	4,839	3,721	(2,509; 7,168)
P100	5	9,43	7,30	(7,10; 11,76)

Desv.Est. agrupada = 5,79284

9.5.2 Cantidad de soluciones no dominadas

Por otra parte, al evaluar la cantidad de soluciones encontradas para cada nivel del factor de tamaño de la población, se encontró que no existe evidencia de que dicho factor tenga un efecto significativo sobre esta métrica, con un valor $p = 0.19$, para la validación a niveles bajos y un $p =$

0.25, para la validación a niveles altos. Sin embargo, es probable que la muestra observada no sea lo suficientemente grande para concluir la igualdad de medias; puesto que, al inspeccionar la **Figura 38** y **Figura 39**, se evidencia una notoria diferencia entre las medias.

Figura 38

Gráfica de intervalos de población para la variable cantidad de soluciones a niveles bajos

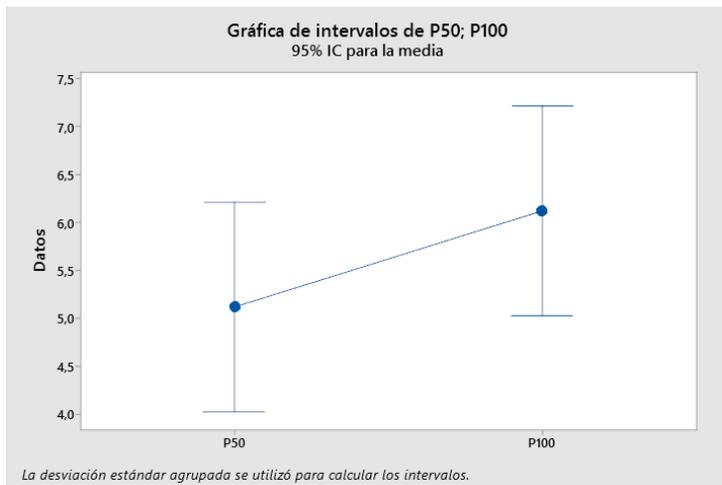
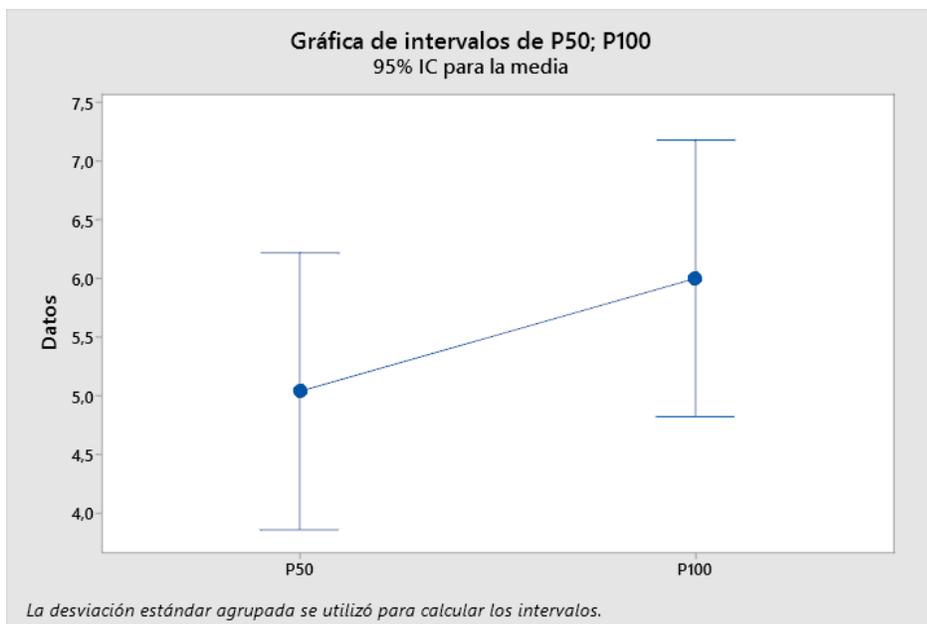


Figura 39

Gráfica de intervalos de población para la variable cantidad de soluciones a niveles altos



Y a su vez, en la **Tabla 19** y **Tabla 20**, se encuentra una media para P100 más alta que la de P50, con un valor aproximado de 6 soluciones encontradas.

Tabla 19

Análisis del parámetro población para la cantidad de soluciones a niveles bajos

Factor	N	Media	Desv.Est.	IC de 95%
P50	5	5,120	2,128	(4,029; 6,211)
P100	5	6,120	3,193	(5,029; 7,211)

Desv.Est. agrupada = 2,71293

Tabla 20

Análisis del parámetro población para la cantidad de soluciones a niveles altos

Factor	N	Media	Desv.Est.	IC de 95%
P50	5	5,040	2,423	(3,863; 6,217)
P100	5	6,000	3,354	(4,823; 7,177)

Desv.Est. agrupada = 2,92603

8.4.Diseño experimental para la probabilidad de cruce

Respecto al parámetro de análisis de la probabilidad de cruce, se proponen las siguientes hipótesis a priori:

1. Un aumento en la probabilidad de cruce resulta en un incremento del tiempo computacional del algoritmo.
2. A mayor valor de probabilidad de cruce se obtiene una menor cantidad de soluciones no dominadas, pero de mejor calidad.

Adicionalmente al estudio del parámetro tamaño de la población, en este apartado se analiza el comportamiento de los tratamientos para el factor probabilidad de cruce a un nivel bajo ($P_c = 0.4$) y a un nivel alto ($P_c = 0.7$) sobre las variables de observación tiempo de ejecución y cantidad de soluciones no dominadas encontradas, por medio de las validaciones:

Validación a niveles bajos: Se mantienen los demás factores en su nivel bajo. ($P = 50$, $P_m = 0.1$).

Validación a niveles altos: Se mantienen los demás factores en su nivel alto. ($P_c = 100$, $P_m = 0.2$).

8.4.1. Tiempo computacional

En la **Figura 40**, se expone un análisis del intervalo de confianza para el parámetro probabilidad de cruce, en una validación de niveles bajos, así mismo en la **Figura 41**, se realizó para niveles altos. De acuerdo con lo anterior, se concluyó que no existe gran diferencia de tiempo computacional para las dos probabilidades a niveles bajos, puesto que, para la probabilidad de 0,4 se presenta un mayor tiempo de ejecución del algoritmo, aunque este no es representativo con respecto al tiempo de la probabilidad 0.7, por ende, se podría aceptar la hipótesis nula con un valor p (0,94), es decir que las medias son iguales para niveles bajos con respecto al tiempo de ejecución del algoritmo.

Figura 40

Gráfica de intervalos de probabilidad de cruce para la variable tiempo a un niveles bajos

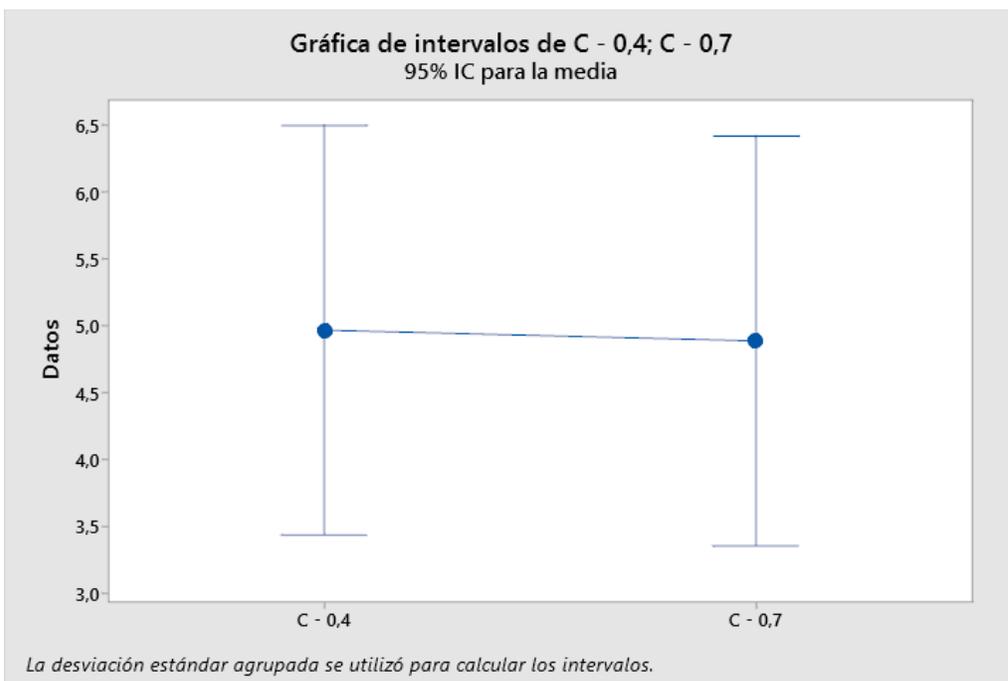
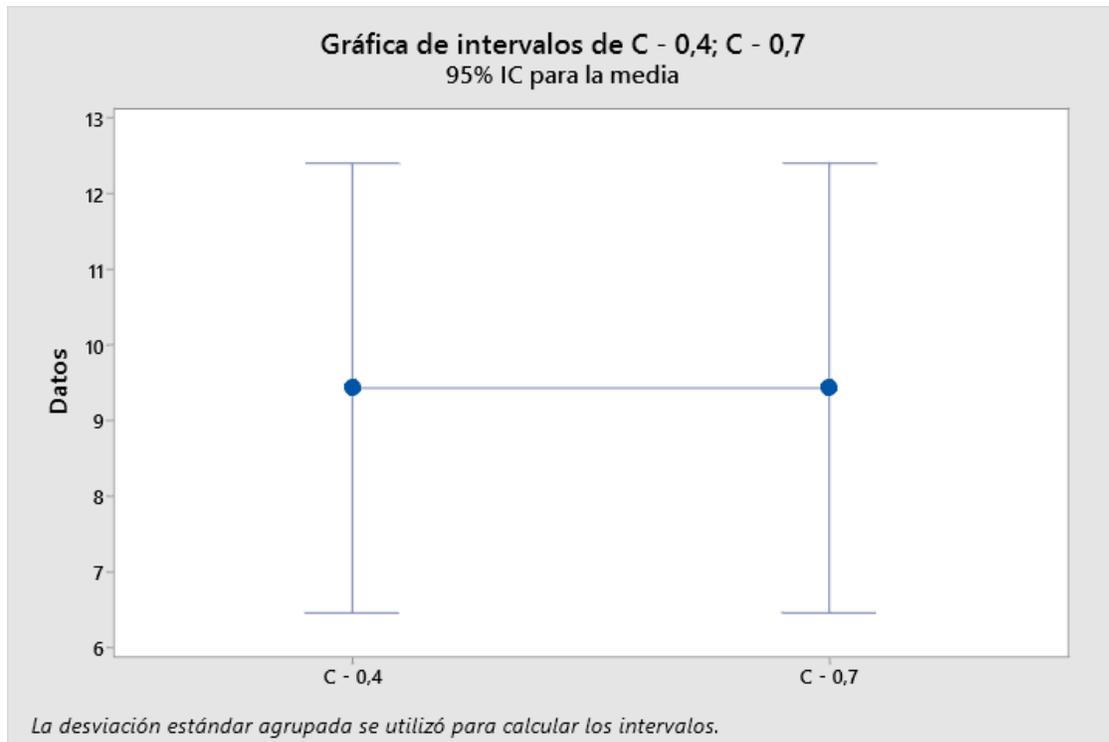


Figura 41

Gráfica de intervalos de población para la variable tiempo a niveles altos



En cuanto al comportamiento de la **Figura 41**, se reafirma la consideración de aceptar la hipótesis nula, puesto que se evidencia una similitud en las medias muy alta, con un valor p (0.99). Por otra parte en la **Tabla 21** y **Tabla 22**, se encontraron valores de medias de 4,8 para validaciones a niveles bajos y 9,4 en validaciones a niveles altos y, también, para los niveles bajos se presenta una desviación promedio de 3,80 en contraste con una desviación promedio para niveles altos de 7,3; es preciso afirmar que para los niveles altos toma más tiempo computacional para el algoritmo NSGA II.

Tabla 21

Análisis de probabilidad de cruce para el tiempo computacional en un nivel bajo

Factor	N	Media	Desv.Est.	IC de 95%
C - 0,4	5	4,969	3,744	(3,440; 6,497)
C - 0,7	5	4,888	3,858	(3,360; 6,417)

Desv.Est. agrupada = 3,8013

Tabla 22

Análisis de probabilidad de cruce para el tiempo computacional en un nivel alto

Factor	N	Media	Desv.Est.	IC de 95%
C - 0,4	5	9,43	7,43	(6,47; 12,39)
C - 0,7	5	9,43	7,30	(6,47; 12,39)

Desv.Est. agrupada = 7,36279

8.4.2. Cantidad de soluciones no dominadas encontradas

En este análisis de intervalo de confianza al parámetro probabilidad de cruce, para la métrica cantidad de soluciones no dominadas, en la **Figura 42** se realizó validación de niveles bajos y en la **Figura 43** para los niveles altos. En conclusión, de las gráficas resultantes se observó que no existe gran diferencia en las medias de las cantidades de soluciones no dominadas, para las dos probabilidades estudiadas a niveles bajos, puesto que, para la probabilidad de 0,4 se encontraron mayor cantidad de soluciones no dominadas, aunque esta diferencia no es representativa con respecto a las cantidades resultantes de la probabilidad 0.7, por ende se podría aceptar la hipótesis nula con una valor p (0,86) para cantidades no dominadas a niveles bajos.

Figura 42

Gráfica de intervalos de probabilidad de cruce para la variable cantidad a un niveles bajos

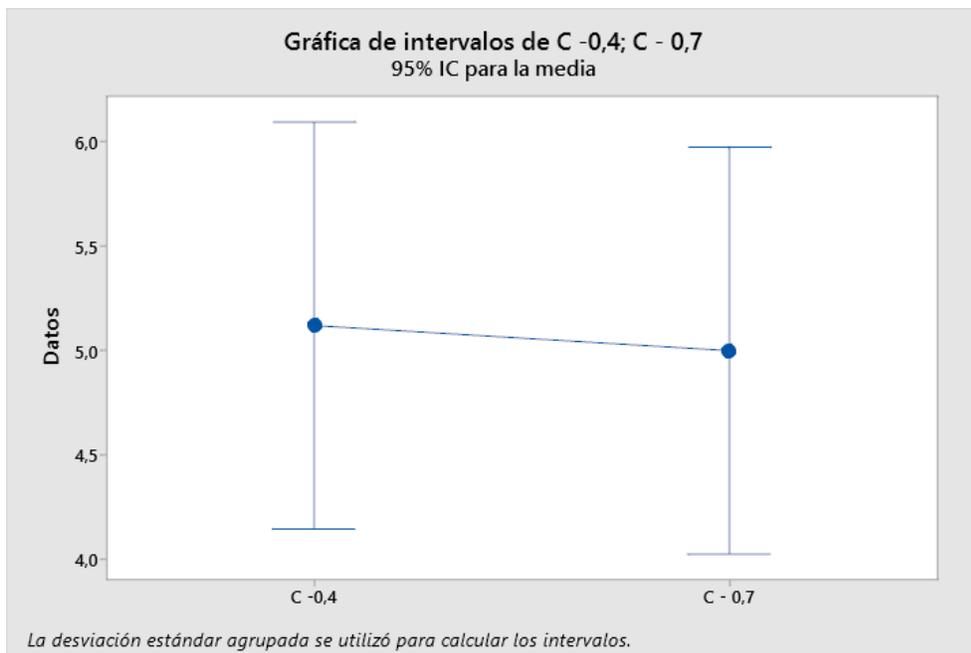
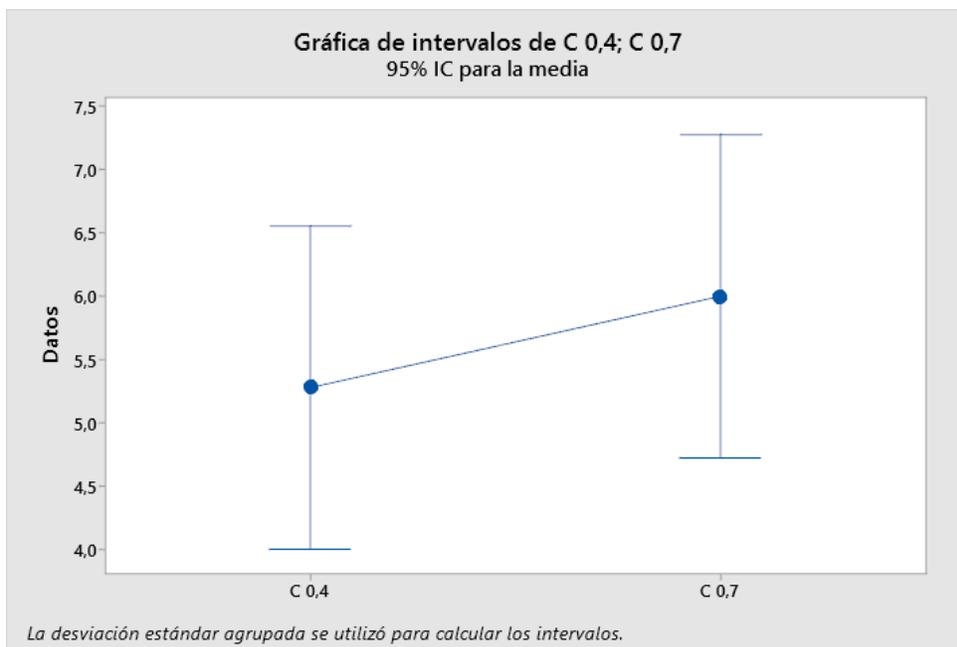


Figura 43

Gráfica de intervalos probabilidad cruce para la variable cantidad a un niveles altos



Del mismo modo, en la **Figura 43**, se representan las cantidades no dominadas para niveles altos. La diferencia en las medias no es significativa para rechazar la hipótesis nula, esta afirmación

está basada en un valor p (0.42), aunque es menor que el valor p de los niveles bajos sigue representando la igualdad de las medias en las cantidades de soluciones no dominadas para los dos niveles de estudio (bajo y alto). En cuanto a las **Tabla 23** y **Tabla 24**, se encontraron valores de medias parecidos para los dos niveles; puesto que, en las desviaciones promedio la diferencia es muy mínima con valores de 2,9 y 3,1, para bajo y alto respectivamente; es preciso afirmar que para los niveles altos se presenta un mejor comportamiento en el rendimientos del algoritmo NSGA II

Tabla 23

Análisis del parámetro probabilidad de cruce para la cantidad de soluciones no dominados en un nivel bajo

Factor	N	Media	Desv.Est.	IC de 95%
P50	5	5,040	2,423	(3,863; 6,217)
P100	5	6,000	3,354	(4,823; 7,177)

Desv.Est. agrupada = 2,92603

Tabla 24

Análisis del parámetro probabilidad de cruce para la cantidad de soluciones no dominados en un nivel alto

Factor	N	Media	Desv.Est.	IC de 95%
C 0,4	5	5,280	2,965	(4,007; 6,553)
C 0,7	5	6,000	3,354	(4,727; 7,273)

Desv.Est. agrupada = 3,16570

8.5. Diseño experimental para la probabilidad de mutación

Respecto al parámetro de análisis de la probabilidad de mutación, se propusieron las siguientes hipótesis a priori:

1. Se considera que el porcentaje de mutación no presenta ningún efecto significativo sobre la métrica del tiempo computacional del algoritmo.
2. Se esperaría que a mayor porcentaje de mutación genere la mayor cantidad de soluciones no dominadas.

En cuanto a los niveles del factor, se comparan las medias de $M = 0.1$ y $M = 0.2$, con los factores P_c y tamaño de la población fijados ya sea en su valor bajo o en su valor alto, dependiendo del tipo de validación.

9.5.3 Tiempo computacional

El análisis del estadístico de prueba p y las gráficas de los intervalos de confianza, **Figura 44** y **Figura 45**, para el factor de probabilidad de mutación en sus niveles $M = 0.1$ y $M = 0.2$ sugiere que la hipótesis nula de igualdad de medias no puede ser rechazada y, por ende, existe una gran probabilidad de que la elección de uno u otro valor para este parámetro no influya en el tiempo total de ejecución del algoritmo NSGA-II.

Figura 44

Gráfica de intervalos de probabilidad de mutación para la variable tiempo a niveles bajos

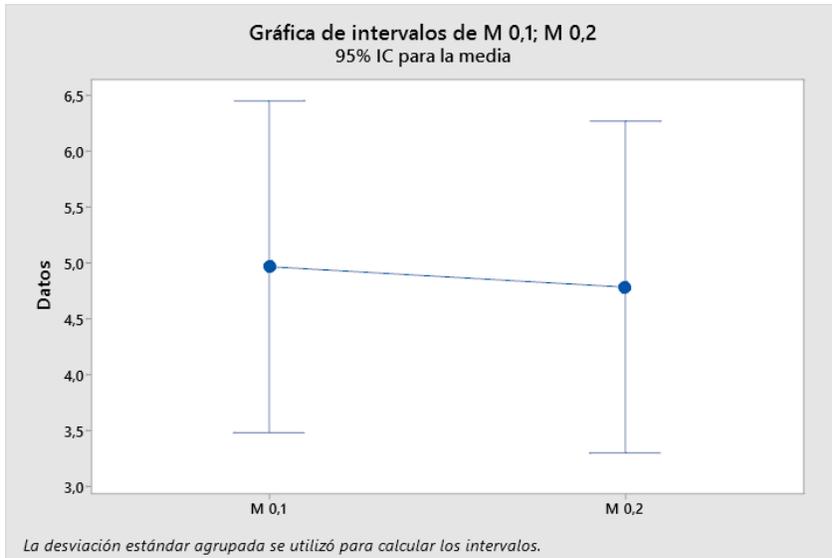
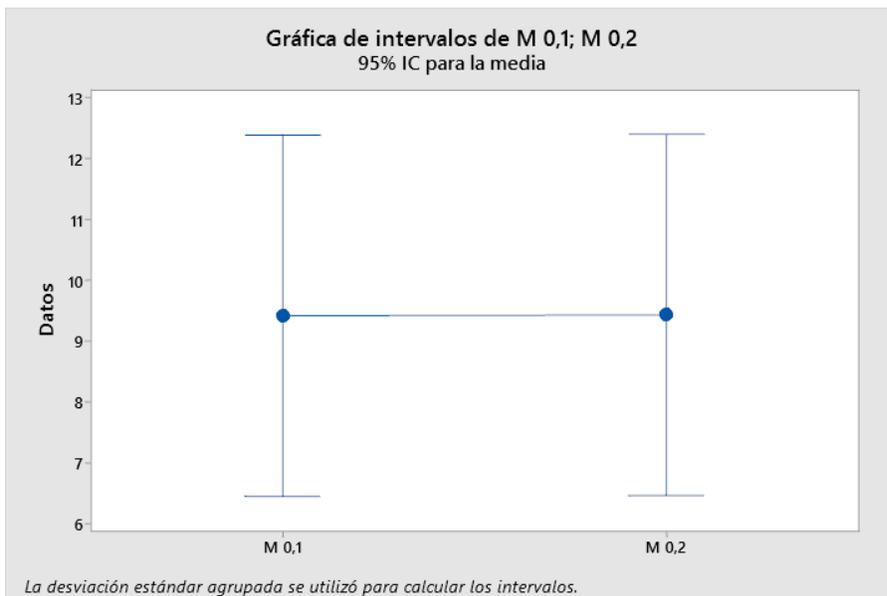


Figura 45

Gráfica de intervalos de probabilidad de mutación para la variable tiempo a niveles altos.



No obstante, al observar detenidamente las tablas de medias generadas por el ANOVA, resumidas en la **Tabla 25** y **Tabla 26**, es posible percibir que la probabilidad de mutación tiende

a gastar un menor tiempo de computación cuando los demás factores se encuentran en su nivel bajo (con una media de 5 segundos, aproximadamente), que cuando están a nivel alto (con una media de 9 segundos).

Tabla 25

Análisis de probabilidad de mutación para el tiempo computacional en un nivel bajo

Factor	N	Media	Desv.Est.	IC de 95%
M 0,1	25	4,969	3,744	(3,485; 6,452)
M 0,2	25	4,786	3,632	(3,303; 6,269)

Desv.Est. agrupada = 3,68831

Tabla 26

Análisis de probabilidad de mutación para el tiempo computacional a niveles altos

Factor	N	Media	Desv.Est.	IC de 95%
M 0,1	5	9,42	7,41	(6,46; 12,38)
M 0,2	5	9,43	7,30	(6,47; 12,39)

Desv.Est. agrupada = 7,35549

8.5.1. Cantidad de soluciones no dominadas encontradas

Del otro lado, al comparar la media del factor de probabilidad de mutación a su nivel $M = 0.1$ con su nivel $M = 0.2$; se encontró que, tanto para la validación a niveles bajos como altos, los estadísticos de prueba son inferiores al nivel de significancia y no presentan evidencia significativa para rechazar la igualdad de las medias, con $p(\text{bajos}) = 0.79$ y $p(\text{altos}) = 0.27$. Además, por una

parte, la visualización de la **Figura 46** refuerza la conclusión anterior a niveles bajos, mientras que la **Figura 47** pareciera dar indicios de que a niveles altos una mutación $M = 0.1$ podría tener un mejor comportamiento para el rendimiento del algoritmo.

Figura 46

Gráfica de intervalos de probabilidad de mutación para la variable cantidad a un nivel bajo

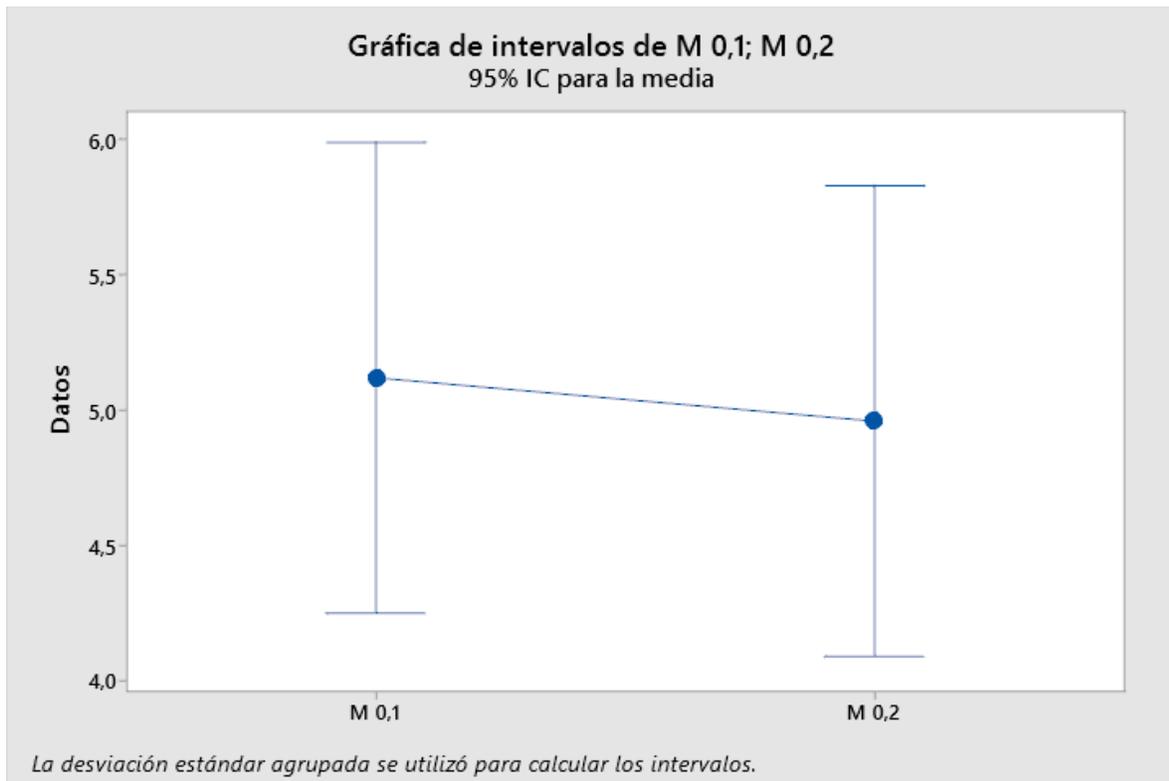
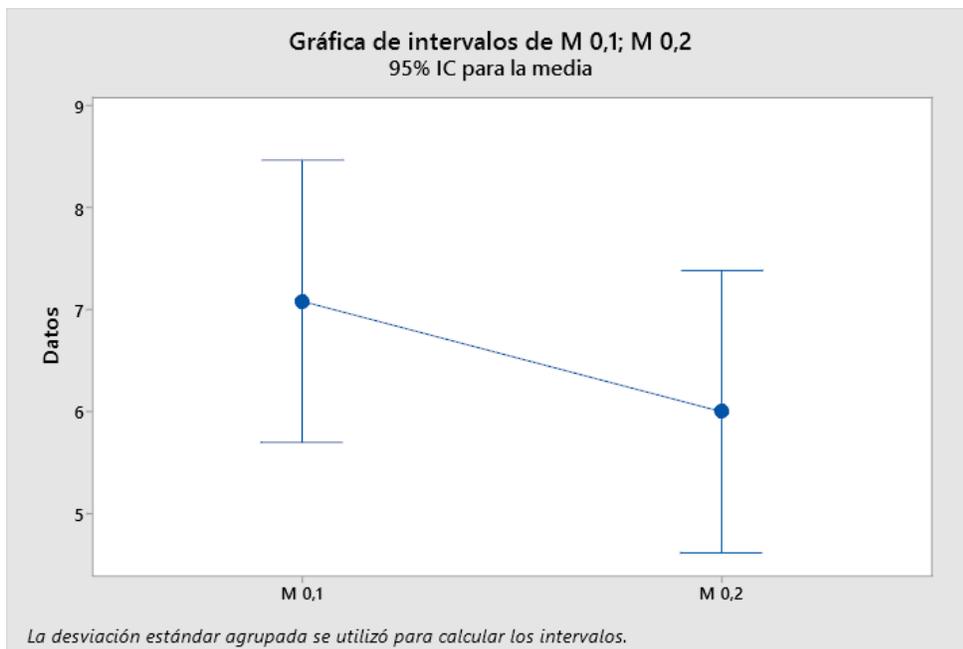


Figura 47

Gráfica de intervalos probabilidad mutación para la variable cantidad a un nivel alto



Desde otro punto de vista, al consultar las tablas de medias del ANOVA, **Tabla 27** y **Tabla 28**, se encuentra una tendencia del algoritmo a encontrar una mayor cantidad de soluciones no dominadas para el factor de probabilidad de mutación, cuando la validación se realiza a niveles altos de los factores bloque.

Tabla 27

Análisis del parámetro probabilidad de mutación para la cantidad de soluciones no dominados en un nivel bajo

Factor	N	Media	Desv.Est.	IC de 95%
M 0,1	5	5,120	2,128	(4,252; 5,988)
M 0,2	5	4,960	2,189	(4,092; 5,828)

Desv.Est. agrupada = 2,15832

Tabla 28

Análisis del parámetro probabilidad de mutación para la cantidad de soluciones no dominados en un nivel alto

Factor	N	Media	Desv.Est.	IC de 95%
M 0,1	5	7,080	3,511	(5,699; 8,461)
M 0,2	5	6,000	3,354	(4,619; 7,381)

Desv.Est. agrupada = 3,43341

Para resumir, se encontró que el algoritmo NSGA-II desarrollado presenta una mayor eficiencia en el tiempo de ejecución para tamaños de población más bajos, en concreto $P = 50$, rechazando la hipótesis nula de igualdad de medias. Por otra parte, a pesar de que para los factores de probabilidad de cruce y mutación no se rechaza la hipótesis de igualdad de medias, se encontró que ambos factores presentan un menor consumo de tiempo de ejecución en las validaciones a niveles bajos. En cuanto a la variable de cantidad de soluciones no dominadas encontradas, se encontró que no existe diferencia significativa que sugiera que un tamaño de población, probabilidad de cruce o probabilidad de mutación tenga mayor efecto sobre el rendimiento del algoritmo que otro, debido a que para cada factor el estadístico de prueba siempre fue mayor al nivel de significancia. Sin embargo, es posible deducir diferencia entre las validaciones a niveles altos y las validaciones a niveles bajos, obteniendo medias más altas para las primeras.

Con el fin de evaluar la calidad de las soluciones encontradas, a continuación, se grafican los valores obtenidos de costos y emisiones para los dos tratamientos que se adaptan a los resultados que ofrecen un mejor rendimiento del algoritmo, obtenidos de la validación de los parámetros anteriormente descrita. Los tratamientos mencionados se ilustran en la **Tabla 29**.

Tabla 29*Tratamientos para análisis de costos y emisiones*

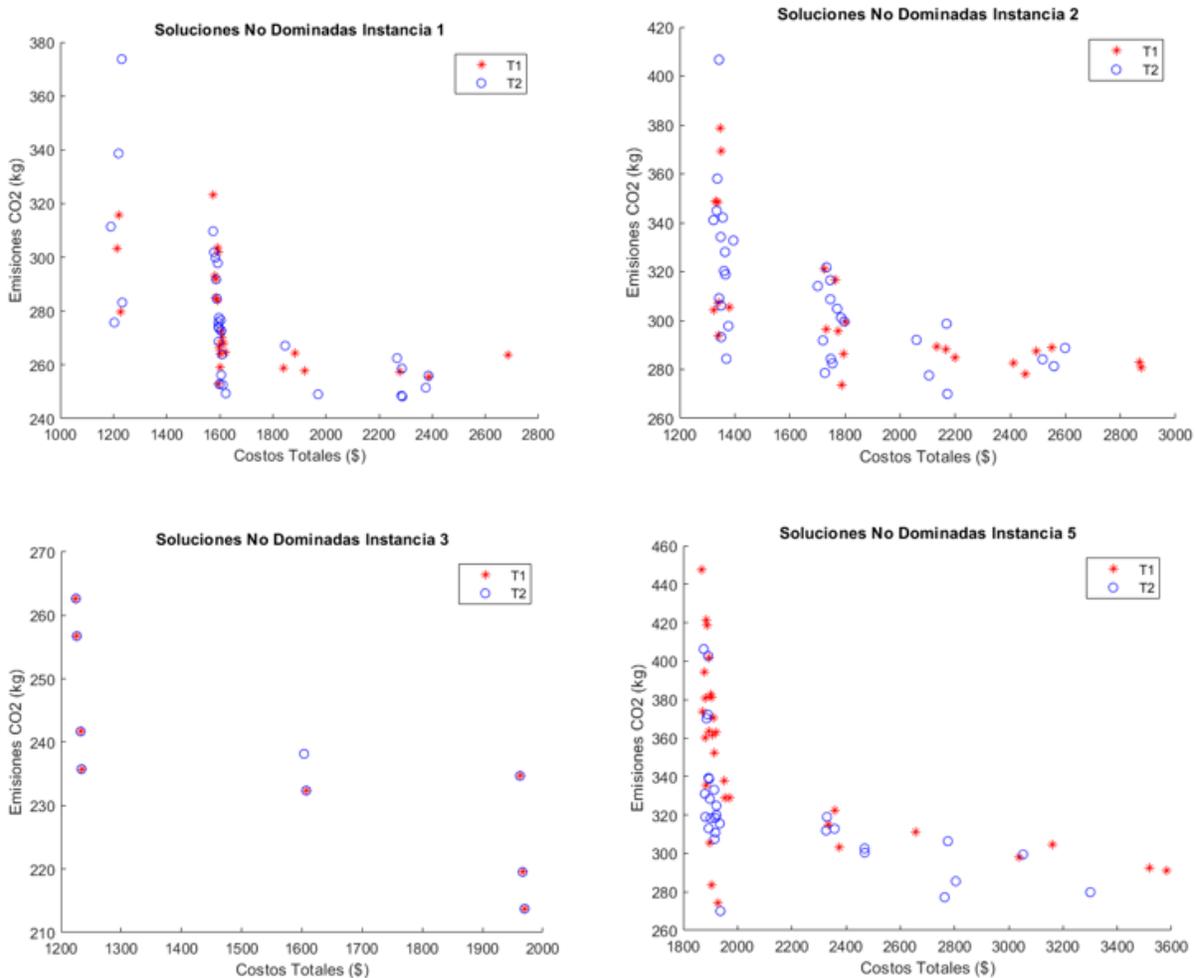
Tratamiento	Tamaño Población	Pc	Pm
1	50	0.4	0.1
7	100	0.7	0.1

En la **Figura 48**, se presenta el Frente de Pareto generado con los valores de los parámetros para los dos tratamientos seleccionados en las mejores cuatro instancias de la cinco iniciales de las pruebas realizadas. Cabe destacar que, para este análisis se considera que las soluciones dadas por un tratamiento dominan a las del otro cuando se encuentren en su mayoría más desplazadas hacia el abajo y hacia la izquierda del plano con ejes de emisiones y costos totales mostrado.

Al revisar las gráficas, se encuentra que en las instancias 1, 2 y 5, el tratamiento 7 (círculos azules) domina al tratamiento 1 (puntos rojos). Mientras que, para la instancia 3, las soluciones no dominadas son prácticamente las mismas para ambos tratamientos.

Figura 48

Frente de Pareto obtenido para los tratamientos 1 y 7 en cuatro instancias de prueba



Finalmente, se resumen los mejores valores de las funciones de costos y emisiones obtenidos en este análisis para cada instancia, mencionando cuál fue el tratamiento que generó dichos valores y el valor asociado a la otra función objetivo (**Tabla 30** y **Tabla 31**).

Tabla 30

Costos mínimos obtenidos para cada instancia

Instancia	Costo mínimo (USD)	Emisiones asociadas (CO2)	Tratamiento
1	1.1903e+03	311.4279	7
2	1.3231e+03	341.0571	7
3	1.2249e+03	262.6670	1 y 7
5	1.8687e+03	447.4191	1

Tabla 31

Emisiones mínimas obtenidas para cada instancia

Instancia	Costo asociado (USD)	Emisiones mínimas (CO2)	Tratamiento
1	2.2871e+03	248.2310	7
2	2.1721e+03	269.9983	7
3	1.9698 + 03	213.7438	1 y 7
5	1.9369e+03	270.0240	7

10. Conclusiones

En la primera fase de la presente investigación, se llevó a cabo una revisión de antecedentes bibliográficos enfocada en comprender la actividad investigativa relacionada con el ruteo de vehículos. En principio, se identificaron como referentes de este campo a autores como: G.

Laporte, Palmer y Bektas, ubicados principalmente en países como China, Estados Unidos e Irán. De igual forma, se evidenció un desarrollo en el planteamiento básico del VRP, ampliando el alcance de los modelos propuestos mediante la incorporación de nuevas variantes como, por ejemplo: restricciones de capacidad de los vehículos (CVRP), ventanas de tiempo (VRPTW) y la consideración de los impactos ambientales (PRP).

Posteriormente, en la etapa de estructuración e incorporación del modelo matemático en GAMS, se validó el correcto funcionamiento del modelo MILP en cada una de las funciones objetivo de costos y consideraciones ambientales, encontrando sus soluciones exactas como problemas mono-objetivo de forma separada. Mientras que para la búsqueda de las soluciones no dominadas del problema completo bi-objetivo, se concluyó que uno de las metaheurística más efectivas para este tipo de diseño es el NSGA-II, por lo que se codificó en MATLAB y se ejecutaron las respectivas pruebas de rendimiento.

Durante estas pruebas, se llegó a la conclusión de que el menor tiempo de ejecución del algoritmo NSGA-II propuesto, se obtiene con una combinación de factores de tamaño de la población, probabilidad de cruce y mutación en sus niveles bajos (50, 0.4 y 0.1, respectivamente). En cambio, para obtener la mayor cantidad de soluciones no dominadas se debe establecer un tamaño de población de 100 individuos, una probabilidad de cruce igual a 0.7 y una probabilidad de mutación de 0.1. Finalmente, al revisar las soluciones no dominadas encontradas en estos 2 tratamientos e identificar los costos mínimos, se demostró que las soluciones generadas por el tratamiento número 7 (con $P = 50$, $C=0.4$ y $M=0.1$) dominaron a las del tratamiento 1 (con $P=100$, $C=0.7$ y $M=0.1$).

11. Referencias Bibliográficas

- Alvarado, C., Herazo, I., Ardila, C., & Donoso, Y. (2005). Aplicación de NSGA-II y SPEA-II para la optimización multiobjetivo de redes multicast. Barranquilla.
- Alvarado, C., Herazo, I., Ardila, C., & Donoso, Y. (Enero de 2005). Aplicación de NSGA-II y SPEA-II para la optimización multiobjetivo de redes multicast. Barranquilla, Colombia: Universidad del Norte de Barranquilla.
- Arranz, J., & Parra, A. (2007). Algoritmos Genéticos. Universidad Carlos III.
- Barrera Navarro, A. R. (2016). Un Algoritmo Evolutivo para el Problema de Distribución de Recursos Post-Desastre Sísmicos en la ciudad de Bucaramanga. Bucaramanga, Santander, Colombia: Universidad Industrial de Santander .
- Barrera, D. (5 de Octubre de 2016). Modelos determinísticos y probabilísticos. Caracas, Venezuela.
- Bektaş, T., & Laporte, G. (Septiembre de 2011). The pollution routing problem. *Science Direct*, Pág. 1232-1250. Obtenido de <https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2191/science/article/pii/S019126151100018X?via%3Dihub#s0060>
- Bello, L. D. (s.f.). *Modelos probabilísticos*. Obtenido de https://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/pluginfile.php/128508/mod_resource/content/0/Tema_4/Modelos_probabilisticos_Caucasia.pdf
- Benaini, A., & Berrajaa, A. (2018). Genetic Algorithm for Large Dynamic Vehicle Routing Problem on GPU. Le Havre, Francia.
- Benaini, A., & Berrajaa, A. (s.f.). Genetic Algorithm for Large Dynamic Vehicle Routing Problem on GPU. Le Havre, Francia.

- Bluem, C., & Roli, A. (2003). Metaheuristics in Combinatorial Optimization: Overview and Conceptual Comparison. *ACM Computing Surveys* , 268-308. Obtenido de https://www.iiia.csic.es/~christian.blum/downloads/blum_rol_i_2003.pdf
- Cabellero, J. E., & Aguilar, M. P. (2019). Modelo de optimización difuso multiobjetivo multiperíodo para el diseño de una red lógica inversa sostenible. Bucaramanga, Colombia .
- Çağrı, K., Tolga, B., Ola, J., & Gilbert, L. (Diciembre de 2014). The fleet size and mix pollution-routing problem. págs. 239-254. Obtenido de <https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2191/science/article/pii/S0191261514001623#b0080>
- Camacho, S., & Ramírez, G. (2019). Un modelo multiobjetivo para el problema de ruteo de vehículos para la distribución de ayudas humanitarias para un sismo en la ciudad de Bucaramanga. Bucaramanga, Santander , Colombia .
- Chong, E. K., & Stanislaw, H. (2001). *An introduction to optimization*. Estados Unidos de América: Wiley-Interscience.
- Clarke, G., & Wright, J. (1964). Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations Research*, 568-581.
- Dantzing, G. B., & Ramser, J. (Octubre de 1959). The Truck Dispatching Problem. *Management Science*, 6, 80-91.
- Davis, L. (1991). *Handbook of genetic algorithms*. New York: Van Nostrand Reinhold.
- Deb, K., Partap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. (2002). A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II.
- Demeuleneester, K., & Herroelen, W. (2002). *Project Scheduling: A Research Handbook*. . Lovania, Bélgica : Series Editor .

Demir, E., Bektaş, T., & Laporte, G. (1 de Febrero de 2014). El problema biobjetivo del enrutamiento de la contaminación. *Science Direct*, 464-478. Obtenido de <https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2191/science/article/pii/S0377221713006486?via%3Dihub#s0140>

Figliozzi, M. A. (Agosto de 2011). Los impactos de la congestión en los niveles de emisión de CO₂ de las redes de distribución de carga urbana con tiempo definitivo : resultados de un estudio de caso en Portland, Oregón. 766-778. Obtenido de <https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2191/science/article/pii/S0968090X10001634>

Franceschetti, A., Honhon, D., Van Woensel, T., Bektaş, T., & Laporte, G. (Octubre de 2013). The time-dependent pollution routing problem. *Science Direct*, 265-293. Obtenido de <https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2191/science/article/pii/S0191261513001446?via%3Dihub#s0045>

Franceschetti, Anna; Demir, Emrah; Honhon, Dorothee; Van Woensel, Tom; Laporte, Gilbert; Stobbe, Mark. (2017). A metaheuristic for the time-dependent pollution routing problem. *European Journal of Operational Research*, 972-991. Obtenido de <https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2191/science/article/pii/S0377221716309511?via%3Dihub#sec0011>

Galvis, J., Jaimes, G., & Quiroga, N. (2011). Estudio cuantitativo de tres aplicaciones del problema de ruteo de vehículos VRP en la Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Santander, Colombia.

Gelves, J. F., & Estévez, R. E. (2019). Un algoritmo colonia de hormigas para el problema de ruteo de vehículos eléctricos con función de carga parcial y ventanas de tiempo. Bucaramanga, Santander, Colombia.

- Gelves, T., Mora, M., & Lamos, D. (2015). *Solución del problema de ruteo de vehículos con demandas estocásticas mediante la optimización por espiral*. Scielo. Obtenido de <https://revistas.uptc.edu.co/index.php/ingenieria/article/view/4626>
- Glover, F. (1986). *Future paths for integer programming and links to artificial intelligence* (Vol. 13). Computers & Operations Research.
- Gutiérrez, H., & Salazar, R. d. (2008). *Análisis y diseño de experimentos* (Segunda Edición ed.). Mc Graw Hill Interamericana.
- Hernández, C., Castilla, G., López, A., & Mancilla, J. (26 de Octubre de 2016). Un algoritmo multiobjetivo NSGA-II para la problemación de los pasos de laminación en caliente de aceros. Ciudad de México, México.
- Hickman, A. (1999). Methodology for calculating transport emissions and energy consumption. *Transport research laboratoru*, 125.
- Jabali, O., Van Woensel, T., & De Kok, A. (Noviembre de 2012). Análisis de los tiempos de viaje y las emisiones de CO₂ en las rutas de vehículos dependientes del tiempo . 1060-1074. Obtenido de <https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-84868660596&origin=inward&txGid=cddb7276f7f0991d912583d88fd67b12#>
- Kara, y., Kara, P., & Kadri Yetis, M. (2007). Vehicle routing problem that minimizes energy. *1er Congreso Internacional de Optimización Combinatoria y Aplicaciones* (págs. 62-71). Ankara: Springer Verlag. Obtenido de <https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-38149094361&origin=inward&txGid=3c8e4c6b2b5b8800bcbd3abd2875bed6>
- Karagul, K., Sahin, Y., Aydemir, E., & Oral, A. (s.f.). A Simulated Annealing Algorithm Based Solution Method for Green Vehicle Routing Problem with Fuel Consumption.

- Koç, Ç., Bektaş, T., Gilbert, L., & Jabalib, O. (2014). A hybrid evolutionary algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems with time windows. 11-27. Obtenido de <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0305054815001197>
- Koç, Ç., Bektaş, T., Jabalib, O., & Gilbert, L. (Diciembre de 2014). Fleet size and the mixed pollution routing problem. 239-254. Obtenido de <https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2191/science/article/pii/S0191261514001623?via%3Dihub#b0250>
- Kramer, R., Subramanian, A., Videl, T., & Anjos F. Cabral, L. (2015). A mathematical approach to the pollution routing problem. *European Journal of Operational Research*, 523-539. Obtenido de <https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2191/science/article/pii/S0377221714009928>
- Kuo, Y. (Agosto de 2010). Use of simulated annealing to minimize fuel consumption for time-dependent vehicle routing problem. *Informática e Ingeniería Industrial*, 157-165. Obtenido de <https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-77955272366&origin=inward&txGid=f192fcf7040b497ec1534f4e3e500710>
- La Republica. (3 de Mayo de 2021). El sector de carga y mensajería creció 39% por aumento en operaciones e-commerce. Obtenido de <https://www.larepublica.co/empresas/el-sector-de-carga-y-mensajeria-crecio-39-por-aumento-en-operaciones-e-commerce-3162884>
- Lange, K. (2010). Combinatorial Optimization. *Applied Probability*, 103-122.
- Laporte, G., Demir, E., & Bektaş, T. (1 de Diciembre de 2012). Una heurística adaptativa de búsqueda de vecindario grande para el problema de enrutamiento de contaminación. *Science Direct*, Pág. 346-359. Obtenido de

<https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2191/science/article/pii/S0377221712004997?via%3DiHub>

Lopez Lezama, J. (2015). Metaheurísticas Aplicadas a la Ubicación y Dimensionamiento Óptimo de Generación Distribuida en Sistemas de Distribución de Energía Eléctrica. *Información tecnológica*, 145-158.

López, J. (26 de Mayo de 2013). Optimización multi-objetivo. Aplicaciones a problemas del mundo real. Obtenido de <https://core.ac.uk/download/pdf/301047986.pdf>

Marulanda, M. (2017). Solución al problema de localización (cflp) a través de búsqueda tabú y relajación lagrangeana, caso de estudio. 55-61.

Osman, I. H., & Laporte, G. (1996). *Metaheuristics: A bibliography*. Annals of Operations Research.

Palmer, A. (2007). The development of an integrated carbon dioxide emissions and routing model for freight vehicles.

Peng, Y., & Wang, X. (2009). Research on a vehicle route schedule to reduce fuel consumption. *Conferencia Internacional sobre Tecnología de Medición y Automatización Mecatrónica* (págs. 825-827). Springer Verlag. Obtenido de <https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-70449380579&origin=inward&txGid=16cda7686e0be6f953294509e4c9bcf7>

Pratap, A., Sammer, A., & Meyarivan, T. (Abril de 2022). A fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II. Associate Member .

Ramos, A., Sánchez, P., Ferrer, J. M., Barquín, J., & Linares, P. (2010). *Modelos Matemáticos de Optimización*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Ramos, A., Sánchez, P., M., F. J., & Linares, P. (2010). Modelo matemáticos de optimización. 8.

Obtenido de http://www.doi.icaei.upcomillas.es/intro_simio.htm

Raphael, K., Nelson, M., Anand, S., & Thibaut, V. (2015). A departure time and speed optimization algorithm for the pollution routing problem. *ScienceDirect*, 782-787.

Rico, D. A., & Rodríguez, H. G. (2019). Solución al pronlema de "Flow-shop" permutado, minimizano los costos de inventario en proceso y penalización debido al retraso de lotes a través de un Algoritmo Genético. Bucaramanga , Santander , Colombia: Universidad Industrial de Satander . Obtenido de <http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/tesis/2019/177092.pdf>

Sánchez García, M. (2000). Optimización combinatoria. *Las matemáticas del siglo XX*. Obtenido de <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo22.pdf>

Schaffer, J. D. (1985). Multiple objective optimization with vector evaluted genetic algorithms. *The 1st International Conference on Genetic Algorithms* , 93-100. Obtenido de <https://dl.acm.org/doi/10.5555/645511.657079>

Scharage, L. (1997). Optimization Modeling with LINDO.

Scott, C., Urquhart, N., & Hart, E. (2010). Research on a vehicle route schedule to reduce fuel consumption. *EvoCOMNET, EvoENVIRONMENT, EvoFIN, EvoMUSART y EvoTRANSLOG, EvoApplications* (págs. 141-150). Estambul: Springer Verlag. Obtenido de <https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-77952373269&origin=inward&txGid=83c6e86c26819bee09e9e1a633224a90>

Suzuki, Y. (Enero de 2011). A new approach to truck routing to reduce fuel consumption and pollutant emissions. 73-77. Obtenido de

<https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0->

[77957019245&origin=inward&txGid=31c503ed272e00d7a11757f864377313](https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-77957019245&origin=inward&txGid=31c503ed272e00d7a11757f864377313)

Úbeda, S., Arcelus, F., & Faulin, J. (Mayo de 2011). Green logistics in Eroski: case study. *Revista Internacional de Economía de la Producción*, 44-51. Obtenido de

<https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0->

[77952581867&origin=inward&txGid=3c178a8f904a9e907d3428aacc009d97](https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-77952581867&origin=inward&txGid=3c178a8f904a9e907d3428aacc009d97)

Vidal, T., Crainic, T., Gendreau, M., & Prins, C. (2014). A unified solution framework for multi-attribute vehicle routing problems. *Revista europea de investigación operativa*, 658-673.

Obtenido de <https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0->

[84892769501&origin=inward&txGid=3447d078de9e33cf489d58aa4c229092](https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-84892769501&origin=inward&txGid=3447d078de9e33cf489d58aa4c229092)

Vitoriano, B. (2007). Decisión con Incertidumbre, decisión multicriterio y teoría de juegos .

Wang, C., & Kuo, Y. (Junio de 2011). VRP optimization minimizing fuel consumption. *Gestión de la calidad ambiental*, 440-450. Obtenido de

<https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0->

[77959282630&origin=inward&txGid=1622e2cf80cc1e0d5c4a0e8a5051a325](https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-77959282630&origin=inward&txGid=1622e2cf80cc1e0d5c4a0e8a5051a325)

Wang, Zhao, Leng, Zhang, & Jiang. (1 de junio de 2020). Low carbon location routing problem based on hyperheuristic evolutionary algorithm of ant colony selection mechanism.

Scopus, pág.

<https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2150/record/display.uri?origin=citedby&eid=2-s2.0->

[85087810966&citeCnt=15&noHighlight=false&sort=cp-](https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2150/record/display.uri?origin=citedby&eid=2-s2.0-85087810966&citeCnt=15&noHighlight=false&sort=cp-)

[f&src=s&nlo=&nlr=&nls=&sid=ddf9e0767e53763bffb584b37d87d0c&sot=b&sdt=cl&](https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2150/record/display.uri?origin=citedby&eid=2-s2.0-85087810966&citeCnt=15&noHighlight=false&sort=cp-f&src=s&nlo=&nlr=&nls=&sid=ddf9e0767e53763bffb584b37d87d0c&sot=b&sdt=cl&)

[cluster=scoprefnameuid%2c%22Zhao%2c+Y.%237406](https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2150/record/display.uri?origin=citedby&eid=2-s2.0-85087810966&citeCnt=15&noHighlight=false&sort=cp-f&src=s&nlo=&nlr=&nls=&sid=ddf9e0767e53763bffb584b37d87d0c&sot=b&sdt=cl&cluster=scoprefnameuid%2c%22Zhao%2c+Y.%237406).

Williams, H. (1999). *Model Building in Mathematical Programming*.

- Yoshinori, S. (2016). A dual purpose metaheuristic approach to solving a practical pollution routing problem. *ScienceDirect*, 143-153.
- Zhang, J., Zhao, Y., Xue, W., & Li, J. (2015). Vehicle path problem with fuel consumption and carbon emission. *Revista Internacional de Economía de la Producción*, 234-242. Obtenido de <https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2191/science/article/pii/S0925527315003692?via%3DiHub#s0010>
- Zhang, Zhao, Zhang, Leng, & Wang. (1 de Diciembre de 2017). Location and routing issue with carbon minimization. *Scopus*, págs. 2768-2777. Obtenido de <https://bibliotecavirtual.uis.edu.co:2150/record/display.uri?eid=2-s2.0-85042863931&origin=resultslist&sort=cp-f&src=s&nlo=&nlr=&nls=&sid=bdf9e0767e53763bffb584b37d87d0c&sot=b&sdt=cl&cluster=scoprefnameuid%2c%22Zhao%2c+Y.%237406636894%22%2ct%2c%22Leng%2>