CONFRONTACIÓN ENTRE REALIDAD Y MODELO TEÓRICO: UNA PROPUESTA PARA DESARROLLAR LA INTUICIÓN PROBABILÍSTICA EN NIÑOS DE SEXTO GRADO

ALEXÁNDER REÁTIGA VILLAMIZAR

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTADE DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2004

CONFRONTACIÓN ENTRE REALIDAD Y MODELO TEÓRICO: UNA PROPUESTA PARA DESARROLLAR LA INTUICIÓN PROBABILÍSTICA EN NIÑOS DE SEXTO GRADO

ALEXÁNDER REÁTIGA VILLAMIZAR

Trabajo presentado para optar el título de
ESPECIALISTA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Director
Dr. GABRIEL YÁÑEZ CANAL

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2004

A los dos amores de mi vida:

María Yorlí y Alex Alberto

AGRADECIMIENTOS

Agradezco muy especialmente a:

Al Doctor Gabriel Yáñez, por su paciencia, sus enseñanzas y la orientación en el desarrollo de este trabajo.

Mis profesores y compañeros de estudio, por sus aportes y contribuciones.

Mis padres, por la formación que me dieron.

Doña Adela, por su apoyo y sus consejos.

A las directivas del Gimnasio Saucará, por permitirme desarrollar este trabaja en su establecimiento.

A los estudiantes del Grado sexto B del Gimnasio Saucará del año 2003, por su participación en el desarrollo del trabajo.

TITLE: CONFRONTATION BETWEEN REALITY AND THEORICAL MODEL: A PROPOSAL TO DEVELOP THE PROBABILISTIC INTUITION OF SIXTH GRADE CHILDREN*

AUTHOR: ALEXÁNDER REÁTIGA VILLAMIZAR**

KEY WORDS: Mathematical Education, sample spaces, probability.

DESCRIPTION

This work shows the outcome of a class proposal done in order to enable in the students the development of probability intuition about the following topics: sample space, certainty and uncertainty of an event, chance, nature of an experimental trial, structure of events, relations between simple events and distributions, treatment of residuals, slantings associated with random experiments, the law of the big numbers.

The activity was carried out with 19 students of sixth grade of Gimnasio Saucará under a focus of solving problems, where they were given test to solve with the least possible help from the teacher. The test were focused to make the students predict outcomes, define sample spaces, discuss about the nature of experimental trials, and writing down their answers. The test were developed under a playing environment, therefore, it was very interesting for the students and they participated very motivated and giving the best of themselves.

From the analysis of the test, its comes to the conclusion in general terms, that while the activities are being developed, the students are changing mistaken concepts, wrong learnt, like the ones related to the nature of random experiments, at the beginning they think how can it be influenced in some way the outcome obtain from throwing a dice; the same way not in all activities the students take in account the relation between simple events and distributions; that depending of the activities that are being done, since they change in structure, some students in someway associate the sample space of the experiment with the individual outcomes.

---

*Thesis

** FACULTY OF SCIENCES, SPECIALIZATION IN MATHEMATICAL EDUCATION. DIRECTOR Gabriel Yáñez Canal.

TITULO: CONFRONTACIÓN ENTRE REALIDAD Y MODELO TEÓRICO: UNA PROPUESTA PARA DESARROLLAR LA INTUICIÓN PROBABILÍSTICA EN NIÑOS DE SEXTO GRADO*

AUTOR: ALEXÁNDER REÁTIGA VILLAMIZAR**

PALABRAS CLAVES: Educación Matemática, espacio muestral, probabilidad.

DESCRIPCIÓN

Este trabajo presenta los resultados de una propuesta de aula realizada con el fin de posibilitar en el estudiante el desarrollo de la intuición probabilística acerca de los siguientes temas: espacio muestral, certeza e incertidumbre de un suceso, azar, naturaleza de pruebas experimentales, tratamiento de residuos, sesgos asociados a experimentos aleatorios, leyes de los grandes números.

La actividad se llevó a cabo con 19 estudiantes de sexto grado del Gimnasio Saucará, donde se les presentaban unos talleres para que los resolvieran con la menor ayuda posible del profesor. Los talleres estaban enfocados a que los estudiantes predijeran resultados, definieran espacios muestrales, discutieran acerca de la naturaleza de pruebas experimentales y fueran anotando sus respuestas. Los talleres se desarrollaron en un ambiente de juego, motivo por el cual, a los estudiantes les parecieron muy interesantes y participaron de ellos muy motivados y con bastante entusiasmo.

Del análisis de los talleres se concluye, en términos generales, que algunos estudiantes a medida que se van desarrollando las actividades, van cambiando algunos conceptos erróneos y mal aprendidos como son los relacionados a la naturaleza de las pruebas experimentales, pues al inicio piensan en cosas, por ejemplo, que se puede influir de alguna forma en el resultado obtenido al lanzar un dado; igualmente que no en todas las actividades y no todos los estudiantes tienen en cuenta las relaciones entre eventos simples y distribuciones; que dependiendo de las actividades que se realicen, pues ellas varían en estructura, algunos estudiantes de alguna forma asocian el espacio muestral del experimento con los resultados individuales.

---

*Tesis

** FACULTAD DE CIENCIAS, ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA. DIRECTOR Gabriel Yáñez Canal.

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

La mayoría de los textos escolares que presentan los temas relacionados con estadística y probabilidad proponen actividades que, para su desarrollo, requieren de un lenguaje matemático y muy formal. En muy pocas oportunidades, en esos textos, se deja espacio para poner al estudiante en el juego, en actividades lúdicas, en espacios donde él pueda interactuar con objetos de resultados aleatorios, dejando de lado una gran oportunidad para despertar y desarrollar la intuición y el pensamiento probabilístico que tiene el estudiante.

Un aspecto, según Fischbein (1975), por el cual se debe replantear la enseñanza de la probabilidad en etapa escolar, es el *carácter exclusivamente determinista de los currículos actuales* y la necesidad de mostrar al estudiante una imagen más equilibrada de la realidad. En este sentido, Díaz y colaboradores (1996, p. 12) dicen

> “en el mundo contemporáneo, la educación científica no puede reducirse a la interpretación unívoca y determinista de los sucesos. Una cultura científica eficiente reclama una educación en el pensamiento estadístico y probabilístico. La intuición probabilística no se desarrolla espontáneamente, excepto dentro de unos limites muy estrechos. La comprensión, interpretación, evaluación y predicción de fenómenos probabilísticos no pueden ser confiados a intuiciones primarias que han sido despreciadas, olvidadas, y abandonadas en un estado rudimentario de desarrollo bajo la presión de esquemas operacionales que no pueden articularse con ellos”

Con base en lo anterior, se planteó la tarea de llevar al aula actividades de carácter lúdico, cuyo objetivo general fue el de posibilitar el desarrollo de la intuición probabilística en niños de sexto grado con edades entre 11 y 12 años, mediante el uso de objetos con resultados aleatorios (para nuestro caso dados convencionales, seis caras marcadas del 1 al 6) y su relación con la medida de probabilidad.

El presente trabajo de grado está organizado en cuatro capítulos que se describen brevemente a continuación.

En el primer capítulo, se presenta el marco teórico tenido en cuenta en el desarrollo de las actividades, en el cual se destacan algunos aspectos sicológicos que sobre el azar y la incertidumbre hacen Piaget e Inhelder, igualmente se presentan aportes hechos por Fischbein sobre las intuiciones, y resultados hechos por otros teóricos acerca de la insensibilidad al tamaño de la muestra o la ley de los pequeños números, concepciones erróneas de las secuencias aleatorias y diferentes clases de sesgos. Heitele (1975) presenta ideas estocásticas fundamentales de las cuales se tomaron para este trabajo las relacionadas con: espacio muestral, equidistribución y simetría y la ley de los grandes números.

Por otra parte se presenta como antecedentes, resúmenes de un trabajo realizado por Nury Jurado Herrera (1996) y otro por Daniel Moreno Caicedo (2000) tesis de especialización de la UIS Se presenta también el resumen de un trabajo realizado por Jeffrey K. Horvath y Richard Lehrer (1991) en la universidad de Madison - USA que sirvieron como base para el desarrollo del presente trabajo de grado.

En el segundo capítulo se describe el grupo de estudiantes con los que se trabajó, igualmente se presenta con más detalle cada uno de los cinco componentes o categorías a través de las cuales se analiza el desempeño de los estudiantes, igualmente cada uno de los cuatro talleres, mostrando el objetivo de cada uno y se trata de justificar el porqué de las preguntas que en cada uno de ellos se hizo y la intensidad horaria de cada taller.

En el tercer capítulo se presenta las respuestas más comunes y variadas de los estudiantes hechas a todas las preguntas, con un breve análisis por parte del profesor a cada una de ellas. El análisis termina con algunas conclusiones a cerca de cada taller donde se determina el desempeño de los estudiantes a través del mismo.

En el cuarto capítulo se presentan las conclusiones generales, a través de las cinco componentes que se tuvieron en cuenta para el análisis del desempeño de los estudiantes a lo largo de toda la actividad.

Al final del trabajo se presentan las referencias bibliográficas citadas en este texto.

En los anexos (cuatro en total) se presentan los textos de los talleres presentados a los estudiantes.

Después de cada anexo se presenta un taller resuelto por un estudiante.

Capítulo 1

MARCO TEÓRICO

Presentamos en este capítulo algunos aportes sicológicos de Piaget e Inhelder acerca de la idea de azar en los niños; algunas consideraciones que hace Fischbein sobre las intuiciones presentes en el pensamiento probabilístico de los niños, aportes y consideraciones que están muy relacionados con las preguntas hechas en los talleres. También se abordan algunas ideas estocásticas fundamentales que según Heitele se deben tratar en el estudio de la probabilidad y el azar, como son: el espacio muestral, equidistribución y simetría y la ley de los grandes números. Igualmente se hace referencia a los sesgos y malas concepciones presentes en los estudiantes cuando tratan resultados repetitivos en experimentos aleatorios como el lanzamiento de dados o monedas y en extracción de balotas de una urna.

También mencionamos algunos trabajos realizados en la Escuela de Matemáticas de la UIS, y un trabajo en particular desarrollado por investigadores de la Universidad de Madison en los Estados Unidos, que es una referencia básica en el trabajo cuyos resultados presentamos.

1.1. PIAGET E INHELDER

Piaget en sus trabajos se interesa por determinar el nivel de desarrollo intelectual en el cual se encuentran los niños en diversas edades, analizando su aprehensión de los conceptos. El análisis y resultados acerca del azar, la asociación de probabilidades a determinados sucesos y las capacidades combinatorias de los niños, las asocia a los estadios preoperatorio, de operaciones concretas y operaciones formales. El siguiente cuadro presenta un breve resumen de estas tres etapas del desarrollo del ser humano, (Morris, CH. 1994)

Etapa	Edad	Ejemplo de Comportamiento
Preoperatoria	De 2 a 7 años	Los niños pequeños construyen conceptos y poseen símbolos, como en el lenguaje, para comunicarse. Estas imágenes se limitan a su experiencia personal inmediata (egocéntrica). Sus nociones de causa y efecto son muy limitadas, a veces "mágicas", y tienen problemas para clasificar objetos y eventos.
Operaciones Concretas	De 7 a 11 años	Los niños empiezan a pensar con lógica, a clasificar en varias dimensiones y a comprender conceptos matemáticos siempre que puedan aplicar estas operaciones a objetos o eventos concretos.
Operaciones Formales	De 11 a 15 años	Los individuos pueden aplicar soluciones lógicas tanto a conceptos concretos como abstractos. Pueden pensar sistemáticamente todas las posibilidades, proyectarse hacia el futuro o recordar el pasado, y razonar mediante analogías y metáforas.

Piaget e Inhelder (1975) afirman que la comprensión del azar por parte del niño es complementaria a la de la relación causa-efecto. De esta forma, mientras el niño no comprenda la idea de causa, no identificará los fenómenos aleatorios.

Esta carencia de la idea de causa junto con la falta de un pensamiento reversible que le permita asimilar los fenómenos del azar, hace que Piaget piense que no existe una idea intuitiva del azar en el niño que se encuentra en el estadio preoperacional antes de los 7 años. En igual forma es incapaz de estimar las posibilidades a favor y en contra de los experimentos aleatorios ya que no posee ni los procedimientos combinatorios ni el concepto de proporción.

En edades entre los 7 y los 11 años cuando el niño se encuentra en el estadio de las operaciones concretas, empieza a comprender la interacción de las cadenas causales que conducen a sucesos impredecibles y a la irreversibilidad de los fenómenos aleatorios. Aunque el niño no llega a comprender la idea de azar porque no comprende la independencia de las causas. Pero el niño en esta edad si está en capacidad de establecer comparaciones entre posibles eventos. Por ejemplo, el niño advierten que es más probable obtener una balota roja de una bolsa que contiene 3 de estas balotas de un total de 6, que de otra que contiene 3 de un total de 7.

Entre los 11 – 12 años, cuando el niño está en el estadio de las operaciones formales y desarrolla el pensamiento combinatorio, es cuando alcanza la idea de azar y de probabilidad y adquiere la capacidad de asociar a un evento aleatorio cierta medida de probabilidad.

Piaget e Inhelder (1975) evidencian una aproximación a la ley de los grandes números en niños de 11 años de edad. Evidencia adjudicada al uso de ruletas justas y sesgadas.

1.2. FISCHBEIN Y LAS INTUICIONES

Fischbein (1975) afirma, por otra parte, que aunque los niños no tienen formalmente el concepto de probabilidad, ellos aprenden de sus experiencias diarias, estas experiencias contienen procesos estocásticos y desde éstos se puede obtener tal concepto. Interesado por la formación de estos conceptos y por la aparición de intuiciones parciales sobre los conceptos estocásticos, Fischbein se preocupó también por el efecto de la instrucción. Fischbein apoya fuertemente la conveniencia de fomentar la educación estocástica y advierte que es indispensable la instrucción para alcanzar un razonamiento estocástico adecuado, incluso en la etapa de las operaciones formales.

La idea de intuición de Fischbein se fundamenta en la concepción de que la cognición humana es fundamentalmente unitaria y por tanto intuición e inteligencia nos hablan de la misma realidad.

Las intuiciones se pueden clasificar de diferentes maneras según el punto de vista que se adopte. Respecto a la instrucción, las intuiciones se clasifican en primarias y secundarias. Las intuiciones primarias se adquieren directamente con la experiencia sin necesidad de ninguna instrucción sistemática. Ejemplos de ellas son las intuiciones espaciales elementales, como el cálculo de distancia y localización de objetos, o el admitir que al lanzar un dado todas las caras tienen la misma probabilidad de salir. En otro plano, también son primarias las intuiciones implicadas en el razonamiento. Son las intuiciones que nos permiten aceptar una conclusión como verdadera sobre la base de unas premisas dadas, es decir, las intuiciones que se expresan en las reglas formales de la lógica.

Las intuiciones secundarias se forman como consecuencia de la educación, principalmente de la escuela. Un ejemplo de intuición secundaria es el principio de inercia físico: un objeto conserva su estado de movimiento o de reposo a menos que intervenga una fuerza exterior. Las intuiciones secundarias, como todas las intuiciones, presuponen una práctica extensiva y una familiarización, es decir, requiere una cantidad de experiencia acumulada y verificada.

Fischbein considera que la probabilidad por su carácter práctico (está estrechamente ligada a la acción), y por ser el comportamiento humano en sí mismo probabilístico, es un área propicia para estudiar la relación entre intuición y acción.

1.3. IDEAS FUNDAMENTALES

Heitele, D. (1975) plantea diez ideas estocásticas fundamentales que se deben tener en cuenta al estudiar los conceptos de azar y probabilidad, de esas diez ideas fundamentales, son tres las que están más relacionadas con el trabajo que se realizó y son ellas, a saber: el espacio muestral como conjunto de todas las posibilidades, equidistribución y simetría y la ley de los grandes números.

1.3.1. El espacio muestral como conjunto de todas las posibilidades

La primera idea fundamental es la de asignar un espacio muestral de eventos observables a cada experimento aleatorio y representar los sucesos observables como subconjuntos del espacio muestral, dando una interpretación probabilística a las operaciones con eventos. Es decir, inventariar todos los posibles sucesos elementales asignados a un experimento, considerarlo como un conjunto de referencia o universal y aplicar toda la potencia del álgebra de conjuntos para definir los demás eventos a partir de los eventos elementales.

Esta idea permitió axiomatizar la probabilidad como medida normada aditiva, sobre el álgebra de conjuntos, puesto que las operaciones en esta álgebra de conjuntos permitían definir operaciones sobre la misma probabilidad. Puesto que todo evento elemental forma parte del conjunto de referencia, se dota de sentido al muestreo, ya que al observar repetidamente una serie de repeticiones del experimento, siempre observaremos elementos del espacio muestral.

Por otro lado, si un conjunto está incluido en un conjunto mayor, la probabilidad del primero es menor que la del segundo. Esta propiedad permite, desde la escuela elemental realizar actividades de probabilidad comparativa, incluso sin cuantificación.

El inventariar todos los posibles resultados del experimento tiene, sin embargo, a veces dificultades para los niños que no han alcanzado un nivel de razonamiento combinatorio suficiente. La dificultad está en que hay que considerar no sólo el evento que ha ocurrido realmente o incluso el suceso de interés sino todos los sucesos que podrían ocurrir. En la investigación del desarrollo del concepto de azar se ha mostrado que los niños, como algunos adultos supersticiosos, están confinados estrechamente al determinismo: creen en fuerzas ocultas que expliquen los fenómenos aleatorios.

1.3.2. Equidistribución y simetría

Es una idea estratégica descubrir y usar las simetrías físicas o de otro tipo en las situaciones problemáticas, para decidir que ninguno de los resultados posibles tiene mayor ventaja que el resto y que, por lo tanto, podemos asignarles la misma probabilidad. Una vez que se acepta esta conclusión, a partir de los axiomas se llega con facilidad al cálculo de las probabilidades de los sucesos elementales en los espacios muestrales finitos.

Por ejemplo, al lanzar un dado, la simetría supone que ninguna cara se distingue de las demás. Esto es tomado como argumento para aceptar la igualdad de probabilidad en cada resultado y llegar a la regla de Laplace, que nos permite asignar una probabilidad de un sexto a cada uno de los resultados posibles. Una vez calculadas estas probabilidades elementales, podemos calcular la probabilidad de eventos más complejos como obtener un número par u obtener una suma par al lanzar 2 o 3 dados.

Hay que recalcar que la Equidistribución (igualdad de probabilidad) de los eventos elementales de un experimento no puede ser separada de la simetría estadística, es decir, la simetría confirmada por los registros estadísticos de resultados del experimento.

Parece ser que la idea de simetría es difícil de aprender por parte de los niños, por este motivo y porque los niños tienen creencias sobre que algunos resultados son más fáciles que otros, a pesar de la simetría física. Sólo con el trabajo repetido de ejemplos de diverso materiales simétricos y no simétricos se irá desarrollando esta idea.

1.3.3. La ley de los grandes números

La convergencia estocástica hace posible el estudio de los fenómenos aleatorios en su conjunto, ya que individualmente son impredecibles. Para analizar la dificultad de la comprensión de la convergencia, hay que distinguir entre las leyes empíricas de los grandes números (la que se observa al recoger datos estadísticos de cierto fenómeno) y las correspondientes leyes matemáticas deducidas en forma de teoremas por diferentes probabilistas y que pueden ser demostradas formalmente.

La convergencia empírica es observable en la realidad, por ejemplo, la proporción de recién nacidos varones en un hospital a lo largo del año termina equilibrándose alrededor de los dos sexos. Es filosóficamente interesante que una regularidad global surja de la variabilidad local, que parece inherente al curso de la naturaleza "libertad individual bajo restricciones colectivas". Esa correspondencia empírica, hace que las correspondientes leyes matemáticas de los grandes números se justifiquen como un buen modelo para los fenómenos aleatorios, aunque no contesta la pregunta de si es posible que los alumnos sean capaces de diferenciar entre el modelo y la realidad, ya que de hecho vemos que con frecuencia se espera una convergencia empírica demasiado rápida o demasiado exacta.

Las propiedades didácticas de experiencias empíricas sobre la convergencia serían deseables desde la escuela, para preparar la comprensión posterior de los teoremas matemáticos.

Sin embargo, estas oportunidades son más restringidas de lo que nos dicen los textos escolares. Las sucesiones aleatorias obtenidas en clase convergen lentamente y a veces fallan, cuando se precisan para una demostración, lo que puede ser contraproducente.

1.4. SESGOS Y MALAS CONCEPCIONES

Es de gran importancia referirnos a esas malas concepciones que los estudiantes han interiorizado a través de la escuela, conceptos y concepciones erróneas que están presentes en los estudiantes cuando se realizan experiencias aleatorias repetidas veces. Los estudiantes creen poder adivinar o inferir resultados futuros basados en observaciones pasadas, predecir resultados sin tener en cuenta el tamaño de las muestras y el de adjudicar igual probabilidad a resultados que no son equiprobables.

Los sesgos más comunes son:

1.4.1. Insensibilidad al tamaño de la muestra o la ley de los pequeños números

Este sesgo de insensibilidad al tamaño de la muestra, según indican Tversky y Kahneman (1971), se manifiesta cuando las personas hacen una extensión indebida de la ley de los grandes números y asumen que en las muestras pequeñas debe reflejarse la probabilidad de los eventos. En particular, las personas creen que para obtener el valor de la probabilidad de un evento, basta con calcular la frecuencia relativa en un número reducido de ensayos, o, en otro sentido, asumen que los resultados obtenidos en pequeñas muestras deben ser proporcionales a la probabilidad de los eventos. Se ha encontrado que este sesgo es indiferente al paso del tiempo y al crecimiento intelectual de las personas. Fischbein (1975) lo describe en niños que se inician en la vida escolar y Tversky y Kahneman (1971) lo describen en sicólogos con experiencia.

1.4.2. El sesgo de equiprobabilidad

Este sesgo hace referencia a la creencia de las personas en adjudicarle igual medida de probabilidad a todos los sucesos asociados a un experimento aleatorio. Para comprobar esta creencia, Lecoutre (1985) realiza unos experimentos en los que propone a las personas problemas en los que indaga si al lanzar dos dados hay la misma probabilidad de obtener un 5 y un 6 que la de obtener dos veces un 5. Esta creencia se manifiesta en diferentes contextos, en personas de diferentes edades, en diferentes variaciones de la misma pregunta. Lecoutre argumenta que no se puede explicar este error como una falta de razonamiento combinatorio, si no, que los modelos combinatorios no se asocian con las situaciones en las que interviene el azar. Las personas que muestran el sesgo de equiprobabilidad consideran que el resultado del experimento "depende del azar" y en consecuencia todos los posibles resultados son equiprobables.

1.5. ANTECEDENTES

A nivel local, en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, se encontró un proyecto de grado para optar al título de especialista en educación matemática, llamado **ENSAYO METODOLÓGICO PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD** de Nury Jurado Herrera (1996). El objetivo de este trabajo era sistematizar una práctica para mostrar la importancia del juego en la construcción del concepto matemático de probabilidad, además de facilitar el desarrollo de procesos de sensibilidad, imaginación y sentido lúdico como parte esencial en la construcción del concepto de probabilidad.

El trabajo se realizó con 11 estudiantes del grado décimo del Colegio Oficial Integrado Jornada nocturna, en Málaga (Santander).

Después de hacer una reseña histórica acerca de la probabilidad, de su surgimiento en los juegos de azar y del campo conceptual asociado al mismo tópico, la autora propone cinco actividades que se describen brevemente a continuación:

La primera actividad la llamó **actividad para descubrir las concepciones de los alumnos**. En esta actividad, la profesora propone a los estudiantes que diseñen una forma para determinar qué persona se llevará una mascota que se ganaron como trofeo en un torneo de voleibol, esperando que planteen una rifa como lo más justo.

Suponiendo que dos personas no participan de la rifa por diferentes razones, y que dan su papelito al estudiante que más puntos hizo en el torneo, la profesora pregunta sobre la oportunidad de ganarse la mascota que tiene cada estudiante de los que quedan participando de la rifa. Después de deliberar y proponer varias formas para sortear la mascota, la profesora concluye lo siguiente: que los estudiantes en los diferentes sorteos, manejaban muy bien el concepto de porcentaje y proporcionalidad directa e inversa pero no de posibilidades numéricas como, 1 de 11 ó 2 de 11 que tiene cada jugador de ganar. Es decir, los estudiantes advertían que quien tuviera más papelitos, tenía más posibilidades de ganar, pero no adjudicaban valor numérico a estas.

La segunda actividad se llamó **Casino** y consistía en colocar bloques lógicos de un solo color en una bolsa negra, sacar uno y pedirles que apostaran a adivinar el color del bloque escogido.

El premio eran chocolates para el que resultara ser el ganador.

Luego el juego variaba: se introducían seis bloques rojos y dos verdes; luego seis rojos y seis verdes. Luego se colocaron todos los bloques lógicos en la bolsa, se extraía uno y se le pedía a los estudiantes que apostaran por el color que iba a salir, y que argumentaran la razón de su elección.

- Después de jugar y escuchar a los estudiantes, la profesora concluyó que estas prácticas lúdicas entusiasman mucho a los estudiantes.
- Para justificar la probabilidad que tenia una u otra ficha de ganar, los estudiantes lo hacían a manera de fracción y otros continuaban con los porcentajes.
- Se concluyó que los estudiantes manejan la noción de probabilidad pero con cierta confusión en algunos casos.

La tercera actividad se llamó **la suerte está de mi lado**, La profesora dibujó en la cancha de básquetbol del colegio una tabla como la siguiente:

10												
9												
8												
7												
6												
5												
4												
3												
2												
1												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Cada estudiante escogía un número de la parte inferior y se paraba sobre él; la profesora tomó el número 7. Se lanzaban dos dados convencionales (seis caras marcadas del uno al seis) se sumaban los resultados y el estudiante que estuviera en la columna de esta suma, avanzaba una casilla; ganaba el juego la persona que primero alcanzara 10 resultados a favor.

Después de varios lanzamientos, resultó ganadora la profesora y los estudiantes se quejaban del número que habían escogido y argumentaban que salían más los números centrales es decir el 5, 6, 7, 8, y 9, pero que el 7 le ganaba a los otros.

Un estudiante explicó a sus compañeros desde el tablero las posibilidades que tenía cada resultado de salir teniendo en cuenta la conmutatividad, es decir, tomando un 2 en el primer dado y 3 en el segundo como una forma diferente de sumar 5 que si saliera 3 en el primero y 2 en el segundo, y esto con todos los resultados en que se presenta 7 como resultado. Sobre esta actividad la profesora resaltó lo siguiente: hubo apatía por parte de los estudiantes que escogieron números que poco salían y querían terminar rápido el juego; la actividad se grabó con una cámara filmadora, lo que interfirió en el desarrollo de la actividad puesto que esto fue un distractor para los estudiantes; mediante las actividades realizadas hasta el momento, y bajo la orientación de la profesora los estudiantes logran determinar la probabilidad de un evento como la razón entre el número de casos favorables sobre el total de casos posibles.

La cuarta actividad se llamó **Pilísimo**, se trabajó por parejas y a cada una de ellas se le dio un cuadro como el siguiente:

Lista de Juegos	POSIBILIDADES SUYAS SUYAS	POSIBILIDADES MIAS MIAS
	PEDRO	JUAN
Primer juego: Si lanza el dado y sale un uno, gana usted; si sale otro número gano yo.		
Segundo juego: Si sale un número impar gana usted; si sale uno par gano yo.		
Tercer juego: Si sale un número mayor que cuatro gana usted; si sale uno par gano yo.		
Cuarto juego: Con los números del 1 al 100, si saca un número menor que 40 o mayor que 90 gana; de lo contrario gano yo.		
Quinto juego: Si de los números del 1 al 100 saca uno primo gana; si no gano yo.		

Los estudiantes jugaron sin problemas puesto que según su profesora ya tenían claro el concepto de probabilidad y ya lo aplicaban. La profesora les recordó lo que era un número primo y argumenta que los muchachos sin saberlo utilizaron la criba de Eratóstenes para conseguir los primos entre 1 y 100.

La quinta actividad, fue un taller con las preguntas siguientes:

1. Se supone que el nacimiento de un niño es tan probable como el de una niña. Una pareja tiene una hija, ¿Cuál es la probabilidad de que tengan una segunda niña?

2. *Dos jugadores, Pedro y Javier tiran cada uno una sola vez un mismo dado*, del que cada una de las seis caras numeradas del uno al seis tiene la misma posibilidad de salir; gana el que saque un número superior al del otro. La partida es nula si los dos jugadores sacan el mismo número. Calcular:

   a) La probabilidad que tiene Pedro de ganar.

   b) La probabilidad de que no gane Pedro.

   c) La probabilidad de que gane Javier sabiendo que Pedro sacó un cuatro.

   d) Se sacan al azar dos fichas de una caja que contiene dos fichas rojas y dos amarillas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos fichas sean amarillas?

   e) En una lotería donde los billetes están numerados desde el 0 hasta el 999.999, ¿Cuál es la probabilidad de que las seis cifras de un billete escogido al azar sean diferentes?

Se presentaron dificultades en los ejercicios c, d y e y sólo los resolvieron con ayuda de la profesora; puesto que se les está introduciendo a otro tipo de probabilidad.

Las conclusiones didácticas que presenta la autora acerca de este trabajo, en términos generales son:

- Que el juego bien dirigido en las personas adultas favorece la comprensión de los conceptos.

- Las actividades favorecieron un acercamiento a la parte humana de cada uno de los estudiantes por parte de la profesora.
- La aplicación de la probabilidad es inherente al ser humano, pero pasa desapercibida en la mayoría de los casos.
- Actividades como estas permiten tener una concepción individual cognitiva y sicológica de cada uno de los estudiantes, lo que conlleva a una educación personalizada y significativa.

La autora se queda mucho en que las actividades lúdicas, promueven el conocimiento, cosa que es cierta, pero no muestra resultados o respuestas propias de los chicos, igualmente se nota que es un trabajo muy dirigido.

Estos aspectos se mejorarán en este trabajo, es decir, se le dará un tratamiento diferente a las actividades desarrolladas, como el tener en cuenta las respuestas de los estudiante y no se dirigirán extremadamente los talleres, en ese sentido es que sirve de referencia el trabajo que se acaba de analizar.

Otro proyecto de especialización en educación matemática que aportó para el desarrollo del presente trabajo fue **DESARROLLO CONCEPTUAL DE LA ESTADÍSTICA EN SÉPTIMO GRADO UTILIZANDO LOS MEDIOS DE COMUNICACIÓN ESCRITOS** de Daniel Moreno Caicedo (2000). El objetivo de este proyecto era diseñar una propuesta metodológica que permitaiera desarrollar conceptos estadísticos como gráficas, porcentajes y medidas de tendencia central en estudiantes de séptimo grado utilizando los medios de comunicación escritos como periódicos y revistas.

El desarrollo del proyecto se realizó con 40 estudiantes de séptimo grado del colegio Santa Isabel de Hungría, que es una entidad educativa y de carácter privado creada por la Arquidiócesis de Bucaramanga en 1989 ubicado en Floridablanca (Santander).

La metodología propuesta se basó en un enfoque de resolución de problemas. Para alcanzar los objetivos propuestos, el autor realizó 4 situaciones didácticas. La primera de ellas sobre tablas estadísticas, la segunda sobre gráficos estadísticos, la tercera sobre porcentajes y la cuarta sobre medidas de tendencia central.

Situación didáctica número 1. Esta actividad se programó para tres horas de clase. La actividad se dividió en cuatro partes: la primera o inducción para explicar los temas que se iban a desarrollar; la segunda para motivar al estudiante por medio de un juego: en grupos de 4 estudiantes registraban en un cuaderno las sumas obtenidas al lanzar dos dados. Cada estudiante lanzaba dos dados y sumaba los números resultantes en cada dado, al estudiante que sacara la mayor suma en cada ronda, le daban tres puntos, los demás no obtenían puntuación, en caso de empate se daba un punto a cada jugador. Se hacían 20 lanzamientos y ganaba el jugador que más veces obtuviera la suma mayor. Es de notar que en esta actividad los estudiantes sólo registraban los tres puntos del ganador y un punto para cada jugador en caso de empate; por tanto la tabla de datos de esta actividad, solamente relacionaba el nombre del jugador con la puntuación total obtenida por el mismo, para luego en los diagramas leer la puntuación que había obtenido cada jugador. La tercera actividad era para desarrollar la comprensión y análisis de tablas y diagramas de barras, en esta parte el estudiante busca, recorta y pega tablas de datos de los periódicos y revistas y luego los interpreta. La cuarta actividad es de evaluación para verificar la apropiación de los conceptos relacionados en el análisis de la información presente en las tablas y diferentes diagramas que aparecen en periódicos y revistas. Se hace una tabla de datos con los cursos y número de estudiantes de cada uno de la jornada de la tarde. El profesor observaba como los estudiantes registraban en una tabla de datos, el curso y número de estudiantes que tenía el mismo, para luego con esta información, hacer diagramas de barras y diagramas circulares con los porcentajes de estudiantes por curso. Luego el profesor determinaba si los estudiantes leían e interpretaban bien la información y, si los diagramas que realizaron correspondían o no a la misma.

Las conclusiones del profesor sobre esta actividad fueron:

- Los estudiantes mostraron mucho interés por la actividad ya que todos llevaron diferentes periódicos y revistas y les llamó la atención hacer una clase diferente.

- La parte recreativa de la suma de los dados y adjudicar tres puntos al ganador, no la entendían muy bien y fue necesario la explicación del profesor para llevarla a cabo.

- Se logró que los estudiantes fueran capaces de analizar las tablas de datos, que leyeran correctamente la información presente en las mismas.

- En los periódicos encontraron tablas en la sección deportiva, económica, judicial y otros temas relacionados con biología, de esta forma el profesor resaltó la relación interdisciplinaria de las matemáticas con otras áreas del conocimiento.

Situación didáctica número 2. Esta actividad se inicia con una tabla estadística de los resultados del campeonato de fútbol de cinco cursos de la jornada de la tarde. En esta tabla hay información sobre partidos jugados, partidos ganados, partidos empatados, partidos perdidos, goles a favor, goles en contra y número de puntos de cada equipo. La idea es hacer que los estudiantes representen la información de las tablas en diagramas de barras, diagramas lineales (diagramas en los cuales, se tiene por ejemplo en el eje horizontal el nombre del equipo y en eje vertical el número de partidos ganados; para cada equipo se representa la frecuencia de partidos ganados con un punto y luego se unen todos los puntos con una línea) y diagramas circulares. Luego de esto, se busca en los periódicos y revistas diferentes tipos de gráficos para recortar, pegar y analizar la información presente en los mismos. El tiempo estimado para esta actividad fue de 4 horas de clase.

Las conclusiones acerca de esta actividad fueron:

- Los estudiantes se apropiaron de la actividad de una forma rápida y muy alegre ya que son fanáticos del fútbol y ellos estaban participando en el campeonato.

- Los estudiantes comprenden y realizan con más facilidad los gráficos de barras que los otros.

- En los gráficos circulares se les dificulta lo relacionado a los porcentajes para la subdivisión del circulo en partes que representen la frecuencia de cada dato.

- Los periódicos y revistas fueron de gran importancia y ayuda en esta parte del trabajo por la cantidad de gráficos estadísticos que presentan en sus diferentes noticias.

Situación didáctica número 3. En horas extraclase se realiza una visita a un centro comercial y se pregunta sobre los artículos que tienen descuento, precio inicial y precio final, se registran estos datos y en la clase se determina la variación del porcentaje de dichos artículos. En los periódicos se consulta la variación de los precios de los combustibles en los últimos meses y la variación que tendrá el salario mínimo para el próximo año sabiendo que se aumentará en un 9 %. El tiempo estimado para esta actividad fue de 5 horas de clase.

Conclusiones acerca de esta actividad:

- Los estudiantes calcularon rápidamente los porcentajes ya que este tema se había tratado con anterioridad en clase.
- Los estudiantes durante la actividad mantuvieron muchas expectativas ya que el colegio es de carácter comercial y estos temas relacionados con los negocios les llama mucho la atención.
- Hubo gran variedad de resultados ya que no todos los estudiantes consultaron sobre los mismos artículos.

Situación didáctica número 4. El tiempo estimado para esta actividad fue de 5 horas de clase. Se presenta información a los estudiantes sobre las medidas de tendencia central: media aritmética, mediana y moda. En los periódicos se consulta precios del café, el dólar y el UPAC durante el mes de agosto y se registran en una tabla de datos, se realizan tablas de gráficos y se sacan porcentajes. Se halla el promedio de la variación de estos artículos al igual que de la gasolina y se les pide a los estudiantes que opinen al respecto, tratando de que se conviertan en estudiantes críticos.

Conclusiones acerca de esta actividad:

1. El uso de periódicos facilita al profesor llevar al estudiante a situaciones problema, donde el estudiante debe plantear soluciones a las mismas.
2. Los conceptos de medidas de tendencia central son interiorizados rápidamente por los estudiantes y los aplican correctamente.

3. Los estudiantes vieron la utilidad de los medios de información escritos como revistas y periódicos.

Conclusiones generales acerca del proyecto.

- Las actividades de clase bajo esta propuesta, se realizan con más dinamismo y son muy bien acogidas por los estudiantes.
- Se fomenta el hábito de la lectura tanto en los estudiantes como en el profesor.
- El desarrollo de las actividades se realiza con datos reales y contextualizados, datos reales del país, mostrando al estudiante su entorno regional y nacional.
- Los medios de comunicación escritos son de gran importancia como herramienta educativa en estos temas, debido a la diversidad de tablas y gráficos estadísticos que presentan sobre diferentes temas, que permiten poner de manifiesto la interdisciplinariedad en los temas educativos.
- El profesor manifiesta que se cumplieron los objetivos propuestos y, lo más interesante, que los estudiantes vieron en la estadística una materia muy importante y fácil de aprender.

De estas actividades, se rescatan para el presente trabajo, las tareas propuestas para el estudio y análisis de diagramas de barras y medidas de tendencia central.

En los dos trabajos analizados anteriormente, se detecta que aunque son trabajos relacionados con probabilidad (el primero), y con estadística (el segundo), no se da un tratamiento desde el punto de vista frecuencial a la probabilidad, aspecto que motiva a hacer un trabajo diferente en ese aspecto, ya que en la revisión hecha, no se encuentra en la escuela de matemáticas de la U.I.S. un trabajo de estas características.

Otro trabajo que sirvió como referente para el desarrollo de las actividades fue uno realizado por Jeffrey K. Horvath y Richard Lehrer llamado: **PERSPECTIVA DE UN MODELO BASADO EN EL DESARROLLO DE LA COMPRENSIÓN DE LOS NIÑOS ACERCA DEL AZAR Y LA INCERTIDUMBRE**. En este trabajo los autores relatan el resultado de una experiencia que realizaron en 1991 en Madison (USA) con tres grupos diferentes de personas: 25 estudiantes divididos en dos grupos de segundo grado con edades entre 7 y 8 años; un par de estudiantes de cuarto y quinto grado entre 9 y 11 años, y un par de adultos con algo de experiencia en estadística.

Las actividades que los autores realizaron con los tres grupos, incluían aparatos aleatorios como ruletas, dados convencionales (seis caras numeradas del 1 al 6), dados de seis caras no convencionales (cuatro caras marcadas con el número 2 y dos caras marcadas con el número 6), dados de ocho caras y dados de 12 caras.

Las actividades estaban enfocadas a que los estudiantes definieran el espacio muestral de los resultados obtenidos al lanzar uno o dos dados, al lanzar dos dados y sumar sus resultados, predijeran resultados, decidieran si un resultado era predecible o no, determinaran la certeza o incertidumbre de un suceso, determinaran si el espacio muestral de un conjunto de resultados estaba ligado a cada resultado individual o no.

Los estudiantes del segundo grado participaron en experimentos que involucraban uno o dos dados de 6, 8 o 12 caras. Los estudiantes hacían predicciones, generaban resultados, y justificaban las relaciones entre resultados esperados y obtenidos. Ellos hacían uso extensivo de gráficos de barras para recordar los resultados del espacio muestral.

En un segundo estudio un par de estudiantes de cuarto y quinto grado y un par de adultos con experiencia en estadística participaron en un actividad titulada spinner Sums Investigation (SSI) (La investigación de sumas de la ruleta) diseñada por el Departamento de Educación de California. La actividad en el ISR involucraba una o dos ruletas con tres regiones congruentes marcadas con los números 1, 2 y 3. Los sujetos predecían los resultados de un número de pruebas dado, generaban resultados, y explicaban algunos residuos.

El tamaño de la muestra para grados cuarto y quinto (2) y adultos (2) fue pequeño en comparación con la del segundo grado (25). Sin embargo, el intento del estudio era desarrollar un modelo de transición en el entendimiento estadístico de azar e incertidumbre a través de los casos estudiados. Como un modelo, una vez desarrollado, podría ser probado con grandes muestras futuras.

Uno de los grupos de estudiantes de segundo grado (salón A) participó en experimentos que involucraban dados durante un periodo de 7 días. La actividad de cada día duraba de 45 a 60 minutos aproximadamente. Durante los 7 días los niños participaron en tres tipos de actividades diferentes. En la primera actividad, parejas de niños predecían los resultados más y menos frecuentes cuando lanzaban uno o más dados generando resultados para más de 30 pruebas y representando los resultados en un gráfico de barras. Ellos hicieron esto para uno y dos dados de seis caras y uno o dos dados de ocho caras. Durante la segunda actividad, los niños generaron el número de formas de obtener cada resultado posible para varias combinaciones de dados, y representaron la frecuencia de cada resultado posible en un gráfico de barras. Para cada una de estas primeras dos tipos de actividades, los estudiantes trabajaron en parejas.

El otro salón de clases de estudiantes de segundo grado (salón B) participó en actividades muy similares a las del salón A (haciendo predicciones, generando, anotando y discutiendo resultados). Ellos también participaron en dos actividades adicionales que eran idénticas en estructura a las otras tareas previamente descritas (predecir, generar y explicar resultados de experimentos) pero usaron dados diferentes: una involucraba un solo dado de 12 caras y otra involucraba un solo dado no estándar de 6 caras (cuatro de estos lados estaban marcados con un 2 y los otros dos lados estaban marcados con un 6).

En términos generales los autores concluyeron lo siguiente acerca del entendimiento de azar e incertidumbre que tenían los tres grupos observados, en razón a las actividades desarrolladas:

- Los niños de segundo grado tenían una idea de certeza e incertidumbre previa, diferenciaban lanzamientos de dados de otras tareas más determinadas en su salón de clases como escribir, caminar de un lugar a otro y solucionar problemas aritméticos.

- Algunos estudiantes pensaban que podrían influir de alguna forma sobre el resultado de los dados, rápidamente se dieron cuanta que los resultados al realizar el experimento eran inciertos.

- Los grupos de mayor edad, claramente entendieron la distinción entre certeza e incertidumbre y vieron los resultados de las tareas que realizaron como inciertos.

- Los estudiantes de segundo grado se dividieron entre los que podían y no podían ver la incertidumbre como una estructura clara de la tarea. Buscaban asegurar que cada resultado del lanzamiento del dado no fuera influenciado por ellos de forma tal que ellos pudieran manipular los futuros eventos.

- Los estudiantes de cuarto y quinto grado y los adultos mantuvieron a través de la investigación, la idea de incertidumbre de los resultados en los eventos experimentales con objetos aleatorios. Es decir tomaban todos los resultados como inciertos.

- Los estudiantes de segundo grado no advirtieron la relación entre eventos simples y distribuciones de eventos. Los resultados individuales eran inciertos para ellos en tareas que involucraban dados, algunos estudiantes también analizaron las distribuciones globales de resultados como incierto.

- Los estudiantes de cuarto y quinto grado vieron los eventos individuales como impredecibles pero las distribuciones de resultados como predecibles.

- Los adultos consideraban lo global como predecible, basándose en el entendimiento del espacio muestral.

- Después de la asistencia (conversaciones con el profesor y otros compañeros, gráficos y diagramas de barras mostrados por un proyector), los estudiantes de segundo fueron capaces de entender el espacio muestral y su influencia en los resultados, aspecto que previamente no habían logrado y que no se mantuvo cuando se quitaba la asistencia.

- Al principio de la investigación los estudiantes de cuarto y quinto predecían igual frecuencia para los resultados ignorando información acerca del espacio muestral. Con alguna asistencia del profesor y el soporte del sistema notacional (gráficos y diagramas), los estudiantes de cuarto y quinto incorporaron fácilmente ideas claves acerca del espacio muestral dentro de su razonamiento y continuaron incluso después de que la asistencia fue removida.

- Los adultos entendieron a través de toda la investigación, cómo el espacio muestral se relacionaba con los resultados y basaron cada decisión sobre las dos relaciones

- Hubo una marcada diferencia entre los adultos y los niños en el tratamiento de residuos. Los adultos entendieron la naturaleza y la razón de los residuos en términos de un modelamiento de procesos. Ellos entendieron que el modelo de azar e incertidumbre fue una idealización del fenómeno físico con que ellos estaban experimentando (las ruletas).

- Los adultos se dieron cuenta que podrían haber diferencias entre lo ideal y lo real, por lo tanto, los residuos eran una parte natural de los procesos de experimentación y explicables por el modelo.

En resumen los autores dejan ver en su trabajo que las ideas relacionadas con el azar y la incertidumbre, varían mucho de un grupo de cierta edad a otro y en la medida en que el niño va teniendo más edad, son mejores los conceptos que estos tienen acerca del azar y la probabilidad y que estos conceptos en la edad adulta y para personas con experiencia en el tema, deben estar bien arraigados.

Este trabajo, sirve como referente en la medida en que, en el presente proyecto, se escoge un grupo de estudiantes como el segundo grupo que ellos estudiaron, o mejor con edades muy similares, se trata de realizar actividades muy parecidas y contrastar los resultados obtenidos con los que obtuvieron estos investigadores.

El análisis que ellos hicieron, fue a través de las cinco componentes del modelo clásico de estadística y probabilidad: a). distinción entre certeza e incertidumbre, b). naturaleza de las pruebas experimentales, c). relaciones entre resultados individuales y patrones de resultados, e). estructura de eventos y d). tratamiento de residuos.

Es a partir de ese trabajo que estas mismas categorías se adoptan para el desarrollo y análisis en el presente proyecto.

Capítulo 2

LA PROPUESTA Y SU METODOLOGÍA

El presente trabajo tiene por objetivo realizar actividades de carácter lúdico que posibiliten el desarrollo de las ideas intuitivas que los estudiantes de sexto grado con edades entre 11 y 12 años puedan tener acerca de conceptos como: aleatoriedad, espacio muestral, certeza o incertidumbre de un suceso, frecuencias absolutas, probabilidad de un suceso aleatorio, gráficos de barras y análisis de los mismos. Los talleres se desarrollaron en el grado sexto B del Gimnasio Saucará de Bucaramanga (Santander), con un total de 19 estudiantes.

En estas actividades se presentaron a los estudiantes cuatro talleres para que ellos solos, sin mucha ayuda del profesor, los desarrollaran: el primer taller se llamó *taller de gráficos*; el segundo taller, se llamó *jugando con los dados I. Parte I*; el tercer taller se llamó, *jugando con los dados I. Parte II.* El cuarto y último taller se llamó *jugando con los dados II.*

Los dos primeros talleres se aplicaron durante sesiones de 90 minutos cada uno, el tercer taller se aplicó durante 135 minutos y el cuarto taller se aplicó durante 180 minutos, el cual era la parte central de todo el trabajo. Estos talleres tenían como idea posibilitar el desarrollo de la intuición de los estudiantes en los siguientes temas: análisis de gráficos, azar, certeza e incertidumbre de un suceso, espacio muestral, frecuencias absolutas, sesgos que se mantienen en los estudiantes en cuanto a resultados aleatorios, concepciones erróneas de las secuencias aleatorias y ley de los grandes números. Para revisar el desarrollo de los conceptos anteriores en los estudiantes, se analizaron las respuestas que ellos dieron a las preguntas planteadas en los talleres, a través de cinco componentes o categorías del modelo clásico de estadística y probabilidad: a. Distinción entre certeza e incertidumbre, b. Naturaleza de las pruebas experimentales, c. Relación entre eventos simples y distribuciones, d. Estructura de eventos y e. Tratamiento de residuos.

Las actividades se realizaron bajo la supervisión del profesor, los estudiantes discutían entre ellos, y respondían las preguntas. Cuando se trabajó en grupo (parte del cuarto taller) se mantenían discusiones generales, de las cuales el profesor se mantenía al margen, sólo intervenía cuando algún estudiante no entendía lo que se le estaba preguntando.

Los estudiantes respondían las preguntas en espacios en blanco que se dejaron en los mismos talleres, en tablas de datos y plantillas que se presentaron en blanco para ser llenadas por los estudiantes en cada pregunta o ejercicio que lo requería. Los talleres resueltos eran recogidos por el profesor para, de la lectura de las respuestas dadas por los estudiantes, desarrollar el análisis a cada una de ellas y de esta forma determinar si los estudiantes cumplieron o no con los objetivos propuestos en cada taller.

Igualmente se filmaron algunas sesiones de trabajo con los estudiantes, se hicieron grabaciones y se mantuvieron conversaciones con los estudiantes, pero el profesor trató de influenciar en lo más mínimo las respuestas de los estudiantes; las grabaciones y el material fílmico se recopiló con el objetivo de facilitar el análisis y las conclusiones que se presentan de toda la actividad.

Las actividades que se diseñaron y se aplicaron a los estudiantes fueron pensadas teniendo en cuenta las siguientes categorías o componentes asociadas a la comprensión de los procesos aleatorios, el azar y la incertidumbre: a. Distinción entre certeza e incertidumbre, b. Naturaleza de las pruebas experimentales, c. Relaciones entre eventos simples y distribuciones, d. Estructura de eventos y d. Tratamiento de residuos.

Estas cinco categorías se asumieron también como los ejes centrales sobre los cuales gira todo el proceso de análisis de las respuestas de los estudiantes a las actividades que se les propusieron.

Por la importancia que tienen estas cinco categorías para el desarrollo de este trabajo, a continuación se presenta una descripción detallada de cada una de ellas:

2.1. CATEGORÍAS A TRAVÉS DE LAS CUALES SE DESARROLLA EL ANÁLISIS

A continuación se presenta una descripción de cada una de las cinco categorías a través de las cuales se realiza el análisis de las respuestas dadas por los niños en los talleres.

2.1.1. Distinción entre certeza e incertidumbre

Se trata en este componente, que los estudiantes identifiquen cuándo un resultado es seguro y cuando no. Que asocien a las diferentes situaciones grados de incertidumbre cuando estas lo ameritan, y que sepan diferenciar básicamente resultados inciertos de resultados seguros. Determinar a qué edad los niños entienden el concepto de incertidumbre varía de unos teóricos a otros, por ejemplo Kuzmak y Gelman (1986) encontraron que niños de 4 años de edad podían distinguir entre una situación de resultados seguros y una de resultados inciertos, mientras que Piaget (1975) asegura que es en la etapa de operaciones formales cuando el niño adquiere la idea de azar y probabilidad; es claro que estas observaciones dependen en gran medida de las actividades que se realicen para sacar conclusiones al respecto.

2.1.2. Naturaleza de las pruebas experimentales

En este componente la idea es que el estudiante determine cuando dos o más resultados pueden pertenecer al mismo experimento. Dos partes de un experimento pueden ser comparadas si estas dos partes son idénticas respecto a la estructura de la tarea que se este realizando. Por ejemplo, dos vueltas de una ruleta, un giro en el sentido de las manecillas del reloj, y uno en sentido contrario, podrían ser consideradas como dos muestras de un mismo experimento en la mayoría de los contextos respecto a lo incierto de los resultados. Alternamente dos vueltas de una ruleta, una suavemente y la otra realizada vigorosamente podrían no considerarse pruebas de un mismo experimento si la vuelta más lenta es vista como menos generadora de resultados aleatorios.

De igual forma, esta categoría esta relacionada con el hecho de que algunos de los estudiantes asuman que en cierta forma se pueda influir sobre los resultados que se pueden obtener al realizar un experimento; para el caso concreto del lanzamiento de los dados, algunos estudiantes creen que el resultado en gran medida depende de la fuerza con que se lance el dado, de la forma como se haga el lanzamiento (si se lanza desde la mano o desde un vaso) y de fuerzas extrañas que pueden determinar el resultado a obtener y de números de suerte (escojo el 3 por que es mi número de suerte).

2.1.3. Relaciones entre eventos simples y distribuciones

La idea con este componente es que los estudiantes adviertan lo impredecible de un solo resultado (por ejemplo el giro de una ruleta o el lanzamiento de un dado) y la convergencia o predicibilidad de los patrones de resultados al realizar muchas repeticiones, por ejemplo, en el lanzamiento de un dado 600 veces o al girar muchas veces una ruleta dividida en tres regiones de igual área, uno esperaría que cada resultado apareciera con igual frecuencia. La tendencia emergente para la estructura global desde eventos localmente impredecibles es referida como “la ley de los grandes números”. Esta ley sugiere que en la realización de un mayor número de repeticiones, el patrón de resultados convergirá a alguna distribución, es decir, cada resultado posible tendrá un valor de probabilidad de ser obtenido. La distribución de probabilidades asociada a un experimento aleatorio goza de propiedades elementales que pueden ser deducidas por los estudiantes observando los resultados obtenidos; nos referimos en particular al hecho de que la suma de todas probabilidades de los resultados individuales posibles debe sumar uno.

2.1.4. Estructura de eventos

Este componente hace referencia a la habilidad que deben tener los estudiantes para definir el espacio muestral asociado a un experimento.

Los modelos clásicos de azar dependen del concepto de espacio muestral, un modelo que agrega estructura de resultados inherentes a los objetos aleatorios. El entendimiento del espacio muestral requiere la concurrencia de varias habilidades cognitivas. Por ejemplo, considerar la tarea de predecir los resultados al lanzar dos dados convencionales y sumar los resultados, siendo esta suma la que interesa para el estudio (esto es, los números del 2 al 12). Primero se debe reconocer que existen diferentes formas posibles de alcanzar algunos de los resultados (por ejemplo, hay dos formas posibles de obtener el 3 como suma: un 1 en el primer dado y un 2 en el segundo y viceversa); segundo, se podría tener una forma sistemática y exhaustiva de generar estas posibilidades.

2.1.5. Tratamientos de residuos

Este componente trata sobre los resultados predichos y los resultados obtenidos. Los modelos no son copias de fenómenos. Ellos son abstracciones de estructuras establecidas y relaciones presentes en el fenómeno modelado. Por esto, habrán residuos (esto es, la diferencia entre lo predicho y los resultados obtenidos) entre el modelo y el fenómeno modelado. En el modelo clásico, los grupos de datos pueden ser vistos como aproximaciones del espacio muestral ideal. El espacio muestral provee una manera de pensar acerca de la variación de los residuos prueba a prueba.

2.2. PRESENTACIÓN DE LOS TALLERES

A continuación se presenta una descripción de cada uno de los talleres realizados, se definen los objetivos propuestos para cada uno de ellos y se relatan todas las actividades diseñadas para lograrlos.

2.2.1. Taller No. 1: Taller de Gráficos

Su finalidad era introducir a los estudiantes al análisis de gráficos de barras, que fueran capaces de pasar de una tabla de frecuencias a un diagrama de barras y viceversa. Se consideró necesaria la realización de este taller para dotar a los estudiantes de una herramienta gráfica que les permitiera organizar y analizar convenientemente la información que pudieran obtener al realizar los experimentos aleatorios que se les proponen en los demás talleres. Este taller contiene dos ejemplos con diagramas de barras acerca de dos situaciones diferentes: edades de los niños de un jardín y cantidad de niños de cada edad, y cantidad de carros en un parqueadero durante una semana, día a día. Los ejemplos iban acompañados de preguntas referidas a los mismos, que llevaban a los estudiantes a interpretar las gráficas (leer información de los diagramas), para poder darles respuesta. En un punto del taller se le pedía al estudiante que llevara la información con los datos del parqueadero a un diagrama de barras. Este taller se realizó en 90 minutos.

2.2.2. Taller No.2: Jugando con los Dados I, Parte I

Este taller se realizó de forma individual. El taller está diseñado para que el estudiante responda unas preguntas acerca de los resultados asociados al lanzamiento de un dado sin efectuar la experimentación. El objetivo era observar sus intuiciones acerca de lo aleatorio, en particular la intención era identificar si el estudiante tenía preferencia por uno de los posibles resultados (sesgos y números de suerte), si distinguía la condición aleatoria del experimento (Distinción entre certeza e incertidumbre) a que manifestara si es posible o no influir en el resultado obtenido (naturaleza de las pruebas experimentales), y por último a que si se lanzaba muchas veces el dado, argumentara si se podía o no, predecir el número de repeticiones con que terminaría cada resultado (relaciones entre eventos simples y distribuciones). Este taller se realizó en 90 minutos.

2.2.3. Taller No. 3: Jugando con los Dados I, Parte II

El objetivo de este taller era que los estudiantes percibieran la estabilidad que se logra en las frecuencias de los resultados asociados al lanzamiento de un dado, y que con esta observación pudieran asociar un valor de probabilidad a cada resultado posible de este experimento.

Este taller se realizó en parejas, consistía en que cada estudiante escogiera tres de los números del dado, argumentara su escogencia, lanzaran el dado durante 60 veces ganando el estudiante que más repeticiones obtuviera sumando las apariciones de sus tres números.

Después de los 60 lanzamientos, que se registraban en una plantilla, el estudiante debía construir una tabla de frecuencias con la información de los resultados obtenidos y a partir de ella construir un diagrama de barras. Se debía comparar el resultado de los 60 lanzamientos de cada pareja con la de otra, y sacar conclusiones de la comparación, esto con el fin de buscar patrones de resultados en los 120 lanzamientos. Igualmente se pedía al estudiante registrar el compendio de los lanzamientos de todas las parejas (600 en total) en una tabla de frecuencias, para ver si podía inferir algo en los resultados obtenidos al realizar 1200 lanzamientos. Para terminar este taller, se le preguntaba al estudiante sobre la probabilidad de obtener cualquier resultado al lanzar un dado de ocho caras (marcadas del 1 al 8) durante 1600 veces, también se le preguntaba sobre cuantas veces aproximadamente aparecería el número 8.

2.2.4. Taller No. 4: Jugando con los Dados II

Se pretendía en este taller que los estudiantes percibieran la relación existente entre la probabilidad clásica, entendida como el cociente de resultados favorables al evento al cual se le quiere calcular su probabilidad sobre el total de resultados posibles, y la cantidad de resultados que se obtienen de ese evento cuando se repite el experimento una cantidad grande de veces. Se pretendía que los resultados de esta experiencia, que se ha demostrado causa dificultades en los estudiantes, permitiera observar a la luz de las cinco categorías previamente definidas, la evolución que los estudiantes habían sufrido durante el desarrollo de todos los talleres.

Este cuarto y último taller es la parte central de este trabajo. La idea de este taller consiste en lanzar dos dados convencionales (seis caras marcadas del 1 al 6) y sumar sus resultados, siendo esta suma la que interesa a nuestro estudio. Las primeras preguntas están enfocadas nuevamente a que el estudiante determine el espacio muestral de esta actividad. Se le pide al estudiante que en grupos de 11 personas, cada cual escoja una posible suma y lancen los dados tantas veces como sean necesarias para que en cada grupo (2 en total) halla un ganador, que será la persona que primero obtenga 10 veces la suma que escogió. Se les pide que junten los resultados de los dos grupos en un solo y, de ser necesario, hagan los lanzamientos necesarios hasta que una de las sumas posibles se obtenga 20 veces. Nuevamente se pide consignar la información en tablas, que especulen al respecto, que justifiquen qué números escogerían para jugar y que números no escogerían para jugar, que manifiesten si los resultados de una actividad como esta son predecibles o no.

Se registran en una tabla las sumas posibles y el número de repeticiones de cada suma después de juntar los resultados de los dos grupos. En otra tabla se registra cada suma posible y el número de formas de obtener cada una de ellas y se pide al estudiante que escriba la relación existente entre las dos tablas.

Para resaltar nuevamente esta importante relación entre el modelo teórico que aporta la probabilidad clásica y los resultados de la práctica, se pregunta sobre los posibles resultados que se obtendrían si se lanzaran los dados 360 veces.

Para terminar el taller, y con el ánimo de saber si los estudiantes han captado esta relación fundamental entre la realidad y el modelo que la explica, nuevamente se pregunta sobre las posibles sumas y el número de formas posibles de obtener cada una de ellas en el caso hipotético de hacer la misma actividad pero con dados de ocho caras marcadas del 1 al 8, y los posibles resultados obtenidos al hacer 640 lanzamientos con estos dados.

Capítulo 3

ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación se hace un análisis sobre las respuestas más sobresalientes dadas por los estudiantes en cada uno de los talleres, pregunta por pregunta. Como eran 19 estudiantes, se caracterizarán las respuestas de los estudiantes con una e mayúscula y un número del 1 al 19, para identificar las respuestas del mismo estudiante.

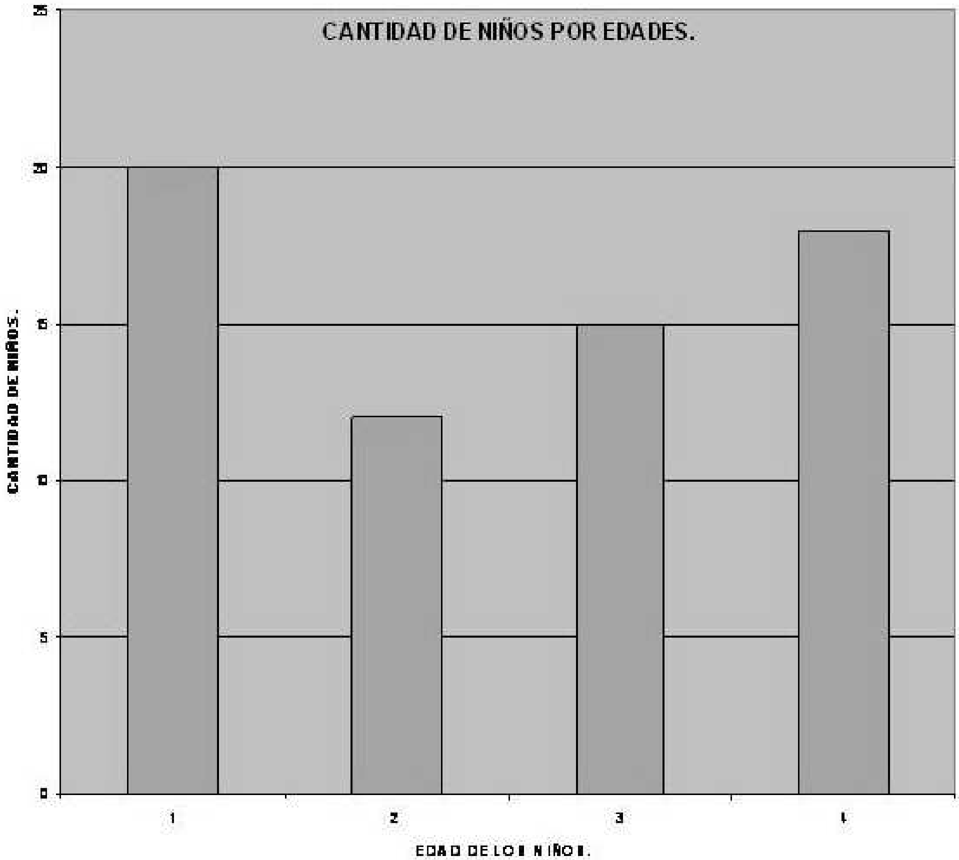
3.1. TALLER No. 1: GRÁFICOS

Gráficos". El texto de la actividad que se les entregó a los estudiantes en el primer taller es el siguiente:

A continuación encontrará unos ejemplos, de cómo representar datos en gráficos de barras, cómo interpretar estos gráficos, cómo pasar de las tablas y de los registros de datos a los gráficos de barras, y del gráfico de barras a las tablas y los registros de datos.

Ejemplo 1. En una pequeña escuela-jardín de la ciudad, la clasificaci ón de estudiantes por edades que se matricularon está dispuesta en el siguiente gráfico, que realizó una profesora de la escuela. En el eje vertical, frente a la segunda y cuarta columnas se colocaron a mano los números 12 y 18 respectivamente.

1. *ESTE GRÁFICO SE CONOCE COMO GRÁFICO DE BARRAS*



Columna 1 = Cantidad de niños de 3 años.
Columna 2 = Cantidad de niños de 4 años.
Columna 3 = Cantidad de niños de 5 años.
Columna 4 = Cantidad de niños de 6 años.

1.1 ¿Cuántos niños de 3 años se matricularon en la escuela?

1.2 ¿Cuántos niños de 4 años se matricularon en la escuela?

1.3 ¿Cuántos niños de 5 años se matricularon en la escuela?

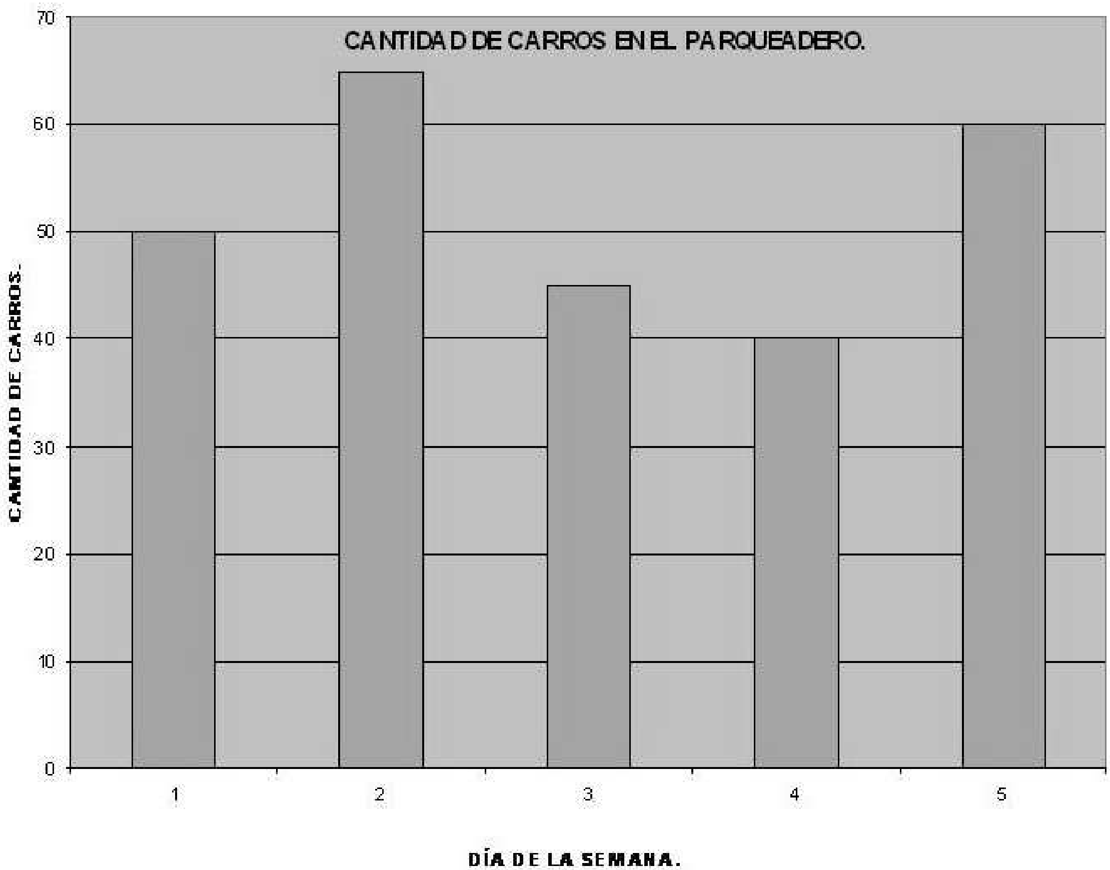
1.4 ¿Cuántos niños de 6 años se matricularon en la escuela?

1.5 ¿Cuál es el total de niños que se matricularon en los 4 grados?

Los 19 estudiantes en su totalidad, respondieron sin ninguna dificultad estas preguntas, leyeron correctamente la información que se les presentaba en el diagrama de barras.

Algunos argumentaban que habían leído e interpretado gráficos de este tipo en revistas y otros libros, motivo por el cual se les facilitaba interpretarlos.

Ejemplo 2. Para saber el número de carros que hubo de lunes a viernes de la semana pasada, en un parqueadero de la ciudad, se presenta el siguiente gráfico.



Columna 1 = día lunes. Columna 2 = día martes. Columna 3 = día miércoles.
Columna 4 = día jueves. Columna 5 = día viernes.

Con base en el gráfico anterior, responda las siguientes preguntas.

2.1 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día lunes?

2.2 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día martes?

2.3 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día miércoles?

2.4 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día jueves?

2.5 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día viernes?

2.6 Observando el gráfico, responda. ¿Cuál fue el día que guardaron más carros?

2.7 ¿Qué día se guardaron menos carros?

2.8 ¿Cuántos carros se guardaron durante la semana?

2.9 Complete la siguiente tabla.

Día	No. De Carros que se guardaron.

La mayoría de los estudiantes respondieron acertadamente estas preguntas relacionadas con el ejemplo número dos. Las respuestas diferentes, fueron dadas a la pregunta 2.8, donde por desconcentración algunos estudiantes hicieron mal la suma (a pesar de tener las otras respuestas correctas), ellos fueron:

E4. 220 coches

E8. 300 carros durante la semana.

E9. 250

E14. 280 carros se guardaron durante la semana.

3. Con base en la siguiente información, que relaciona el modelo de los carros con la cantidad de ellos que hubo en el mismo parqueadero la semana antepasada realice un gráfico de barras.

Modelo del carro	Número de carros que hubo durante toda la semana.
1998	15
1999	20
2000	10
2001	25
2002	20

Observando el gráfico que realizó o la tabla anterior responda.

3.1 ¿De qué modelo hubo mayor cantidad de carros?

3.2 ¿De qué modelo hubo menor cantidad de carros?

3.3 Ordene de mayor a menor, y por modelos el número de carros que hubo en el parqueadero.

Algunos estudiantes presentaron dificultad en este ejercicio, concretamente donde se pedía pasar de la información de la tabla de modelo de carros al diagrama de barras. Por la forma como se presentaron los ejemplos, era de esperarse que los estudiantes, al realizar el gráfico, pusieran sobre el eje horizontal el modelo de los carros, y sobre el eje vertical la cantidad de carros que hubo por cada modelo, puesto que, en los ejemplos la frecuencia de cada dato se dejó sobre el eje vertical, sin embargo no sucedió así con todos los estudiantes.

Los errores fueron los siguientes:

E3 intercambió los ejes y además no tuvo en cuenta el orden sobre el eje horizontal, el de la cantidad de carros para él.

E13 no tuvo en cuenta el orden sobre el eje vertical y no mantuvo las escalas correspondientes a la cantidad de carros de cada modelo. Plasmó la información en el diagrama de acuerdo al orden que se le presentó en la información de la tabla.

E16 invirtió el orden en el eje vertical y no lo mantuvo en el eje horizontal, es decir, no tuvo en cuenta ningún orden en este eje.

E19 invirtió los ejes, invirtió el orden en el eje vertical y no lo mantuvo en el eje horizontal.

La dificultad presentada por estos estudiantes, en parte, se debe a que ellos no habían tenido contacto con este tipo de diagramas y cuando se presentó el taller, el profesor no explicó su interpretación; el taller estaba diseñado para que los estudiantes solos lo resolvieran.

Cuando se revisó el taller, se les aclaró la forma como mejor quedaban presentados los gráficos. Los estudiantes citados anteriormente manifestaron que aunque el gráfico no quedó de la mejor manera, si se podía leer la información tal y como se había presentado en la tabla de frecuencias.

En términos generales, creo que el objetivo del taller se cumplió en un alto porcentaje, ya que los estudiantes leyeron correcta y fácilmente la información de los gráficos y llevaron la información de la tabla al diagrama de barras (ejercicio 3). Los inconvenientes presentados solo se dieron en este último ejercicio, con cuatro de los 19 estudiantes.

3.2. TALLER No. 2: JUGANDO CON LOS DADOS I. Parte I. Individual

Con este taller se trataba de ver las intuiciones de los estudiantes acerca de lo aleatorio. Que el estudiante mostrara si tenía preferencia por algún resultado; que diferenciara resultados seguros de resultados inciertos y que mostrara si podía o no influir en el resultado al lanzar un dado convencional.

Este segundo taller inicia con la siguiente situación:

1. Vamos a suponer que un amigo lo invita a que realicen el siguiente juego asociado al lanzamiento de un dado: antes de lanzar el dado cada uno de los jugadores piensa en un número y lo anota en una hoja de papel (cada estudiante puede ver el número que escribió cada compañero, para que no lo repitan). Después uno cualquiera de los jugadores lanza el dado. Gana el juego quien haya escogido el número que se obtuvo.

1.1 ¿Cuántas personas pueden participar en este juego, sabiendo que solo puede haber un ganador? Explique su respuesta.

A esta pregunta le dieron respuesta acertadamente la mayoría de los estudiantes, motivo por el cual se puede inferir que la mayoría de los estudiantes puede definir el espacio muestral asociado al lanzamiento de un dado convencional. La respuesta acertada a esta pregunta la dieron 16 de los 19 estudiantes, excepto los estudiantes E3, E14 y E17.

Estos estudiantes dieron las siguientes respuestas:

E3. *12, porque es el número máximo que hay en el dado.*

E14. *Máximo 4 personas, porque hay mayor cantidad de gente.*

E17. *4 Personas pueden jugar para que sobren dos números y sea justo, porque* *si nadie anota o gana, se le vuelve a dar.*

Estos tres estudiantes no definen correctamente el espacio muestral asociado al lanzamiento de un dado. E17 propone una alternativa donde se presenta la oportunidad de que no haya ganador, este estudiante interpretó mal la pregunta, pues se pedía que hubiera un ganador.

1.2 Si tuviera que jugar ¿qué número escogería y por qué?

Los estudiantes escogieron algún número por ejemplo el 3 o el 4 también el 5, y sus argumentos, en la mayoría de los casos, fue que ese número era el número de su suerte. Un estudiante escogió el seis argumentando que éste era un buen número por ser múltiplo de tres. Otro escogió el número cinco argumentando que era el primero que se le había venido a la mente. Algunos opinaban que el número escogido era el que más veces salía: *escojo el número 2 por que es el que más sale,* por ejemplo. E1 escogió el número 3 y argumentó que tenía más posibilidades de salir un número impar.

En estas respuestas se deja entrever las creencias de los estudiantes acerca de números de suerte, y la inclinación por tal o cual resultado por diversas razones. Los que opinaban que el número escogido era el que más veces salía, argumentaban que en ocasiones pasadas, cuando jugaban parqués, por ejemplo, cuando lanzaban un dado este número era el que aparecía la mayoría de veces. Fundamentan sus predicciones en resultados muy particulares, es una heurística de disponibilidad como la denominan Tversky y Kahneman (1973).

1.3 ¿Cree que el jugador que lance el dado tiene más posibilidades de ganar? Explique su respuesta.

Los argumentos más comunes a esta pregunta fueron:

E13. El jugador que lance tiene posibilidades de ganar si hace un truco para que salga su número.

E16. No, porque el jugador no sabe que número saldrá si revuelve el dado.

E1. No, pues es cuestión de suerte.

E15. No, es cuestión de azar.

E4. No, el dado no es predecible.

E8. Sí, el lanzador puede ganar si le transmite su energía al dado.

E12. No, esto es pura suerte, a menos que el lanzador haga trampa.

E14. Sí, el lanzador puede ganar si tiene buena práctica en el juego.

En estas respuestas se pueden ver que algunos estudiantes manejan términos como: *el dado no es predecible, es cuestión de azar*, que son términos propios de la probabilidad, es decir, los niños manejan, aunque no todos, cierta familiaridad con la incertidumbre y aleatoriedad asociada al resultado a obtener cuando se lanza un dado convencional.

En otras respuestas a la misma pregunta, como las de E8, E12, E13 y E14, se puede evidenciar que estos estudiantes creen que de alguna forma se pueden influenciar el resultado a obtener. E8 cree que fuerzas extrañas, como la energía del lanzador puede ser transmitida al dado para determinar el resultado, esta es una falsa creencia presente en los niños cuando se trabajan aparatos aleatorios. Estos estudiantes en esta parte del trabajo, no ven los resultados obtenidos al lanzar un dado como una práctica aleatoria y asumen una conducta determinista, motivada, tal vez, por sus experiencias con la matemática tradicional.

2. Si jugaran solo 2 personas, ¿cuál sería una forma justa de distribuirse los números del dado para que ambos jugadores tuvieran las mismas posibilidades de ganar?

En las respuestas a esta pregunta, la mayoría de los estudiantes coincidieron en que cada jugador tomara tres números y dejara igual cantidad al otro, sin explicar de que forma se repartirían los números. Esta respuesta, muy común en los estudiantes, hace pensar que los estudiantes, de alguna forma, adjudican igual probabilidad a cualquier resultado (equiprobabilidad) en el lanzamiento de un dado convencional. E17, opinó diferente a la mayoría de sus compañeros, su respuesta fue:

E17. Que cada jugador escoja dos números y se queden dos números sin escoger, para que de esta forma haya posibilidad de que ninguno gane.

Este estudiante trata siempre de dejar en el juego resultados para que no haya ganador, (por su respuesta a la pregunta 1.1). Parece ser que asume que el juego sólo se realiza una vez y que la única forma de repetirlo es que se obtenga un número que no fue seleccionado por ninguno de los jugadores.

2.1 ¿Existe alguna forma de repartirse los números que hagan que alguno de los jugadores tenga más ventaja en el juego? Explique su respuesta.

Esta pregunta arrojó, entre otras, respuestas como:

E1. No, es cuestión de suerte.

E5. No, los lados del dado son iguales.

E4. No, el dado no es predecible.

E8. Sí, que un jugador escoja mas números que otro.

E12. Sí, que un jugador escoja 5 números y el otro solamente uno.

Los estudiantes E5 y E4, dejan ver en sus respuestas la equiprobabilidad en el sentido en que las oportunidades de ganar no dependen del número de posibilidades que se tengan ya que los resultados aleatorios tienen el mismo chance de ser obtenidos.

Los estudiantes E8 y E12, presentan respuestas que claramente le dan la ventaja a un jugador sobre el otro, y tienen intuitivamente el concepto de probabilidad en el sentido de que a mayor cantidad de números a favor, mayor será la posibilidad de ganar que tiene el jugador.

2.2 ¿Será qué escoger los números más grandes aumenta el chance de ganar el juego? Explique su respuesta.

Respuestas más comunes a esta pregunta:

E13. No, poco salen.

E5. No, son iguales a los pequeños.

E15. No, también pueden salir los pequeños como el 1 o el 2.

E6. Sí, porque en los dados, casi siempre salen los números del cuatro en adelante.

E11. No, hay igual posibilidad de que salga uno grande o uno pequeño.

E7. Sí, los dados pueden estar cargados.

E18. Sí, los números grandes tienen más posibilidades.

E2. No, puede caer cualquier número.

En las respuestas de los estudiantes E2, E5, E11 y E15, nuevamente se deja entrever la idea de equiprobabilidad en los resultados asociados a este experimento; E11, E13 y E18 no tienen claro el concepto de equiprobabilidad que tienen los resultados de este experimento, ellos de alguna forma manifiestan que si es más probable que salgan los números grandes o los pequeños.

El estudiante E7, según su respuesta, cree que de alguna forma se pueden influenciar los resultados, y tiene razón en el sentido de que si los dados están cargados o sesgados hacia un resultado específico, es más probable que éste salga.

3 ¿Existe alguna forma de lanzar el dado para obtener un resultado específico?

Hubo respuestas como las siguientes:

E19. No, lanzándolo como sea, siempre cae un par o un impar.

E14. Sí, lanzándolo duro para que ruede bastante.

E2. No, puede caer cualquier número.

E8. No, es cuestión de azar.

E6. Sí, haciendo trampa.

E4. No, es impredecible.

E15. Sí, lanzándolo suave de tal manera que el dado no ruede.

Nuevamente, algunas respuestas (E2, E8) hacen pensar en la equiprobabilidad y otros estudiantes piensan que dependiendo de la fuerza (E14 y E15), se puede obtener un resultado en particular. Se puede ver de estas respuestas que E19, E2, E8 y E4, tienen clara la idea de la naturaleza de las pruebas experimentales y aleatoriedad de los resultados.

4. Si se realiza el juego 60 veces entre 6 jugadores, ¿cuántos juegos aproximadamente ganará cada jugador? Explique su respuesta.

Doce estudiantes argumentaron que de 60 lanzamientos, cada jugador ganaba aproximadamente 10 veces y sus argumentos más comunes fueron: "*porque 10 x 6 = 60; porque 10 es la sexta parte de 60; porque 60 dividido en 6 es 10; solo si cada jugador gana por ronda, es cuestión de suerte más o menos cada uno puede ganar 10 veces, pueden ser 10 veces pero el resultado es variado*". Estos estudiantes relacionan la probabilidad clásica con el número de resultados que se pueden obtener al realizar el experimento un número repetido de veces. Sin embargo, su predicción es completamente determinista y no admiten que los resultados puedan diferir un poco del cálculo aritmético directo que relacional el número de repeticiones con la probabilidad.

Otras respuestas fueron:

E2. 10 veces cada uno, pero puede ocurrir que uno gane 60 veces y los otros no ganen.

E4. El 1 sale 5 veces, el 2 sale 15 veces, el 3 sale 10 veces, el 4 sale 10 veces, el 5 sale 15 veces y el 6 sale 5 veces, por que el 1 y el 6 casi nunca salen.

E15. El 1 sale 6 veces, el 2 sale 14 veces, el 3 sale 10 veces, el 4 sale 16 veces, el 5 sale 4 veces y 6 sale 10 veces.

Estos estudiantes se aventuraron a ponerle a cada resultado un número específico, entendiendo que un resultado puede tener cualquier frecuencia, frecuencias que son poco probables pero igual existe la posibilidad que ocurran. Si bien podría pensarse que estos estudiantes poseen una intuición de la variabilidad, tal vez sea más aceptable pensar que se trata de una concepción en la que en los experimentos aleatorios todo es posible.

5. Cuando se juega muchas veces, ¿Cree que hay un resultado que sale más que los otros? ¿Cuál? ¿Por qué?

La mayoría respondieron que al hacer muchos lanzamientos, sí hay un número que sale mas que los otros. Y afirmaron que estos números eran el 3, el 4 y el 5. Argumentaban que estos números tenían más posibilidad de salir que los otros pero no daban más explicaciones.

E7. Sale más el 4 que otros, pues ya lo he hecho y este resultado se repetía más.

Otros estudiantes, seis en total, manifestaron que no había un número que saliera más que los otros, que era impredecible, que todos tenían la misma posibilidad.

En términos generales, se puede llegar a las siguientes conclusiones:

Los estudiantes poseen una intuición de probabilidad clásica que les permite relacionar la probabilidad de obtener un resultado con base en la razón que representa el resultado respecto al total de resultados. Sin embargo, al relacionar el valor de probabilidad con los resultados que se puedan obtener al repetir el experimento varias veces, utilizan un criterio determinista.

Aunque los estudiantes identificaron sin mayores complicaciones el espacio muestral asociado al lanzamiento del dado, no comprenden del todo la naturaleza aleatoria del experimento, muchos de ellos piensan que los resultados dependen de la habilidad del lanzador y de la suerte del jugador.

3.3. TALLER No. 3: JUGANDO CON LOS DADOS I. Parte II. Parejas

. Se presentan las preguntas del tercer taller, las respuestas más comunes y variadas de los estudiantes y su respectivo análisis. El objetivo del taller era observar si los estudiantes aplicaban los conceptos estudiados en los primeros talleres y asociaban el valor de probabilidad con los resultados obtenidos al lanzar un dado convencional 600 veces. En este taller los estudiantes realizaron directamente las experimentaciones al contrario del taller anterior donde las experimentaciones eran mentales.

Este taller comenzaba con la siguiente actividad: (como es continuación del taller anterior, el primer ejercicio es el número 6)

6. Ahora, en grupos de dos estudiantes, cada estudiante escoge 3 números del dado. Realicen 60 lanzamientos y registren los resultados. Gana el estudiante que finalizados los lanzamientos, sume más resultados a favor de los tres números que escogió.

Al escoger cada jugador los tres números para participar, no hubo inconveniente, cada jugador escogió sin problemas sus números. El argumento en la mayoría de los casos fue que, *estos números me gustan, son de mi suerte y salen más. Me tocaron estos, pues mi compañero escogió primero.*

El estudiante E4, estaba jugando solo y escogió los números 1, 6 y 4. Los otros números se los adjudicó a un nombre ficticio. Otras explicaciones a la escogencia de los números fueron:

E4. El 6 lo tomé por la edad de mi hermana, el 1 por el número de hermanas y el 4 por el número de mi antigua casa.

E19. Escojo los números 4, 5 y 3, porque al multiplicarlos da 60.

E17. Escojo los números 2, 3 y 6, porque tienen más posibilidades de salir, pero hay que tirar el dado de cierta forma.

E11. Escojo los números 4, 5 y 6, porque casi siempre salen por ser los más grandes.

En esta escogencia, se nota que hay niños que al tratar de justificar sus números escogidos, creen que al lanzar el dado de cierta forma salen determinados números en particular, conducta que refleja un desconocimiento de la naturaleza de los experimentos aleatorios.

Sin problema se realizaron y registraron los 60 lanzamientos en la plantilla correspondiente. La plantilla para registrar los resultados era como la siguiente, tenía 60 casillas, aquí sólo se presenta un bosquejo con 6 casillas.

REGISTRO DE LOS 60 LANZAMIENTOS.

Número de	RESULTADOS					
lanzamiento	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

7. Registre los resultados del ejercicio anterior en la siguiente tabla.

Resultado del Lanzamiento	Número de Veces que Salió

Este ejercicio 7 lo realizaron sin ningún problema, la totalidad de los estudiantes pasaron la información de los 60 lanzamientos de la plantilla a la tabla de frecuencias.

8. Realicen un gráfico de barras, con la información anterior. (En una hoja auxiliar).

Al realizar el diagrama de barras con la información de los 60 lanzamientos no hubo mayores inconvenientes, excepto por el estudiante E19 que intercambió los ejes, era de esperarse que sobre el eje horizontal, se pusiera el posible resultado y sobre el vertical el número de veces que salió cada uno.

9. Observando la tabla anterior, ¿qué puede decir, acerca de la cantidad de veces que se obtuvo cada resultado?

Los estudiantes escribieron cuál resultado había salido más y cuál menos, también qué números habían quedado empatados en el total de apariciones y qué estudiante había ganado con los tres números que cada uno había escogido. Además se obtuvieron, entre otras, las siguientes respuestas:

E7 y E8. Que los números impares son mayores que los pares en los lanzamientos. (pues salieron mas veces los impares en los 60 lanzamientos).

E6 y E10. Nuestros resultados no son muy repetitivos.

E5 y E14. Estuvo muy bueno el resultado, porque era algo inesperado.

E3 y E11. Estuvo muy reñido el juego, pero el 1 fue el que ganó. (14 repeticiones).

En general, se podría decir que los estudiantes se limitaron a observar los resultados en forma individual pero fueron incapaces de realizar una visión global que les permitiera percibir algunas similitudes en los resultados. La percepción de similitudes en resultados cuyos valores son diferentes implica un manejo de la variabilidad innata a los procesos aleatorios que los estudiantes indudablemente no poseen. E6 y E10, anotaron que sus resultados no eran muy repetitivos, como que estaban esperando frecuencias muy parecidas para los seis resultados (¿probabilidad de un sexto para cada número?), pues estos dos estudiantes en la pregunta del taller anterior sobre los 60 lanzamientos y 6 jugadores, afirmaron que cada uno ganaría en aproximadamente 10 veces. E3 y E11, obtuvieron empate entre los números 3 y 6 (11 repeticiones cada uno), y entre el 4 y el 5 (9 repeticiones cada uno), el 2 obtuvo 6 repeticiones, razones suficientes para su afirmación.

10. Observen la tabla de resultados de otra pareja de compañeros y compárenla con la obtenida por ustedes. ¿Qué puede decir como resultado de esta comparación?

Algunas parejas compararon resultado a resultado y escribían esta comparación. Hubo respuestas como las siguientes.

E3 y E11. Estuvieron casi iguales los resultados.

E13 y E17. Es casi igual a los de los demás.

E5 y E14. Hubo poca diferencia entre los lanzamientos de ellos y los de nosotros.

La igualdad a la que se refieren estos dos estudiantes, es a la similitud que obtuvieron las frecuencias de sus resultados con las frecuencias de los resultados de la otra pareja.

11. Ahora reúnan en una sola tabla los resultados obtenidos por todas las parejas y escriban sus conclusiones acerca de las posibilidades de ganar que tiene cada jugador de acuerdo al número escogido.

Resultado del Lanzamiento	Número de Veces que Salió

El resultado de todas las parejas, arrojó un compendio que registraron en la anterior tabla de frecuencias, y en el tablero con ayuda del profesor se registraron los resultados en un cuadro como el siguiente:

No.	NÚMERO DE REPETICIONES										Total
	Grupo No. 1	Grupo No. 2	Grupo No. 3	Grupo No. 4	Grupo No. 5	Grupo No. 6	Grupo No. 7	Grupo No. 8	Grupo No. 9	Grupo No. 10	
1	8	9	11	8	13	8	11	14	9	7	98
2	14	8	10	13	11	10	8	6	12	11	103
3	13	13	12	14	10	5	11	11	8	6	103
4	11	8	7	9	8	10	9	9	12	11	94
5	9	12	10	5	12	13	12	9	7	17	106
6	5	10	10	11	6	14	9	11	12	8	96

Al analizar esta tabla, algunos estudiantes simplemente escribieron el número que más había salido y el que menos había salido, durante los 600 lanzamientos que se totalizaron al hacer el compilado de las 10 parejas.

Otras respuestas fueron:

E6 y E10. *Entre todos los grupos, salieron unos números muy grandes y muy pocos repetitivos.*

E2 y E18. *Que el promedio es de 94 a 106.*

E9 y E12. *En promedio, el 5, el 3 y el 2 tienen más posibilidades de salir.*

Los estudiantes en general no hicieron un análisis a fondo sobre los resultados de los 600 lanzamientos, se esperaba que advirtieran sobre lo parecido de las frecuencias de cada resultado. Se observó con extrañeza que cuando se pregunto hipotéticamente (no tenían a mano los dados) en el segundo taller, por las posibilidades de ganar que tenía cada uno de los 6 jugadores al lanzar un dado 60 veces, la mayoría (12 de 19) afirmaron que 10 veces (la sexta parte); cuando se realizaron los 60 lanzamientos (tercer taller), pocos advirtieron sobre lo afirmado en el segundo taller respecto al mismo ejercicio y que al reunir los 600 lanzamientos, prácticamente ninguna pareja hizo referencia a la sexta parte de 600 y fueron muy pobres las conclusiones acerca de esta observación. Es decir, los estudiantes realizaron un mejor análisis con los experimentos mentales que con los experimentos reales, situación que se podría explicar por el desconcierto que hubiera podido causar el hecho de que los resultados obtenidos no concuerdan exactamente con lo previsto, nuevamente la concepción determinista exacta heredada de los cálculos aritméticos se constituyó en un obstáculo para observar regularidades.

12. Por toda la experiencia realizada, ¿Usted cree que se puede predecir más o menos los resultados que se obtendrían al realizar el juego, digamos 1200 veces, sin tener necesidad de jugarlos?

Hubo estudiantes que no se animaron a predecir los posibles resultados al realizar 1200 lanzamientos, afirmaban que era algo de suerte. Los que respondieron argumentaban que:

E6 y E10. *Mas o menos el doble de los resultados anteriores.*

E7 y E8. *No, por que no se puede predecir el futuro y menos de algo que sale al azar.*

E4. *Cada número sale entre 90 y 120 veces.*

E6 y E10, de alguna forma, están pensando en la probabilidad frecuencial al realizar los 1200 lanzamientos, pues ellos afirman que el número de veces que saldría cada resultado al lanzar el dado 1200 veces sería más o menos el doble de los que aparecen si se lanzan 600 veces. Estos estudiantes son los que se habían referenciado antes, en el taller 3 asumieron que cada jugador ganaría 10 veces al lanzar el dado 60 veces, y ahora están pensando en la proporcionalidad de frecuencias al aumentar las repeticiones. Se puede inferir que estos estudiantes poseen una intuición válida que les permite relacionar los valores de probabilidad con los resultados de las repeticiones del experimento.

13. Si ahora el juego consistiera en lanzar un dado que tiene 8 caras, numeradas del 1 al 8, ¿cuál sería la probabilidad de obtener cualquier resultado Si se lanzara este dado 1600 veces?

A esta pregunta algunos estudiantes no respondieron y otros respondieron cosas como:

E9 y E12. *Pues no sabemos, es muy impredecible sobre todo porque se tiran 1600 veces.*

E2 y E18. *200 veces cada uno.*

E7 y E8. *Muchas y muy diferentes, porque es muy difícil hacer que eso pase, (que caiga lo que uno quiere).*

Los estudiantes E7 y E8, dejan ver que no captaron las regularidades que se obtienen para un número grande de repeticiones, no manejan intuitivamente la relación presente entre eventos simples y distribuciones.

E2 y E18, dejan ver en su respuesta la transferencia determinista de la probabilidad laplaciana a la frecuencia de los resultados obtenidos en la práctica.

E9 y E12, asumen que es difícil predecir el número de repeticiones que tendrá cada resultado cuando se hace un número grande de lanzamientos, asumen que como es un proceso aleatorio y que cualquier resultado referido a las frecuencias se puede dar. Estos estudiantes podrían estar pensando en predicciones exactas al mismo tiempo que tienen en cuenta la variabilidad de los resultados, mezcla que les impide dar una respuesta exacta y responder con una aproximación, un más o menos que hasta ahora ningún estudiante ha expresado.

14. Si se lanzara el dado 1600 veces, ¿en cuántas repeticiones aproximadamente se obtendría el número 8?

Esta pregunta arrojó respuestas como:

E7 y E8.	*Unas 100 a 500.*
E5 y E14.	*360 veces.*
E13 y E17.	*128 veces.*
E6 y E10.	*212 veces.*
E2 y E18.	*200.*
E9 y E12.	*Sería algo impredecible.*

E2 y E8, siguen manteniendo la idea de probabilidad clásica o laplaciana, pues asocian una probabilidad de un octavo al número 8, aunque no manifiestan la probabilidad numérica como tal, estos estudiantes manejan intuitivamente el concepto de probabilidad.

Los otros estudiantes, a raíz de la experiencia, adjudican ciertos valores como frecuencias para el número 8, valores que son probables pues en este experimento cualquier resultado puede aparecer.

En términos generales, se puede concluir de este taller lo siguiente:

Algunos estudiantes tienen una intuición del concepto de probabilidad clásica, que a su vez extrapolan para predecir el número de resultados que se pueden obtener al realizar varias lanzamientos de un dado, puesto que cuando se les preguntaba sobre el número de repeticiones favorables a un resultado específico después de lanzar el dado un número determinado de veces, dividían el número de lanzamientos entre 6 (para el caso de dados convencionales) o entre 8 (para el caso de dados de 8 caras). Sin embargo, hay que aclarar que esta asociación es meramente aritmética porque ellos no percibieron esta regularidad de las frecuencias al realizar en la práctica las repeticiones solicitadas.

Esta situación no deja de ser curiosa, efectúan relaciones mentales pero son incapaces de ratificarlas en la práctica. Se puede justificar esta desconexión por la naturaleza misma de los experimentos aleatorios, en particular por la variabilidad innata que éstos poseen.

Al escoger tres números del dado de 6 caras, para jugar algunos estudiantes no reparan en tal escogencia, consideran los resultados como aleatorios y con igual oportunidad de ganar y entienden la naturaleza de las pruebas experimentales, aunque no todos, ya que algunos también manifestaban que de alguna forma se podía influenciar el resultado a obtener.

3.4. TALLER No. 4: JUGANDO CON LOS DADOS II

Este taller, cuyo objetivo era que los estudiantes determinaran nuevamente el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos dados y sumar sus resultados, que los estudiantes tuvieran en cuenta el espacio muestral para predecir resultados y a que advirtieran que los resultados individuales son altamente impredecibles pero que los resultados globales siguen cierto patrón, empezaba con la siguiente actividad:

Este es un juego en el que intervienen dos dados, siendo el resultado, la suma de los números obtenidos al lanzar los dos dados. Si, por ejemplo, al lanzar los dados en uno de ellos sale 2 y en el otro sale 3, el resultado que interesa es la suma de los dos resultados, es decir, 5. Cada participante debe escoger uno de los resultados posibles de estas sumas y, escribirlo en un papel, se lanzan los dados y se hace la suma, quien haya escogido este resultado es el ganador.

1. ¿Cuántos jugadores pueden participar de este juego, si cada jugador sólo puede escoger una de las sumas posibles, es decir, solo habrá un ganador en cada lanzamiento?

La mayoría de los estudiantes, respondieron acertadamente esta pregunta al afirmar que podían jugar 11 personas. Otras respuestas que dieron otros estudiantes son las siguientes:

E2. 11 personas porque los dos dados tienen 12 caras pero el 1 no puede salir.

E4. 35 perdedores y un ganador.

E8. Solo 21 jugadores pueden jugar.

E12. 12 jugadores porque la mayor suma es 12.

E17. 6 personas.

En esta pregunta, cuyo fin era determinar el número de sumas posibles, al lanzar dos dados convencionales y sumar sus resultados, la mayor parte de los estudiantes lo hizo acertadamente; E4, confundió la suma de los dos resultados, con el número total de parejas. E12, claramente entendió la actividad propuesta, pero no advirtió que no era posible obtener un 1 como suma. E17, E12, evidencian en sus respuestas que no entendieron el juego; parece ser que E8, tiene en cuenta el número de parejas posibles de la siguiente manera: al 6 lo asocia con otros 6 números, lo que le da 6 parejas; al 5 lo asocia con 5 números y descarta la pareja (5,6) – sacar 5 en un dado y 6 en el otro-, pues la toma como igual a la pareja (6,5), lo que la da 5 parejas; al 4 lo asocia con 4 números y descarta (4,6) y (4,5), lo que le da 4 parejas y así sucesivamente hasta obtener 21 parejas. Pero no se da cuenta por ejemplo que las parejas (6,4) y (5,5) arrojan un solo valor (10) como suma; y que (6,2), (5,3), (4,4) son un mismo resultado como suma (8) etc. De esta forma permite en su respuesta que varios jugadores tomen el mismo número sin darse cuenta.

2. ¿Cuáles son los resultados posibles de la suma de los resultados de los dos dados?

Algunos de los estudiantes (9 de 19) respondieron correctamente y escribían los posibles resultados (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12).

Entre los que no respondieron correctamente se encuentran:

E12. 9, por que el 5 y el 4 son los que mas salen.

E15. El 2 y el 4 por que son los que más salen.

E14. El máximo de la suma es 12 y no se puede escoger un número mayor.

En esta pregunta, cuyo objetivo era ver si los estudiantes podían determinar el espacio muestral asociado al lanzamiento de dos dados convencionales y sumar sus resultados, se puede ver que 9 de los 19 estudiantes respondieron bien, es decir, hay estudiantes que fácilmente entienden la actividad.

Lo que se puede analizar de las respuestas de E12, E14 y E15, es que no entendieron el juego como se les presentó.

Los resultados de la siguiente parte del juego, regístrelos en la tabla que aparece a continuación, donde en la primera fila aparecen los valores posibles de la suma de los dos dados. Cada equipo debe tener 11 jugadores, cada jugador toma la columna del número que escogió, y se ubica en la parte inferior. Paso seguido, se lanzan los dados y se suman los resultados, quien haya escogido la suma obtenida, avanza una casilla hacia arriba; coloreando o tachando la casilla a la cual avanza, para llevar el registro. El ganador del juego es el jugador que primero llegue a la META.

3. Antes de empezar a jugar, ¿cree que el juego es justo? o, por el contrario, cree que alguno o algunos de los jugadores tienen ventajas sobre los demás? ¿por qué?

En esta pregunta (después de repartirse los números para empezar a jugar, donde ganaba el que primero obtuviera 10 veces el resultado que había escogido). se obtuvieron entre otras las siguientes respuestas.

E1. Es justo, pues todos los jugadores tienen la misma posibilidad de ganar.

E15. Yo creo que es justo porque nadie tiene ventajas.

E16. Yo digo que es justo porque todos los jugadores tienen oportunidad de escoger cualquier número.

E14. Si porque el máximo de jugadores es 12 y algunos pueden tener más ventajas que otros.

E17. Si es justo, los participantes tienen las mismas oportunidades de ganar, tal vez si saben tirar los dados, pero sería trampa.

E11. Si es justo, porque cualquier suma puede caer y los jugadores pueden jugar fácilmente.

E9. Si el juego es justo, y los jugadores no tienen ventajas sobre los demás porque el juego es de suerte.

En esta pregunta se pretendía observar si los estudiantes se daban cuenta en estos momentos, de que algunas de las sumas tenían ventajas sobre las demás, es decir que algunas sumas se pueden formar con más frecuencia que las otras; pero la gran parte del grupo asume que el juego es justo por diferentes razones, lo que indica que los estudiantes no se habían dado cuenta de la ventaja de unas sumas sobre las otras, y por el contrario en la mayoría de los casos le dan igual probabilidad a cada resultado, cosa que es completamente falsa en esta actividad. Es decir la mayoría de los estudiantes mantiene el sesgo de equiprobabilidad para los resultados de este experimento.

4. ¿Cuál es la probabilidad que de ganar tiene cada participante en el juego?

En esta pregunta, hubo respuestas como.

E9. 1 de 11.

E6. El que escoja el número mayor como el 6 + 6 = 12 y le salga, podría ganar fácilmente.

E18. La suerte que tenga.

E5. Todos tienen igual posibilidad de ganar.

E11. Tienen posibilidades de ganar en un porcentaje de 50 a 50.

E16. Si juegan 11 jugadores, tienen una posibilidad de ganar, el número que escogió.

E7. Uno sobre 22.

E4. Uno de 36.

E12. No se, porque es un juego de suerte.

Esta pregunta que nuevamente intentaba que el estudiante advirtiera ventajas de unas sumas sobre las otras; no lo mostró de esa manera. Algunos estudiantes asociaron cierta medida de probabilidad desde el enfoque clásico, –son 11 jugadores cada uno escoge un número, luego la probabilidad es 1 de 11– para el caso del estudiante E9, que adjudica equiprobabilidad a los resultados. Igualmente E5, está asumiendo que todas las sumas aparecen con igual frecuencia, cosa que no es así.

Parece ser que E7, quien afirma que la probabilidad de ganar que tiene cada participante es de uno sobre 22, estuviera asumiendo que el número de posibles parejas fueran 22, tomándolas de la siguiente manera, el 6 tiene 6 formas de formar parejas, el 6 de un dado con los 6 números del otro dado; el 5 formaría igualmente 6 parejas pero descarta la pareja formada con el 6, pues ya lo contó; el 4 formaría 6 parejas pero no se cuenta la que forma con el 6 y la que forma con el 5 y así sucesivamente. En total se obtendrían 21 parejas, el estudiante toma 22 parejas y por ello asocia la probabilidad de 1 sobre 22.

E4 que asocia la probabilidad de uno de 36, está teniendo en cuenta que son 36 parejas posibles, pero no toma en cuenta que varias parejas de esas determinan la misma suma en la mayoría de los casos.

La actividad que seguía, era llenar la tabla donde se registraban los resultados obtenidos y ganaba quien completara 10 apariciones con su número escogido. Para esto se dividió el curso en dos grupos. Como cada grupo requería de 11 jugadores, los dos grupos se completaron con el profesor y dos estudiantes de octavo grado que estaban filmando la actividad, quienes escogimos un número en cada grupo.

Para terminar la actividad en el primer grupo, fue necesario hacer 40 lanzamientos y ganó el estudiante que había escogido el número 6.

La tabla con los resultados, quedó de la siguiente manera:

META										
				X						
				X						
				X						
				X	X					
				X	X					
				X	X		X			
				X	X	X	X		X	
	X	X		X	X	X	X		X	
	X	X		X	X	X	X	X	X	
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Para el segundo grupo, hubo necesidad de realizar 61 lanzamientos y ganó el estudiante que había escogido el número 7.

La tabla con los resultados, quedó de la siguiente manera:

META										
					X					
			X		X		X			
			X		X	X	X			
			X	X	X	X	X			
			X	X	X	X	X	X		
			X	X	X	X	X	X		
X	X		X	X	X	X	X	X	X	
X	X		X	X	X	X	X	X	X	
X	X		X	X	X	X	X	X	X	
X	X		X	X	X	X	X	X	X	X
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

5. ¿Cuántos lanzamientos fueron necesarios para que hubiera un ganador?

Los estudiantes del primer grupo necesitaron de 40 lanzamientos y los del segundo grupo necesitaron de 62 lanzamientos para que en cada grupo hubiera un ganador.

6. ¿El compañero que ganó qué número había escogido? ________________

En el primer grupo ganó el número 6, y en el segundo grupo ganó el número 7, cada uno con 10 repeticiones.

Estos dos ejercicios, los resolvieron el total de los estudiantes sin mayor dificultad.

7. Escriba el orden en que quedaron los participantes, hágalo de mayor a menor de acuerdo al número de veces que se obtuvo el resultado escogido.

En este ejercicio, los estudiantes escribieron las sumas, con sus respectivas frecuencias de mayor a menor. La idea con este ejercicio era que los estudiantes se dieran cuenta que las sumas centrales (5, 6, 7, 8y 9), salían con mayor frecuencia que las otras.

8. ¿Puede dar alguna razón que justifique el porqué del orden que se obtuvo al jugar?

Esta pregunta arrojó respuestas como:

E7. *Por la suma de los números.*

E1. *No tengo ninguna razón.*

E15. *No tengo razón porque fue suerte.*

E16. *Porque los números 6 y 7 salen más.*

E10. *Porque el 7 tiene mas sumas que dan su resultado.*

E5. *Cuando se juega con dos dados, el 7 tiene más posibilidades de salir.*

E2. *Mucha suerte y el 7 tiene más posibilidades de ganar, porque tiene tres sumas en que puede salir.*

E17. *Porque el 7 sale con casi todos los números del dado, sumando los dos números que caigan.*

En estas respuestas se puede ver que los estudiantes sin haber sacado el número de formas posibles que tenían cada suma de salir, ya están dándose cuenta que el número 7 tiene más oportunidad de formarse como suma de los dos resultados obtenidos, (para el caso de, E2, E5, E10 y E17).

E2, asume que el 7 tiene tres formas posibles de obtenerse, no tiene en cuenta la conmutatividad, como la mayoría de los demás estudiantes.

Hay estudiantes que aun siguen argumentando que los resultados obtenidos es cuestión de suerte, no han hecho un análisis profundo de los resultados obtenidos en el lanzamiento de los dados durante el desarrollo de las actividades.

9. Consigne la información de cada suma y el número de veces que se repitió, durante las veces que hubo que realizar el juego hasta obtener un ganador, en la siguiente tabla.

Los resultados fueron los siguientes:

Grupo No. 1.

Sumas obtenidas	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
No. de casos favorables	0	3	3	1	10	7	4	5	2	4	1

Grupo No. 2.

Sumas obtenidas	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
No. de casos favorables	4	4	0	9	7	10	8	9	6	3	1

Estas tablas las llenaron todos los estudiantes sin inconveniente, el objetivo era nuevamente que los estudiantes reafirmaran (los que ya se habían dado cuenta), y los que no, que notaran que los valores centrales, salen con mayor frecuencia como sumas.

La siguiente parte de la actividad (ejercicio 10), consistía en juntar los resultados de los dos grupos en una sola tabla y completar un solo juego donde el resultado ganador, fuera el número que completara 20 apariciones, teniendo en cuenta los resultados anteriores.

Al juntar las dos tablas, no aparecía ganador aun, y en total sumaban 101 lanzamientos.

META										
				X	X					
				X	X					
				X	X					
				X	X		X			
				X	X		X			
				X	X	X	X			
				X	X	X	X			
			X	X	X	X	X			
			X	X	X	X	X			
			X	X	X	X	X	X	X	
	X		X	X	X	X	X	X	X	
	X		X	X	X	X	X	X	X	
	X		X	X	X	X	X	X	X	
X	X		X	X	X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Para que hubiera un ganador, fue necesario completar 115 lanzamientos y, el número ganador en este juego fue el 7.

La tabla resultante al completar los 115 lanzamientos, fue la siguiente:

META										
					X					
					X					
				X	X					
				X	X					
				X	X	X	X			
				X	X	X	X			
				X	X	X	X			
				X	X	X	X			
			X	X	X	X	X			
			X	X	X	X	X			
			X	X	X	X	X			
			X	X	X	X	X			
			X	X	X	X	X	X	X	
	X		X	X	X	X	X	X	X	
	X		X	X	X	X	X	X	X	
	X		X	X	X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

11. Al juntar los dos juegos, ¿cuál es el orden en que quedarían si estos datos respondieran a un solo juego donde el ganador sería la suma que primero se repitiera 20 veces?

Los estudiantes ordenaron los resultados y sus frecuencias sin mayores contratiempos, en la mayoría de los talleres escribieron: 7, 20 repeticiones; 6, 18 repeticiones; 9, 16 repeticiones; 8, 16 repeticiones; 5, 12 repeticiones; 11, 8 repeticiones; 10, 8 repeticiones; 3, 7 repeticiones; 2, 4 repeticiones; 4, 4 repeticiones y 12, 2 repeticiones.

12. ¿Qué explicación daría para el orden obtenido en la pregunta anterior?

Algunas respuestas a esta pregunta fueron:

E8. Nada, que todo es suerte.

E12. Que el 7 ganó y casi gana el 6. El 12 y el 2 son los que menos salen.

E16. Que el 7 y el 6 tienen 3 posibilidades de salir.

E2. Que el 7 tiene más sumas que los otros, al igual que el 6 y el 8.

E17. *Por que el 7 tiene más ventaja frente a los demás números, de la suma de los números que caigan en los dos dados.*

E11. *Pues los números que no son primeros y últimos, casi siempre caen.*

E9. *No se, siempre será diferente.*

En estas respuestas se sigue viendo la inclinación de algunos de los estudiantes hacia la idea de que el número 7 tiene más formas de obtenerse como suma. Además de los estudiantes que afirmaron esto en la pregunta anterior, otros estudiantes aunque no de la misma manera, están dejando ver la misma idea: por ejemplo el estudiante E11 asegura que los números que no son primeros ni últimos, casi siempre caen. Se mantienen algunos estudiante que culpan a la suerte del orden en que quedan los resultados.

Los estudiantes sin tener claro el número de formas posibles de obtener cada resultado, pues no tienen en cuenta la conmutatividad, están asociando el espacio muestral con los resultados particulares y de alguna forma están advirtiendo patrones de resultados en esta actividad.

13. Consigne la suma y el número de veces que se obtuvo cada una de ellas en la siguiente tabla, después de juntar los resultados de los dos grupos.

La tabla con los resultados de los 115 lanzamientos quedo de la siguiente manera:

Sumas obtenidas	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
No. de casos favorables	4	7	4	12	18	20	16	16	8	8	2

A esta tabla se le llamó la tabla No. 1.

14. Si tuviera que volver a jugar, escriba las primeras cuatro opciones (números) que escogería: ________________________. Explique el porqué de su escogencia.

15. Si tuviera que volver a jugar escriba cuatro números que serían los últimos que escogería: ________________________. Explique el porqué de su respuesta.

Algunos estudiantes para jugar escogían números centrales, cerca del 7 y el mismo 7, ellos argumentaban que eran los que mas salían. Para no competir, escogían números cerca del 2 y números cerca del 12, argumentando que estos casi nunca salían y que esto lo deducían en algunos casos de la actividad anterior.

También hubo respuestas como las siguientes:

E11. *Para jugar escojo los números 9, 5, 7 y 6. Son números que casi siempre caen, porque no son los primeros ni los últimos. Para no jugar, escojo los números 2, 12, 4 y 3. Porque son de los primeros y los últimos y casi nunca caen.*

E17. *Para jugar escojo los números 5, 7 y 6. Porque es en los que mas caen, y sumando los números de los dos dados, hay mas opciones para el 7 y de segundos van el 5 y el 6. Para no jugar escojo los números 12, 11 y 2. Porque son los que menos caen en los dados.*

E2. *Para jugar escojo los números 6, 7, 8 y 9. Porque son los que más cayeron y tienen mas sumas. Para no jugar, escojo los números 2, 3, 4 y 12. Porque son los que menos sumas tienen.*

E12. *Para jugar escojo los números 6, 7, 8 y 9. Porque tienen tres formas de que la suma dada de esos números. Para no jugar, escojo los números 12, 4, 3 y 5. Porque fueron los que menos sumas tuvieron.*

En estas respuestas, los estudiantes claramente han advertido la ventaja que tienen los números centrales sobre los números de los lados, de salir como suma, al escoger los números centrales para jugar y los números de los lados para no jugar.

Esta parte de la actividad, permite inferir que los estudiantes a medida que se fue desarrollando la actividad, fueron cambiando sus presaberes, es decir al principio no creían que estos resultados se pudieran prever de alguna forma y adjudicaban en algunos casos igual probabilidad a todas las sumas, pero ahora asumen por lo menos que hay unos números que saldrán más que los otros como suma, a partir de los resultados obtenidos. De esta forma se va cambiando en el estudiante, mediante el desarrollo del taller, el sesgo de equiprobabilidad que tenía al iniciar esta actividad.

16. ¿Los resultados obtenidos eran "previsibles"? Es decir, existe alguna razón para pensar antes de jugar, que obtener como suma el número nueve es más probable que obtener el número 12?

A esta pregunta, surgieron respuestas como:

E1. *Si porque es más probable obtener como suma el número nueve que el 12 porque el 12 es un número más alto y es muy difícil.*

E2. *Claro porque el 9 tiene dos sumas y el 12 sólo una.*

E15. *Yo creo que si, porque tomamos como ejemplo el ejercicio anterior, el 9 salió 16 veces y el 12 solo salió 2.*

E3. *No porque es suerte.*

E9. *No porque es impredecible saber que número va a ganar.*

E11. *Si porque es mejor escoger números que están en el centro que los primeros o últimos.*

E12. *Pues hay que buscar una forma de que el número que escoja de mas posibilidades.*

Los estudiantes mantienen la tendencia de hablar sobre el número de formas de obtener cada suma pero no tienen en cuenta la conmutatividad, es decir ellos afirman que hay tres formas de obtener el siete como suma, tomando 6 y 1, 5 y 2 y 4 y 3 como las únicas formas posibles de obtenerlo; y no caen en cuenta que 6 y1 son dos formas, 5 y2 son otras dos formas y 4 y3 son otras dos formas, todas ellas diferentes con lo que se completarían 6 formas de obtener el 7 como suma. Además los estudiantes se fijan mucho en el ejemplo anterior, predicciones basadas en experiencias pasadas.

Teniendo en cuenta las posibilidades de cada dado, es posible saber cuáles son las posibilidades de obtener cada suma?

17. ¿Teniendo en cuenta las posibilidades de cada dado, es posible saber cuales son las posibilidades de obtener cada suma?

Al preguntarles por las posibilidades de obtener cada suma, la mayoría respondió sin tener en cuenta la conmutatividad, es decir el 2 y el 3 los tomaban como una sola oportunidad de sumar 5.

18. llene la siguiente tabla.

Al pedir que llenaran la tabla de posibilidades, este fue el resultado más común.

Suma	No. de posibilidades de obtenerla
2	1
3	1
4	2
5	2
6	3
7	3
8	3
9	2
10	2
11	1
12	1

A esta tabla se le llamó Tabla No. 2.

Dos estudiantes, E3 y E14 si tuvieron en cuenta la conmutatividad, el estudiante E14 no del todo, pues no consideró todos los casos para obtener el 7 y el 5 por ejemplo. E3 si consideró todas las formas posibles en cada resultado, fue este estudiante quien realizó mejor este ejercicio. Pero en el ejercicio 17, había contestado que no era posible saber cuál era la posibilidad de obtener cada suma, puesto que todo era cuestión de suerte. Por todo el desarrollo de los talleres fue muy común casos como el anterior, que un estudiante respondiera una pregunta acertadamente, pero al variarle la pregunta o hacerle otra pregunta muy relacionada con la primera y donde se esperaba que los estudiantes siguieran con la misma línea de pensamiento, no ocurría, esto de alguna forma dificulta el identificar a algunos estudiantes para llevarles el análisis a través de toda la actividad.

19. Escriba que relación existe entre la tabla No. 1 y la tabla No. 2.

Esta pregunta arrojó respuestas como:

E9. *Entre más posibilidades, hay más repeticiones.*

E11. *Hablan sobre el mismo tema, las posibilidades.*

E3. *Ninguna relación, es cuestión de suerte.*

E4. *Que los resultados de menos posibilidades, se hacen más pequeños en comparación con el ganador.*

E15. *Que hablan del mismo tema.*

E2. *Que entre más posibilidades de obtener una suma, más números de repeticiones hay.*

E7. *Que a la izquierda y derecha del número 7, los números disminuyen.*

E10. *Que en ambas gana el 7.*

E5. *Que según la tabla No.2, hay números que salen o que pueden salir más veces y la tabla no. 1 está de acuerdo con eso.*

Algunas comparaciones de los estudiantes, relacionan las dos tablas en el sentido en que a mayor posibilidad de obtener una suma, ésta se repetirá con más frecuencia al realizar muchos lanzamientos. Esto pone de manifiesto que algunos estudiantes están relacionando el espacio muestral con los resultados individuales. Pero esta relación del espacio muestral con los resultados individuales, no fue del todo completa en el sentido de que la mayoría de los estudiantes (18 de 19), no tuvieron en cuenta la conmutatividad para en la forma de obtener cada suma, es decir los estudiantes no definieron correctamente el espacio muestral asociado al experimento de lanzar dos dados convencionales y sumar sus resultados. E3, que si tuvo en cuenta la conmutatividad al sacar las posibilidades para cada suma, extrañamente no encuentra relación entre las dos tablas y opina que todo es cuestión de suerte. Este estudiante tuvo en cuenta la conmutatividad al para generar todas las sumas que lo ameritan, pero al igual que sus compañeros no relacionó correctamente el espacio muestral con los resultados individuales. Por esta razón se concluye que los estudiantes no tienen clara la estructura de eventos para este experimento.

20. si se lanzaran los dados 360 veces, llene la siguiente tabla con el número aproximado de veces que crea usted que aparecería cada suma.

Sumas obtenidas											
No. de casos favorables											

Todos los estudiantes escribieron números sin tener en cuenta la proporcionalidad con el número de posibilidades de obtener cada suma, en la algunos casos, ni siquiera el total de repeticiones sumaba 360 en algunos casos. Sólo las frecuencias de 13 estudiantes sumaban 360 en el total de las repeticiones. Por lo menos la idea de que los valores centrales aparecen con más frecuencia, se mantuvo en algunos de los estudiantes, pues a pesar de no tener en cuenta la proporcionalidad de las posibilidades de obtener cada suma con el número total de lanzamientos, ellos le adjudicaron mayores frecuencias a los valores centrales (5, 6, 7, 8, y 9). Es decir, según el taller se seguía removiendo de los estudiantes la idea de equiprobabilidad en este experimento.

21. Si se realiza el mismo juego pero con dados de 8 caras, marcadas con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Llene la siguiente tabla con las posibilidades de cada suma.

Sumas obtenidas															
No. de casos favorables															

Todos los estudiantes escribieron el espacio muestral (esa decir las posibles sumas, números del 2 hasta el 16), pero sólo un estudiante (E3) escribió correctamente las diferentes posibilidades con las que se podía obtener cada suma (el mismo estudiante que lo había hecho bien en el caso de los dados de seis caras), los demás estudiantes no tuvieron en cuenta la conmutatividad al realizar las sumas. Pero si la mayoría, advertía la simetría en el número de posibilidades para obtener cada suma, es decir posibilidades para obtener como suma un 2 y un 16, una (1y1, 8y8) respectivamente; para obtener 3 y 15, una (2 y 1, 7 y 8) respectivamente; para obtener 4 y 14, dos (3 y1, 2 y2: 6 y 8, 7 y7) respectivamente etc. No cayeron en cuenta que 3 y 1, 1 y 3: 6 y8, 8 y 6, eran dos formas diferentes de obtener 4 y 14 como sumas respectivamente.

22. Si se lanzaran los dados de 8 caras 640 veces, llena la siguiente tabla con el número aproximado de veces que aparecerá cada suma.

Sumas obtenidas															
No. de casos favorables															

A 7 de los 19 estudiantes les sumó 640 lanzamientos en total, y todos escribieron números en desorden, sólo unos pocos estudiantes adjudicaron el mayor número de repeticiones a los números centrales, en este caso el 9, 8 y7. No se mantuvo la línea de pensamiento que se había generado en los ejercicios anteriores.

La parte final de esta actividad, consistía en la asistencia del profesor en cuanto al número de posibilidades que se tienen de obtener cada suma, cuando se lanzan dos dados convencionales y se suman sus resultados. Se mostró una tabla donde se presentaba cada suma posible y el número de formas de obtenerla, también se expuso este resultado en un diagrama de barras; hubo necesidad de hacer lanzamientos con dos dados diferentes en cuanto a tamaño, color, etc... Se mostró a los estudiantes que era diferente obtener un dos en el dado pequeño y un tres en el dado grande; que, un dos en el dado grande y un tres en el dado pequeño, y que ambos lanzamientos, eran dos formas diferentes de obtener un cinco como suma, puesto que en cada caso se trataba de un resultado diferente.

Como este ejemplo hubo necesidad de hacer muchos otros a fin de que los estudiantes comprendieran la conmutatividad en la forma de obtener cada suma. Con esta exposición, la mayoría de los estudiantes comprendieron la conmutatividad. El estudiante E2 en particular, no aceptaba que ejemplos como los anteriores fueran formas diferentes de obtener el mismo resultado, y argumentaba que era una sola forma de obtenerlo, puesto que en ambos casos la suma era la misma. Este estudiante aceptaba que había sumas con mayor posibilidad de obtenerse pero de ninguna manera aceptaba la conmutatividad.

También se expuso por parte del profesor, un acetato del diagrama de barras referido a los 115 lanzamientos hechos y el número de repeticiones que obtuvo cada suma en el numeral 10 de este taller, y que ganaba el número primero obtuviera 20 repeticiones, y que en este caso, ganó el número 7 con 20 repeticiones, seguido del número 6 con 18 repeticiones y el 8 y 9 con 16 repeticiones cada uno. Al preguntar en esta presentación a los estudiantes del porqué de estos resultados, en su mayoría afirmaban que esto se debía a que estos números eran los que más posibilidades tenían de salir puesto que eran los que tenían más formas de obtenerse como suma.

Para la siguiente clase se les pidió a los estudiantes que realizara una tabla con las sumas obtenidas al lanzar dos dados de ocho caras marcadas del 1 al 8, y sumar sus resultados, junto con las formas posibles de obtener cada suma y que registraran estos datos en un diagrama de barras. La mayoría de los estudiantes realizaron bien el trabajo, teniendo en cuenta la conmutatividad en las formas posibles de obtener cada suma.

En términos generales se pueden sacar las siguientes conclusiones:

A medida que se desarrolló este taller, algunos estudiantes fueron comprendiendo que los resultados obtenidos al lanzar dos dados convencionales y sumar sus resultados, de alguna manera se pueden prever en la medida en que hay algunas sumas que tienen mas formas posibles de obtenerse que otras.

Algunos estudiantes asocian los resultados individuales -en el lanzamiento de dos dados convencionales y sumar sus resultados- con el espacio muestral asociado a esta actividad. Pero no tienen claro la estructura de los eventos, ya que definieron mal el espacio muestral asociado al experimento. Debido a que a pesar de que la mayoría de los estudiantes asociaron la probabilidad de obtener una suma con las posibilidades de obtener cada una de ellas, no tuvieron en cuenta (excepto uno) la conmutatividad de las formas de obtener las sumas.

Es importante la asistencia (por parte del profesor) a los estudiantes para ayudar a comprender mejor los conceptos presentados en los talleres, puesto que en la mayoría de las preguntas el profesor se mantenía al margen de las mismas, ya que la intención era examinar los conceptos intuitivos que los estudiantes pueden tener a esta edad sobre los conceptos que se estaban estudiando y, la asistencia exagerada del profesor, puede convertir el desarrollo de los talleres en una actividad muy dirigida y se pierde la esencia de la misma.

Capítulo 4

CONCLUSIONES GENERALES Y RECOMENDACIONES

A continuación se presentan conclusiones generales sobre el desempeño de los estudiantes en la realización de los cuatro talleres a través de las cinco componentes propuestas como categorías de análisis en el capítulo de metodología.

4.1. DISTINCIÓN ENTRE CERTEZA E INCERTIDUMBRE

Al principio de la actividad de lanzamiento de un solo dado, los estudiantes creían que podían determinar el número a obtener, algunos afirmaban que saldría siempre el número dos o el número tres puesto que uno de estos números era su número de suerte.

Los estudiantes, a medida que se fueron llevando a cabo los talleres, pudieron establecer más que la certeza, la incertidumbre de estos sucesos aleatorios; como son los resultados obtenidos en el lanzamiento de los dados. En la actividad del lanzamiento de los dados, coincidían en afirmar que, a pesar de saber cuales números eran los que podían salir –espacio muestral–, no tenían certeza de qué número en particular se obtendría en un lanzamiento aislado y aceptaban la variabilidad de los mismos. Es decir, clasificaban esta actividad como de resultados inciertos. En este sentido, la actividad sirvió para cambiar algunas concepciones erróneas de los estudiantes.

4.2. NATURALEZA DE LAS PRUEBAS EXPERIMENTALES

Al principio de la actividad era general la sensación de que cada estudiante podía influir el resultado a obtener en el lanzamiento de un dado, creían los estudiantes que al lanzar un dado el número que salía dependía entre otras cosas de la cantidad de fuerza que se le aplicara en el lanzamiento, de la forma como se lanzara, del número de vueltas o giros que daba el dado antes de parar.

A medida que se realizaban las actividades, los estudiantes discutían sobre la influencia o no, de ellos en los resultados, cada vez era mayor la cantidad de estudiantes que se pasaba al grupo de los que creían no poder influir en el resultado. Cuando se lanzaron dos dados, no objetaban el hecho de lanzar un dado grande y uno chico para sumar sus resultados, uno verde y uno blanco, incluso tomaron como un solo resultado la suma de los números que aparecieron cuando un estudiante lanzó un dado y otro estudiante lanzó el otro al tiempo. Es decir, dos estudiantes lanzaron cada uno un dado al tiempo, y la suma de los resultados obtenidos la registraron y tuvieron en cuenta para el desarrollo de la actividad. En este sentido, los estudiantes en su mayoría, entendieron la naturaleza de las pruebas experimentales asociadas al lanzamiento de los dados, a medida que se iban desarrollando las actividades. De igual forma algunos estudiantes, hacia el final de la actividad, lanzaban el dado duro contra el piso o contra la pared, encima de un cuaderno; ellos afirmaban que esto de ninguna manera podía determinar el número obtenido, de esta forma fueron aclarando la idea de la naturaleza de las pruebas experimentales asociada al lanzamiento de los dados y otros estudiantes afirmaban que todo era cuestión de suerte.

4.3. RELACIONES ENTRE RESULTADOS INDIVIDUALES Y PATRONES DE RESULTADOS

Cuando se daba inicio a la actividad de lanzamiento de los dados en cada uno de los talleres, a pesar de que los estudiantes en su mayoría definieron es espacio muestral asociado a cada actividad, les era indiferente el número que escogían para participar en el juego donde ganaba el estudiante que había escogido el número que resultara como suma (taller cuatro), o como resultado del lanzamiento de un solo dado (talleres 2 y 3) ellos escogían cualquier número para participar argumentando que era su número de suerte en algunos casos, que era el número de hermanos o hermanas que tenían. Después de pedirles que escribieran las formas que tenía cada suma de salir, aún sin tener en cuenta la conmutatividad, y a medida que se iban jugando, los estudiantes se dieron cuenta que los números centrales – 7, 8, 6, 5 y 9– tenían más posibilidades de salir y (taller cuatro) se inclinaban por tomar estos números para participar en el juego. Esto lo hacían porque se tenían los dados y se estaban realizando lanzamientos y generando resultados y se estaban llevando registros de estos lanzamientos.

La tendencia de adjudicar más repeticiones a los números centrales (debido a los resultados que se iban obteniendo), se mantuvo cuando se les pedía que registraran las cantidades de repeticiones que obtendría cada suma al lanzar los dados durante 360 veces, pero los estudiantes no hicieron cuentas para mantener la proporcionalidad que es una de las cosas que se esperaban.

Cuando se les pidió que registraran las veces que ellos creían que aparecería cada suma al lanzar dos dados de ocho caras durante 640 veces la mayoría de los estudiantes no tuvieron en cuenta la proporcionalidad, en la mayoría de los casos tampoco adjudicaron mayores repeticiones a los números centrales, es de notar que en este momento tampoco tenían las cantidades exactas de las formas posibles de obtener cada suma, puesto que no habían tenido en cuenta la conmutatividad, y como era una situación hipotética, se les dificultó relacionar la actividad del lanzamiento de dos dados convencionales y sumar sus resultados (en esta actividad estaban los dados físicos y ellos los manipulaban) con la de lanzar dos dados de ocho caras y sumar sus resultados (situación hipotética).

En esta parte creo que no se trabajó lo suficiente con los estudiantes, pues es necesario muchas más prácticas concretas, antes de pedirle a los estudiantes que extrapolen un concepto de la forma como se pretendió. Tal vez si se hubieran tenido los dados de ocho caras físicamente y que los estudiantes hubieran hecho lanzamientos, los resultados de las preguntas referidas a tales dados, hubieran sido con toda seguridad más alentadoras.

En este sentido y refiriéndome al caso concreto del lanzamiento de los dados convencionales y sumar sus resultados, los estudiantes tuvieron presente (esto a medida que iban generando resultados en las tablas, mediante la experimentación que se estaba haciendo), las relaciones presentes entre resultados individuales y patrones globales de resultados.

4.4. ESTRUCTURA DE LOS EVENTOS

Determinar el espacio muestral al realizar cada una de las actividades, no causó dificultad en los estudiantes. Al lanzar un solo dado, los estudiantes rápidamente determinaron los posibles resultados, desde el número 1 hasta el número 6. Cuando se lanzaban dos dados y se sumaban los resultados les tomó un poco más de tiempo pero concluyeron acertadamente en que los posibles resultados eran desde el número 2 hasta el número 12, y en la mayoría de los casos le adjudicaron inicialmente la misma probabilidad a cada suma o resultado, situación que varió muchísimo a medida que se fue jugando y generando resultados.

Una cosa es determinar el espacio muestral asociado a un experimento, y otra diferente es determinar el número de formas posibles con que cada elemento de ese espacio muestral puede generarse, esto es lo que se le dificulta al estudiante, porque el estudiante no tiene en cuenta la conmutatividad en algunas formas de generar la mayoría de las sumas posibles del espacio muestral. Pero con la práctica el estudiante se da cuenta que esa “equiprobabilidad” que creía presente en un comienzo, se va derrumbando debido a que hay sumas que se generan más fácilmente que las otras. Teniendo en cuenta la conmutatividad o no, igualmente los valores centrales tienen más posibilidades de salir y esto lo advierten los estudiantes y con la práctica se pone de manifiesto, y optan por apostar a estos valores centrales en el juego.

Descubrir la conmutatividad en este experimento ayuda a entender mejor el espacio muestral asociado, pero este concepto de conmutatividad es un poco difícil de asimilar, y los estudiantes excepto uno, llegaron a el en la parte final de la experimentación y sólo cuando el profesor con ayuda de la asistencia notacional (diagrama de barras de las sumas posibles y formas de obtener cada una) lo explicó en clase a todo el grupo, la mayoría de los estudiantes aclararon esta idea.

4.5. TRATAMIENTO DE RESIDUOS

Los residuos, o sea la diferencia entre el valor esperado y el valor realmente dado, ocasionaron serios inconvenientes a los estudiantes que no terminaron de asimilarlos a pesar de todas las experimentaciones realizadas. Decimos que no los asimilaron porque, no obstante que los achacaban a la naturaleza propia del azar, les impidieron visualizar que de todas formas existían a medida que se aumentaban las repeticiones se ganaba una estabilidad en los valores obtenidos que se acercaban bastante a los valores predichos.

Una de las indicaciones que se generan de este trabajo es la necesidad de hacer muchas más experiencias aleatorias aspecto que se puede reforzar con el uso del computador, no solamente por la velocidad de realizar montones de repeticiones sino que esta misma ventaja de reducir los tiempos para generar datos, puede facilitar la búsqueda de regularidades por parte de los estudiantes.

También hay que reconocer que no se abordaron las frecuencias relativas de los resultados obtenidos, aspecto que hubiera podido mejorar la percepción de la ley de los grandes números en el sentido de la estabilidad de estas frecuencias en la medida en que se aumenta el número de repeticiones. Incluso, al percibir la estabilidad de las frecuencias relativas, el estudiante podría haber percibido que estos valores se asemejaban cada vez más al valor dado por la probabilidad clásica.

Por todo lo observado a través de los cuatro talleres, pienso que esta forma de presentar conceptos referidos al azar, incertidumbre y probabilidad es bueno en cuanto que es el mismo estudiante el que va generando o despertando sus intuiciones, y con la práctica estas intuiciones se van desarrollando y afloran los conceptos en los estudiantes, conceptos que serán bien aprehendidos y significativos, ya que los estudiantes están resolviendo problemas bajo un ambiente de juego y actividades lúdicas, y esta razón es la que despierta el interés del estudiante y lo lleva a tomar las actividades con muy buena disposición. En este sentido se evidencia que actividades como estas deben ser fomentadas en escuelas y colegios.

Una de las inquietudes que este trabajo plantea se relaciona con la asistencia que el profesor debe ofrecer a los estudiantes en cada una de las actividades. En el desarrollo de este trabajo opté por la posición de dejar casi completamente libres a los estudiantes con el ánimo de conocer su forma natural, sus intuiciones primarias alrededor del azar, pequé de ingenuo, y no contrasté varias de sus respuestas en forma directa a través de un entrevista con el estudiante que argumentara de una forma que no resultara tan clara. Prácticamente sólo se hizo uso de las respuestas escritas. Este error de alguna forma dificulta el análisis sobre la forma como se fueron desarrollando las ideas intuitivas de los estudiantes acerca de la aleatoriedad, su modelación matemática y su relación con la realidad.

La idea es buscar el punto medio en cuanto a la asistencia con el estudiante, para que los resultados y análisis de estos trabajos surtan mejores efectos en nuestra práctica docente.

Al tratar de comparar los resultados de este trabajo con los expuestos por Horvath y Lehrer (1998), que sirvieron como referencia, se nota que los niños a esta edad (9 a 12 años), están como en el punto intermedio en cuanto a intuiciones probabilísticas, niños de menor edad difieren mucho en cuanto al desempeño con aparatos de aleatoriedad, y ese desempeño esta en un nivel más bajo del observado en niños entre 9 y 12 años; a su ves el desempeño de los niños de edades entre los 9 y 12 años, está por debajo del desempeño de las personas adultas en cuanto a las intuiciones acerca del azar y la probabilidad.

Siguiendo con esta comparación se nota que hay respuestas que se obtuvieron por parte de los estudiantes, en ambos trabajos de forma idéntica, es decir los niños con que trabajaron Horvath y Lehrer dieron respuestas muy parecidas y en algunos casos idénticas a las de los estudiantes que trabajaron los cuatro talleres, estas respuestas en su mayoría, son las que tienen que ver con la naturaleza de las pruebas experimentales, por ejemplo es común en ambos trabajos que los niños crean en números de suerte, que tengan preferencia por determinado resultado y que crean que los resultados se pueden determinar o influir por múltiples factores.

REFERENCIAS

DÍAZ, J.; BATANERO, C.; CAÑIZARES M. 1996. *Azar y Probabilidad*. Madrid: Síntesis.

FISCHBEIN, E. 1975. *The intuitive sources of probability thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel.

———. 1987. *Intuition in Science and Mathematics: an Educational Approach*. Dordrecht: D. Reidel.

HEITELE, D. 1975. "An epistemological view on fundamental stochastic ideas." *Educational Studies in Mathematics* 6:187–205.

HORVATH, J. K. & LEHRER, R. 1998. *A Model-Based perspective on the development of children's understanding of chance and uncertainty. En Lajoie, S. (ed.) Reflections on Statistics: Learning, Teaching, and Assessment in Grades K-12*. London: Lawrence Erlbaum. 121–148.

JURADO, Nury. 1996. *Ensayo Metodológico para la construcción del concepto de probabilidad.* Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

KUZMAK, S. D., & GELMAN R. 1986. "Young children's understanding of random phenomena." *Child Development* 57:559–566.

LECOUTRE, M. P. 1985. "Jugements Probabilistes Chez les adultes: Pratique des jeux de hasard et formation en théorie des probabilités." 38:891–899.

MORENO, Daniel. 2000. *Desarrollo Conceptual de la Estadística en Séptimo Grado Utilizando los Medios de Comunicación Escritos.* Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga.

MORRIS, CH. 1994. *Psicología. Un Nuevo Enfoque*. Séptima edición. México: Prentice Hall.

PIAGET, J. & INHELDER, B. 1975. *The origin of the idea of chance in children. [Trabajo original en francés: La Genese de lídee de hasard chez lénfant. 1951]*. New York: Norton.

STIGLER, S. 1986. *The history of statistics: The measurement of uncertainty before 1900*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

TVERSKY, A. & KAHNEMAN, D. 1971. "Belief in the *law of small numbers*." 76:105–110.

———. 1973. "Availability: A Heuristic for Judging Frequency and Probability." No. 5:207–232.

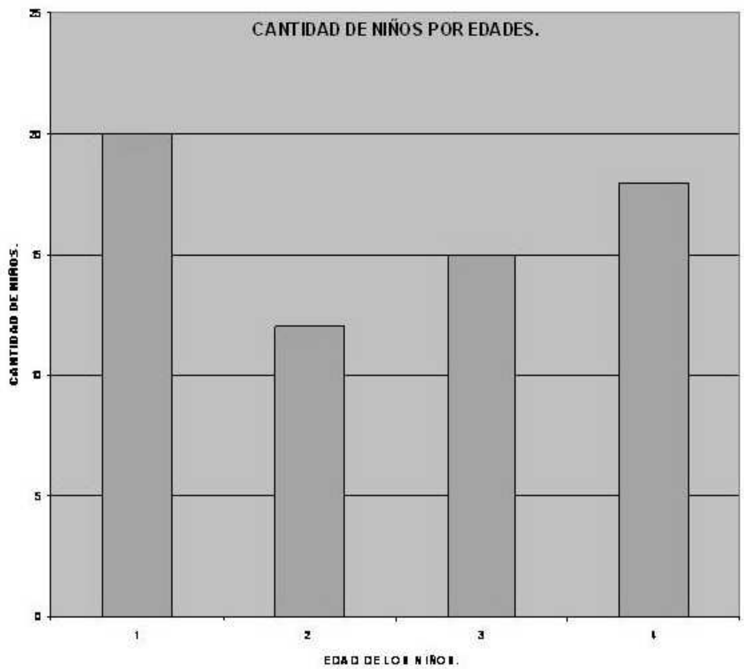
ANEXOS

Anexo 1. Taller 1. “Taller de gráficos”

A continuación encontrará unos ejemplos, de cómo representar datos en gráficos de barras. Cómo interpretar estos gráficos: cómo pasar de las tablas y de los registros de datos a los gráficos de barras y, del gráfico de barras a las tablas y los registros de datos.

Ejemplo 1. En una pequeña escuela-jardín de la ciudad, la clasificación de estudiantes por edades, que se matricularon está dispuesta en el siguiente gráfico, que realizó una profesora de la escuela.

ESTE GRÁFICO SE CONOCE COMO GRÁFICO DE BARRAS



Columna 1 = Cantidad de niños de 3 años. Columna 2 = Cantidad de niños de 4 años.
Columna 3 = Cantidad de niños de 5 años. Columna 4 = Cantidad de niños de 6 años.

1.1 ¿Cuántos niños de 3 años se matricularon en la escuela?

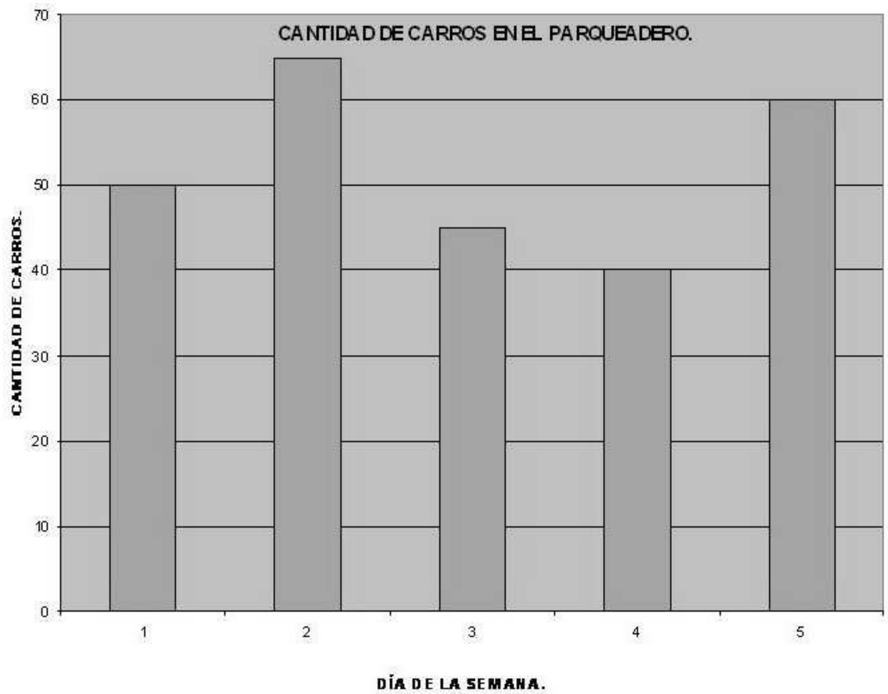
1.2 ¿Cuántos niños de 4 años se matricularon en la escuela?

1.3 ¿Cuántos niños de 5 años se matricularon en la escuela?

1.4 ¿Cuántos niños de 6 años se matricularon en la escuela?

1.5 ¿Cuál es el total de niños que se matricularon en los 4 grados?

Ejemplo 2. Para saber el número de carros que hubo de lunes a viernes de la semana pasada, en un parqueadero de la ciudad, se presenta el siguiente gráfico.



Columna 1 = día lunes. Columna 2 = día martes. Columna 3 = día miércoles.
Columna 4 = día jueves. Columna 5 = día viernes.

Con base en el gráfico anterior, responda las siguientes preguntas.

2.1 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día lunes?

2.2 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día martes?

2.3 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día miércoles?

2.4 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día jueves?

2.5 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día viernes?

2.6 Observando el gráfico, responda. ¿Cuál fue el día que guardaron más carros?

2.7 ¿Qué día se guardaron menos carros?

2.8 ¿Cuántos carros se guardaron durante la semana?

2.9 Complete la siguiente tabla.

Día	No. De Carros que se guardaron.

3. Con base en la siguiente información, que relaciona el modelo de los carros con la cantidad de ellos que hubo en el mismo parqueadero la semana antepasada realice un gráfico.

Modelo del carro	Número de carros que hubo durante toda la semana.
1998	15
1999	20
2000	10
2001	25
2002	20

Observando el gráfico que realizó o la tabla anterior responda.

3.1 ¿De qué modelo hubo mayor cantidad de carros?

3.2 ¿De qué modelo hubo menor cantidad de carros?

3.3 Ordene de mayor a menor, y por modelos el número de carros que hubo en el parqueadero.

Es

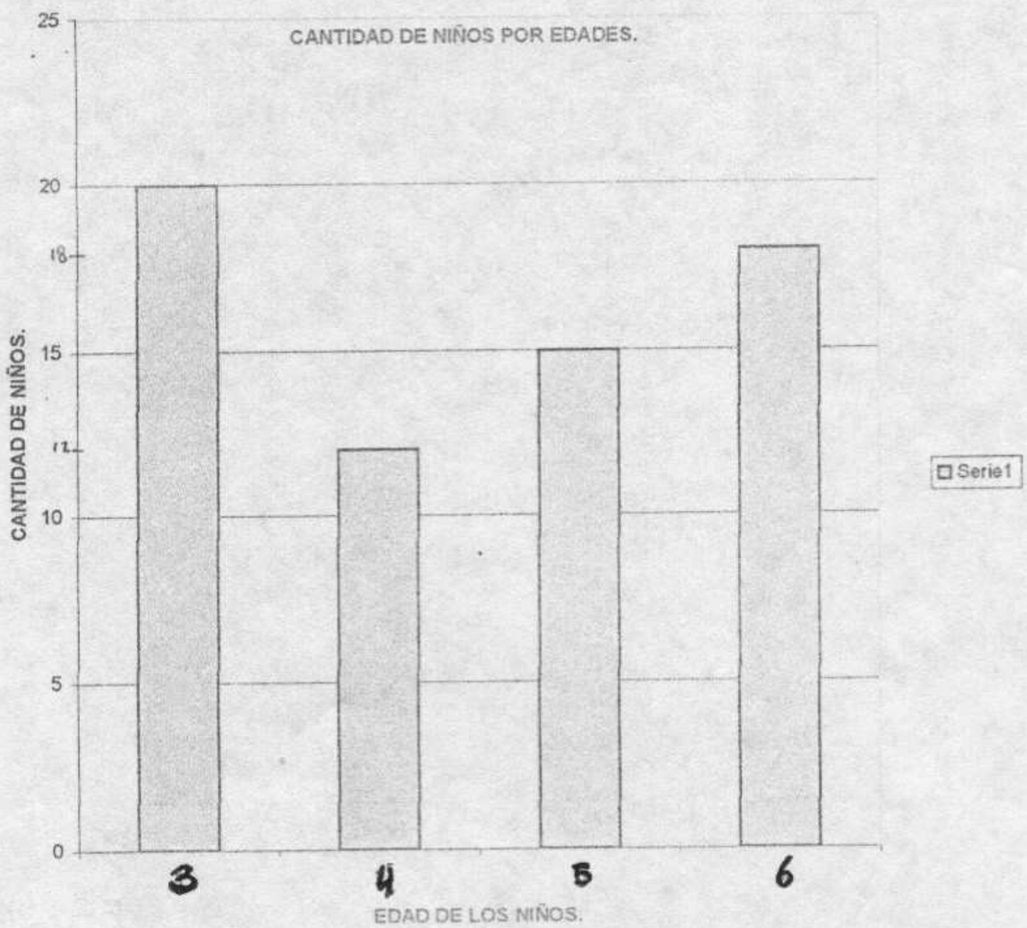
Es

TALLER DE GRÁFICOS.

A continuación encontrarás unos ejemplos, de cómo representar datos en gráficos. Cómo interpretar estos gráficos, cómo pasar de los datos a los gráficos y del gráfico a los datos.

1. En una pequeña escuela-jardín de la ciudad, la clasificación de estudiantes por edades, que se matricularon en los grados: Jardín A, Jardín B, Transición y Primero, está dispuesta en el siguiente gráfico, que realizó una profesora de la escuela.

ESTE GRÁFICO SE CONOCE COMO GRÁFICO DE BARRAS



1.1 ¿Cuántos niños de 3 años se matricularon en la escuela? 20 niños

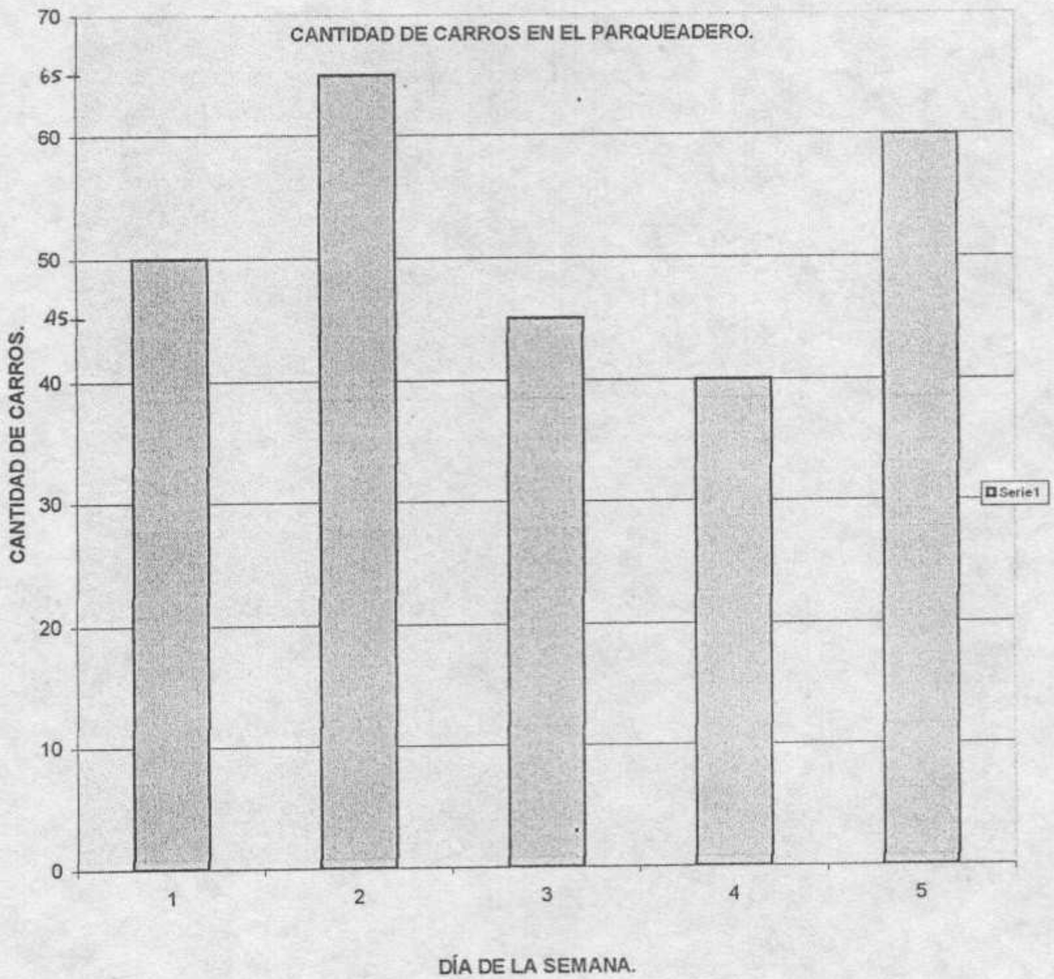
1.2 ¿Cuántos niños de 4 años se matricularon en la escuela? 12 niños

1.3 ¿Cuántos niños de 5 años se matricularon en la escuela? 15 niños

1.4 ¿Cuántos niños de 6 años se matricularon en la escuela? 18 niños

1.5 ¿Cuál es el total de niños que se matricularon en los 4 grados? 65 ninos

2. Para saber el número de carros que hubo de lunes a viernes de la semana pasada, en un parqueadero de la ciudad, se presenta el siguiente gráfico.



Columna 1 = día lunes. *Columna 2 = día martes.* Columna 3 = día miércoles. Columna 4 = día jueves. Columna 5 = día viernes.

Con base en el gráfico anterior, responda las siguientes preguntas.

2.1 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día lunes? 50 carros

2.2 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día martes? 65 carros

2.3 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día miércoles? 45 carros

2.4 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día jueves? 40 carros

2.5 ¿Cuántos carros se guardaron en el parqueadero el día viernes? 60 carros

2.6 Observando el gráfico, responda.¿Cuál fue el día que guardaron más carros? el martes

2.7 ¿Qué día se guardaron menos carros? el jueves

2.8 ¿Cuántos carros se guardaron durante la semana? 260 carros

2.9 Complete la siguiente tabla.

Día	No. De Carros que se guardaron.
1	50
2	65
3	45
4	40
5	60

3. *Con base en la siguiente información, que relaciona el modelo de los carros con* la cantidad de ellos que hubo la semana antepasada realice un gráfico.

Modelo del carro	Número de carros que hubo durante toda la semana.
1998	15
1999	20
2000	10
2001	25
2002	20

Responda las siguientes preguntas.

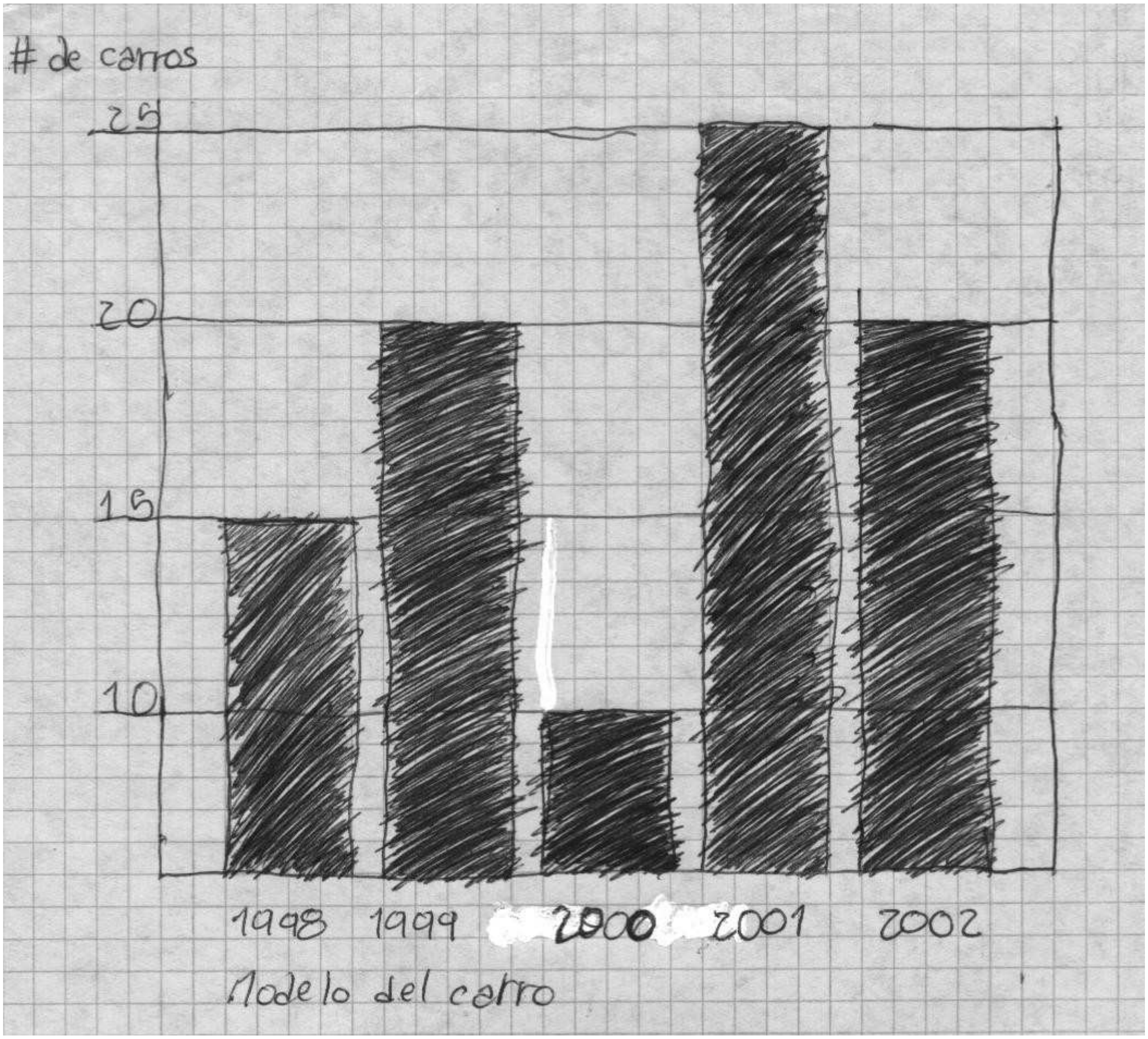
Observando el gráfico responda.

3.1¿De qué modelo hubo mayor cantidad de carros? modelo 2001

3.2 ¿De qué modelo hubo menor cantidad de carros? Modelo 2000

3.3 Ordene de mayor a menor, y por modelos el número de carros que hubo en el parqueadero.

25 modelo 2001
20 modelo 1999
20 modelo 2002
15 modelo 1998
10 modelo 2000


de carros
25
20
15
10
1998
1999
2000
2001
2002
Modelo del carro

Anexo 2. Taller 2. “Jugando con los dados I”
Parte I (Individual)

Nombre: ______________________________ fecha:__________

A continuación encontrará una serie de actividades en las que se le invita a que juegue con sus compañeros de clase. Al mismo tiempo se le pide que responda a unas preguntas que están relacionadas con los mismos juegos.

1. Vamos a suponer que un amigo lo invita a que realicen el siguiente juego asociado al lanzamiento de un dado: Antes de lanzar el dado cada uno de los jugadores piensa en un número y lo anota en una hoja de papel. Después uno cualquiera de los jugadores lanza el dado. Gana el juego quien haya escogido el número que se obtuvo.

   1.1 ¿Cuántas personas pueden participar en este juego, sabiendo que solo puede haber un ganador? Explique su respuesta.

   2.2 Si tuviera que jugar ¿qué número escogería y por qué?

   3.3 ¿Cree que el jugador que lance el dado tiene más posibilidades de ganar? Explique su respuesta.

2. Si jugaran solo 2 personas, ¿cuál sería una forma justa de distribuirse los números del dado para que ambos jugadores tengan las mismas posibilidades de ganar?

   2.1 ¿Existe alguna forma de repartirse los números que hagan que alguno de los jugadores tenga más ventaja en el juego? Explique su respuesta.

   2.2 Será que escoger los números más grandes aumenta el chance de ganar el juego? Explique su respuesta.

3. ¿Existe alguna forma de lanzar el dado para obtener un resultado específico?

4. Si se realiza el juego 60 veces entre 6 jugadores, ¿cuántos juegos aproximadamente ganará cada jugador? Explique su respuesta.

5. Cuando se juega muchas veces, ¿Cree que hay un resultado que sale más que los otros?

    5.1 ¿Cuál?

    5.2 ¿Por qué?

TALLER No. 1. PARTE I.
JUGANDO CON LOS DADOS.

NOMBRES: E_{12} FECHA:

A continuación vas encontrar una serie de actividades en las que se te invita a que juegues con tus compañeros de clase. Al mismo tiempo se te pide que respondas a unas preguntas que están relacionadas con los mismos juegos.

1. Vamos a suponer que un amigo te invita a que realicen el siguiente juego asociado al lanzamiento de un dado: Antes de lanzar el dado cada uno de los jugadores piensa en un número y lo anota en una hoja de papel. Después uno cualquiera de los jugadores lanza el dado. Gana el juego quien haya escogido el número que se obtuvo.
   - ¿Cuántas personas pueden participar en este juego, sabiendo que solo puede haber un ganador? Explica tu respuesta.

     6 por que el dado solo tiene seis caras
     y no pueden sacar mas
   - Si tuvieras que jugar ¿qué número escogerías y por qué?

     5 por que fue el primero que se me
     vino a la mente
   - ¿Crees que el jugador que lance el dado tiene más posibilidades de ganar? Explica tu respuesta.

     No porque es pura suerte o que haga trampa.

2. Si jugaran solo 2 personas, ¿cuál sería una forma justa de distribuirse los números del dado para que ambos jugadores tengan las mismas posibilidades de ganar?

   Escogen cada uno de tres numeros para que
   si no cae uno que escogio de pronto el otro.

2.1 ¿Existe alguna forma de repartirse los números que hagan que alguno de los jugadores tenga más ventaja en el juego? Explica tu respuesta.

Si que escoja 5 numeros y al otro solo pueda
escoger uno. No porque es mucha suerte es un juego de
suerte

2.2 Será que escoger los números más grandes aumenta el chance de ganar el juego? Explica tu respuesta.

No por que es un juego de suerte

3. ¿Existe alguna forma de lanzar el dado para obtener un resultado específico?

Si que cologue el numero que escogio y lo suelte con mucho cuidada para qce no gire pero es muy dificil qce gane

4. Si se realiza el juego 60 veces entre 6 jugadores, ¿cuántos juegos aproximadamente ganará cada jugador? Explica tu respuesta.

Segun podian ser 10 pero el resultado es variado

5. Cuando se juega muchas veces, ¿Crees que hay un resultado que sale más que los otros?

NO

5.1 ¿Cuál?

5.2 ¿Por qué?

Porqce es impredesible el resultado

Anexo 3. Taller 3. “Jugando con los dados I”
Parte II (Parejas)

Nombre: ____________________________ fecha:_________

6. Ahora, en grupos de dos estudiantes, cada estudiante escoge 3 números del dado. Realice 60 lanzamientos y registre los resultados. Gana el estudiante que finalizados los lanzamientos, sume más resultados a favor de los tres números que escogió.

   Estudiante A:____.

   Números que escogió:____________________________________.

   ¿Por qué escogió estos números?

   Estudiante B:____.

   Números que escogió:____________________________________.

   ¿Por qué escogió estos números?

REGISTRO DE LOS 60 LANZAMIENTOS.

Número de lanzamiento	RESULTADOS					
	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						
26						
27						
28						
29						
30						

Número de lanzamiento	RESULTADOS					
	1	2	3	4	5	6
31						
32						
33						
34						
35						
36						
37						
38						
39						
40						
41						
42						
43						
44						
45						
46						
47						
48						
49						
50						
51						
52						
53						
54						
55						
56						
57						
58						
59						
60						

7. Registre los resultados del ejercicio anterior en la siguiente tabla.

Resultado del Lanzamiento	Número de Veces que Salió

8. Realicen un gráfico de barras, con la información anterior. (En una hoja auxiliar).

9. Observando la tabla anterior, ¿qué puede decir, acerca de la cantidad de veces que se obtuvo cada resultado?

10. Observe la tabla de resultados de otra pareja de compañeros y compárela con la obtenida por ustedes. ¿Qué puede decir como resultado de esta comparación?

11. Ahora reúnan en una sola tabla los resultados obtenidos por todas las parejas y escriban sus conclusiones acerca de las posibilidades de ganar que tiene cada jugador de acuerdo al número escogido.

Resultado del Lanzamiento	Número de Veces que Salió

12. Por toda la experiencia realizada, ¿Usted cree que se puede predecir más o menos los resultados que se obtendrán al realizar el juego, digamos 1200 veces, sin tener necesidad de jugarlos?

13. Si ahora el juego consistiera en lanzar un dado que tiene 8 caras, numeradas del 1 al 8.¿Cuál sería la probabilidad de obtener cualquier resultado, si se lanzara este dado 1600 veces?

14. Si se lanzara el dado 1600 veces, ¿en cuántas repeticiones aproximadamente se obtendría el número 8?

-X \

TALLER No. 1. PARTE I.
JUGANDO CON LOS DADOS.(parejas).

NOMBRES: E_7 y E_8 FECHA: oct/29

6. Ahora en grupos de dos estudiantes, cada estudiante escoge 3 números del dado. Se hacen 60 lanzamientos y se registrarán estos resultados. Gana el estudiante que finalizados los lanzamientos, sume más resultados a favor de los tres números que escogió.

Estudiante A: E_7. Números que escogió: 6, 3, 1.

¿Por qué escogió estos números? porque me gustan.

Estudiante B: E_8. Números que escogió: 2, 4, 5.

¿Por qué escogió estos números ? por obligación

REGISTRO DE LOS 60 LANZAMIENTOS.

No. De lanzamiento	RESULTADO.					
	1	2	3	4	5	6
1	X					
2					X	
3						X
4					X	
5					X	
6	X					
7						X

No. Del lanzamiento	RESULTADO.					
	1	2	3 .	4	5	6
8				X		
9		X				
10		X				
11	X					
12	X					
13			X			
14			X			
15						X
16			X			
17		X				
18					X	
19			X			
20					X	
21			X			
22						X
23			X			
24				X		
25					X	
26						X
27			X			

No. Del lanzamiento.	RESULTADO					
	1	2	3	4	5	6
28					X	
29				X		
30					X	
31						X
32					X	
33				X		
34						X
35			X			
36						X
37			X			
38		X				
39	X					
40			X			
41		X				
42	X					
43					X	
44	X					
45				X		
46					X	
47		X				

No. Del lanzamiento.	R E S U L T A D O.					
	1	2	3	4	5	6
48						X
49					X	
50			X			
51		X				
52			X			
53	X					
54				X		
55				X		
56				X		
57			X			
58						X
59		X				
60	X					

7. Registra los resultados del ejercicio anterior, en la siguiente tabla.

Resultado del Lanzamiento	Número de Veces que Salió
1	9
2	8
3	13
4	8
5	12
6	10

8. Realicen un gráfico de barras, con la información anterior.

9. Observando la tabla anterior, ¿qué puedes decir, acerca de la cantidad de veces que se obtuvo cada resultado?
Los numeros impares son mayores que los impares en lansamiento

10. Observa la tabla de resultados de otra pareja de compañeros y compárala con la obtenida por ustedes. ¿Qué puedes decir como resultado de esta comparación?
Que los numeros (sumados son 60 y son diferente) unos mas altos que otros.

11. Ahora reúnan en una sola tabla los resultados obtenidos por todas las parejas y escriban sus conclusiones acerca de las posibilidades de ganar que tiene cada jugador de acuerdo al número escogido.

2
200
+98
103
103
96
600

Resultado del Lanzamiento	Número de Veces que Salió
1	98
2	103
3	103
4	94
5	106
6	96

que el 5 fue el q' +salio y
el 4 fue el q' -salio en Total de Todas las Tablas.

12. Por toda la experiencia realizada, ¿tú crees que se puede predecir más o menos los resultados que se obtendrán al realizar el juego, digamos 1200 veces, sin tener necesidad de jugarlos?

NO porque no se puede predecir el futuro y menos de algo q' sale al azar.

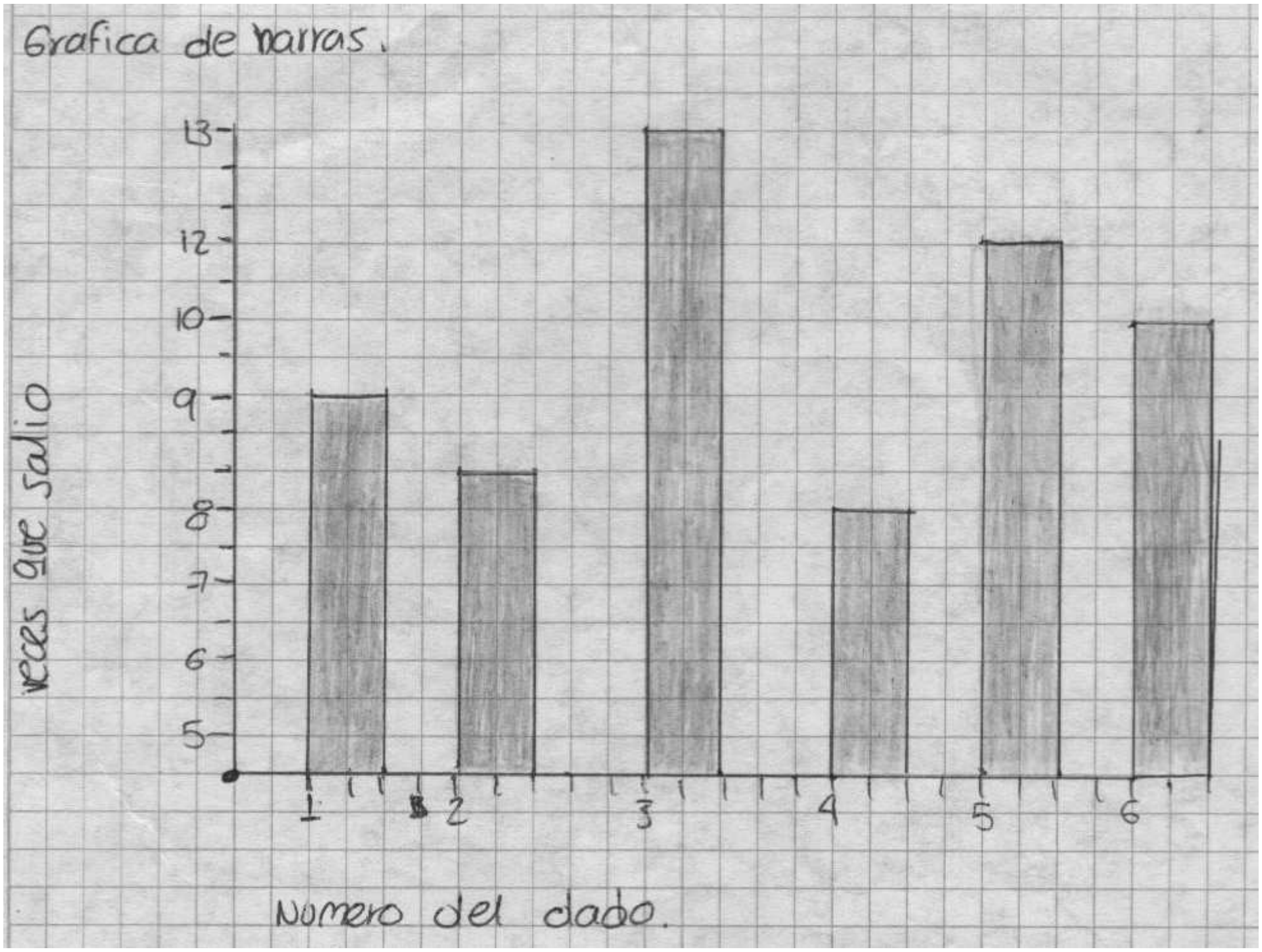
Si ahora el juego consistiera en lanzar un dado que tiene 8 caras.

13. ¿cuál sería la probabilidad de obtener cualquier resultado? Si se lanzara este dado 1600 veces.

muchas y muy diferentes. por que ~~son~~ es muy dificil de hacer que eso pase (que caiga en lo que uno quiere)

14. ¿en cuántas aproximadamente se obtendría el número 8?.....

unas 100 a 500


Grafica de barras.
veces que salio
13
12
10
9
8
7
6
5
1
2
3
4
5
6
Numero del dado.

Anexo 4. Taller 4. "Jugando con los dados II"

Nombre: ______________________________ fecha:__________

Este es un juego en el que intervienen dos dados, siendo el resultado, la suma de los números obtenidos al lanzar los dos dados. Si, por ejemplo, al lanzar los dados en uno de ellos sale 2 y en el otro sale 3, el resultado que interesa es la suma de los dos resultados, es decir, 5. Cada participante debe escoger uno de los resultados posibles de estas sumas y, escribirlo en un papel, se lanzan los dados y se hace la suma, quien haya escogido este resultado es el ganador.

1. ¿Cuántos jugadores pueden participar de este juego, si cada jugador sólo puede escoger una de las sumas posibles, es decir, solo habrá un ganador en cada lanzamiento?

2. ¿Cuáles son los resultados posibles de la suma de los resultados de los dos dados?

   Los resultados de la siguiente parte del juego, regístrelos en la tabla que aparece a continuación, donde en la primera fila aparecen los valores posibles de la suma de los dos dados. Cada equipo debe tener 11 jugadores, cada jugador toma la columna del número que escogió, y se ubica en la parte inferior. Paso seguido, se lanzan los dados y se suman los resultados, quien haya escogido la suma obtenida, avanza una casilla hacia arriba; coloreando o tachando la casilla a la cual avanza, para llevar el registro. El ganador del juego es el jugador que primero llegue a la META.

3. Antes de empezar a jugar, ¿cree que el juego es justo? o, por el contrario, cree que alguno o algunos de los jugadores tienen ventajas sobre los demás? ¿por qué?

4. ¿Cuál es la probabilidad que de ganar tiene cada participante en el juego?

   Jueguen hasta obtener un ganador.

META										
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

5. ¿Cuántos lanzamientos fueron necesarios para que hubiera un ganador?

6. ¿El compañero que ganó qué número había escogido? ______________

7. Escriba el orden en que quedaron los participantes, hágalo de mayor a menor de acuerdo al número de veces que se obtuvo el resultado escogido.

8. ¿Puede dar alguna razón que justifique el porqué del orden que se obtuvo al jugar?

9. Consigne la información de cada suma y el número de veces que se repitió, durante las veces que hubo que realizar el juego hasta obtener un ganador, en la siguiente tabla.

Sumas obtenidas											
Número de repeticiones											

10. Junten los resultados obtenidos con los del otro grupo y realicen una tabla como la de ustedes, pero de tal manera que quepan los resultados de ambos juegos.

META										
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

11. Al juntar los dos juegos, ¿cuál es el orden en que quedarían si estos datos respondieran a un solo juego donde el ganador sería la suma que primero se repitiera 20 veces?

12. ¿Qué explicación daría para el orden obtenido en la pregunta anterior?

13. Consigne la suma y el número de veces que se obtuvo cada una de ellas en la siguiente tabla, después de juntar los resultados de los dos grupos.

Sumas obtenidas											
Número de repeticiones											

TABLA No.1

14. Si tuviera que volver a jugar, escriba las primeras cuatro opciones (números) que escogería: _________________________. Explique el porqué de su escogencia.

15. Si tuviera que volver a jugar escriba cuatro números que serían los últimos que escogería:_________________________. Explique el porqué de su respuesta.

16. ¿Los resultados obtenidos eran “previsibles”? Es decir, existe alguna razón para pensar antes de jugar, que obtener como suma el número nueve es más probable que obtener el número 12?

17. ¿Teniendo en cuenta las posibilidades de cada dado, es posible saber cuáles son las posibilidades de obtener cada suma?

18. Llene la siguiente tabla.

Suma	No. de posibilidades de obtener cada suma
2	1
3	1
4	2
5	2
6	3
7	3
8	3
9	2
10	2
11	1
12	1

TABLA No. 2.

19. Escriba que relación existe entre la tabla No.1 y la tabla No.2.

20. Si se lanzaran los dados 360 veces, llene la siguiente tabla con el número aproximado de veces que crea usted que aparecería cada suma.

Sumas obtenidas											
Número de casos favorables											

21. Si se realiza el mismo juego pero con dados de 8 caras, marcadas con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Llene la siguiente tabla con las posibilidades de cada suma.

Sumas obtenidas											
Número de casos favorables											

22. Si se lanzaran los dados de 8 caras 640 veces, llena la siguiente tabla con el número aproximado de veces que aparecerá cada suma.

Sumas obtenidas											
Número de casos favorables											

TALLER No.2

E3

JUGANDO CON LOS DADOS No. 2.

NOMBRES:____

____

FECHA:____________________________

Este es un juego en el que intervienen dos dados, siendo los resultados, la suma de los números obtenidos al lanzar los dos dados. Si, por ejemplo, al lanzar los dados en uno de ellos sale 2 y en el otro sale 3, el resultado que interesa es la suma de los dos resultados, es decir, 5. Cada participante debe escoger uno de los resultados posibles de esta suma y, escribirlo en un papel, se lanzan los dados y se hace la suma, quien haya escogido este resultado es el ganador.

1. ¿Cuántos jugadores pueden participar de este juego, si cada jugador sólo puede escoger una de las sumas posibles, es decir, solo habrá un ganador en cada lanzamiento? 5

2. ¿Cuáles son los resultados posibles de la suma de los resultados de los dos dados? 12→10,9,11,8,7

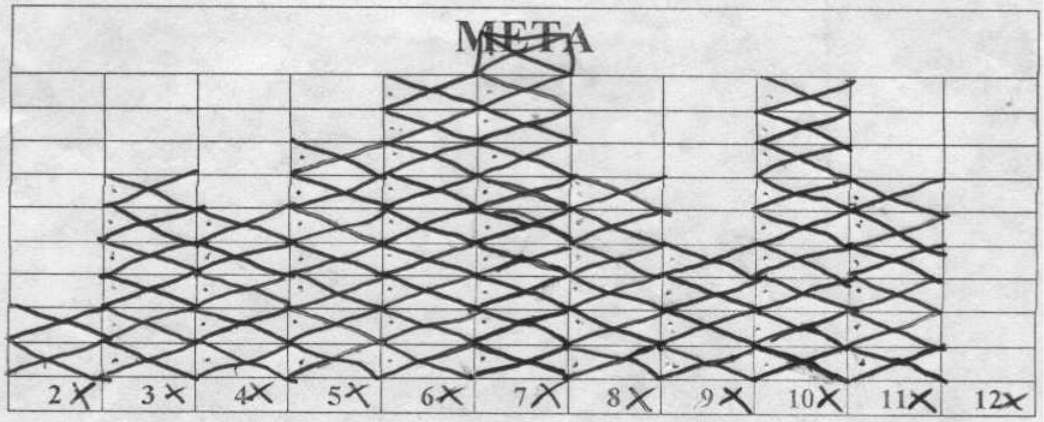
El juego lo realizamos sobre una tabla como la que aparece a continuación, donde en la primera fila aparecen los valores posibles de la suma de los dos dados. Cada equipo debe tener 11 jugadores, cada jugador toma la columna del número que escogió, y se ubica en la parte inferior. Paso seguido, se lanzan los dados y se suman los resultados, quien haya escogido esta suma, avanza una casilla hacia arriba; coloreando o tachando la casilla a la cual avanza, para llevar el registro. El ganador del juego es el jugador que primero llegue a la META.

3. Antes de empezar a jugar, ¿crees que el juego es justo? o, por el contrario, crees que alguno o algunos de los jugadores tienen ventajas sobre los demás? ¿por qué? No almenos de que haga trampa

4. ¿Cuál es la probabilidad que de ganar tiene cada participante en el juego?

Si a la suerte

Jueguen hasta obtener un ganador.



5. ¿Cuántos lanzamientos fueron necesarios para que hubiera un ganador? 64

6. ¿El compañero que ganó qué número había escogido? 7

7. Escriba el orden en que quedaron los participantes, hágalo de mayor a menor de acuerdo al número de veces que se obtuvo el resultado escogido.

① 7:10 ④ 3,8 y 11:6 ⑦ 2:2
② 5:7 ⑤ 4:5
③ 6 y 10:9 ⑥ 9:4

8. ¿Puedes dar alguna razón que justifique el porqué del orden que se obtuvo al jugar? NO Por que es a la suerte

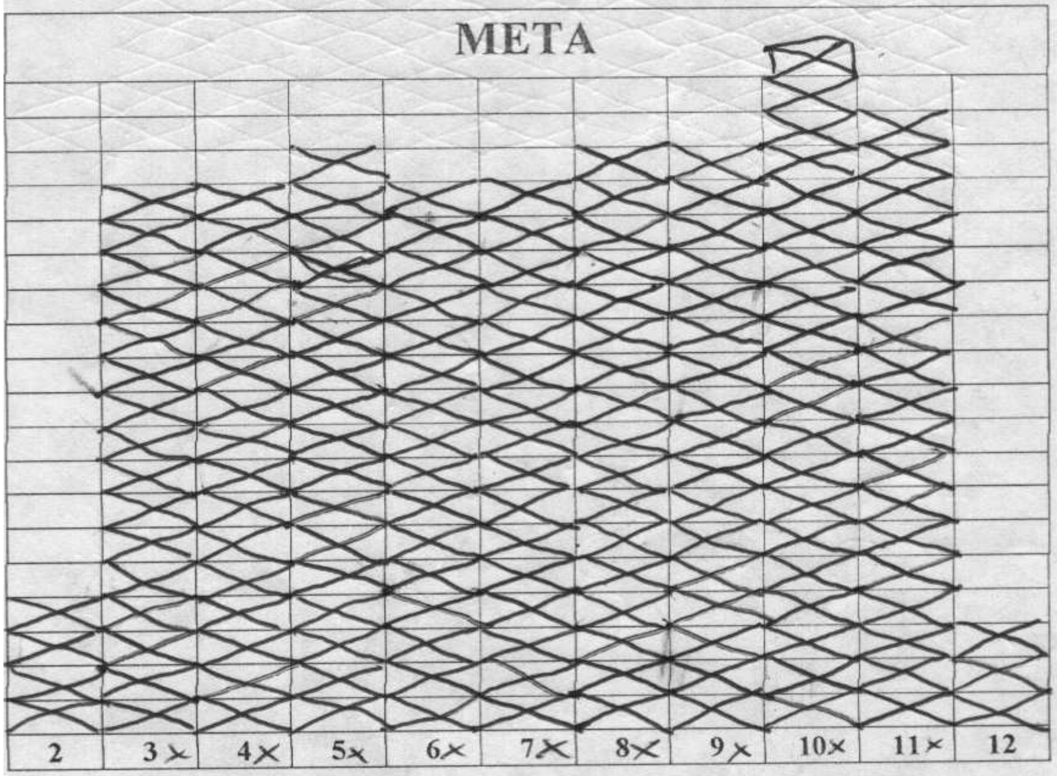
9. Consigne la información, de cada suma y el número de veces que se repitió, durante las veces que hubo que realizar el juego hasta obtener un ganador, en la siguiente tabla.

Suma obtenida.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de *repeticiones.*	2	6	5	7	9	10	6	4	9	6	0

40 5 10
42 360
50 256

14

10. Junten los resultados obtenidos con los del otro grupo y realicen una tabla como la de ustedes, pero de tal manera que quepan los resultados de ambos juegos.



11. Al juntar los dos juegos, ¿cuál es el orden en que quedarían si estos datos respondieran a un solo juego donde el ganador sería el número que primero se obtuviera 20 veces? ① 10: 20 ④ 3, 4, 6 Y 7: 16

② 11: 18 ⑤ 2: 4

③ 9, 8 Y 5: 17 ⑥ 12: 3

12. ¿Qué explicación darías para el orden obtenido en la pregunta anterior?

mucha suerte

6
20 RtA/160 lanzamientos
18
17
17
17
16

13. Consigne la suma y el número de veces que se obtuvo cada una de ellas en la siguiente tabla, después de juntar los resultados de los dos grupos.

Suma obtenida.	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de repeticiones.	4	16	16	17	16	16	17	17	20	18	3

TABLA No. 1

14. Si tuvieras que volver a jugar, escribe las primeras cuatro opciones (números) que escogerías: 10, 11, 3, 7. Explica el porqué de tu escogencia.

Por que fueron los numeros que mas puntaje obtuvieron

15. Si tuvieras que volver a jugar escribe cuatro números que serían los últimos que escogerías: ~~[illegible]~~ 2, 12, 6, 4. Explica el porqué de tu respuesta.

Por que fueron los numeros que menos puntaje obtuvieron

16. ¿Los resultados obtenidos eran "previsibles"? Es decir, existe alguna razón para pensar antes de jugar, que obtener como suma el número nueve es más probable que obtener el número 12? NO

Por que es de mucha suerte

17. Teniendo en cuenta las posibilidades de cada dado, es posible saber cuáles son las posibilidades de obtener cada suma? NO

Por que es de suerte

18. Llene la siguiente tabla.

Suma	Número de Posibilidades de Obtener Cada Suma.
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1

TABLA No. 2

5=3+2, 2+3, 1+4, 4+1,

6=3+3, 5+1, 1+5, 4+2, 2+4,

19. Escriba que relación existe entre la tabla No. 1 y la tabla No. 2.

que en la tabla numero 1 gano el numero 10
y en la tabla numero 2 el numero que mas Posibilidades
de salir es el 7

20. Si se lanzaran los dados 360 veces, llene la siguiente tabla con el número aproximado de veces que crea usted que aparecería cada suma.

Suma	2	3	A	J	6	7	8	9	10	11	12
Número aproximado de veces que saldría.	20	21	25	30	32	104	32	30	25	21	20

20. Si se realiza el mismo juego pero con dados de 8 caras, marcadas con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Llene la siguiente tabla con las posibilidades de cada suma.

suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Número de posibilidades de obtener *cada suma*	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1

21. Si se lanzaran los dados de 8 caras 640 veces, llena la siguiente tabla con el número aproximado de veces que aparecerá cada suma.

suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	B	14	15	16
Número aproximado de veces que aparecerá cada suma.	20	24	30	32	37	40	42	190	42	40	37	32	30	24	20

14= 7+7, 8+6, 6+8,

13= 8+5, 5+8, 7+6, 6+7

12= 6+6, 7+5, 5+7, 4+8, 8+4

11= 8+3, 3+8, 7+4, 4+7, 5+6, 6+5

10= 5+5, 6+4, 4+6, 3+7, 7+3, 2+8, 8+2

9= 5+4, 4+5, 3+6, 6+3, 2+7, 7+2, 1+8, 8+1

8= 4+4, 5+3, 3+5, 2+6, 6+2, 1+7, 7+1

7= 5+2, 2+5, 1+6, 6+1, 4+3, 3+4

6= 3+3, 1+5, 5+1, 2+4, 4+2

5= 3+2, 2+3, 1+4, 4+1

4= 2+2, 3+1, 1+3,

3= 1+2, 2+1

2= 1+1

Noviembre 7

Sumas	farma de obtener
~~1~~	
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	7
9	8
10	7
11	6
12	5
13	4
14	3
15	2
16	1

4= 2+2, 3+1, 1+3

5 = 3+2, 2+3, 1+4, 4+1

6 = 3+3, 2+4, 4+2, 1+5, 5+1

7 = 4+3, 3+4, 2+5, 5+2, 1+6, 6+1

8 = 4+4, 3+5, 5+3, 2+6, 6+2, 1+7, 7+1

9 = 5+4, 4+5, 3+6, 6+3, 2+7, 7+2, 1+8, 8+1

10 = 5+5, 8+2, 2+8, 3+7, 7+3, 6+4, 4+6