

Efecto de los procesos de ionización y recombinación en la dinámica de la Inestabilidad de
Rayleigh-Taylor en la magnetósfera terrestre.

Dana Valentina López Noguera

Trabajo de Grado para optar al título de Física

Director

Fabio Duván Lora Clavijo

Físico, M.Sc., Ph.D.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2023

Tabla de Contenido

Introducción	14
1. Objetivos	23
2. Magnetohidrodinámica	24
2.1. Ecuaciones de la MHD	24
2.2. Términos de colisiones	33
2.2.1. Términos de colisiones inelásticas: ionización y recombinación	35
2.2.2. Términos de colisiones elásticas	38
3. Inestabilidad de Rayleigh-Taylor	42
3.1. Conceptos básicos	42
3.1.1. Definición y caracterización de una inestabilidad	42
3.1.2. Descripción de la IRT	43
3.2. Modelo computacional	49
4. Resultados	51
4.1. La inestabilidad de Rayleigh-Taylor en un plasma totalmente ionizado	51
4.2. La inestabilidad de Rayleigh-Taylor en un plasma acoplado por colisiones elásticas	57

INESTABILIDAD DE RAYLEIGH-TAYLOR CON IONIZACIÓN Y RECOMBINACIÓN	3
4.3. La inestabilidad de Rayleigh-Taylor en un plasma acoplado por colisiones inelásticas: ionización y recombinación	64
5. Aplicación a la magnetósfera	71
5.1. La magnetósfera terrestre	71
5.2. Resultados	76
6. Conclusiones	80
Referencias Bibliográficas	83
Apéndices	98

Lista de Figuras

Figura 1. Esquemas que representan los fenómenos de: (a) ionización y (b) recombinación. 36

Figura 2. Inestabilidad de Rayleigh-Taylor desarrollada entre dos fluidos. Donde la densidad superior es mayor a la del fluido inferior $\rho_2 > \rho_1$. (a) Momento antes de la IRT. (b) Comienzo de la formación de estructuras de dedo, debido a la acción de la gravedad. (c) Momentos finales del régimen lineal, cuando la inestabilidad ya se desarrolló completamente. 44

Figura 3. Tasa de crecimiento de la IRT en tres casos: con un campo magnético uniforme (línea sólida), con inclusión de cizalladura magnética (línea de guiones), en un modo de intercambio (línea de guiones y puntos). En todos los casos $|\vec{B}| = 1$, $k = 2\pi$ y $g = 0.03$. Para la cizalladura magnética se tiene $B_x = 0.9$. Tomado de: MacTaggart and Hillier (2020) 48

Figura 4. Evolución de la IRT con $B_0 = 0.01$. Se presenta la densidad del plasma en cuatro tiempos diferentes. Las componentes del campo magnético del plano (x y z) se representan con flechas blancas. Los tiempos mostrados son $t = 7$ (a), $t = 10$ (b), $t = 13$ (c), $t = 15$ (d), $t = 21$ (e). 52

Figura 5. Evolución de la IRT con $B_0 = 0.02$. Se presenta la densidad del plasma en cuatro tiempos diferentes. Las componentes del campo magnético del plano (x y z) se representan con flechas blancas. Los tiempos mostrados son $t = 7$ (a), $t = 10$ (b), $t = 13$ (c), $t = 15$ (d), $t = 21$ (e).

52

Figura 6. Evolución de la IRT con $B_0 = 0.05$. Se presenta la densidad del plasma en cuatro tiempos diferentes. Las componentes del campo magnético del plano (x y z) se representan con flechas blancas. Los tiempos mostrados son $t = 23$ (a), $t = 29$ (b), $t = 34$ (c), $t = 39$ (d), $t = 44$ (e).

54

Figura 7. Razón entre la energía magnética en el tiempo t y el valor inicial de esta para tres sistemas. Azul: $B_0 = 0.01$. Verde: $B_0 = 0.02$. Naranja: $B_0 = 0.05$.

54

Figura 8. Detección de las energías para distintos sistemas. Izquierda: Cálculos en el punto $(0,0)$, justo en la interfase de los fluidos. Derecha: Cálculos en el punto $(0, -0.75)$, en el fluido de baja densidad. Los paneles de arriba [(a) y (d)], en medio [(b) y (e)] y abajo [(c) y (f)] corresponden a los campos magnéticos iniciales $B_0 = 0.01$, $B_0 = 0.02$, $B_0 = 0.05$, respectivamente.

56

Figura 9. Temperatura de los fluidos en el tiempo $t = 13.9$. El campo magnético en todos los casos es $B_0 = 0.05$. Las gráficas de la izquierda corresponden a $\xi = 0.001$, las de en medio a $\xi = 0.1$ y las de la derecha a $\xi = 10$. En los paneles superiores se presenta la temperatura del fluido cargado T_c . En los de en medio se presenta la temperatura del fluido neutro T_n . En los paneles inferiores se muestra la resta entre las magnitudes anteriores, $T_r = T_n - T_c$.

58

Figura 10. Razón entre la energía magnética en el tiempo t y el valor inicial para tres sistemas. El valor del campo inicial es $B_0 = 0.05$. Se ha variado ξ , desde 0 hasta 10. 60

Figura 11. Evolución temporal de la energía magnética (naranja), la cinética del fluido neutro (azul) y la cinética del fluido cargado (verde). 62

Figura 12. El intercambio de calor debido a las colisiones entre partículas en el tiempo $t = 13.9$. El campo magnético en todos los casos es $B_0 = 0.05$. Las gráficas de la izquierda corresponden a $\xi = 0.001$, las de en medio a $\xi = 0.1$ y las de la derecha a $\xi = 10$. En los paneles superiores se presenta la transferencia del fluido cargado al neutro Q_c ; en los inferiores se muestra la transferencia del fluido neutro al cargado Q_n . 63

Figura 13. Evolución temporal de la IRT. En los paneles superiores e inferiores se presentan la densidad de masa del fluido cargado y neutro, respectivamente. Se ha utilizado un campo de $B_0 = 0.05$ y un parámetro $\tau_R = 1 \times 10^{-5}$. Se presentan los tiempos $t = 19.42$, en (a) y (d); $t = 21.30$, en (b) y (e); y $t = 24.97$, en (c) y (f). 65

Figura 14. Razón entre la energía magnética en el tiempo t y el valor inicial para tres sistemas. El valor del campo inicial es $B_0 = 0.05$. Se ha variado τ_R , desde 0 hasta 1×10^{-5} . 66

Figura 15. En la gráfica superior se muestra la densidad de masa del fluido cargado, cuya barra de color es equivalente a la de 13.(c). En el panel intermedio se tienen las tasas de recombinación e ionización. En el inferior se presentan las densidades de masa a lo largo de $z = 0$. El tiempo utilizado es $t = 24.97$. 68

Figura 16. Mediciones tomadas, a través de la interfase, en el tiempo $t = 22.55$. (a) Tasas de ionización (línea sólida) y recombinación (línea punteada). (b) Componentes x del momento lineal de las partículas neutras (línea sólida) cargadas (línea punteada). (c) Densidades de masa de los fluidos neutro (línea sólida) y cargado (línea punteada). (d) Energía en el eje x de neutras (línea punteada) y cargadas (línea sólida). Los colores naranja y azul representan las simulaciones con $\tau_R = 1 \times 10^{-6}$ y con $\tau_R = 1 \times 10^{-5}$, respectivamente.

69

Figura 17. Estructura de una subtormenta magnetosférica. (1) Líneas de campo geomagnético cerradas. (2) Líneas del IMF. (3) Primera región X. (4 y 5) Líneas reconectadas. (6) Segunda región X. (7) Nuevas líneas de campo cerradas. Imagen adaptada de: Lopez (1990).

72

Figura 18. BICI o IRT desarrollada en la magnetocola cercana a la Tierra. Se presenta el campo magnético residual (a) Captura de la simulación en $t = +15 \text{ min}$, se hace un acercamiento a las estructuras de dedo. (b) Captura de la simulación en $t = +45 \text{ min}$. Adaptado de: Sorathia et al. (2020).

75

Figura 19. Evolución temporal de la IRT. En los paneles superiores e inferiores se presentan la densidad de masa del fluido cargado y neutro, respectivamente. Se ha utilizado un campo de $B_0 = 0.05$, un parámetro $\tau_R = 1 \times 10^{-5}$ y $\xi = 0.1$. Se presentan los tiempos $t = 22.19 \text{ [min]}$, en (a) y (d); $t = 25.48 \text{ [min]}$, en (b) y (e); y $t = 28.77 \text{ [min]}$, en (c) y (f). Las líneas punteadas grises demarcan las estructuras de la inestabilidad.

76

Figura 20. Razón entre la energía magnética en el tiempo t y el valor inicial. 77

Figura 21. Mediciones tomadas en el tiempo $t = 28.77$ [min]. (a) Tasas de ionización (rojo claro) y recombinación (verde claro). (b) Densidades de masa de los fluidos neutro (verde) y cargado (rojo). (c) Componente x de la velocidad de las partículas cargadas (naranja) y las neutras (marrón). (d) Componentes x (azul claro) y z (azul oscuro) del campo magnético. 78

Lista de Apéndices

	pág.
Apéndice A. Derivación de la tasa de crecimiento de la Inestabilidad de Rayleigh-Taylor	98
Apéndice B. Derivación de las ecuaciones de la MHD desde la ecuación de Boltzmann	106
Apéndice C. Derivación de las ecuaciones conservativas del modelo de dos fluidos	113

Resumen

Título: Efecto de los procesos de ionización y recombinación en la dinámica de la Inestabilidad de Rayleigh-Taylor en la magnetósfera terrestre. *

Autor: Dana Valentina López Noguera **

Palabras Clave: Inestabilidad de Rayleigh-Taylor (IRT), Magnetohidrodinámica (MHD), Clima Especial, Magnetósfera.

Descripción: El estudio de la Inestabilidad de Rayleigh-Taylor es fundamental, debido a que se presenta en diversos contextos astrofísicos, como la interfase entre la corona y las prominencias solares; y también porque distorsiona las líneas de campo magnético y amplifica la magnitud del mismo. Esto último es clave para el desarrollo de mecanismos de predicción y posible prevención del clima espacial. Ya que el parámetro que mide el nivel de intensidad de las tormentas solares es el grado de deformación de las líneas de campo, el cual se conoce como el índice k_p . Con tal motivo, en este trabajo de grado se analizó el efecto que tienen los términos de colisiones, en particular los asociados a la recombinación y a la ionización, sobre la dinámica de la inestabilidad de RT en la magnetósfera terrestre. Entonces, se estudió el desarrollo de la IRT en un plasma totalmente ionizado y en uno parcialmente ionizado con choques elásticos e inelásticos. Así, se caracterizó el efecto que tienen los dos tipos de interacciones sobre la dinámica del fenómeno. Esto se hizo a través de un análisis energético y morfológico de cada sistema, donde se midió la amplificación del campo magnético, el nivel de distorsión de las líneas de campo y otras magnitudes, como la densidad o las tasas de colisión. Se encontró que la energía magnética crece junto con las frecuencias de choque, ya sean elásticas o inelásticas. Mientras que, en el caso de las inelásticas, se generan oscilaciones del campo en el tiempo, esto como consecuencia de las variaciones en

* Trabajo de grado.

** Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Ph.D.

la densidad del fluido cargado. Finalmente, se modeló la inestabilidad en la magnetocola, donde se estudio la influencia de los procesos de intercambio de masa en su dinámica. Asimismo, se corroboraron las mediciones tomadas de la simulación con las de diferentes subtormentas magnetosféricas, donde se determinó que los datos computacionales encajan correctamente con las observaciones.

Abstract

Title: Effect of ionization and recombination processes on the dynamics of Rayleigh-Taylor instability in the Earth's magnetosphere. *

Author: Dana Valentina López Noguera **

Keywords: Rayleigh-Taylor instability, magnetohydrodynamics, space weather, magnetosphere

Description: The study of Rayleigh-Taylor instability is essential because it occurs in various astrophysical contexts, such as the interface between the corona and solar prominences, and because it distorts magnetic field lines and amplifies their magnitude. This last aspect is crucial for the development of prediction mechanisms and possible prevention of space weather. Since the parameter that measures the level of intensity of solar storms is the degree of deformation of the field lines, which is known as the k_p index, this thesis analyzes the effect that collision terms, particularly those associated with recombination and ionization, have on the dynamics of RT instability in the Earth's magnetosphere. Therefore, the development of IRT in a fully ionized plasma and a partially ionized one with elastic and inelastic collisions was studied, characterizing the effect that the two types of interactions have on the dynamics of the phenomenon through an energetic and morphological analysis of each system, where the amplification of the magnetic field, the level of distortion of the field lines, and other magnitudes, such as density or collision rates, were measured. It was found that magnetic energy increases along with shock frequencies, whether they are elastic or inelastic. In the case of inelastic collisions, field oscillations over time are generated, as a consequence of variations in the density of the charged fluid. Finally, instability in the magnetotail was modeled, studying the influence of mass exchange

* Bachelor Thesis

** Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Fabio Duván Lora Clavijo, Ph.D. Codirector: Juan Manuel Velásquez Cadavid, M.Sc

processes on its dynamics. The measurements taken from the simulation were corroborated with those of different magnetospheric substorms, determining that the computational data fit correctly with the observations.

Introducción

El Sol es una estrella variable que se encuentra en la fase de secuencia principal y según la clasificación espectral, es de tipo G2. Adicionalmente, es la estrella central del Sistema Solar, por lo cual es la fuente de energía más importante para la Tierra y puede influenciarla de múltiples formas. La variabilidad del Sol es una de sus principales características y se manifiesta a través de numerosos fenómenos que son complejos y difíciles de predecir, como las fulguraciones, las eyecciones de masa coronal, el viento solar, las prominencias y las manchas solares. La interacción entre estos sucesos y el campo geomagnético ha perjudicado la vida terrestre previamente. Por ejemplo, en 1989, ocurrió un apagón eléctrico en toda la provincia de Québec, Canadá, durante 9 horas; el cual fue ocasionado por la tormenta geomagnética más intensa de la era espacial Bolduc (2002). De igual forma, a comienzos de febrero de 2022, la aparición de tormentas tipo G1 provocó la falla y caída de 38 satélites de Starlink que habían sido lanzados solo unas semanas antes Kataoka et al. (2022). Es así que existe una necesidad para el estudio y pronóstico de la interacción Sol-Tierra; a esta rama de la física se le denomina *Clima Espacial*, y se enfoca en las condiciones de la magnetósfera, la ionosfera, el viento solar y el Sol que afectan el rendimiento de sistemas tecnológicos y/o ponen en riesgo la salud humana Moldwin (2008).

Algunos de los fenómenos que se ven influenciados por la interacción Sol-Tierra son el clima terrestre y su temperatura, asociada en varias ocasiones al Ciclo Solar Haigh (1999), Lean (2017), Bond et al. (2001); la química y temperatura atmosféricas, que se ve afectada por los SPES

Pettit et al. (2018) y la salud de astronautas y pilotos de avión; quienes presentan enfermedades como el cáncer, las fallas en el sistema nervioso central y los síndromes agudos de radiación Nelson (2016), Chancellor et al. (2014). Por otra parte, la industria satelital también se ve afectada fuertemente por el clima espacial, es así que las aeronaves sufren pérdidas de carácter acumulativo y en gran parte irreversible durante cada evento Hands et al. (2018). El detrimento a la funcionalidad de los satélites puede afectar diversas esferas de la vida en la Tierra, debido a la dependencia continua y creciente de la humanidad en las nuevas tecnologías. En este sentido algunos de los sistemas que se pueden ver afectados son las conexiones telefónicas, la señal de televisión, las transacciones bancarias, las redes de navegación y de vigilancia militar, entre otros Moldwin (2008). Debido a esto, se estima que una *súper-tormenta* solar acarrearía costos de hasta \$ 70 mil millones de dólares para las empresas aeroespaciales. En tanto que, los eventos no-catastróficos, que son más comunes, provocan menos daños. Por ejemplo, las fallas (asociadas a SPEs) en redes eléctricas de Estados Unidos generan pérdidas de entre \$ 5 a \$ 10 mil millones de dólares al año Eastwood et al. (2017).

Es claro que existe una motivación, tanto humana, como económica y tecnológica, para mejorar la comprensión de los fenómenos asociados al clima espacial. En particular, es útil estudiar la interacción entre el plasma proveniente del Sol y el campo geomagnético; ya que, al medir las alteraciones en este campo se determina el nivel de los daños producidos en la tierra. Por ejemplo, a través del índice k_p , el cual se utiliza tanto para decidir si es necesario publicar alertas por tormentas solares, como para estudiar diferentes fenómenos del clima espacial Thomsen (2004). Por lo tanto, se hace necesaria la construcción de modelos tanto analíticos, como numéricos que describan el

comportamiento de los sistemas de plasma. Uno de estos, es la *Magnetohidrodinámica* (MHD), la cual permite entender el comportamiento de los fluidos conductores en presencia de los campos eléctrico y magnético. Esta teoría se caracteriza por unir el electromagnetismo con la mecánica de fluidos. De forma que el sistema de ecuaciones que la representa es una unión de las ecuaciones de Navier-Stokes y las de Maxwell; por consiguiente, este es no-lineal, acoplado y complejo de resolver. Sumado a esto, la MHD facilita la descripción de diferentes fenómenos que son naturales al plasma, como la turbulencia y las inestabilidades. Estas últimas representan un campo de estudio valioso, ya que su presencia va desde los contextos astrofísicos a los de laboratorio; donde algunas de las más relevantes son la de *pinch*, la de *kink*, la magnetorotacional, la de Kelvin-Helmholtz, y la Inestabilidad de Rayleigh-Taylor (IRT).

En particular, la IRT ha sido estudiada desde 1882, cuando se realizaron los primeros desarrollos analíticos sobre la inestabilidad, por Rayleigh (1882). Años después, Taylor (1950) presentó un conjunto de experimentos en los que se evidenció la formación del fenómeno por primera vez. Se considera que la IRT clásica se presenta en la interfase de un sistema cuando se tienen dos fluidos de distinta densidad y el más denso se apoya, en contra de la gravedad, sobre el más ligero Hillier (2018). Con el paso de los años, a esta dinámica básica se le han incorporado otros elementos, como lo son la viscosidad Gerashchenko and Livescu (2016), Mitra et al. (2016), la tensión superficial Pullin (1982), Mikaelian (1996), la compresibilidad Liberatore and Bouquet (2008), Liberatore et al. (2009), la ablación Fu et al. (2023), entre otros. No obstante, la adición que cobra más importancia es la de los campos magnéticos. Ya que, de esta forma se suele desarrollar la inestabilidad en una variedad de contextos astrofísicos y de laboratorio, algunos de estos son:

1. La vida y desarrollo de las capas internas de las estrellas gigantes rojas Eggleton et al. (2006).
2. Los jets relativistas Matsumoto and Masada (2013), Toma et al. (2017).
3. Los discos de acreción Wang and Nepveu (1983), donde se puede estudiar su influencia en el desarrollo de la reconexión magnética Kadowaki et al. (2018).
4. Las explosiones de supernovas Hachisu et al. (1992), donde puede ocasionar fracturas en la simetría del manto de supernova Fryxell et al. (1991).
5. Las nebulosas de viento de púlsar Porth et al. (2014), así como la interfase entre estas y el remanente de la supernova Bucciantini et al. (2004).
6. Los plasmas de laboratorio, con el objetivo de fusión nuclear controlada Peng et al. (2023), Zhu et al. (2019), Zhou (2017).

Adicionalmente, en el ámbito solar, se ha obtenido evidencia observacional de la presencia de la IRT en la interfase entre la corona y las prominencias solares Berger et al. (2017). Allí, la inestabilidad cobra especial importancia por influir en el transporte de energía hacia la corona, lo cual podría contribuir como un mecanismo para explicar el *calentamiento coronal* Popescu Braileanu et al. (2021b), Popescu Braileanu et al. (2021a).

En el entorno de la tierra, se ha estudiado el desarrollo de la IRT en distintas zonas de su estructura. Ya sea en las capas internas, donde afecta la geodinámica a distintas profundidades Fernandez and Kaus (2015), Korenaga (2005); o en la ionósfera, donde se ha presentado evidencia que vincula a la IRT como un proceso relevante en el fenómeno de Propagación Ecuatorial F Kelley

et al. (1976), Kelley (1989). Con respecto a la magnetósfera, se propuso que la frontera entre esta y la corriente de plasma proveniente del viento solar podría presentar inestabilidades de RT si la perturbación está en la categoría G4 o en una mayor Barthel and Sowle (1964). Además, en la magnetopausa se mostró que la inestabilidad se puede presentar, bajo las siguientes condiciones: aceleraciones del plasma solar mayores o iguales a $10^5 \text{ [cm/s}^2\text{]}$, cuya perturbación dure de 1 a 2 minutos y se ubique en una magnetopausa con baja cizalladura magnética (LSM, por sus sigla en inglés) Gratton et al. (1996). Así, esta zona y sus alrededores sienten los efectos de la IRT, como la distorsión de las líneas de campo magnético. Esto último es de especial importancia, ya que aporta en el estudio de mecanismos para el diagnóstico y la predicción del clima espacial. Sobre este tema, también se ha considerado la acción conjunta entre la IKH y la IRT como un posible mecanismo que contribuye al transporte de momento y energía en la LSM Farrugia et al. (1998).

La existencia de una inestabilidad combinada KH-RT también se ha estudiado en otras zonas, entre estas, el sistema Magnetósfera-Ionósfera electrostático Yamamoto (2008), y la magnetopausa bajo acción del viento solar por Guglielmi et al. (2010), quienes considera que la inestabilidad se puede plantear como un mecanismo que permita la penetración ocasional de plasma solar en las capas terrestres Guglielmi et al. (2010). De igual forma se ha estudiado la IRT en la magnetósfera interna, específicamente en la plasmapausa; y se concluyó que la inestabilidad crece rápidamente si el gradiente de densidad cambia rápido, en consecuencia la plasmapausa tiende a ensancharse Richmond (1973). Por otra parte, la presencia de la inestabilidad de intercambio y *ballooning* (BICI) en la magnetocola ha sido investigada más extensivamente. Este fenómeno tiene una dinámica análoga a la de la IRT y las definiciones que manejan los autores son ambiguas

Satyanarayana et al. (1984); Ferrière (2001); Ma et al. (2016); Pritchett and Coroniti (2010); Hassam (1992). La BICI ha sido simulada en el contexto terrestre en varias ocasiones Panov et al. (2012a); Panov and Pritchett (2018); Zhu and Raeder (2013); Sorathia et al. (2020). Adicionalmente, las observaciones tomadas durante eventos solares evidencian rastros de este tipo de inestabilidad, los cuales también son consistentes con el desarrollo de la IRT Panov et al. (2012b); Panov and Pritchett (2018); Panov et al. (2022).

En general, las investigaciones de la IRT suelen ser desarrolladas en el marco de los plasmas totalmente ionizados (PTI), ya que es la formulación más sencilla de usar analítica y computacionalmente. Además, en muchos casos se adapta correctamente a los fenómenos físicos Isobe et al. (2006) y permite generar preguntas acerca de las ideas clásicas de la inestabilidad Walsh (2022). No obstante, las extensiones de la teoría MHD permiten considerar las interacciones con las partículas neutras, lo cual se adapta mejor a la realidad de la IRT en algunos contextos. Por ejemplo, en el estudio de las prominencias solares es relevante, ya que su grado de ionización es del 10%, de forma que la mayoría de las partículas no están cargadas Hillier (2018). En general, existen dos formas de abordar el problema de los Plasmas Parcialmente Ionizados (PPI). El primero de estos consiste en trabajar con las ecuaciones de la MHD ideal y agregar las interacciones entre partículas cargadas y neutras por medio del término de difusión ambipolar en una Ley de Ohm modificada. Díaz et al. (2014), Khomenko et al. (2014). La segunda forma utiliza el tratamiento multi-fluido, que consiste en considerar las partículas neutras como un fluido y las cargadas (iones y electrones) como otro, el cual se acopla gracias a la fuerza electromagnética Bittencourt (2013). Este tratamiento se ha aplicado a diversos sistemas, como los PPI densos y polvorientos Birk

(2002). Asimismo, se ha mostrado que al tener en cuenta la ionización parcial en el régimen lineal se obtienen dos modos inestables, asociados a cada fluido, cuya tasa de crecimiento se ve disminuida. Además, la escala de tiempo para el desarrollo de la IRT en plasmas parcialmente ionizados es mucho mayor a la de los PTI. Así, se considera que las colisiones en los PPI son clave para estudiar la Inestabilidad Díaz et al. (2012). Para revisar una recopilación de las ideas anteriores ver Leake et al. (2014), donde se repasa el modelo PPI y se muestra su aplicación en la cromósfera solar y en la Ionósfera-Termósfera terrestre. Este trabajo abarca desde la construcción de las ecuaciones hasta la realización de simulaciones de la IRT.

En los últimos años, se ha procurado investigar el efecto que tienen numerosos fenómenos no-ideales en la dinámica de la inestabilidad, como lo son la ionización parcial, la compresibilidad y la estratificación Liberatore and Bouquet (2008), Liberatore et al. (2009), la cizalladura magnética Ruderman et al. (2014), las rotaciones al sistema Baldwin et al. (2015), la viscosidad Gerashchenko and Livescu (2016), Doludenko et al. (2019), entre otros. No obstante, son pocos los trabajos que se desarrollan con la incorporación de los términos de ionización y recombinación. En particular, se han realizado investigaciones que indagan sobre la importancia que tienen tales procesos; donde se concluye que el efecto no es sustancial en las primeras etapas de desarrollo de la IRT, pero conlleva a la formación de estructuras densas de plasma en sus etapas secundarias. Adicionalmente, gran parte de la energía gravitacional se transforma en energía magnética, lo cual permite generar un mecanismo de amplificación del campo magnético Popescu Braileanu et al. (2021a), Popescu Braileanu et al. (2021b), Popescu Braileanu et al. (2021c) . Sin embargo, estos trabajos se han desarrollado

en el marco de la interfase entre la corona y las prominencias solares.

En este trabajo de grado se examinó el desarrollo de la IRT desde distintos enfoques de la teoría MHD. Lo cual permitió entender a detalle el funcionamiento de la inestabilidad y el impacto que tiene la ionización parcial en ella, esto desde dos tipos de acoplamiento: las interacciones elásticas y las inelásticas. Con tal objetivo, se completaron varias actividades. Inicialmente, se reproducen las ecuaciones de la MHD, desde la teoría cinética de Boltzmann y en el marco de trabajo de dos fluidos. De igual forma, se desarrolló un análisis de la Inestabilidad de Rayleigh-Taylor desde la teoría de perturbaciones, lo cual permitió comprender su etapa lineal mejor.

Posteriormente, para el desarrollo de la fase computacional, se construyeron condiciones iniciales y de frontera apropiadas para la generación de la IRT. Lo anterior se implementó en el código MAGNUS, para lo cual fue necesaria la construcción de dos nuevos módulos en el mismo: uno para ejecutar la inestabilidad y otro para el análisis energético de esta. Asimismo, se incorporaron los procesos de ionización y recombinación en MAGNUS. A partir de esto, se realizaron tres tipos de simulaciones: con un plasma totalmente ionizado, con uno parcialmente ionizado acoplado por colisiones elásticas y uno parcialmente ionizado con interacciones inelásticas. Los resultados obtenidos se examinaron desde el punto de vista energético y se compararon entre sí, así como con otras publicaciones del tema. Finalmente, se aplicaron los conocimientos aprendidos al problema de la IRT en la magnetósfera terrestre. Así, se pudo dar una interpretación a los efectos de la ionización parcial y a los cambios de la densidad de masa en esta zona afectada por el clima espacial.

Por último, se describe la organización que maneja el presente trabajo. En el segundo

capítulo se reproducen los aspectos básicos de la magnetohidrodinámica (MHD), y se derivan las ecuaciones que la caracterizan, se hace énfasis en el enfoque de dos fluidos y en el acoplamiento de estos. Posteriormente, en el tercer capítulo se hace una descripción de la Inestabilidad de Rayleigh-Taylor clásica, y se refiere al apéndice 1 para su desarrollo en la fase lineal. Adicionalmente, se explica el modelo computacional que se utiliza en las siguientes secciones. En el cuarto capítulo, se presentan los resultados y la interpretación de las simulaciones realizadas con un PTI y un PPI. Luego, en el quinto capítulo, se realiza la extrapolación de las secciones previas a la magnetósfera terrestre; se explica el funcionamiento de la IRT en esa zona y se exponen los resultados obtenidos. Por último, se encuentran la discusión y respectivas conclusiones en el sexto capítulo. Se finaliza el documento con la bibliografía y tres apéndices, 1, 2 y 3.

1. Objetivos

Objetivo General

Analizar los efectos que tienen los procesos de recombinación e ionización sobre la dinámica de la Inestabilidad de Rayleigh Taylor en un plasma parcialmente ionizado.

Objetivos Específicos

1. Reproducir las ecuaciones de la MHD para dos fluidos.
2. Construir condiciones iniciales y de frontera que permitan la generación de la Inestabilidad de Rayleigh-Taylor.
3. Resolver las ecuaciones de la MHD con las condiciones apropiadas para la IRT, a través del código MAGNUS.
4. Realizar un análisis energético de la IRT, en términos de los parámetros de colisiones entre especies.
5. Interpretar los resultados obtenidos.

2. Magnetohidrodinámica

2.1 Ecuaciones de la MHD

La magnetohidrodinámica (MHD) es un modelo que permite estudiar el comportamiento y las propiedades de los fluidos conductores, así como su interacción con los campos electromagnéticos. El conjunto de ecuaciones que representa esta teoría se puede ver como la suma de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo y las de Navier-Stokes de la mecánica de fluidos. A partir de tal sistema se pueden modelar diversas sustancias, una de ellas es el plasma. El cual se define como un gas ionizado macroscópicamente neutro que evidencia fenómenos colectivos Bittencourt (2013). En general, un plasma puede ser totalmente ionizado o parcialmente ionizado. En el primer caso sus componentes son electrones libres e iones; mientras que en el segundo caso además de tener electrones e iones, presenta partículas neutras. Cada una de estas especies se caracteriza por una función de distribución, a través de la cual el fluido se encuentra completamente determinado,

$$f_{\alpha} = f_{\alpha}(\vec{v}, \vec{r}, t), \quad (1)$$

donde el subíndice indica el tipo de partícula, y \vec{v} , \vec{r} son la velocidad y la posición de la misma Braileanu (2020). Al derivar la función (1), se obtiene la ecuación integrada de Boltzmann,

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_{\alpha} \langle g \rangle_{\alpha}) + \nabla \cdot (n_{\alpha} \langle g \vec{v} \rangle_{\alpha}) - \frac{n_{\alpha}}{m_{\alpha}} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} g \rangle_{\alpha} = \int g \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3v, \quad (2)$$

donde n_{α} es el número de partículas de la especie, definido como el momento cero de de

la función de distribución; m_α es la masa de la partícula, \vec{F} es la fuerza total que interactúa con el sistema; ∇ y $\nabla_{\vec{v}}$ representan el operador nabla en el sistema de coordenadas cartesianas y en el espacio de velocidad, respectivamente. Por otra parte, el lado derecho de (2) representa el cambio que se da en la función de distribución de las partículas α debido a sus interacciones con las otras especies. Es posible derivar las ecuaciones de la MHD desde la teoría cinética; esto al encontrar los diferentes momentos de la ecuación de Boltzmann (2). Para lo cual se debe tomar el valor de g como diferentes potencias de \vec{v} e integrar en el espacio de velocidades Goedbloed et al. (2019). Así, se debe expandir (2), de acuerdo a,

$$\bullet \quad g = m_\alpha \text{ (masa)}, \quad \bullet \quad g = m_\alpha \vec{v}_\alpha \text{ (momento)}, \quad \bullet \quad g = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \text{ (energía)}.$$

Este desarrollo se encuentra detallado en el apéndice 2.

La velocidad de la partícula \vec{v} se puede ver como la suma de dos velocidades,

$$\vec{v} = \vec{C}_\alpha + \vec{u}_\alpha, \tag{3}$$

donde $\vec{u}_\alpha = \langle \vec{v} \rangle_\alpha$ es una velocidad macroscópica, que ha sido promediada en las partículas α y \vec{C}_α es una cantidad relativa entre la velocidad de una partícula y la del fluido y está asociada a los movimientos aleatorios de la especie. Goedbloed et al. (2019) Además, se debe tener en cuenta que $\langle \vec{C}_\alpha \rangle_\alpha = 0$. Los tensores de presión y de calor se relacionan entonces con la velocidad relativa, de manera que,

$$\mathbb{P} = n_\alpha m_\alpha \langle \vec{C}_\alpha \vec{C}_\alpha \rangle_\alpha, \quad (4)$$

$$\vec{Q} = \frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle C_\alpha^2 \vec{C}_\alpha \rangle_\alpha, \quad (5)$$

donde $\vec{C}_\alpha \vec{C}_\alpha$ es un producto tensorial. Adicionalmente, \mathbb{P} se puede separar en dos partes,

$$\mathbb{P}_\alpha = \mathbb{M}_\alpha + p_\alpha \mathbb{I}, \quad (6)$$

donde p_α se define según,

$$p_\alpha = \frac{n_\alpha m_\alpha \langle C_\alpha^2 \rangle}{N}, \quad (7)$$

y se denomina como presión cinética escalar, la cual contribuye isotrópicamente a \mathbb{P} . Además, \mathbb{M}_α es el tensor de viscosidad, la multiplicación de $n_\alpha m_\alpha$ es la densidad de masa de la partícula y N es el número de grados de libertad en el sistema.

Teniendo en cuenta estos conceptos, se tiene que el sistema que modela la MHD para la especie de partículas α se compone de tres ecuaciones que dan la evolución temporal de la densidad de masa (8a), el momento lineal (8b) y la energía (8c),

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{u}_\alpha) = S_\alpha, \quad (8a)$$

$$\rho_\alpha \frac{D\vec{u}_\alpha}{Dt} = q_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + m_\alpha n_\alpha \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{M}_\alpha - \nabla p_\alpha + \vec{R}_\alpha - \vec{u}_\alpha S_\alpha, \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} P_\alpha \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N+2}{2} P_\alpha \right) \vec{u}_\alpha + \mathbb{M}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \vec{Q}_\alpha \right] = \\ n_\alpha q_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot \vec{E} + \rho_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot \vec{g} + H_\alpha, \end{aligned} \quad (8c)$$

en donde se utiliza el operador derivada lagrangiana $\frac{D}{Dt}$, que se interpreta como la variación en el tiempo observada desde el marco de referencia de la velocidad promediada \vec{u}_α . Además, se ha remplazado la fuerza \vec{F} como una suma de las fuerzas gravitacional y electromagnética. Los términos S_α , \vec{R}_α y H_α están relacionados con los cambios en la masa, el momentum y la energía de la especie que se den debido a las colisiones con otras partículas y se definen según,

$$S_\alpha = m_\alpha \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3v, \quad (9)$$

$$\vec{R}_\alpha = m_\alpha \int \vec{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3v, \quad (10)$$

$$H_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} \int v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3v. \quad (11)$$

A partir de las ecuaciones (8), se puede obtener el modelo para los plasmas que no están totalmente ionizados, en los cuales $\alpha = \{i, e, n\}$. En este caso se tienen nueve ecuaciones que corresponden a la densidad de masa (12), el momento lineal (13) y la energía (14),

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n u_n) = S_n, \quad (12a)$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_e \mathbf{u}_e) = S_e, \quad (12b)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{u}_i) = S_i, \quad (12c)$$

$$\rho_n \frac{D\vec{u}_n}{Dt} + \nabla \cdot (\mathbb{P}_n) = \rho_n \vec{g} + \vec{R}_n - \vec{u}_n S_n, \quad (13a)$$

$$\rho_e \frac{D\vec{u}_e}{Dt} + \nabla \cdot (\mathbb{P}_e) = q_e n_e (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + \rho_e \vec{g} + \vec{R}_e - \vec{u}_e S_e, \quad (13b)$$

$$\rho_i \frac{D\vec{u}_i}{Dt} + \nabla \cdot (\mathbb{P}_i) = q_i n_i (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + \rho_i \vec{g} + \vec{R}_i - \vec{u}_i S_i, \quad (13c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 + e_n \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 + e_n \right) \vec{u}_n + \mathbb{P}_n \cdot \vec{u}_n + \vec{Q}_n \right] = \rho_n \vec{u}_n \cdot \vec{g} + H_n, \quad (14a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_e u_e^2 + e_e \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_e u_e^2 + e_e \right) \vec{u}_e + \mathbb{P}_e \cdot \vec{u}_e + \vec{Q}_e \right] = n_e q_e \vec{u}_e \cdot \vec{E} + \rho_e \vec{u}_e \cdot \vec{g} + H_e, \quad (14b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_i u_i^2 + e_i \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_i u_i^2 + e_i \right) \vec{u}_i + \mathbb{P}_i \cdot \vec{u}_i + \vec{Q}_i \right] = n_i q_i \vec{u}_i \cdot \vec{E} + \rho_i \vec{u}_i \cdot \vec{g} + H_i, \quad (14c)$$

como se puede ver, se ha introducido una nueva cantidad, la energía interna de la partícula (e_α), la cual está relacionada con la presión cinética escalar según,

$$e_\alpha = \frac{p_\alpha}{\gamma - 1}, \quad (15)$$

$$\text{donde } \gamma = \frac{N+2}{N}, \quad (16)$$

y γ es un parámetro llamado el índice adiabático. De forma que también se puede expresar la energía interna como $e = N p_\alpha / 2$.

El conjunto de ecuaciones compuesto por (12), (13), (14) es complicado de resolver desde un punto de vista analítico o computacional. Por esto, se hace necesario disminuir el número de ecuaciones a trabajar, si se desea examinar un plasma parcialmente ionizado. Es posible hacer esto al utilizar las ecuaciones de la MHD para un solo fluido, en cuyo caso se debe incluir la Ley de Ohm modificada, que tiene en cuenta las interacciones entre las partículas cargadas y las neutras a través del término de difusión ambipolar Díaz et al. (2014), Khomenko et al. (2014). No obstante, se puede estudiar este tipo de plasma de otra forma, al considerar que el sistema está constituido por dos fluidos, donde el primero tiene solo partículas neutras y el segundo está compuesto de las especies cargadas, esto es, los electrones y los iones Ballester et al. (2018), Bittencourt (2013).

Es importante tener en cuenta que las ecuaciones de la MHD, junto a las ecuaciones de Maxwell, no suelen ser utilizadas en su forma general. Usualmente se utilizan distintos argumentos físicos para simplificarlas conforme al problema tratado. Una de las aproximaciones más usadas consiste en considerar que el plasma describe movimientos de bajas velocidades, es decir, $v_0 \ll c$, a partir de lo cual se justificará la omisión del término de corrientes de desplazamiento, $\partial \vec{E} / \partial t$. Para mostrar esto se realiza un análisis dimensional, Bittencourt (2013), Shin et al. (2022),

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \sim \frac{1}{c^2} \frac{E_0}{t_0} \sim \frac{v_0 E_0}{c^2 l_0},$$

donde l_0 y t_0 son la longitud y el tiempo característico del sistema. Se realiza algo similar

mediante la ecuación de Faraday,

$$\frac{E_0}{l_0} \sim \frac{B_0}{t_0} \sim \frac{v_0}{l_0} B_0.$$

A partir de esto se muestra que,

$$\frac{v_0}{c^2} \frac{E_0}{l_0} \sim \frac{v_0^2}{c^2} \frac{B_0}{l_0} \ll \frac{B_0}{l_0},$$

donde el último paso está claro, ya que la velocidad debe ser mucho menor que c . De esta forma se pueden omitir las corrientes de desplazamiento,

$$\frac{1}{c^2} \left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| \ll \left| \nabla \times \vec{B} \right|,$$

y las leyes de Maxwell quedan finalmente como,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (17a)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}. \quad (17b)$$

Se puede notar que la forma que toma la ecuación de Ampère indica que $\nabla \cdot \vec{j}$, es decir, la ecuación de conservación de la carga en la ausencia de cambios macroscópicos a ρ_q . Adicionalmente, (17b) también permite escribir la fuerza de Lorentz como,

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} = -\nabla \cdot \left(\frac{B}{2\mu_0} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}\vec{B} \right).$$

Una vez se tiene en cuenta la aproximación descrita, se puede obtener el sistema de ecuaciones para el modelo de dos fluidos. Para el cual, se considerará que el fluido cargado es una suma de la especie de iones y la de electrones. Mientras que, el fluido neutro compone todo tipo de partículas sin carga. Las seis ecuaciones en su forma conservativa se presentan a continuación (su derivación explícita se encuentra en el apéndice 3) donde (18), (19), (20) corresponden a la continuidad de la masa, del momento lineal y de la energía, respectivamente,

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n \vec{u}_n) = S_n, \quad (18a)$$

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_c \vec{u}_c) = S_c, \quad (18b)$$

$$\frac{\partial (\rho_n \vec{u}_n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n \vec{u}_n \vec{u}_n + \mathbb{P}_n) = \rho_n \vec{g} + \vec{R}_n, \quad (19a)$$

$$\frac{\partial (\rho_c \vec{u}_c)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_c \vec{u}_c \vec{u}_c + \mathbb{P}_c) = \vec{j} \times \vec{B} + \rho_c \vec{g} + \vec{R}_c, \quad (19b)$$

$$\frac{\partial E_{Tn}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(E_{Tn} \mathbb{I} + \mathbb{P}_n) \cdot \vec{u}_n + \vec{Q}_n \right] = \rho_n \vec{u}_n \cdot \vec{g} + H_n, \quad (20a)$$

$$\frac{\partial E_{Tc}}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ [E_{Tc} \mathbb{I} + P_{Tc} \mathbb{I} + \mathbb{M}_c] \cdot \vec{u}_c + \vec{Q}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{u}_c) \right\} = \rho_c \vec{g} \cdot \vec{u}_c + H_c. \quad (20b)$$

Los subíndices c y n indican la especie a la que se asocia cada cantidad; los escalares $E_{T\alpha}$ y P_{Tc} se refieren a la energía total del fluido α y a la presión total de la especie cargada, y se definen según,

$$E_{Tc} = \frac{1}{2} \rho_c u_c^2 + \rho_c e_c + \frac{B^2}{2\mu_0},$$

$$E_{Tn} = \frac{1}{2} \rho_n u_n^2 + \rho_n e_n,$$

$$P_{Tc} = p_c + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

La interpretación de las ecuaciones (18) es claramente la conservación de la masa en ambos fluidos. El término S_α se asocia a procesos que permiten la producción o pérdida de las partículas α , tales como la recombinación y la ionización o la transferencia de carga. Cuando no hay interacciones de este tipo, se tiene $S_\alpha = 0$. De forma análoga las ecuaciones (19) indican que el cambio, a través del tiempo, del momento lineal promedio del fluido se debe a las fuerzas externas que se le aplican (gravitacional y de Lorentz), a su fricción interna (viscosidad), a las fuerzas de presión del fluido mismo y a las fuerzas relacionadas con las colisiones experimentadas Bittencourt (2013). Así, las ecuaciones de momentum establecen las condiciones que garantizan la conservación del mismo. Finalmente, las ecuaciones (20) indican que las pérdidas energéticas de un fluido que se mueve con velocidad promedio \vec{u}_α se deben al trabajo hecho por la fuerza de gravedad y por las colisiones entre especies, así como al flujo de calor producido por las colisiones y por la interacción materia-radiación.

2.2 Términos de colisiones

En la sección anterior, se describieron los términos de colisiones con la expresión general que está a la derecha de la ecuación de Boltzmann (2),

$$\left(\frac{\partial[n_\alpha\langle g \rangle_\alpha]}{\partial t}\right)_{coll} = \int g \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d^3v.$$

Posteriormente, al variar el peso estadístico g se encuentran las siguientes expresiones para los términos fuente de la ecuación de masa, momento y energía, respectivamente:

$$\begin{aligned} S_\alpha &= m_\alpha \int \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d^3v, \\ \vec{R}_\alpha &= m_\alpha \int \vec{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d^3v, \\ H_\alpha &= \frac{m_\alpha}{2} \int v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d^3v, \end{aligned}$$

los términos de fuente presentados se derivan a partir de estas integrales, un desarrollo general y completo de este procedimiento se hace por Meier and Shumlak (2012).

Al buscar una forma de describir las colisiones que tienen la especie α se debe tener en cuenta que estas partículas pueden chocar entre ellas o con las partículas de otras especies. De tal forma los términos colisionales se deben escribir como,

$$C_\alpha = \sum_{\beta} C_{\alpha\beta}, \quad (21)$$

donde C_α puede ser S_α , \vec{R}_α o H_α , los cambios por unidad de tiempo en la función de distribución de la especie α que se dan debido a las colisiones con la especie β se denotan por $C_{\alpha\beta}$. Este se denomina el operador colisional entre las partículas α y β , suele depender de las funciones de distribución de ambas especies, por lo tanto es frecuente que $C_{\alpha\beta}$ tenga una forma complicada Braileanu (2020). Adicionalmente, el término de choques se puede dividir en una contribución elástica y una inelástica,

$$C_\alpha = C_\alpha^{\text{inel}} + C_\alpha^{\text{el}}. \quad (22)$$

A partir de esto, se pueden deducir algunas propiedades básicas para las colisiones elásticas Braginskii (1965). Desde la conservación de la masa, se tiene,

$$\int C_{\alpha\beta} d^3v = 0,$$

debido a que el número de partículas de una especie no cambia debido a las colisiones. Asimismo, el momentum y la energía se deben conservar luego de las colisiones entre partículas iguales,

$$\int m_{\alpha} \vec{v} C_{\alpha\alpha} d^3v = 0,$$

$$\frac{1}{2} \int m_{\alpha} v^2 C_{\alpha\alpha} d^3v = 0.$$

Por otra parte, las relaciones,

$$\int m_{\alpha} \vec{v} C_{\alpha\beta} d^3v + \int m_{\beta} \vec{v} C_{\beta\alpha} d^3v = 0,$$

$$\frac{1}{2} \int m_{\alpha} v^2 C_{\alpha\beta} d^3v + \frac{1}{2} \int m_{\beta} v^2 C_{\beta\alpha} d^3v = 0,$$

indican conservaciones para partículas de diferente especie Goedbloed et al. (2019).

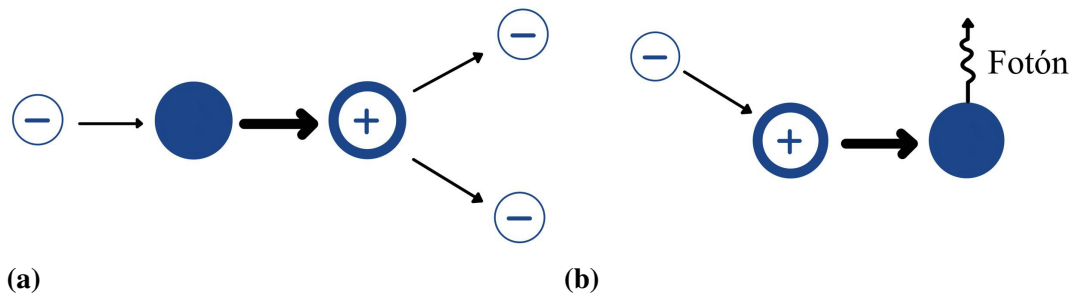
2.2.1 *Términos de colisiones inelásticas: ionización y recombinación*

Al hablar de los términos de choques inelásticos se deben analizar las colisiones que transforman las partículas de la especie α a la especie $\tilde{\alpha}$. Es decir, los procesos de ionización y recombinación. El primero de estos se va a entender como el resultado de un choque, en el cual un electrón impacta un átomo, de forma que se separan un ion positivo y dos electrones. En tal caso, se ve disminuida la densidad de la especie neutra y aumenta la especie de partículas cargadas. Por otra parte la recombinación es un procedimiento inverso, mediante el cual un electrón y un ion colisionan para producir un átomo neutro y emitir un fotón. En contraposición con la ionización, en la recombinación se aumenta el número de partículas neutras y disminuyen las cargadas R Goldston

(1995). Estos fenómenos también se denominan como ionización colisional y recombinación radiativa, y su descripción se ve representados en la figura 1. Se debe notar que existe otro tipo de ionización, la cual es radiativa, y de recombinación, la cual se suele llamar de tres-cuerpos. Estos fenómenos no se tiene en cuenta en el modelo trabajado.

Figura 1

Esquemas que representan los fenómenos de: (a) ionización y (b) recombinación.



Para incluir este tipo de fenómenos en el término inelástico, C_{α}^{inel} , se utilizarán las tasas de ionización y recombinación; las cuales se denotan como Γ^{ion} y Γ^{rec} , respectivamente. Las expresiones que se utilizan en este trabajo están basadas en un modelo empírico basado en los trabajos de Cox and Tucker (1969), que se desarrollaron en un plasma, de bajas densidades y altas temperaturas ($10^3 - 10^8 K$),

$$\Gamma^{\text{ion}} = 2.34 \times 10^{-14} \cdot n_n \beta^{-1/2} \exp(-\beta) [s^{-1}], \quad (23)$$

$$\Gamma^{\text{rec}} = 5.20 \times 10^{-20} \cdot n_i \sqrt{\beta} (0.4288 + 0.5 \ln(\beta) + 0.4698 \beta^{1/3}) [s^{-1}]. \quad (24)$$

En las expresiones anteriores $\beta = A \cdot \Phi_{\text{ion}}/T_e$ es la función que presenta la dependencia de la ionización y la recombinación en la temperatura Zhang et al. (2021); T_e es la temperatura del electrón en eV, la cual se considera igual a la temperatura de la especie cargada en el modelo usado $T_e = T_i = T_e$; $\Phi_{\text{ion}} = 13.6$ eV es la energía de ionización del hidrógeno y la constante $A = 0.6$ toma en cuenta la influencia de iones pesados en el plasma Maneva et al. (2017). De tal forma, a partir de las expresiones (23) y (24) se puede definir la contribución de los choques inelásticos a los términos fuente. En el caso de la conservación de la masa para la especie cargada y la neutra sería,

$$S_c^{inel} = \rho_n \Gamma^{\text{ion}} - \rho_c \Gamma^{\text{rec}}, \quad (25a)$$

$$S_n^{inel} = \rho_c \Gamma^{\text{rec}} - \rho_n \Gamma^{\text{ion}}, \quad (25b)$$

donde se asocia ρ_n con la ionización ya que estas partículas atraviesan tal proceso, de forma análoga con las partículas cargadas que pasan por la recombinación. Mientras que para la ecuación de momento lineal se tiene,

$$\vec{R}_c^{inel} = \rho_n \vec{u}_n \Gamma^{\text{ion}} - \rho_c \vec{u}_c \Gamma^{\text{rec}}, \quad (26a)$$

$$\vec{R}_n^{inel} = \rho_c \vec{u}_c \Gamma^{\text{rec}} - \rho_n \vec{u}_n \Gamma^{\text{ion}}. \quad (26b)$$

Por último, los términos inelásticos de las ecuaciones de energía son,

$$H_c^{inel} = \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \Gamma^{\text{ion}} - \frac{1}{2} \rho_c u_c^2 \Gamma^{\text{rec}} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m_n} (\rho_n T_n \Gamma^{\text{ion}} - \rho_c T_c \Gamma^{\text{rec}}), \quad (27a)$$

$$H_n^{inel} = \left(\frac{1}{2} \rho_c u_c^2 \Gamma^{\text{rec}} - \frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \Gamma^{\text{ion}} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m_n} (\rho_c T_c \Gamma^{\text{rec}} - \rho_n T_n \Gamma^{\text{ion}}), \quad (27b)$$

los cuales se componen de una contribución cinética y de una relacionada a la energía interna.

2.2.2 Términos de colisiones elásticas

En esta sección se analiza la contribución de los choques elásticos a los términos fuente de las ecuaciones de la MHD. Por parte de la ecuación de masa, se tiene que ningún otro fenómeno cambia esta cantidad, de modo que $S_n^{el} = 0, S_c^{el} = 0$. En el caso de la ecuación del momento lineal se tiene,

$$\vec{R}_n^{2el} = \alpha (\vec{u}_c - \vec{u}_n), \quad (28a)$$

$$\vec{R}_c^{2el} = \alpha (\vec{u}_n - \vec{u}_c), \quad (28b)$$

donde α está asociado con la frecuencia de colisiones elásticas entre partículas neutras y las cargadas, la cual se expresa como Oliver et al. (2016),

$$\alpha = \frac{4}{3} \xi \sqrt{\frac{8k_B}{\pi} \left(\frac{T_c}{m_c} + \frac{T_n}{m_n} \right)} \rho_c \rho_n. \quad (29)$$

Este parámetro es uno de los encargados de medir el nivel de interacción entre las especies,

de modo que cuando se toma $\alpha = 0$, se está considerando un plasma de dos fluidos no acoplados mediante colisiones elásticas Braginskii (1965). A medida que se examinan coeficientes más altos, se encuentra mayor evidencia de las colisiones y de los intercambios de energía y momento producidos Draine (1986). Por otra parte ξ está relacionado con la intensidad de la interacción que se genera a través de la sección transversal σ_{cn} ,

$$\xi = \frac{\sigma_{cn}}{m_c + m_n}. \quad (30)$$

Teniendo estas definiciones en cuenta, se puede expresar la pérdida de energía debido a interacciones entre los fluidos en términos de la velocidad y la temperatura relativa de las partículas, así se asocia una transferencia de energía,

$$H_n^{el} = \frac{1}{2}\alpha(u_c^2 - u_n^2) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m_n} \alpha(T_c - T_n), \quad (31a)$$

$$H_c^{el} = \frac{1}{2}\alpha(u_n^2 - u_c^2) + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{k_B}{m_n} \alpha(T_n - T_c) \quad (31b)$$

Finalmente, se pueden agrupar las expresiones encontradas previamente para colisiones elásticas e inelásticas, a través de la ecuación (22). De forma que, para la ecuación de continuidad se tiene,

$$S_n = \rho_c \Gamma^{\text{rec}} - \rho_n \Gamma^{\text{ion}}. \quad (32a)$$

$$S_c = \rho_n \Gamma^{\text{ion}} - \rho_c \Gamma^{\text{rec}}, \quad (32b)$$

Los términos de fuente para el momentum, correspondientes al fluido neutro y al cargado,

$$\vec{R}_n = \rho_c \vec{u}_c \Gamma^{\text{rec}} - \rho_n \vec{u}_n \Gamma^{\text{ion}} + \alpha (\vec{u}_n - \vec{u}_c), \quad (33a)$$

$$\vec{R}_c = \rho_n \vec{u}_n \Gamma^{\text{ion}} - \rho_c \vec{u}_c \Gamma^{\text{rec}} - \alpha (\vec{u}_n - \vec{u}_c). \quad (33b)$$

Finalmente, los expresiones colisionales para la energía,

$$\begin{aligned} H_n = & \frac{1}{2} \Gamma^{\text{rec}} \rho_c u_c^2 - \frac{1}{2} \Gamma^{\text{ion}} \rho_n u_n^2 + \frac{1}{\gamma-1} \frac{k_B}{m_n} (\rho_c T_c \Gamma^{\text{rec}} - \rho_n T_n \Gamma^{\text{ion}}) + \\ & \frac{1}{2} \alpha (u_c^2 - u_n^2) + \frac{1}{\gamma-1} \frac{k_B}{m_n} \alpha (T_c - T_n) + \alpha \vec{u}_n \cdot (\vec{u}_c - \vec{u}_c), \end{aligned} \quad (34a)$$

$$\begin{aligned} H_c = & \frac{1}{2} \Gamma^{\text{ion}} \rho_n u_n^2 - \frac{1}{2} \Gamma^{\text{rec}} \rho_c u_c^2 - \frac{1}{\gamma-1} \frac{k_B}{m_n} (\rho_c T_c \Gamma^{\text{rec}} - \rho_n T_n \Gamma^{\text{ion}}) + \\ & \frac{1}{2} \alpha (u_n^2 - u_c^2) + \frac{1}{\gamma-1} \frac{k_B}{m_n} \alpha (T_n - T_c) + \alpha \vec{u}_c \cdot (\vec{u}_n - \vec{u}_c). \end{aligned} \quad (34b)$$

Se puede evidenciar que en todos los casos se cumple la clausura del sistema, $S_n = S_c$, $\vec{R}_n = \vec{R}_c$ y $H_n = H_c$, de forma que al sumar las ecuaciones de la MHD de las distintas especies, se preserve la conservación de la masa, del momentum y de la energía. Además, es relevante notar que en algunos textos es posible encontrar términos relacionado con \vec{J} en las expresiones fuente de la ecuación de momento y de energía. No obstante, estos se consideran despreciables Braileanu (2020).

Las simulaciones presentadas en los capítulos subsiguientes se llevaron a cabo utilizando un derivado del código CAFE Lora-Clavijo et al. (2015) denominado MAGNUS Navarro et al. (2017). Este resuelve las ecuaciones de la MHD resistiva con flujos de calor, ya sea en el modelo de total

o parcialmente ionizados. Específicamente MAGNUS ha sido empleado para la investigación de diversos fenómenos, comúnmente en el contexto de la física solar. En particular, en el marco de la MHD de un fluido, se han modelado *blobs* con bajo campo magnético, que son expulsados desde la fotosfera solar hacia la corona, los cuales pueden ser el resultado de la granulación Navarro et al. (2019). También se han estudiado los efectos de la conducción térmica en la formación de jets de la cromósfera solar Navarro et al. (2021) y la propagación de Ondas de Alfvén torsionales en esa zona Wandurraga et al. (2021). No obstante, el código no tenía implementados los fenómenos de recombinación e ionización. De tal forma, se hizo necesario añadir un módulo que incorporase tales procesos por medio de los términos fuente de las ecuaciones de la MHD presentadas.

3. Inestabilidad de Rayleigh-Taylor

3.1 Conceptos básicos

3.1.1 *Definición y caracterización de una inestabilidad*

Para determinar la existencia de una inestabilidad en un sistema, se debe partir de analizar la respuesta de este ante pequeñas perturbaciones. Si el sistema que ha sido alterado reacciona de forma que las ondas iniciales disminuyen hasta desaparecer, entonces se considera que la situación es estable. Mientras que, si la amplitud de las ondas aumenta progresivamente, de forma que el sistema se aleja cada vez más de su estado original y este proceso nunca logra revertirse, entonces se ha desarrollado una inestabilidad. Es necesario considerar tal sistema como inestable, incluso si este solo tiene un modo de propagación al cual es sensible. Asimismo, se considera estable, solamente si cada perturbación a la que se pueda ver sometida se desvanece Chandrasekhar (1961).

Generalmente, el procedimiento matemático para determinar ante qué modos se genera la inestabilidad puede darse desde el análisis de las integrales de energía Priest (1984) y de la propagación de modos normales Chandrasekhar (1961). A través del texto se utilizará el último método, para lo cual se considera una perturbación genérica de la forma,

$$A = A_0 \exp[i(k_x x + k_y y) + n_k t], \quad (35)$$

donde n_k tiene, en general, valores complejos,

$$n_k = n_k^{(r)} + in_k^{(i)}. \quad (36)$$

El objetivo de este tipo de desarrollos es encontrar el lugar geométrico que marca la distinción entre los modos inestables y los estables. Esto se hace partiendo de que los estados que están al margen son aquellos con $n_k^{(r)} = 0$. Siguiendo esta idea, se hace el análisis de modos normales para la Inestabilidad de Rayleigh-Taylor en el apéndice 1.

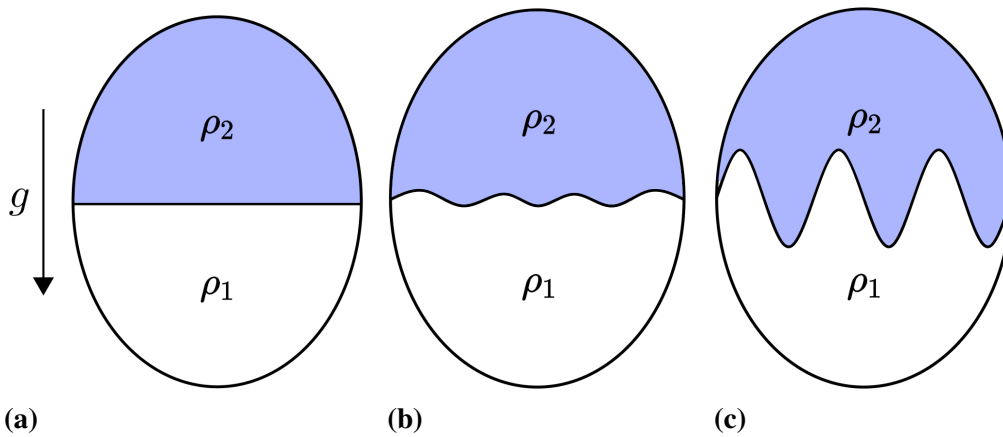
3.1.2 Descripción de la IRT

La Inestabilidad de Rayleigh-Taylor (IRT) Rayleigh (1882), Taylor (1950) se produce en un sistema cuando un fluido denso se sostiene, en sentido contrario a la gravedad, sobre un fluido ligero. La dinámica básica se puede observar en la figura 2, donde las densidades arriba y abajo de la frontera se denominan ρ_2 y ρ_1 , respectivamente. En el panel 2a se muestra la configuración inicial descrita, la cual se encuentra en equilibrio. No obstante, la interfase entre los fluidos es sensible al crecimiento de perturbaciones. Luego, en el panel 2b se observa una etapa inicial de las ondas IRT; las cuales se encuentran más desarrolladas en el panel 2c, donde se observa la formación de estructuras con forma de dedo en ambos medios Roberts and Diamond (2004). La energía cinética utilizada en el desarrollo de la inestabilidad resulta de la energía potencial gravitacional que estaba almacenada en la configuración 2a, la cual se va liberando a medida que el gradiente de densidad se relaja gracias a la IRT MacTaggart and Hillier (2020). Las características descritas y mostradas en la figura 2 representan la primera fase en el desarrollo de la inestabilidad, la cual es lineal. Se considera que después de esta, se desarrolla una etapa no-lineal, que luego hace transición

hacia el régimen turbulento. En esta parte final la evolución de la inestabilidad es autosimilar, la tasa de crecimiento se vuelve independiente a las condiciones iniciales del sistema y el tamaño vertical de la estructura de dedos crece según $\sim t^2$ Abarzhi (2010), Braileanu (2020).

Figura 2

Inestabilidad de Rayleigh-Taylor desarrollada entre dos fluidos. Donde las densidad superior es mayor a la del fluido inferior $\rho_2 > \rho_1$. (a) Momento antes de la IRT. (b) Comienzo de la formación de estructuras de dedo, debido a la acción de la gravedad. (c) Momentos finales del régimen lineal, cuando la inestabilidad ya se desarrolló completamente.



El estudio teórico del régimen lineal de este problema se hace desde la teoría de perturbaciones aplicada a las ecuaciones de movimiento del sistema, como se mencionó previamente. De tal forma, se pueden hallar relaciones para n , en las que dicha magnitud se interpreta como una tasa de crecimiento de la inestabilidad. Por ejemplo, en el caso hidrodinámico se obtiene,

$$n^2 = Agk, \quad (37)$$

donde A se denomina el Número de Atwood y equivale a $(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$. Por otra

parte, al determinar la tasa de crecimiento para la IRT de un sistema con un campo magnético constante se tiene, Chandrasekhar (1961),

$$n^2 = Agk - \frac{2(\vec{B} \cdot \vec{k})^2}{\mu(\rho_2 + \rho_1)}. \quad (38)$$

El procedimiento para obtener la ecuación previa se detalla en el Apéndice 1. Al comparar la ecuación (37) con la (38) se advierte un nuevo término asociado con el campo magnético, el cual actúa de forma análoga a la tensión superficial, y por lo tanto, se encarga de suprimir la inestabilidad. Esta tensión efectiva que se desarrolla sobre la superficie tiene su origen en la tensión B^2/μ que existe a lo largo de las líneas de campo Chandrasekhar (1961). Además, debido a que la velocidad de grupo de Alfvén es $v_A = \sqrt{B^2/\mu\rho}$, el término de supresión se puede interpretar como una onda de Alfvén que intenta restaurar el sistema Hillier (2017). Con base en este análisis se pueden evidenciar tres tipos de modos ondulatorios de la Inestabilidad de Rayleigh-Taylor: el modo de intercambio, en el que no se produce el efecto restaurador de la tensión magnética porque la onda se propaga perpendicular al campo magnético; el modo ondular, en el cual el vector de onda y el campo son paralelos, de forma que el trabajo para suprimir las perturbaciones es el más alto; y los modos mixtos, en los que el vector de onda no es completamente paralelo o perpendicular al campo magnético.

A partir de la ecuación (38) también se puede obtener un número de onda crítico, que marque el punto de la estabilidad marginal. Abajo de estos valores se tiene un sistema inestable y

por encima se considera que este es estable. Esto implicaría,

$$0 = Agk_{cr} - \frac{2(\vec{B} \cdot \vec{k}_{cr})^2}{\mu(\rho_2 + \rho_1)},$$

de tal forma se tiene la expresión,

$$k_{cr} = \frac{g\mu(\rho_2 - \rho_1)}{2B^2 \cos^2 \theta},$$

donde θ es el ángulo entre el vector de onda y el campo magnético, y los modos inestables se definen como $k < k_{cr}$. Así, cuando el campo es perpendicular al vector de onda, el sistema permanecerá inestable incluso cuando $k \rightarrow \infty$ MacTaggart and Hillier (2020).

Otro concepto importante en el estudio de la IRT es el del modo más inestable, el cual se obtiene para ayudar a entender hasta qué escala es probable que crezca la perturbación. Según la ecuación de la tasa de crecimiento (38) se pueden buscar máximos para n^2 de dos tipos, al mantener el número de onda constante o al mantener el ángulo entre este y el campo magnético constante. En el primer caso, al optimizar, se obtiene,

$$k_{max} = \frac{k_{cr}}{2},$$

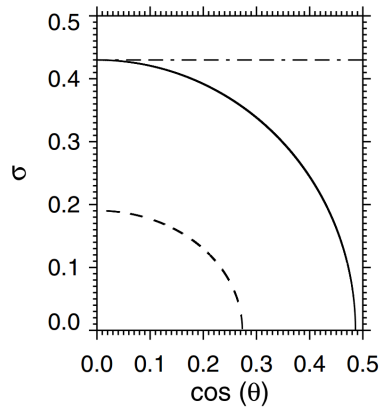
así que el número de onda que produce la perturbación más inestable se da a la mitad del número de onda crítico y como se puede observar depende de las variables del sistema. Por otra parte, al mantener el ángulo θ fijo se obtiene que el modo más inestable se da cuando $\theta = \pi/2$.

Este resultado es claro, ya que es la única forma en la que la onda no produce distorsión en las líneas de campo y por lo tanto no se genera la tensión magnética que suprime la inestabilidad Hillier (2016), MacTaggart and Hillier (2020).

Finalmente, es importante mencionar que el desarrollo mostrado previamente presenta ciertas dificultades para representar en su totalidad el fenómeno de la IRT. Una de las más evidentes se da en los modos de intercambio; ya que, según la ecuación (38), en el límite $k \rightarrow \infty$ se obtiene $n \rightarrow \infty$, de forma que el problema no ha sido correctamente acotado y se considera como mal definido. Una de las formas en las que los límites sobre k se corrigen es mediante el *cizallamiento* del campo magnético, en estos casos se permite que la dirección de este campo sea distinta arriba y abajo de la discontinuidad. Esta consideración ha mostrado disminuir la tasa de crecimiento incluso cuando se aplica un *cizallamiento* bajo. En la figura 3, se muestra esta disminución, al comparar con un modo con campo magnético uniforme (línea sólida) y con el modo de intercambio (línea de punto y guión) Hillier (2016), MacTaggart and Hillier (2020), Ruderman et al. (2014).

Figura 3

Tasa de crecimiento de la IRT en tres casos: con un campo magnético uniforme (línea sólida), con inclusión de cizalladura magnética (línea de guiones), en un modo de intercambio (línea de guiones y puntos). En todos los casos $|\vec{B}| = 1$, $k = 2\pi$ y $g = 0.03$. Para la cizalladura magnética se tiene $B_x = 0.9$. Tomado de: MacTaggart and Hillier (2020)



De manera similar existen otras extensiones al modelo de la IRT que permiten una mejor representación de la inestabilidad en los diferentes contextos físicos en los que se desarrolla. Algunas de estas incluyen el cambio de un perfil de densidad discontinuo a uno continuo Chandrasekhar (1961), Bhatia (1974), la inclusión de viscosidad Gerashchenko and Livescu (2016), Elgowainy and Ashgriz (1997) y de compresibilidad Díaz et al. (2014), Livescu (2004), Li (1993).

3.2 Modelo computacional

A través de la investigación se hizo necesario modelar la inestabilidad de Rayleigh-Taylor para implementar este fenómeno en el código MAGNUS. La perturbación utilizada a lo largo del trabajo, se genera en la interfase y crece a lo largo del eje z , como $z = z_0 + \delta z$, donde,

$$\delta z = \sum_{n=-N}^N [a_n \cos(4\pi nx) + b_n \sin(4\pi nx)],$$

los valores de los coeficientes a_n y b_n responden a una distribución gaussiana con $\sigma = 0.0001$ y amplitud $A = 10.0$. Esta dependencia funcional de δz es similar a la descrita por otros autores Khomenko et al. (2014), Shin et al. (2022).

Por otro lado, los resultados presentados en el capítulo 4 utilizan una configuración de un sistema con dos fluidos separados por una interfase, donde el que se encuentra arriba tiene densidad $\rho_{1c} = \rho_{1n} = 2.0$, mientras que el que se encuentra abajo tiene $\rho_{2c} = \rho_{2n} = 1.0$. Así, en las simulaciones realizadas con plasmas parcialmente ionizados, las densidades de partículas neutras y cargadas tienen el mismo valor al comienzo. La dirección de la gravedad $|\vec{g}| = 0.1$ se toma en el sentido negativo del eje z . El campo magnético inicial es uniforme en la dirección x con una magnitud 0.05. Mientras que la presión se expresa mediante la condición de equilibrio hidrostático, con los valores iniciales $p_{0c} = 2.5$ y $p_{0n} = 2.5/2$ para los fluidos cargado y neutro, respectivamente.

Asimismo, para desarrollar la inestabilidad en un plasma parcialmente ionizado, con partículas cargadas y neutras, fue preciso determinar una forma de parametrizar los choques entre especies.

En particular, para las colisiones elásticas se describen con el factor ξ , definido según la ecuación (30) y relacionado con α a través de (29). Así, ξ se empleó como un indicador para el nivel de interacción entre ambos fluidos. De forma que, cuando $\xi = 0$ se considera que estos están desacoplado y a medida que se toman valores más altos de este parámetro, se dice que las colisiones por unidad de área han aumentado. Igualmente, para los choques inelásticos, que incluyen los procesos de ionización y recombinación, es necesario realizar una descripción del fenómeno a partir de un factor variable computacionalmente. Con este propósito se adimensionalizan las ecuaciones de las tasas de colisión, dadas por (23) y (24). Así, se introducen dos parámetros libres τ_I y τ_R , los cuales gobiernan el índice de ocurrencia de estos fenómenos. Ambos factores se interpretan como una frecuencia asociada a las colisiones, de forma que el problema quede sin dimensiones. Estas frecuencias se relacionan según $\frac{2.34 \times 10^{-14}}{5.20 \times 10^{-20}} = \frac{\tau_I}{\tau_R}$, de forma que siempre se cumple la relación,

$$\tau_I = 10^5 \tau_R, \quad (39)$$

la cual indica que, en todos los casos, el plasma se aproxima a una mayor ionización a medida que pasa el tiempo; a su vez se aleja de la neutralidad.

4. Resultados

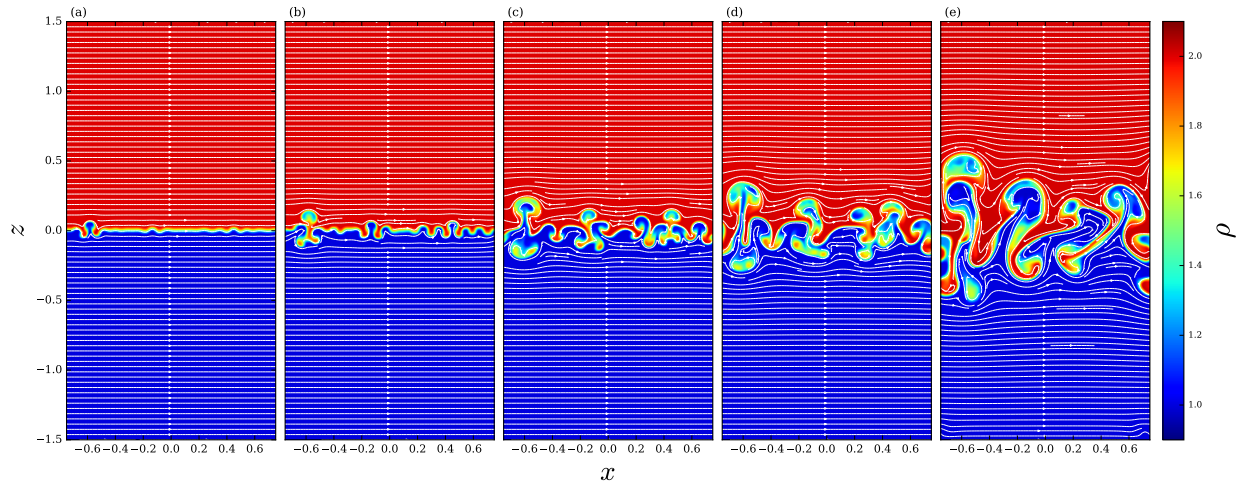
4.1 La inestabilidad de Rayleigh-Taylor en un plasma totalmente ionizado

Inicialmente, se desarrolla la inestabilidad en un plasma compuesto únicamente por partículas cargadas. Esto se hizo con dos fines: comprender mejor la dinámica sin la influencia de factores adicionales al campo magnético y corroborar que la implementación computacional generase el comportamiento correcto en la IRT.

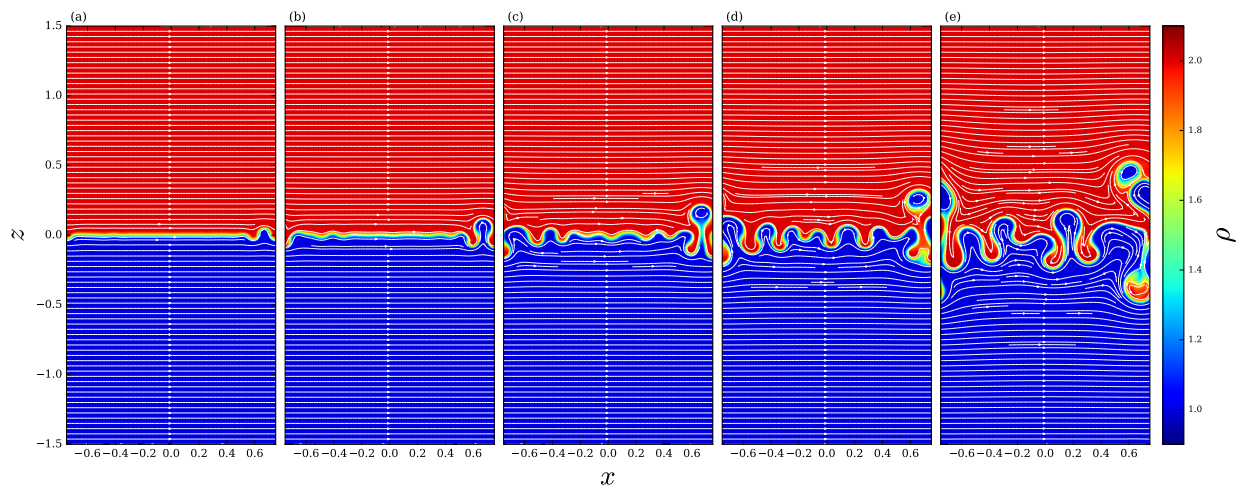
En las figuras 4 y 5 se presentan imágenes de la evolución de la IRT cuando el campo magnético inicial es uniforme y de magnitud $B_0 = 0.01$ y $B_0 = 0.02$, respectivamente. Para ambos casos se expone la inestabilidad a tiempos idénticos. Se puede observar que, en concordancia con la teoría, al aumentar el campo magnético, el desarrollo de la inestabilidad es más lento, ya que al comparar los paneles en cualquier tiempo, la simulación con $B_0 = 0.01$ presenta más y mayores oscilaciones que la simulación con $B_0 = 0.02$. No obstante, las estructuras en forma de dedo en la figura 5 son mucho más definidas. Esto es especialmente evidente en los tiempos mayores, como 4.(e) y 5.(e), ya que el sistema con menor campo magnético está tendiendo a la turbulencia. Las líneas de campo también ayudan a mostrar esta diferencia en la forma de las estructuras, debido a que, actúan como un contorno para el fluido. Es así que las líneas de campo se notan más distorsionadas y ensanchadas a medida que pasa el tiempo en la figura 4. Este hecho encaja correctamente con la teoría, ya que esto es lo que debe provocar la amplificación del campo magnético.

Figura 4

Evolución de la IRT con $B_0 = 0.01$. Se presenta la densidad del plasma en cuatro tiempos diferentes. Las componentes del campo magnético del plano (x y z) se representan con flechas blancas. Los tiempos mostrados son $t = 7$ (a), $t = 10$ (b), $t = 13$ (c), $t = 15$ (d), $t = 21$ (e).


Figura 5

Evolución de la IRT con $B_0 = 0.02$. Se presenta la densidad del plasma en cuatro tiempos diferentes. Las componentes del campo magnético del plano (x y z) se representan con flechas blancas. Los tiempos mostrados son $t = 7$ (a), $t = 10$ (b), $t = 13$ (c), $t = 15$ (d), $t = 21$ (e).

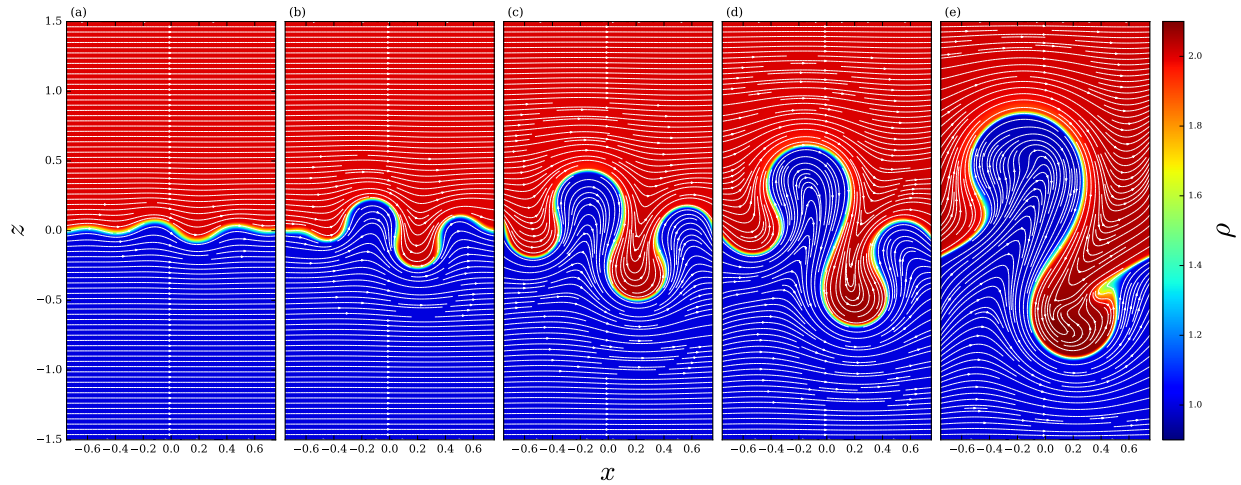


En este orden de ideas, al incrementar B_0 más, las líneas de campo tardan más en deformarse

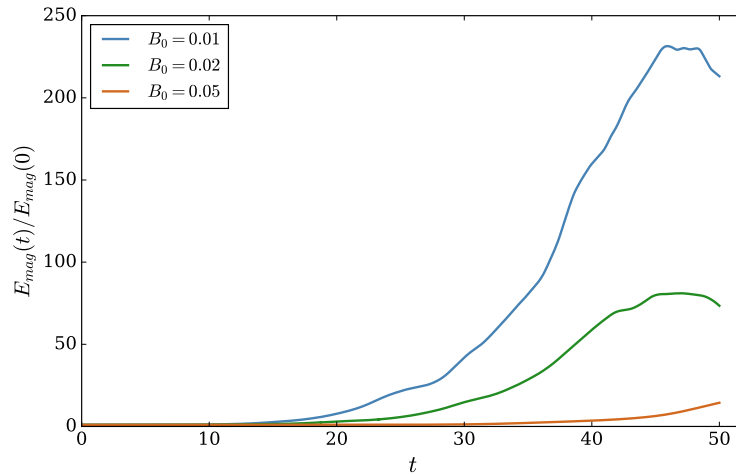
y una vez lo hacen, es en menor proporción, lo que resulta en una menor amplificación del campo. Esta idea es comprobada también por la simulación presentada en la figura 6, correspondiente a $B_0 = 0.05$. Los tiempos expuestos no son los mismos de las figuras 4 y 5. Esto es debido a que el sistema se tarda considerablemente más en inestabilizarse, a medida que aumenta el campo magnético, según la potencia al cuadrado de la ecuación (38). Es así que el panel 6.(a) se asemeja más a los paneles 4.(e) y 5.(e) temporalmente. Asimismo, se puede notar que en los tiempos posteriores, como 6.(d) y (e) el sistema no parece tender a la turbulencia y las estructuras de dedo continúan fuertemente definidas, en comparación con los dos sistemas previos. De igual forma, el número de estructuras que se presenta es mucho menor. En el primer sistema ($B_0 = 0.01$) se obtuvieron cerca de 15 estructuras claras y en el segundo ($B_0 = 0.02$) se tienen aproximadamente 9; en contraste, se pueden contar 3 o 4 ondulaciones en la figura 6.(a). Estos efectos se asocian claramente a la tensión magnética que actúa sobre la superficie y neutraliza parcialmente el desarrollo de la inestabilidad; tal como coinciden diferentes autores Perkins et al. (2017); Srinivasan and Tang (2013). En lo que respecta a la morfología de la IRT que se presenta en las figuras 4, 5 y 6, se puede hacer una comparación con trabajos previos que se han desarrollado en el marco de los plasmas totalmente ionizados. Así, se encuentra una coincidencia en formas con Isobe et al. (2006); Shin et al. (2022).

Figura 6

Evolución de la IRT con $B_0 = 0.05$. Se presenta la densidad del plasma en cuatro tiempos diferentes. Las componentes del campo magnético del plano (x y z) se representan con flechas blancas. Los tiempos mostrados son $t = 23$ (a), $t = 29$ (b), $t = 34$ (c), $t = 39$ (d), $t = 44$ (e).


Figura 7

Razón entre la energía magnética en el tiempo t y el valor inicial de esta para tres sistemas. Azul: $B_0 = 0.01$. Verde: $B_0 = 0.02$. Naranja: $B_0 = 0.05$.



Por otra parte, en la figura 7 se presenta el cociente entre la energía magnética en el tiempo y

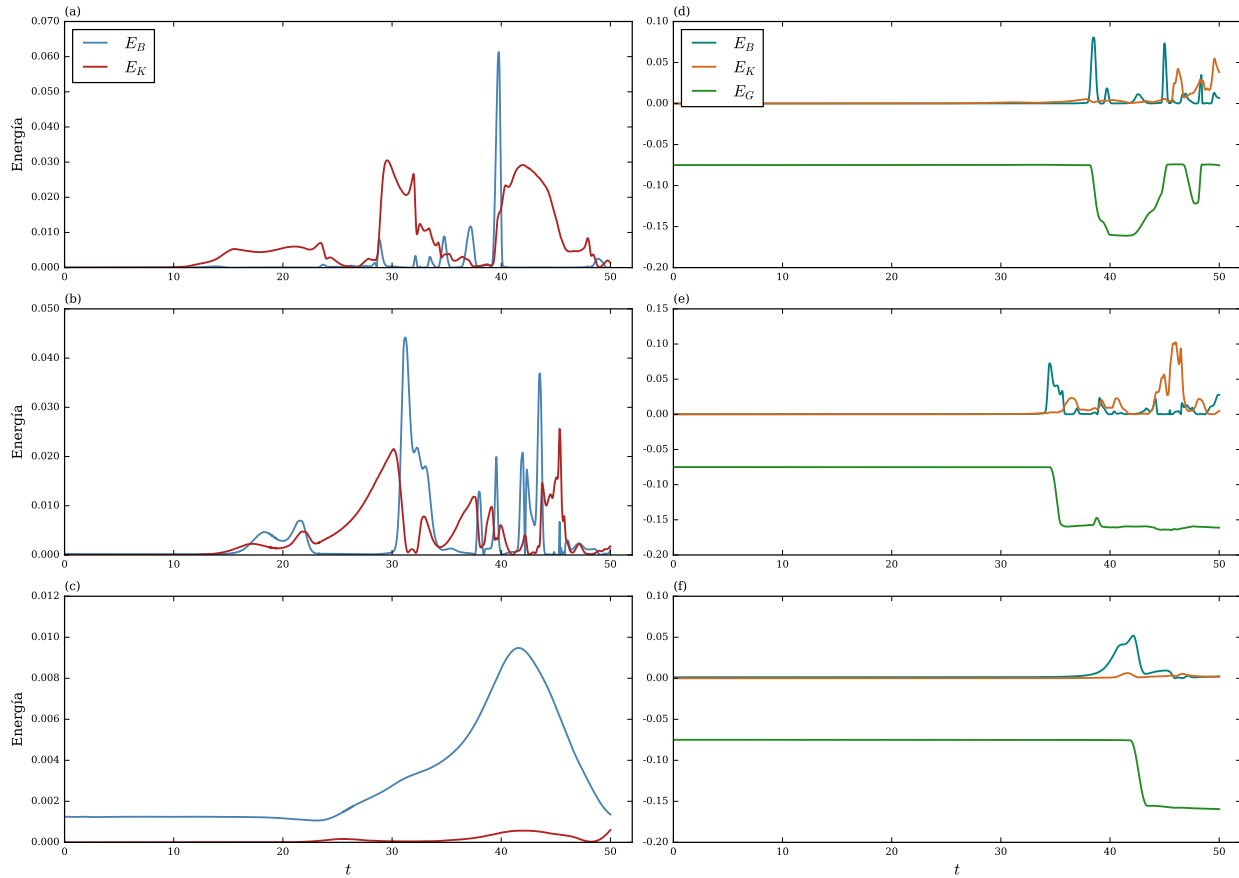
la energía magnética inicial $E_{mag}(t)/E_{mag}(0)$. Para determinar esta cantidad computacionalmente se realiza una integral en todo el espacio numérico, la cual se calcula en cada paso de tiempo. Se puede apreciar que el tiempo en el que inicia la amplificación del campo, el cual coincide con el tiempo de formación de las estructuras de dedo, es mucho mayor a medida que B_0 aumenta. En el primer sistema, se presenta un incremento del 23.047,3 % en la energía; mientras que en el segundo este es de 8.009,6 %; y en el tercero es de 1.341,9 %. Es claro que el aumento del campo magnético disminuye inversamente con la magnitud del mismo, no obstante la amplificación en todos los casos es considerablemente alta, ya que se está considerando un plasma totalmente ionizado. La correlación entre el campo aplicado inicialmente y el incremento en la energía también ha sido comprobada por otros autores Srinivasan and Tang (2013). Adicionalmente, en las curvas presentadas en la figura 7 también se puede advertir que estas tienen una primera etapa, en la que $E_{mag}(t)/E_{mag}(0) = 1$; luego está la etapa de incremento en la energía hasta llegar a un punto máximo, a partir del cual la curva decae. Estos procesos coinciden con la fase inicial de la inestabilidad que es lineal y sus fases posteriores: la no lineal y la turbulenta. Es claro que el sistema de $B_0 = 0.05$ nunca llega a este periodo final, debido a la fuerte tensión magnética presente, lo cual está en congruencia con lo observado en la figura 6.

En la figura (8) se presentan las curvas de la densidad energética para los tres sistemas presentados en dos puntos: la interfase $(0,0)$ [paneles izquierdos] y $(0,-0.75)$ [paneles derechos]. Se observa en las gráficas (a), (b) y (c) que conforme con el aumento del campo magnético inicial, la inestabilidad tarda más en generarse. En el caso de $B_0 = 0.01$ la energía cinética empieza a aumentar en $t = 12$, mientras que en el segundo caso con $B_0 = 0.02$ esto se da en el tiempo $t = 15$

y finalmente con $B_0 = 0.05$, aproximadamente en $t = 22$.

Figura 8

Detección de las energías para distintos sistemas. Izquierda: Cálculos en el punto $(0,0)$, justo en la interfase de los fluidos. Derecha: Cálculos en el punto $(0, -0.75)$, en el fluido de baja densidad. Los paneles de arriba [(a) y (d)], en medio [(b) y (e)] y abajo [(c) y (f)] corresponden a los campos magnéticos iniciales $B_0 = 0.01$, $B_0 = 0.02$, $B_0 = 0.05$, respectivamente.



Adicionalmente, es importante notar la conservación de la energía en los tres sistemas, la cual se evidencia mejor en los paneles de la derecha [(d), (e) y (f)], donde se percibe que a partir de la disminución en la energía gravitacional se da un aumento en la energía cinética, cuando se generan las estructuras de dedo en los fluidos. Este es el mecanismo principal de la inestabilidad

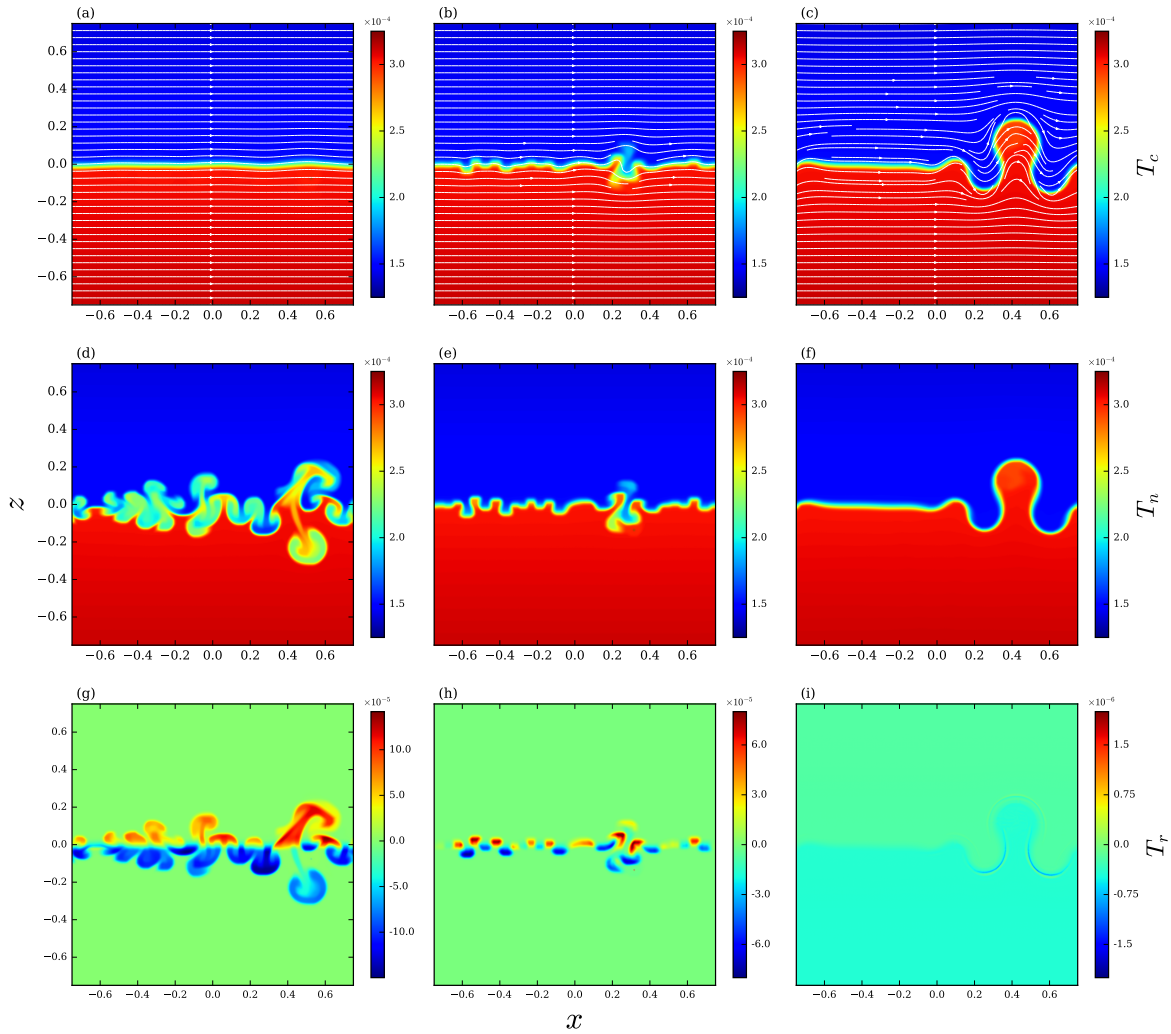
de Rayleigh-Taylor MacTaggart and Hillier (2020). En consecuencia, se da un crecimiento en la energía magnética en todos los sistemas presentados, ya que se presenta una distorsión en las líneas de campo.

4.2 La inestabilidad de Rayleigh-Taylor en un plasma acoplado por colisiones elásticas

En la figura 9 se presentan imágenes en el tiempo $t = 13.6$ de las simulaciones realizadas al variar el parámetro ξ ; este identifica el nivel de colisiones elásticas, según la ecuación (30). En los paneles (a), (b) y (c) se presenta la temperatura del fluido cargado, a medida que ξ toma los valores 0.001, 0.1 y 10.0. De forma análoga, en las gráficas (d), (e) y (f) se muestra la temperatura del fluido neutro. Finalmente, la última fila, las gráficas (g), (h) e (i) representan la resta entre las temperatura de los fluidos neutro y cargado $T_r = T_n - T_c$.

Figura 9

Temperatura de los fluidos en el tiempo $t = 13.9$. El campo magnético en todos los casos es $B_0 = 0.05$. Las gráficas de la izquierda corresponden a $\xi = 0.001$, las de en medio a $\xi = 0.1$ y las de la derecha a $\xi = 10$. En los paneles superiores se presenta la temperatura del fluido cargado T_c . En los de en medio se presenta la temperatura del fluido neutro T_n . En los paneles inferiores se muestra la resta entre las magnitudes anteriores, $T_r = T_n - T_c$.



La presentación de esta magnitud permite comprender mejor los cambios energéticos que se dan a causa de las colisiones entre ambos tipos de partículas. En el sistema que tiene el parámetro

de colisiones más bajo, $\xi = 0.001$, el fluido neutro se desarrolla rápida y caóticamente, debido a que no tiene la influencia de la tensión magnética para disminuir la inestabilidad. Por lo contrario, el fluido cargado se siente fuertemente influenciado por el alto campo magnético, $B_0 = 0.05$, así que el proceso de formación de estructuras es mucho más lento. A pesar de que el factor ξ es bastante bajo, sí se puede evidenciar una transferencia de momento y energía entre las partículas de distinta especie. Esto a través de la gráfica (g), donde se tiene una escala para T_r de 1×10^{-5} .

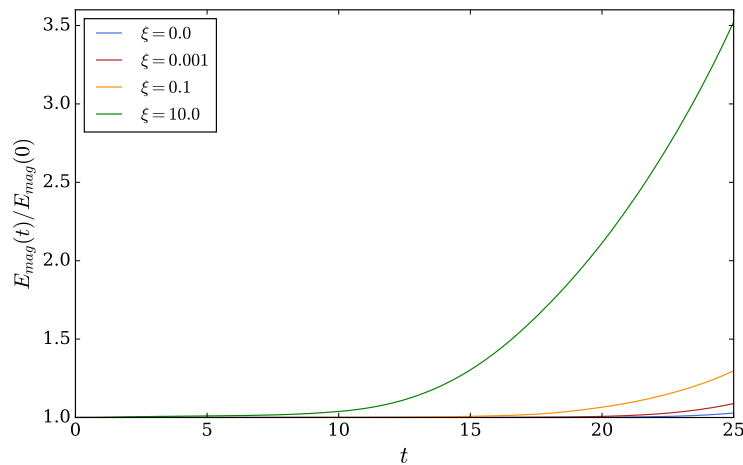
Al aumentar el parámetro dos órdenes de magnitud a $\xi = 0.1$, la sección efectiva de colisiones es mucho mayor. Por lo tanto, la transferencia energética entre los dos fluidos ha aumentado. Esto se puede evidenciar en las gráficas 9.(b) y 9.(e), donde las temperaturas a través del fluido tienen más similitudes, en comparación con el sistema previo. En la figura 9.(h) se muestra que la resta entre las temperaturas ha disminuido, donde el orden de magnitud sigue siendo de 1×10^{-5} , pero los valores en la barra de color son menores. Por último, se presenta el sistema con un alto nivel de colisiones, $\xi = 10$. En este caso se espera que la similitud entre las temperaturas del fluido cargado 9.(c) y del neutro 9.(f) se asemejen mucho más. Esta afirmación se confirma en el esquema 9.(i) donde se tienen valores de la temperatura T_r en el orden de magnitud $\times 10^{-6}$ y se puede observar que los valores son aproximadamente nulos. Es importante notar que la forma de las estructuras RT evidenciada en las primeras dos filas de gráficas presenta claras coincidencias con la literatura presentada previamente Khomenko et al. (2014).

Se interpreta que la morfología de las estructuras de Rayleigh-Taylor del fluido cargado y del neutro presentan similitudes, debido a que el intercambio de momento y energía de las partículas neutras hacia las cargadas permite que estas últimas superen la supresión de la tensión

magnética. No obstante, debido a dicha transferencia energética, el desarrollo de la inestabilidad en el fluido neutro es más lento y menos turbulento, mientras que en el fluido cargado ocurre el inverso. Además, se concluye que la presencia de este tipo de choques suprime las escalas pequeñas de la inestabilidad, como se observa en la figura 9. Este resultado está en concordancia con lo evidenciado por 12, quien hizo un estudio de la IRT enfocado en la cromósfera solar.

Figura 10

Razón entre la energía magnética en el tiempo t y el valor inicial para tres sistemas. El valor del campo inicial es $B_0 = 0.05$. Se ha variado ξ , desde 0 hasta 10.



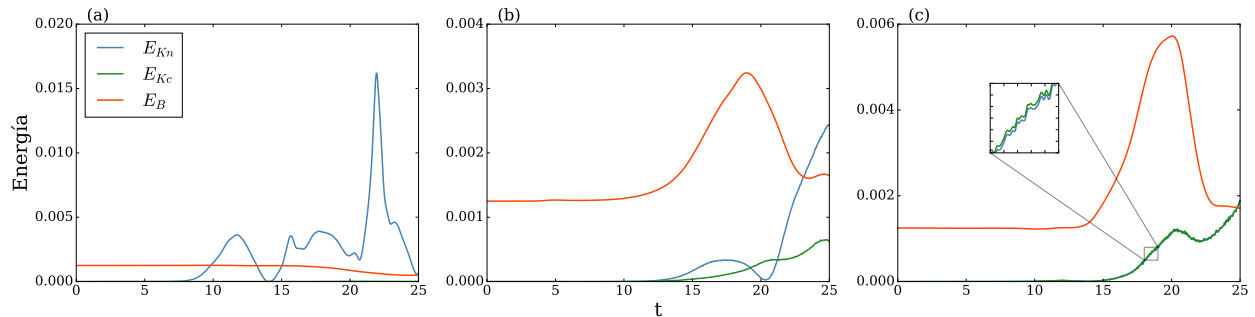
En la gráfica 9 también se puede observar que a medida que incrementa la tasa de colisiones elásticas, las líneas de campo magnético tienen mayores distorsiones y alargamientos. Se puede observar el cambio, ya que en la figura (a) se tiene un campo prácticamente uniforme, mientras que en (c) estas se han alterado de acuerdo a las estructuras de dedo. Esto es indicativo de que el parámetro ξ y los valores de amplificación del campo tienen una relación directamente proporcional. Tal hecho se representa en la gráfica 10, donde se puede ver que el valor de $\xi = 0.001$ sí produjo una amplificación mayor a la de un fluido sin colisiones; así, en el tiempo $t = 25$ se tiene

un aumento del 15.42 % respecto al valor inicial. Luego, este valor va en crecimiento, de este modo con $\xi = 0.1$, el porcentaje es 29.83 % y con $\xi = 10$, es de 252.26 %.

Asimismo, la amplificación del campo magnético se puede evidenciar en la gráfica 11. Esta presenta la energía cinética de las partículas neutras, la de las partículas cargadas y la energía magnética, calculadas en la posición $(0,0)$ que se encuentra en la interfase. Los paneles 11.(a), 11.(b) y 11.(c) muestran los sistemas correspondientes al parámetro $\xi = 0.001$, $\xi = 0.1$, $\xi = 10$, respectivamente. Se puede observar que el aumento en la energía magnética es proporcional al aumento del parámetro ξ . Donde el punto máximo de esta energía varía con ξ de 1.26×10^{-3} a 3.24×10^{-3} y finalmente a 5.72×10^{-3} . Por otra parte, con respecto a la energía cinética de las especies, es claro que a medida que aumenta el parámetro de colisiones, se deben acercar los valores de E_{Kc} y E_{Kn} , debido a la transferencia de momento. Inicialmente, con $\xi = 0.001$, la energía cinética del fluido cargado se aproxima a cero. Por el contrario, la de las partículas neutras es mucho más alta, debido a que solo el primer fluido experimenta la tensión magnética que suprime la generación de la inestabilidad. Ya que, al incrementar el parámetro ξ se da una mayor transferencia energética, los valores de E_{kc} tienen un aumento y los de E_{Kn} tienen una disminución. Esto se da hasta que la frecuencia de colisiones es lo suficientemente grande, entonces en el panel 10.(c) las curvas se superponen. En ciertos tiempos E_{Kc} está por encima y en otros lo está E_{Kn} .

Figura 11

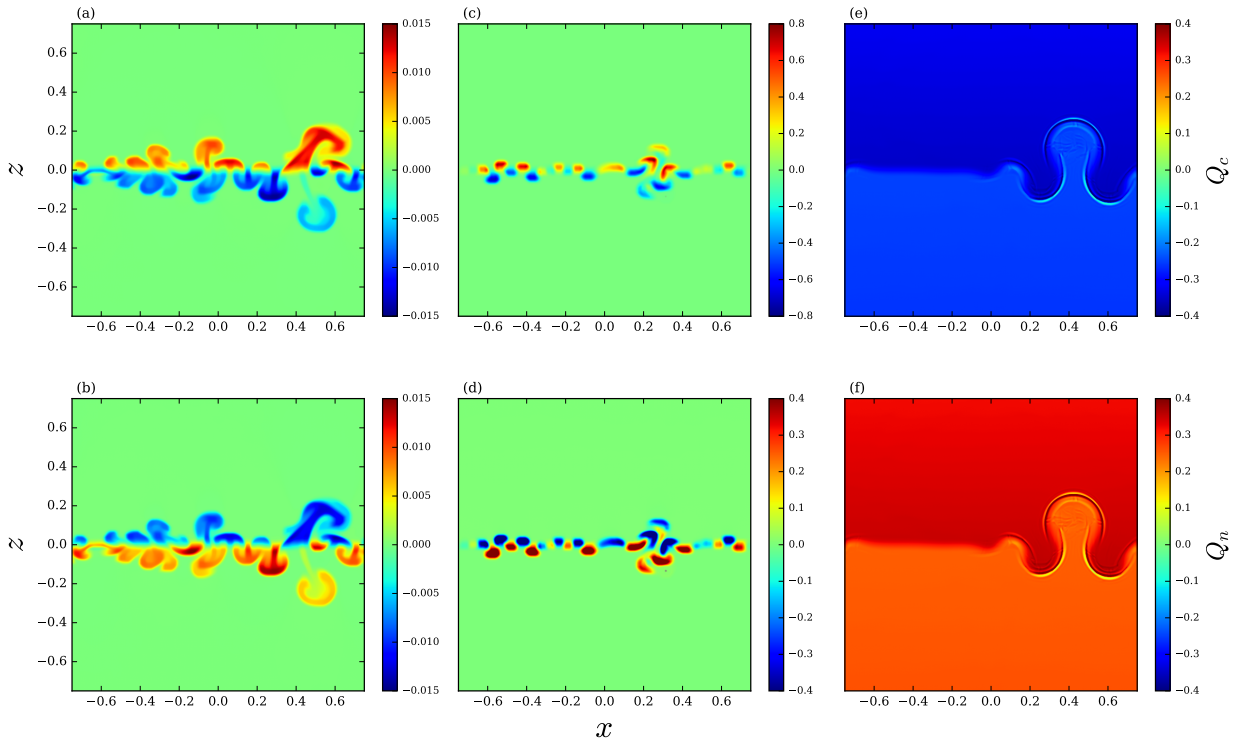
Evolución temporal de la energía magnética (naranja), la cinética del fluido neutro (azul) y la cinética del fluido cargado (verde).



Finalmente, en la gráfica 12 se muestra el intercambio de calor; los paneles superiores e inferiores representan la transferencia de las partículas cargadas a las neutras y de las neutras a las cargadas, respectivamente. Se evidencia que los cambios energéticos representados por T_r de la figura 9, se dan en la misma magnitud de un fluido hacia el otro. Así, el panel (a) es contrario al (b), como se aprecia en las barras de color; de igual forma ocurre con (c) y (d) y con (e) y (f). Asimismo, se puede evidenciar que las interacciones de energía se dan principalmente en la zona de la interfase donde se desarrolla la inestabilidad. Adicionalmente, en la figura 9 también se advierte la eliminación de las escalas más pequeñas, tal como se mencionó previamente.

Figura 12

El intercambio de calor debido a las colisiones entre partículas en el tiempo $t = 13.9$. El campo magnético en todos los casos es $B_0 = 0.05$. Las gráficas de la izquierda corresponden a $\xi = 0.001$, las de en medio a $\xi = 0.1$ y las de la derecha a $\xi = 10$. En los paneles superiores se presenta la transferencia del fluido cargado al neutro Q_c ; en los inferiores se muestra la transferencia del fluido neutro al cargado Q_n .

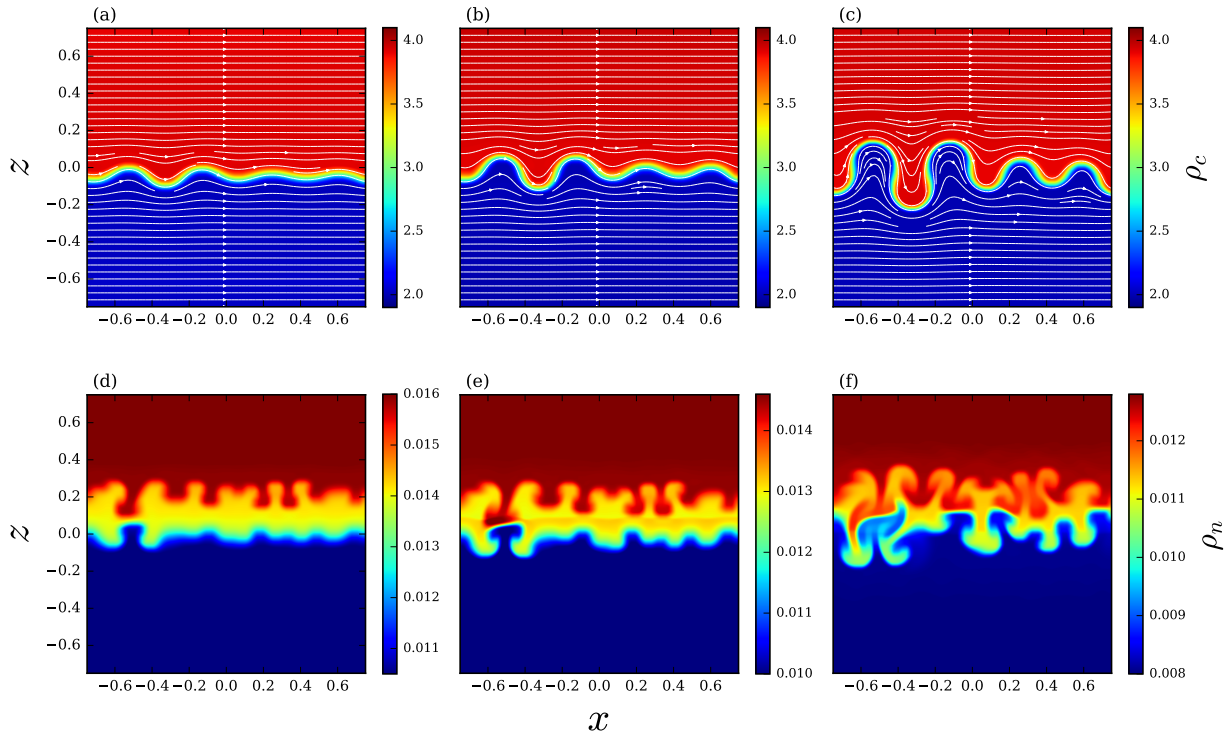


4.3 La inestabilidad de Rayleigh-Taylor en un plasma acoplado por colisiones inelásticas: ionización y recombinación

En la figura 13 se presenta la evolución temporal de la Inestabilidad de Rayleigh-Taylor, cuando se desarrolla en un plasma acoplado por ionización y recombinación, donde estas colisiones se modelaron de acuerdo a la relación (39). En todos los casos se utilizó un campo magnético inicial de $B_0 = 0.05$ y un parámetro $\xi = 0.0$. En la figura 13 se considera la simulación con $\tau_R = 1 \times 10^{-5}$. Como se puede observar, la diferencia en los valores de densidad de ambos fluidos es de dos órdenes de magnitud. Esto ocurre debido a la ecuación (39), la cual establece que la tasa de ionización siempre es mayor que la de recombinación. Al comparar con la gráfica 9, se aprecia que cuando se implementan las colisiones elásticas no se presenta dicha disparidad entre los fluidos. Adicionalmente, se advierte que los valores en las barras de color correspondientes a la densidad de partículas neutras, (d), (e) y (f), disminuyen con el tiempo. Así, el sistema se acerca más al de un plasma totalmente ionizado. Para mostrar que se mantiene la conservación de la masa, se constata que los valores de ρ_c han aumentado del panel (a) al (c); de un valor aproximado de 3.92 a uno de 3.94.

Figura 13

Evolución temporal de la IRT. En los paneles superiores e inferiores se presentan la densidad de masa del fluido cargado y neutro, respectivamente. Se ha utilizado un campo de $B_0 = 0.05$ y un parámetro $\tau_R = 1 \times 10^{-5}$. Se presentan los tiempos $t = 19.42$, en (a) y (d); $t = 21.30$, en (b) y (e); y $t = 24.97$, en (c) y (f).

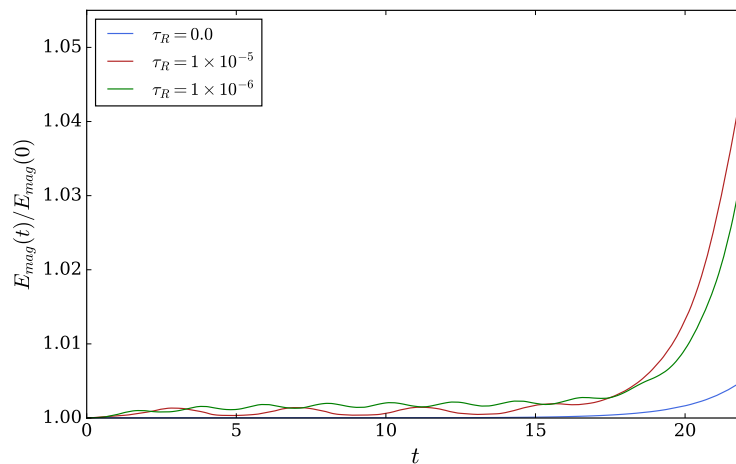


En lo que respecta a la morfología presentada en las estructuras de dedo, es importante notar que esta es similar a la presentada por otros autores que han desarrollado la IRT con inclusión de colisiones inelásticas Popescu Braileanu et al. (2021a,b,c). Por otra parte, se puede ver que debido al valor tomado para τ_R el nivel de transferencia energética o de momentum no es muy alto. Esto debido a que la forma que tienen las estructuras de dedo en cada fluido no se asemejan entre sí; asimismo, la inestabilidad en los paneles superiores se tarda más en desarrollarse. Sin embargo, aunque el valor no es muy alto, sí se evidencia la existencia de un intercambio de energía.

Principalmente en la curva de amplificación del campo magnético, de la figura 14. Allí se comparan las energías magnéticas de tres sistemas, al usar $\tau_R = 1 \times 10^{-5}$ (rojo), $\tau_R = 1 \times 10^{-6}$ (verde) y al no tener en cuenta los procesos de ionización y recombinación (azul). Como se mencionó previamente, estas curvas son indicativas de la fase lineal, la no-lineal y la turbulenta de la IRT. Y se puede observar que en los casos que presentan colisiones elásticas bajas, se da un aumento en E_{mag} del 3.56%; lo cual representa un incremento respecto al porcentaje 2.87%, correspondiente a la configuración con $\tau_R = 0.0$. Mientras que el valor más alto de τ_R obtiene una amplificación del 4.66%. En comparación con los sistemas estudiados anteriormente, se puede identificar otro cambio en las curvas de energía magnética: se presentan oscilaciones de E_{mag} en el tiempo. Esto ocurre debido a que constantemente se dan procesos de ionización y de recombinación, los cuales transforman la densidad de masa ρ_α y afectan la amplificación del campo.

Figura 14

Razón entre la energía magnética en el tiempo t y el valor inicial para tres sistemas. El valor del campo inicial es $B_0 = 0.05$. Se ha variado τ_R , desde 0 hasta 1×10^{-5} .



Por otro lado, en la figura 15 se presentan las densidades de masa de las partículas cargadas

y de las neutras (panel inferior), y las tasas de recombinación e ionización (panel intermedio), todas medidas a lo largo del eje z en $t = 24.97$. En el panel superior se presenta la gráfica con escalas de color de ρ_c en dicho tiempo, donde la barra de color correspondiente equivale a la de 13.(c). Se señala con líneas punteadas grises la ubicación de las estructuras de dedo más prominentes. Se advierte que las variaciones de ρ_c y de Γ^{rec} coinciden claramente con tales formaciones. Así, en las zonas de desarrollo de la IRT se tiene una menor tasa de recombinación y una menor densidad de electrones e iones. Con respecto a la tasa de ionización y a la densidad de la especie neutra se observan variaciones similares que encajan con la IRT en el fluido neutro. Según lo esperado, la diferencia entre los Γ de ambos procesos es de $\sim 1 \times 10^5$; en consecuencia, se mide una mayor cantidad de partículas cargadas que de neutras. Al comparar este resultado con la literatura, se encuentra coincidencia con que la interfase, donde se genera la IRT, presenta mínimos o máximos locales en las tasas de ionización y recombinación. En particular, esto lo analiza Popescu Braileanu et al. (2021c), quienes presentan un trabajo aplicado al sistema entre las prominencias y la corona solar.

Figura 15

En la gráfica superior se muestra la densidad de masa del fluido cargado, cuya barra de color es equivalente a la de 13.(c). En el panel intermedio se tienen las tasas de recombinación e ionización. En el inferior se presentan las densidades de masa a lo largo de $z = 0$. El tiempo utilizado es $t = 24.97$.

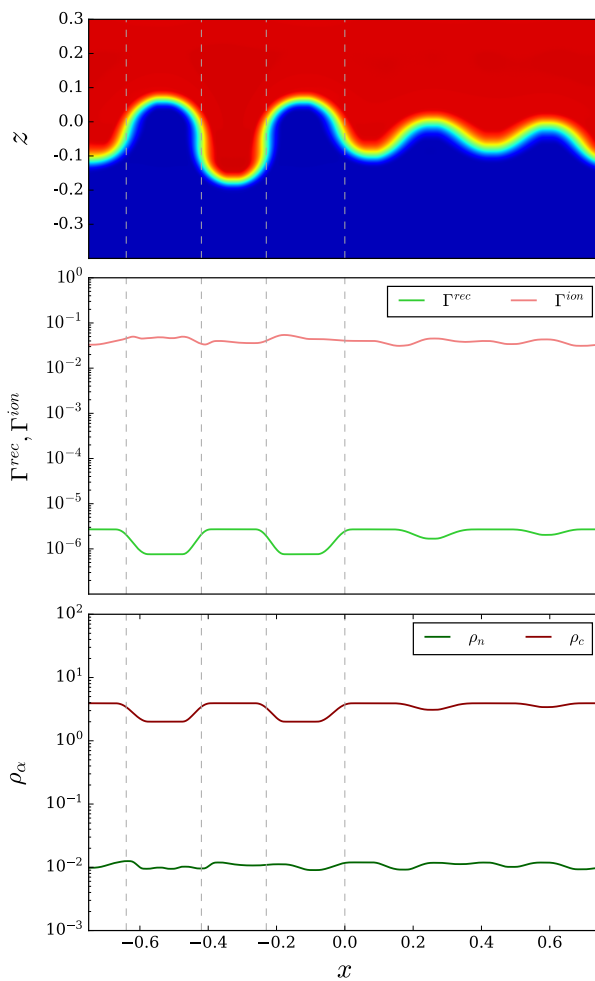
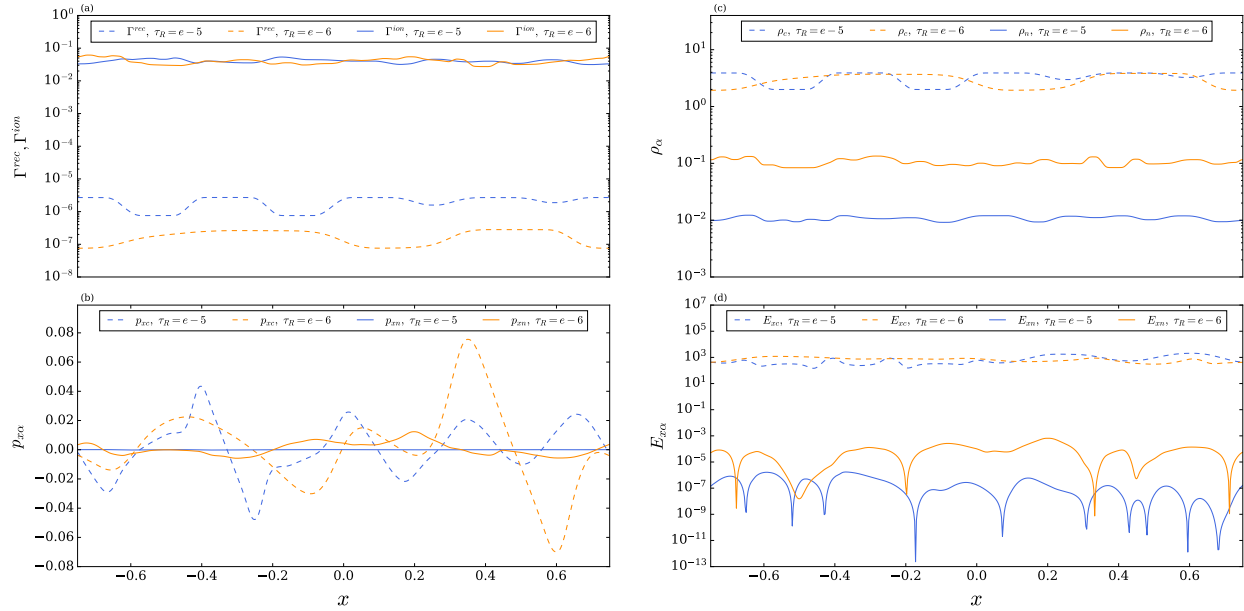


Figura 16

Mediciones tomadas, a través de la interfase, en el tiempo $t = 22.55$. (a) Tasas de ionización (línea sólida) y recombinación (línea punteada). (b) Componentes x del momento lineal de las partículas neutras (línea sólida) cargadas (línea punteada). (c) Densidades de masa de los fluidos neutro (línea sólida) y cargado (línea punteada). (d) Energía en el eje x de neutras (línea punteada) y cargadas (línea sólida). Los colores naranja y azul representan las simulaciones con $\tau_R = 1 \times 10^{-6}$ y con $\tau_R = 1 \times 10^{-5}$, respectivamente.



Similarmente, se evidencia una relación entre las estructuras RT, el momento y la energía. En la figura 16 se muestran las mediciones tomadas a lo largo de $x = 0$ de p_x , en (b) y de E_x , en (d); esto para dos valores de τ_R : 1×10^{-6} (naranja) y 1×10^{-5} (azul). Así, se advierte que los máximos y mínimos de ambas magnitudes coinciden con la morfología del problema. Adicionalmente, al comparar el momento lineal de las dos simulaciones, se percibe que este alcanza mayores valores cuando τ_R ha incrementado. A excepción de dos máximos de p_{xc} con $\tau_R = 1 \times 10^{-6}$ que superan los de 1×10^{-5} cerca de $x = 0.35$ y de $x = 0.6$. Para esto se debe recordar que computacionalmente, las perturbaciones iniciales son completamente aleatorias, tanto en posición,

como en intensidad; lo cual podría justificar tal comportamiento. Por parte de la energía, las tasas de colisión (a) y la densidad de masa (c), las magnitudes del fluido neutro exhiben una clara superioridad cuando τ_R es alto, sobre el caso con $\tau_R = 1 \times 10^{-6}$. En estas curvas es más difícil determinar cual magnitud del fluido cargado es mayor. No obstante, en todas las gráficas es claro que las cantidades asociadas a las partículas neutras tienen valores considerablemente menores a los de las cantidades de partículas cargadas.

Otros autores exponen una correlación entre la implementación de los choques inelásticos y la presencia de estructuras magnéticas, como los plasmoides, en etapas finales de la inestabilidad Popescu Braileanu et al. (2021a). Esta idea no pudo ser constatada en nuestro trabajo debido al tiempo computacional utilizado; sin embargo, este tipo de situaciones sí se evidenciaron en pequeña medida en los plasmas totalmente ionizados con bajo campo magnético (referirse a la sección 4.1).

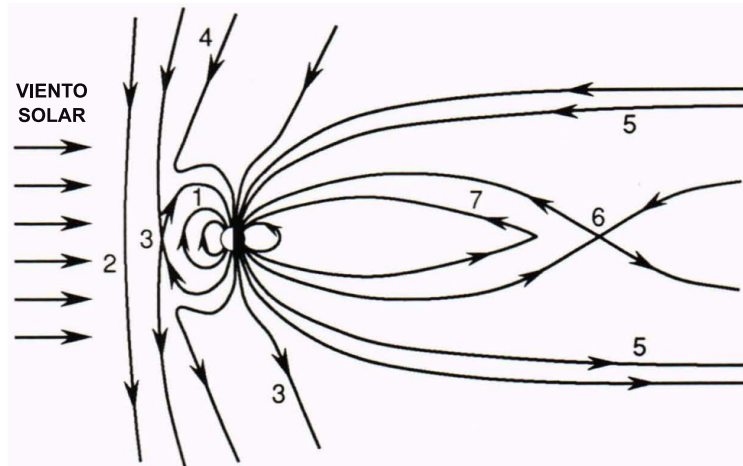
5. Aplicación a la magnetósfera

5.1 La magnetósfera terrestre

El campo magnético de la tierra tiene su origen en las corrientes eléctricas que fluyen en su centro. Este se extiende más allá de la superficie del planeta y alcanza una forma de dipolo, especialmente en la zona diurna terrestre. Allí, a la distancia de $10R_{\odot}$ se encuentra la magnetopausa, que actúa como una frontera entre el campo magnético y el viento solar. Mientras que en la región nocturna, la magnetósfera se extiende a lo largo de una zona denominada la magnetocola, cuyo nombre fue acuñado en virtud de la forma que toman las líneas de campo Hargreaves (2010). El viento solar y por consiguiente, el campo magnético interplanetario (IMF, por su sigla en inglés), tiene un papel fundamental en el transporte de energía en la magnetósfera. Esto ocurre debido a la intensidad proveniente de las partículas solares, las cuales se caracterizan por una velocidad típica de $400 [km/s]$ y una temperatura de $64000 [K]$ Lopez (1990). Uno de los principales fenómenos que permite intercambios energéticos en este sistema son las subtormentas magnetosféricas. Las cuales dejan su rastro más visible en las zonas polares de la tierra, ya que suelen incrementar en tamaño e intensidad las auroras polares. Asimismo, causan perturbaciones en el campo magnético de la región de hasta $1000 [nT]$. Este tipo de eventos consisten de tres fases: el crecimiento, la expansión y la recuperación. Para los propósitos del presente trabajo, nos concentraremos en las primeras etapas únicamente.

Figura 17

Estructura de una subtormenta magnetosférica. (1) Líneas de campo geomagnético cerradas. (2) Líneas del IMF. (3) Primera región X. (4 y 5) Líneas reconectadas. (6) Segunda región X. (7) Nuevas líneas de campo cerradas. Imagen adaptada de: Lopez (1990).



Existen múltiples hipótesis que explican las subtormentas; sin embargo, la más aceptada en la comunidad científica se denomina modelo de línea neutral en la vecindad terrestre y se basa en la representación Dungey de la magnetósfera Lopez (1990); Lui (1991); Dungey (1961). Un esquema teórico de la evolución de la tormenta se presenta en la figura 17. Este modelo se basa en la reconexión magnética como agente principal de las tormentas. Por ende, es importante tener conocimiento de las direcciones de los campos interplanetario y geomagnético. En el caso del primero, no se encuentra un sentido predilecto de B_z^{IMF} , considerando que la coordenada x está en la recta entre el sol y la tierra y la coordenada z es positiva hacia el norte. Mientras que, el lado diurno de la magnetósfera usualmente tiene su componente z en sentido positivo (indicado 1 en 17). Debido a esto, cuando el IMF es negativo (2 en 17), las líneas de campo se reconectan. Esto ocurre en la zona X, llamada así por la geometría evidenciada (3 en 17). Una vez las líneas están unidas,

son arrastradas, por el viento solar, a la parte nocturna de la magnetósfera. Allí empiezan a formar parte de la magnetocola terrestre (5 en 17). Es en este punto que comienza la fase de crecimiento, cuya duración es de 30 minutos aproximadamente. Debido a que la energía del viento solar se ha almacenado en la magnetocola, la hoja de plasma pasa por un adelgazamiento que provoca que las líneas de campo de los lóbulos superior e inferior de la magnetocola se acerquen. En tal momento se presenta una segunda región X y ocurre la reconexión magnética (6 en 17). Las líneas de campo cerradas se acercan a la tierra (7 en 17), en tanto que se libera un plasmóide en la magnetocola, el cual luego dará inicio a la fase de recuperación Lopez (1990); McPherron (2020, 1979).

El proceso descrito, especialmente la segunda reconexión, permite la entrada de flujo magnético y partículas energéticas en la magnetósfera interna o plasmaesfera. Lo cual permite la formación de inestabilidades, como la de Rayleigh-Taylor. Usualmente en los textos que refieren a esta zona se alude a la ocurrencia de una inestabilidad de intercambio, junto a una de *ballooning* (BICI, por su sigla en inglés, *ballooning/interchange instability*). La definición y el uso de estos procesos es ambiguo en la literatura; sin embargo, está claro que estas son inestabilidades conducidas por la presión. Por consiguiente, su mecanismo es análogo al de la IRT, es así que varios autores usan la palabra intercambio como un sinónimo de Rayleigh-Taylor, otros indican que la IRT es un caso específico de la BICI o que al contrario, la BICI es solo una versión de la IRT Satyanarayana et al. (1984); Ferrière (2001); Ma et al. (2016); Pritchett and Coroniti (2010); Hassam (1992). Acá se utilizarán estos fenómenos y su estudio como un punto de referencia y de comparación para la inestabilidad de Rayleigh-Taylor en la plasmaesfera.

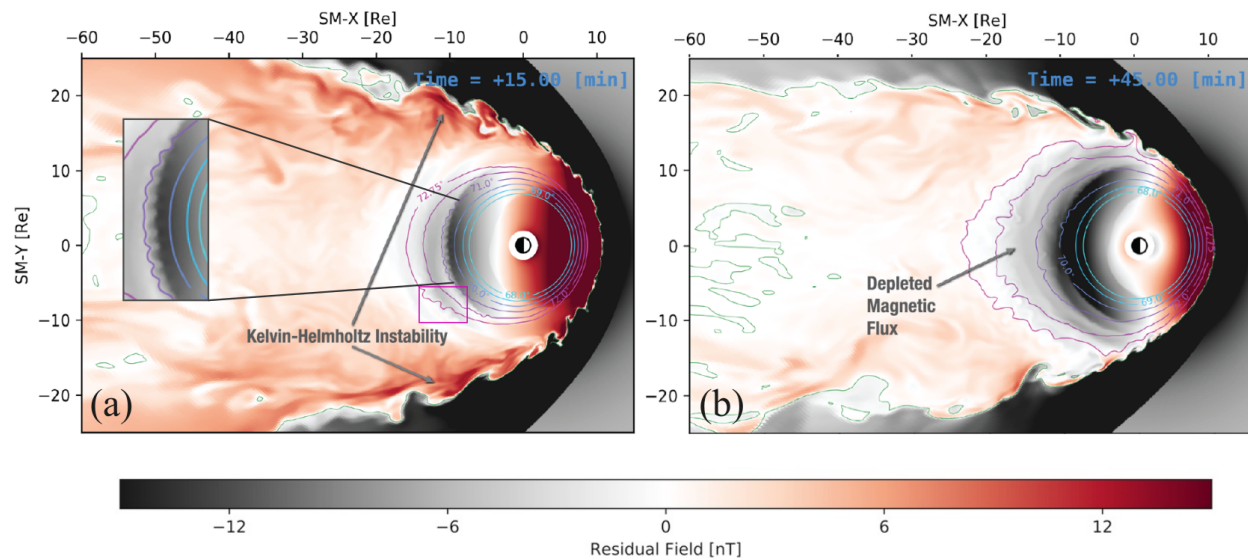
Mediante la misión THEMIS (en inglés, Time History of Events and Macroscale Interactions

during Substorms), se han recolectado datos acerca de perturbaciones en el campo magnético de la magnetocola, las cuales se asocian al desarrollo de la BICI y a la formación de estructuras similares a la punta de un dedo o una burbuja. Según estas investigaciones, el tamaño de las ondas presentadas durante subtormentas estaría entre 4500 km y 6000 km al inicio Panov et al. (2012b); Panov and Pritchett (2018). Sin embargo, es el modelado de la magnetósfera el que permite apreciar el proceso de formación de la inestabilidad, es por esto que en la figura 18 se presenta una simulación desarrollada por Sorathia et al. (2020). Los paneles 5.2.(a) y 5.2.(b) corresponden a instantáneas en $t = 15\text{ min}$ y $t = 45\text{ min}$, respectivamente. No obstante, la simulación inicia en $t = -15\text{ min}$ y el tiempo $t = 0$ coincide con el cambio de signo de la componente z del campo magnético interplanetario (de norte a sur). En el esquema 5.2.(a) se evidencia la formación de la inestabilidad tipo RT o BICI, mientras que en el tiempo $t = 45\text{ min}$ esta se ha disipado casi completamente.

En la figura se pueden evidenciar las características principales del desarrollo de la IRT, como el estiramiento de las líneas de campo magnético, el cual se ve en los contornos de latitud magnética constante (curvas que van del color morado al celeste). Debido a este rasgo específico se genera una amplificación del campo, tal aumento en la magnitud de \vec{B} se observa en el panel 5.2.(b), donde los tonos gris oscuro y negro son más latentes en el lado nocturno de la magnetósfera. Finalmente, es previsible la formación de varias estructuras RT entre el viento solar y el plasma de la magnetocola, algunas son más variables que otras; lo cual se percibe en la simulación también (zona encerrada con color magenta del panel 5.2.(b)).

Figura 18

BICI o IRT desarrollada en la magnetocola cercana a la Tierra. Se presenta el campo magnético residual (a) Captura de la simulación en $t = +15$ min, se hace un acercamiento a las estructuras de dedo. (b) Captura de la simulación en $t = +45$ min. Adaptado de: Sorathia et al. (2020).

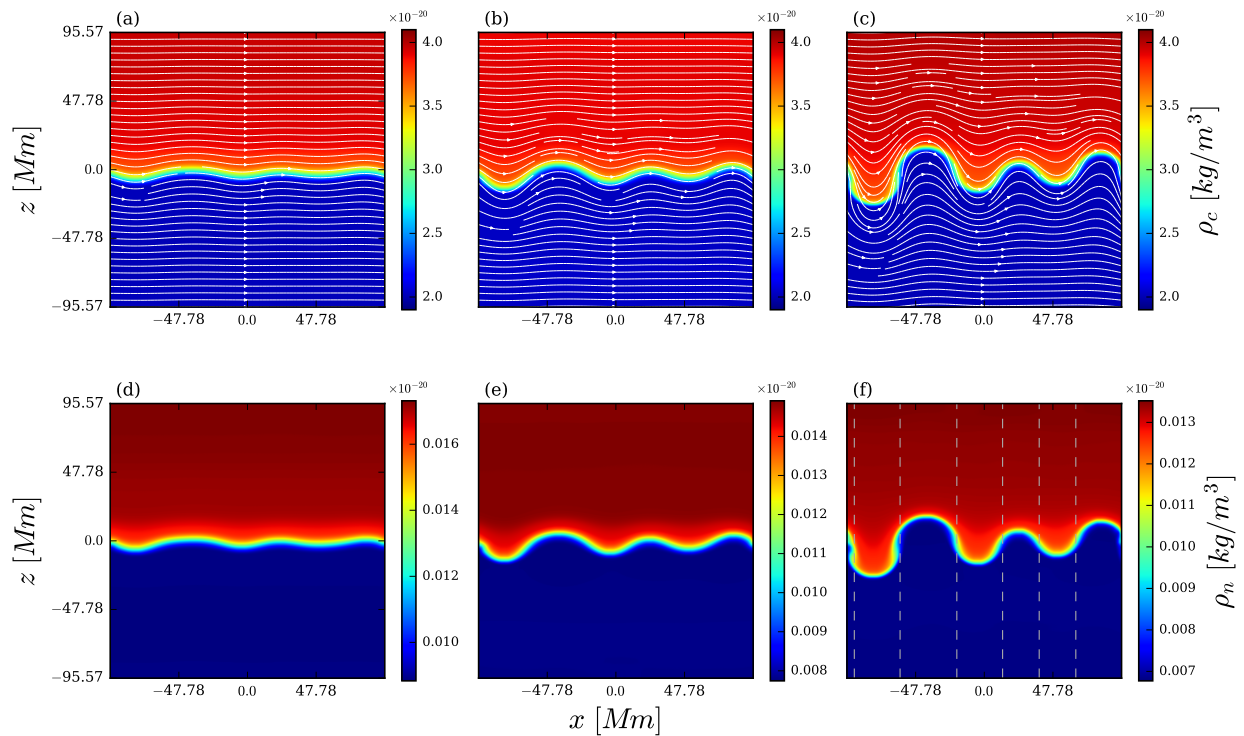


5.2 Resultados

En la simulación que representa la magnetósfera se utilizaron los parámetros de colisiones $\xi = 0.1$ y $\tau_R = 1 \times 10^{-5}$. En la figura 19 se muestra la evolución de la inestabilidad RT, mediante la densidad de masa de los fluidos. Se puede evidenciar que en cada panel, las graficas de ρ_c y las de ρ_n tienen la misma forma; aunque, los valores en la barra de color se

Figura 19

Evolución temporal de la IRT. En los paneles superiores e inferiores se presentan la densidad de masa del fluido cargado y neutro, respectivamente. Se ha utilizado un campo de $B_0 = 0.05$, un parámetro $\tau_R = 1 \times 10^{-5}$ y $\xi = 0.1$. Se presentan los tiempos $t = 22.19$ [min], en (a) y (d); $t = 25.48$ [min], en (b) y (e); y $t = 28.77$ [min], en (c) y (f). Las líneas punteadas grises demarcan las estructuras de la inestabilidad.



diferencian por dos escalas de magnitud. Esta situación cobra sentido por el alto nivel de

transferencia energética y de momentum que se obtiene al implementar ambos tipos de colisiones en el sistema. Mientras que la prevalencia de la tasa de ionización respecto a la de recombinación, justifica los bajos valores de densidad neutra observados. Por otra parte, es importante notar que morfológicamente, la inestabilidad que se desarrolla es similar a la presentada por otros autores que han trabajado en la magnetósfera, como Sorathia et al. (2020). Además, las escalas espaciales y temporales son idénticas a las de la figura 18. De igual manera, otras simulaciones que incorporan los procesos de ionización y recombinación, junto con las colisiones elásticas, en el contexto solar evidencian una apariencia análoga a la de la figura 19 Popescu Braileanu et al. (2021b,c).

Al medir la amplificación del campo magnético respecto a su valor inicial, se alcanza un porcentaje del 1441.94% alrededor del tiempo $t = 50[min]$. Adicionalmente, en la curva de la energía magnética se observan oscilaciones, las cuales ponen en manifiesto la presencia de intercambios de masa entre los dos fluidos, los cuales afectan el aumento de E_{mag} .

Figura 20

Razón entre la energía magnética en el tiempo t y el valor inicial.

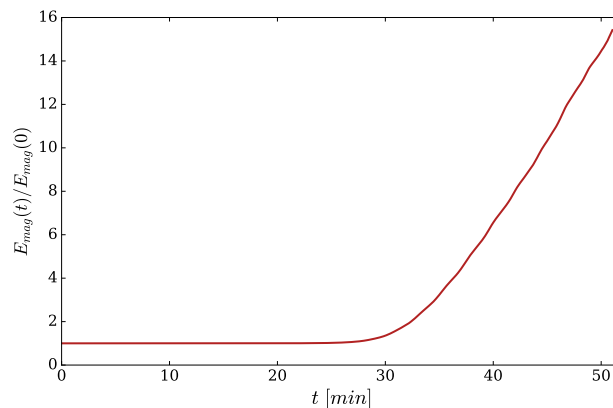
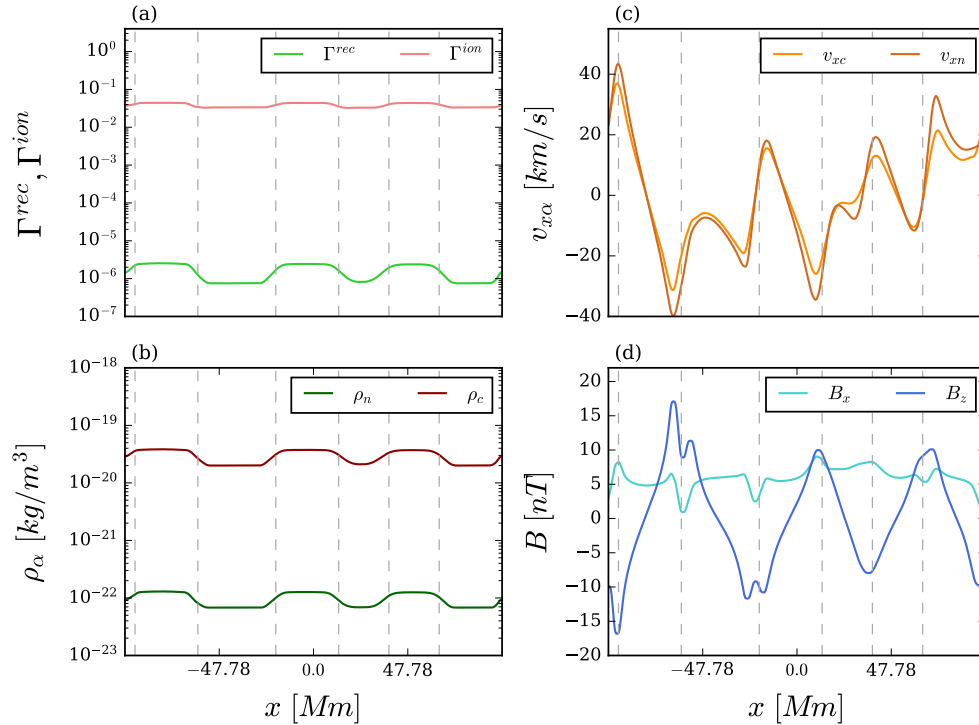


Figura 21

Mediciones tomadas en el tiempo $t = 28.77$ [min]. (a) Tasas de ionización (rojo claro) y recombinación (verde claro). (b) Densidades de masa de los fluidos neutro (verde) y cargado (rojo). (c) Componente x de la velocidad de las partículas cargadas (naranja) y las neutras (marrón). (d) Componentes x (azul claro) y z (azul oscuro) del campo magnético.



Por otro lado, en la figura 21 se exponen las mediciones en el tiempo 28.77 [min] de las densidades de masa, la componente x de la velocidad, las componentes x y z del campo magnético y los Γ^{ion} y Γ^{rec} . Además, la gráfica presenta líneas verticales grises que indican donde se forman las estructuras RT, de acuerdo al panel 5.3.(f). En primer lugar, se pudo comprobar que las zonas que delimitan dichas estructuras coinciden con máximos o mínimos en todas las magnitudes expuestas. En particular, una burbuja del fluido inferior al superior evidencia menores tasas de ionización y recombinación, así como de ρ_c y ρ_n . Asimismo, la componente B_z disminuye a lo largo de estas

zonas y B_x exhibe máximos en los puntos altos de la burbuja independientemente de la dirección en la que esta crezca. Tales observaciones coinciden con las flechas representativas del campo en la figura 5.3.(c). Mientras que, ambas velocidades presenta picos en la zona delimitada por la estructura RT. Adicionalmente, v_{xn} y v_{xc} alcanzan velocidades semejantes, de forma consistente con la transferencia de momento en el sistema. En segundo lugar, los valores de las gráficas 21.(c) y 21.(d) se compararon con las mediciones de la magnetósfera correspondientes a subtormentas del 19 de mayo de 2010 y del 11 de julio de 2017 Motoba et al. (2022); Panov et al. (2022). De tal forma, se comprobó que los valores de B_x y B_z de la figura 21 están en la misma escala de las observaciones. No obstante, los datos de tormentas exhiben campos ligeramente mayores. Asimismo, la velocidad en x de la figura 21 tiene una escala menor a la de las mediciones de THEMIS, pero similar a la de las simulaciones obtenidas por Panov et al. (2022).

6. Conclusiones

El presente trabajo de grado fue enfocado en comprender apropiadamente el comportamiento de la Inestabilidad de Rayleigh Taylor en el sistema magnetosfera viento solar, esto al incluir los procesos de recombinación e ionización al modelo trabajado. Para ello, se realizaron simulaciones que muestran la evolución de la IRT desde tres marcos de trabajo: el plasma totalmente ionizado, el modelo de dos fluidos con colisiones elásticas y el de colisiones inelásticas. Este procedimiento permitió entender a mayor profundidad el desarrollo de la inestabilidad y el efecto que tienen las diferentes interacciones entre partículas sobre el mismo. Para determinar con claridad tal impacto, se llevaron a cabo análisis energéticos y morfológicos de cada sistema. Asimismo, se compararon los datos obtenidos con los de la literatura para verificar su veracidad.

Para cumplir el propósito descrito, fue necesario estudiar la teoría de la magnetohidrodinámica; por consiguiente, se reprodujeron las ecuaciones características de la MHD, a partir de la teoría cinética de Boltzmann. Así, se obtiene el sistema de ecuaciones para un plasma de tres fluidos, el cual se simplifica a uno compuesto por dos tipos de partículas: las cargadas y las neutras. De igual forma, para mejorar la comprensión de la IRT, se realizó un estudio de su etapa lineal; el cual se basó en la teoría de perturbaciones y permitió obtener la tasa de crecimiento que describe a la inestabilidad en presencia de campos magnéticos. Finalmente, para la etapa computacional, fue preciso implementar nuevos módulos en el código MAGNUS, los cuales se encargan de generar la IRT adecuadamente, así como, de incorporar la ionización y la recombinación al sistema.

Inicialmente, en la sección 4.1 se desarrolla la IRT en una configuración de plasma totalmente

ionizado. A partir de lo cual, se logran comprobar varias ideas aceptadas en la literatura, entre estas se encuentra, el caracter represivo del campo magnetico al actuar sobre la inestabilidad, por medio de la tension magnetica. Asimismo, se confirmo la relacion indirecta entre la amplificacion de la energia E_{mag} y el campo inicial aplicado B_0 . En consecuencia, los mayores campos B_0 conllevan a menores incrementos de $B(t)$ en el tiempo, asi como a reducciones en la tasa de crecimiento. Adicionalmente, se corroboro el mecanismo fundamental de la IRT, mediante el cual la energia gravitacional se convierte en energia magnetica y cinetica para fomentar el crecimiento de las estructuras de dedo.

Posteriormente, se utilizo el modelo de dos fluidos con choques elasticos para simular la IRT, lo cual se presenta en la seccion 4.2. Alli, se confirmo que el aumento del parametro ξ , asociado a la seccion de colision, conduce a un mayor intercambio de energia y de momentum entre las particulas cargadas y neutras. A su vez, el incremento de ξ ocasiona que la morfologia de las estructuras RT de ambos fluidos se asemejen; un valor lo suficientemente grande supone que las caracteristicas, como la temperatura, la energia cinetica o la velocidad, sean identicas. Ademas, se muestra que la naturaleza evidenciada previamente por el campo magnetico se mantiene y la amplificacion de E_{mag} crece con la interaccion energetica entre especies, y por consiguiente, con ξ .

A continuacion, se introdujeron las interacciones de masa (ionizacion y recombinacion) en el sistema de la inestabilidad de Rayleigh-Taylor. En esta seccion (4.3) se mostro que el aumento de la frecuencia de recombinacion τ_R , a su vez incrementa la frecuencia de ionizacion, lo cual ocasiona que la densidad de particulas neutras disminuya rapidamente. Por otra parte, el campo

magnético exhibió un comportamiento diferente: a causa de los constantes cambios de masa en el fluido cargado, se generan oscilaciones en la curva de energía magnética en el tiempo. Asimismo, se muestra que la presencia de las colisiones inelásticas genera una mayor amplificación magnética. Por otra parte, se observó que las zonas donde se originan las estructuras de dedo presentan menores tasas de recombinación y de ρ_c . Similarmente, estas regiones se asocian a cambios en el momento y en la energía. Por último, se comprobó que las cantidades asociadas al fluido neutro tienen menores valores, en comparación con las del fluido cargado.

En el capítulo final, se realizó la aplicación a la magnetosfera terrestre con ambos tipos de interacción, tanto elásticas como inelásticas. Allí, se evidenció un comportamiento morfológicamente idéntico en la inestabilidad de ambos fluidos, esto a causa de las transferencias de momento y energía implementadas. Sin embargo, la densidad de masa de las partículas neutras es considerablemente menor a la de las partículas cargadas, debido a que la tasa de ionización siempre es más alta que la de recombinación. Por otra parte se midió la amplificación de la energía magnética en la región de la magnetocola cercana a la tierra, la cual alcanza un valor de $E_{mag}(t)/E_{mag}(0) = 15.42$. Además, se graficaron las velocidades en x y las densidades de masa en ambas especies, las tasas de choque inelástico y las componentes x y z del campo magnético, de tal forma se encuentra una correspondencia entre las estructuras RT y los altibajos en las cantidades mencionadas. Finalmente, se corroboró que las escalas temporales y espaciales de la simulación coincidiesen con las de la inestabilidad presentada en la magnetosfera. Asimismo, las mediciones observacionales de la densidad y del campo magnético tienen valores comparables.

En conclusión, se considera que los procesos de ionización y recombinación tienen efectos

relevantes en el desarrollo de la IRT; ya que, se evidenciaron cambios energeticos y morfologicos en los fluidos, a partir de dicha implementacion. Adicionalmente, se estima que las colisiones inelasticas pueden tener un rol significativo en la magnetosfera terrestre; debido a que inducen variaciones del campo magnetico en el tiempo y mayores incrementos de la energia magnetica respecto a su valor inicial. No obstante, se debe tener en cuenta que el modelo trabajado es simple y debe ser mejorado para una mayor comprension de la inestabilidad en la magnetocola. Algunas extensiones que se pueden hacer al sistema son: el uso de mas especies, que permita la inclusion de otros elementos neutros; la incorporacion de factores como la viscosidad; el modelado de un sistema mas amplio, tal que el campo geomagnetico y el IMF esten acoplados, lo cual permitira visualizar la interaccion entre la IRT y los diferentes fenomenos magnetosfericos. Asimismo, comparar los resultados computacionales con mediciones observacionales mas precisas de la zona y del viento solar, seria de gran beneficio. Respecto a la inestabilidad y el efecto que tienen las colisiones en la tasa de crecimiento, seria positivo realizar estudios semianaliticos en las ecuaciones de la IRT, desde el tratamiento de dos fluidos. Para finalizar, se destaca que el presente proyecto culminara en un articulo de investigacion, el cual se encuentra en construccion aun; sin embargo se proyecta que sea sometido a la revista cientifica *Journal of Fluid Mechanics*.

Referencias Bibliográficas

- Abarzhi, S. I. (2010). Review of theoretical modelling approaches of rayleigh–taylor instabilities and turbulent mixing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 368(1916):1809–1828.
- Baldwin, K. A., Scase, M. M., and Hill, R. J. (2015). The inhibition of the rayleigh-taylor instability by rotation. *Scientific reports*, 5(1):1–12.
- Ballester, J. L., Alexeev, I., Collados, M., Downes, T., Pfaff, R. F., Gilbert, H., Khodachenko, M., Khomenko, E., Shaikhislamov, I. F., Soler, R., Vázquez-Semadeni, E., and Zaqarashvili, T. (2018). Partially ionized plasmas in astrophysics. *Space Science Reviews*, 214(2).
- Barthel, J. and Sowle, D. (1964). A mechanism of injection of solar plasma into the magnetosphere. *Planetary and Space Science*, 12(3):209–217.
- Berger, T., Hillier, A., and Liu, W. (2017). Quiescent prominence dynamics observed with the hinode solar optical telescope. ii. prominence bubble boundary layer characteristics and the onset of a coupled kelvin–helmholtz rayleigh–taylor instability. *The Astrophysical Journal*, 850(1):60.
- Bhatia, P. (1974). Rayleigh-taylor instability of a viscous compressible plasma of variable density. *Astrophysics and Space Science*, 26(2):319–325.
- Birk, G. T. (2002). The onset of rayleigh–taylor instabilities in magnetized partially ionized dense dusty plasmas. *Physics of Plasmas*, 9(3):745–747.

Bittencourt, J. (2013). *Fundamentals of Plasma Physics*. Elsevier, Maarsse, Netherlands.

Bolduc, L. (2002). Gic observations and studies in the hydro-québec power system. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 64(16):1793–1802.

Bond, G., Kromer, B., Beer, J., Muscheler, R., Evans, M. N., Showers, W., Hoffmann, S., Lottibond, R., Hajdas, I., and Bonani, G. (2001). Persistent solar influence on north atlantic climate during the holocene. *Science*, 294(5549):2130–2136.

Braginskii, S. (1965). Reviews of plasma physics.

Braileanu, B. P. (2020). *Simulations of the solar chromosphere in the two-fluid approximation*. PhD thesis, Universidad de La Laguna.

Bucciantini, N., Amato, E., Bandiera, R., Blondin, J., and Del Zanna, L. (2004). Magnetic rayleigh-taylor instability for pulsar wind nebulae in expanding supernova remnants. *Astronomy & Astrophysics*, 423(1):253–265.

Chancellor, J. C., Scott, G. B., and Sutton, J. P. (2014). Space radiation: the number one risk to astronaut health beyond low earth orbit. *Life*, 4(3):491–510.

Chandrasekhar, S. (1961). *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Publications.

Cox, D. P. and Tucker, W. H. (1969). Ionization equilibrium and radiative cooling of a low-density plasma. *The Astrophysical Journal*, 157:1157.

- Díaz, A., Khomenko, E., and Collados, M. (2014). Rayleigh-taylor instability in partially ionized compressible plasmas: One fluid approach. *Astronomy & Astrophysics*, 564:A97.
- Díaz, A., Soler, R., and Ballester, J. (2012). Rayleigh–taylor instability in partially ionized compressible plasmas. *The Astrophysical Journal*, 754(1):41.
- Doludenko, A., Fortova, S., Shepelev, V., and Son, E. (2019). Numerical simulation of the rayleigh–taylor instability of inviscid and viscous fluid. *Physica Scripta*, 94(9):094003.
- Draine, B. (1986). Multicomponent, reacting mhd flows. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 220(1):133–148.
- Dungey, J. W. (1961). Interplanetary magnetic field and the auroral zones. *Physical Review Letters*, 6(2):47.
- Eastwood, J., Biffis, E., Hapgood, M., Green, L., Bisi, M., Bentley, R., Wicks, R., McKinnell, L.-A., Gibbs, M., and Burnett, C. (2017). The economic impact of space weather: Where do we stand? *Risk Analysis*, 37(2):206–218.
- Eggleton, P. P., Dearborn, D. S., and Lattanzio, J. C. (2006). Deep mixing of ^3He : reconciling big bang and stellar nucleosynthesis. *Science*, 314(5805):1580–1583.
- Elgowainy, A. and Ashgriz, N. (1997). The rayleigh–taylor instability of viscous fluid layers. *Physics of Fluids*, 9(6):1635–1649.
- Farrugia, C. J., Gratton, F., Bender, L., Biernat, H. K., Erkaev, N. V., Quinn, J., Torbert, R. B.,

- and Dennisenko, V. (1998). Charts of joint kelvin-helmholtz and rayleigh-taylor instabilites at the dayside magnetopause for strongly northward interplanetary magnetic field. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 103(A4):6703–6727.
- Fernandez, N. and Kaus, B. J. (2015). Pattern formation in 3-d numerical models of down-built diapirs initiated by a rayleigh-taylor instability. *Geophysical Journal International*, 202(2):1253–1270.
- Ferrière, K. (2001). Interchange, quasi-interchange, ballooning modes: What is their exact definition? *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 82(38):420–421.
- Fryxell, B., Mueller, E., and Arnett, D. (1991). Instabilities and clumping in sn 1987a. i-early evolution in two dimensions. *The Astrophysical Journal*, 367:619–634.
- Fu, J., Zhang, H., Cai, H., Yao, P., and Zhu, S. (2023). Effect of ablation on the nonlinear spike growth for the single-mode ablative rayleigh–taylor instability. *Matter and Radiation at Extremes*, 8(1):016901.
- Gerashchenko, S. and Livescu, D. (2016). Viscous effects on the rayleigh-taylor instability with background temperature gradient. *Physics of Plasmas*, 23(7):072121.
- Goedbloed, H., Keppens, R., and Poedts, S. (2019). *Magnetohydrodynamics of Laboratory and Astrophysical Plasmas*. Cambridge University Press, 2nd revised ed. edition.
- Gratton, F., Farrugia, C. J., and Cowley, S. (1996). Is the magnetopause rayleigh-taylor unstable sometimes? *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 101(A3):4929–4937.

- Guglielmi, A., Potapov, A., and Klain, B. (2010). Rayleigh-taylor-kelvin-helmholtz combined instability at the magnetopause. *Geomagnetism and Aeronomy*, 50(8):958–962.
- Hachisu, I., Matsuda, T., Nomoto, K., and Shigeyama, T. (1992). Mixing in ejecta of supernovae. i-general properties of two-dimensional rayleigh-taylor instabilities and mixing width in ejecta of supernovae. *The Astrophysical Journal*, 390:230–252.
- Haigh, J. D. (1999). Modelling the impact of solar variability on climate. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 61(1-2):63–72.
- Hands, A. D., Ryden, K. A., Meredith, N. P., Glauert, S. A., and Horne, R. B. (2018). Radiation effects on satellites during extreme space weather events. *Space Weather*, 16(9):1216–1226.
- Hargreaves, J. K. (2010). *Solar-Terrestrial Environment An Introduction to Geospace - the Science of the Terrestrial Upper Atmosphere, Ionosphere, and Magnetosphere*. Cambridge University Press.
- Hassam, A. (1992). Nonlinear stabilization of the rayleigh–taylor instability by external velocity shear. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 4(3):485–487.
- Hillier, A. (2017). The magnetic rayleigh–taylor instability in solar prominences. *Reviews of Modern Plasma Physics*, 2(1).
- Hillier, A. (2018). The magnetic rayleigh–taylor instability in solar prominences. *Reviews of Modern Plasma Physics*, 2(1):1–47.

- Hillier, A. S. (2016). On the nature of the magnetic rayleigh–taylor instability in astrophysical plasma: the case of uniform magnetic field strength. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 462(2):2256–2265.
- Isobe, H., Miyagoshi, T., Shibata, K., and Yokoyama, T. (2006). Three-dimensional simulation of solar emerging flux using the earth simulator i. magnetic rayleigh-taylor instability at the top of the emerging flux as the origin of filamentary structure. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 58(2):423–438.
- Kadowaki, L. H., Dal Pino, E. M. D. G., and Stone, J. M. (2018). Mhd instabilities in accretion disks and their implications in driving fast magnetic reconnection. *The Astrophysical Journal*, 864(1):52.
- Kataoka, R., Shiota, D., Fujiwara, H., Jin, H., Tao, C., Shinagawa, H., and Miyoshi, Y. (2022). Unexpected space weather causing the reentry of 38 starlink satellites in february 2022.
- Kelley, M. (1989). *The Earth's Ionosphere: Plasma Physics and Electrodynamics (International Geophysics)*. Academic Press, 1 edition.
- Kelley, M., Haerendel, G., Kappler, H., Valenzuela, A., Balsley, B., Carter, D. A., Ecklund, W. L., Carlson, C., Häusler, B., and Torbert, R. (1976). Evidence for a rayleigh-taylor type instability and upwelling of depleted density regions during equatorial spread f. *Geophysical Research Letters*, 3(8):448–450.
- Khomenko, E., Díaz, A., De Vicente, A., Collados, M., and Luna, M. (2014). Rayleigh-taylor

- instability in prominences from numerical simulations including partial ionization effects. *Astronomy & Astrophysics*, 565:A45.
- Korenaga, J. (2005). Firm mantle plumes and the nature of the core-mantle boundary region. *Earth and Planetary Science Letters*, 232(1-2):29–37.
- Leake, J., DeVore, C., Thayer, J., Burns, A., Crowley, G., Gilbert, H., Huba, J., Krall, J., Linton, M., Lukin, V., et al. (2014). Ionized plasma and neutral gas coupling in the sun's chromosphere and earth's ionosphere/thermosphere. *Space Science Reviews*, 184(1):107–172.
- Lean, J. L. (2017). Sun-climate connections. In *Oxford Research Encyclopedia of Climate Science*.
- Li, X. (1993). Study of three-dimensional rayleigh–taylor instability in compressible fluids through level set method and parallel computation. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 5(8):1904–1913.
- Liberatore, S. and Bouquet, S. (2008). Analytical modeling of magnetic rayleigh–taylor instabilities in compressible fluids. *Physics of Fluids*, 20(11):116101.
- Liberatore, S., Jaouen, S., Tabakhoff, E., and Canaud, B. (2009). Compressible magnetic rayleigh–taylor instability in stratified plasmas: Comparison of analytical and numerical results in the linear regime. *Physics of Plasmas*, 16(4):044502.
- Livescu, D. (2004). Compressibility effects on the rayleigh–taylor instability growth between immiscible fluids. *Physics of fluids*, 16(1):118–127.

- Lopez, R. E. (1990). Magnetospheric substorms. *Johns Hopkins APL Technical Digest*, 11:264–271.
- Lora-Clavijo, F., Cruz-Osorio, A., and Guzmán, F. (2015). Cafe: a new relativistic mhd code. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 218(2):24.
- Lui, A. (1991). A synthesis of magnetospheric substorm models. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 96(A2):1849–1856.
- Ma, X., Delamere, P., and Otto, A. (2016). Plasma transport driven by the rayleigh-taylor instability. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 121(6):5260–5271.
- MacTaggart, D. and Hillier, A. (2020). *Topics in Magnetohydrodynamic Topology, Reconnection and Stability Theory (CISM International Centre for Mechanical Sciences, 591)*. Springer, 1st ed. 2020 edition.
- Maneva, Y. G., Laguna, A. A., Lani, A., and Poedts, S. (2017). Multi-fluid modeling of magnetosonic wave propagation in the solar chromosphere: effects of impact ionization and radiative recombination. *The Astrophysical Journal*, 836(2):197.
- Matsumoto, J. and Masada, Y. (2013). Two-dimensional numerical study for rayleigh–taylor and richtmyer–meshkov instabilities in relativistic jets. *The Astrophysical Journal Letters*, 772(1):L1.
- McPherron, R. L. (1979). Magnetospheric substorms. *Reviews of Geophysics*, 17(4):657–681.

- McPherron, R. L. (2020). Early studies in solar wind coupling and substorms. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 125(5):e2019JA027615.
- Meier, E. and Shumlak, U. (2012). A general nonlinear fluid model for reacting plasma-neutral mixtures. *Physics of Plasmas*, 19(7):072508.
- Mikaelian, K. O. (1996). Rayleigh-taylor instability in finite-thickness fluids with viscosity and surface tension. *Physical Review E*, 54(4):3676.
- Mitra, A., Roychoudhury, R., and Khan, M. (2016). Stabilization of rayleigh–taylor instability in the presence of viscosity and compressibility: A critical analysis. *Physics of Plasmas*, 23(2):024503.
- Moldwin, M. (2008). *An Introduction to Space Weather*.
- Motoba, T., Sitnov, M. I., Stephens, G. K., and Gershman, D. J. (2022). A new perspective on magnetotail electron and ion divergent flows: Mms observations. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 127(10):e2022JA030514.
- Navarro, A., Lora-Clavijo, F., and González, G. A. (2017). Magnus: a new resistive mhd code with heat flow terms. *The Astrophysical Journal*, 844(1):57.
- Navarro, A., Lora-Clavijo, F., Murawski, K., and Poedts, S. (2021). Thermal conduction effects on formation of chromospheric solar tadpole-like jets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 500(3):3329–3334.

- Navarro, A., Murawski, K., Wójcik, D., and Lora-Clavijo, F. (2019). Numerical simulations of the emerging plasma blob into a solar coronal hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 489(2):2769–2774.
- Nelson, G. A. (2016). Space radiation and human exposures, a primer. *Radiation Research*, 185(4):349–358.
- Oliver, R., Soler, R., Terradas, J., and Zaqarashvili, T. (2016). Dynamics of coronal rain and descending plasma blobs in solar prominences. ii. partially ionized case. *The Astrophysical Journal*, 818(2):128.
- Panov, E., Nakamura, R., Baumjohann, W., Kubyshkina, M., Artemyev, A., Sergeev, V., Petrukovich, A., Angelopoulos, V., Glassmeier, K.-H., McFadden, J., et al. (2012a). Kinetic ballooning/interchange instability in a bent plasma sheet. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 117(A6).
- Panov, E. and Pritchett, P. (2018). Dawnward drifting interchange heads in the earth's magnetotail. *Geophysical Research Letters*, 45(17):8834–8843.
- Panov, E., Sergeev, V., Pritchett, P., Coroniti, F., Nakamura, R., Baumjohann, W., Angelopoulos, V., Auster, H., and McFadden, J. (2012b). Observations of kinetic ballooning/interchange instability signatures in the magnetotail. *Geophysical Research Letters*, 39(8).
- Panov, E. V., Lu, S., and Pritchett, P. L. (2022). Magnetotail ion structuring by kinetic ballooning-interchange instability. *Geophysical Research Letters*, 49(3):e2021GL096796.

- Peng, C., Chu, M., Song, Y., Deng, J., and Wu, J. (2023). Study of the effect of magnetic field characteristics on rayleigh-taylor instability with density gradient layers. *Computers & Fluids*, 250:105726.
- Perkins, L., Ho, D.-M., Logan, B., Zimmerman, G., Rhodes, M., Strozzi, D., Blackfield, D., and Hawkins, S. (2017). The potential of imposed magnetic fields for enhancing ignition probability and fusion energy yield in indirect-drive inertial confinement fusion. *Physics of plasmas*, 24(6):062708.
- Pettit, J., Randall, C., Marsh, D., Bardeen, C., Qian, L., Jackman, C., Woods, T., Coster, A., and Harvey, V. (2018). Effects of the september 2005 solar flares and solar proton events on the middle atmosphere in waccm. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 123(7):5747–5763.
- Popescu Braileanu, B., Lukin, V., and Khomenko, E. (2021a). Magnetic field amplification and structure formation by the rayleigh-taylor instability. *arXiv e-prints*, pages arXiv–2112.
- Popescu Braileanu, B. P., Lukin, V., Khomenko, E., and de Vicente, A. (2021b). Two-fluid simulations of rayleigh-taylor instability in a magnetized solar prominence thread-i. effects of prominence magnetization and mass loading. *Astronomy & Astrophysics*, 646:A93.
- Popescu Braileanu, B. P., Lukin, V., Khomenko, E., and de Vicente, Á. (2021c). Two-fluid simulations of rayleigh-taylor instability in a magnetized solar prominence thread-ii. effects of collisionality. *Astronomy & Astrophysics*, 650:A181.

- Porth, O., Komissarov, S. S., and Keppens, R. (2014). Rayleigh–taylor instability in magnetohydrodynamic simulations of the crab nebula. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 443(1):547–558.
- Priest, E. R. (1984). *Solar Magnetohydrodynamics*. Springer.
- Pritchett, P. and Coroniti, F. (2010). A kinetic ballooning/interchange instability in the magnetotail. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 115(A6).
- Pullin, D. (1982). Numerical studies of surface-tension effects in nonlinear kelvin–helmholtz and rayleigh–taylor instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 119:507–532.
- R Goldston, P. R. (1995). *Introduction to Plasma Physics*. CRC Press, pap/dskt edition.
- Rayleigh, R. (1882). Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proceedings of the London mathematical society*, 1(1):170–177.
- Richmond, A. D. (1973). Self-induced motions of thermal plasma in the magnetosphere and the stability of the plasmopause. *Radio Science*, 8(11):1019–1027.
- Roberts, P. H. and Diamond, P. H. (2004). Magnetohydrodynamics. In *Encyclopedia of Energy*, pages 705–732. Elsevier.
- Ruderman, M., Terradas, J., and Ballester, J. (2014). Rayleigh–taylor instabilities with sheared magnetic fields. *The Astrophysical Journal*, 785(2):110.

- Satyanarayana, P., Guzdar, P., Huba, J., and Ossakow, S. (1984). Rayleigh-taylor instability in the presence of a stratified shear layer. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 89(A5):2945–2954.
- Shin, S., Sohn, S.-I., and Hwang, W. (2022). Numerical simulation of single-and multi-mode rayleigh–taylor instability with surface tension in two dimensions. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 91:141–151.
- Sorathia, K., Merkin, V., Panov, E., Zhang, B., Lyon, J., Garretson, J., Ukhorskiy, A., Ohtani, S., Sitnov, M., and Wiltberger, M. (2020). Ballooning-interchange instability in the near-earth plasma sheet and auroral beads: Global magnetospheric modeling at the limit of the mhd approximation. *Geophysical research letters*, 47(14):e2020GL088227.
- Srinivasan, B. and Tang, X.-Z. (2013). The mitigating effect of magnetic fields on rayleigh-taylor unstable inertial confinement fusion plasmas. *Physics of plasmas*, 20(5):056307.
- Taylor, G. I. (1950). The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. i. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 201(1065):192–196.
- Thomsen, M. (2004). Why k_p is such a good measure of magnetospheric convection. *Space Weather*, 2(11).
- Toma, K., Komissarov, S. S., and Porth, O. (2017). Rayleigh–taylor instability in two-component relativistic jets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 472(1):1253–1258.

- Walsh, C. A. (2022). Magnetized ablative Rayleigh-Taylor instability in three dimensions. *Physical Review E*, 105(2).
- Wandurraga, P. C., Navarro, A., and Lora-Clavijo, F. D. (2021). Propagación de ondas de alfvén atmósfera solar estratificada.
- Wang, Y.-M. and Nepveu, M. (1983). A numerical study of the nonlinear rayleigh-taylor instability, with application to accreting x-ray sources. *Astronomy and Astrophysics*, 118:267–274.
- Yamamoto, T. (2008). A linear analysis of the hybrid kelvin-helmholtz/rayleigh-taylor instability in an electrostatic magnetosphere-ionosphere coupling system. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 113(A6).
- Zhang, F., Poedts, S., Lani, A., Kuźma, B., and Murawski, K. (2021). Two-fluid modeling of acoustic wave propagation in gravitationally stratified isothermal media. *The Astrophysical Journal*, 911(2):119.
- Zhou, Y. (2017). Rayleigh–taylor and richtmyer–meshkov instability induced flow, turbulence, and mixing. ii. *Physics Reports*, 723:1–160.
- Zhu, G., Shi, P., Yang, Z., Zheng, J., Luo, M., Ying, J., and Sun, X. (2019). A new method to suppress the rayleigh–taylor instability in a linear device. *Physics of Plasmas*, 26(4):042107.
- Zhu, P. and Raeder, J. (2013). Plasmoid formation in current sheet with finite normal magnetic component. *Physical Review Letters*, 110(23):235005.
-

Apéndices

Apéndice A. Derivación de la tasa de crecimiento de la Inestabilidad de Rayleigh-Taylor

El propósito de esta sección es derivar la ecuación (38), a partir de la teoría de perturbaciones. Este proceso se desarrolla con base en los procedimientos realizados por Chandrasekhar (1961).

Se considera un estado estático en el que un fluido de densidad variable se arregla de forma que tiene una estratificación horizontal y su presión p y densidad ρ son funciones de la coordenada z únicamente. Con el fin de entender mejor el efecto del campo magnético sobre la IRT no se incluirán otros procesos, como la viscosidad, la resistividad, la tensión superficial, la compresibilidad, entre otros. No obstante, el procedimiento para tenerlos en cuenta es análogo al presentado. Con el objetivo de caracterizar el equilibrio de este sistema, se desea obtener cuál es la condición sobre n^2 que determina si se desarrolla una inestabilidad. Para lo cual se partirá de la teoría de perturbaciones. Se supone que el sistema ha sido alterado o desequilibrado ligeramente, de forma que la densidad en cualquier punto (x, y, z) será $\rho + \delta\rho$ y δp denotará el correspondiente cambio de la presión. Las componentes de la velocidad se designarán como u_i ($i = 1, 2, 3$). El campo magnético uniforme se toma transversal a la dirección de la gravedad, en el eje x ,

$$\begin{aligned} H_x &= H + h_x, \\ H_y &= h_y, \\ H_z &= h_z, \end{aligned} \tag{40}$$

donde $\vec{h} = h_x\hat{i} + h_y\hat{j} + h_z\hat{k}$ es la perturbación a la intensidad del campo magnético, que

también tiene carácter solenoidal.

Para desarrollar la teoría de perturbaciones se utilizará la ecuación de momento de la MHD escrita en componentes. Para el caso sin viscosidad ni términos de colisiones esta es,

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \vec{F}. \quad (41)$$

donde \vec{F} corresponde a la fuerza aplicada en el sistema, esto será una suma de la fuerza gravitatoria y la de Lorentz ($\vec{F}_L + \vec{F}_g$). Ahora se obtendrá \vec{F}_L ,

$$\vec{F}_L = \mu \vec{J} \times \vec{H},$$

que al utilizar la ecuación de Ampère se escribe como,

$$\vec{F}_L = \mu (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{H},$$

lo cual al escribirse en componentes da,

$$F_{Li} = \mu \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \frac{\partial H_m}{\partial x_l} H_k = \mu (\delta_{im} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{km}) \frac{\partial H_m}{\partial x_l} H_k,$$

$$F_{Li} = \mu H_k \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial x_i} \right).$$

Al incluir esto en (41), se tendrá,

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \mu H_j \frac{\partial H_i}{\partial x_j} + \mu H_j \frac{\partial H_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + F_{gi}.$$

Esta ecuación describe el movimiento del fluido. Al aplicarla al sistema descrito anteriormente, resultan en las ecuaciones,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \delta p, \quad (42)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \mu H \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \delta p, \quad (43)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} - \mu H \left(\frac{\partial h_z}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \delta p - g \delta \rho, \quad (44)$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = \vec{H} \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ y } \frac{\partial}{\partial t} \delta \rho = -w \frac{d\rho}{dz}, \quad (45)$$

donde se ha utilizado la condición de equilibrio electrostático y se denotan las componentes de la velocidad como (u, v, w) . Para las soluciones al sistema que tienen la dependencia de un modo normal,

$$\exp[i\vec{k} \cdot \vec{r} + nt],$$

(donde $\vec{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j}$ y \vec{k} , ω son constantes) las ecuaciones se convierten en,

$$\rho nu = -ik_x \delta p, \quad (46)$$

$$\rho nv - \mu H (ik_x h_y - ik_y h_x) = -ik_y \delta p, \quad (47)$$

$$\rho nw - \mu H (ik_x h_z - Dh_x) = -D\delta p + \frac{g}{n}(D\rho)w, \quad (48)$$

$$h = \frac{ik_x}{n}Hu. \quad (49)$$

donde $D = d/dz$. Al remplazar la ecuación (49) se tiene,

$$\rho nv - \mu H \left[ik_x \left(\frac{ik_x}{n}Hv \right) - ik_y \left(\frac{ik_x}{n}Hu \right) \right] = -ik_y \delta p, \quad (50)$$

$$\rho nw - \mu H \left[ik_x \left(\frac{ik_x}{n}Hw \right) - D \left(\frac{ik_x}{n}Hu \right) \right] = -D\delta p + \frac{g}{n}(D\rho)w, \quad (51)$$

donde la última ecuación se reescribe como,

$$\rho nw - \frac{ik_x}{n}\mu H^2 (ik_x w - Du) = -D\delta p + \frac{g}{n}(D\rho)w. \quad (52)$$

Y la ecuación (50) también se puede reescribir a partir de definir $\gamma = ik_x v - ik_y u$, que es la componente en z de la vorticidad ($\vec{\lambda} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$),

$$\rho nv - \frac{ik_x}{n}\mu H^2 \gamma = -ik_y \delta p. \quad (53)$$

Ahora, se multiplican las ecuaciones (46) y (53) por $-ik_y$ y ik_x , respectivamente, de forma que se convierten en

$$\begin{aligned} (-ik_y)\rho n u &= (-ik_y)(-ik_x)\delta p \\ (ik_x)\left(\rho n v - \frac{ik_x}{n}\mu H^2\gamma\right) &= (ik_x)(-ik_y)\delta p, \end{aligned}$$

que al sumarlas, se obtiene

$$\left(\rho n + \frac{k_x^2}{n}\mu H^2\right)\gamma = 0, \quad (54)$$

ya que el término en paréntesis no puede ser cero siempre, se concluye que la componente de la vorticidad debe anularse,

$$\gamma = ik_x v - ik_y u = 0. \quad (55)$$

Al tener eso en cuenta, la ecuación (53) se convierte en,

$$\rho n v = -ik_y \delta p. \quad (56)$$

Ahora, la ecuación de las componentes en x y y se multiplican por $-ik_x$ y $-ik_y$,

$$(-ik_x)\rho nu = -k_x^2 \delta p,$$

$$(-ik_y)\rho nv = -k_y^2 \delta p,$$

que al ser sumadas dan,

$$\rho n D w = -k^2 \delta p, \quad (57)$$

donde es importante tener en cuenta el carácter solenoidal de la velocidad, expresado como $ik_x u + ik_y v + D w = 0$. Al utilizar (57) en la ecuación (46) se obtiene,

$$u = i \frac{k_x}{k^2} D w. \quad (58)$$

La ecuación (58) se reemplaza en la expresión previa (52), de forma que,

$$\begin{aligned} \rho n w - \frac{ik_x}{n} \mu H^2 \left[ik_x w - D \left(i \frac{k_x}{k^2} D w \right) \right] &= -D \delta p + \frac{g}{n} (D \rho) w, \\ \rho n w - \frac{\mu H^2 k_x^2}{n k^2} (D^2 - k^2) w &= -D \delta p + \frac{g}{n} (D \rho) w. \end{aligned} \quad (59)$$

De la ecuación (57), se tiene $\delta p = -\rho n D w / k^2$. Lo cual se reemplaza en el lado derecho de la ecuación previa,

$$D(\rho D w) + \frac{\mu H^2 k_x^2}{n^2} (D^2 - k^2) w - k^2 \rho w = -\frac{g k^2}{n^2} (D \rho) w. \quad (60)$$

Si se toman perturbaciones en los que la componente del vector de onda paralela a \vec{H} es nula ($k_x = 0$), la ecuación previa se reduce a,

$$D(\rho Dw) - k^2 \rho w = -\frac{gk^2}{n^2} (D\rho)w, \quad (61)$$

esta expresión es la misma que se obtiene al perturbar el sistema sin ningún campo magnético presente. De forma que si las ondas desarrolladas no están en la dirección de \vec{H} , la inestabilidad obtenida es únicamente hidrodinámica. No obstante, cuando está componente no se anula, se obtienen resultados distintos. Para probar esto se integrará el sistema, con límites en la frontera de los fluidos ($z = 0$). Teniendo en cuenta que la velocidad w y el campo magnético h_z deben ser continuos allí, se obtiene,

$$\Delta_0(\rho Dw) + \frac{\mu H^2 k_x^2}{n^2} \Delta_0(Dw) = -\frac{gk^2}{n^2} (\rho_2 - \rho_1)w_0. \quad (62)$$

La solución para ω que se obtiene de la ecuación (60) es,

$$\omega = Ae^{kz} + Be^{-kz}.$$

Ya que la velocidad se debe anular a distancias lejanas a la frontera; en el fluido inferior, cuando $z \rightarrow -\infty$ y en el fluido de encima, cuando $z \rightarrow \infty$, entonces,

$$w_1 = w_0 e^{kz}; \text{ para } z < 0, \quad (63)$$

$$w_2 = w_0 e^{-kz}; \text{ para } z > 0, \quad (64)$$

donde se debe asumir la misma constante para asegurar la continuidad de w en la frontera.

Al aplicar las solución encontrada en la condición (62),

$$\begin{aligned} -\rho_2 w_0 k - \rho_1 w_0 k + \frac{\mu H^2 k_x^2}{n^2} (-2w_0 k) &= -\frac{gk^2}{n^2} (\rho_2 - \rho_1) w_0, \\ -\frac{2\mu H^2 k_x^2}{n^2} + \frac{gk}{n^2} (\rho_2 - \rho_1) &= (\rho_2 + \rho_1), \end{aligned}$$

lo cual se puede escribir como,

$$n^2 = gkA - \frac{2\mu H^2 k_x^2}{\rho_2 + \rho_1}, \quad (65)$$

donde se tiene en cuenta la definición del número de Atwood, $A = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$. La ecuación (65) se puede escribir en términos del campo magnético como,

$$n^2 = gkA - \frac{2B^2 k_x^2}{\mu(\rho_2 + \rho_1)}. \quad (66)$$

Apéndice B. Derivación de las ecuaciones de la MHD desde la ecuación de Boltzmann

La evolución de la función de distribución está dada por la ecuación de Boltzmann,

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll},$$

la cual se debe integrar en todo el espacio de velocidades, con el fin de obtener una descripción macroscópica del problema,

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle g \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha \langle g \vec{v} \rangle_\alpha) - \frac{n_\alpha}{m_\alpha} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} g \rangle_\alpha = \int g \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{coll} d^3 v, \quad (67)$$

donde $g = g(\vec{v})$ es un peso estadístico con respecto a la velocidad. Ya que (67) es una expresión general para el transporte de alguna cantidad, es posible obtener las ecuaciones de la MHD al variar la función $g(\vec{v})$. De este modo, con distintos pesos estadísticos, se obtendrán la ecuación de continuidad, la de momento y la de energía.

Ecuación de Continuidad

Esta se obtiene al tomar el momento como uno ($g = 1$), de forma que,

$$\langle g \rangle_\alpha = 1,$$

$$\langle g \vec{v} \rangle_\alpha = \langle \vec{v} \rangle_\alpha = \vec{u}_\alpha,$$

$$\nabla_{\vec{v}} g = 0,$$

de forma que \vec{u}_α es la velocidad macroscópica de las partículas. Al remplazar en (67), se obtiene la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) = \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3v,$$

y al multiplicar por la masa de la partícula de especie α , se obtiene

$$\boxed{\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{u}_\alpha) = S_\alpha, \text{ donde } S_\alpha = m_\alpha \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3v} \quad (68)$$

donde ρ_α es la densidad de masa y S_α se interpreta como la razón por unidad de volumen y de masa a la cual las partículas α son producidas o destruidas debido a interacciones con otras especies. Por tal motivo, al término S_α se le asocia con los procesos de recombinación e ionización. En el caso en el que no se generan colisiones en el plasma, este término se anula.

Ecuación de transporte de momentum

En este caso, el peso estadístico se toma como $g(\vec{v}) = m_\alpha \vec{v}$, de forma que al remplazar en la ecuación de Boltzmann se obtiene,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \rangle_\alpha)}_{(1)} + \underbrace{\nabla \cdot (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_\alpha)}_{(2)} - \underbrace{n_\alpha \langle (\vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}}) \vec{v} \rangle_\alpha}_{(3)} = \vec{R}_\alpha, \quad (69)$$

$$\text{donde } \vec{R}_\alpha = m_\alpha \int \vec{v} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3v,$$

para obtener la ecuación de momentum se analizará cada término de (69),

(1) El primer término se puede escribir como,

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_{\alpha}m_{\alpha}\langle\vec{v}\rangle_{\alpha}) = \rho_{\alpha}\frac{\partial\vec{u}_{\alpha}}{\partial t} + \vec{u}_{\alpha}\frac{\partial\rho_{\alpha}}{\partial t},$$

y al remplazar la ecuación de continuidad en el lado derecho de la ecuación se obtiene,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\alpha}\vec{u}_{\alpha}) = \rho_{\alpha}\frac{\partial\vec{u}_{\alpha}}{\partial t} - \vec{u}_{\alpha}\nabla\cdot(\rho_{\alpha}\vec{u}_{\alpha}) + \vec{u}_{\alpha}S_{\alpha}. \quad (70)$$

- (2) En el segundo término de (69), la cantidad $\vec{v}\vec{v}$ representa un producto tensorial de la velocidad de la partícula consigo misma. Adicionalmente, se considera que \vec{v} se puede escribir por medio de la suma de dos velocidades asociadas, \vec{u}_{α} y \vec{C}_{α} (ver (3)). Al remplazar esto se tiene,

$$\nabla\cdot(\rho_{\alpha}\langle\vec{v}\vec{v}\rangle_{\alpha}) = \nabla\cdot(\rho_{\alpha}\vec{u}_{\alpha}\vec{u}_{\alpha} + \rho_{\alpha}\langle\vec{C}_{\alpha}\vec{C}_{\alpha}\rangle_{\alpha}), \quad (71)$$

teniendo en cuenta que el promedio de \vec{C}_{α} es 0, lo cual se puede ver al promediar la velocidad $\langle\vec{v}\rangle_{\alpha} = \langle\vec{C}_{\alpha}\rangle_{\alpha} + \vec{u}_{\alpha}$. El primer término del lado derecho de la ecuación (71) se puede escribir como la derivada de un producto,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) &= \frac{\partial}{\partial x} (\rho_\alpha u_{\alpha x} \vec{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_\alpha u_{\alpha y} \vec{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_\alpha u_{\alpha z} \vec{u}_\alpha), \\ \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) &= \rho_\alpha \left(u_{\alpha x} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial x} + u_{\alpha y} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial y} + u_{\alpha z} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial z} \right) + \vec{u}_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho_\alpha u_{\alpha x}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_\alpha u_{\alpha y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_\alpha u_{\alpha z}) \right], \\ \nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) &= \rho_\alpha (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha + \vec{u}_\alpha [\nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{u}_\alpha)],\end{aligned}$$

al remplazar este resultado en la ecuación (71), se obtiene

$$\nabla \cdot (\rho_\alpha \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_\alpha) = \rho_\alpha (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha + \vec{u}_\alpha [\nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{u}_\alpha)] + \nabla \cdot (\rho_\alpha \langle \vec{C}_\alpha \vec{C}_\alpha \rangle)$$

donde se encuentra el término $\rho_\alpha \langle \vec{C}_\alpha \vec{C}_\alpha \rangle$, que se refiere al tensor de presión cinética (ver (4)). De forma que el segundo término finalmente es,

$$\nabla \cdot (\rho_\alpha \langle \vec{v} \vec{v} \rangle_\alpha) = \rho_\alpha (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha + \vec{u}_\alpha [\nabla \cdot (\rho_\alpha \vec{u}_\alpha)] + \nabla \cdot \mathbb{M}_\alpha + \nabla p_\alpha. \quad (72)$$

- (3) El tercer término del lado izquierdo de la ecuación (69) es el promedio de la fuerza electromagnética por el operador nabla aplicado al vector velocidad de las partículas α . Al realizar el producto interno se tiene,

$$n_{\alpha} \langle (\vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}}) \vec{v} \rangle_{\alpha} = n_{\alpha} \left\langle \left(F_x \frac{\partial}{\partial v_x} + F_y \frac{\partial}{\partial v_y} + F_z \frac{\partial}{\partial v_z} \right) \vec{v} \right\rangle_{\alpha},$$

lo cual es equivalente a,

$$n_{\alpha} \langle (\vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}}) \vec{v} \rangle_{\alpha} = n_{\alpha} \langle \vec{F} \rangle_{\alpha}. \quad (73)$$

Al remplazar las expresiones (70), (72) y (73) en la ecuación de evolución del momentum se obtiene,

$$\rho_{\alpha} \frac{\partial \vec{u}_{\alpha}}{\partial t} + \rho_{\alpha} (\vec{u}_{\alpha} \cdot \nabla) \vec{u}_{\alpha} + \nabla \cdot \mathbb{M}_{\alpha} + \nabla p_{\alpha} - n_{\alpha} \langle \vec{F} \rangle_{\alpha} = \vec{R}_{\alpha} - \vec{u}_{\alpha} S_{\alpha}.$$

Para encontrar la expresión final de la ecuación de momentum se utilizará el operador de derivada lagrangiana $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_{\alpha} \cdot \nabla$, asimismo se remplazará \vec{F} como la suma de las fuerzas electromagnética y gravitacional, $\vec{F} = q_{\alpha}(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + m_{\alpha} \vec{g}$,

$$\boxed{\rho_{\alpha} \frac{D \vec{u}_{\alpha}}{Dt} = q_{\alpha} n_{\alpha} (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + m_{\alpha} n_{\alpha} \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{M}_{\alpha} - \nabla p_{\alpha} + \vec{R}_{\alpha} - \vec{u}_{\alpha} S_{\alpha}} \quad (74)$$

Ecuación de transporte de energía

En este caso, el peso estadístico se debe igualar a la energía cinética de una partícula tipo α , de forma que $g(\vec{v}) = m_{\alpha} \frac{|\vec{v}|^2}{2}$. Al remplazar en la ecuación general de Boltzmann se obtiene,

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle v^2 \rangle_\alpha \right)}_{(1)} + \underbrace{\nabla \cdot \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle v^2 \vec{v} \rangle_\alpha \right)}_{(2)} - \underbrace{\frac{n_\alpha}{2} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} v^2 \rangle_\alpha}_{(3)} = H_\alpha, \quad (75)$$

$$\text{donde } H_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} \int v^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} d^3v$$

la cantidad H_α representa la pérdida de energía debido a las colisiones. El procedimiento se realizará de forma análoga al desarrollo de la ecuación de momentum, al remplazar la velocidad por $\vec{v} = \vec{C}_\alpha + \vec{u}_\alpha$ y al separar el proceso en cada parte de (75):

(1) Al remplazar la suma de velocidades relativa y promediada en el primer término, se obtiene,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle v^2 \rangle_\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle C_\alpha^2 \rangle_\alpha \right),$$

donde se debe tener en cuenta una vez más que $\langle \vec{C}_\alpha \rangle_\alpha = 0$. Debido a la definición de presión cinética (7),

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle v^2 \rangle_\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right), \quad (76)$$

donde N es el número de grados de libertad.

(2) En el segundo término se remplaza la velocidad como la suma de \vec{C}_α y \vec{u}_α , de forma que,

$$\begin{aligned} \langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle_\alpha &= \left\langle \left(u_\alpha^2 + 2\vec{u}_\alpha \cdot \vec{C}_\alpha + C_\alpha^2 \right) \left(\vec{u}_\alpha + \vec{C}_\alpha \right) \right\rangle, \\ \langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle_\alpha &= u_\alpha^2 \vec{u}_\alpha + 2\vec{u}_\alpha \cdot \langle \vec{C}_\alpha \vec{C}_\alpha \rangle_\alpha + \vec{u}_\alpha \langle C_\alpha^2 \rangle_\alpha + \langle C_\alpha^2 \vec{C}_\alpha \rangle_\alpha, \end{aligned}$$

al remplazar esto, se pueden identificar las definiciones de presión cinética, del tensor de presión y del vector de flujo de calor (ver (5)),

$$\nabla \cdot \left(\frac{\rho_\alpha}{2} \langle v^2 \vec{v} \rangle_\alpha \right) = \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) \vec{u}_\alpha + \mathbb{P}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \vec{Q}_\alpha \right]. \quad (77)$$

(3) En el tercer término se debe tener en cuenta,

$$\nabla_{\vec{v}} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2 (\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}}) \vec{v} = 2\vec{v},$$

de forma, que al remplazar se obtiene,

$$\frac{n_\alpha}{2} \langle \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} v^2 \rangle_\alpha = n_\alpha \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_\alpha. \quad (78)$$

Al reunir todos los resultados anteriores y remplazar (76), (77), (78) en (75), se obtiene,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) \vec{u}_\alpha + \mathbb{M}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + p_\alpha \mathbb{I} \cdot \vec{u}_\alpha + \vec{Q}_\alpha \right] - n_\alpha \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle = H_\alpha,$$

una vez más, se utilizará \vec{F} como la suma de las fuerzas electromagnética y gravitacional,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N}{2} p_\alpha \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho_\alpha}{2} u_\alpha^2 + \frac{N+2}{2} p_\alpha \right) \vec{u}_\alpha + \mathbb{M}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \vec{Q}_\alpha \right] = n_\alpha q_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot \vec{E} + n_\alpha q_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot (\vec{u}_\alpha \times \vec{B}) + \rho_\alpha \vec{u}_\alpha \cdot \vec{g} + H_\alpha} \quad (79)$$

Apéndice C. Derivación de las ecuaciones conservativas del modelo de dos fluidos

El objetivo de esta sección es obtener una forma conservativa de las ecuaciones de la MHD para dos fluidos, donde el primero es cargado y está compuesto de electrones e iones $c = \{i, e\}$, debido a esto los sistemas de ecuaciones correspondientes a ambas especies se sumarán. Mientras que el segundo tiene solo partículas neutras. Esto se realizará partir de las ecuaciones que se han derivado previamente en el apéndice 2.

Fluido neutro

Ecuación de continuidad

Las ecuaciones de continuidad ya se encuentran en su forma conservativa, de modo que no es necesario modificarlas,

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n \vec{u}_n) = S_n. \quad (80)$$

Ecuación de momentum

Para esto, se parte de la ecuación (8a), donde se analizará término a término, de forma que,

$$\underbrace{\rho_n \frac{\partial \vec{u}_n}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{\rho_n (\vec{u}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n}_{(2)} = \rho_n \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}_n + \vec{R}_n + \vec{u}_n S_c. \quad (81)$$

(1) El primer término se reescribe mediante la regla de Leibniz,

$$\rho_n \partial_t \vec{u}_n = \partial_t (\rho_n \vec{u}_n) - \vec{u}_n \partial_t (\rho_n),$$

en el segundo término a la derecha se reemplaza la ecuación de continuidad,

$$\rho_n \partial_t \vec{u}_n = \partial_t (\rho_n \vec{u}_n) + \vec{u}_n \nabla \cdot (\rho_n \vec{u}_n) + \vec{u}_n S_c. \quad (82)$$

(2) En este caso también se utiliza la Regla de Leibniz y se obtiene,

$$\nabla \cdot (\rho_n \vec{u}_n \vec{u}_n) = \vec{u}_n \nabla \cdot (\rho_n \vec{u}_n) + (\rho_n \vec{u}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n,$$

sencillamente, al despejar se tiene la siguiente ecuación se tiene,

$$(\rho_n \vec{u}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n = -\vec{u}_n \nabla \cdot (\rho_n \vec{u}_n) + \nabla \cdot (\rho_n \vec{u}_n \vec{u}_n). \quad (83)$$

Las ecuaciones (82) y (83) se sustituye en (81), al simplificar se obtiene,

$$\boxed{\frac{\partial(\rho_n \vec{u}_n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_n \vec{u}_n \vec{u}_n + \mathbb{P}_n) = \rho_n \vec{g} + \vec{R}_n} \quad (84)$$

Ecuación de energía

Para el fluido neutro, la energía total del sistema está dada por la suma de la energía interna específica y la energía cinética,

$$E_{Tn} = \frac{1}{2} \rho_n u_n^2 + \rho_n e_n. \quad (85)$$

Igual que previamente, se tendrá en cuenta la aproximación de bajas velocidades y se considerará que el fluido obedece la ley de los gases ideales,

$$\frac{p_n}{\gamma - 1} = \rho_n e_n. \quad (86)$$

Para obtener una ecuación que manifieste la conservación de la energía, se deberá encontrar la derivada de ambos términos de la expresión (85).

(1) Para el caso de la **energía cinética** se partirá de la ecuación de momento (81),

$$\rho_n \frac{D\vec{u}_n}{Dt} = \rho_n \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}_n + \vec{R}_n - \vec{u}_n S_n,$$

a la cual se le aplica un producto punto con \vec{u}_n a ambos lados de la ecuación,

$$\rho_n \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_n^2 \right) = \rho_n \vec{u}_n \cdot \vec{g} - \vec{u}_n \cdot (\nabla \cdot \mathbb{P}_n) + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n - u_n^2 S_n, \quad (87)$$

donde el segundo término de la parte derecha se puede reescribir como,

$$\vec{u}_n \cdot (\nabla \cdot \mathbb{P}_n) = \nabla \cdot (\mathbb{P}_n \cdot \vec{u}_n) - (\mathbb{P}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n. \quad (88)$$

De forma análoga, se reescribe la parte izquierda de (87),

$$\rho_n \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_n^2 \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \right) - \frac{1}{2} u_n^2 \frac{D\rho_n}{Dt},$$

donde adicionalmente se reemplaza la ecuación de continuidad,

$$\rho_n \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_n^2 \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \right) + \frac{1}{2} u_n^2 \rho_n \nabla \cdot \vec{u}_n - \frac{1}{2} u_n^2 S_n. \quad (89)$$

Reuniendo lo anterior, las ecuaciones (88) y (89) se reemplazan en (87),

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \right) + \frac{1}{2} u_n^2 \rho_n \nabla \cdot \vec{u}_n - \frac{1}{2} u_n^2 S_n = \rho_n \vec{u}_n \cdot \vec{g} - \nabla \cdot (\mathbb{P}_n \cdot \vec{u}_n) + \\ (\mathbb{P}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n - u_n^2 S_n. \end{aligned}$$

Al reescribir el segundo término de acuerdo a la regla de Leibniz,

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \vec{u}_n \right) - (\vec{u}_n \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \right) - \frac{1}{2} u_n^2 S_n = \\ \rho_n \vec{u}_n \cdot \vec{g} - \nabla \cdot (\mathbb{P}_n \cdot \vec{u}_n) + (\mathbb{P}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n - u_n^2 S_n. \end{aligned} \quad (90)$$

Se analiza el lado izquierdo de (90),

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \vec{u}_n \right) - (\vec{u}_n \cdot \nabla) \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \right) - \frac{1}{2} u_n^2 S_n = \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \vec{u}_n \right) - \frac{1}{2} u_n^2 S_n, \end{aligned}$$

lo cual se reemplaza nuevamente, de forma que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \vec{u}_n \right) - \frac{1}{2} u_n^2 S_n = \\ \rho_n \vec{u}_n \cdot \vec{g} - \nabla \cdot (\mathbb{P}_n \cdot \vec{u}_n) + (\mathbb{P}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n - u_n^2 S_n, \end{aligned}$$

lo cual se puede reescribir como,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_n \right) \cdot \vec{u}_n \right] - \frac{1}{2} u_n^2 S_n + \rho_n \vec{u}_n \cdot \vec{g} + (\mathbb{P}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n. \quad (91)$$

- (2) Por otra parte, para encontrar la derivada de la **energía interna**, se tendrá en cuenta la ley de los gases ideales,

$$\frac{D}{Dt}(\rho_n e_n) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{p_n}{\gamma - 1} \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{N p_n}{2} \right), \quad (92)$$

donde $\gamma = \frac{N+2}{N}$ es el índice adiabático.

Al utilizar la ecuación de evolución de la presión, (79) escrita de una forma distinta, se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{N}{2} \frac{D p_n}{Dt} + \frac{N+2}{2} p_n \nabla \cdot \vec{u}_n &= -(\mathbb{M}_n \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_n - \nabla \cdot \vec{Q}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + H_n, \\ \frac{1}{\gamma-1} \frac{D p_n}{Dt} + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_n \nabla \cdot \vec{u}_n &= -(\mathbb{M}_n \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_n - \nabla \cdot \vec{Q}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + H_n, \end{aligned}$$

y al tener en cuenta (92) queda,

$$\frac{D}{Dt}(\rho_n e_n) = -\frac{\gamma}{\gamma-1} p_n \nabla \cdot \vec{u}_n + H_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \nabla \cdot \vec{Q}_n - (\mathbb{M}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n.$$

Al abrir la derivada lagrangiana,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_n e_n) + (\vec{u}_n \cdot \nabla)(\rho_n e_n) &= -\frac{\gamma}{\gamma-1} p_n \nabla \cdot \vec{u}_n + H_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \\ &\quad - \nabla \cdot \vec{Q}_n - (\mathbb{M}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n. \end{aligned}$$

Donde el segundo término del lado izquierdo se puede reescribir aplicando la ley de Leibniz

como $(\vec{u}_n \cdot \nabla)(\rho_n e_n) = \nabla \cdot (\rho_n e_n \vec{u}_n) - \rho_n e_n \nabla \cdot \vec{u}_n$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_n e_n) + \nabla \cdot (\rho_n e_n \vec{u}_n) - \underbrace{\rho_n e_n \nabla \cdot \vec{u}_n}_{(a)} = & \underbrace{-\frac{\gamma}{\gamma-1} p_n \nabla \cdot \vec{u}_n + H_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n}_{(b)} + \\ & + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \nabla \cdot \vec{Q}_n - (\mathbb{M}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n. \end{aligned} \quad (93)$$

Los términos (a) y (b) se agrupan y usando (86),

$$\begin{aligned} \left[\rho_n e_n - \frac{\gamma}{\gamma-1} p_n \right] \nabla \cdot \vec{u}_n &= (\rho_n e_n - \gamma \rho_n e_n) \nabla \cdot \vec{u}_n, \\ \left[\rho_n e_n - \frac{\gamma}{\gamma-1} p_n \right] \nabla \cdot \vec{u}_n &= (\rho_n e_n (1 - \gamma)) \nabla \cdot \vec{u}_n = -p_n \nabla \cdot \vec{u}_n. \end{aligned}$$

Reemplazando esto en (93) se obtiene la expresión que se usará de la derivada temporal de la energía interna,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_n e_n) + \nabla \cdot (\rho_n e_n \vec{u}_n) &= -p_n \nabla \cdot \vec{u}_n + H_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \nabla \cdot \vec{Q}_n - (\mathbb{M}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho_n e_n) &= -\nabla \cdot (\rho_n e_n \vec{u}_n) - p_n \nabla \cdot \vec{u}_n + H_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \nabla \cdot \vec{Q}_n - (\mathbb{M}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n. \end{aligned} \quad (94)$$

Al unificar los resultados de los apartados anteriores en una derivada de la energía total

(85),

$$\frac{\partial E_{Tn}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_n e_n),$$

se debe reemplazar las expresiones (91) y (94), de forma que se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{Tn}}{\partial t} = & -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_n \right) \cdot \vec{u}_n \right] + \rho_n \vec{u}_n \cdot \vec{g} + p_n \nabla \cdot \vec{u}_n + (\mathbb{M}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n + \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n \\ & - \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \nabla \cdot (\rho_n e \vec{u}_n) - p_n \nabla \cdot \vec{u}_n + H_n - \vec{u}_n \cdot \vec{R}_n + \frac{1}{2} u_n^2 S_n - \nabla \cdot \vec{Q}_n - (\mathbb{M}_n \cdot \nabla) \vec{u}_n. \end{aligned}$$

Entonces, al simplificar y reescribir la ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{Tn}}{\partial t} = & -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_n \right) \cdot \vec{u}_n \right] + \rho_n \vec{u}_n \cdot \vec{g} - \nabla \cdot (\rho_n e \vec{u}_n) + H_n - \nabla \cdot \vec{Q}_n. \\ \frac{\partial E_{Tn}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(\left[\frac{1}{2} \rho_n u_n^2 + \rho_n e \right] \mathbb{I} + \mathbb{P}_n \right) \cdot \vec{u}_n + \vec{Q}_n \right] = & \rho_n \vec{u}_n \cdot \vec{g} + H_n. \end{aligned}$$

Finalmente, al reemplazar la energía total se obtiene,

$$\boxed{\frac{\partial E_{Tn}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(E_{Tn} \mathbb{I} + \mathbb{P}_n) \cdot \vec{u}_n + \vec{Q}_n \right] = \rho_n \vec{u}_n \cdot \vec{g} + H_n} \quad (95)$$

Fluido cargado

Ecuación de continuidad

Las ecuaciones de continuidad ya se encuentran en su forma conservativa, de modo que no

es necesario modificarlas,

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_c \vec{u}_c) = S_c. \quad (96)$$

Ecuación de momentum

Para obtener la forma conservativa de la ecuación del momento se parte de las ecuaciones (13b) y (13c). Al tener en cuenta la aproximación de bajas velocidades se tiene,

$$\rho_c [\partial_t \vec{u}_c + (\vec{u}_c \cdot \nabla) \vec{u}_c] = \vec{j} \times \vec{B} + \rho_c \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}_c + \vec{R}_c - \vec{u}_c S_c. \quad (97)$$

Se analizará el primer término de (97),

$$\rho_c \partial_t \vec{u}_c = \partial_t (\rho_c \vec{u}_c) - \vec{u}_c \partial_t \rho_c,$$

al remplazar la ecuación de conservación de la masa $\partial_t \rho_c = S_c - \nabla \cdot (\rho_c \vec{u}_c)$, queda de la forma,

$$\rho_c \partial_t \vec{u}_c = \partial_t (\rho_c \vec{u}_c) - \vec{u}_c S_c + \vec{u}_c \nabla \cdot (\rho_c \vec{u}_c). \quad (98)$$

Luego, se analiza el segundo término de (97), que se puede escribir como,

$$\rho_c(\vec{u}_c \cdot \nabla)\vec{u}_c = \nabla \cdot (\rho_c \vec{u}_c \vec{u}_c) - \vec{u}_c \nabla \cdot (\rho_c \vec{u}_c). \quad (99)$$

Al reemplazar (98) y (99) en (97) y simplificar, la expresión obtenida tiene forma de una ley conservativa,

$$\boxed{\frac{\partial(\rho_c \vec{u}_c)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_c \vec{u}_c \vec{u}_c) = \vec{j} \times \vec{B} + \rho_c \vec{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}_c + \vec{R}_c} \quad (100)$$

Ecuación de energía

Para el fluido cargado, la energía está dada por la ecuación (101). Ahora se procede a analizar término a término

$$E_{Tc} = \underbrace{\frac{1}{2} \rho_c u_c^2}_{(A)} + \underbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}}_{(B)} + \underbrace{\rho_c e_c}_{(C)} \quad (101)$$

1. Para el caso de la **energía cinética**, se partirá de la ecuación (97) de momentum, en la cual se aplica un producto interno a ambos lados con el vector velocidad de las partículas cargadas \vec{u}_c .

$$\rho_c \vec{u}_c \cdot \frac{D\vec{u}_c}{Dt} = \vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) + \rho_c \vec{u}_c \cdot \vec{g} - \vec{u}_c \cdot (\nabla \cdot \mathbb{P}_c) + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \vec{u}_c \cdot \vec{u}_c S_c,$$

donde el lado izquierdo de la ecuación se puede escribir como,

$$\underbrace{\rho_c \frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{2} u_c^2 \right]}_{(a)} = \underbrace{\vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B})}_{(b)} + \rho_c \vec{u}_c \cdot \vec{g} - \underbrace{\vec{u}_c \cdot (\nabla \cdot \mathbb{P}_c)}_{(c)} + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \vec{u}_c \cdot \vec{u}_c S_c, \quad (102)$$

Esta ecuación se puede analizar por partes:

(a) En el caso del primer término, se reescribirá con la Regla de Leibniz,

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_c u_c^2 \right) &= \rho_c \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_c^2 \right) + \frac{1}{2} u_c^2 \frac{D\rho_c}{Dt} \\ \rho_c \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_c^2 \right) &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_c u_c^2 \right) - \frac{1}{2} u_c^2 \frac{D\rho_c}{Dt}. \end{aligned} \quad (103)$$

Luego, se puede remplazar el segundo término del lado derecho gracias a la ecuación de continuidad, la cual se puede escribir como $D_t(\rho_c) + \rho_c \nabla \cdot \vec{u}_c = S_c$, así,

$$\rho_c \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_c^2 \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_c u_c^2 \right) - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \frac{1}{2} u_c^2 \rho_c \nabla \cdot \vec{u}_c. \quad (104)$$

Al utilizar la regla de Leibniz se puede reescribir $u_c^2 \rho_c \nabla \cdot \vec{u}_c = \nabla \cdot (\rho_c u_c^2 \vec{u}_c) - \vec{u}_c \cdot \nabla (\rho_c u_c^2)$, lo cual se remplace en la ecuación (104), de forma que,

$$\rho_c \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_c^2 \right) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \rho_c u_c^2 \right) - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho_c u_c^2 \vec{u}_c) - \frac{1}{2} \vec{u}_c \cdot \nabla (\rho_c u_c^2),$$

al abrir la derivada lagrangiana que está en el lado derecho se tiene,

$$\rho_c \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} u_c^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_c u_c^2 \right) - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho_c u_c^2 \vec{u}_c). \quad (105)$$

- (b) En el término $\vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B})$, se cambiará el orden de los factores, de forma que se tiene $-\vec{j} \cdot (\vec{u}_c \times \vec{B})$. De la ecuación de la ley de Ohm, se puede despejar el producto cruz,

$$\vec{u}_c \times \vec{B} = \eta \vec{j} + \frac{1}{ne} (\vec{j} \times \vec{B}) - \vec{E}.$$

Sin embargo, no se tendrá en cuenta el Efecto Hall, que corresponde a la expresión $\vec{j} \times \vec{B}$. De forma que se obtiene,

$$\vec{u}_c \cdot (\vec{j} \times \vec{B}) = -\eta j^2 + \vec{j} \cdot \vec{E}. \quad (106)$$

- (c) Finalmente, se analizará $-\vec{u}_c \cdot (\nabla \cdot \mathbb{P}_c)$, para lo que sencillamente se reescribe como,

$$-\vec{u}_c \cdot (\nabla \cdot \mathbb{P}_c) = -\nabla \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) + (\mathbb{P}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c. \quad (107)$$

Ahora se unen todos los términos que han sido desarrollados de forma individual, (105), (106), (107),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_c u_c^2 \right) - \frac{1}{2} u_c^2 S_c + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\rho_c u_c^2 \vec{u}_c) = & -\eta j^2 + \vec{j} \cdot \vec{E} + \rho_c \vec{u}_c \cdot \vec{g} - \nabla \cdot (\mathbb{P}_c \cdot \vec{u}_c) \\ & + (\mathbb{P}_c \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_c + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - u_c^2 S_c. \end{aligned}$$

Para obtener la expresión deseada se escribe el tensor de presión como la suma de la presión cinética y el tensor de viscosidad,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_c u_c^2 \right) = & -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_c u_c^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_c \right) \cdot \vec{u}_c \right] - \eta j^2 + \vec{j} \cdot \vec{E} + \rho_c \vec{u}_c \cdot \vec{g} + p_c \nabla \cdot \vec{u}_c + \\ & + (\mathbb{M}_c \cdot \nabla) \vec{u}_c + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \frac{1}{2} u_c^2 S_c. \end{aligned} \quad (108)$$

2. Para el segundo término de la expresión (101), se parte de la ley de Faraday,

$$\partial_t \vec{B} = -\nabla \times \vec{E},$$

lo cual se opera a ambos lados con un producto interno con \vec{B} ,

$$\vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} = -\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}), \quad (109)$$

donde $\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$, de forma que al remplazar en (109),

$$\vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}).$$

Ahora, esta nueva expresión se reescribe teniendo en cuenta que $\vec{B} \cdot \partial_t \vec{B} = \partial_t (B^2/2)$, de forma que,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\nabla \cdot \left[\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right] - \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \right), \quad (110)$$

donde se ha multiplicado a ambos lados por el factor $1/\mu_0$.

3. Finalmente, al analizar la **energía interna** se seguirá un procedimiento similar al que se usó para el fluido neutro, así,

$$\frac{D}{Dt} (\rho_c e_c) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{p_c}{\gamma - 1} \right).$$

Así, se deberá utilizar la ecuación de evolución de la presión dada por (79), la cual también se puede escribir como,

$$\frac{D}{Dt}(\rho_c e_c) = -\frac{\gamma}{\gamma-1} p_c \nabla \cdot \vec{u}_c + \eta |\vec{j}'|^2 + H_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \nabla \cdot \vec{Q}_c - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla) \vec{u}_c,$$

donde \vec{j}' es la densidad de corriente de carga en el marco de referencia moviéndose con una velocidad promedio global \vec{u}_c . La ecuación previa se reescribe, para esto se tiene en cuenta la definición de la derivada lagrangiana y el supuesto de que las densidades de electrones e iones son similares, $n_e = n_i$, de forma que $\vec{j}' = \vec{j}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_c e_c) + (\vec{u}_c \cdot \nabla)(\rho_c e_c) &= -\frac{\gamma}{\gamma-1} p_c \nabla \cdot \vec{u}_c + \eta j^2 + H_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c \\ &\quad - \nabla \cdot \vec{Q}_c - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla) \vec{u}_c. \end{aligned}$$

Al remplazar el término $(\vec{u}_c \cdot \nabla)(\rho_c e_c)$ por $\nabla \cdot (\rho_c e_c \vec{u}_c) - \rho_c e_c \nabla \cdot \vec{u}_c$, se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_c e_c) + \nabla \cdot (\rho_c e_c \vec{u}_c) - \overbrace{\rho_c e_c \nabla \cdot \vec{u}_c}^a &= \overbrace{-\frac{\gamma}{\gamma-1} p_c \nabla \cdot \vec{u}_c + \eta j^2 + H_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c}^b \\ &\quad + \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \nabla \cdot \vec{Q}_c - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla) \vec{u}_c, \end{aligned} \quad (111)$$

donde los términos a y b se agrupan y se utiliza la expresión $p_c/(\gamma - 1) = \rho_c e_c$,

$$\begin{aligned} \left[\rho_c e_c - \frac{\gamma}{\gamma - 1} p_c \right] \nabla \cdot \vec{u}_c &= (\rho_c e_c - \gamma \rho_c e_c) \nabla \cdot \vec{u}_c, \\ &= (\rho_c e_c (1 - \gamma)) \nabla \cdot \vec{u}_c, \\ &= -p_c \nabla \cdot \vec{u}_c. \end{aligned}$$

Luego, se sustituye la expresión previa en la ecuación (111),

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_c e_c) = -\nabla \cdot (\rho_c e_c \vec{u}_c) - p_c \nabla \cdot \vec{u}_c + \eta j^2 + H_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \nabla \cdot \vec{Q}_c - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla) \vec{u}_c. \quad (112)$$

Finalmente, se unifican todos los desarrollos previos, es decir, las expresiones (108), (110) y (112), de acuerdo con la ecuación (101),

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{Tc}}{\partial t} &= -\nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_c u_c^2 \mathbb{I} + \mathbb{P}_c \right) \cdot \vec{u}_c \right] - \eta j^2 + \vec{j} \cdot \vec{E} + \rho_c \vec{u}_c \cdot \vec{g} + p_c \nabla \cdot \vec{u}_c + (\mathbb{M}_c \cdot \nabla) \vec{u}_c \\ &\quad + \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c - \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \nabla \cdot \left[\frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \right] - \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \right) - \nabla \cdot (\rho_c e_c \vec{u}_c) \\ &\quad - p_c \nabla \cdot \vec{u}_c + \eta j^2 + H_c - \vec{u}_c \cdot \vec{R}_c + \frac{1}{2} u_c^2 S_c - \nabla \cdot \vec{Q}_c - (\mathbb{M}_c \cdot \nabla) \vec{u}_c. \end{aligned}$$

Después de cancelar varios términos repetidos y de agrupar los que están siendo operados por una divergencia, se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{Tc}}{\partial t} = -\nabla \cdot \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \rho_c u_c^2 + \rho_c e_c \right) \mathbb{I} + \mathbb{P}_c \right] \cdot \vec{u}_c + \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} + \vec{Q}_c \right\} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \rho_c \vec{g} \cdot \vec{u}_c \\ - \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \right) + H_c. \end{aligned} \quad (113)$$

Como se puede evidenciar en la anterior ecuación se representa la ley de conservación de la energía, ya que, por una parte se tiene la variación temporal de la energía total del fluido cargado E_{Tc} , y por otro lado, se encuentra el flujo a través de un volumen de distintas cantidades relacionadas con la energía, tales como: la energía cinética, la energía interna, el tensor de presión, el Vector de Poynting y el flujo de calor, estos términos se asocian a varios términos fuente.

Es posible reescribir la ecuación (113), por medio de la Ley de Ohm, $\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B} + \eta \vec{j}$.

Para esto se aplica un producto vectorial con \vec{B} ,

$$\vec{E} \times \vec{B} = -(\vec{u}_c \times \vec{B}) \times \vec{B} + \eta \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \times \vec{B} + \vec{B} \times (\vec{u}_c \times \vec{B})$$

$$\vec{E} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \times \vec{B} + \vec{u}_c B^2 - \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{u}_c),$$

lo cual se remplaza en la ecuación (113),

$$\begin{aligned} \partial_t E_{Tc} = & -\nabla \cdot \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \rho_c u_c^2 + \rho_c e_c \right) \mathbb{I} + p_c \mathbb{I} + \mathbb{M}_c \right] \cdot \vec{u}_c + \frac{B^2}{\mu_0} \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{u}_c) \right\} \\ & - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \eta \vec{j} \times \vec{B} \right) - \nabla \cdot \vec{Q}_c + \rho_c \vec{g} \cdot \vec{u}_c - \vec{E} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} + H_c, \end{aligned}$$

ahora, se escribe $\frac{B^2}{\mu_0}$ como $\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B^2}{2\mu_0}$. Además se reemplaza la ley de Ampère, de forma que se obtiene,

$$\begin{aligned} \partial_t E_{Tc} = & -\nabla \cdot \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \rho_c u_c^2 + \rho_c e_c + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbb{I} + \left(p_c + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbb{I} + \mathbb{M}_c \right] \cdot \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{u}_c) \right\} \\ & - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \eta \vec{j} \times \vec{B} \right) - \nabla \cdot \vec{Q}_c + \rho_c \vec{g} \cdot \vec{u}_c + H_c. \end{aligned}$$

Se puede ver que el primer término del lado derecho se encuentra la energía total del sistema, E_{Tc} . De igual forma está la presión total, que corresponde a $\left(p_c + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$. Al reemplazar estas cantidades y al despreciar el impacto del Efecto Hall,

$$\boxed{\frac{\partial E_{Tc}}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ [E_{Tc} \mathbb{I} + P_{Tc} \mathbb{I} + \mathbb{M}_c] \cdot \vec{u}_c + \vec{Q}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} (\vec{B} \cdot \vec{u}_c) \right\}} = \rho_c \vec{g} \cdot \vec{u}_c + H_c \quad (114)$$

Adicionalmente, la ecuación (115) se puede simplificar para el caso de la MHD Ideal, en cuyo caso no se tiene en cuenta el flujo de calor,

$$\frac{\partial E_{Tc}}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ [E_{Tc}\mathbb{I} + P_{Tc}\mathbb{I} + \mathbb{M}_c] \cdot \vec{u}_c - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{u}_c) \right\} = \rho_c \vec{g} \cdot \vec{u}_c + H_c. \quad (115)$$

Ecuación de Faraday

Finalmente, será necesario obtener la forma conservativa de la ecuación de Faraday. Para esto se recuerda que el campo eléctrico está dado por,

$$\vec{E} = -\vec{u}_c \times \vec{B} + \eta \vec{j}.$$

A esto se le calcula el rotacional y se reemplaza la ley de Faraday,

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{u}_c \times \vec{B} - \eta \vec{j}),$$

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{u}_c \times \vec{B}) - \eta \nabla \times \vec{j},$$

al reescribir el primer término de la derecha como,

$$\nabla \times (\vec{u}_c \times \vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{B})\vec{u}_c + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{u}_c - (\nabla \cdot \vec{u}_c)\vec{B} - (\vec{u}_c \cdot \nabla)\vec{B}$$

$$\nabla \times (\vec{u}_c \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{B}\vec{u}_c - \vec{u}_c\vec{B}).$$

Así, se tiene finalmente,

$$\partial_t \vec{B} + \nabla \cdot (\vec{u}_c \vec{B} - \vec{B} \vec{u}_c) = -\eta \nabla \times \vec{j} \quad (116)$$